



DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E FINANZA

CATTEDRA DI ECONOMIA E GESTIONE DEGLI INTERMEDIARI FINANZIARI
(CORSO PROGREDITO)

**MISURAZIONE DEL RISCHIO DI TASSO DI INTERESSE
ATTRAVERSO I MODELLI VaR: UN'ANALISI EMPIRICA SU UN
CAMPIONE DI BANCHE ITALIANE**

RELATORE

Prof. Curcio Domenico

CANDIDATO

Mauro Di Pietro

Matr. 649191

CORRELATORE

Prof. Cybo-Ottone Alberto Adolfo

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

INDICE

INTRODUZIONE.....	8
-------------------	---

PARTE I – UN QUADRO DI SINTESI DELLA MODELLISTICA DI RIFERIMENTO

1. RISKMETRICS.....	17
1.1. Le proprietà statistiche dei rendimenti finanziari	
1.2. Le ipotesi di base del modello	
1.3. La stima e previsione della volatilità	
1.4. Il calcolo VaR	
1.5. Il BackTesting	
2. I MODELLI A ETEROSCHEDASTICITÀ CONDIZIONATA.....	29
2.1. ARCH	
2.2. GARCH	
2.3. La stima	
2.4. La previsione	
2.5. Il collegamento tra GARCH e RiskMetrics	
2.6. GARCH Multivariati	
3. L'EVOLUZIONE ED I LIMITI DEI MODELLI VaR: I MODELLI DI SIMULAZIONE E L'IPOTESI DI DISTRIBUZIONE NORMALE.....	39
3.1. L'Ipotesi di Normalità	
3.2. I modelli VaR a confronto	
3.3. L'approccio ibrido	
3.4. Le implementazioni del modello di simulazione storica	

3.5. Le misure coerenti di rischio

4. L'EXPECTED SHORTFALL.....	53
4.1. VaR vs ES	
4.2. Le proprietà dell'ES come misura coerente di rischio	
4.3. L'Extreme Value Theory	

PARTE II – LA NORMATIVA DI VIGILANZA PRUDENZIALE

5. LA DISCIPLINA PER LE BANCHE ITALIANE SUL RISCHIO DI MERCATO.....	60
5.1. Le attuali fonti normative	
5.2. Il Patrimonio di Vigilanza e TIER 3	
5.3. Il rischio di tasso di interesse nel banking book	
6. IL METODO STANDARD DI BASILEA.....	68
6.1. Il rischio di posizione dei titoli di debito	
6.2. Il metodo basato sulla scadenza	
6.3. Il metodo basato sulla duration	
6.4. I limiti dell'approccio standard	
7. I REQUISITI PATRIMONIALI TRAMITE MODELLI INTERNI.....	81
7.1. I modelli interni	
7.2. I criteri per l'individuazione dei fattori di rischio	
7.3. Il calcolo VaR	
7.4. Il BackTesting	
7.5. Il calcolo del requisito patrimoniale	
7.6. I modelli interni e la metodologia standardizzata	
7.7. Lo sVaR	

PARTE III – LE METODOLOGIE UTILIZZATE

8. LE METODOLOGIE DI CALCOLO DEL VaR.....	91
8.1. Il metodo varianze-covarianze	
8.2. Il metodo varianze-covarianze per titoli di debito	
8.3. La simulazione storica	
8.4. La simulazione storica per titoli di debito	
8.5. L'holding period decadale	
9. LE METODOLOGIE DI CALCOLO DI VOLATILITÀ E CORRELAZIONI.....	100
9.1. Le medie mobili semplici (SMA)	
9.2. Le medie mobili esponenziali (EWMA)	
9.3. Il modello O-GARCH	
10. LE METODOLOGIE DI CALCOLO DELL'ES.....	112
10.1. La formula parametrica	
10.2. L'ES dalla simulazione storica	

PARTE IV – RISULTATI ED EVIDENZE EMPIRICHE

11. DESCRIZIONE DEL CAMPIONE.....	116
11.1. Spostamento dal Trading book verso il Banking book	
12. RISK FACTORS.....	124
12.1. Key Rates	
12.2. Variazioni giornaliere come fattori di rischio	
12.3. Ipotesi di Normalità dei Key Rates	
12.4. Stime delle volatilità	

12.5.	Stime delle correlazioni	
12.6.	Duration Modificate	
12.7.	Risk factors della tecnica delle osservazioni sovrapposte	
13.	STIME VaR & ES.....	141
13.1.	Risultati sul Trading book	
13.2.	Risultati sul Banking book	
14.	BACKTESTING.....	148
14.1.	Perdite superiori al VaR	
15.	STRESSED VaR.....	155
	CONCLUSIONI.....	160
	BIBLIOGRAFIA.....	166
	APPENDICE.....	175

A Nguyen

INTRODUZIONE

Lo scopo di questa Tesi è la misurazione del rischio di tasso di interesse sul portafoglio titoli di debito, presente nel trading book e nel banking book, attraverso i modelli Value-at-Risk (VaR) più diffusi. I risultati saranno analizzati dal punto di vista tecnico-statistico e contestualizzati attraverso un'ottica di regolamentazione di mercato.

Il VaR è una misura di rischio di un portafoglio di attività finanziarie che fornisce la seguente informazione: qual è la probabilità che la perdita del portafoglio superi un certo ammontare pari al VaR stesso.

$$\text{Prob (Loss > VaR)} = p\%$$

Ad esempio, se il VaR rappresenta la perdita massima nel 99% dei casi, allora la probabilità che la perdita sia maggiore del VaR stesso è pari all'1%.

Il banking book (portafoglio bancario) è una delle due macro-categorie contabili in cui rientrano le attività degli enti finanziari. Esso consiste in un portafoglio di proprietà in cui sono collocate attività con le quali vi è una relazione di lungo periodo e può contenere strumenti detenuti per la vendita (Available for Sale o AFS), assets detenuti fino a scadenza (Held to Maturity o HTM), strumenti che rappresentano finanziamenti e crediti e/o titoli obbligazionari (Loans & Receivable o L&R) come obbligazioni non quotate in mercato attivo.

Le attività che non sono contenute nel banking book vengono riferite generalmente al trading book (portafoglio di negoziazione)¹. Questo portafoglio contiene tutte quelle attività che vengono acquistate per essere negoziate, cioè tutti quegli assets che la banca ha in portafoglio allo scopo di trarre un profitto dalle fluttuazioni di breve termine dei prezzi.

Il principio generale degli standard contabili internazionali (IAS) può essere così riassunto: le variazioni di valore delle attività finanziarie detenute ai fini di negoziazione, valutate al fair value, vanno ad influenzare il reddito di esercizio, dunque devono essere imputate a conto economico. Differentemente, le variazioni di valore degli assets del banking book devono essere imputate ad una riserva di valutazione del patrimonio netto. In questo modo si evita di trasferire sul reddito

¹ Il limite che separa trading book e banking book non è mai stato definito formalmente, bensì deriva da vigilanza e normative contabile.

dell'anno la volatilità generata dalla valutazione al fair value del banking book. A conto economico si iscrivono solo gli interessi maturati (ed eventuali dividendi nel caso delle azioni).

Sia il banking book che il trading book sono esposti al rischio di variazioni dei tassi di mercato in quanto un aumento dei tassi di interesse comporta una riduzione del valore dei titoli di debito presenti nell'attivo. Le variazioni di valore del trading book modificano il patrimonio netto, mentre le perdite sul trading book riducono il risultato d'esercizio. Dunque una variazione nei tassi di mercato incide sia sulla redditività che sul valore delle banche.

Inoltre una delle principali funzioni svolte dal sistema finanziario è rappresentata dalla trasformazione delle scadenze, di solito con duration media dell'attivo maggiore di quella del passivo; un aumento del costo connesso al rifinanziamento porta una riduzione del margine di interesse.

È vero che generalmente la misurazione del rischio di mercato viene identificata con l'analisi del solo portafoglio di negoziazione, ma è anche vero che una variazione dei tassi di interesse impatta anche sullo stato patrimoniale della banca.

Il rischio di mercato consiste nella possibilità di variazioni sfavorevoli del valore di mercato di uno strumento finanziario (prezzi azionari, prezzi di materie prime, tassi di interesse, tassi di cambio, volatilità di tali variabili). Tra i rischi di mercato, il rischio di interesse è il più problematico dal punto di vista di vigilanza prudenziale: ci sono delle differenze tra il trading ed il banking book che rendono questo un tema molto delicato. Per prima cosa i due portafogli sono soggetti a trattamenti contabili differenti, in secondo luogo la composizione del trading book cambia molto frequentemente mentre quella del banking book tende a rimanere stabile. Il Comitato resta dell'opinione che il rischio di tasso di interesse nel banking book sia un rischio potenzialmente significativo che richiede un'adeguata copertura patrimoniale.

Per questi motivi, il Comitato è pervenuto alla conclusione che sia più appropriato trattare il rischio di tasso di interesse nel banking book nel quadro del secondo pilastro dello Schema. Le autorità di vigilanza che riscontrino una sufficiente omogeneità fra le banche della propria giurisdizione riguardo alla natura e ai metodi di monitoraggio e di misurazione di tale rischio potrebbero stabilire un apposito requisito patrimoniale minimo obbligatorio. Inoltre, in sede di revisione delle linee guida in materia, i modelli interni delle banche sono stati ritenuti il principale strumento per misurare il rischio di tasso di interesse nel banking book.

Questa Tesi si focalizza sulla gestione del rischio di tasso di interesse sulle esposizioni delle banche italiane verso i titoli di debito, utilizzando principalmente i modelli VaR. Lo studio si svolgerà nel seguente modo:

- Si prenderà un campione di 10 banche italiane²; essendo l'Italia uno stato membro, le banche nel campione saranno soggette alla regolamentazione di Basilea. L'analisi si focalizza sulla tipica figura italiana di banca commerciale: medie dimensioni, legata fortemente al territorio locale, ruolo dominante dei depositi al dettaglio nella composizione delle passività e prevalenza del credito commerciale alle imprese nell'attivo. In banche di questo genere il rapporto tra raccolta di depositi e erogazione del credito tende a essere stabile nel tempo e omogeneo geograficamente.
- Si considereranno i bilanci al 31/12/2012, dunque anche se ora vige Basilea III, questa analisi si muove anche nel quadro normativo di Basilea II. Ad esempio, verrà utilizzato il TIER 3 anche se ad oggi è stato eliminato dai nuovi Accordi.
- L'esposizione del trading book al rischio di tasso verrà analizzata con il metodo standard di Basilea basato sulla scadenza e con i modelli VaR, rispettando la disciplina sul rischio di mercato prevista dagli Accordi.
- L'esposizione del banking book al rischio generico di tasso verrà analizzata con i modelli VaR in quanto il Comitato ha stabilito che i modelli interni sono, ad oggi, l'approccio migliore per misurare l'effettivo rischio di tasso di interesse nel banking book e per rispettare la decisione dello stesso Comitato di trattare questo rischio nel quadro del secondo pilastro. Inoltre, anche in questo caso, la performance dei modelli interni sarà confrontata con il metodo standard basato sulla scadenza³.

Tra i modelli VaR, verranno utilizzati sia l'approccio parametrico (o "varianze-covarianze") sia il metodo della simulazione per testare gli effetti dell'ipotesi di distribuzione Normale dei fattori di mercato, in particolare:

- Il modello parametrico con volatilità e correlazione stimate attraverso media mobile semplice (SMA).

² UBI Banca, Banca Popolare Vicenza, Veneto Banca, Banca Popolare Milano, Banca Carige, Banca Marche, Banca Etruria, Cassa di risparmio di Bolzano, BCC di Roma, Banca Popolare Ravenna.

³ In realtà, il metodo basato sulla scadenza non è l'approccio standard predefinito dal Comitato per il banking book, bensì solo per il trading book. Ad ogni modo, verrà applicato ad entrambi i portafogli con lo scopo di avere un criterio uniforme per confrontare i risultati ottenuti.

- Il modello parametrico con volatilità e correlazione stimate attraverso livellamento esponenziale (EWMA/RiskMetrics).
- Il modello parametrico con volatilità e correlazione stimate attraverso un GARCH multivariato: l'Orthogonal-GARCH (O-GARCH).
- Il modello di simulazione storica.

Per quanto riguarda i risk factors, trattandosi di titoli di debito, sarà necessario eseguire il mapping delle posizioni ai key rates relativi ai punti medi delle 7 fasce temporali delle matrici regolamentari⁴ pubblicate nei bilanci. Dunque si considera la voce “Titoli di debito” come se fosse un portafoglio di zero-coupon bonds, uno per ogni fascia, con data di scadenza pari al punto medio della rispettiva fascia temporale. Poiché non si dispone dei tassi d'interesse relativi ai punti medi delle fasce, bisognerà ricavarli dai tassi zc della term structure. Dopo aver mappato i vari cash flow alle relative duration⁵ sarà possibile calcolare il VaR di ciascun zcb e infine dell'intero portafoglio, cioè il VaR dell'esposizione complessiva del trading/banking book al rischio di interesse.

Le serie storiche dei key rates, relativi ai punti medi delle 7 fasce temporali, saranno ricavate dalle serie storiche dei tassi della term structure attraverso l'interpolazione lineare, in particolare:

- I tassi SWAP dell'Eurozona da 1 a 30 anni, con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (250 osservazioni per tasso).
- I tassi EURIBOR da 1 mese a 12 mesi, con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (250 osservazioni per tasso).
- La serie storica del tasso EONIA (a vista), con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (250 osservazioni per tasso).

I fattori di rischio delle posizioni su titoli di debito sono le variazioni dei tassi di interesse, in quanto cambiamenti della curva dei tassi di interesse possono determinare rischi per i bilanci bancari sia attraverso cambiamenti del valore netto tra attività e passività, sia attraverso gli effetti sul conto

⁴ A vista, fino a 3 mesi, da 3 mesi a 6 mesi, da 6 mesi a 1 anno, da 1 anno a 5 anni, da 5 anni a 10 anni, oltre 10 anni.

⁵ La Duration di un ZCB è la maturity, in questo caso il punto medio della fascia.

economico. Dunque si lavorerà direttamente con le serie storiche delle variazioni giornaliere dei 7 key rates verificatesi durante il 2012.

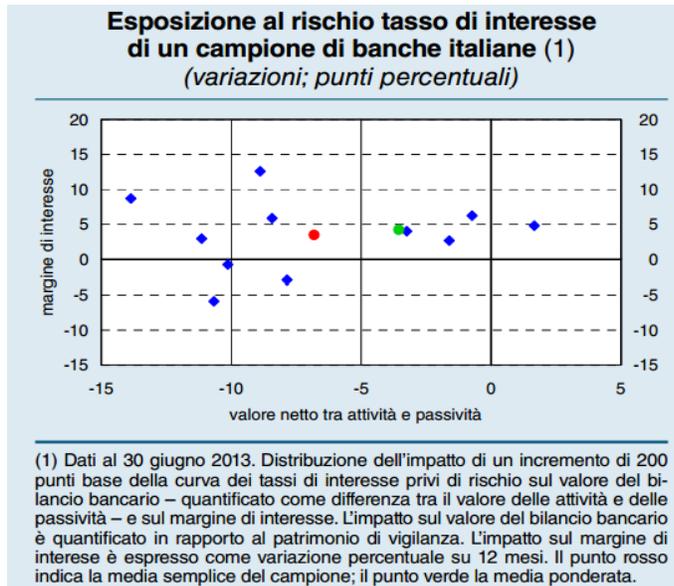
Coerentemente con la regolamentazione, si calolerà il VaR con un livello di confidenza del 99% ed ipotizzando un holding period di 10 giorni. I risultati verranno confrontati ipotizzando anche un periodo di detenzione pari ad 1 giorno per misurare la performance della tecnica delle osservazioni sovrapposte con cui verranno effettuati i calcoli VaR su base decadale e saranno sottoposti a backtesting.

Questo studio andrà oltre il semplice calcolo del VaR: verrà stimato anche l'Expected Shortfall (ES) sia del trading book che del banking book e si utilizzerà la tecnica dello stressed-VaR (sVaR) come stress test. Il Comitato di Basilea nel 2009 ha proposto l'introduzione di una nuova misura di rischio: lo sVaR consiste in uno stress test che prevede l'applicazione dei modelli VaR tradizionali considerando, come campione storico di osservazioni, un periodo di forte stress di mercato.

Il VaR fornisce la frequenza con cui le perdite superano un certo ammontare, ma non specifica di quanto, cioè non fornisce la dimensione delle perdite superiori al VaR stesso. L'ES nasce per superare questo problema, dunque può essere considerato come un VaR condizionato. In altre parole il VaR risponde alla domanda "*quanto male possono andare le cose?*", mentre l'ES risponde ad una domanda diversa: "*se le cose vanno male, quanto ci si aspetta di perdere?*". Dunque l'expected shortfall non è altro che il valore atteso delle perdite superiori al VaR, una media condizionata che non considera tutta la distribuzione delle perdite, ma solo quelle superiori al VaR.

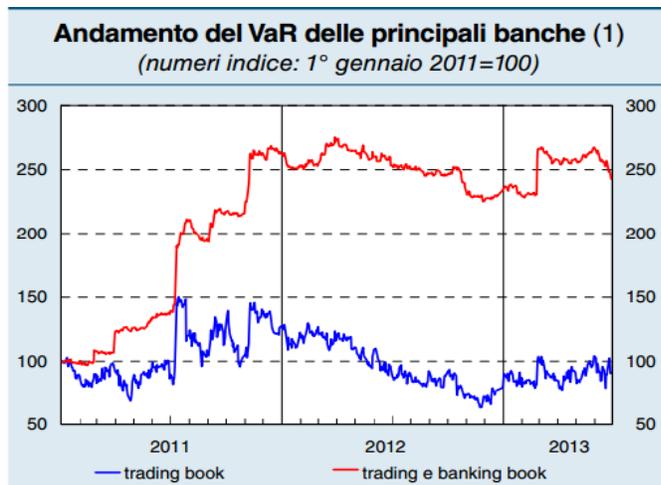
Sia il rischio di interesse che il market risk in generale sono temi molto delicati e discussi in ambito di risk management e vigilanza bancaria. Per questo motivo, il Comitato e Banca d'Italia hanno già eseguito studi simili: mediante un'indagine ad hoc del Comitato di Basilea, è stato chiesto a 11 tra i gruppi italiani di maggiore dimensione di valutare gli effetti di bilancio di un innalzamento parallelo di 200 punti base della curva dei rendimenti privi di rischio. Per le banche esaminate lo spostamento della curva causerebbe una perdita pari in media al 6,8% del patrimonio di vigilanza complessivo, significativamente inferiore alla soglia di attenzione definita dal Comitato di Basilea (20%). Per la maggior parte dei gruppi l'impatto negativo in termini patrimoniali verrebbe parzialmente compensato da un incremento del margine di interesse nei dodici mesi successivi allo shock (3,5% in media), che per il complesso del campione permetterebbe di assorbire circa un quarto dell'impatto patrimoniale negativo. Le banche hanno stimato anche l'impatto di un incremento di 100 punti base della curva dei rendimenti dei titoli di Stato italiani, prendendo in

considerazione un portafoglio complessivo del valore di 194 miliardi con una durata media di 4,1 anni. In questo scenario il deprezzamento dei portafogli (pari al 3,4 per cento) ammonterebbe al 4,0 per cento del patrimonio di vigilanza.



Fonte: Banca d'Italia, Rapporto sulla stabilità finanziaria, n.6, novembre 2013.

Per quanto riguarda il VaR sul rischio di mercato complessivo:



(1) Medie ponderate per la dimensione dei portafogli dei singoli intermediari. Gli indici sono costruiti in maniera tale da riflettere l'andamento dei VaR riferiti a tutte le posizioni (titoli e derivati) iscritti in bilancio al fair value (linea rossa) e alla sola componente iscritta nel portafoglio di trading (linea blu). Una diminuzione segnala una riduzione del rischio.

Fonte: Banca d'Italia, Rapporto sulla stabilità finanziaria, n.6, novembre 2013.

Si nota che il rischio di mercato è aumentato durante il 2011 per poi iniziare un trend decrescente durante il 2012. Nel 2013, il VaR delle banche più attive sui mercati finanziari relativo al complesso dei portafogli valutati al fair value (nel banking e nel trading book) è sostanzialmente stabile; il potenziale aumento dei rischi indotto dai forti investimenti in titoli pubblici è stato, infatti, quasi integralmente compensato dal calo della volatilità dei rendimenti.

La novità apportata da questa Tesi nell'ambito del rischio di mercato sta nella composizione del campione. Infatti, non si considerano i più grandi gruppi bancari come Unicredit e Intesa, bensì 10 banche commerciali territoriali. Inoltre questa analisi non si limiterà solo alla stima del VaR ma si estenderà anche all'ES e lo sVaR.

La Tesi è strutturata in quattro parti:

- Nella prima viene descritta la modellistica di riferimento, cioè vengono riassunti i risultati più importanti ottenuti dalla letteratura in merito ai modelli VaR ed all'ES, a partire dallo storico documento tecnico di RiskMetrics.
- Nella seconda parte si contestualizzano gli Accordi di Basilea di vigilanza bancaria riguardo il patrimonio di vigilanza, il calcolo del VaR, il rischio di mercato del trading book ed il rischio di interesse del banking book.
- Nella terza parte verranno presentate in modo teorico e dettagliato le metodologie utilizzate in questo specifico modello per calcolare il VaR, l'ES, la volatilità e la matrice di correlazione dei fattori di rischio.
- Nella quarta parte, infine, verranno esposte le stime, i risultati e le principali evidenze empiriche di questo studio.

PARTE I
UN QUADRO DI SINTESI DELLA
MODELLISTICA DI RIFERIMENTO

CAPITOLO 1

RISKMETRICS⁶

Alla fine degli anni '80, si concretizza il bisogno di una misura di rischio sintetica ed efficace ed ad essere esposti erano, non solo le banche con posizioni multiple sugli stessi asset, ma anche i matematici accademici avevano abbastanza posizioni aperte da preoccuparsi sulle perdite future.

A J.P.Morgan va il merito di aver reso il VaR una misura comunemente accettata. Il CEO, Dennis Weatherstone, necessitava di una misura riassuntiva dell'effettiva esposizione della banca, che potesse essere davvero utile al top management. Ciò che cercava era qualcosa che rappresentasse l'esposizione complessiva del trading book in modo molto più semplice e sintetico di quanto potessero fare le "greche". Nacque così il "4:15 report" (il primo rapporto sul VaR) che riassumeva tutto il rischio della banca in un'unica pagina, disponibile 15 minuti dopo la chiusura dei mercati alle 16:00⁷. I primi report risalgono intorno al 1990, ma anche altre banche stavano sviluppando metodologie simili; così nel 1993 il VaR venne comunemente accettato come misura di rischio.

Calcolare tutte le stime necessarie (varianze, covarianze, correlazioni...) era molto complesso e dispendioso, dunque J.P.Morgan, nel 1994, decise di mettere a disposizione una versione semplificata del suo sistema, che chiamò RiskMetrics. Questa conteneva varianze e covarianze per un numero molto elevato di variabili di mercato e fu accompagnato da un famoso paper tecnico su RiskMetrics, sviluppato insieme a Reuters.

Nel 1996 è stato creato il business indipendente del RiskMetrics Group, che successivamente sviluppò CreditMetrics (per le esposizioni creditizie) e CorporateMetrics (per le esposizioni delle società non finanziarie).

Basilea II si riferisce al VaR come misura del rischio di mercato, in alternativa ad un più semplice metodo standard, per il calcolo dei requisiti patrimoniali. Infatti, dopo un primo lavoro a fini di consultazione del 1993, si è riunito un comitato di studio che nel 1994 ha effettuato un test empirico affidando ad una serie di banche il calcolo del VaR di un identico portafoglio di prova secondo i loro modelli interni. Questo lavoro è servito al comitato per analizzare i modelli VaR ed incorporare i modelli interni negli accordi di Basilea.

⁶ J. P. MORGAN e REUTERS (1996)

⁷ Hull (2012)

Il documento tecnico di RiskMetrics può essere suddiviso ed analizzato in 5 parti:

- 1) Proprietà statistiche dei rendimenti finanziari
- 2) Ipotesi di base del modello
- 3) Stima e Previsione della volatilità
- 4) Calcolo del VaR
- 5) BackTesting

1.1. Le proprietà statistiche dei rendimenti finanziari

Le proprietà statistiche dei financial returns, osservabili empiricamente, possono essere così riassunte:

- I rendimenti finanziari hanno una distribuzione leptokurtica, cioè con code più spesse e picchi più alti rispetto a una Normale.
- I rendimenti hanno media nulla.
- I rendimenti sono tra loro incorrelati, ma i rendimenti al quadrato sono fortemente correlati.
- I rendimenti sono caratterizzati da eteroschedasticità.
- Sul mercato si verificano fenomeni di volatility clustering, cioè periodi con persistenti picchi di alta volatilità.

Osservando il comportamento delle serie storiche dei rendimenti degli strumenti finanziari, si riscontrano molte caratteristiche empiriche che non verrebbero colte ipotizzando semplicemente distribuzioni teoriche, quali una Normale o t-Student. La media dei rendimenti è zero, dunque si può dire che in media il prezzo del titolo non varia. Questo è coerente con l'ipotesi di Mercati Efficienti⁸, secondo cui il valore atteso in t-1 del prezzo di un asset al tempo t è esattamente il valore dell'asset al tempo t-1:

$$E [P_t \mid F_{t-1}] = P_{t-1}$$

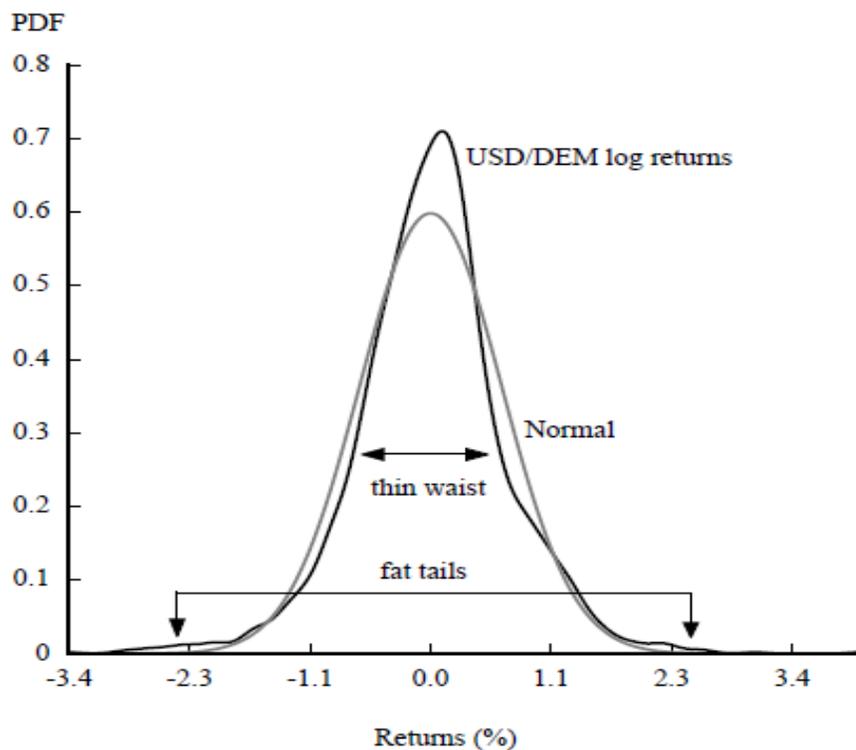
⁸ Fama, E. F. (1965)

dove:

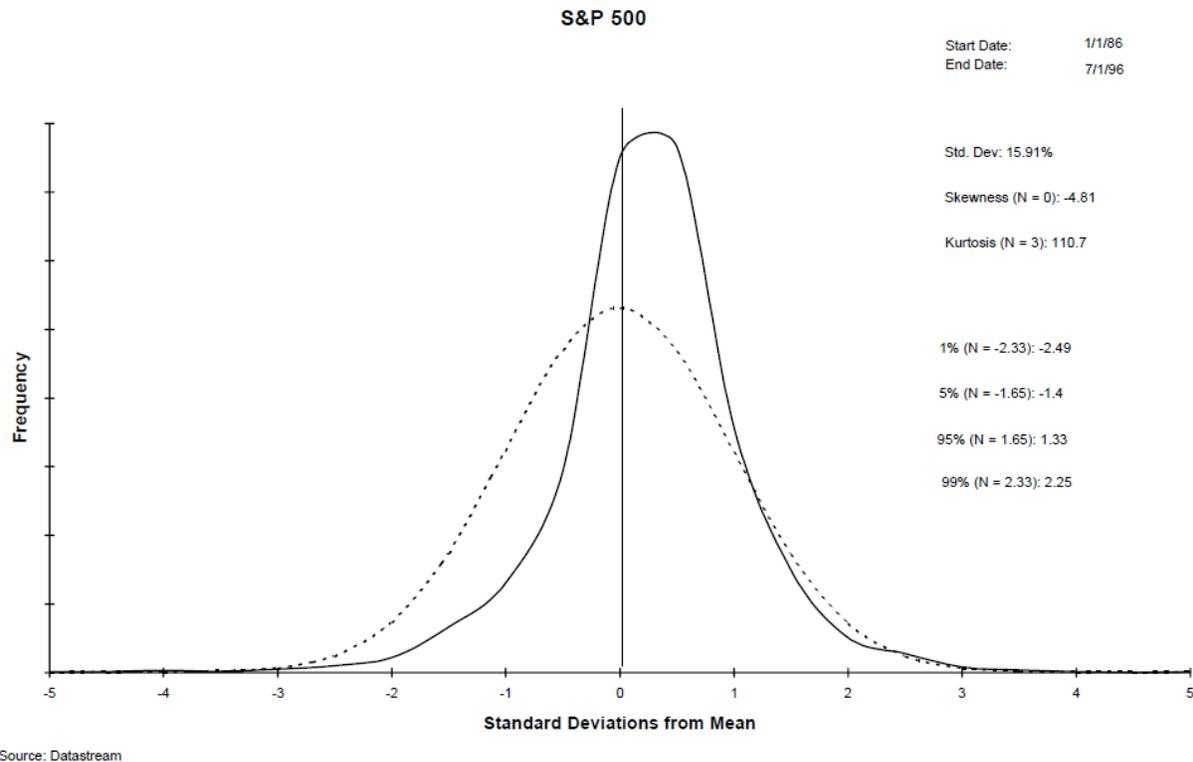
- F_{t-1} è il set informativo di mercato che tutti gli agenti possiedono.

È riscontrabile empiricamente che i rendimenti non si distribuiscono in modo Normale, gli eventi estremi si verificano con maggiore frequenza (code della distribuzione più spesse) ed anche i picchi sono più probabili rispetto a quanto previsto utilizzando una distribuzione Normale. Queste sono le caratteristiche di una distribuzione leptokurtica.

Leptokurtotic vs. normal distribution



Fonte: J.P. Morgan e Reuters



Ad ogni modo, in letteratura si sfrutta spesso l'ipotesi semplificatrice di distribuzione Normale. In particolare si ipotizza che la distribuzione condizionata dei rendimenti sia una Normale con media nulla e varianza non costante:

$$\mathbf{r}_t \mid \mathbf{F}_{t-1} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma_t^2)$$

o nel caso multivariato

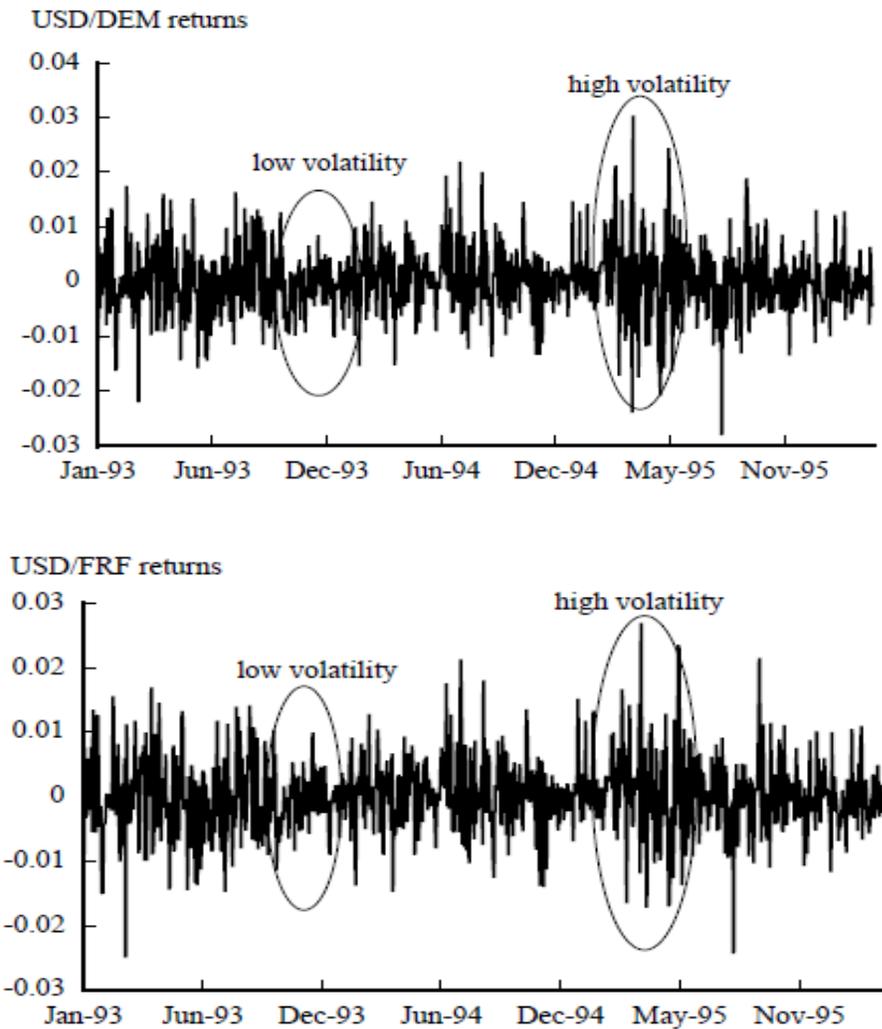
$$\mathbf{r}_t \mid \mathbf{F}_{t-1} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$$

dove:

- \mathbf{r}_t è il vettore dei rendimenti al tempo t ;
- $\mathbf{0}$ è il vettore delle medie nulle;
- \mathbf{H}_t è la matrice simmetrica di varianza-covarianza condizionata dinamica al tempo t ;
- σ_t^2 è la varianza condizionata al tempo t di un singolo asset.

È possibile dimostrare⁹ che la serie storica dei rendimenti non è autocorrelata, in quanto ha una distribuzione incondizionata puramente stocastica, come un White-Noise¹⁰ o una MDS (differenza di martingala), ma la serie dei rendimenti al quadrato presenta una forte autocorrelazione. Questo implica che i rendimenti non sono affatto indipendenti tra loro, in quanto correlati.

Tutti questi fatti stilizzati sono utili per spiegare il fenomeno del volatility clustering:



Fonte: J.P.Morgan e Reuters

⁹ Bollerslev, T. (1986)

¹⁰ Infatti sia nel modello RiskMetrics che negli ARCH e GARCH, i rendimenti vengono modellati con un white noise.

Sul mercato si verificano periodi di bassa volatilità e periodi di alta volatilità che influiscono in modo persistente sulla volatilità futura. Dunque si può dire che i rendimenti non sono correlati, ma le loro volatilità lo sono. Per questo motivo il modello RiskMetrics si focalizza sulla previsione della volatilità invece che dei rendimenti: questi sono incorrelati ed hanno una media nulla, invece la loro varianza mostra persistenza, dunque prevedibilità.

1.2. Le ipotesi di base del modello

Il rischio è spesso misurato in termini di variazione di prezzo, RiskMetrics misura le variazioni di valore del portafoglio in termini di variazioni logaritmiche di prezzo (log-price changes) o meglio, rendimento composto continuamente.

Se P_t è il prezzo di mercato di un certo asset al tempo t , ponendo: $\ln(P_t) = p_t$

$$r_t = (p_t - p_{t-1}) = \ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(1 + R_t)$$

dove:

- $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ è il rendimento percentuale uniperiodale (ad esempio il rendimento tra ieri e oggi);
- r_t è il *log-price change* uniperiodale (o rendimento composto continuamente).

Inoltre:

$$r_t = (p_t - p_{t-1}) = \ln(P_t / P_{t-1}) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = R_t$$

$$r_t \approx R_t$$

Considerando un orizzonte multiperiodale k :

$$r_t(k) = \ln[1 + R_t(k)] = \ln[(1 + R_t) * (1 + R_{t-1}) * \dots * (1 + R_{t-k+1})] = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}$$

dove:

- $R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$.

RiskMetrics utilizza i log-price changes (cioè i rendimenti composti continuamente) come punto di partenza per ogni calcolo. Inoltre, viene fatta l'ipotesi di base che il rendimento di portafoglio è la media ponderata dei rendimenti composti continuamente:

$$P_t = w_1 * P_{t-1} * e^{r_1} + w_2 * P_{t-1} * e^{r_2} + \dots + w_i * P_{t-1} * e^{r_i}$$

dove:

- P_t è il valore del portafoglio composto da i asset al tempo t ;
- r_i è il rendimento dell' i -esimo asset;
- w_i è il peso dell' i -esimo titolo in portafoglio, con $\sum_i w_i = 1$.

Dunque

$$R_p = w_1 * r_1 + w_2 * r_2 + \dots + w_i * r_i$$

dove:

- R_p è il rendimento del portafoglio.

RiskMetrics modella i prezzi logaritmici utilizzando un processo Random Walk:

$$p_t = c + p_{t-1} + \sigma_t * \varepsilon_t$$

dove:

- c è una costante solitamente posta uguale a zero;
- σ_t è la volatilità del rendimento (variazioni del log-price), non costante nel tempo;
- $\varepsilon_t \sim N(0,1)$) o equivalentemente un WN(0,1).

Dunque

$$r_t = \sigma_t * \varepsilon_t$$

Qui la volatilità non è una variabile aleatoria, bensì un numero misurabile, dunque il rendimento avrà a sua volta una distribuzione stocastica con media nulla e senza autocorrelazione (cioè un White Noise).

1.3. La Stima e Previsione della volatilità

RiskMetrics utilizza un livellamento esponenziale per stimare la volatilità futura, cioè una media ponderata dove i pesi sono esponenzialmente decrescenti. Tutto dipende da un unico decay factor (parametro di lisciamiento) λ che il modello fissa a 0.06.

Le formule per stimare la covarianza tra due asset e la varianza di un unico titolo sono:

$$\sigma_{ij,t}^2 = \lambda (r_{i,t-1} r_{j,t-1}) + (1-\lambda) \sigma_{ij,t-1}^2$$

$$\sigma_{ii,t}^2 = \lambda (r_{ii,t-1}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t-1}^2$$

Avanzando di un periodo si può dunque effettuare la previsione, in quanto si dispone di tutti gli elementi:

$$\sigma_{ij,t+1}^2 = \lambda (r_{i,t} r_{j,t}) + (1-\lambda) \sigma_{ij,t}^2$$

$$\sigma_{ii,t+1}^2 = \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t}^2$$

Prendendo ad esempio la formula di previsione della varianza di un singolo asset, è possibile mostrare in che cosa consiste effettivamente il livellamento esponenziale:

$$\sigma_{ii,t+1}^2 = \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t}^2 \quad \text{conoscendo la forma di } \sigma_{ii,t}^2$$

$$= \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) [\lambda (r_{ii,t-1}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t-1}^2]$$

$$= \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \lambda (r_{ii,t-1}^2) + (1-\lambda)^2 \sigma_{ii,t-1}^2 \quad \text{anche la forma di } \sigma_{ii,t-1}^2 \text{ è conosciuta}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \lambda (r_{ii,t-1}^2) + (1-\lambda)^2 [\lambda (r_{ii,t-2}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t-2}^2] \\
&= \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \lambda (r_{ii,t-1}^2) + (1-\lambda)^2 \lambda (r_{ii,t-2}^2) + (1-\lambda)^3 \sigma_{ii,t-2}^2 \quad \text{sostituendo all'infinito} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j r_{ii,t-j}^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_{ii,t+1}^2 = \lambda (r_{ii,t}^2) + (1-\lambda) \sigma_{ii,t}^2 = \lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j r_{ii,t-j}^2$$

$$\text{con } \sum_{j=0}^t \lambda (1-\lambda)^j = 1$$

Dunque la previsione della volatilità di un periodo in avanti (la previsione fatta oggi per domani) è una media ponderata del rendimento più recente, elevato al quadrato, e l'ultima previsione effettuata. Sostituendo in modo ricorsivo le formule delle passate stime della varianza, si mostra che ciò coincide con la media ponderata di tutte le osservazioni passate al quadrato. I pesi, che decrescono in modo esponenziale, danno sempre minor rilevanza al passato rispetto al presente.

1.4. Il calcolo del VaR

Il modello Riskmetrics per il calcolo del VaR si basa sulle seguenti ipotesi:

- $r_{t+1} | F_t \sim N(0, \sigma_{t+1}^2)$
- $\sigma_{t+1}^2 = 0.06 (r_t^2) + (1-0.06) \sigma_t^2$

La definizione di VaR è: $\text{Prob}(r_{t+1} < -\text{VaR}\%) = p\%$

Standardizzando la variabile r_{t+1} : $\text{Prob}\left(\frac{r_{t+1}}{\sigma_{t+1}} < -\frac{\text{VaR}}{\sigma_{t+1}}\right) = p\%$

Utilizzando la funzione inversa di ripartizione della Normale standard: $-\frac{\text{VaR}}{\sigma_{t+1}} = z_p$

Dunque il VaR all' (1-p)% di un periodo in avanti è

$$\mathbf{VaR} = - \sigma_{t+1} * z_p$$

Per poter calcolare il VaR multiperiodale (k) bisogna aggiungere altre ipotesi:

- i rendimenti sono incorrelati;
- i rendimenti hanno tutti la stessa varianza condizionata pari a $\sigma_{t+1}^2 = 0.06 (r_t^2) + (1-0.06) \sigma_t^2$.

Grazie a queste ipotesi e alle proprietà dei rendimenti logaritmici, si può concludere che

- $r_{t+k} | F_t \sim N(0, k * \sigma_{t+1}^2)$

Procedendo come prima:

$$\text{Prob}(r_{t+k} < - \text{VaR}\%) = p\%$$

$$\text{Prob}\left(\frac{r_{t+k}}{\sigma_{t+1} \sqrt{k}} < - \frac{\text{VaR}}{\sigma_{t+1} \sqrt{k}}\right) = p\%$$

$$- \frac{\text{VaR}}{\sigma_{t+1} \sqrt{k}} = z_p$$

Dunque il VaR all' (1-p)% di k periodi in avanti è

$$\mathbf{VaR(k)} = - \sigma_{t+1} * z_p * \sqrt{k} = \mathbf{VaR} * \sqrt{k}$$

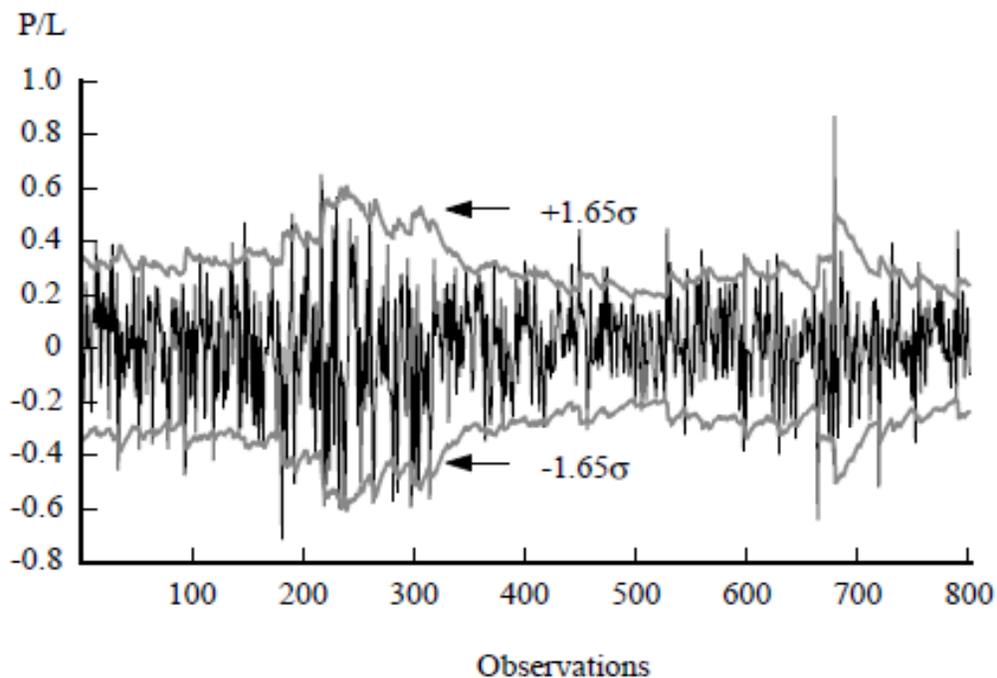
Questa in letteratura è chiamata “la regola della radice del tempo”: grazie alle ipotesi semplificatrici del modello, il VaR multiperiodale è dato dal VaR uniperiodale moltiplicato per la radice dell’orizzonte temporale di riferimento.

1.5. Il BackTesting

Il documento tecnico pubblicato da J.P.Morgan e Reuters presenta anche un metodo per misurare l'accuratezza del modello RiskMetrics. Viene analizzato un portafoglio di 215 cashflows tra cambi, zero coupon, equities, commodities e depositi a breve, utilizzando i prezzi giornalieri dal 1990 al 1996 (in totale 801 osservazioni). Ogni giorno si assume che la perdita superi il VaR al 5%, dunque con un intervallo di confidenza al 95%.

One-day Profit/Loss and VaR estimates

VaR bands are given by $\pm 1.65\sigma$



Fonte: J.P.Morgan e Reuters

Le bande VaR si basano sulla deviazione standard del portafoglio, la cui formula è la seguente:

$$\sigma_{P,t|t-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{215} \left(\frac{1}{215}\right)^2 \sigma_{i,t|t-1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{215} \sum_{j>i}^{215} \left(\frac{1}{215}\right)^2 \rho_{ij,t|t-1} \sigma_{i,t|t-1} \sigma_{j,t|t-1}}$$

dove:

- $\sigma_{P,t|t-1}$ è la volatilità condizionata del portafoglio al tempo t;
- $\sigma_{i,t|t-1}^2$ è la varianza condizionata dell'i-esimo rendimento al tempo t;
- $\rho_{ij,t|t-1}$ è il coefficiente di correlazione tra l'asset i e l'asset j al tempo t.

Per misurare la performance del modello è sufficiente contare il numero di volte in cui il VaR sottostima le perdite future e, se questo supera il 5%, allora il modello non è corretto.

Si definisca una variabile aleatoria X(t) su ogni giorno, tale che X(t) = 1, se in quel particolare giorno la perdita osservata supera il VaR, e che X(t) = 0 altrimenti.

$$f(X(t) | 0.05) = \begin{cases} 0.05^{X(t)} (1 - 0.05)^{1-X(t)} & X(t)=0,1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Se si osserva questa variabile X(t) per un totale di T giorni e si assume che le X(t) giornaliere sono indipendenti tra loro, allora X(t) si distribuisce come una Bernulliana con valore atteso pari a 5%. In altre parole, RiskMetrics assume le violazioni del VaR sono indipendenti tra loro.

La somma delle violazioni $X_T = \sum_{t=1}^T X(t)$ si distribuisce come una Binomiale con valore atteso T * 5%. Se il numero totale di violazioni supera questo numero, allora il modello non è corretto.

Tornando all'esempio riportato nel documento tecnico, per ogni giorno il limite inferiore e superiore sono definiti $-1.65 * \sigma_{t|t-1}$ e $+1.65 * \sigma_{t|t-1}$:

Realized percentages of VaR violations

True probability of VaR violations = 5%

Prob (Loss < $-1.65 \sigma_{t t-1}$)	Prob (Profit > $1.65 \sigma_{t t-1}$)
5.74%	5.87%

CAPITOLO 2

I MODELLI A ETEROSCHEDASTICITÀ CONDIZIONATA

Una volta rilevate le caratteristiche¹¹ peculiari di molte variabili finanziarie, la letteratura è andata alla ricerca di modelli che potessero meglio spiegare i comportamenti delle variabili di mercato, rispetto a quei modelli di base, in cui la volatilità era ipotizzata esogena. I due approcci ad eteroschedasticità condizionata che meglio riescono a catturare le caratteristiche delle variabili finanziarie sono i modelli ARCH e GARCH. Questi sono stati i primi modelli in cui la varianza viene modellata come funzione delle osservazioni passate.

Il primo contributo nella letteratura è di Engle, che nel 1982 pubblica uno studio sulla varianza del tasso di inflazione britannico, in cui viene utilizzato un modello a varianza condizionata non costante¹². L'invenzione degli ARCH porta Engle a vincere il premio Nobel per l'economia nel 2003.

I modelli GARCH sono la versione generalizzata degli ARCH, ma sono stati sviluppati dopo la pubblicazione del paper di Engle. Lo studio sui GARCH di Bollerslev, infatti, risale al 1986, anno in cui viene pubblicato un articolo sul Journal of Econometrics¹³ dove è presentata questa nuova versione del modello ad eteroschedasticità condizionata.

In un generico processo ARCH(p), la varianza condizionata di una variabile finanziaria è

$$\sigma_t^2 = c + \alpha_1 * y_{t-1}^2 + \alpha_2 * y_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p * y_{t-p}^2$$

Differentemente, in un generico processo GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = c + \alpha_1 * y_{t-1}^2 + \alpha_2 * y_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p * y_{t-p}^2 + \beta_1 * \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q * \sigma_{t-q}^2$$

Di seguito verranno presentati i due modelli di base ad eteroschedasticità condizionata: l'ARCH(1) e il GARCH(1,1); infine verranno citati i principali modelli GARCH Multivariati.

¹¹ Media nulla, volatilità correlate, leptokurtosis, eteroschedasticità e clustering

¹² Engle, R. (1982)

¹³ Bollerslev, T. (1986)

2.1. ARCH

Il modello Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity costruisce le variabili di mercato nel seguente modo:

$$y_t = \mu_t |_{t-1} + \xi_t$$

dove:

- y_t è una generica variabile di mercato (come i rendimenti log) al tempo t , stocastica in quanto non osservabile in $t-1$ (il giorno precedente);
- $\mu_t |_{t-1}$ è la media condizionata di y_t nonché predittore ottimo della variabile stessa al tempo $t-1$;
- ξ_t è l'errore di previsione da $t-1$ a t , esso cattura le deviazioni di y_t dal valore atteso e viene modellato con eteroschedasticità condizionata: $\xi_t = \sigma_t * \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$.

L'ipotesi di base è la distribuzione Normale della variabile di mercato:

$$y_t | F_{t-1} \sim N(\mu_t |_{t-1}, \sigma_t^2)$$

dove:

- σ_t^2 è la varianza condizionata di y_t .

La grande innovazione di questo modello è che la varianza condizionata viene modellata nel seguente modo:

$$\sigma_t^2 = c + \alpha * \xi_{t-1}^2$$

dove:

- c è una costante maggiore di zero;
- α è una costante maggiore o uguale a zero;
- ξ_{t-1}^2 è il più recente errore di previsione commesso, elevato al quadrato; si noti che questo è osservabile, dunque la volatilità al tempo t di y_t è osservabile in $t-1$, anche se y_t è una variabile aleatoria.

Dunque, la varianza viene regredita sull'ultimo errore di previsione commesso¹⁴. Tuttavia, essendo

$$y_t = \mu_t |_{t-1} + \xi_t \quad \text{sostituendo } \xi_t$$

$$= \mu_t |_{t-1} + \sigma_t * \varepsilon_t \quad \text{si pone } \mu_t |_{t-1} = 0 \quad (\text{questo è vero per le variazioni giornaliere di mercato})$$

$$= \sigma_t * \varepsilon_t \quad \text{conoscendo la forma di } \sigma_t \text{ si ha che}$$

$$y_t = \xi_t = \sigma_t * \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = c + \alpha * y_{t-1}^2$$

$$y_t | F_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$y_t \sim WN(0, \frac{c}{1-\alpha})$$

si noti che:

- La varianza condizionata di y_t è regredita sulla più recente osservazione della stessa variabile y al quadrato (ARCH(1)).
- Poiché σ_t è un numero e ε_t è una variabile aleatoria che segue un processo stocastico di tipo White Noise, ne segue che anche y_t segue un processo WN anche se la sua distribuzione condizionata è Normale.
- È possibile dimostrare¹⁵ che la varianza incondizionata di lungo periodo di y è $\frac{c}{1-\alpha}$.
- È possibile dimostrare¹⁶ che la distribuzione incondizionata di y è leptokurtica anche se la sua distribuzione condizionata è Normale.

¹⁴ Si sta prendendo in considerazione un ARCH(1) in cui si regredisce solo sull'ultimo errore di previsione. In un generico ARCH(p) si considerano gli ultimi p errori di previsione.

¹⁵ Utilizzando la LIE e ponendo $\alpha \in [0,1)$

¹⁶ Ponendo $3\alpha^2 < 1$

2.2. GARCH

Il modello Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity, essendo la versione più generale degli ARCH, può essere applicato ad un numero maggiore di situazioni. Inoltre fondamentale è la versione multivariata di questi modelli generalizzati, per stimare le volatilità e covolatilità di un portafoglio di asset.

Anche il modello GARCH(1,1) inizia con l'ipotesi di base di Normalità della distribuzione condizionata delle variabili con media nulla. Ciò che cambia è la varianza condizionata eteroschedastica, costruita nel seguente modo:

$$\sigma_t^2 = c + \alpha * y_{t-1}^2 + \beta * \sigma_{t-1}^2$$

dove:

- $c > 0$ è una costante;
- $0 \leq \alpha \leq 1$ è il coefficiente che lega la varianza condizionata all'informazione più recente di mercato;
- $0 \leq \beta \leq 1$ è il coefficiente della componente inerziale che mostra chiaramente che la varianza passata influisce sulla volatilità presente.

In questo modo, la varianza condizionata viene regredita sull'ultima osservazione al quadrato e sull'ultima stima effettuata. È possibile dimostrare che, se la varianza condizionata è modellata in questo modo e $\alpha + \beta < 1$, la distribuzione incondizionata dei rendimenti al quadrato è stazionaria¹⁷:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= y_t^2 \\ &= y_t^2 + \sigma_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \sigma_t^2 + (y_t^2 - \sigma_t^2) \end{aligned}$$

Pongo $(y_t^2 - \sigma_t^2) = w_t$ cioè una variabile casuale con media nulla, infatti $E_{t-1}(y_t^2 - \sigma_t^2) = 0$, dunque

¹⁷ Un processo è stazionario se ha media e varianza costante e finita, e se la funzione di autocorrelazione dipende unicamente dal lag temporale.

$$\begin{aligned}
y_t^2 &= \sigma_t^2 + w_t \\
&= c + \alpha * y_{t-1}^2 + \beta * \sigma_{t-1}^2 + w_t \\
&= c + \alpha * y_{t-1}^2 + \beta * \sigma_{t-1}^2 + w_t + \beta * y_{t-1}^2 - \beta * y_{t-1}^2 \\
&= c + (\alpha + \beta) * y_{t-1}^2 + w_t - \beta * (y_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \\
&= c + (\alpha + \beta) * y_{t-1}^2 + w_t - \beta * w_{t-1}
\end{aligned}$$

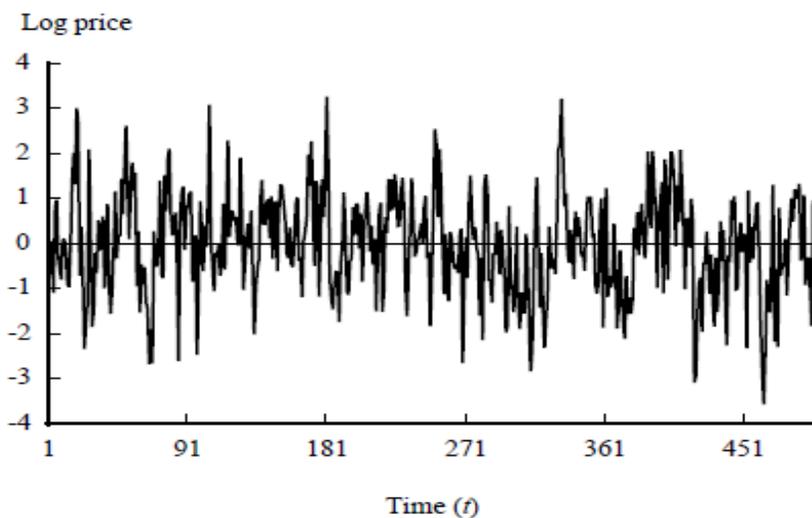
$$y_t^2 = c + (\alpha + \beta) * y_{t-1}^2 + w_t - \beta * w_{t-1}$$

Questa è la forma di un processo ARMA(1,1) che è stazionario se lo è la componente autoregressiva; in questo caso se $\alpha + \beta < 1$. Altrimenti il processo non è stazionario.

Si noti che i risultati sulla distribuzione incondizionata di y_t sono gli stessi dell'ARCH: y_t segue un processo WN con leptokurtosi e varianza di lungo periodo pari a $\frac{c}{1-\alpha-\beta}$.

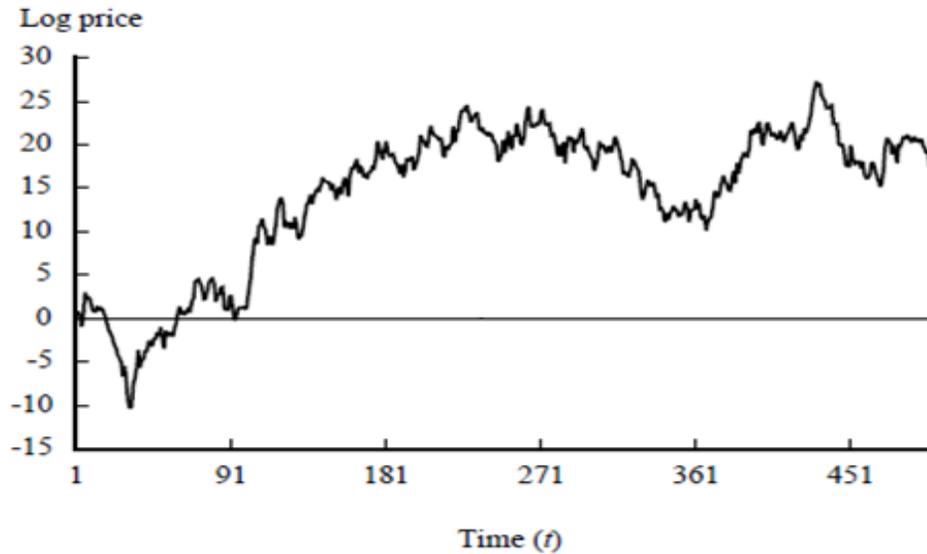
Un processo stazionario fluttua attorno alla sua media con varianza costante; diversamente un processo non stazionario presenta un trend ed una varianza crescente.

Simulated stationary/mean-reverting time series



Fonte: J.P.Morgan e Reuters

Simulated nonstationary time series



Fonte: J.P.Morgan e Reuters

2.3. La stima

Per la stima dei parametri c , α , β si utilizza l'approccio della massima verosimiglianza: viene massimizzata la funzione di log-verosimiglianza rispetto ai parametri incogniti (condizione di primo ordine per la massimizzazione di funzione).

La funzione di verosimiglianza da massimizzare è la funzione di densità congiunta di y_t con $t=1, \dots, n$:

$$L(c, \alpha, \beta) = f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$$

Il metodo più conveniente è quello di scomporre la funzione di densità congiunta nella produttoria di densità predittive condizionate, uniperiodali e monovariate (della Normale):

$$L(c, \alpha, \beta) = f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$$

$$\begin{aligned}
&= f(y_t \mid y_{t-1}, \dots, y_1) * f(y_{t-1}, \dots, y_1) \\
&= f(y_t \mid y_{t-1}, \dots, y_1) * f(y_{t-1} \mid y_{t-2}, \dots, y_1) * f(y_{t-2}, \dots, y_1) \\
&\vdots \\
&= f(y_1) \prod_{t=2}^n f(y_t \mid F_{t-1})
\end{aligned}$$

dove:

- un generico $f(y_t \mid F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi * \sigma_t^2}} \exp(-\frac{1}{2} * \frac{y_t^2}{\sigma_t^2})$ è la funzione di densità condizionata di una Normale con media zero e varianza condizionata σ_t^2 .
- Si noti che è stata esclusa dalla produttoria la prima osservazione che non ha alcun passato e non può essere condizionata.

Applicando il logaritmo la produttoria diventa una sommatoria:

$$\begin{aligned}
\ln [L(c, \alpha, \beta)] &= \ln[f(y_1)] + \sum_{t=2}^n \ln[f(y_t \mid F_{t-1})] \\
&= \ln[f(y_1)] + \sum_{t=2}^n (-\frac{1}{2} \ln[2\pi] - \frac{1}{2} \ln[\sigma_t^2] - \frac{1}{2} * \frac{y_t^2}{\sigma_t^2})
\end{aligned}$$

Ipotizzando che la prima osservazione sia una costante, si ha che la funzione di densità di una costante è 1. Dunque la prima osservazione può essere esclusa dal problema di massimizzazione¹⁸:

$$\text{Max} \quad \ln [L(c, \alpha, \beta)] = -\frac{1}{2} \ln[2\pi] - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n (\ln[\sigma_t^2] + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2})$$

Risolvere questo problema di massimizzazione “a mano” può essere molto oneroso, per questo vengono utilizzati software econometrici che riescono in pochi secondi a fornire la stima adeguata dei parametri ricercati.

¹⁸ $\ln[1] = 0$

2.4. La previsione

È possibile anche utilizzare i modelli ad eteroschedasticità condizionata per prevedere la volatilità futura. Ad esempio, il predittore per un periodo in avanti della varianza condizionata di y_t :

$$\sigma_{t+1}^2 = E_t [y_{t+1}^2] = c + \alpha * y_t^2 + \beta * \sigma_t^2$$

con y_t e σ_t^2 che sono due valori osservabili in t .

Il predittore per due periodi in avanti:

$$\sigma_{t+2}^2 = E_t [y_{t+2}^2]$$

$$= E_t \{ E_{t+1} [y_{t+2}^2] \} \quad \text{applicando la LIE}$$

$$= E_t \{ c + \alpha * y_{t+1}^2 + \beta * \sigma_{t+1}^2 \}$$

$$= c + \alpha * E_t [y_{t+1}^2] + \beta * \sigma_{t+1}^2 \quad \text{sapendo che } E_t [y_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$$

$$= c + (\alpha + \beta) * \sigma_{t+1}^2$$

Procedendo in questo modo su un orizzonte temporale infinito si ottiene la varianza di lungo periodo:

$$\sigma_{t+k}^2 = E_t [y_{t+k}^2]$$

$$= E_t E_{t+1} \dots E_{t+k-1} [y_{t+k}^2]$$

$$= c + c(\alpha + \beta) + c(\alpha + \beta)^2 + \dots + c(\alpha + \beta)^{k-2} + (\alpha + \beta)^{k-1} * \sigma_{t+1}^2$$

$$= c[1 + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 + \dots + (\alpha + \beta)^{k-2}] + (\alpha + \beta)^{k-1} * \sigma_{t+1}^2$$

Sapendo che $(\alpha + \beta) < 1$ e k tende a infinito

$$\sigma_{t+k}^2 = \frac{c}{1 - \alpha - \beta}$$

2.5. Il collegamento tra GARCH e RiskMetrics

Esiste una variante del modello GARCH(1,1) che rimuove l'ipotesi di stazionarietà, il modello I-GARCH(1,1).

In questo modello $\alpha + \beta = 1$, dunque vi sarà un parametro in meno $\beta = 1 - \alpha$.

$$\Sigma_{ii,t}^2 = c + \alpha * y_{ii,t-1}^2 + (1 - \alpha) * \sigma_{ii,t-1}^2$$

$$y_t^2 = c + y_{t-1}^2 + w_t - \beta * w_{t-1}$$

Ora la serie dei rendimenti al quadrato segue un processo ARIMA (0,1,1), cioè un processo non stazionario che, se integrato una volta, diventa un processo a media mobile di grado 1.

Il modello RiskMetrics è un I-GARCH(1,1) con le seguenti ipotesi:

$$\alpha = \lambda = 0.06$$

$$c = 0$$

Infatti, sostituendo:

$$\sigma_{ii,t}^2 = \lambda * r_{ii,t-1}^2 + (1 - \lambda) * \sigma_{ii,t-1}^2$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^t (1 - \lambda)^j r_{ii,t-j}^2$$

Si ottiene esattamente lo stesso risultato della previsione effettuata con un I-GARCH(1,1).

2.6. I GARCH Multivariati

I due semplici processi visti finora sono univariati poiché possono essere applicati solo a singoli asset e non ad un portafoglio. Per stimare le matrici di covarianze e correlazioni di un insieme di variabili di mercato, nella pratica, vengono utilizzati i modelli GARCH Multivariati.

L'obiettivo di questi approcci non è più la stima della varianza condizionata al tempo t (σ_t^2), bensì la stima della matrice di varianze-covarianze condizionate al tempo t (H_t) e della matrice di correlazione condizionata al tempo t (P_t).

Riassumendo, i modelli multivariati possono essere così raggruppati¹⁹:

- I modelli che sono una generalizzazione diretta del modello GARCH univariato, come il VEC, DVEC e BEKK, su cui anche gli stessi Bollerslev e Engle hanno lavorato.
- I modelli che invece di modellare direttamente H_t , costruiscono la dinamica della matrice di correlazione P_t , come il DCC di Engle, il DCC di Tse-Tsui oppure il modello CCC che invece ipotizza correlazione costante.
- I modelli fattoriali che ortogonalizzano la matrice di var-cov per poter lavorare su elementi indipendenti tra loro. In particolare, ci si soffermerà (capitolo 9) sul modello O-GARCH, analizzato affondo da Carol Alexander in numerosi articoli.

¹⁹ Per maggiori dettagli si veda Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K., (2006)

CAPITOLO 3

L'EVOLUZIONE ED I LIMITI DEI MODELLI VaR: I MODELLI DI SIMULAZIONE E L'IPOTESI DI DISTRIBUZIONE NORMALE

Il documento tecnico pubblicato da J.P.Morgan e Reuters aveva aperto la porta a tutti i risk managers e studiosi che volessero utilizzare il VaR e/o implementarlo. In particolare, molti altri hanno studiato approcci alternativi con lo scopo di superare i limiti di una forzata ipotesi di Normalità dei fattori di mercato.

Il modello presentato da RiskMetrics è un modello di tipo “parametrico” (o “varianze-covarianze”), chiamato così perché tutto dipende da pochi parametri. Un'alternativa a questo tipo di approccio sono i modelli di simulazione. Nei modelli di simulazione anziché limitarsi a derivare il VaR partendo da pochi parametri sintetici della distribuzione dei fattori di rischio, si procede simulando un grande numero di possibili scenari riguardanti sull'evoluzione futura dei mercati. Si può procedere in due modi:

- Le simulazioni storiche: gli scenari vengono generati partendo dalla distribuzione empirica derivante dalla serie storica delle variazioni passate dei fattori di mercato.
- Le simulazioni Monte Carlo: gli scenari vengono generati casualmente ipotizzando una precisa distribuzione.

Differentemente dai modelli varianza-covarianza, dove si legano le variazioni di valore del portafoglio con quelle di un risk factor, nei modelli di simulazione si utilizza una logica di full valuation. Il valore di mercato del portafoglio di cui si intende stimare il VaR viene completamente ricalcolato sulla base di nuovi valori simulati dei fattori di mercato. È dunque necessario conoscere le regole di pricing per ciascuno degli strumenti finanziari inseriti nel portafoglio (questo metodo è tanto conveniente quanto meno lineari sono i payoff degli asset). Dopo aver generato la distribuzione di probabilità degli N possibili valori futuri del portafoglio, il VaR viene calcolato tagliando tale distribuzione empirica in corrispondenza del percentile associate al livello di confidenza desiderato (logica del percentile).

I metodi di simulazione consentono di superare il limite dell'ipotesi di Normalità, la quale sicuramente rende più facile e veloce il calcolo del VaR ma paga un costo in termini di realismo.

3.1. L'ipotesi di Normalità

Nel 1997 John Hull e Alan White analizzano in modo approfondito l'ipotesi di distribuzione Normale per le variabili di mercato, sostenendo che è "far from perfect"²⁰. Le variazioni giornaliere di molte variabili, in particolare i tassi di cambio, mostrano kurtosi positiva. Questo significa che la distribuzione di probabilità ha code più grasse e dunque che gli eventi estremali si verificano con maggiore frequenza rispetto a quanto predetto dalla Normale.

Per illustrare il problema di non-Normalità nel mercato, Hull e White hanno esaminato il comportamento empirico dei tassi di cambio di 12 valute²¹ tra il 4 gennaio 1988 e il 15 agosto 1997. Di seguito sono riportate le principali osservazioni del loro studio sugli exchange rates del campione:

	AUD	BEF	CHF	DEM	DKK	ESP
>1 stdev	23.80%	24.96%	26.24%	25.74%	25.58%	23.72%
>2 stdev	5.49%	4.95%	5.45%	5.65%	5.40%	4.70%
>3 stdev	1.36%	1.32%	1.24%	1.24%	1.32%	1.53%
>4 stdev	0.41%	0.25%	0.17%	0.25%	0.12%	0.37%
>5 stdev	0.21%	0.04%	0.04%	0.00%	0.00%	0.17%
>6 stdev	0.08%	0.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.08%
Kurtosis	4.40	3.31	1.69	1.91	1.61	7.75

	FRF	GBP	ITL	JPY	NLG	SEK
>1 stdev	26.03%	25.33%	25.08%	23.60%	25.54%	24.83%
>2 stdev	5.53%	5.45%	4.83%	5.40%	5.24%	5.20%
>3 stdev	1.44%	1.44%	1.28%	1.49%	1.20%	1.24%
>4 stdev	0.12%	0.37%	0.29%	0.62%	0.25%	0.25%
>5 stdev	0.00%	0.04%	0.17%	0.12%	0.04%	0.12%
>6 stdev	0.00%	0.00%	0.08%	0.00%	0.00%	0.04%
Kurtosis	1.65	2.57	5.93	3.34	2.07	4.44

	Average	Normal
>1 stdev	25.04%	31.73%
>2 stdev	5.27%	4.55%
>3 stdev	1.34%	0.27%
>4 stdev	0.29%	0.01%
>5 stdev	0.08%	0.00%
>6 stdev	0.03%	0.00%
Kurtosis	3.39	0.00

²⁰ Hull e White (1997)

²¹ AUD, BEF, CHF, DEM, DKK, ESP, FRF, GBP, ITL, JPY, NGL, SEK

È interessante osservare che tutte le variabili presentano kurtosi in eccesso rispetto a quella di una Gaussiana che generalmente viene posta pari a 3. Quindi l'ipotesi di Normalità può essere rigettata con un livello alto di confidenza.

Nello stesso paper, Hull e White mostrano come questo problema può essere superato, riconducendo la serie originale ad una nuova, distribuita Normalmente:

$$f_t = N^{-1} [G(e_t)]$$

dove:

- e_t è la variabile di mercato originale;
- G è la distribuzione cumulata assunta per e_t ;
- N è la distribuzione cumulata Normale;
- f_t è la nuova variabile con distribuzione Normale.

Loro, dunque, propongono di creare una nuova variabile partendo da quella di mercato, con distribuzione Normale e con cui è poi possibile calcolare il VaR attraverso il tradizionale modello di RiskMetrics. Hull e White hanno dunque dimostrato che il VaR può essere calcolato anche rilasciando l'ipotesi di Normalità²², che invece è il punto di partenza per gli approcci “model building”.

Nel 1999 viene pubblicato un nuovo studio condotto dal RiskMetrics Group²³ in cui viene proposto un metodo per poter utilizzare l'ipotesi di distribuzione Normale tenendo conto anche della volatilità, l'asimmetria e la kurtosi dell'effettiva distribuzione delle variabili di mercato considerate come risk factors. Si tratta di un modello statistico che utilizza i primi quattro momenti della distribuzione. Sia X una generica variabile aleatoria, sia μ la media $E(X)$, σ^2 la varianza $\text{Var}(X)$, k la kurtosi e s l'asimmetria (o “skewness”):

- Il momento primo è la media μ ;
- Il momento secondo è la varianza $\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2$;
- Il momento terzo è $E(X-\mu)^3$;
- Il momento quarto è $E(X-\mu)^4$.

²² Il loro approccio ipotizza varianza costante.

²³ Li D. X. (1999)

Inoltre definiamo la skewness come:

$$s = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}$$

e la kurtosi²⁴ come:

$$k = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} - 3$$

L'approccio proposto consiste nell'utilizzo esplicito della media, varianza, skewness e kurtosi: non si lavora direttamente con la variabile X, bensì con L:

$$L = a \cdot h_1 + b \cdot h_3$$

con:

$$h_1 = X - \mu$$

$$h_3 = (X - \mu)^3 - 3\sigma^2(X - \mu)$$

$$a = -1/\sigma^2$$

$$b = \frac{s \cdot \sigma}{\sigma^4 \cdot (k + 2 - s^2)}$$

Dopo questi aggiustamenti, la variabile L, divisa per la sua deviazione standard, avrà una distribuzione approssimabile a quella di una Normale Standard.

²⁴ La kurtosi di una Normale standard è 3.

3.2. I modelli VaR a confronto

Subito dopo la pubblicazione di RiskMetrics, uno studio di Hendricks pubblicato nel 1996²⁵ ha confrontato l'efficacia dei modelli di simulazione storica con i modelli di varianza-covarianza. Vengono esaminati dodici modelli VaR: 5 modelli var.cov dove la volatilità è stimata con una media aritmetica, 3 modelli var-cov con livellamento esponenziale, 4 modelli di simulazione storica. In quasi tutti i casi gli approcci sono efficaci a misurare il rischio di perdita. Inoltre, i dodici casi tendono a produrre stime di rischio che non differiscono molto in media, sebbene la simulazione storica fornisce un valore leggermente maggiore per il VaR al 99% rispetto agli approcci di varianza-covarianza. Anche se tutti i modelli conducono a stime accurate per il VaR al 95%, le stime al 99% sono meno affidabili

Nonostante la somiglianza delle stime VaR, l'indagine di Hendricks rivela differenze, a volte sostanziali, tra i vari approcci per lo stesso portafoglio alla stessa data. In termini di variabilità nel corso del tempo, gli approcci del valore a rischio con periodi di osservazione più lunghi tendono a produrre risultati meno variabili rispetto a quelli con periodi di osservazione breve o ponderazione osservazioni più recenti.

Per molti aspetti, la simulazione storica riflette chiaramente due caratteristiche ben note di dati giornalieri dei mercati finanziari: in primo luogo, gli esiti estremi si verificano più spesso e sono più grandi di quanto previsto dalla distribuzione Normale (code grasse); secondo, la dimensione dei movimenti di mercato non è costante nel tempo (volatilità condizionata).

Un altro risultato molto interessante è che la simulazione storica fornisce stime più stabili quando il campione di osservazioni è molto grande, in altre parole maggiore è la profondità storica, meno sarà la variabilità delle stime. Il problema dell'estensione eccessiva del campione è che così facendo si ottengono stime meno aggiornate rispetto alle attuali condizioni del mercato e agli shock più recenti. Questo risultato ottenuto da Hendricks nel 1996 sarà molto utile per gli studiosi successivi che suggeriranno metodi alternativi per implementare l'approccio di simulazione storica.

²⁵ Hendricks, D. (1996)

3.3. L'approccio Ibrido

Qualche anno dopo la pubblicazione di RiskMetrics, viene proposto un nuovo approccio, definito "ibrido"²⁶, che combina i due metodi più diffusi: RiskMetrics e Simulazione Storica. Questo approccio stima il VaR di un portafoglio applicando il livellamento esponenziale ai rendimenti passati, ordinati in modo crescente, e tagliando poi la distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato.

L'approccio ibrido vuole superare, per prima cosa, il limite dell'ipotesi di Normalità. Infatti non viene fatta alcuna ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti degli asset in portafoglio, proprio come avviene nella simulazione storica. Tuttavia, la simulazione presenta due grandi limiti:

- i percentili estremi della distribuzione, come 1% o 5%, sono notoriamente molto difficili da stimare quando il campione è piccolo;
- la simulazione storica essenzialmente considera i rendimenti i.i.d.²⁷, quindi non dà spazio ad una volatilità che varia nel tempo (eteroschedasticità).

Per risolvere il primo problema si può estendere il numero di dati nel campione, ad esempio da 1 anno a 5 anni, ma così facendo si perde la possibilità di risolvere il secondo problema. Una profondità storica così alta porterebbe ad una stima più solida, ma non aggiornata e molto meno reattiva ai cambiamenti recenti del mercato. La simulazione storica applica una ponderazione uniforme alle osservazioni passate, quindi l'osservazione più recente e quella meno recente hanno lo stesso impatto sulla stima del VaR.

L'approccio ibrido risolve entrambi i problemi applicando il livellamento esponenziale di RiskMetrics ai rendimenti storici osservati nel campione. In questo modo, anche se il campione viene notevolmente aumentato al fine di migliorare le stime dei percentili estremali, poiché i pesi sono esponenzialmente decrescenti, il passato avrà sempre meno impatto sulla stima del VaR. Dunque si riesce ad ottenere una stima più aggiornata e precisa rispetto alla semplice simulazione storica senza dover imporre la distribuzione Normale per i risk factors.

L'approccio ibrido viene implementato in tre steps: primo, preso un campione di K rendimenti recenti, viene assegnato un peso $\lambda, \lambda(1-\lambda), \lambda(1-\lambda)^2, \dots, \lambda(1-\lambda)^K$ a ciascun dato. Successivamente i

²⁶ Boudoukh, Richardson, Whitelaw, (1998).

²⁷ Identicamente e indipendentemente distribuiti.

rendimenti ponderati vengono ordinati dal peggiore al migliore; infine viene tagliata la distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato. Boudoukh, Richardson e Whitelaw nel paper riportano un esempio con $K=100$ e $\lambda=0.98$:

Order	Return	Periods Ago	Weight	Cumul. Weight	Weight	Cumul. Weight
Initial Date:						
1	-3.30%	3	0.0221	0.0221	0.01	0.01
2	-2.90%	2	0.0226	0.0447	0.01	0.02
3	-2.70%	65	0.0063	0.0511	0.01	0.03
4	-2.50%	45	0.0095	0.0605	0.01	0.04
5	-2.40%	5	0.0213	0.0818	0.01	0.05
6	-2.30%	30	0.0128	0.0947	0.01	0.06

Il VaR al 99% sarà 3.30%, il VaR al 95% sarà 2.40%.

Inoltre, sempre nel medesimo articolo, la performance dell'approccio ibrido viene comparata con quella della simulazione storica e di RiskMetrics su un campione che va dal 1/1/1991 al 5/12/1997 (1663 giorni). Le posizioni lunghe sono sul DEM (tasso di cambio dollaro/marco tedesco), CRUDE OIL, S&P 500, BRD (bond index). Inoltre si considerano anche un portafoglio con pesi uniformi (EQW) sugli asset sopra indicati ed un portafoglio (AVG) che invece considera una profondità storica più ampia (6656 giorni). Ecco i risultati per il calcolo del VaR al 99% e 95%:

5% Tail	Historica	Historica	EXP		Hybrid	
	I STD	I Simulat.	0.97	0.99	0.97	0.99
DEM	5.18	5.32	5.74	5.18	5.25	5.04
OIL	5.18	4.96	5.60	5.39	5.18	5.18
S&P	4.26	5.46	4.68	4.18	6.17	5.46
BRD	4.11	5.32	4.47	4.40	5.96	5.46
EQW	4.40	4.96	5.04	4.26	5.67	5.39
AVG	4.62	5.21	5.11	4.68	5.65	5.30
1% Tail	Historica	Historica	EXP		Hybrid	
	I STD	I Simulat.	0.97	0.99	0.97	0.99
DEM	1.84	1.06	2.20	1.63	1.84	1.28
OIL	1.84	1.13	1.77	1.77	1.70	1.35
S&P	2.06	1.28	2.20	2.13	1.84	1.42
BRD	2.48	1.35	2.70	2.41	1.63	1.35
EQW	1.63	1.49	1.42	1.42	1.63	1.21
AVG	1.97	1.26	2.06	1.87	1.73	1.32

Per quanto riguarda il VaR al 95%, non sembra esserci un grande bias tra i diversi approcci. Differentemente, il VaR al 99% viene stimato meglio dai metodi non-parametrici (simulazione storica e approccio ibrido), che riescono a cogliere meglio la kurtosi dei rendimenti, e per il portafoglio con più osservazioni (AVG), l'approccio ibrido rappresenta l'alternativa migliore.

3.4. Le implementazioni del modello di simulazione storica

Nella letteratura sono stati presentati diversi modi per rendere l'approccio di simulazione storica più efficace (oltre all'approccio ibrido, che è il più famoso).

Nel 1997 Hull and White hanno studiato il Value-at-Risk rimuovendo l'ipotesi di Normalità, ipotizzando però un modello con varianza costante. Successivamente, in un secondo paper del 1998, propongono un nuovo approccio di simulazione storica che incorpori anche l'aggiornamento della volatilità. Questo metodo consiste nell'aggiustare i dati storici con la differenza tra volatility storica e quella corrente.

I due studiosi hanno scelto di implementare un modello di simulazione, piuttosto che un modello varianza-covarianza, perché consente di non fare alcuna ipotesi sulla distribuzione. Già nel precedente lavoro, Hull e White avevano criticato fortemente l'ipotesi di Normalità, mostrando anche empiricamente quanto possa essere limitativa ed errata. In questo secondo paper²⁸ privilegiano l'approccio di simulazione storica, che implica la creazione di un database comprendente i movimenti passati delle variabili di mercato in questione, entro un certo intervallo di tempo. Hull e White, però, vanno oltre il semplice modello di simulazione storica, incorporando il "volatility updating", cioè tenendo conto della variazione della volatilità effettivamente verificatasi nel periodo coperto dal campione di osservazioni. Se la current volatility giornaliera della variabile di mercato è 1.5% e due mesi fa era dell'1%, significa che i dati osservati due mesi prima hanno avuto variazioni minori di quelle attese.

Dunque invece di utilizzare le variazioni storiche effettive del risk factor, vengono riportate le suddette variazioni aggiustate nel seguente modo:

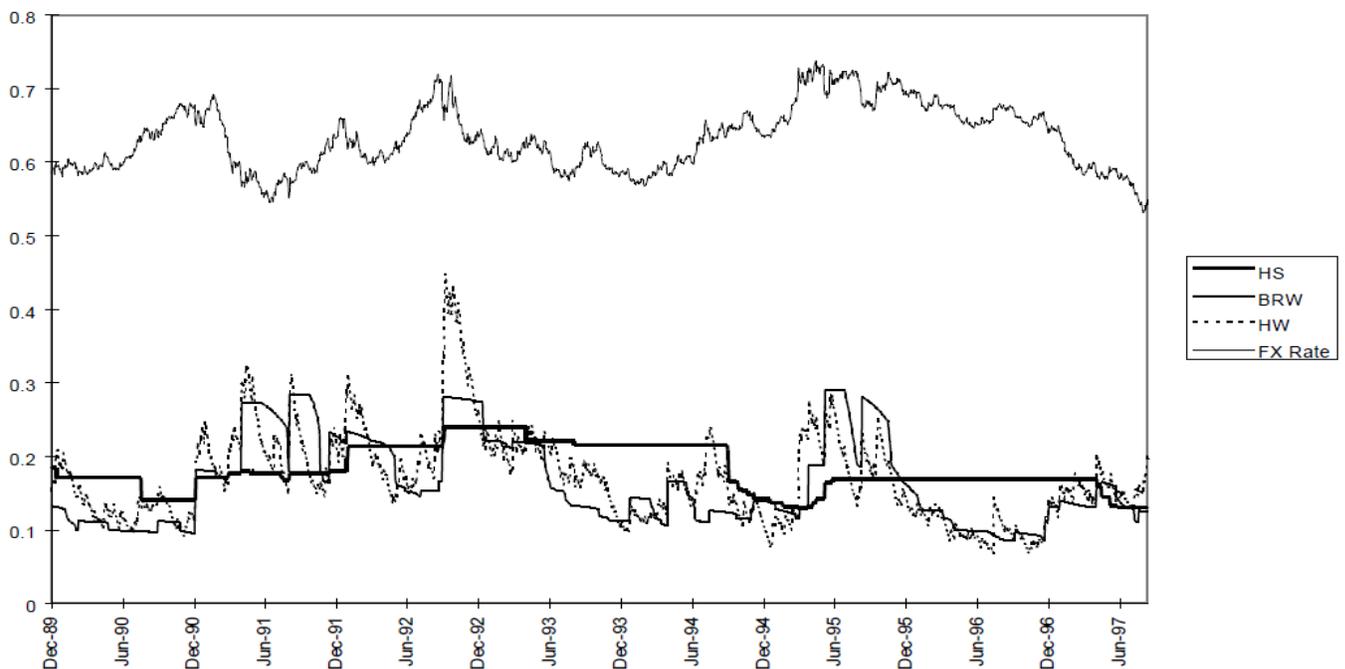
²⁸ Hull e White (1998)

$$\mathbf{h}^*_{j,t} = \sigma_N \frac{\mathbf{h}_{j,t}}{\sigma_{j,t}}$$

dove:

- $\mathbf{h}^*_{j,t}$ è l'osservazione aggiustata per la volatilità;
- $\mathbf{h}_{j,t}$ è l'osservazione effettiva, cioè la variazione del fattore di mercato che effettivamente si è verificata sul mercato al tempo t ;
- $\sigma_{j,t}$ è la volatilità giornaliera calcolata al tempo $t-1$ attraverso una media mobile esponenziale;
- σ_N è la volatilità giornaliera calcolata più recentemente.

Paragonato con l'approccio ibrido di Boudoukh, Richardson e Whitelaw, il modello di Hull e White fornisce migliori stime per il 99-esimo percentile. Infatti alla fine del paper i due riportano uno studio applicativo sul valore a rischio per una posizione lunga di 1\$ sul DEM²⁹, confrontando il loro modello ("HW") con l'approccio ibrido ("BRW") e la simulazione storica tradizionale ("HS") su un campione di 500 osservazioni:



²⁹ Tasso di cambio dollaro/marco tedesco

Il modello di Hull e White non è l'unica proposta di una simulazione storica corretta per la volatilità, infatti per incorporare l'attuale variabilità del mercato è possibile procedere in modo differente³⁰. Per tener conto dei cluster, la varianza del portafoglio viene modellata con un processo GARCH, successivamente ogni osservazione del campione utilizzato per la simulazione storica viene divisa per la volatilità stimata:

$$z_t = r_t / \sigma_t$$

dove:

- r_t è il rendimento osservato al giorno t ;
- σ_t è la volatilità stimata al tempo t attraverso un GARCH(1,1);
- z_t è detto "residuo standardizzato" al tempo t .

Si passa in questo modo dalla serie empirica dei rendimenti alla serie dei residui standardizzati, i quali dovrebbero essere incorrelati se le stime GARCH sono consistenti. Ora, il rendimento simulato di portafoglio per domani è ottenuto moltiplicando un residuo standardizzato random per la volatilità prevista per domani attraverso un GARCH (1,1). Il rendimento simulato è usato per aggiornare il volatility GARCH forecasting per il giorno successivo, la quale viene successivamente moltiplicata per un altro residuo standardizzato (scelto a caso) per simulare il rendimento del portafoglio di dopodomani, cioè due giorni successivi. Si procede così in modo ricorsivo fino a che non si raggiunge l'orizzonte temporale desiderato, ad esempio 10 giorni, e si ripete il processo scegliendo sempre random residui standardizzati per avere sufficienti scenari possibili per il rendimento del portafoglio. Infine il VaR viene calcolato tagliando la distribuzione al percentile desiderato, come in tutti modelli di simulazione.

Un ulteriore modo (molto meno diffuso) per implementare il modello di simulazione storica consiste nell'utilizzare la stima Kernel³¹. La Kernel estimation è un metodo non-parametrico di stima della densità di una variabile aleatoria, che si basa su una media di funzioni non negative centrate attorno a ciascuna osservazione nel campione. La funzione più utilizzata come funzione Kernel varie è la densità Gaussiana standardizzata, che gode di proprietà matematiche che la rendono conveniente (fornisce stime con il maggiore livello di confidenza). In pratica, la stima Kernel è un modo per generalizzare un istogramma costruito sulla base del campione, dove

³⁰ Barone-Adesi, Bourgoin F., Giannopoulos K., (1997)

³¹ Butler, J.S., Schachter, B., (1997)

l'istogramma ha una densità costante per ogni "barra", mentre la funzione Kernel risulterà avere una densità continua e "liscia".

3.5. Le misure di rischio coerenti

Un paper molto famoso nella letteratura del risk management è quello scritto da Artzner sulle "misure coerenti di rischio"³². Una misura di rischio definita "coerente" rispetta quattro assiomi:

- 1) Invarianza per traslazione: l'aggiunta di un ammontare di cash al portafoglio riduce il rischio dello stesso ammontare.
- 2) Omogeneità positiva di primo grado: raddoppiando la posizione di ogni posizione viene raddoppiato anche il rischio dell'intero portafoglio.
- 3) Monotonicità: se le perdite potenziali del portafoglio A sono maggiori di quelle del portafoglio B in ogni scenario possibile allora A è più rischioso di B, dunque richiede più capitale.
- 4) Sub-additività: il rischio di un portafoglio composto da N posizioni è inferiore o uguale alla somma dei rischi delle N posizioni. In pratica, questa condizione afferma che la diversificazione aiuta a ridurre i rischi.

Il VaR soddisfa le prime tre condizioni ma non sempre la quarta. La sub-additività è una proprietà essenziale per i problemi di massimizzazione del portafoglio, in quanto è legata alla convessità della superficie che viene massimizzata nello spazio matematico del portafoglio³³ (infatti la convessità deriva dalla sub-additività e l'omogeneità positiva). Solamente se la superficie dello spazio è convessa sarà possibile trovare un punto che minimizza il rischio e massimizza il

³² Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1999)

³³ Acerbi, C., Tasche D., (2001).

rendimento³⁴. Dunque la proprietà di sub-additività è molto importante nell'ambito del risk management, sia come caratteristica matematica di portafoglio che come assioma di misura coerente di rischio. Purtroppo il VaR non rispetta sempre questa proprietà, eccetto quando viene modellato secondo l'approccio di varianze-covarianze, quando invece la sub-additività viene garantita dalla definizione di VaR stesso. I metodi di simulazione non conducono allo stesso risultato.

È vero che il VaR calcolato con l'approccio parametrico è una misura di rischio sub-additiva:

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 * \rho_{1,2} * \sigma_1 * \sigma_2$$

dove:

- σ_p^2 è la varianza del portafoglio;
- σ_1^2 è la varianza della posizione 1;
- σ_2^2 è la varianza della posizione 2;
- $\rho_{1,2}$ è il coefficiente di correlazione tra la posizione 1 e la posizione 2.

Dunque

$$\sigma_p^2 \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad \text{ne segue che le deviazioni standard}$$

$$\sigma_p \leq \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{moltiplicando per lo } z_\alpha$$

$$z_\alpha * \sigma_p \leq z_\alpha * \sigma_1 + z_\alpha * \sigma_2$$

$$\text{VaR}_p \leq \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2$$

Infatti il VaR di un portafoglio con due posizioni è:

$$\text{VaR}_p = (\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2 * \rho_{1,2} * \text{VaR}_1 * \text{VaR}_2)^{0.5}$$

dove:

- VaR_p è il VaR dell'intero portafoglio;
- VaR_1 è il VaR relativo alla prima posizione;
- VaR_2 è il VaR relativo alla seconda posizione;

³⁴ Teorema della condizione di secondo ordine per l'ottimizzazione vincolata in n-dimensioni.

- $\rho_{1,2}$ è il coefficiente di correlazione dei risk factor delle due posizioni, dato dal rapporto tra la covarianza dei due fattori di rischio e il prodotto delle loro deviazioni standard.

Più in generale, per un portafoglio con N posizioni:

$$\mathbf{VaR}_p = (\mathbf{VaR}_1^2 + \mathbf{VaR}_2^2 + \dots + \mathbf{VaR}_N^2 + 2 * \rho_{1,2} * \mathbf{VaR}_1 * \mathbf{VaR}_2 + \dots + 2 * \rho_{1,N} * \mathbf{VaR}_1 * \mathbf{VaR}_N + \dots + 2 * \rho_{N-1,N} * \mathbf{VaR}_{N-1} * \mathbf{VaR}_N)^{0.5}$$

$$= (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{i,j} * \mathbf{VaR}_i * \mathbf{VaR}_j)^{0.5}$$

Se tutti i risk factor fossero perfettamente correlati tra loro:

$$\mathbf{VaR}_p = \sum_{i=1}^N \mathbf{VaR}_i$$

Ma poiché nella realtà i coefficienti di correlazione sono tutti minori o uguali ad 1:

$$\mathbf{VaR}_p \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{VaR}_i$$

Dunque combinando tra loro più posizioni, il rischio totale può solo diminuire rispetto alla somma dei rischi di partenza e mai aumentare (viene rispettata la diversificazione). Ciò accade perché l'approccio parametrico ipotizza una distribuzione Normale per i fattori di mercato ed il VaR è semplicemente un multiplo della volatilità. Poiché la deviazione standard rispetta il principio della sub-additività ne segue che anche il VaR calcolato in questo modo rispetta questa condizione.

Nonostante questo, però, il VaR non sempre rispetta l'assioma di sub-additività: si possono riportare numerosi esempi³⁵ dove il VaR del portafoglio è maggiore della somma dei VaR delle posizioni:

³⁵ Hull (2012); Resti, Sironi (2008).

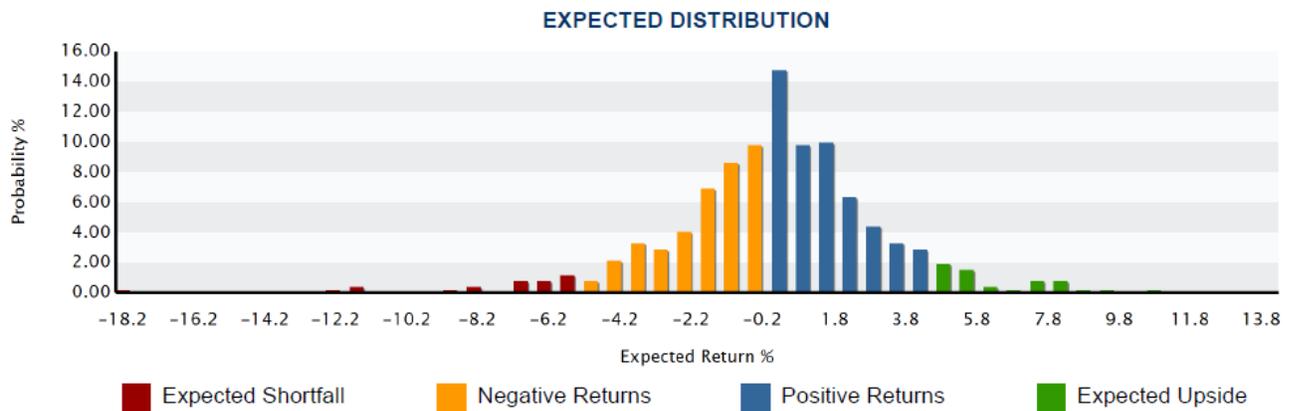
$$\text{VaR}_p > \sum_{i=1}^N \text{VaR}_i$$

Ciò accade tipicamente quando la distribuzione congiunta dei fattori di mercato è più leptokurtica di una Normale multivariata, quindi il VaR delle singole posizioni sottostima il rischio trascurando la dimensione delle perdite in eccesso al VaR stesso. Ne segue che il VaR non è una misura coerente di rischio.

CAPITOLO 4

L'EXPECTED SHORTFALL

Durante la seconda metà degli anni '90, la letteratura si focalizza su modi alternativi per superare i limiti del VaR. Viene introdotta una nuova misura di rischio che si è diffusa velocemente tra le istituzioni finanziarie in quanto supera i limiti del VaR: l'expected shortfall³⁶ ("ES").



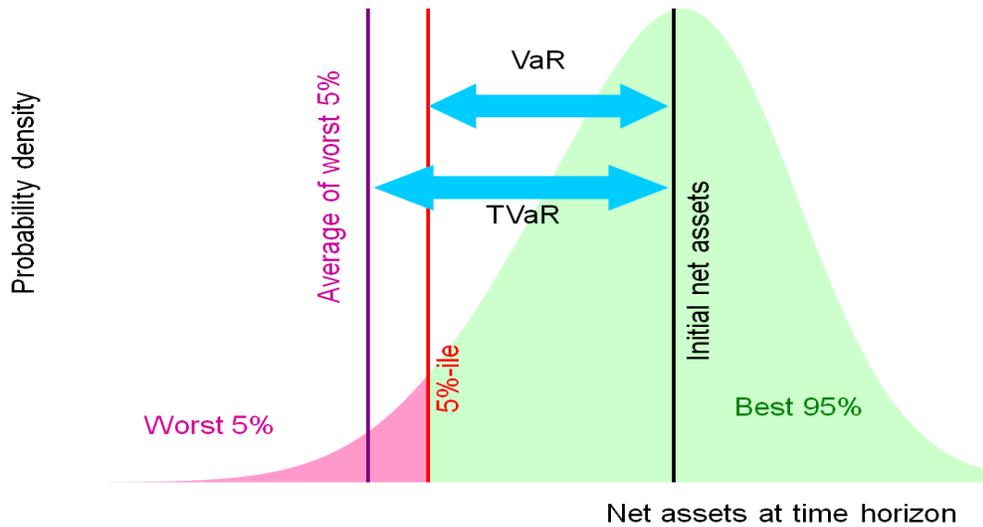
Fonte: StatPro

4.1. VaR vs ES

Il VaR fornisce la frequenza con cui le perdite superano un certo ammontare, ma non specifica di quanto, cioè non fornisce la dimensione delle perdite superiori al VaR stesso. L'ES nasce per superare questo problema, dunque può essere considerato come un VaR condizionato. In altre parole il VaR risponde alla domanda "quanto male possono andare le cose?", mentre l'ES risponde ad una domanda diversa: "se le cose vanno male, quanto ci si aspetta di perdere?". Dunque

³⁶ Chiamato anche Conditional VaR "CVaR" in Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2002)

l'expected shortfall (o Tail VaR) non è altro che il valore atteso delle perdite superiori al VaR, una media condizionata che non considera tutta la distribuzione delle perdite, ma solo quelle superiori al VaR.



Fonte: Nematrian

In formule:

$$ES = E [\text{Loss} \mid \text{Loss} > \text{VaR}]$$

oppure in termini di valore di mercato dell'esposizione:

$$ES = E \{- [VM - E(VM)] - [VM - E(VM)] > \text{VaR}\}$$

più tecnicamente, in termini di rendimento di portafoglio:

$$ES_{a, t+1} = - E_t [r_{t+1} \mid r_{t+1} < -\text{VaR}]$$

Dalla formula si nota che l'ES dipende esplicitamente dal VaR stimato attraverso un determinato livello di confidenza. In un certo senso, il VaR assegna il 100% del peso all'X-esimo quantile e lo 0% agli altri, invece l'ES assegna uguale peso a tutti i quantili maggiori dell'X-esimo e 0% a tutti gli altri.

4.2. Le proprietà dell'ES come misura coerente di rischio

In un paper molto famoso³⁷ del 2001, Acerbi e Tasche dimostrano che l'expected shortfall rispetta gli assiomi di Artzner, compresa la sub-additività.

Sia X la variabile casuale che descrive il valore futuro di profitti/perdite di un portafoglio sull'orizzonte temporale T e sia $\alpha\%$ la probabilità del worst case scenario per il suddetto portafoglio. Si supponga che X ha n possibili realizzazioni: X_i con $i=1, \dots, n$, ordinabili in modo crescente in modo da identificare l'insieme di esiti del worst case. Inoltre sia w il numero di realizzazioni di X_i appartenenti al worst case, dove $w=n*\alpha$. In altre parole ci sono w possibili scenari per il rendimento del portafoglio di cui w sono perdite superiori al VaR. Per definizione l'expected shortfall è la media delle perdite superiori al VaR, cioè il valore atteso dello scenario worst case:

$$ES_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w} = -(\text{Average of least } \alpha\% \text{ outcomes } X_i)$$

Ora, per dimostrare la coerenza dell'ES, si considerino due variabili aleatorie X e Y (cioè un portafoglio con due assets):

$$\begin{aligned} ES_n^{(\alpha)}(X + Y) &= -\frac{\sum_{i=1}^w (X + Y)_{i:n}}{w} \\ &\leq -\frac{\sum_{i=1}^w (X_{i:n} + Y_{i:n})}{w} \\ &= ES_n^{(\alpha)}(X) + ES_n^{(\alpha)}(Y) \end{aligned}$$

³⁷ Acerbi, C., Tasche D., (2001).

Questo prova che l'expected shortfall è un'alternativa coerente al VaR, in quanto rispetta il principio di sub-additività. Nonostante questo, il VaR resta tuttora la metodologia più utilizzata da banche e fondi di investimento per misurare e gestire il rischio di mercato, in quanto è più semplice e veloce, inoltre il backtesting dell'ES è molto più complesso rispetto a quello del VaR.

Ulteriori studi³⁸ hanno approfondito le proprietà dell'ES, in particolare è possibile dimostrare che i problemi di ottimizzazione dell'ES, differentemente dal VaR, possono essere risolti in modo efficiente come un normale problema di ottimizzazione convessa, mentre i problemi di ottimizzazione dell'ES di portafoglio possono essere trattati come semplici problemi di massimizzazione lineare.

4.3. L'Extreme Value Theory

Il problema delle perdite in eccesso, risolto dall'ES, era già stato posto dalla Extreme Value Theory ("EVT") qualche anno prima: il VaR non specifica quanto grandi possono essere le perdite superiori al valore a rischio, per sapere quanto male può andare se si verifica quell' $\alpha\%$, si può anche utilizzare la "mean excess function" dalla EVT, la scienza che studia i metodi di stima delle code di una distribuzione.

L'Extreme Value Theory si diffonde grazie a Richard Smith nel 1990 come strumento statistico per misurare eventi estremi di ogni tipo, quali incendi, tempeste e terremoti. Non nasce come strumento di risk management. È stato Embrechts a dare alla EVT questa sfumatura, applicandola prima all'ambito assicurativo-finanziario³⁹ e poi al VaR di portafoglio⁴⁰. Questa scienza consente di studiare gli estremi ed estrapolare le code delle distribuzioni empiriche.

³⁸ Bertsimas, D., Lauprete, G.J., Samarov, A. (2004)

³⁹ Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997)

⁴⁰ Embrechts, P. (2000)

Sia $F(L)$ la funzione di distribuzione della variabile L (perdite su un certo portafoglio in un certo arco di tempo). Sia u un valore soglia di L che giace nella coda destra della distribuzione (ad esempio il VaR).

- La probabilità che L sia tra u e $u+y$ (con $y>0$) è: $F(u+y) - F(u)$.
- La probabilità che L sia maggiore di u è: $1 - F(u)$.
- La probabilità che L sia compresa tra u e $u+y$ condizionata da $L > u$, è:

$$\frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Questa probabilità rappresenta la coda destra della distribuzione probabilistica. La EVT dimostra che questa distribuzione, al crescere del valore soglia u (cioè il VaR), converge ad una distribuzione Paretiana generalizzata $G_{\xi,\beta}$:

$$1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

dove:

- β è il parametro di scala;
- ξ è il parametro di forma che determina lo spessore della coda (è nullo nella Normale ed aumenta con l'aumentare della kurtosi⁴¹);
- i parametri ξ e β vengono stimati attraverso la funzione di log-verosimiglianza.

Dunque essendo la definizione di VaR

$$F(\text{VaR}) = \alpha$$

applicando la EVT sopra illustrata, e sapendo che la probabilità che L sia maggiore di u è: $1 - F(u)$, si ha⁴²:

$$\text{VaR} = u + \frac{\beta}{\xi} \{[(1 - F(u)) * (1 - \alpha)]^{-\xi} - 1\}$$

⁴¹ Per la maggior parte dei dati finanziari $0.1 < \xi < 0.4$

⁴² Hull J. (2012)

$$ES = \frac{VaR + \beta - \xi * u}{1 - \xi}$$

Il problema di questo approccio è che è molto complesso e dispendioso. Il VaR parametrico rimane il modello più semplice e veloce, dunque più utilizzato.

PARTE II
LA NORMATIVA DI VIGILANZA
PRUDENZIALE

CAPITOLO 5

LA DISCIPLINA PER LE BANCHE ITALIANE SUL RISCHIO DI MERCATO

Coerentemente con la disciplina di vigilanza decisa in sede internazionale negli Accordi di Basilea, in Italia viene previsto l'obbligo di rispettare requisiti patrimoniali per i rischi di mercato. La disciplina è valida per le banche e i gruppi bancari con riferimento a tutte le esposizioni al rischio di mercato.

Il rischio di mercato viene generalmente definito come il rischio di perdite a seguito di variazioni sfavorevoli dei fattori di mercato. In particolare,

- I tassi di interesse, che influenzano le posizioni sui titoli di debito
- I prezzi azionari, che influenzano le posizioni sui titoli di capitale
- I prezzi delle materie prime, che influenzano le posizioni legate alle commodity
- I tassi di cambio, che influenzano le posizioni in valuta estera.

5.1. Le attuali fonti normative

Il rispetto dei requisiti patrimoniali previsti assorbe la copertura patrimoniale richiesta per gli intermediari bancari, autorizzati ai sensi dell'art. 19, comma 4, del T.U.F., dalle disposizioni del Regolamento applicativo della Banca d'Italia.⁴³

Il 27 giugno 2013 sono stati pubblicati nella Gazzetta ufficiale dell'Unione Europea (GUUE) i testi del Regolamento (UE) n. 575/2013 (o "CRR") e della Direttiva 2013/36/UE (o "CRD IV") con i quali vengono introdotte nell'Unione Europea le regole definite dal Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria nel dicembre 2010 con l'intento di promuovere un sistema bancario più solido e

⁴³ Le presenti disposizioni si applicano alle banche comunitarie e alle società finanziarie aventi sede in uno stato comunitario. Per quanto riguarda i gruppi bancari, il requisito consolidato è costruito come somma dei requisiti individuali delle singole banche e imprese di investimento appartenenti al gruppo bancario

resistente agli shock finanziari. Tali nuovi provvedimenti (cd. Level 1 text) – che sostituiscono integralmente la Direttiva 2006/48/CE (“CRD”), relativa all'accesso all'attività degli enti creditizi e al suo esercizio, e la Direttiva 2006/49/CE (“CAD”), relativa all'adeguatezza patrimoniale delle imprese di investimento e degli enti creditizi – costituiscono il quadro normativo di riferimento nell'Unione Europea per banche e imprese di investimento (SIM) dal 1° gennaio 2014. Il nuovo quadro normativo, promosso con un'iniziativa legislativa della Commissione Europea del luglio 2011, costituisce l'attuazione del progetto definito nel Consiglio Europeo del giugno 2009 relativo all'istituzione di un single rulebook applicabile alle istituzioni finanziarie del Mercato Unico, ossia di una disciplina unica e di armonizzazione delle normative prudenziali degli Stati membri.

La nuova legislazione europea si compone di due atti:

- la Direttiva 2013/36/UE, che dovrà essere recepita negli ordinamenti nazionali, contenente disposizioni in materia di: autorizzazione all'esercizio dell'attività bancaria, libertà di stabilimento e libera prestazione dei servizi, cooperazione fra autorità di vigilanza, processo di controllo prudenziale, metodologie per la determinazione delle riserve di capitale (buffer), disciplina delle sanzioni amministrative, regole su governo societario e remunerazioni;

- il Regolamento (UE) n. 575/2013, che avendo diretta efficacia negli Stati membri non richiede il recepimento da parte degli Stati membri e che definisce le norme in materia di fondi propri, requisiti patrimoniali minimi, rischio di liquidità, leva finanziaria (leverage), informativa al pubblico.

Il single rulebook europeo si compone, oltre che dal Regolamento e dalla Direttiva, anche degli standard tecnici vincolanti e delle linee guida dell'Autorità Bancaria Europea (European Banking Authority - EBA) cui il nuovo framework affida la disciplina di attuazione della normativa primaria (cd. Level 2 text) nonché la definizione delle regole ai fini del reporting alle autorità di vigilanza

L'utilizzo di modelli interni come misurazione di rischio è direttamente regolato dal CRR, in particolare dalla Parte Tre, Titolo II, Capi 1 e 3 (rischio di credito – metodo basato sui rating interni), dalla Parte Tre, Titolo II, Capo 6 (rischio di controparte), dalla Parte Tre, Titolo III (rischio operativo), dalla Parte Tre, Titolo IV (rischio di mercato), dalla Parte Tre, Titolo V (rischio di regolamento) e dalla Parte Tre, Titolo VI (rischio di aggiustamento della valutazione del credito).

Per quanto riguarda la disciplina del rischio di mercato, questa è direttamente regolata:

— dal CRR, Parte Tre, Titolo IV (rischio di mercato) e Titolo V (rischio di regolamento);

— dai regolamenti della Commissione europea recanti le norme tecniche di regolamentazione per:

- definire i metodi per riflettere, nei requisiti di fondi propri per il rischio di posizione, i rischi diversi dal rischio delta in misura proporzionale all'entità e alla complessità delle attività in opzioni e warrants (art. 329, par. 3 CRR);
- definire il termine "mercato" (art. 341, par. 3 CRR);
- elencare gli indici azionari pertinenti adeguatamente diversificati (art. 344, par. 1 CRR);
- definire i metodi per riflettere, nei requisiti di fondi propri per il rischio di cambio, i rischi diversi dal rischio delta in misura proporzionale all'entità e alla complessità delle attività in opzioni (art. 352, par. 6 CRR).
- elencare le valute strettamente correlate (art. 354, par. 3 CRR);
- definire i metodi per riflettere, nei requisiti di fondi propri per il rischio di posizione in merci, i rischi diversi dal rischio delta in misura proporzionale all'entità e alla complessità delle attività in opzioni (art. 358, par. 4 CRR);
- per i modelli interni per il calcolo dei requisiti di fondi propri, specificare i criteri per valutare il carattere sostanziale delle loro estensioni e delle modifiche dell'uso, la metodologia di valutazione per l'autorizzazione del loro uso, le condizioni alle quali la parte di posizioni cui si applica il modello interno nell'ambito di una categoria di rischio è considerata significativa (art. 363, par. 4 CRR).

La materia è altresì disciplinata dai seguenti articoli del TUB:

- art. 53, co. 1, lett. a), b) e d), che attribuisce alla Banca d'Italia, in conformità delle deliberazioni del CICR, il potere di emanare disposizioni aventi a oggetto l'adeguatezza patrimoniale, il contenimento del rischio nelle sue diverse configurazioni nonché il governo societario, l'organizzazione amministrativa e contabile, i controlli interni e i sistemi di remunerazione e di incentivazione;

- art. 53, co. 3, che attribuisce, tra l'altro, alla Banca d'Italia il potere di adottare, ove la situazione lo richieda, provvedimenti specifici nei confronti di singole banche per le materie indicate nel comma 1;
- art. 67, co. 1, lett. a), b) e d), co. 2-ter e co. 3-bis, il quale, al fine di realizzare la vigilanza consolidata, prevede che la Banca d'Italia, in conformità delle deliberazioni del CICR, impartisca alla capogruppo o a componenti del gruppo bancario, con provvedimenti di carattere generale o particolare, disposizioni aventi a oggetto l'adeguatezza patrimoniale, il contenimento del rischio nelle sue diverse configurazioni nonché il governo societario, l'organizzazione amministrativa e contabile, i controlli interni e i sistemi di remunerazione e di incentivazione.

La disciplina tiene inoltre conto delle disposizioni emanate dalla Banca d'Italia ai sensi degli artt. 2 e 4 della legge 7 agosto 1990, n. 241, e successive modificazioni.

5.2. Il Patrimonio di Vigilanza e TIER 3

Il primo accordo di Basilea del 1988 aveva definito il patrimonio di vigilanza, come strumento di copertura del solo rischio di credito, somma algebrica di due componenti: TIER 1 e TIER 2. Il primo (anche chiamato patrimonio di base) è composto da strumenti più “pregiati”, cioè di più elevata qualità rispetto al TIER 2 (chiamato anche patrimonio supplementare), come ad esempio il capitale versato, utili non distribuiti, strumenti innovativi di capitale. Il patrimonio di vigilanza totale (TIER 1 + TIER 2) deve essere almeno pari all'8% delle attività ponderate per il rischio.

Il problema di Basilea I è che era limitato al solo rischio di credito. Dopo qualche anno viene proposta l'aggiunta della disciplina sul rischio di mercato⁴⁴ che si concretizza nella modifica

⁴⁴ Nel 1993 viene aggiunta la disciplina del rischio di mercato riguardante il metodo di calcolo standardizzato. Nel 1996 vengono introdotti i modelli interni per la misurazione del rischio di mercato.

ufficiale degli Accordi di Basilea del 1996. A sua volta, la nuova versione di Basilea I è stata assorbita da Basilea II nel 2004.

Il secondo accordo di Basilea porta significativi cambiamenti: vengono considerati non soltanto il rischio di credito e quello di mercato ma anche il rischio operativo. Dal 2004, dunque, il patrimonio di vigilanza (dato sempre dalla somma dei TIER 1 e 2 e almeno pari all'8% delle attività ponderate per il rischio) deve coprire il rischio di credito ed il rischio operativo. Per quanto riguarda il rischio di mercato viene introdotta una nuova classe di patrimonio: il TIER 3, consistente in debiti subordinati a breve termine, unicamente allo scopo di assolvere una parte dei requisiti patrimoniali per i rischi di mercato. Per essere considerati idonei come patrimonio di classe 3, i debiti subordinati a breve dovranno poter divenire, ove le circostanze lo richiedano, parte del patrimonio permanente della banca ed essere così disponibili per la copertura di perdite in caso di insolvenza. Essi dovranno, pertanto, come minimo:

- essere non garantiti, subordinati e interamente versati;
- avere una scadenza originaria di almeno due anni;
- non essere redimibili prima della scadenza pattuita, salvo benestare dell'autorità di vigilanza;
- essere assoggettati a una clausola di blocco (*lock-in*), in base alla quale non possono essere effettuati pagamenti né di interessi né di capitale (anche a scadenza), ove a seguito di tali pagamenti il patrimonio della banca scenda o rimanga al di sotto del requisito patrimoniale minimo.

Con Basilea II, quindi, le banche avevano a disposizione il Patrimonio di Vigilanza complessivo (TIER 1 + TIER 2) per la copertura del rischio di credito e operativo, ed il TIER 3 (non eccedente il 250% del patrimonio di base) esclusivamente per il rischio di mercato. In particolare, per effetto della riforma, il requisito minimo obbligatorio diventa pari alla somma di 5 componenti:

- il patrimonio a fronte del credit risk (solo sul banking book)
- il patrimonio a fronte dei rischi di tasso e azionario (solo sul trading book)
- il patrimonio a fronte dei rischi di cambio e sulle materie prime (sia sul trading book che sul banking book)
- il requisito patrimoniale connesso al rischio di regolamento e al rischio di concentrazione sulle posizioni del trading book (solo per le banche dell'UE)
- il patrimonio richiesto a fronte del rischio operativo.

Sfortunatamente il secondo accordo di Basilea entro in vigore nel 2007, parallelamente alla crisi finanziaria, rivelandosi insufficiente. La crisi aveva mostrato che il rischio sistemico ed il rischio di liquidità non potevano essere sottovalutati. Il più recente accordo, Basilea III (2009/2013) vuole superare tutti i limiti dei precedenti regolamenti, introducendo misure specifiche per il rischio di liquidità, componenti aggiuntivi di capitale per il rischio sistemico e buffer anticiclici.

Basilea III definisce il nuovo patrimonio di vigilanza in questo modo: il patrimonio di vigilanza complessivo (di cui è stata migliorata la qualità della composizione) è composto dalla somma algebrica degli elementi di seguito specificati:

1. Patrimonio di base o Tier 1 (in grado di assorbire le perdite in condizioni di continuità d'impresa o *going concern*):
 - a. patrimonio di qualità primaria (Common Equity Tier 1);
 - b. Tier 1 aggiuntivo.
2. Patrimonio supplementare o Tier 2 (in grado di assorbire le perdite in caso di crisi – *gone concern*).

Inoltre:

il Common Equity Tier 1 deve essere pari, in qualsiasi momento, ad almeno il 4,5% delle attività ponderate per il rischio;

il patrimonio di base deve essere pari, in qualsiasi momento, ad almeno il 6,0% delle attività ponderate per il rischio;

il patrimonio di vigilanza totale (patrimonio di base più patrimonio supplementare) deve essere pari in qualsiasi momento ad almeno l'8,0% delle attività ponderate per il rischio.

Per quanto riguarda il TIER 3, Basilea III lo elimina. Oggi il rischio di mercato è coperto dal TIER 1 e TIER 2 di cui è stata migliorata fortemente la qualità. Questa scelta è coerente con la politica di rafforzamento dei requisiti patrimoniali, infatti ora il rischio di mercato verrà affrontato con strumenti della stessa qualità di quelli utilizzati per coprire il rischio di credito ed il rischio operativo.

5.3. Il rischio di tasso di interesse nel banking book

Il Comitato ha individuato un certo numero di temi importanti ai quali banche e autorità di vigilanza dovrebbero rivolgere in particolare la loro attenzione nell'attuare il processo di controllo prudenziale. Tra questi figurano alcuni rischi chiave non direttamente affrontati nell'ambito del primo pilastro e valutazioni di rilievo che le autorità di vigilanza dovrebbero effettuare per garantire il corretto funzionamento di taluni meccanismi del primo pilastro. Uno di questi temi è il rischio di interesse nel banking book.

In realtà, i rischi di mercato (tra cui il rischio di tasso) riguardano tutte le attività/passività finanziarie detenuta da una banca, anche se generalmente si associa il rischio di mercato con la gestione del trading book. Il rischio di interesse emerge sia dal trading book che dal banking book, ma ci sono delle differenze tra i due portafogli che rendono questo un tema molto delicato. Per prima cosa il trading book e il banking book sono soggetti a trattamenti contabili differenti, in secondo luogo la composizione del trading book cambia molto frequentemente mentre quella del banking book tende a rimanere stabile (per questo vengono chiamati rispettivamente “portafoglio non immobilizzato” e “portafoglio immobilizzato”).

Il Comitato resta dell'opinione che il rischio di tasso di interesse nel banking book sia un rischio potenzialmente significativo che richiede un'adeguata copertura patrimoniale. Tuttavia, i commenti pervenuti dal settore e le ulteriori analisi effettuate dal Comitato hanno messo in luce una considerevole eterogeneità tra le banche attive a livello internazionale quanto alla natura del rischio sottostante e ai relativi procedimenti di gestione e monitoraggio.

Per questi motivi, il Comitato è pervenuto alla conclusione che sia più appropriato trattare il rischio di tasso di interesse nel banking book nel quadro del secondo pilastro dello Schema. Le autorità di vigilanza che riscontrino una sufficiente omogeneità fra le banche della propria giurisdizione riguardo alla natura e ai metodi di monitoraggio e di misurazione di tale rischio potrebbero stabilire un apposito requisito patrimoniale minimo obbligatorio.

In sede di revisione delle linee guida in materia, i sistemi interni delle banche sono stati ritenuti il principale strumento sia per misurare il rischio di tasso di interesse nel banking book sia per graduare la risposta di vigilanza.

Qualora le autorità di vigilanza accertino che una banca non dispone di un patrimonio commisurato al suo livello di rischio di tasso di interesse, esse devono richiedere alla medesima di ridurre

l'esposizione e detenere una specifica dotazione patrimoniale aggiuntiva. Le autorità di vigilanza dovrebbero prestare particolare attenzione all'adeguatezza patrimoniale delle banche "anomale", ossia quelle il cui valore economico si riduce di oltre il 20% della somma del patrimonio di base e di quello supplementare per effetto di uno shock standardizzato di tasso (200 punti base) o un suo equivalente, come descritto nel documento di accompagnamento *Principles for the Management and Supervision of Interest Rate Risk*⁴⁵.

In generale, questi principi rafforzano la trasparenza e la prudenza nella gestione del rischio di interesse. In particolare, gli ultimi due principi (14 e 15) riguardano il banking book. Basilea II non prevede un requisito patrimoniale esplicito per il rischio di interesse del banking book, ma prevede che gli organi di vigilanza dei singoli Paesi possano richiedere un supplemento di capitale alle banche che presentano un elevato grado di rischio di interesse. Le banche devono stimare la potenziale riduzione del proprio valore economico ipotizzando uno shock standard (2%) e comunicare i risultati alle autorità di vigilanza.

⁴⁵ Questo documento è stato pubblicato per la prima volta nel 1997, presentando 12 principi guida per la misurazione e gestione del rischio di tasso. Successivamente sono stati aggiornati e portati a 15 nel 2004 insieme al secondo Accordo.

CAPITOLO 6

IL METODO STANDARD DI BASILEA

La metodologia standard di Basilea per la definizione dei requisiti patrimoniali (introdotta nel 1993) si fonda sul così detto “approccio a blocchi” (*building-block approach*), secondo il quale si identificano i requisiti di capitale separati per i diversi tipi di rischio (tassi d’interesse, tassi di cambio, prezzi azionari e prezzi di merci) e successivamente vengono uniti attraverso somma algebrica. In altre parole, il requisito complessivo per coprire il rischio di mercato è la somma dei requisiti su titoli di debito, titoli di capitale, materie prime e valute. In particolare, il rischio di posizione su obbligazioni e azioni viene suddiviso in due componenti: il rischio generico ed il rischio specifico.

In generale, il rischio di posizione esprime il rischio che deriva dall’oscillazione del prezzo dei valori mobiliari per fattori attinenti all’andamento dei mercati e alla situazione della società emittente. Il rischio di posizione è calcolato con riferimento al portafoglio di negoziazione⁴⁶ della banca e comprende due distinti elementi:

- il rischio generico, che si riferisce al rischio di perdite causate da un andamento sfavorevole dei prezzi della generalità degli strumenti finanziari negoziati. Per i titoli di debito questo rischio dipende da una avversa variazione del livello dei tassi di interesse, mentre per i titoli di capitale da uno sfavorevole movimento generale del mercato;
- il rischio specifico, che consiste nel rischio di perdite causate da una sfavorevole variazione del prezzo degli strumenti finanziari negoziati dovuta a fattori connessi con la situazione dell’emittente.

Il modello che questa tesi andrà ad esporre consiste nella misurazione del rischio di tasso su titoli di debito. Dunque è bene approfondire la disciplina sui titoli di debito.

⁴⁶ Questo approccio si applica esclusivamente alle posizioni in titoli di debito e azioni del trading book

6.1. Il rischio di posizione dei titoli di debito

Ai fini del calcolo del rischio di posizione dei titoli di debito vanno considerate le posizioni del portafoglio non immobilizzato relative:

- ai titoli di debito rappresentati da attività “in bilancio” e da contratti derivati sui titoli di debito;
- ai contratti derivati su tassi di interesse;
- alle azioni privilegiate non convertibili a dividendo fisso;
- agli altri strumenti il cui valore presenta un andamento analogo ai titoli di debito;
- alle posizioni (lunghe e corte) relative alla data di regolamento delle operazioni fuori bilancio del portafoglio immobilizzato.

Al fine del calcolo del rischio generico su titoli di debito, le banche possono utilizzare due metodi alternativi: uno basato sulla scadenza degli strumenti di debito, l'altro sulla durata finanziaria (duration). Il metodo basato sulla scadenza prevede la misurazione del rischio di tasso d'interesse attraverso il calcolo della posizione netta relativa a ciascuna emissione e la successiva distribuzione in fasce temporali di vita residua. Il requisito patrimoniale è dato dalla somma dei valori delle posizioni residue e delle posizioni compensate. Alle banche appartenenti a gruppi bancari si applicano ponderazioni in misura ridotta, mentre per quelle non appartenenti a gruppi bancari sono previste ponderazioni in misura piena. Questo metodo è il più diffuso come alternativa ai modelli interni di calcolo del VaR.

6.2. Il metodo basato sulla Scadenza

Il requisito patrimoniale connesso al rischio specifico è pari, per ogni emissione obbligazionaria, ad una certa percentuale dell'ammontare netto detenuto dalla banca. Questa percentuale dipende dal tipo di emittente, dal suo rating e dalla vita residua del titolo.

Il processo di determinazione del requisito patrimoniale connesso al rischio generico per i titoli di debito è basato sul cash flow mapping strutturato in 15 fasce di scadenza, riunite in tre zone. In particolare, tale procedimento consta di dieci fasi distinte, di seguito indicate:

1. Calcolo della posizione netta relativa a ciascuna emissione

Con riferimento a ciascuna emissione di titoli, la banca potrebbe presentare le seguenti posizioni, in bilancio e fuori bilancio:

- i. Titoli di proprietà (posizioni lunghe e posizioni corte)
- ii. Operazioni fuori bilancio: Contratti derivati con titolo sottostante (posizione lunghe e corte); Contratti derivati senza titolo sottostante (posizioni lunghe e corte); Altre operazioni fuori bilancio (posizioni lunghe e corte)
- iii. Totale portafoglio non immobilizzato (posizioni lunghe e corte)

Per il calcolo della posizione netta di ciascuna emissione si applicano i seguenti criteri convenzionali:

- a) in primo luogo, si compensano le posizioni di segno opposto appartenenti alla medesima categoria di operazioni sopra indicate;
- b) qualora, effettuata la compensazione di cui al punto a), sussistano all'interno della categoria 2) ("operazioni fuori bilancio") posizioni di segno opposto, queste vengono tra loro compensate attribuendo il residuo alla tipologia che presenta il maggiore valore assoluto;

c) qualora, effettuata la compensazione di cui al punto b), sussistano posizioni di segno opposto nelle due categorie 1) (“titoli di proprietà”) e 2) (“operazioni fuori bilancio”), si procede alla loro compensazione attribuendo il residuo alla categoria che presenta il maggiore valore assoluto.

2. *Attribuzione delle posizioni nette relative a ciascuna emissione nelle fasce temporali pertinenti e loro ponderazione*

In relazione alla vita residua si procede alla attribuzione di ogni posizione netta in una delle fasce temporali di seguito indicate.

Sono previste 13 per i titoli di debito con cedola pari o superiore al 3 per cento; 15 per titoli di debito con cedola inferiore al 3 per cento.

All'interno di ciascuna fascia, si esegue la somma delle posizioni nette lunghe e delle posizioni nette corte al fine di ottenere la posizione lunga e la posizione corta della fascia.

Le posizioni lunghe e corte di ciascuna fascia vengono singolarmente ponderate per il relativo fattore di ponderazione.

ZONE	FASCE TEMPORALI DI SCADENZA		FATTORI DI PONDERAZIONE	
	Cedola \geq 3%	Cedola < 3%	Misura piena	Misura ridotta
Zona 1	Fino a 1 mese	Fino a 1 mese	0%	0%
	Da oltre 1 mese fino a 3 mesi	Da oltre 1 mese fino a 3 mesi	0.20%	0.13%
	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	0.40%	0.27%
	Da oltre 6 mesi fino a 1 anno	Da oltre 6 mesi fino a 1 anno	0.70%	0.47%
Zona 2	Da oltre 1 anno fino a 2 anni	Da oltre 1 anno fino a 1.9 anni	1.25%	0.83%
	Da oltre 2 anni fino a 3 anni	Da oltre 1.9 anni fino a 2.8 anni	1.75%	1.17%
	Da oltre 3 anni fino a 4 anni	Da oltre 2.8 anni fino a 3.6 anni	2.25%	1.50%

Zona 3	Da oltre 4 anno fino a 5 anni	Da oltre 3.6 anno fino a 4.3 anni	2.75%	1.83%
	Da oltre 5 anni fino a 7 anni	Da oltre 4.3 anni fino a 5.7 anni	3.25%	2.17%
	Da oltre 7 anni fino a 10 anni	Da oltre 5.7 anni fino a 7.3 anni	3.75%	2.50%
	Da oltre 10 anni fino a 15 anni	Da oltre 7.3 anni fino a 9.3 anni	4.50%	3.00%
	Da oltre 15 anni fino a 20 anni	Da oltre 9.3 anni fino a 10.6 anni	5.25%	3.50%
	Oltre 20 anni	Da oltre 10.6 anni fino a 12 anni	6.00%	4.00%
		Da oltre 12 anni fino a 20 anni	8.00%	5.33%
	Oltre 20 anni	12.50%	8.33%	

3. *Compensazione all'interno di una stessa fascia*

Con riferimento a ciascuna fascia temporale, si compensa la posizione ponderata lunga con la posizione ponderata corta.

La posizione ponderata, lunga o corta, di importo minore costituisce la “posizione ponderata compensata” della fascia.

La differenza fra le due posizioni rappresenta invece la “posizione ponderata residua (lunga o corta)” della fascia.

4. *Calcolo della coperture patrimoniale per le posizioni compensate all'interno di una stessa fascia*

Il primo dei requisiti patrimoniali richiesti è determinato applicando un “fattore di non compensabilità verticale”, pari al 10 per cento, alla somma delle posizioni ponderate compensate di ciascuna fascia.

Se, ad esempio, in una data fascia temporale la somma delle posizioni ponderate lunghe è di 100 milioni e la somma delle posizione ponderate corte è di 90 milioni, la quota di non compensabilità verticale per quella fascia è pari al 10% di 90 milioni, ossia 9 milioni.

5. Compensazione all'interno di una stessa zona

Per ogni zona si sommano tutte le “posizioni ponderate residue” delle fasce appartenenti alla medesima zona che presentano il medesimo segno algebrico così da calcolare la “posizione ponderata lunga totale” e la “posizione ponderata corta totale” di ciascuna zona.

La posizione di minore importo tra le due costituisce la “posizione ponderata compensata” della zona.

La differenza tra le due posizioni costituisce, invece, la “posizione ponderata residua (lunga o corta)” della zona.

6. *Calcolo della copertura patrimoniale per le posizioni compensate all'interno di una stessa zona*

Il secondo dei requisiti patrimoniali richiesti è determinato applicando i “fattori di non compensabilità” (tabella successiva) alle “posizioni ponderate compensate” di ciascuna zona e sommando, conseguentemente, i 3 ammontari così ottenuti.

ZONE⁴⁷	FASCIA TEMPORALE	ENTRO LA ZONA	FRA ZONE ADIACENTI	FRA LE ZONE 1 E 3		
Zona 1	0 – 1 mese	0.4 (piena)	0.4 (piena)	150% (piena)		
	1 – 3 mesi					
	3 – 6 mesi	0.3 (ridotta)			0.3 (ridotta)	
	6 – 12 mesi					
Zona 2	1 – 2 anni	0.3 (piena)				0.4 (piena)
	2 – 3 anni				0.3 (ridotta)	
	3 – 4 anni				0.2 (ridotta)	
Zona 3	4 – 5 anni	0.3 (piena)			0.4 (piena)	100% (ridotta)
	5 – 7 anni					
	7 – 10 anni					
	10 – 15 anni				0.3 (ridotta)	
	15 – 20 anni					
	Oltre 20 anni					

7. Compensazione tra zone diverse

Si esegue la compensazione tra le “posizioni ponderate residue” appartenenti alle 3 zone diverse, confrontando la situazione della zona 1 con quella della zona 2 e il relativo risultato con la situazione della zona 3.

⁴⁷ Le zone per i titoli con cedola inferiore al 3% sono da 0 a 12 mesi, da 1 a 3,6 anni e oltre 3,6 anni.

In particolare, dal confronto della zona 1 con la zona 2 possono aversi due casi:

— le “posizioni ponderate residue” della zona 1 e della zona 2 sono di segno opposto;

— le “posizioni ponderate residue” della zona 1 e della zona 2 sono dello stesso segno.

Nel primo caso, si compensano le “posizioni ponderate residue” della zona 1 e della zona 2.

La “posizione ponderata residua” di importo minore rappresenta la “posizione ponderata compensata” tra la zona 1 e la zona 2.

La differenza tra le due posizioni (“posizione ponderata residua” delle zone 1 e 2) va convenzionalmente imputata alla zona 1 o 2 avente la “posizione ponderata residua” di maggiore importo in valore assoluto.

Qualora quest’ultima differenza e la posizione della zona 3:

— siano del medesimo segno, la loro somma costituisce la “posizione ponderata residua finale”;

— siano di segno opposto, il minore di tali valori è la “posizione ponderata compensata” tra la zona 1 e la zona 3 oppure “posizione ponderata compensata” tra la zona 2 e la zona 3, a seconda che la “posizione ponderata residua” delle zone 1 e 2 sia stata attribuita rispettivamente alla zona 1 o alla zona 2. La differenza tra le due posizioni rappresenta, invece, la “posizione ponderata residua finale”.

Invece, nel secondo caso, in presenza di “posizioni ponderate residue” delle zone 1 e 2 aventi medesimo segno, occorre distinguere due ulteriori casi:

— qualora anche la “posizione ponderata residua” della zona 3 presenti lo stesso segno, la somma delle “posizioni ponderate residue” delle tre zone costituisce la “posizione ponderata residua finale”;

— qualora, invece, la “posizione ponderata residua” della zona 3 presenti segno contrario a quello delle zone 1 e 2, occorre procedere in primo luogo alla compensazione delle “posizioni ponderate residue” delle zone 2 e 3.

La posizione residua di importo minore rappresenta la “posizione ponderata compensata” tra le zone 2 e 3.

La differenza tra le due posizioni, denominata “posizione ponderata residua” delle zone 2 e 3, va convenzionalmente imputata alla zona avente la “posizione ponderata residua” di maggiore importo in valore assoluto. Qualora quest’ultima posizione:

- a) sia imputata alla zona 3 e presenti pertanto segno opposto a quello della zona 1, il minore di tali valori è definito “posizione ponderata compensata” tra le zone 1 e 3. La differenza tra le due posizioni costituisce, invece, la “posizione ponderata residua finale”;
- b) sia imputata alla zona 2 e presenti pertanto segno uguale a quello della zona 1, la somma delle due “posizioni ponderate residue” costituisce la “posizione ponderata residua finale”.

8. Calcolo della copertura patrimoniale per le posizioni compensate tra zone diverse

Il terzo dei requisiti patrimoniali richiesti è determinato applicando i pertinenti “fattori di non compensabilità” (riportati nella precedente tabella) alle “posizioni ponderate compensate” tra le 3 zone e sommando, conseguentemente, i 3 ammontari così ottenuti.

9. Calcolo della copertura patrimoniale per le posizioni finali non compensate

Il quarto e ultimo requisito patrimoniale richiesto dalla disciplina è quello della completa copertura patrimoniale (100 %) della “posizione ponderata residua finale”, determinata secondo le modalità precedentemente illustrate.

10. Calcolo del requisito patrimoniale complessivo

Pari alla somma dei quattro requisiti previsti.

6.3. Il metodo basato sulla Duration

Ai fini della determinazione del requisito patrimoniale a fronte del rischio generico su titoli di debito con il metodo della *duration* occorre procedere secondo i seguenti punti:

1. calcolare la durata finanziaria modificata di ciascuno strumento e ripartirle nello scadenziario articolato in 15 fasce temporali, indicato nella seguente tabella;

Zone	Fasce temporali di scadenza	Variazioni ipotizzate di tasso %
Zona 1	Fino a 1 mese	1.00
	Da 1 a 3 mesi	1.00
	Da 3 a 6 mesi	1.00
	Da 6 a 12 mesi	1.00
Zona 2	Da 1.0 a 1.9 anni	0.90
	Da 1.9 a 2.8 anni	0.80
	Da 2.8 a 3.6 anni	0.75

Zona 3	Da 3.6 a 4.3 anni	0.75
	Da 4.3 a 5.7 anni	0.70
	Da 5.7 a 7.3 anni	0.65
	Da 7.3 a 9.3 anni	0.60
	Da 9.3 a 10.6 anni	0.60
	Da 10.6 12 anni	0.60
	Da 12 a 20 anni	0.60
	Oltre 20 anni	0.60

2. moltiplicare tale importo per gli specifici fattori di ponderazione (compresi tra 0,6% e 1%) che esprimono la variazione presunta dei tassi di interesse di strumenti aventi la medesima durata finanziaria modificata;
3. le posizioni lunghe e corte ponderate in ciascuna fascia sono assoggettate a un fattore di non compensabilità verticale del 5 per cento (4 per cento per le banche appartenenti a gruppi bancari), inteso a cogliere il rischio di base;
4. le posizioni nette per ciascuna fascia sono riportate per la compensazione orizzontale applicando i fattori di non compensabilità indicati nella seconda tabella del metodo della scadenza e procedendo secondo le fasi dalla 5 alla 9 (metodo della scadenza);
5. il calcolo del requisito patrimoniale complessivo è pari alla somma dei tre requisiti previsti.

6.4. I limiti dell'approccio standard

Molte istituzioni finanziarie, in particolare le più grandi, hanno fortemente criticato l'utilizzo dell'approccio standard. I meccanismi sono onerosi e non coerenti con il principio generale di imposizione di un requisito patrimoniale in grado di coprire le perdite potenziali su un arco temporale di dieci giorni lavorativi con un elevato livello di confidenza.

Inoltre, l'approccio standard presenta una distinzione troppo eccessiva tra il trading book ed il banking book. In questo modo è impossibile considerare in modo unitario l'esposizione al rischio di interesse, che emerge non solo dalle obbligazioni detenute ai fini di negoziazione, ma anche dal banking book.

Questo approccio standard, dunque, è risultato eccessivamente rigido e semplicistico per le banche di maggiori dimensioni, in grado di sviluppare e calibrare modelli più sofisticati. Ciò non toglie che la proposta del 1993 di aggiunta dell'approccio standard per misurare il rischio di mercato è stata comunque una grande novità. Infatti per la prima volta si è introdotta una metodologia di misurazione del rischio di mercato comune a tutte le istituzioni finanziarie.

CAPITOLO 7

I REQUISITI PATRIMONIALI CON MODELLI INTERNI

L'approccio dei modelli interni rappresenta una sorta di rivoluzione nella politica di vigilanza: per la prima volta le istituzioni finanziarie vennero lasciate libere di determinare il proprio requisito patrimoniale sulla base di misure di rischio prodotte internamente.

7.1. I Modelli Interni

L' "Emendamento dell'Accordo sui requisiti patrimoniali per incorporarvi i rischi di mercato", emanato nel gennaio del 1996 dal Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria e la direttiva dell'Unione Europea n. 98/31/CE del 22/6/1998 consentono alle banche la possibilità di adottare i propri modelli interni per determinare il requisito patrimoniale a fronte dei rischi connessi con l'attività di negoziazione del portafoglio non immobilizzato.

In particolare, le banche possono calcolare i requisiti a fronte del rischio di posizione in titoli del portafoglio non immobilizzato, del rischio di posizione su merci e del rischio di cambio dell'intero portafoglio, in alternativa alla metodologia standardizzata, sulle basi di propri modelli interni, purché questi soddisfino talune condizioni e siano esplicitamente riconosciuti dall'Autorità di vigilanza nazionale.

I modelli interni per il calcolo dei requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di mercato si basano sul controllo quotidiano dell'esposizione al rischio, calcolata attraverso un approccio fondato su procedure statistiche (approccio del "valore a rischio", VaR). La Banca d'Italia si attende che la metodologia VaR sia integrata con altre forme di misurazione e controllo dei rischi (ad esempio, analisi di sensitività, limiti parametrici basati su stime degli effetti di variazioni dei prezzi di mercato sul valore delle posizioni ecc.) e che il vertice della banca sia consapevole delle principali ipotesi e dei limiti impliciti del modello.

La Banca d'Italia, oltre a controllarne l'affidabilità prima del riconoscimento, verifica periodicamente che il modello sia in grado di fornire un'adeguata rappresentazione dell'esposizione al rischio della banca, anche richiedendo all'intermediario un periodo di sperimentazione "in loco" e di provare il modello simulando una situazione di forti perturbazioni sui mercati. Nel caso in cui la banca non rispetti i criteri previsti all'atto del riconoscimento, la Banca d'Italia può revocare il riconoscimento del modello interno e imporre alla banca di calcolare i requisiti patrimoniali sulla base delle metodologie standardizzate.

7.2. I criteri per l'individuazione dei fattori di rischio

I modelli interni devono rispettare alcuni vincoli nella scelta dei parametri di misurazione del rischio; in particolare, le banche si adoperano affinché:

— relativamente al rischio di tasso di interesse, il modello incorpori i fattori di rischio relativi ai tassi di interesse di ciascuna valuta nella quale la banca detenga posizioni, iscritte in bilancio o fuori bilancio, che costituiscano un'esposizione al rischio di tasso di interesse. Inoltre la banca definisce la struttura per scadenze dei tassi di interesse servendosi di uno dei metodi generalmente accettati. Per esposizioni sostanziali al rischio di tasso di interesse nelle valute e nei mercati principali, la curva dei rendimenti deve essere suddivisa in almeno 6 segmenti di scadenza. Il sistema di misurazione del rischio deve inoltre tenere conto del rischio di movimenti non perfettamente correlati fra curve di rendimento relative a diversi strumenti finanziari;

— per il rischio di cambio, il sistema di misurazione incorpori i fattori di rischio corrispondenti all'oro e alle singole valute in cui sono denominate le posizioni della banca;

— per il rischio sui titoli di capitale, il sistema di misurazione impieghi un fattore di rischio distinto almeno per ciascuno dei mercati mobiliari nei quali la banca detiene posizioni significative;

— per il rischio di posizione su merci, il sistema di misurazione impieghi un fattore di rischio distinto almeno per ciascuna merce nella quale la banca detiene posizioni significative. Il sistema di misurazione deve cogliere anche il rischio di movimenti non perfettamente correlati tra merci simili, ma non identiche, e l'esposizione alle variazioni dei prezzi a termine risultante da scadenze

non coincidenti. Esso inoltre deve tenere conto delle caratteristiche dei mercati, in particolare delle date di consegna e del margine di cui dispongono gli operatori per liquidare le posizioni;

— il modello rifletta accuratamente, all'interno di ciascuna delle categorie generali di rischio, gli specifici rischi connessi con le opzioni.

Le banche possono stabilire in autonomia le modalità di misurazione del rischio delle posizioni individuali e i criteri di aggregazione per il calcolo della rischiosità del portafoglio, comunicando alla Banca d'Italia i criteri di aggregazione dei rischi associati alle singole componenti del portafoglio.

7.3. Il calcolo VaR

- Il calcolo del VaR deve essere effettuato su:
 - Base giornaliera
 - Un intervallo di confidenza unilaterale del 99 %
 - Un periodo di detenzione pari a 10 giorni

- Inoltre, il periodo storico di osservazione deve riferirsi ad
 - Almeno un anno precedente
 - Oppure più breve, nel caso in cui un aumento improvviso e significativo delle volatilità dei prezzi giustifichi un periodo di osservazione minore
 - Anche 6 mesi precedenti in termini di media ponderata, per le banche che impiegano sistemi di ponderazione

- Le serie di dati utilizzate devono essere aggiornate con
 - Frequenza almeno trimestrale.

- Le banche procedono ad aggiornamenti più frequenti ogniqualvolta le condizioni di mercato mutino in maniera sostanziale.
- Per il calcolo del VaR, le banche possono utilizzare correlazioni empiriche nell’ambito della stessa categoria di rischio e fra categorie di rischio distinte. La Banca d’Italia accerta che il metodo di misurazione delle correlazioni della banca sia corretto e applicato in maniera esaustiva.

7.4. Il BackTesting

Il test retrospettivo mette a confronto il VaR, calcolato secondo il modello interno, con la variazione effettiva del valore del portafoglio al fine di verificare se le misure di rischio elaborate dalla banca al 99° percentile coprono effettivamente il 99% dei risultati di negoziazione. Tale capacità si ritiene raggiunta da un modello che, su un campione di 250 giorni lavorativi, produca al massimo 4 casi in cui i risultati effettivi di negoziazione non sono coperti dalla misura del rischio (“scostamenti”).

Il test retrospettivo deve essere svolto quotidianamente. La banca deve essere in grado, ove richiesto, di effettuare test retrospettivi sulla base di variazioni ipotetiche del valore del portafoglio, calcolate mantenendo invariate le posizioni di fine giornata. Se la variazione effettiva del valore del portafoglio supera il VaR calcolato secondo il modello, si ha uno scostamento. In funzione del numero di scostamenti si applica il fattore di maggiorazione descritto nella seguente tabella:

NUMERO DI SCOSTAMENTI	FATTORE DI MAGGIORAZIONE
Meno di 5	0.00
5	0.40
6	0.50
7	0.65
8	0.75
9	0.85
10 o più	1.00

La banca notifica prontamente alla Banca d'Italia gli scostamenti rilevati dal programma di test retrospettivi e che hanno determinato l'aumento del fattore di maggiorazione, conformemente alla tabella di cui sopra. La banca può chiedere alla Banca d'Italia l'esonero dall'applicazione del fattore di maggiorazione qualora lo scostamento sia da imputare a fattori eccezionali. Ove gli scostamenti risultino numerosi, la Banca d'Italia può imporre le misure necessarie per assicurare il tempestivo miglioramento del modello. Nel caso in cui, nonostante tali misure, gli scostamenti persistano la Banca d'Italia può revocare il riconoscimento del modello interno.

7.5. Il calcolo del requisito patrimoniale

Le banche che utilizzano il modello interno devono soddisfare un requisito patrimoniale corrispondente al maggiore tra i due importi seguenti:

- 1) la misura del “valore a rischio” (VaR) del giorno precedente;
- 2) la media delle misure del VaR giornaliero nei 60 giorni operativi precedenti, moltiplicata per un fattore non inferiore a 3, eventualmente maggiorata sulla base dei risultati dei test retrospettivi.

Per poter calcolare, tramite il modello, il requisito patrimoniale a fronte del rischio specifico su titoli di debito le banche devono dimostrare che il modello, oltre a soddisfare le condizioni previste, sia in grado di:

— spiegare la variazione storica dei prezzi nel portafoglio⁴⁸;

⁴⁸ Una misura in grado di spiegare la variazione storica dei prezzi è il valore della R^2 di una regressione; in questo caso il modello della banca dovrebbe essere in grado di spiegare almeno il 90% della variazione storica dei prezzi o di includere esplicitamente stime della variabilità dei residui non catturati nei fattori della regressione. Per i modelli per i quali non è possibile calcolare un indice della bontà di stima le banche definiscono insieme alla Banca d'Italia misure di valutazione alternative.

- riflettere la concentrazione del portafoglio⁴⁹;
- resistere a una situazione sfavorevole⁵⁰;
- essere convalidato da backtesting.

Inoltre, le banche devono dimostrare di essere in possesso di metodologie idonee a valutare adeguatamente il rischio di inadempimento ed il rischio di evento. Qualora la banca non sia in grado di fornire tale dimostrazione, il requisito patrimoniale dovrà includere una maggiorazione. Per la determinazione di tale maggiorazione viene effettuato un calcolo analogo a quello utilizzato per il modello per il rischio generale di mercato nel caso in cui quest'ultimo non abbia superato i test retrospettivi. In particolare, alla misura del rischio specifico calcolata dalla banca sulla base del proprio modello viene applicato un fattore moltiplicativo di 4.

Analiticamente il requisito patrimoniale calcolato con il modello interno è dato dalla seguente formula:

$$C_t = \max \left(VaR_{t-1} + \beta_t * RSM_{t-1} ; \delta_t * \frac{1}{60} * \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} + \beta_t * \frac{1}{60} * \sum_{i=1}^{60} RSM_{t-i} \right)$$

dove:

- C_t è il requisito patrimoniale al giorno t ;
- VaR_{t-i} è il valore a rischio calcolato secondo il modello per il portafoglio detenuto al giorno $t-i$
- δ_t è il fattore moltiplicativo, non inferiore a 3;
- β_t rappresenta il fattore moltiplicativo, che varia in relazione all'adeguatezza del modello interno a calcolare il rischio di evento e di inadempimento. Tale fattore assume valore 0 oppure 1 a seconda che la banca dimostri o meno di essere in grado di valutare

⁴⁹ Il modello interno della banca deve risultare sensibile alle variazioni nella composizione del portafoglio in modo da prevedere requisiti patrimoniali crescenti via via che aumenta la concentrazione del portafoglio.

⁵⁰ Il modello interno della banca deve essere in grado di segnalare un rischio crescente nel caso di situazione sfavorevole. Tale risultato può essere ottenuto incorporando nel periodo di stima del modello almeno un intero ciclo economico e assicurando che il modello si sia rivelato accurato nella fase discendente del ciclo. Alternativamente, il risultato può essere ottenuto attraverso una simulazione delle situazioni storicamente o probabilisticamente peggiori (worst case).

adeguatamente il rischio di evento e di inadempimento. Complessivamente, quindi, il fattore moltiplicativo ($\delta_t + \beta_t$) può assumere un valore pari al massimo a 4;

- RSM_{t-1} è l'ammontare di capitale destinato alla copertura dei rischi specifici degli strumenti finanziari sul portafoglio detenuto il giorno $t-i$, calcolato secondo il modello interno (sulla base delle due ipotesi alternative di seguito riportate).

Ai fini del calcolo della maggiorazione per il rischio specifico (la formula sopra riportata), il fattore moltiplicativo può essere applicato dalla banca a due misure alternative di valore a rischio (RSM_{t-i}):

- a) la parte di rischio specifico della misura del VaR che dovrebbe essere isolata conformemente alle norme di vigilanza⁵¹;
- b) le misure del VaR di sub-portafogli di debito o di posizioni in titoli di capitale che contengono un rischio specifico.

7.6. I modelli interni e la metodologia standardizzata

Le banche possono utilizzare una combinazione tra metodologia standardizzata e modello interno a condizione che ciascuna categoria generale di rischio sia valutata sulla base di un unico approccio (modelli interni o metodo standardizzato) e che tutti gli elementi del rischio di mercato siano misurati. Le banche che usano modelli interni solo per alcune categorie di rischio dovranno estendere quanto prima i loro modelli a tutti i rischi di mercato cui sono esposte. La banca che abbia adottato uno o più modelli interni non può chiedere di tornare a utilizzare la metodologia standardizzata per la misurazione dei rischi già valutati mediante tali modelli.

⁵¹ In particolare: per i titoli di capitale, il sistema di misurazione dovrebbe impiegare un fattore di rischio distinto per ciascuno dei mercati mobiliari nei quali la banca detiene posizioni significative; per i titoli di debito, il modello dovrebbe incorporare i fattori di rischio relativi ai tassi di interesse di ciascuna valuta nella quale la banca detenga posizioni, iscritte in bilancio o fuori bilancio, che costituiscano un'esposizione al rischio di tasso di interesse.

I coefficienti patrimoniali calcolati in base al metodo standardizzato e ai modelli interni dovranno essere aggregati mediante sommatoria semplice.

Nel caso in cui la banca adotti una combinazione che preveda il calcolo del rischio specifico di posizione su titoli secondo la metodologia standardizzata, il requisito patrimoniale è definito dalla seguente formula:

$$C_t = \max (VaR_{t-1} ; \delta_t * \frac{1}{60} * \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}) + RSS_{t-i}$$

dove:

- C_t è il requisito patrimoniale al giorno W ;
- VaR_{t-i} è il valore a rischio calcolato secondo il modello per il portafoglio detenuto al giorno $t-i$
- δ_t è il fattore moltiplicativo, non inferiore a 3;
- RSS_{t-1} è l'ammontare supplementare di capitale per la copertura dei rischi specifici degli strumenti finanziari sul portafoglio detenuto il giorno $t-i$, calcolato secondo la metodologia standardizzata

7.7. Lo sVaR

Nell'aggiornamento del quadro regolamentare di Basilea 3, durante la recente crisi finanziaria, è stata avanzata una proposta di incremento prudenziale del requisito di capitale: lo stressed VaR ("sVaR"). Questo è un nuovo approccio di calcolo del valore a rischio che consiste nello stimare il VaR utilizzando dati di mercato relativi a periodi di forte stress, indipendentemente dal tipo di modello utilizzato. In particolare, viene applicato l'approccio parametrico o quello di simulazione, considerando come fattori di rischio le variabili di mercato osservate tra il 2008 e il 2009 (oppure tra il 2002 e il 2003).

La proposta formulata dal Comitato di Basilea nel luglio 2009 (e formalizzata nel 2011) intende risolvere le critiche mosse nei confronti dei modelli VaR, ritenuti incapaci di rilevare tempestivamente le condizioni di crisi dei mercati finanziari. Infatti le violazioni del VaR giornaliero nei periodi di elevata volatilità sono numerose.

Basilea 3 prevede l'introduzione dello Stressed VaR (sVaR); esso è costituito da un capitale addizionale calcolato in maniera analoga al requisito tradizionale, utilizzando però, i valori assunti dalle variabili in un periodo di crisi non inferiore all'anno. Il sampling period di stress adottato nella stima di sVaR deve essere preventivamente approvato dall'autorità di vigilanza. Analiticamente, il requisito di capitale minimo al tempo t ($R_{c,t}$) sarà:

$$C_t = \max [VaR_{t-1}; (\delta_t + \beta_t) * \frac{1}{60} * \sum_{t=1}^{60} VaR_{t-i}] + \max [sVaR_{t-1}; (\delta_t + \beta_t) * \frac{1}{60} * \sum_{t=1}^{60} sVaR_{t-i}]$$

Il coefficiente di correzione dipende come nella versione precedente dal risultato dei backtest effettuati considerando la misura di VaR e non anche di sVaR. Dalla formulazione è possibile notare che la misura sVaR costituisce un'addizionale al requisito di capitale attualmente vigente e non un suo sostituto.

In uno studio recente⁵² Burchi mostra che lo sVaR aumenta drasticamente il requisito del capitale ad un punto tale che non è nemmeno più rilevante quale tipo di approccio sia utilizzato per stimare il VaR. Infatti, che venga utilizzato un modello parametrico, ipotizzando una distribuzione Normale, o la simulazione storica, per cogliere meglio le caratteristiche empiriche delle variabili di mercato, è del tutto indifferente in quanto l'incremento del requisito patrimoniale sarà comunque vertiginoso. Burchi studia l'effetto dell'utilizzo dello sVaR su diversi portafogli, osservando che l'aumento del requisito di capitale oscilla da un minimo del 300%, per i portafogli più prudentziali, ad un massimo del 700%, per quelli più aggressivi. Egli conclude che la proposta regolamentare di Basilea 3 comporta un aggravio eccessivo dei requisiti patrimoniali. La nuova procedura di calcolo del requisito giornaliero assegna, infatti, maggiore rilevanza alla misura di rischio ottenuta, applicando alle variabili del modello scelto dall'intermediario i valori caratteristici dei periodi di crisi. Lo sVaR costituisce oltre il 75% del requisito di capitale per i rischi connessi al trading book e determina un appiattimento delle differenze tra i modelli di stima, riducendo ulteriormente l'interesse da parte degli intermediari ad adottare modelli di VaR complessi ai fini regolamentari.

⁵² Burchi, A. (2011)

PARTE III
LE METODOLOGIE UTILIZZATE

CAPITOLO 8

LE METODOLOGIE DI CALCOLO DEL VaR

Tra tutte le metodologie descritte finora, si è scelto di utilizzare in questo lavoro gli approcci più diffusi tra le banche italiane per il calcolo del VaR: il modello parametrico (o approccio varianze-covarianze) e la simulazione storica. Il primo è molto simile a RiskMetrics con la differenza che è un approccio “delta-normal” mentre il modello di J.P.Morgan è un modello “asset-normal”, in quanto utilizza come fattore di rischio direttamente i rendimenti logaritmi degli asset in portafoglio. Differentemente, l’approccio “delta-normal” lega il portafoglio, attraverso coefficienti lineari, ad altre variabili di mercato che ne influenzano il rendimento. Entrambi i metodi partono dall’ipotesi che i fattori di mercato si distribuiscano secondo una Normale.

Il metodo della simulazione storica invece ricalcola tutta la distribuzione empirica del portafoglio senza fare alcuna ipotesi sulla distribuzione dei fattori di mercato. È un metodo più complesso e lungo rispetto al metodo var-cov, ma riesce a cogliere meglio la leptokurtosi della distribuzione del portafoglio.

In questo capitolo verranno esposte entrambe le metodologie sia nella loro versione più generale che nel caso applicativo di cui questo lavoro si occupa: le esposizioni sui titoli di debito, ovvero il rischio di interesse.

8.1. Il metodo varianze - covarianze

Questo metodo consiste nell’ipotizzare un particolare modello per i tassi di variazione delle variabili di mercato e nell’utilizzare i dati storici per stimarne i parametri. È un modello facile da usare quando il portafoglio è composto da prodotti lineari. In breve, la media e la deviazione standard del valore del portafoglio possono essere calcolati in base alla media, alla deviazione standard e alle correlazioni dei tassi di rendimento delle attività presenti nel portafoglio. Facendo l’ipotesi che questi si distribuiscono in modo Normale, si ottiene che anche le variazioni di valore

del portafoglio seguono una distribuzione Normale, ed il calcolo del VaR risulta non troppo complesso. In questo modo si riesce a sfruttare la proprietà di tale distribuzione per cui la somma di variabili distribuite normalmente è anch'essa distribuita nello stesso modo; essendo il rendimento di portafoglio la somma ponderata dei rendimenti delle singole attività, se questi hanno una distribuzione Normale, anche il rendimento di portafoglio sarà Normale.

L'ipotesi di Normalità è molto forte, ma non è irragionevole ipotizzare che i dati con frequenza giornaliera provengano da una distribuzione Gaussiana, equivalentemente si sta ipotizzando che i prezzi degli asset si distribuiscono con una log-Normale.

Questa ipotesi di partenza è molto vantaggiosa in quanto rende possibile l'utilizzo della funzione di ripartizione Normale Standard, la quale dipende unicamente dal livello di confidenza α .

Sia

$$z_\alpha = (u - \mu) / \sigma$$

dove:

- u è una certa soglia della distribuzione;
- μ è la media della distribuzione;
- σ è la deviazione standard della distribuzione.

È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i diversi valori di z_α e i corrispondenti livelli della probabilità. Dunque l'ipotesi di Normalità consente di tradurre un livello di probabilità prescelto (α) in un opportuno fattore z_α , cui corrisponde una soglia massima data dalla media più z_α volte la deviazione standard.

Poiché il VaR misura la perdita potenziale, la posizione è esposta solo agli eventi negativi⁵³, cioè metà della distribuzione (essendo la media della Normale Standard zero). In merito agli accordi di Basilea, le banche devono utilizzare un intervallo di confidenza del 99%, cioè un α pari a 1%; ne segue che lo z_α è 2.326.

Allo scopo di isolare l' α per cento dei casi:

$$u = \mu + z_\alpha * \sigma$$

⁵³ Questo vale per le posizioni lunghe. Per le posizioni corte è il contrario.

I modelli VaR vengono applicati a osservazioni di dati giornaliere, le cui variazioni sono molto vicine a zero. Per questo motivo non è irragionevole ipotizzare che la media μ sia pari a zero. In questo modo, la perdita percentuale all' 1% diventa:

$$u = 2.326 * \sigma$$

Per ottenere la perdita assoluta (non percentuale), si deve moltiplicare u per il valore di mercato dell'esposizione:

$$\mathbf{VaR} = \mathbf{VM} * \mathbf{2.326} * \mathbf{\sigma}$$

Ora il modello sarebbe completo se il fattore di rischio coincide con il rendimento del portafoglio (esattamente come prevede RiskMetrics), ma non è sempre così. Bisogna considerare la sensibilità delle variazioni di valore della posizione rispetto al fattore di mercato:

$$\mathbf{VaR} = \mathbf{VM} * \mathbf{\delta} * \mathbf{2.326} * \mathbf{\sigma}$$

dove:

- δ è il coefficiente di sensibilità del valore di mercato della posizione rispetto alle variazioni del fattore di mercato.

Una volta calcolati tutti i VaR parziali, cioè i value-at-risk delle singole posizioni in portafoglio, si può procedere con il calcolo del VaR dell'intero portafoglio; bisogna tenere conto, oltre che dei coefficienti di sensibilità, anche delle correlazioni tra i fattori di rischio delle diverse posizioni, seguendo la teoria di Markowitz. Ad esempio, per un portafoglio con sole due posizioni:

$$\mathbf{VaR_p} = (\mathbf{VaR_1^2} + \mathbf{VaR_2^2} + 2 * \mathbf{\rho_{1,2}} * \mathbf{VaR_1} * \mathbf{VaR_2})^{0.5}$$

dove:

- VaR_p è il VaR dell'intero portafoglio;
- VaR_1 è il VaR relativo alla prima esposizione;
- VaR_2 è il VaR relativo alla seconda esposizione;
- $\rho_{1,2}$ è il coefficiente di correlazione dei risk factor delle due posizioni, dato dal rapporto tra la covarianza dei due fattori di rischio e il prodotto delle loro deviazioni standard.

Più in generale, per un portafoglio con N posizioni:

$$\mathbf{VaR}_p = (\mathbf{VaR}_1^2 + \mathbf{VaR}_2^2 + \dots + \mathbf{VaR}_N^2 + 2 * \rho_{1,2} * \mathbf{VaR}_1 * \mathbf{VaR}_2 + \dots + 2 * \rho_{1,N} * \mathbf{VaR}_1 * \mathbf{VaR}_N + \dots + 2 * \rho_{N-1,N} * \mathbf{VaR}_{N-1} * \mathbf{VaR}_N)^{0.5}$$

$$= (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{i,j} * \mathbf{VaR}_i * \mathbf{VaR}_j)^{0.5}$$

Si noti che se tutti i fattori di rischio fossero perfettamente correlati ($\rho=1$) il VaR del portafoglio sarebbe semplicemente la somma dei VaR delle esposizioni.

Dunque per poter calcolare il valore a rischio del portafoglio, è necessaria la matrice di varianze e covarianze:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1,N} & \dots & & \sigma_N^2 \end{vmatrix}$$

Da cui si passa facilmente alla matrice di correlazione dividendo ogni elemento i,j per il prodotto delle rispettive deviazioni standard:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,N} \\ \rho_{1,2} & \mathbf{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{1,N} & \dots & & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

dove il generico coefficiente di correlazione i,j è

$$\rho_{i,j} = \sigma_{i,j} / (\sigma_i * \sigma_j)$$

8.2. Il metodo Var-Cov per titoli di debito

I titoli di debito non possono essere trattati come semplici azioni perché dipendono dai tassi d'interesse. Si potrebbe utilizzare come fattore di rischio lo yield to maturity ipotizzando che la yield curve sia soggetta unicamente a shift paralleli, in tal caso si può definire una sola variabile: la dimensione dello spostamento parallelo della yield curve.

Una misura (imprecisa) del rischio sarebbe data dalla formula dell'approssimazione con la Duration:

$$\Delta VM = - VM * DM * \Delta y$$

dove:

- ΔVM è la variazione del valore di mercato del titolo;
- VM è il valore di mercato corrente del titolo;
- DM è la Duration modificata, data da $D/(1+y)$;
- Δy è la variazione assoluta dello yield.

Si può ottenere il VaR del titolo, calcolando la volatility delle variazioni dello yield ($\sigma_{\Delta y}$) e sostituire Δy con $z_\alpha * \sigma_{\Delta y}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{VaR} &= - VM * DM * z_\alpha * \sigma_{\Delta y} \\ &= \delta * VM * z_\alpha * \sigma_{\Delta y} \end{aligned}$$

dove:

- $\delta = - DM$; dunque in questo modello si sta utilizzando come fattore di rischio δ la Duration modificata cambiata di segno.

Il problema è che il tasso di rendimento interno (yield to maturity) di uno specifico titolo dipende dalla sua durata e struttura delle cedole. Una banca che detenesse nel portafoglio molte obbligazioni dovrebbe dunque utilizzare un numero assai elevato di fattori di rischio. Inoltre, gli yields to maturity sono molto difficili da monitorare giornalmente. Per questi motivi le banche preferiscono utilizzare come fattori di rischio i tassi zero-coupon della term structure. Questa è infatti la procedura più comune: per stimare il VaR, i cash flows relativi agli strumenti in portafoglio vengono sottoposti a mapping per esprimerli in termini di pagamenti posizionati su scadenze standard. In genere, le scadenze considerate sono 1 mese, 3 mesi, 6 mesi, 1 anno, 2 anni, 5 anni, 7 anni, 10 anni e 30 anni. Il cash flow mapping genera flussi di cassa fittizi associati ai nodi della term structure, a cui vengono applicate, come fattori di rischio, le variazioni dei tassi zero-coupon associati ai corrispondenti nodi della curva e le relative volatilità. Infine, le singole misure di rischio ottenute vengono aggregate utilizzando la formula di VaR di portafoglio sulla base delle correlazioni fra le variazioni dei tassi delle relative scadenze:

$$\mathbf{VaR}_k = - \mathbf{VM}_k * \mathbf{DM}_k * z_\alpha * \sigma_{\Delta i}$$

$$\mathbf{VaR}_p = (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{i,j} * \mathbf{VaR}_i * \mathbf{VaR}_j)^{0.5}$$

dove:

- \mathbf{VaR}_k è il VaR dell'esposizione al nodo k;
- \mathbf{VM}_k è il valore di mercato del cash flow al nodo k;
- \mathbf{DM}_k è la Duration modificata ottenuta dividendo la Duration (k) per $(1+i)$, con i = tasso zero-coupon relativo al nodo k della term structure, rilevato in sede di stima⁵⁴;
- $\sigma_{\Delta i}$ è la volatilità della variazione del tasso zero-coupon relativo al nodo k della term structure.

8.3. La simulazione storica

Questo approccio fa parte della famiglia dei modelli di simulazione, nei quali anziché limitarsi a derivare il VaR partendo da pochi parametri sintetici della distribuzione dei fattori di rischio, si

⁵⁴ Cioè se il VaR viene stimato in sede di bilancio, bisogna prendere il tasso relativo al giorno 31/12.

procede simulando un grande numero di possibili scenari di possibili scenari riguardanti la possibile evoluzione futura dei mercati.

Il metodo della simulazione storica, che è il più utilizzato dalle banche, utilizza le variazioni giornaliere dei valori storici delle variabili di mercato per stimare la distribuzione probabilistica delle variazioni di valore del portafoglio corrente tra oggi e domani. Differentemente dall'approccio varianza-covarianza, dove si legano le variazioni di valore del portafoglio con quelle di un risk factor, nei modelli di simulazione si utilizza una logica di full valuation. Il valore di mercato del portafoglio di cui si intende stimare il VaR viene completamente ricalcolato sulla base di nuovi valori simulati dei fattori di mercato. È dunque necessario conoscere le regole di pricing per ciascuno degli strumenti finanziari inseriti nel portafoglio; questo metodo è tanto conveniente quanto meno lineari sono i payoff degli asset. Dopo aver generato la distribuzione di probabilità degli N possibili valori futuri del portafoglio, il VaR viene calcolato tagliando tale distribuzione empirica in corrispondenza del percentile associate al livello di confidenza desiderato (logica del percentile).

I metodi di simulazione consentono di superare il limite dell'ipotesi di Normalità, la quale sicuramente rende più facile e veloce il calcolo del VaR ma paga un costo in termini di realismo. In particolare, il modello di simulazione storica non fa nessuna ipotesi esplicita sulla distribuzione dei risk factor, vi è l'unica ipotesi implicita che il passato tende a ripetersi, cioè la distribuzione futura viene approssimata da quella empirica passata.

Si sceglie, ad esempio, un campione di osservazioni passate fino a 250 giorni precedenti, e si calcola il valore del portafoglio per ogni fattore di rischio osservato. Dunque si ordinano in modo decrescente gli scenari e si taglia tale distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato.

Il metodo delle simulazioni storiche stima la distribuzione delle variazioni di valore del portafoglio sulla base di un numero finito di osservazioni storiche; di conseguenza, le stime dei quantili della distribuzione non sono del tutto accurate.

8.4. La simulazione storica per titoli di debito

Per i titoli di debito, il fattore di rischio di cui tenere conto è la variazione dello yield, ma come si è detto precedentemente, le banche preferiscono mappare i cash flow sui nodi della term structure.

In questo caso sono le variazioni dei tassi zero-coupon i risk factor da considerare. Nell'approccio var-cov si ipotizza che queste variazioni seguano una distribuzione Normale, ora invece non si fa alcuna ipotesi esplicita sulla distribuzione.

Per prima cosa si osserva un campione di N dati: spesso nella pratica si utilizzano 250 osservazioni⁵⁵; si prendono gli ultimi 250 giorni e si osservano i valori dei tassi zc. Si procede calcolando la variazione giornaliera assoluta di questi tassi e si ottiene il campione di risk factors desiderato. Utilizzando una logica di full valuation, la variazione del valore del cash flow viene ricalcolata in corrispondenza di ogni risk factor osservato:

$$\Delta VM_{jk} = - VM_j * DM_j * \Delta i_k$$

dove:

- Δi_k è la variazione di tasso zc osservata empiricamente al giorno k, con $k = 1 \dots 250$;
- ΔVM_{jk} è la variazione del valore del j-esimo cash flow mappato, rilevata per lo scenario k.

Una volta calcolate le variazioni dei cash flow di tutti i 250 scenari, queste vengono aggregate tramite semplice somma algebrica per ottenere la variazione complessiva dell'esposizione. Si arriva dunque alla distribuzione effettiva delle possibili variazioni di valore del portafoglio (non necessariamente Normale). Il VaR si ottiene tagliando questa distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato: considerando che le banche sottoposte a regolamentazione devono effettuare la stima del VaR al 99%, il percentile relativo all' 1% è il valore numerico alla posizione 2.5⁵⁶.

⁵⁵ Cioè si considera l'anno finanziario

⁵⁶ 250 * 1%

8.5. L'holding period decadale

La normativa di Basilea prevede il calcolo del VaR su base giornaliera, al 99%, ipotizzando un holding period di 10 giorni. Dunque sarà necessario riportare le stima VaR, ottenute attraverso gli approcci sopra descritti, sulla base dell'orizzonte temporale previsto dalla regolamentazione.

Come già mostrato in RiskMetrics, nell'ambito dell'approccio parametrico si applica la “regola delle radici del tempo”: è sufficiente moltiplicare il VaR uniperiodale per la radice di 10. Questo sistema, però, sta aggiungendo ulteriori ipotesi al modello, molto più irrealistiche della distribuzione Normale: le variabili di mercato sono incorrelate ed hanno tutte la stessa varianza condizionata. La regola delle radici del tempo semplifica molto il calcolo del VaR su orizzonte temporale maggiore di 1 giorno.

Per quanto riguarda la simulazione storica, invece, il nuovo orizzonte temporale è più problematico: dato il numero di osservazioni giornaliere disponibili, il campione storico si riduce in proporzione al periodo di detenzione. Per esempio, 1000 osservazioni storiche giornaliere si traducono in sole 100 osservazioni indipendenti, se si considera un orizzonte temporale decadale. Una soluzione è quella di ricorrere alla tecnica delle “osservazioni sovrapposte⁵⁷”: 1000 osservazioni giornaliere potrebbero tradursi in 990 dati decadali corrispondenti ad intervalli sovrapposti ($\Delta i_k - \Delta i_{k-10}$; $\Delta i_{k-1} - \Delta i_{k-10-1}$; $\Delta i_{k-2} - \Delta i_{k-10-2} \dots$). Naturalmente il procedimento ha precisi limiti statistici: le osservazioni diventano serialmente correlate. Il generico n-esimo dato, per esempio, ha 9/10 di periodo temporale in comune con i dati n-1 e n+1, 8/10 in comune con i dati n-2 e n+2, e così via. Si verifica, quindi, che la nuova serie decadale sia meno volatile della serie di osservazioni indipendenti.

⁵⁷ Maspero D. (1997)

CAPITOLO 9

LE METODOLOGIE DI CALCOLO DELLA VOLATILITÀ E CORRELAZIONE

Tutti gli operatori dei mercati finanziari, ed a maggior ragione le istituzioni finanziarie, devono tenere d'occhio la volatilità delle variabili di mercato come tassi, cambi, prezzi, ecc. Le evidenze empiriche mostrano chiaramente che la volatilità non è costante, proprio per questo tutti i trader che nel 2007 si sono affidati unicamente alla formula di Black-Scholes hanno subito ingenti perdite ed hanno attribuito la colpa della crisi finanziaria proprio alla stessa formula su cui contavano ciecamente⁵⁸.

In ambito di risk-management, la volatilità di una variabile è definita come deviazione standard del tasso di rendimento (composto continuamente) della variabile, espresso con frequenza giornaliera⁵⁹.

I metodi di stima della volatilità sono raggruppabili in due principali categorie⁶⁰:

- Modelli backward looking: utilizzano dati di volatilità e correlazioni storiche per trarne previsioni di volatilità e correlazioni future. Fanno parte di questa categoria gli algoritmi basati su medie mobili semplici ed esponenziali ed i modelli ARCH e GARCH.
- Modelli forward looking: utilizzano le volatilità implicite nelle opzioni, ricavate dalla formula Black-Scholes.

Una volta ottenuta la matrice di varianze e covarianze, si può passare facilmente alla matrice delle correlazioni attraverso la formula del coefficiente di correlazione:

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_i * \sigma_j)$$

⁵⁸ A questo proposito, un articolo molto interessante dal blog Alphaville del Financial Times, "Black Scholes and the formula of Doom".

⁵⁹ Hull (2012)

⁶⁰ Resti, Sironi (2008)

Il target è dunque:

$$\mathbf{H}_t = \begin{vmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{1,2,t} & \dots & \sigma_{1,N,t} \\ \sigma_{1,2,t} & \sigma_{2,t}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1,N,t} & \dots & & \sigma_{N,t}^2 \end{vmatrix}$$

dove:

- \mathbf{H}_t è la matrice di var-cov al tempo t condizionata a tutte le altre osservazioni passate delle variabili di mercato (in questo caso le variazioni dei tassi di interesse);
- $\sigma_{1,t}^2$ è la varianza condizionata del primo fattore di mercato al tempo t ;
- $\sigma_{1,2,t}$ è la covarianza condizionata tra il primo e il secondo fattore al tempo t ;
- N è il numero totale di fattori, in particolare in questo studio $N=7$.

$$\mathbf{P}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \rho_{1,2,t} & \dots & \rho_{1,N,t} \\ \rho_{1,2,t} & \mathbf{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{1,N,t} & \dots & & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

dove:

- \mathbf{P}_t è la matrice di correlazione condizionata al tempo t ;
- $\rho_{1,2,t}$ è la correlazione condizionata tra il primo e il secondo fattore di mercato al tempo t .

In questo studio, le matrici \mathbf{H}_t e \mathbf{P}_t saranno delle 7×7 perché si considerano congiuntamente le variazioni giornaliere di 7 key rates legati a 7 fasce temporali delle matrici per scadenze del trading book e banking book bancario ($\Delta i_{N,t}$ con $N=1,2, \dots, 7$). Inoltre le serie storiche delle variazioni giornaliere dei key rates sono di 250 osservazioni ciascuna.

Per stimare gli elementi delle suddette matrici, si utilizzeranno tre metodi di stima della volatilità e correlazione: due modelli molto semplici (per questo molto diffusi) basati su algoritmi sintetici di media ponderata e un modello GARCH multivariato che invece segue un approccio completamente differente.

9.1. Le Medie Mobili Semplici (SMA)

Il metodo più semplice per stimare la volatilità condizionata⁶¹ è l'algoritmo della simple moving average. Volendo stimare la volatilità (per domani) di una certa variabile di mercato, si prende un campione di n osservazioni, partendo da quella più recente disponibile (oggi) e andando a ritroso, dunque da t (oggi) a t-n. Il giorno successivo (t+1) il dato più vecchio uscirà dal campione perché sarà disponibile una nuova osservazione più recente: quella di domani, cioè in t+1, che potrà essere osservata dopo la chiusura del mercato.

In generale, sia x_t la variabile osservata, con $t = 1 \dots n$, la volatilità condizionata al tempo t sarà:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \mu)^2}{n-1}}$$

dove:

- μ è la media campionaria di x.

Poiché per i titoli di debito i risk factor sono le variazioni dei tassi z_c , la volatilità condizionata sarà:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\Delta i_t)^2}{n-1}}$$

dove:

⁶¹ Condizionata al passato, cioè estrapolata dai dati storici.

- Δ_i sono le variazioni giornaliere dei tassi z_t ;
- μ , la media campionaria, viene posta uguale a zero in quanto è effettivamente quasi nulla.

La stima della varianza condizionata non è altro che la somma delle osservazioni al quadrato corretta per i gradi di libertà. La volatilità non sarà altro che la deviazione standard, cioè la radice quadrata della varianza.

Questo sistema è conveniente in quanto facile e veloce, ma presenta alcuni problemi che potrebbero rendere molto imprecisa la stima:

- per prima cosa vi è un trade-off nella scelta dell'arco temporale: prendendo un campione molto grande di osservazione si ottiene, senza dubbio, una stima solida, infatti le osservazioni estremali⁶² avranno un impatto minore sulla volatilità stimata. Allo stesso tempo però una profondità storica molto grande comporta una stima poco aggiornata rispetto alle condizioni attuali del mercato. Più recente è il campione, più la volatilità sarà reattiva ai cambiamenti repentini del mercato.
- Un secondo problema è l'echo effect⁶³: quando si inserisce uno shock nel campione, essendo questo un evento estremo, c'è un impatto molto forte sulla stima della volatilità (e questo è del tutto normale). L'effetto echo si verifica quando l'osservazione legata allo shock esce dal campione perché viene sostituita da un dato più recente. Infatti anche in questo caso ci sarà un forte effetto sulla volatilità stimata, anche se in realtà nel mercato non si è verificato nessuno shock.

È dunque necessario superare il problema del trade-off tra contenuto informativo e reattività alle condizioni di mercato ed il problema dell'echo-effect. L'algoritmo delle medie mobili esponenziali permette di ottenere molti vantaggi sotto questo punto di vista.

⁶² Gli estremi influenzano in modo maggiore la media rispetto alle osservazioni sulla media stessa.

⁶³ Figlewski S. (1994)

9.2. Le Medie Mobili Esponenziali (EWMA)

Questo sistema utilizza una media ponderata, anziché aritmetica, dove i pesi sono esponenzialmente decrescenti (exponential weighted moving average). Poiché i pesi sono decrescenti il passato impatta sempre meno sulla stima, mentre le osservazioni più recenti, avendo una ponderazione superiore, hanno maggiore influenza. In questo modo si ottiene una stima della volatilità con elevato contenuto informativo ed allo stesso tempo più sensibile ai cambiamenti recenti del mercato. Dunque, da un lato, la stima reagisce più rapidamente a shock del mercato, dall'altro uno shock pronunciato esce gradualmente dal campione, evitando l'echo effect.

In generale, sia x_t la variabile osservata, con $t = 1 \dots n$, la volatilità condizionata al tempo $t+1$ sarà:

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{\frac{\lambda^0 * x_t + \lambda^1 * x_{t-1} + \dots + \lambda^n * x_{t-n}}{1 + \lambda + \dots + \lambda^n}}$$

dove:

- λ è una costante compresa tra 0 e 1 ed è il fattore di ponderazione. Viene anche chiamata “decay factor⁶⁴” perché indica il grado di persistenza delle osservazioni nel campione: più λ è vicina ad 1, più il passato impatta sulla stima e quindi la media si adegua meno rapidamente alle condizioni del mercato. Infatti maggiore sarà il decay factor, meno velocemente le sue potenze tenderanno a zero. Invece se λ è vicino a zero, le osservazioni passate escono molto più velocemente dal campione e la stima si adegua più reattivamente agli shock recenti. Per questo $(1-\lambda)$ è detta velocità di decadimento delle osservazioni passate.

Per i titoli di debito i risk factor sono le variazioni dei tassi z_t , inoltre λ è un numero molto piccolo dunque λ^n tende a zero. Ricordando RiskMetrics e il modello IGARCH, si può scrivere la varianza condizionata delle variazioni di tasso zero-coupon come media ponderata dell'osservazione più recente al quadrato e l'ultima stima effettuata, con pesi λ e $(1-\lambda)$:

⁶⁴ Resti, Sironi (2008)

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+1}^2 &= \lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \sigma_t^2 && \text{conoscendo la forma di } \sigma_t^2 \\
&= \lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) [\lambda (\Delta i_{t-1}^2) + (1-\lambda) \sigma_{t-1}^2] \\
&= \lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{t-1}^2) + (1-\lambda)^2 \sigma_{t-1}^2 && \text{anche la forma di } \sigma_{t-1}^2 \text{ è conosciuta} \\
&= \lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{t-1}^2) + (1-\lambda)^2 [\lambda (\Delta i_{t-2}^2) + (1-\lambda) \sigma_{t-2}^2] \\
&= \lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{t-1}^2) + (1-\lambda)^2 \lambda (\Delta i_{t-2}^2) + (1-\lambda)^3 \sigma_{t-2}^2 && \text{sostituendo all'infinito} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j \Delta i_{t-j}^2
\end{aligned}$$

Dunque si è mostrato che la varianza condizionata non è altro che il livellamento esponenziale di tutte le osservazioni passate al quadrato. Le variazioni meno recenti hanno un effetto sempre minore in quanto moltiplicate da un numero inferiore di 1 elevato ad un numero intero positivo.

La volatilità condizionata in t+1 sarà:

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+1} &= [\lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \sigma_t^2]^{0.5} \\
&= [\lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j \Delta i_{t-j}^2]^{0.5}
\end{aligned}$$

con $\sum_{j=0}^t \lambda (1-\lambda)^j = 1$

Bisogna sottolineare che un limite evidente di questo approccio è che tutta la dinamica della volatilità dipende unicamente da un unico parametro λ . Questo è molto irrealistico, ma in compenso è un modo efficace, semplice e molto diffuso. I dati da memorizzare sono relativamente pochi: ogni giorno bisogna utilizzare solo la stima corrente della varianza ed il più recente valore del fattore di rischio. Dunque è molto semplice aggiornare la stima della volatilità, per questo l'EWMA è un metodo così diffuso.

Per quanto riguarda il problema della scelta del parametro λ , sicuramente molto dipende da l'holding period: minore è l'orizzonte temporale di detenzione della posizione, maggiore è la necessità che la stima della volatilità si adegui velocemente alle nuove condizioni di mercato, quindi minore sarà λ . Il database di RiskMetrics, creato originariamente da J.P.Morgan e reso pubblico nel 1994, utilizza un EWMA con λ uguale a 0.06. In base alle ricerche fatte dalla banca, questo valore consente previsioni molto vicine ai valori reali.⁶⁵

⁶⁵ J.P.Morgan e Reuters (1996)

Una volta ottenute tutte le volatilità, per poter arrivare alla correlazione, si necessita anche di tutte le covarianze. È possibile calcolare la covarianza tra il fattore di rischio x ed il fattore y attraverso il livellamento esponenziale:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy,t+1} &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) \sigma_{xy,t} \\
 &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) [\lambda (\Delta i_{x,t-1} \Delta i_{y,t-1}) + (1-\lambda) \sigma_{xy,t-1}] \\
 &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{x,t-1} \Delta i_{y,t-1}) + (1-\lambda)^2 \sigma_{xy,t-1} \\
 &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{x,t-1} \Delta i_{y,t-1}) + (1-\lambda)^2 [\lambda (\Delta i_{x,t-2} \Delta i_{y,t-2}) + (1-\lambda) \sigma_{xy,t-2}] \\
 &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) \lambda (\Delta i_{x,t-1} \Delta i_{y,t-1}) + (1-\lambda)^2 \lambda (\Delta i_{x,t-2} \Delta i_{y,t-2}) + (1-\lambda)^3 \sigma_{xy,t-2} \\
 &= \lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j \Delta i_{x,t-j} \Delta i_{y,t-j}
 \end{aligned}$$

Dunque la covarianza, al tempo t+1, tra la variazione di tasso x e quella del tasso y è:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy,t+1} &= \lambda (\Delta i_{x,t} \Delta i_{y,t}) + (1-\lambda) \sigma_{xy,t} \\
 &= \lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j \Delta i_{x,t-j} \Delta i_{y,t-j}
 \end{aligned}$$

con $\sum_{j=0}^t \lambda (1-\lambda)^j = 1$

9.3. Il modello O-GARCH

Per quanto riguarda l'utilizzo dei modelli GARCH, avendo a disposizione più di un tasso di interesse, non è sufficiente il modello univariato GARCH(1,1). Per stimare la matrice di varianze-covarianze dei fattori di rischio bisogna utilizzare uno dei modelli GARCH multivariati. In particolare verrà utilizzato l'approccio O-GARCH (Orthogonal GARCH) in quanto è quello più

interessante dal punto di vista matematico dato che coinvolge la decomposizione spettrale di matrice.

L'O-GARCH è un approccio basato sull'analisi delle componenti principali (o dei “fattori”) e consiste sostanzialmente nell'applicazione statistica dell'algoritmo della scomposizione spettrale di matrice. È un procedimento, dunque, molto più complesso rispetto alle SMA e EWMA, ma che ha lo stesso obiettivo: la stima della matrice di var-cov condizionata (H_t) e della matrice di correlazione condizionata (P_t).

In questa Tesi, il modello multivariato sarà utile per stimare le volatilità e correlazioni delle variazioni dei key rates presi su base giornaliera. Nella letteratura, la validità dell'utilizzo del modello O-GARCH sui tassi di interesse⁶⁶ è già stata discussa e provata all'inizio del 2000.

Questo approccio parte riscrivendo le serie storiche osservate (Δi_t) in termini di fattori (f_t), ottenuti come combinazione lineare delle variabili originali (Δi_t), i quali sintetizzano gli aspetti principali delle serie storiche osservate, cioè le componenti di fondo delle serie. Si procede in questo modo, scomponendo la serie originale, perché analizzare i fattori è molto più semplice in quanto gli f_t non sono solo incorrelati, bensì sono ortogonali (totalmente indipendenti l'uno dall'altro). In breve, l'approccio delle componenti principali ortogonalizza le variazioni giornaliere dei tassi (Δi_t) e restituisce dei fattori indipendenti (f_t) che possono essere studiati singolarmente senza doversi preoccupare della correlazione, in quanto ortogonali. Inoltre i fattori avranno anche un'altra caratteristica cruciale oltre l'indipendenza: essi sono ordinati in base alla loro importanza, dunque il primo fattore avrà un ruolo fondamentale perché sarà quello che più di tutti gli altri spiega la varianza delle variabili originali (Δi_t).

Il procedimento può essere riassunto nel seguente modo: si parte dalla decomposizione spettrale della matrice di varianza-covarianza incondizionata (Σ) delle variabili di mercato (Δi_t) trovando così i suoi autovalori (Λ) ed autovettori (V). Successivamente si costruiscono i fattori come combinazione lineare delle Δi_t e degli autovettori, che saranno indipendenti tra loro proprio perché gli autovettori sono ortogonali. Questo permette di analizzare i fattori singolarmente: infatti per ogni fattore (f_t) viene modellato un GARCH(1,1) monovariato. Una volta ottenuta la matrice di var-cov condizionata dei fattori (H_t^f) sarà possibile ottenere, attraverso una “ricomposizione spettrale”, la matrice target H_t ovvero la matrice di var-cov condizionata delle variabili di mercato Δi_t .

⁶⁶ Alexander C. (2001)



In dettaglio:

- La matrice di cui si fa la decomposizione spettrale è la matrice di var-cov incondizionata delle variabili di mercato, la matrice Σ ($N \times N$) che si ottiene facilmente in questo modo:

$$\Sigma = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Delta \mathbf{i}_t * \Delta \mathbf{i}_t'$$

dove:

- N è il numero delle variabili, che in questo studio è 7 perché questo è il numero dei key rates rilevanti per l'analisi (Σ è quindi una 7×7);
 - $\Delta \mathbf{i}_t$ è il vettore delle variabili di mercato al tempo t , in particolare: $\Delta \mathbf{i}_t = \begin{matrix} \Delta i_{1,t} \\ \vdots \\ \Delta i_{7,t} \end{matrix}$;
 - $\Delta \mathbf{i}_t'$ è il vettore trasposto, quindi in pratica si stanno moltiplicando le osservazioni per loro stesse per ottenere le varianze e covarianze campionarie senza condizionare al passato.
- Questa matrice viene scomposta nei suoi autovalori e autovettori:

$$\Sigma = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}'$$

dove:

- \mathbf{V} è la matrice degli autovettori (7×7);
- \mathbf{V}' è la matrice degli autovettori trasposta (7×7);
- Λ è la matrice degli autovalori (7×7).

La decomposizione spettrale, in breve, consiste nel trovare i valori λ (autovalori) ed i vettori \mathbf{v} (autovettori) che risolvono il seguente sistema lineare: $\Sigma \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$

Avendo la proprietà di essere ortogonali, essi rappresentano le componenti di fondo di una matrice.

La matrice degli autovettori è:

$$V = v_1 \quad \dots \quad v_7$$

essa contiene i 7 autovettori di Σ che hanno 7 elementi ciascuno⁶⁷. Ad esempio il primo autovettore ha questa forma:

$$v_1 = v_{I1} \quad v_{II1} \quad \dots \quad v_{VII1}$$

La matrice degli autovalori è una matrice diagonale:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}$$

essa contiene i 7 autovalori giacenti sulla diagonale ordinati in ordine crescente $\lambda_1 > \dots > \lambda_7$

- Ora che si possiedono gli autovettori, si procede con la costruzione dei fattori:

$$f_t = V' \Delta i_t$$

$$f_t = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Delta i_t \\ \vdots \\ \Delta i_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,t} \\ \vdots \\ f_{7,t} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, il primo fattore (cioè il primo elemento del vettore f_t) risulta:

$$\begin{aligned} f_{1,t} &= v_1 * \Delta i_t \\ &= v_{I1} * \Delta i_{1,t} + v_{II1} * \Delta i_{2,t} + \dots + v_{VII1} * \Delta i_{7,t} \end{aligned}$$

dove:

- v_1 è il primo autovettore, che viene moltiplicato per il vettore delle variabili di

$$\text{mercato con } \Delta i_t = \begin{pmatrix} \Delta i_{1,t} \\ \vdots \\ \Delta i_{7,t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_1 = v_{I1} \quad v_{II1} \quad \dots \quad v_{VII1}$$

I fattori, così definiti, assicurano l'identità della serie originale:

$$\Delta i_t = V f_t$$

⁶⁷ Si sta ipotizzando che la matrice Σ ($N \times N$) è definita positiva così da avere N autovalori e N autovettori reali e distinti.

$$\Delta i_t = V (V' \Delta i_t)$$

$$\Delta i_t = V V' \Delta i_t$$

$$\Delta i_t = I \Delta i_t \quad \text{dove } I \text{ è la matrice identità (tutti elementi nulli e diagonale unitaria)}$$

$$\Delta i_t = \Delta i_t \quad \text{perché per la proprietà degli autovettori } V V' = I$$

- Si hanno dunque 7 fattori (non più 7 key rates) con le seguenti importanti caratteristiche: in primo luogo sono ortogonali (quindi avranno covarianza nulla), inoltre questi 7 fattori hanno varianze pari ai 7 autovalori. Ad esempio il primo fattore ha varianza incondizionata pari a λ_1 e, poiché il primo autovalore è il più grande, il primo fattore sarà il più importante in quanto la porzione di varianza spiegata, delle variabili di mercato, è la più grande.

$$\text{var-cov}(f_t) = \Lambda = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \end{matrix}$$

- Grazie alla proprietà di ortogonalità dei fattori, è possibile analizzarli separatamente. Si modella ciascuno dei 7 fattori con un GARCH (1,1) univariato⁶⁸, condizionando la distribuzione di ciascun fattore al set informativo F_{t-1} contenente tutti i fattori passati. Ad esempio, per il primo fattore:

$$\mathbf{f}_{1,t} \mid F_{t-1} \sim \mathbf{N}(0; \mathbf{h}_{1,t}^f)$$

dove:

- $\mathbf{h}_{1,t}^f$ è la varianza condizionata, al tempo t , del primo fattore (sarebbe l'equivalente di $\sigma_{\Delta i,t}^2$).

$$\mathbf{h}_{1,t}^f = \lambda_1 (1 - \alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1 f_{1,t-1}^2 + \beta_1 \mathbf{h}_{1,t-1}^f$$

Modellando tutti e 7 i fattori con un GARCH(1,1) si ottengono facilmente le 7 varianze condizionate che vanno a comporre la diagonale della matrice di var-cov condizionata dei fattori:

⁶⁸ Quindi si ipotizza una distribuzione Normale dei fattori

$$\mathbf{H}_t^f = \begin{matrix} & \mathbf{h}_{1,t}^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \mathbf{h}_{2,t}^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \mathbf{h}_{3,t}^f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_{4,t}^f & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_{5,t}^f & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_{6,t}^f & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_{7,t}^f \end{matrix}$$

- Infine bisogna ricavare la matrice desiderata di var-cov condizionata delle variabili di mercato, in quanto \mathbf{H}_t^f è solo la matrice di var-cov dei fattori e non dei key rates. L'ultimo step è quindi la "ricomposizione" spettrale:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{V} \mathbf{H}_t^f \mathbf{V}'$$

dove:

- \mathbf{V} è la matrice degli autovettori di Σ , che si era ottenuta all'inizio con la decomposizione spettrale di Σ . Ora \mathbf{V} viene utilizzata nella ricomposizione per ottenere \mathbf{H}_t

$$\mathbf{H}_t = \begin{vmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{1,2,t} & \dots & \sigma_{1,7,t} \\ \sigma_{1,2,t} & \sigma_{2,t}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1,7,t} & \dots & & \sigma_{7,t}^2 \end{vmatrix}$$

CAPITOLO 10

LE METODOLOGIE DI CALCOLO DELL' ES

L'expected shortfall è il valore atteso delle perdite superiori al VaR, una media condizionata che non considera tutta la distribuzione delle perdite, ma solo quelle superiori al VaR.

In formule:

$$ES = E [\text{Loss} \mid \text{Loss} > \text{VaR}]$$

oppure in termini di valore di mercato dell'esposizione:

$$ES = E \{- [VM - E(VM)] - [VM - E(VM)] > \text{VaR}\}$$

più tecnicamente, in termini di rendimento di portafoglio:

$$ES_{\alpha, t+1} = - E_t [r_{t+1} \mid r_{t+1} < -\text{VaR}]$$

L'ES dipende esplicitamente dal VaR stimato attraverso un determinato livello di confidenza. Il VaR viene calcolato utilizzando differenti approcci, allo stesso modo l'ES può essere calcolato partendo dal valore a rischio stimato con l'approccio parametrico oppure utilizzando l'approccio di simulazione storica.

10.1. La formula parametrica

È possibile stimare l'expected shortfall utilizzando una formula parametrica, cioè attraverso un modello basato solo su pochi parametri. Si è già detto che l'ipotesi di distribuzione Normale dei

fattori di mercato, che è alla base del modello var-cov, rende molto semplice il calcolo del VaR; in modo equivalente la stessa ipotesi semplifica significativamente il calcolo dell'ES. Dunque ipotizzando che la distribuzione condizionata dei rendimenti del portafoglio sia Normale con media zero e varianza σ_{t+1}^2 :

$$\mathbf{r}_{t+1} \mid \mathbf{F}_t \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma_{t+1}^2)$$

dove:

- \mathbf{F}_t è il set informativo che contiene tutte le osservazioni passate dei rendimenti;
- σ_{t+1}^2 è la varianza eteroschedastica che può essere stimata con qualunque dei modi visti in precedenza.

Si ottiene dalla definizione di ES al livello di confidenza $(1-\alpha)$ per il tempo $t+1$:

$$ES_{\alpha,t+1} = \sigma_{t+1} * \frac{f\left(-\frac{VaR}{\sigma_{t+1}}\right)}{F\left(-\frac{VaR}{\sigma_{t+1}}\right)}$$

dove:

- f è la funzione di densità di probabilità di una Normale standard;
- F è la funzione cumulata di una Normale standard.

Dalla formula precedente si ricava facilmente:

$$ES_{\alpha,t+1} = \sigma_{t+1} * \frac{f(-z_\alpha)}{\alpha}$$

da cui, conoscendo la formula per il VaR calcolato con l'approccio parametrico:

$$ES_{\alpha,t+1} = -\frac{f(-z_\alpha)}{\alpha * z_\alpha} * VaR$$

Si è dunque ricavata la formula parametrica per l'ES che si basa sull'ipotesi di distribuzione Normale dei risk factors. Si applica questa formula all'intero portafoglio, di cui si conosce il VaR (calcolato con la matrice di correlazione) e si ottiene lo shortfall dell'esposizione complessiva

$$ES_{\alpha,t+1} = -\frac{f(-z_{\alpha})}{\alpha * z_{\alpha}} * VaR_p$$

Per quanto riguarda l'applicazione del modello ai titoli di debito, si ottiene l'analogo risultato ipotizzando che

$$\Delta i_t \mid F_{t-1} \sim N(0, \sigma^2_t)$$

10.2. L'ES dalla simulazione storica

Si è visto che il calcolo dell'ES utilizzando l'approccio parametrico è molto semplice, ma utilizzando il modello di simulazione storica, il calcolo risulta anche più veloce. Infatti una volta simulati gli scenari possibili utilizzando le variazioni passate dei fattori di rischio, e costruita la distribuzione empirica del portafoglio, il VaR viene stimato in corrispondenza del percentile desiderato. L'ES misura la dimensione attesa della perdita nel caso in cui si verifichi il worst case scenario (che può accadere con probabilità α), dunque per stimare l'ES sarà sufficiente calcolare la media delle perdite superiori al VaR. Avendo a disposizione la distribuzione completa, si conoscono tutte le possibili perdite maggiori a quella in corrispondenza della posizione $\alpha * 250$ (solitamente si prendono 250 osservazioni per considerare l'anno finanziario), quindi l'ES risulta la semplice media aritmetica di tutte le perdite superiori al VaR.

PARTE IV
RISULTATI ED EVIDENZE EMPIRICHE

CAPITOLO 11

DESCRIZIONE DEL CAMPIONE

Questo lavoro si focalizza sulla gestione del rischio di mercato sul portafoglio titoli di debito delle istituzioni finanziarie appartenenti al campione, in particolare sull'applicazione dei modelli VaR per misurare il rischio di tasso d'interesse. Verranno utilizzati sia le esposizioni sui titoli di debito presenti nel trading book, sia quelle incluse nel banking book. In altre parole, si sta studiando la gestione del rischio di tasso delle esposizioni sui titoli di debito in un campione di 10 gruppi bancari Italiani.

Il campione in analisi è composto da 10 gruppi bancari Italiani⁶⁹:

UBI BANCA
BANCA POPOLARE VICENZA
VENETO BANCA
BANCA POPOLARE MILANO
BANCA CARIGE
BANCA DELLE MARCHE
BANCA ETRURIA
CASSA DI RISPARMIO DI BOLZANO
BANCA DI CREDITO COOPERATIVO DI ROMA
CASSA DI RISPARMIO DI RAVENNA

Il periodo di riferimento per i calcoli è il 31/12/2012, dunque la normativa vigente è quella di Basilea II.

Sono state estratte, dai bilanci consolidati dei 10 gruppi del 2012, le matrici per scadenze del portafoglio di negoziazione (trading book) e del portafoglio bancario (banking book), che si trovano nella parte E della Nota Integrativa, nella sezione sul rischio di mercato, in particolare sul rischio di tasso di interesse e rischio di prezzo sui due suddetti portafogli.

Le matrici per scadenze mostrano la distribuzione per durata residua (data di riprezzamento) delle attività e passività finanziarie del trading book in 7 diverse fasce temporali.

⁶⁹ La maggior parte delle grandi banche italiane non rende pubblica la matrice per scadenze del trading book, rendendo così impossibile l'applicazione del modello di calcolo del VaR.

Ad esempio, dal bilancio consolidato al 31/12/2012 di UBI BANCA:

1.1 Portafoglio di negoziazione di vigilanza: distribuzione per durata residua (data di riprezzamento) delle attività e delle passività finanziarie per cassa e derivati finanziari. Valuta di denominazione: Euro

Tipologia/durata residua	A vista	Fino a 3 mesi	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	Da oltre 6 mesi fino a 1 anno	Da oltre 1 anno fino a 5 anni	Da oltre 5 anni fino a 10 anni	Oltre 10 anni	Durata indeterminata	TOTALE EURO
1. Attività per cassa	346	26.000	304.057	2.766.801	339.065	2.812.110	404	-	6.248.783
1.1 Titoli di debito	121	14.435	304.057	2.765.501	304.287	2.812.081	404	-	6.200.886
- con opzione di rimborso anticipato	-	-	-	-	312	169	-	-	481
- altri	121	14.435	304.057	2.765.501	303.975	2.811.912	404	-	6.200.405
1.2 Altre attività	225	11.565	-	1.300	34.778	29	-	-	47.897
2. Passività per cassa	-	11.664	-	671.073	470.825	-	-	-	1.153.562
2.1 PCT passivi	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.2 Altre passività	-	11.664	-	671.073	470.825	-	-	-	1.153.562
3. Derivati finanziari	(83.050)	(9.429.602)	(17.068)	427.626	3.034.563	3.005.249	4.106.953	(21.406)	1.023.265
3.1 Con titolo sottostante	-	(803)	656	1.506	19.922	265	(1)	(21.406)	139
- Opzioni	-	-	-	-	18.156	-	-	(18.156)	-
+ Posizioni lunghe	-	-	-	-	23.147	-	-	4.991	28.138
+ Posizioni corte	-	-	-	-	4.991	-	-	23.147	28.138
- Altri	-	(803)	656	1.506	1.766	265	(1)	(3.250)	139
+ Posizioni lunghe	-	87.455	72.310	1.845	2.433	265	-	-	164.308
+ Posizioni corte	-	88.258	71.654	339	667	-	1	3.250	164.169
3.2 Senza titolo sottostante	(83.050)	(9.428.799)	(17.724)	426.120	3.014.641	3.004.984	4.106.954	-	1.023.126
- Opzioni	-	75.733	3.342	(1.515)	(15.499)	(5.569)	(48.640)	-	7.852
+ Posizioni lunghe	-	521.295	176.706	157.268	105.824	75.217	164.877	-	1.201.187
+ Posizioni corte	-	445.562	173.364	158.783	121.323	80.786	213.517	-	1.193.335
- Altri	(83.050)	(9.504.532)	(21.066)	427.635	3.030.140	3.010.553	4.155.594	-	1.015.274
+ Posizioni lunghe	96.792	10.846.735	3.373.487	791.055	5.935.233	4.091.559	4.980.538	-	30.115.399
+ Posizioni corte	179.842	20.351.267	3.394.553	363.420	2.905.093	1.081.006	824.944	-	29.100.125

La riga evidenziata consiste nel portafoglio dei titoli di debito, distribuito per le diverse fasce temporali. In realtà quei valori sono dati dalla somma di più posizioni su titoli di debito, che però non possono essere osservati sul mercato in quanto sono valori contabili. Dunque si considera la voce “Titoli di debito” come se fosse un portafoglio di zero-coupon bonds, uno per ogni fascia, con data di scadenza pari al punto medio della rispettiva fascia temporale⁷⁰. Poiché non si dispone dei tassi relativi ai punti medi delle fasce, bisognerà ricavarli dai tassi zc della term structure. Dopo aver mappato i vari cash flow alle relative duration⁷¹ sarà possibile calcolare il VaR di ciascun zcb e infine dell’intero portafoglio, cioè il VaR dell’esposizione complessiva del trading book al rischio di interesse.

⁷⁰ Non si considera la fascia “durata indeterminata”.

⁷¹ La Duration di un ZCB è la maturity, in questo caso il punto medio della fascia.

Si procede analogamente per le posizioni sui titoli di debito del banking book. Ad esempio, dal bilancio consolidato al 31/12/2012 di UBI BANCA:

1.1 Portafoglio bancario: distribuzione per durata residua (per data di riprezzamento) delle attività e delle passività finanziarie. Valuta di denominazione: Euro

	A vista	Fino a 3 mesi	Da oltre 3 mesi fino a 6 mesi	Da oltre 6 mesi fino a 1 anno	Da oltre 1 anno fino a 5 anni	Da oltre 5 anni fino a 10 anni	Oltre 10 anni	Durata indeterminata	TO TALE EURO
1. Attività per cassa	21.998.638	49.760.016	10.213.436	2.800.046	15.122.510	8.284.609	5.366.926	91.716	113.637.897
1.1 Titoli di debito	256.130	595.117	1.353.015	422.743	8.368.258	2.819.111	2.395.375	-	16.209.749
- con opzione di rimborso anticipato	989	660	-	-	21.955	5.106	-	-	28.710
- altri	255.141	594.457	1.353.015	422.743	8.346.303	2.814.005	2.395.375	-	16.181.039
1.2 Finanziamenti a banche	1.108.541	2.408.422	2.120.356	60.753	34.778	29	-	-	5.732.879
1.3 Finanziamenti a clientela	20.633.967	46.756.477	6.740.065	2.316.550	6.719.474	5.465.469	2.971.551	91.716	91.695.269
- c/c	12.122.408	2.571	4.806	34.683	27.273	49.033	-	-	12.672.074
- altri finanziamenti	8.511.559	46.753.906	6.735.259	2.291.867	6.692.201	4.975.136	2.971.551	91.716	79.023.195
- con opzione di rimborso anticipato	4.666.712	38.566.899	3.609.099	1.462.873	4.247.242	2.391.057	2.923.679	91.716	57.959.277
- altri	3.844.847	8.187.007	3.126.160	828.994	2.444.959	2.584.079	47.872	-	21.063.918
2. Passività per cassa	48.204.008	32.165.284	5.368.631	7.266.709	18.452.625	3.217.277	510	-	114.674.774
2.1 Debiti verso clientela	45.516.830	5.362.947	808.337	822.693	4.215	81.35	-	-	52.523.157
- c/c	43.049.335	-	-	-	-	-	-	-	43.049.335
- altri	2.467.495	5.362.947	808.337	822.693	4.215	81.35	-	-	94.73.822
- con opzione di rimborso anticipato	2	63.283	33	193	2.789	4.519	-	-	70.819
- altri	2.467.493	5.299.664	808.304	822.500	1.426	3.616	-	-	94.03.003
2.2 Debiti verso banche	2.307.627	12.525.046	280.163	1.831.657	947.896	-	-	-	17.892.389
- c/c	888.577	-	-	-	-	-	-	-	888.577
- altri debiti	1.419.050	12.525.046	280.163	1.831.657	947.896	-	-	-	17.003.812
2.3 Titoli di debito	379.508	14.224.893	4.279.861	4.612.359	17.500.514	3.209.142	510	-	44.206.787
- con opzione di rimborso anticipato	5.642	827.387	379.388	9.808	40.813	80.076	-	-	1.343.114
- altri	373.866	13.397.506	3.900.473	4.602.551	17.459.701	3.129.066	510	-	42.863.673
2.4 Altre passività	43	52.398	-	-	-	-	-	-	52.441
- con opzione di rimborso anticipato	-	-	-	-	-	-	-	-	-
- altri	43	52.398	-	-	-	-	-	-	52.441
3 Derivati finanziari	(170.161)	(11.033.236)	(5.374.905)	2.345.329	16.044.888	1.735.682	(5.149.150)	-	(1.601.553)
3.1 Con titolo sottostante	-	-	-	-	(208.101)	(335.848)	(112.783)	-	(656.732)
- Opzioni	-	-	-	-	(208.101)	(335.848)	(112.783)	-	-
+ Posizioni lunghe	-	-	-	639.135	1.865	-	34	1.299.666	1.940.700
+ Posizioni corte	-	-	-	639.135	209.966	335.848	112.817	1.299.666	2.597.432
- Altri	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+ Posizioni lunghe	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+ Posizioni corte	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.2 Senza titolo sottostante	(170.161)	(11.033.236)	(5.374.905)	2.345.329	16.252.989	2.071.530	(5.036.367)	-	(944.821)
- Opzioni	(452.063)	(1.666.992)	(224.546)	(556.779)	1.828.083	1.090.036	(247.131)	-	(29.122)
+ Posizioni lunghe	31.052	2.548.110	684.97	421.890	2.730.406	1.371.725	2.244.189	-	94.15.869
+ Posizioni corte	483.115	4.215.102	293.043	778.669	902.323	281.419	2.491.320	-	94.44.991
- Altri	281.902	(9.366.244)	(5.150.359)	2.702.108	14.424.906	98.12.24	(4.789.236)	-	(915.699)
+ Posizioni lunghe	284.393	13.042.527	2.930.083	3.367.154	17.856.803	3.098.853	-	-	40.579.813
+ Posizioni corte	2.491	22.408.771	8.080.442	665.046	3.431.897	2.117.629	4.789.236	-	41.495.512
4 Altre operazioni fuori bilancio	(49.120)	2.497	175	4.781	13.616	73.14	23.097	-	2.360
+ Posizioni lunghe	1.704.192	2.497	175	4.781	13.616	73.14	23.097	-	1.755.672
+ Posizioni corte	1.753.312	-	-	-	-	-	-	-	1.753.312

Riassumendo i dati del campione sulle posizioni in titoli di debito distribuiti per le fasce temporali (sia del trading book che del banking book):

TRADING BOOK

fasce	UBI	BANCA POPOLARE VICENZA	VENETO BANCA	BANCA POPOLARE MILANO	BANCA CARIGE
A VISTA	121	-	5,231	-	94
FINO A 3 MESI	14,435	6,513	82,701	70,386	85,495
DA 3 MESI A 6 MESI	304,057	35,631	22,963	19,896	93,712
DA 6 MESI A 1 ANNO	2,765,501	51,316	27,165	27,545	61,367
DA 1 ANNO A 5 ANNI	304,287	9,515	34,824	31,506	87,261
DA 5 ANNI A 10 ANNI	2,812,081	15,241	2,641	10,177	15,201
OLTRE 10 ANNI	404	11	261	3,534	336

fasce	BANCA DELLE MARCHE	BANCA ETRURIA	CASSA DI RISPARMIO DI BOLZANO	BCC ROMA	CASSA DI RISPARMIO DI RAVENNA
A VISTA	491	1	454	190	-
FINO A 3 MESI	18,978	1,715	125,875	190,084	52,841
DA 3 MESI A 6 MESI	11,960	42	2,511	77,278	15,074
DA 6 MESI A 1 ANNO	9,452	2,957	9,499	5,565	19,111
DA 1 ANNO A 5 ANNI	29,983	407	48,201	-	-
DA 5 ANNI A 10 ANNI	1,896	8	-	-	-
OLTRE 10 ANNI	979	-	-	279	-

BANKING BOOK

fasce	UBI	BANCA POPOLARE VICENZA	VENETO BANCA	BANCA POPOLARE MILANO	BANCA CARIGE
A VISTA	256,130	3,919	43,653	3,152	51,554
FINO A 3 MESI	595,117	2,486,392	1,167,814	706,446	180,873
DA 3 MESI A 6 MESI	1,353,015	1,753,500	1,585,876	2,167,819	484,069
DA 6 MESI A 1 ANNO	422,743	17,350	759,744	972,829	53,842
DA 1 ANNO A 5 ANNI	8,368,258	531,075	1,425,278	4,366,527	1,357,300
DA 5 ANNI A 10 ANNI	2,819,111	388,996	424,616	1,042,034	968,110
OLTRE 10 ANNI	2,395,375	177,978	892,969	-	1,763,412

fasce	BANCA DELLE MARCHE	BANCA ETRURIA	CASSA DI RISPARMIO DI BOLZANO	BCC ROMA	CASSA DI RISPARMIO DI RAVENNA
A VISTA	18,677	87,542	23,081	259,491	64,884
FINO A 3 MESI	658,102	827,026	178,677	308,411	387,070
DA 3 MESI A 6 MESI	125,078	1,323,631	99,219	707,269	258,808
DA 6 MESI A 1 ANNO	5,289	1,313,486	193,122	662,658	199,244
DA 1 ANNO A 5 ANNI	950,369	1,115,099	110,437	698,147	380,673
DA 5 ANNI A 10 ANNI	1,213,820	104,353	-	275,081	19,231
OLTRE 10 ANNI	229,814	83,694	-	-	192

11.1. Spostamento dal trading book verso il banking book

Il banking book consiste in un portafoglio di proprietà in cui sono detenute attività con le quali vi è una relazione di lungo periodo e può contenere strumenti detenuti per la vendita (Available for Sale o AFS), assets detenuti fino a scadenza (Held to Maturity o HTM), strumenti che rappresentano finanziamenti e crediti e/o titoli obbligazionari (Loans & Receivable o L&R) come obbligazioni non quotate in mercato attivo. Le attività che non sono contenute nel banking book vengono riferite generalmente al trading book. Questo portafoglio contiene tutte quelle attività che vengono acquistate per essere negoziate, cioè tutti quegli assets che la banca ha in portafoglio allo scopo di trarre un profitto dalle fluttuazioni di breve termine dei prezzi.

Nella maggior parte dei Paesi dell'Area Euro, l'incidenza dei titoli pubblici domestici sugli attivi delle banche, dopo oltre un decennio di costante declino, ha ripreso a salire dalla fine del 2008. In Italia il fenomeno ha accelerato significativamente dalla metà del 2011, in concomitanza con l'aggravarsi della crisi del debito sovrano e il forte rialzo dei tassi sui titoli di Stato. Tra dicembre del 2011 e settembre del 2013 gli acquisti netti di titoli pubblici italiani da parte delle banche residenti sono stati pari a 150 miliardi (91 miliardi nell'intero 2012 e 59 nei primi nove mesi del 2013). La quasi totalità dei titoli è stata contabilizzata nel banking book, soprattutto nel portafoglio dei titoli disponibili per la vendita (AFS). Alla fine di settembre i titoli pubblici rappresentavano il 10 per cento del totale delle attività bancarie (6 per cento a dicembre del 2011). L'esposizione complessiva (prestiti e titoli di debito) verso le Amministrazioni pubbliche è pari al 12 per cento delle attività totali (aveva raggiunto il 18 nel 1997). L'aumento dei titoli pubblici in portafoglio si è concentrato su quelli con durata residua compresa tra uno e cinque anni⁷².

La crisi finanziaria ha reso evidente che le banche avevano dichiarato intenzioni di trading su strumenti che alla prova dei fatti si sono rivelati difficili da dismettere con rapidità. Le regole di "Basilea 2.5" sono state sviluppate nel 2009 con lo specifico scopo di avvicinare le ponderazioni sulle posizioni di trading a quelle di banking. In realtà le nuove regole hanno mancato l'obiettivo, limitandosi a ribaltare gli incentivi all'allocazione delle posizioni⁷³. Una banca che impiega i modelli interni può ora conseguire un importante risparmio patrimoniale allocando i propri titoli nel banking book, indipendentemente dall'effettiva intenzione e capacità di detenerli sino a scadenza. La convenienza di tale scelta è più pronunciata per investimenti che accentuano il grado di concentrazione del trading book, come spesso avviene per le esposizioni verso il governo del

⁷² Banca d'Italia (2013 c)

⁷³ Pepe G. (2013)

Paese nel quale le banche sono insediate. In questi casi, inoltre, i requisiti di capitale del trading book sono esposti a forti oscillazioni indotte da cambiamenti dei rating.

I nuovi Accordi, dunque, hanno reso più conveniente, in termini di assorbimento di capitale, iscrivere nel banking book obbligazioni e strumenti analoghi negoziati sui mercati finanziari. Inoltre, il diverso trattamento contabile fa sì che la convenienza all'iscrizione nel banking book sia maggiore quando l'inserimento nel trading book ne accentuerebbe la concentrazione verso un settore economico o un emittente; questo effetto è particolarmente rilevante per gli investimenti in titoli pubblici, che generalmente rappresentano una quota elevata dei portafogli delle banche. Infine, l'iscrizione nel banking book è particolarmente vantaggiosa per i titoli con rating medio-basso, poiché in questo caso i requisiti del trading book sono esposti a effetti-soglia causati da piccole variazioni dei rating.

Prendendo in considerazione le banche appartenenti al campione:

TRADING BOOK / ATTIVO										
fasce	UBI	VICENZA	VENETO	MILANO	CARIGE	MARCHE	ETRURIA	BOLZANO	BCC	RAVENNA
A VISTA	0.00009%	0%	0.013%	0%	0.0002%	0.002%	0.000007%	0.005%	0.002%	0%
FINO A 3 MESI	0.011%	0.014%	0.206%	0.134%	0.173%	0.084%	0.012%	1.417%	2.029%	0.832%
DA 3 MESI A 6 MESI	0.230%	0.076%	0.057%	0.038%	0.190%	0.053%	0.000286%	0.028%	0.825%	0.237%
DA 6 MESI A 1 ANNO	2.088%	0.110%	0.068%	0.052%	0.124%	0.042%	0.020%	0.107%	0.059%	0.301%
DA 1 ANNO A 5 ANNI	0.230%	0.020%	0.087%	0.060%	0.177%	0.132%	0.003%	0.542%	0%	0%
DA 5 ANNI A 10 ANNI	2.123%	0.033%	0.007%	0.019%	0.031%	0.008%	0.000054%	0%	0%	0%
OLTRE 10 ANNI	0.0003%	0.00002%	0.001%	0.007%	0.001%	0.004%	0%	0%	0.003%	0%
BANKING BOOK / ATTIVO										
fasce	UBI	VICENZA	VENETO	MILANO	CARIGE	MARCHE	ETRURIA	BOLZANO	BCC	RAVENNA
A VISTA	0.193%	0.008%	0.109%	0.006%	0.105%	0.082%	0.596%	0.260%	2.770%	1.022%
FINO A 3 MESI	0.449%	5.323%	2.908%	1.346%	0.367%	2.900%	5.627%	2.011%	3.292%	6.097%
DA 3 MESI A 6 MESI	1.022%	3.754%	3.948%	4.131%	0.981%	0.551%	9.006%	1.117%	7.550%	4.076%
DA 6 MESI A 1 ANNO	0.319%	0.037%	1.892%	1.854%	0.109%	0.023%	8.937%	2.173%	7.074%	3.138%
DA 1 ANNO A 5 ANNI	6.319%	1.137%	3.549%	8.321%	2.752%	4.188%	7.587%	1.243%	7.453%	5.996%
DA 5 ANNI A 10 ANNI	2.129%	0.833%	1.057%	1.986%	1.963%	5.349%	0.710%	0%	2.937%	0.303%
OLTRE 10 ANNI	1.809%	0.381%	2.223%	0%	3.575%	1.013%	0.569%	0%	0%	0.003%

Il banking book sembrerebbe più esposto al rischio di tasso rispetto al trading book. Dopo la crisi dei debiti sovrani, le banche hanno iniziato a spostare i titoli di debito dal portafoglio di negoziazione verso il banking book, concentrando i volumi nelle fasce a scadenza maggiore. In altre parole, dopo il 2009, è iniziato un trend di acquisti di titoli di debito a lungo termine ed a tasso fisso, che vengono inseriti nel portafoglio bancario, in particolare nelle fasce temporali a lungo termine in corrispondenza della loro effettiva scadenza. Questo ha condotto ad un incremento della durata media finanziaria delle attività. Per questo motivo, il banking book è più esposto a variazioni dei tassi rispetto al trading book. Dunque ad una prima analisi sembrerebbe estremamente

rischioso; in realtà il rischio di interesse del banking book non è così elevato come sembra: le variazioni del fair value dei titoli di debito presenti non viene imputata a conto economico, bensì in una riserva di rivalutazione nel patrimonio.

Inserire i titoli in un portafoglio contabile o in un altro impatta sulla rischiosità e redditività della banca. Dopo che i dubbi sulla solidità dell'euro e sulla solvibilità dei governi europei sono sfociati nella crisi del 2009, i prezzi dei titoli pubblici sono caduti, influenzando i bilanci delle banche a seconda della loro classificazione contabile. Le variazioni di valore di un titolo iscritto nel portafoglio Fair Value Profit and Loss (FVPL) vengono imputate a conto economico come risultati della negoziazione di tale titolo sul mercato. Differentemente, se un titolo è inserito nel portafoglio Available for Sales (AFS), le sue variazioni di valore sono iscritte in un'apposita riserva da rivalutazione del patrimonio netto. La variazione cumulata di quest'ultima è iscritta a conto economico solo quando l'attività finanziaria è ceduta o si estingue.

CAPITOLO 12

RISK FACTORS

La costruzione del modello parte dalle serie storiche dei fattori di rischio. Trattandosi di posizioni sui titoli di debito, i fattori di rischio sono identificati come variazioni dei tassi zero-coupon della term structure. È dunque necessario, al fine di gestire il rischio di tasso, eseguire il mapping del portafoglio titoli.

12.1. Key Rates

Utilizzando DataStream, è stato estratto il seguente campione di osservazioni:

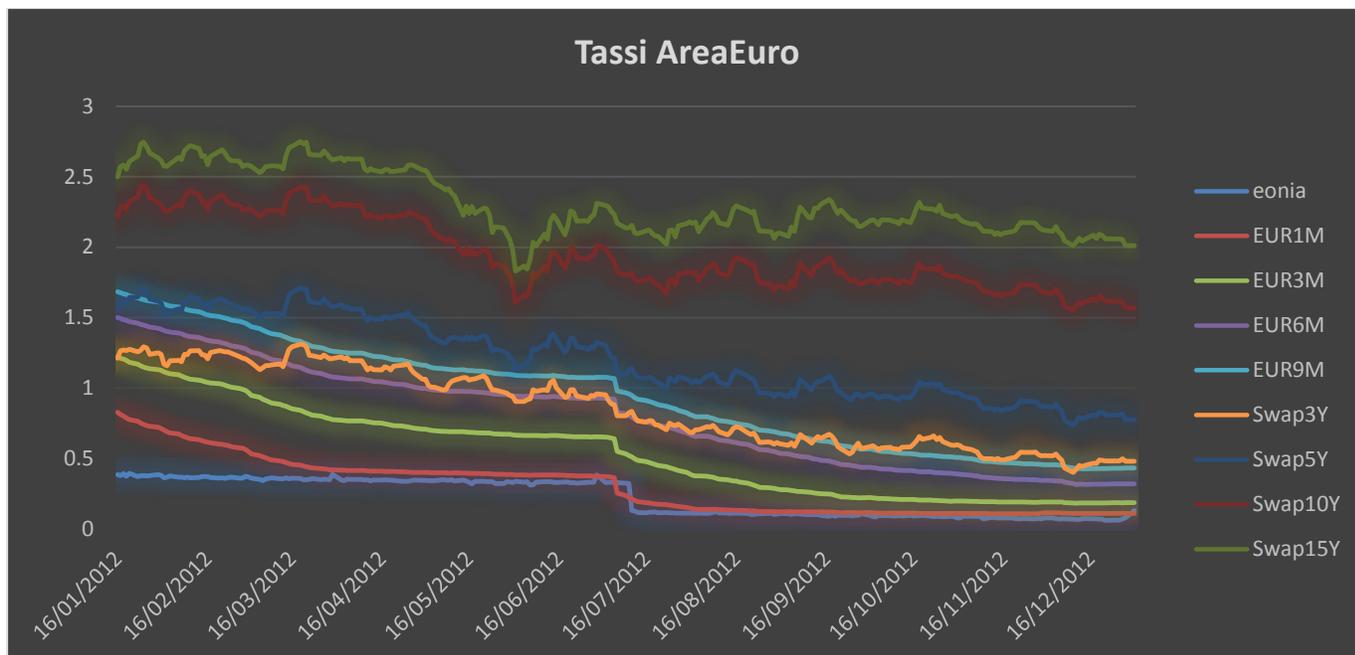
- I tassi SWAP dell'Eurozona da 1 a 30 anni, con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (251 osservazioni per tasso).

- I tassi EURIBOR da 1 mese a 12 mesi, con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (251 osservazioni per tasso).

- La serie storica del tasso EONIA (a vista), con profondità storica a partire dal 16/01/2012 fino al 31/12/2012 e frequenza giornaliera (251 osservazioni per tasso).

Il seguente grafico presenta l'evoluzione temporale all'interno del campione, dei tassi dell'Area Euro⁷⁴:

⁷⁴ Valuta di denominazione: Euro.

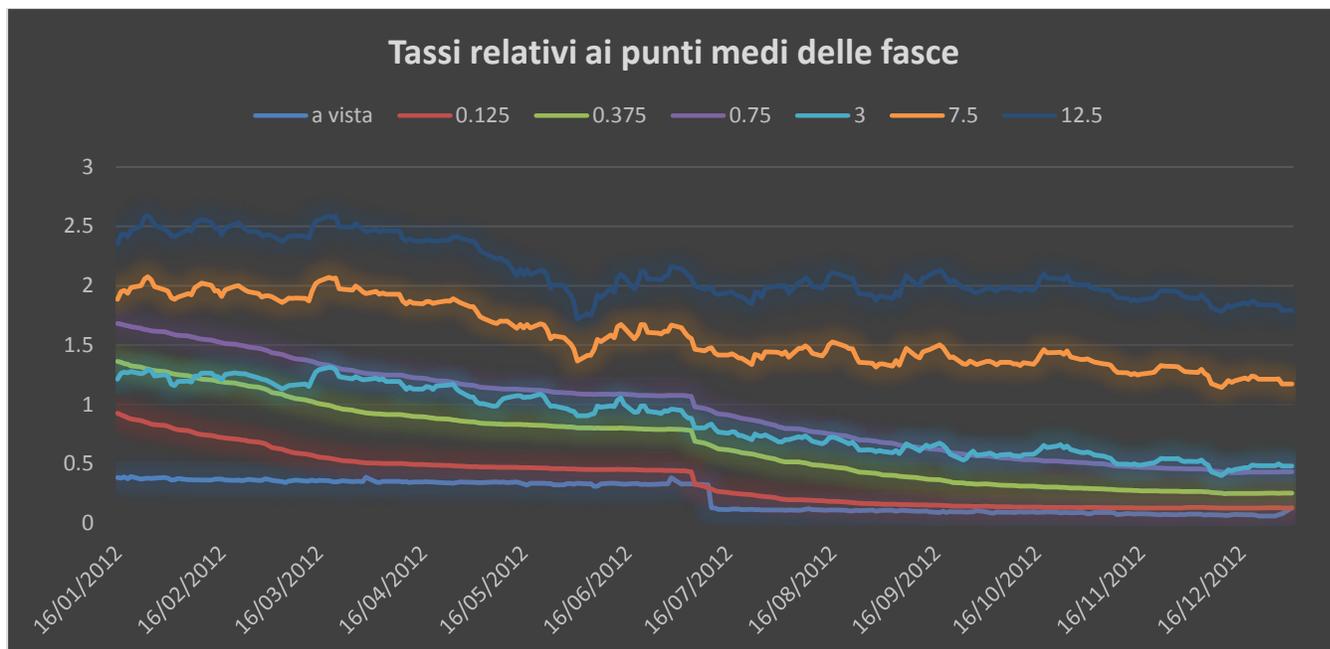


Il grafico mostra che tutti i tassi hanno un trend decrescente, infatti il valore di ciascuna serie storica al 31/12/2012 è inferiore rispetto a quello di partenza, ma tutte le serie storiche diventano più stazionarie, cioè meno volatili, verso la fine del 2012. Inoltre, i tassi swap sono quelli più variabili in quanto le loro serie storiche oscillano maggiormente attorno alla componente di fondo (il trend). Il tasso eonia, invece, è il più stazionario: segue un trend costante, senza troppe oscillazioni, eccetto un salto negativo di livello nel luglio 2012. Infatti tutte queste serie storiche hanno una comune particolarità: un netto cambio di livello, a luglio per i tassi a breve, a maggio per i tassi swap. Senza dubbio ciò è dovuto al taglio del tasso ufficiale di riferimento della BCE (tasso refi) da 1.00% a 0.75%, nel luglio 2012.

L'ipotesi di base è che ogni fascia abbia data di repricing pari al suo punto medio. Dunque considerando le sette fasce: A VISTA, FINO A 3 MESI, DA 3 MESI A 6 MESI, DA 6 MESI A 1 ANNO, DA 1 ANNO A 5 ANNI, DA 5 ANNI A 10 ANNI, OLTRE 10 ANNI.

Bisogna costruire i tassi relativi alle rispettive scadenze, cioè i punti medi di ciascuna fascia⁷⁵:

⁷⁵ Per quanto riguarda la prima fascia (a vista), in realtà si potrebbe anche evitare il calcolo in quanto la scadenza è 0 e quindi non andrà ad influenzare il VaR; tuttavia la si considera comunque perchè è necessaria per il calcolo della matrice di correlazione.



Per la fascia 1, “A VISTA”, si considera semplicemente il tasso eonia in quanto la scadenza del zcb è 0.

Per la seconda fascia, “FINO A 3 MESI”, si è dovuti ricorrere ad un altro stratagemma per ottenere il tasso relativo al punto medio della fascia che è 0.125⁷⁶; disponendo del tasso euribor a 1 mese e del tasso euribor a 3 mesi è possibile ottenere il tasso a 1.5 mesi (cioè 0.125 anni) attraverso la formula dell’interpolazione lineare:

$$i_{1.5} = i_1 + (i_3 - i_1) * \frac{\frac{1.5}{12} - \frac{1}{12}}{\frac{3}{12} - \frac{1}{12}}$$

Per la terza fascia, “DA 3 A 6 MESI”, si utilizza nuovamente l’interpolazione lineare con l’euribor a 3 mesi e l’euribor a 6 mesi, per ricavare il tasso a 0.375 (punto medio della fascia).

Per la quarta fascia, “DA 6 MESI A 1 ANNO”, si può utilizzare direttamente l’euribor a 9 mesi in quanto il punto medio della fascia è proprio 0.75 (cioè 9/12).

⁷⁶ $[(3 + 0) / 2] / 12 = 1.5 / 12 = 0.125$

Per la quinta fascia, “DA 1 ANNO A 5 ANNI”, si può utilizzare direttamente il tasso swap a 3 anni, in quanto il punto medio della fascia è 3.

Per la sesta fascia, “DA 5 A 10 ANNI”, si utilizza nuovamente l’interpolazione lineare con il tasso swap a 5 anni ed il tasso swap a 10 anni, per ricavare il tasso a 7.5 (punto medio della fascia).

Per la settima e ultima fascia, “OLTRE 10 ANNI”, si utilizza l’interpolazione lineare con il tasso swap a 10 anni ed il tasso swap a 15 anni, per ricavare il tasso a 12.5 che, per prassi, coincide con il punto medio della fascia.

12.2. Variazioni giornaliere dei tassi come fattori di rischio

Una volta che si dispone della serie storica di ciascun tasso relativo al punto medio di una fascia temporale, si ottiene facilmente la serie storica delle variazioni giornaliere assolute di ogni tasso dal 17/1/2012 al 31/12/2012 (250 osservazioni⁷⁷):

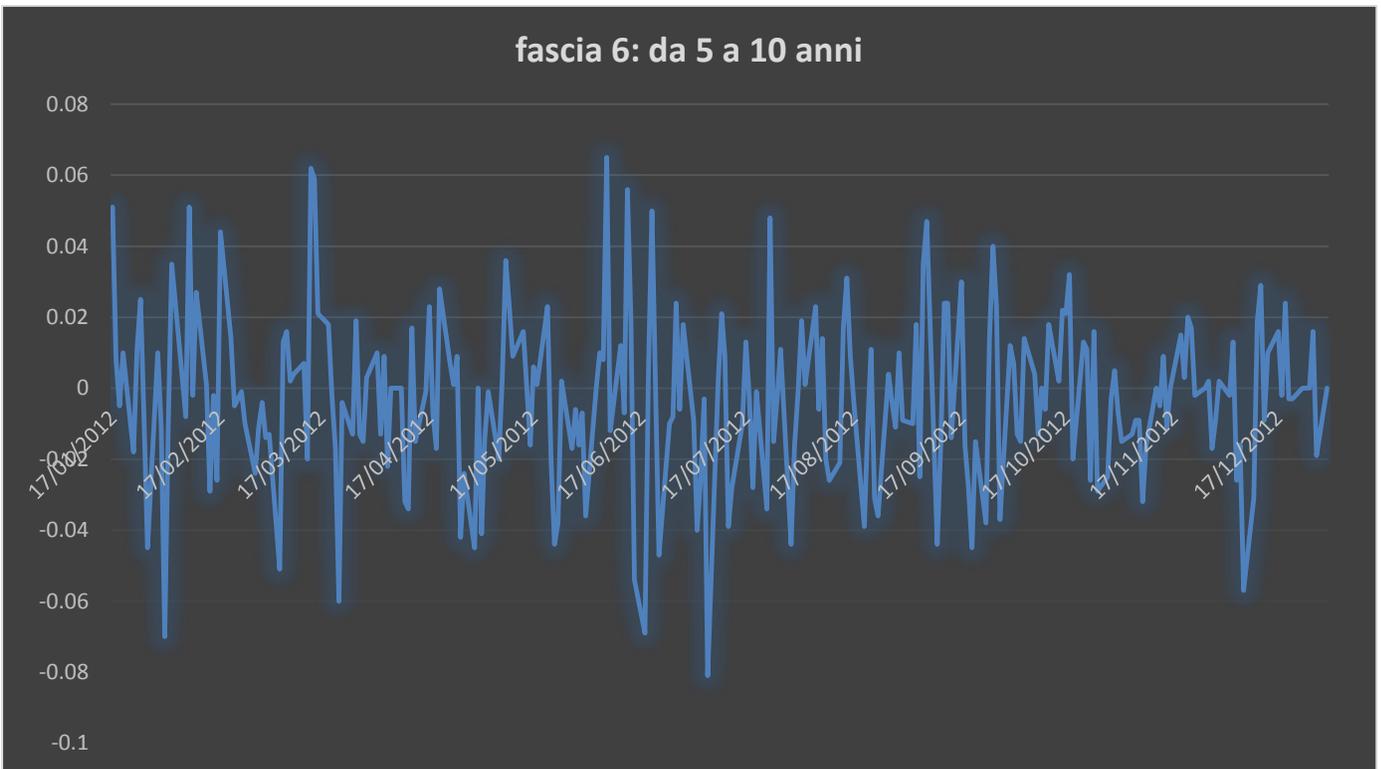
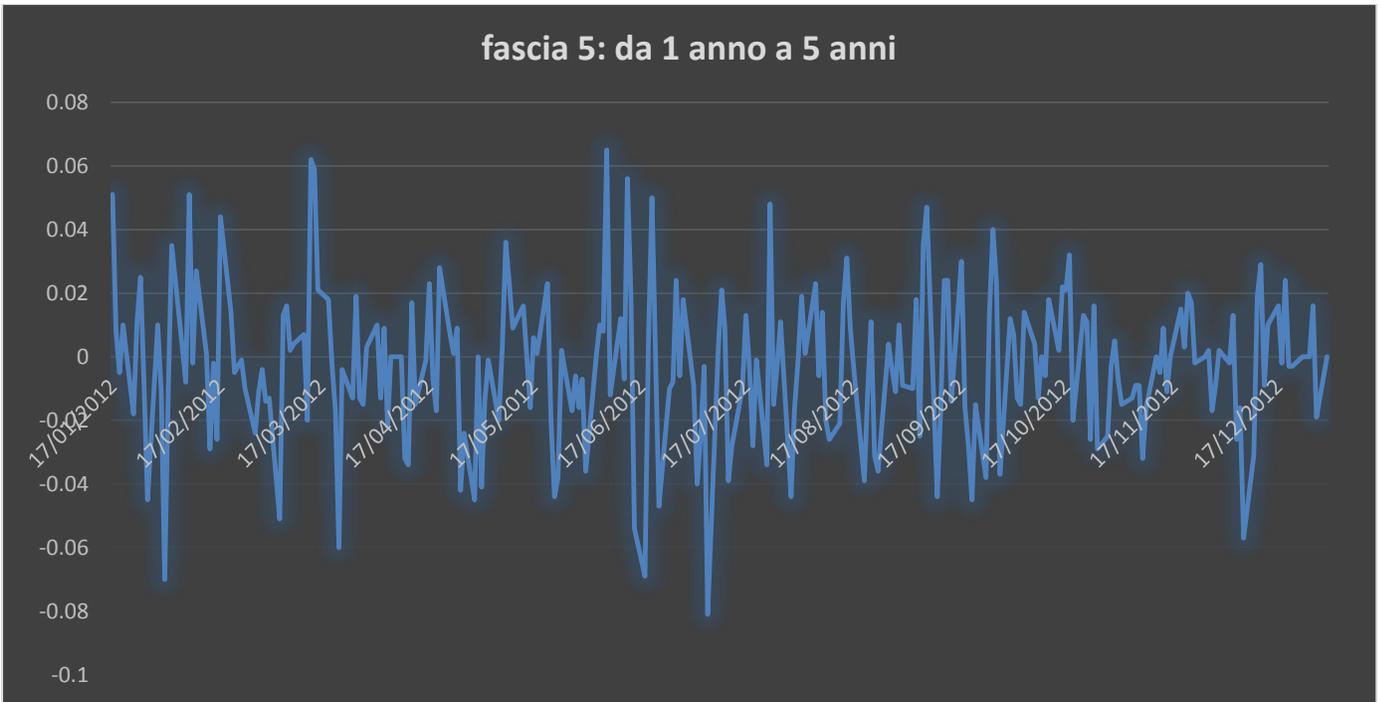
$$\Delta i_t = i_t - i_{t-1}$$

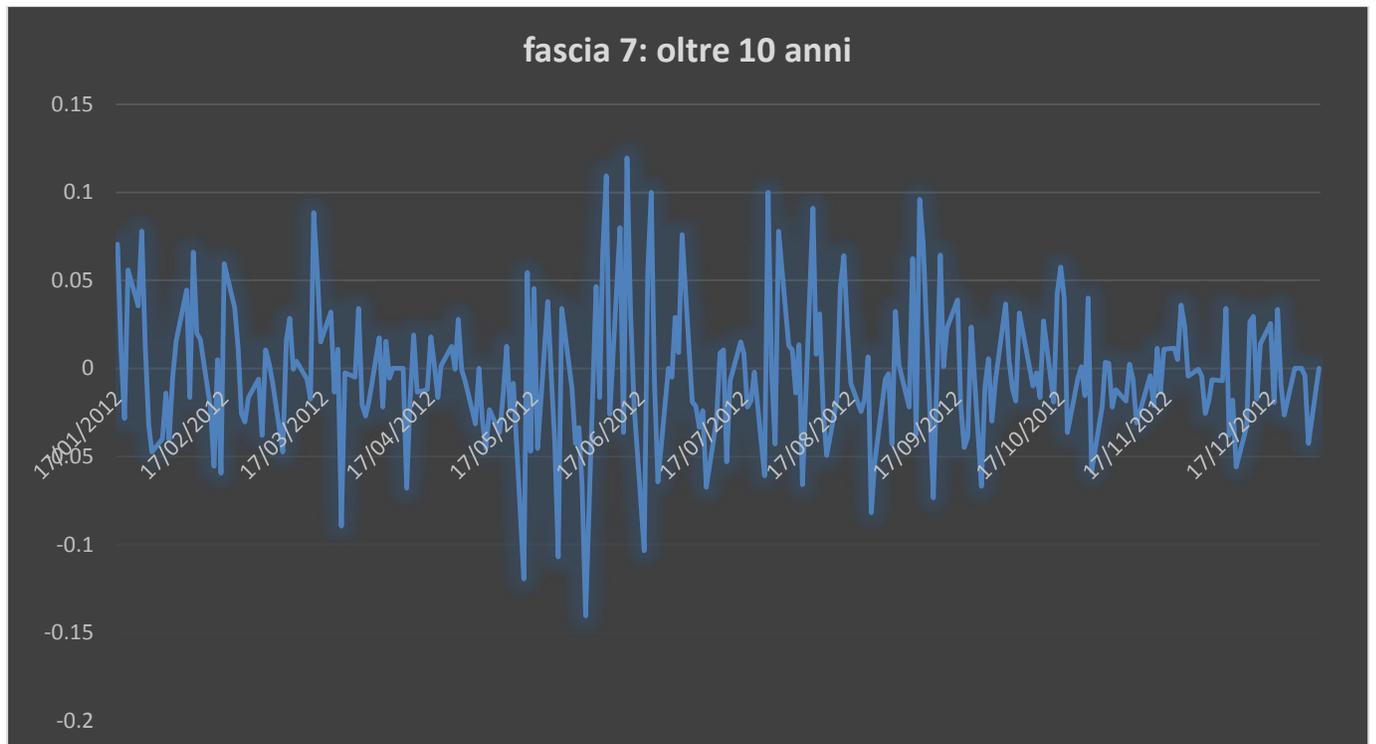
Ecco i risultati ottenuti:



⁷⁷ Si sta considerando l’anno finanziario







Osservazioni:

- I grafici confermano che i tassi swap sono molto più volatili di quelli a breve. Le serie storiche delle variazioni giornaliere assolute dei tassi oltre 12 mese (costruiti con interpolazione lineare tra tassi swap) oscillano in continuazione attorno la media (zero) molto bruscamente. Il processo stocastico generatore della serie storica potrebbe essere un ARMA con componente MA molto forte⁷⁸.
- Differentemente i tassi più a breve, quali l'€onia e quelli costruiti utilizzando gli euribor, sono molto più stazionari sulla media (zero). Probabilmente il processo stocastico generatore è un AR.
- I grafici delle variazioni confermano, inoltre, che tutti i tassi sono diventati meno volatili alla fine dell'anno, quando le variazioni si presentano meno accentuate.

⁷⁸ Bisognerebbe eseguire il Test di autocorrelazione di Ljung-Box per assicurarsi se il processo è un White Noise o un ARMA.

- Vi sono dei cluster di volatilità per ogni serie storica, tutti verificatisi nell'estate 2012. Questo fenomeno è ancora più evidente nel caso delle prime quattro fasce, nel cui grafico è visibile il picco negativo del luglio 2012.

12.3. Ipotesi di Normalità dei key rates

Si è già parlato abbondantemente della questione sull'ipotesi di distribuzione Normale dei fattori di mercato che distingue i metodi parametrici da quelli di simulazione. In questo paragrafo si vuole ora commentare l'assunzione di questa ipotesi in relazione al contesto di questa tesi.

Allo scopo di misurare il rischio di interesse sull'esposizioni dei titoli di debito presenti nel trading book e banking book, vengono applicati sia il modello varianze-covarianze che la simulazione storica. I due approcci si differenziano principalmente per l'ipotesi di partenza: il metodo parametrico assume che i fattori di rischio si distribuiscono in modo Normale, ne segue che anche l'intero portafoglio segue tale distribuzione. L'approccio della simulazione storica invece non fa questa ipotesi (l'unica assunzione implicita è che la distribuzione futura dei fattori di rischio può essere approssimata da quella storica).

Nell'applicazione del modello parametrico, dunque, si assume che le variazioni giornaliere dei key rates seguano una distribuzione Normale. Per capire se questa assunzione è limitativa o veritiera bisogna confrontare la distribuzione empirica con quella teorica. Si prenda ad esempio la variazione giornaliera dello swap a 3 anni:



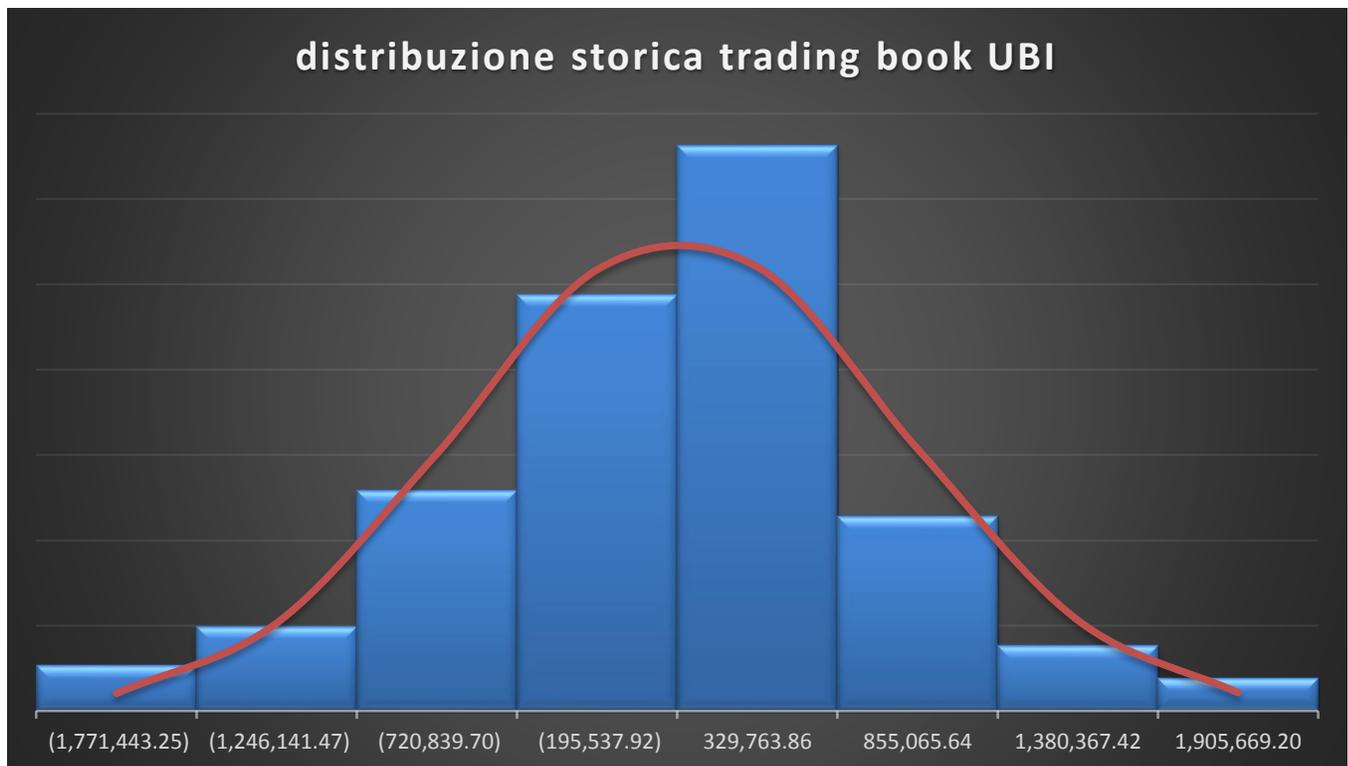
Si nota che le due distribuzioni non coincidono esattamente: quella empirica presenta asimmetria e leptokurtosi, con picchi più alti di quelli previsti dalla Gaussiana e code più spesse. Dunque l'ipotesi di Normalità sta effettivamente sottostimando la probabilità degli eventi centrali ed estremali. Tuttavia, per i tassi swap la Normale resta comunque una buona approssimazione della distribuzione di frequenza empirica se paragonati con i tassi più a breve. Infatti prendendo ad esempio la distribuzione delle variazioni giornaliere del tasso eonia:



I valori sono tutti concentrati sulla media eccetto rare osservazioni estremali sulla coda sinistra. In questo l'ipotesi di Normalità è troppo forte e approssimativa, quindi la simulazione storica è l'approccio più appropriato dato che riesce a cogliere più precisamente le caratteristiche della distribuzione empirica.

La simulazione storica approssima la distribuzione futura dei key rates con quella storica, quindi riesce a ricostruire completamente la distribuzione empirica del portafoglio attraverso la full valuation. In pratica per ogni variazione dei tassi di interesse relativi ai punti medi delle fasce, vengono ricalcolati i valori delle esposizioni e quindi del portafoglio totale.

Prendendo ad esempio la distribuzione del trading book di UBI Banca, ricavata attraverso l'applicazione del modello della simulazione storica⁷⁹:



Nuovamente, la distribuzione Normale sarebbe un'approssimazione limitativa: la distribuzione empirica è più leptokurtica. In particolare, la coda sinistra è più spessa, questo vuol dire che le perdite estremali possono verificarsi più frequentemente di quanto previsto dalla Normale. In un'ottica prudenziale, l'approccio della simulazione storica è migliore perché più conservativo. Per

⁷⁹ Le stima VaR si vedranno nel prossimo capitolo.

questo motivo la maggior parte delle banche appartenenti al campione calcola il VaR con questo metodo.

12.4. Stime della Volatilità

Una volta ottenuta la serie dei Δi con frequenza giornaliera, dal 16/01/2012 al 31/12/2012 (250 osservazioni), è possibile calcolare la volatilità. Ecco i risultati:

fasce	SMA	EWMA	O-GARCH
A VISTA	0.015%	0.014%	0.0113%
FINO A 3 MESI	0.007%	0.001%	0.0057%
DA 3 MESI A 6 MESI	0.007%	0.002%	0.0049%
DA 6 MESI A 1 ANNO	0.006%	0.003%	0.0049%
DA 1 ANNO A 5 ANNI	0.024%	0.017%	0.0177%
DA 5 ANNI A 10 ANNI	0.033%	0.023%	0.0254%
OLTRE 10 ANNI	0.039%	0.023%	0.0298%

La prima colonna è stata calcolata facilmente come deviazioni standard dei dati nel campione, ottenute come radici quadrate delle rispettive varianze, cioè della variabilità delle 250 osservazioni attorno alla media aritmetica campionaria μ (prossima allo zero):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\Delta i_t - \mu)^2}{n - 1}}$$

Si noti che questa formula fornisce una stima approssimativamente uguale alla stima “rolling” della volatilità con media mobile semplice (SMA⁸⁰), in quanto la media μ è molto vicina a zero:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \Delta i_t^2}$$

La seconda colonna invece è stata calcolata utilizzando il seguente algoritmo:

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1} &= [\lambda (\Delta i_t^2) + (1-\lambda) \sigma_t^2]^{0.5} \\ &= [\lambda \sum_{j=0}^t (1-\lambda)^j \Delta i_{t-j}^2]^{0.5} \end{aligned}$$

con $\lambda = 0.06$, esattamente come fa RiskMetrics.

Le stime sono differenti tra loro perché la SMA fornisce una stima globale della volatilità attribuendo lo stesso peso a tutte le osservazioni, quindi l’osservazione meno recente impatta sulla stima quanto l’osservazione più recente. Differentemente l’algoritmo della EWMA fornisce una stima locale dato che i pesi sono esponenzialmente decrescenti ed il passato conta sempre meno per la stima della volatilità.

In particolare, la SMA fornisce stime più grandi rispetto all’EWMA. Il motivo è molto semplice: ogni key rate considerato presenta dei cluster di volatilità durante il 2012 per poi tornare più stabile verso la fine dell’anno. La media mobile esponenziale dà più peso alle osservazioni recenti e meno al passato, di conseguenza le stime EWMA sono più aggiornate e riflettono le condizioni recenti del mercato. Nella media mobile semplice invece i cluster passati hanno lo stesso peso delle osservazioni più recenti, per questo le volatilità SMA sono maggiori di quelle EWMA.

⁸⁰ In pratica si sta affermando che la formula Excel “DEV.ST” per il calcolo della deviazione standard fornisce lo stesso risultato della

12.5. Stime della Correlazione

Una volta trovate tutte le varianze e covarianze, lo step successivo è quello di calcolare la matrice di correlazione delle variazioni dei tassi relativi ai punti medi delle varie fasce.

Partendo dalle stime fatte con la SMA, la matrice di correlazione tra i fattori di rischio delle 7 fasce è la seguente:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0.07860737	0.07901359	0.08989319	-0.01325513	-0.03440256	-0.04087085
2	0.078607374	1	0.959261674	0.919219969	0.206528084	0.143735055	0.087009652
3	0.079013591	0.95926167	1	0.97847319	0.278116246	0.188419814	0.119508235
4	0.089893192	0.91921996	0.97847319	1	0.329969385	0.219331508	0.141969052
5	-0.013255137	0.20652808	0.278116246	0.329969385	1	0.853531313	0.739188546
6	-0.034402561	0.14373505	0.188419814	0.219331508	0.853531313	1	0.974305543
7	-0.040870855	0.08700965	0.119508235	0.141969052	0.739188546	0.974305543	1

Utilizzando invece l'algoritmo della media mobile esponenziale (RiskMetrics), si ottiene la seguente matrice di correlazione:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0.05334826	0.09586099	0.05174912	-0.00768142	-0.04525176	-0.05576043
2	0.053348265	1	0.548707709	0.451812968	0.343155957	0.294938003	0.256840816
3	0.095860994	0.54870770	1	0.931286285	0.419130712	0.313641114	0.259950344
4	0.051749128	0.45181296	0.931286285	1	0.517194024	0.398949335	0.337769349
5	-0.00768142	0.34315595	0.419130712	0.517194024	1	0.922438559	0.866121992
6	-0.045251761	0.29493800	0.313641114	0.398949335	0.922438559	1	0.98573797
7	-0.05576043	0.25684081	0.259950344	0.337769349	0.866121992	0.98573797	1

Seguendo l'approccio O-GARCH, si ottiene la seguente matrice di correlazione:

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
1	1	0.20745	0.23123	0.24348	0.13386	-0.02976	-0.09355
2	0.20745	1	0.89273	0.78140	0.21352	0.14132	0.08597
3	0.23123	0.89273	1	0.96115	0.28780	0.19163	0.12296
4	0.24348	0.78140	0.96115	1	0.32699	0.21550	0.14121
5	0.13386	0.21352	0.28780	0.32699	1	0.86456	0.76361
6	-0.02976	0.14132	0.19163	0.21550	0.86456	1	0.97467
7	-0.09355	0.08597	0.12296	0.14121	0.76361	0.97467	1

È interessante fare un'osservazione: in tutte e tre le matrici, le correlazioni stimate non decrescono all'aumentare dello spread. Questo risultato si contrappone a quanto riscontrato nel 2000 per i tassi americani⁸¹. Nelle matrici di correlazione sui tassi zero-coupon USA, il tasso a 1 mese e quello a 15 anni sono i meno correlati, con la correlazione che decresce in modo stazionario di fascia in fascia.

Differentemente, i tassi zc europei del 2012 presentano un comportamento diverso: la correlazione aumenta fino alla quarta fascia, per poi diminuire. Inoltre, in termini assoluti, i tassi più correlati sono quelli relativi alla sesta e settima fascia e quelli della terza e quarta fascia. Quelli meno correlati, invece, sono quello relativo alla prima fascia e quello dell'ultima fascia. Dunque come riscontrato negli USA (2000), il tasso a brevissimo termine (eonia) e quello a più lungo termine (oltre 10 anni) sono i meno correlati. La correlazione con la prima fascia (a vista) aumenta fino alla quarta (1 anno) per poi diminuire, dunque la correlazione massima del tasso eonia si ha con l'euribor a 9 mesi.

Inoltre, gli euribor sono molto più correlati tra loro rispetto a quanto sono correlati con i tassi swap (viceversa per gli swap).

Infine, il tasso eonia ha correlazione negativa con lo swap a 3 anni (quinta fascia) nelle prime due matrici (SMA e EWMA), mentre nell'ultima questi due tassi sono legati positivamente (O-GARCH).

⁸¹ Alexander C., (2001)

12.6. Duration Modificate

Come ultimo step per il calcolo dei risk factors, bisogna ricavare la duration modificata di ogni fascia che verrà utilizzata come moltiplicatore per il calcolo del VaR in ogni tipo di approccio:

- Approccio parametrico:

$$\text{VaR parziale} = \text{valore titolo} * \text{duration modificata} * \text{volatilità} * z_{\alpha}$$

- Metodo semplificato di Basilea:

$$\text{Variazione valore titolo} = - \text{valore titolo} * \text{duration modificata} * \text{variazione ipotizzata di tasso}$$

- Simulazione storica:

$$\text{Pricing giornaliero del portafoglio} = - \text{valore titolo} * \text{duration modificata} * \text{variazione empirica di tasso}$$

Una volta ricavati i key rates, poichè si dispone già delle duration (coincidono con i punti medi delle fasce), è immediato calcolare le duration modificate utilizzando i tassi rilevati il 31/12/2012:

$$\text{duration modificata} = \frac{\text{duration}}{1 + i}$$

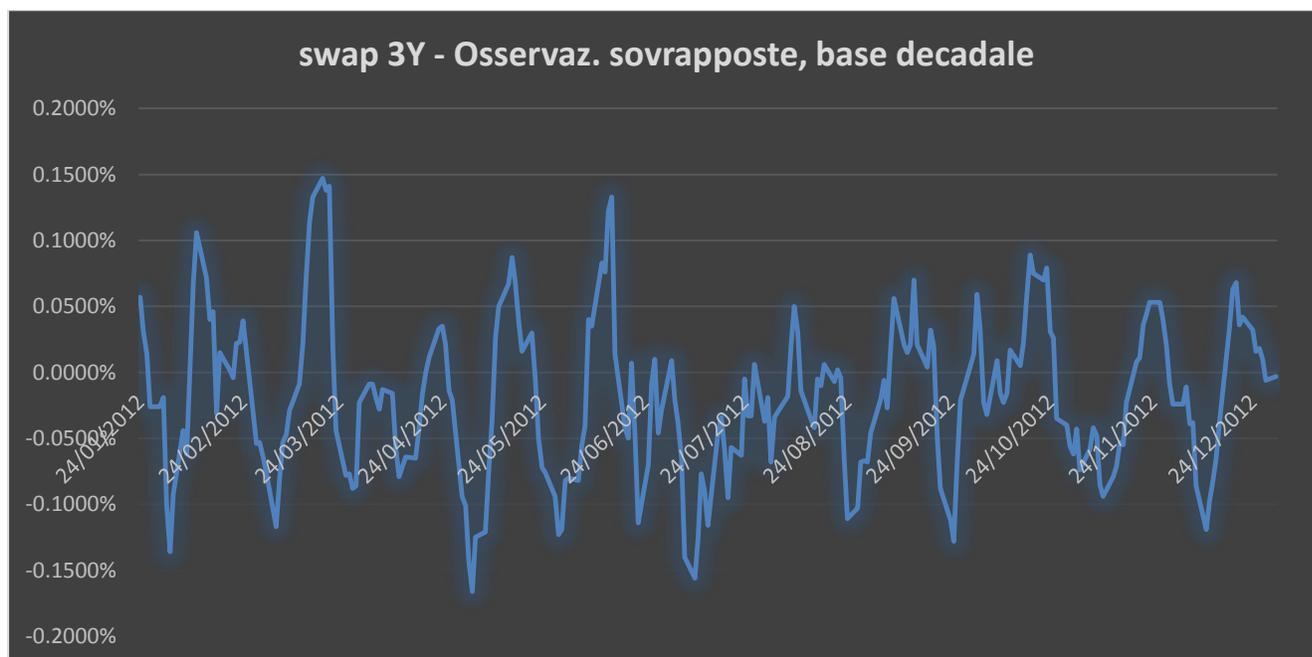
Ecco i risultati ottenuti:

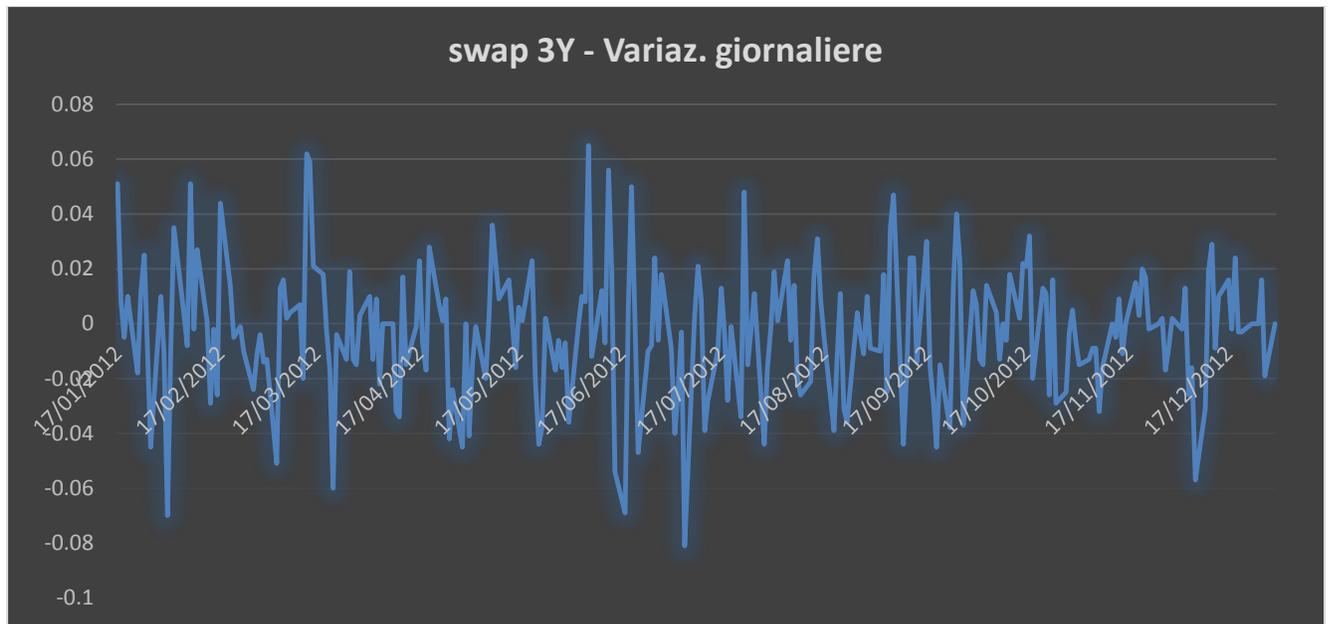
fasce	duration modificata
A VISTA	0
FINO A 3 MESI	0,124839581
DA 3 MESI A 6 MESI	0,374051779
DA 6 MESI A 1 ANNO	0,746773937
DA 1 ANNO A 5 ANNI	2,98566879
DA 5 ANNI A 10 ANNI	7,413081618
OLTRE 10 ANNI	12,28012437

12.7. Risk factors della tecnica delle osservazioni sovrapposte

Per rispettare la normativa, bisogna calcolare il VaR ipotizzando un holding period di 10 giorni. Mentre per il metodo parametrico è sufficiente applicare la regola della “radice del tempo”, per la simulazione storica si ricorre alla tecnica delle “osservazioni sovrapposte”: 1000 osservazioni giornaliere potrebbero tradursi in 990 dati decadali corrispondenti ad intervalli sovrapposti ($\Delta i_k - \Delta i_{k-10}$; $\Delta i_{k-1} - \Delta i_{k-10-1}$; $\Delta i_{k-2} - \Delta i_{k-10-2} \dots$). Naturalmente il procedimento ha precisi limiti statistici: le osservazioni diventano serialmente correlate. Il generico n-esimo dato, per esempio, ha 9/10 di periodo temporale in comune con i dati n-1 e n+1, 8/10 in comune con i dati n-2 e n+2, e così via. Si verifica, quindi, che la nuova serie decadale sia meno volatile della serie di osservazioni indipendenti.

Prendendo come esempio il key rate relativo alla quinta fascia temporale, cioè lo swap a 3 anni:





Si vede chiaramente dal grafico che la nuova serie storica decadale ha una componente autoregressiva molto più forte della serie delle variazioni giornaliere del tasso. Ciò la rende meno volatile, quindi in un certo senso sta sottostimando il rischio. Ci si aspetta quindi che le stime VaR con la simulazione storica saranno minori rispetto ai VaR parametrici (cioè si può verificare l'opposto del calcolo uniperiodale, dove le stime parametriche sono solitamente minore della simulazione storica).

CAPITOLO 13

STIME VaR & ES

Gli approcci utilizzati per stimare il VaR delle posizioni su titoli di debito del trading book e banking book sono:

- il metodo standardizzato di Basilea⁸² basato sulla scadenza;
- l'approccio parametrico (delta-normal) in cui le volatilità e correlazioni sono stimate attraverso media mobile semplice;
- l'approccio parametrico (delta-normal) in cui le volatilità e correlazioni sono stimate attraverso media mobile esponenziale, con parametro di livellamento pari a quello di RiskMetrics;
- la simulazione storica.

In questo capitolo, dunque, vengono confrontati i risultati ottenuti sia con la metodologia semplificata di Basilea, sia con i metodi più sofisticati. Sono qui presentati quindi i diversi modelli VaR comparati tra loro, che verranno poi sottoposti a backtesting e stress test nei prossimi capitoli.

Inoltre, al fine di avere un'analisi completa, sono anche riportate le stime dell'Expected Shortfall. Gli approcci utilizzati per stimare l'ES delle posizioni su titoli di debito del trading book e banking book sono gli stessi sopra elencati.

I calcoli sono stati effettuati sia ipotizzando un holding period di un giorno, sia un orizzonte temporale di 10 giorni, come previsto dalla regolamentazione di Basilea. Si ricorda, che la normativa impone:

⁸² Il metodo standard di Basilea non è un modello interno e non calcola direttamente il VaR; ad ogni modo è un metodo per stimare le variazioni del valore dell'esposizione a seguito di variazioni dei tassi d'interesse. Dunque è confrontabile con i modelli interni di calcolo del VaR. Inoltre esiste un'altra metodologia standardizzata per il banking book, quindi non sarebbe corretto applicare lo stesso metodo del trading book anche al banking book in termini regolamentari. Viene comunque utilizzato anche sul banking book per motivi di confronto uniforme dei risultati finali.

- Base giornaliera
- Un intervallo di confidenza unilaterale del 99 %
- Un periodo di detenzione pari a 10 giorni

Confrontare il VaR calcolato sull'holding period di 10 anni, con i risultati ottenuti con il metodo standardizzato di Basilea, è più corretto dato che sono proprio queste stime ad influenzare il requisito finale di capitale.

13.1. Risultati sul Trading book

Ecco le stime ottenute sulle esposizione al rischio di tasso del portafoglio di negoziazione con holding period di 1 giorno:

TRADING BOOK - 1d	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12,259,492	3,249,915	2,541,379	5,240,439	2,553,043	1,322,188	690,774	870,336	671,587	669,907
Basilea	134,448.78	1,348.62	1,519.77	1,873.26	3,965.28	1,106.33	35.79	1,653.81	744.98	299.76
per euro	1.0967%	0.0415%	0.0598%	0.0357%	0.1553%	0.0837%	0.0052%	0.1900%	0.1109%	0.0447%
VaR SMA	16,731.37	103.82	74.99	144.43	230.52	68.65	0.89	80.36	9.82	4.03
per euro	0.1365%	0.0032%	0.0030%	0.0028%	0.0090%	0.0052%	0.0001%	0.0092%	0.0015%	0.0006%
VaR EWMA	11,406.85	71.39	52.38	98.29	161.58	47.85	0.59	55.98	3.02	1.26
per euro	0.0930%	0.0022%	0.0021%	0.0019%	0.0063%	0.0036%	0.0001%	0.0064%	0.0005%	0.0002%
VaR O-GARCH	12,718.64	78.87	56.47	109.60	174.06	51.80	0.67	60.15	7.33	3.01
per euro	0.1037%	0.0024%	0.0022%	0.0021%	0.0068%	0.0039%	0.0001%	0.0069%	0.0011%	0.0004%
Simulaz. Storica	18,148.65	110.06	81.09	157.09	253.39	77.02	0.68	83.01	3.47	0.35
per euro	0.1480%	0.0034%	0.0032%	0.0030%	0.0099%	0.0058%	0.0001%	0.0095%	0.0005%	0.0001%
ES SMA	19,186.92	119.05	86.00	165.63	264.35	78.72	1.02	92.15	11.26	4.62
per euro	0.16%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%
ES EWMA	13,080.96	81.87	60.07	112.72	185.30	54.87	0.68	64.20	3.47	1.45
per euro	0.11%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%
ES O-GARCH	14,585.27	90.44	64.75	125.68	199.60	59.40	0.77	68.97	8.40	3.45
per euro	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%
Simulaz. Storica	19,497.90	119.18	84.79	174.62	264.37	80.68	0.82	90.98	4.57	0.52
per euro	0.16%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%

Si nota che i risultati sono molto diversi tra loro: ovviamente le banche del campione non hanno la stessa grandezza in termini di Attivo, Passivo, Patrimonio, ecc. Un modo per confrontare i risultati ottenuti è quello di dividere ogni stima VaR per il Patrimonio di Vigilanza (comprensivo del TIER 3). Si ottiene una misura di rischio che può essere chiamata “VaR-per-euro”, la quale misura quanta parte di 1 euro di capitale è a rischio. In pratica il VaR-per-euro risponde alla seguente domanda:

per ogni euro del Patrimonio di Vigilanza quanto è la quota a rischio? Ad esempio un VaR-per-euro del 10% indica che, per ogni euro del TIER 3, 10 centesimi sono a rischio (10%).

Invece, le stime ottenute sulle esposizioni al rischio di tasso del portafoglio di negoziazione con holding period di 10 giorni:

TRADING BOOK - 10d	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12,259,492	3,249,915	2,541,379	5,240,439	2,553,043	1,322,188	690,774	870,336	671,587	669,907
Basilea	134,448.78	1,348.62	1,519.77	1,873.26	3,965.28	1,106.33	35.79	1,653.81	744.98	299.76
per euro	1.0967%	0.0415%	0.0598%	0.0357%	0.1553%	0.0837%	0.0052%	0.1900%	0.1109%	0.0447%
VaR SMA	52,909.23	328.30	237.14	456.74	728.97	217.08	2.82	254.12	31.05	12.74
per euro	0.4316%	0.0101%	0.0093%	0.0087%	0.0286%	0.0164%	0.0004%	0.0292%	0.0046%	0.0019%
VaR EWMA	36,071.64	225.76	165.65	310.83	510.98	151.31	1.86	177.04	9.56	3.99
per euro	0.2942%	0.0069%	0.0065%	0.0059%	0.0200%	0.0114%	0.0003%	0.0203%	0.0014%	0.0006%
VaR O-GARCH	40,219.87	249.40	178.56	346.58	550.41	163.79	2.13	190.20	23.17	9.51
per euro	0.3281%	0.0077%	0.0070%	0.0066%	0.0216%	0.0124%	0.0003%	0.0219%	0.0034%	0.0014%
Simulaz. Storica	45,103.59	269.71	172.26	355.38	543.62	168.88	1.05	192.00	6.90	0.57
per euro	0.3679%	0.0083%	0.0068%	0.0068%	0.0213%	0.0128%	0.0002%	0.0221%	0.0010%	0.0001%
ES SMA	60,674.37	376.48	271.95	523.77	835.96	248.94	3.24	291.41	35.60	14.61
per euro	0.4949%	0.0116%	0.0107%	0.0100%	0.0327%	0.0188%	0.0005%	0.0335%	0.0053%	0.0022%
ES EWMA	41,365.63	258.89	189.96	356.45	585.97	173.52	2.14	203.02	10.97	4.57
per euro	0.3374%	0.0080%	0.0075%	0.0068%	0.0230%	0.0131%	0.0003%	0.0233%	0.0016%	0.0007%
ES O-GARCH	46,122.68	286.01	204.77	397.44	631.19	187.83	2.44	218.12	26.57	10.90
per euro	0.3762%	0.0088%	0.0081%	0.0076%	0.0247%	0.0142%	0.0004%	0.0251%	0.0040%	0.0016%
Simulaz. Storica	49,045.09	293.02	186.91	419.83	600.43	181.76	1.73	196.55	10.57	0.81
per euro	0.4001%	0.0090%	0.0074%	0.0080%	0.0235%	0.0137%	0.0003%	0.0226%	0.0016%	0.0001%

Inoltre è possibile confrontare i rapporti ES/VaR per vedere quanto l'ES eccede la previsione VaR. Per come è costruito il modello parametrico, con l'ipotesi di Normalità, l'ES/VaR sarà sempre 1.15. Più interessante è invece osservare questo rapporto nella simulazione storica dove viene considerata la distribuzione empirica del portafoglio nella sua completezza:

ES / VaR HS	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
1 day holding	1.07	1.08	1.05	1.11	1.04	1.05	1.21	1.10	1.32	1.46
10 days holding	1.09	1.09	1.09	1.18	1.10	1.08	1.65	1.02	1.53	1.42

Si osservano importanti risultati empirici:

- La simulazione storica riesce a cogliere meglio le caratteristiche della distribuzione delle variazioni giornaliere dei tassi. Questo perché si basa su una logica di full valuation senza ipotizzare una distribuzione teorica Normale. Le distribuzioni empiriche delle variazioni giornaliere dei tassi presentano forme di leptokurtosi, con code più spesse e picchi più alti. Dunque l'ipotesi di distribuzione Normale, su cui si basano i modelli parametrici, sottostima il rischio racchiuso nelle code. Il modello di simulazione storica, invece, riesce a cogliere meglio questo rischio e restituisce stime VaR maggiori, cioè perdite potenziali più elevate.

- Tra i modelli parametrici, la SMA è il modello che fornisce i valori VaR più elevati, in quanto le volatilità e correlazioni stimate sono maggiori rispetto ai risultati dell'EWMA e dell'O-GARCH. Le stime sono differenti tra loro perché la SMA fornisce una stima globale della volatilità attribuendo lo stesso peso a tutte le osservazioni, quindi l'osservazione meno recente impatta sulla stima quanto l'osservazione più recente. Differentemente l'algoritmo della EWMA fornisce una stima locale dato che i pesi sono esponenzialmente decrescenti ed il passato conta sempre meno per la stima della volatilità. Poiché ogni key rate considerato presenta dei cluster di volatilità durante il 2012 per poi tornare più stabile verso la fine dell'anno, la media mobile esponenziale, dando più peso alle osservazioni recenti e meno al passato, fornisce stime che sono più aggiornate e riflettono le condizioni recenti del mercato. Nella media mobile semplice invece i cluster passati hanno lo stesso peso delle osservazioni più recenti, per questo le volatilità SMA sono maggiori di quelle EWMA. Il modello O-GARCH si presta come una buona mediazione tra i due approcci, anche se può risultare molto più complesso. Questo modello però presenta anche un altro vantaggio: le matrici di covarianza saranno sempre semidefinite positive, non c'è bisogno di imporre vincoli ai parametri come nei dati RiskMetrics o nei modelli GARCH multivariati standard.
- Per quanto riguarda il confronto tra l'approccio parametrico e la simulazione storica, i risultati si invertono nel calcolo del VaR decennale: il metodo di simulazione fornisce stime minori della perdite potenziale rispetto ai modelli varianze-covarianze. Ciò è dovuto alla "tecnica delle osservazioni sovrapposte" utilizzata per la simulazione storica: le osservazioni utilizzate su base decennale serialmente correlate. Il generico n-esimo dato, per esempio, ha 9/10 di periodo temporale in comune con i dati n-1 e n+1, 8/10 in comune con i dati n-2 e n+2, e così via. Si verifica, quindi, che la nuova serie decennale sia meno volatile della serie di osservazioni indipendenti.
- Il metodo standard di Basilea basato sulla scadenza porta a stime di perdite significativamente superiori al VaR perché le variazioni di tasso sono semplicemente ipotizzate senza considerare l'effettiva volatilità dei fattori di rischio. I Δ_i proposti dal Comitato sono ritenuti "ragionevoli" ma qui si mostra che portano ad una sovrastima del rischio che si tradurrebbe in un accantonamento eccessivo di capitale. La misurazione del rischio attraverso l'approccio standard non è accurata e il capitale accantonato, in eccesso, potrebbe essere utilizzato per altri investimenti che potrebbero incrementare il valore ed il reddito della banca. Per questi motivi la maggior parte delle banche preferisce utilizzare i modelli interni.

- Per quanto riguarda le perdite medie superiori al VaR, nelle stime con orizzonte temporale giornaliero, i valori di Expected Shortfall della simulazione storica sono simili alle stime della SMA. Entrambi i modelli, infatti, prevedono livelli di perdite elevati nel “worst case scenario” (cioè in caso il VaR viene superato). Il risultato però si inverte nelle stime con orizzonte temporale di 10 giorni: i valori ES del modello di simulazione si distaccano nettamente dal primo modello parametrico, mentre si avvicinano alle stime EWMA e O-GARCH.

13.2. Risultati sul Banking book

Ecco le stime ottenute sulle esposizione al rischio di tasso del portafoglio di negoziazione con holding period di 1 giorno:

BANKING BOOK - 1d	1.LUBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12.259.492	3.249.915	2.541.379	5.240.439	2.553.043	1.322.188	690.774	870.336	671.587	669.907
Basilea	489.127.75	51.978.83	122.693.73	176.049.74	182.109.51	87.295.78	55.743.08	5.143.10	37.599.08	14.405.27
per euro	3.9898%	1.5994%	4.8278%	3.3594%	7.1330%	6.6024%	8.0697%	0.5909%	5.5985%	2.1503%
VaR SMA	54.401.58	4.972.06	14.322.77	12.776.53	27.008.31	10.864.13	3.253.37	193.33	2.669.87	739.13
per euro	0.4438%	0.1530%	0.5636%	0.2438%	1.0579%	0.8217%	0.4710%	0.0222%	0.3975%	0.1103%
VaR EWMA	35.927.51	3.284.20	9.144.02	8.981.49	16.990.29	7.297.53	2.234.11	133.55	1.867.37	517.84
per euro	0.2931%	0.1011%	0.3598%	0.1714%	0.6655%	0.5519%	0.3234%	0.0153%	0.2781%	0.0773%
VaR O-GARCH	41.322.98	3.777.05	10.880.24	9.656.88	20.508.59	8.253.60	2.463.35	144.86	2.022.23	555.25
per euro	0.3371%	0.1162%	0.4281%	0.1843%	0.8033%	0.6242%	0.3566%	0.0166%	0.3011%	0.0829%
Simulaz. Storica	59.745.90	5.429.43	15.743.23	14.370.47	29.901.22	12.095.56	3.530.52	186.87	2.933.47	778.15
per euro	0.4873%	0.1671%	0.6195%	0.2742%	1.1712%	0.9148%	0.5111%	0.0215%	0.4368%	0.1162%
ES SMA	62.385.75	5.701.78	16.424.83	14.651.66	30.972.15	12.458.59	3.730.84	221.71	3.061.71	847.61
per euro	0.51%	0.18%	0.65%	0.28%	1.21%	0.94%	0.54%	0.03%	0.46%	0.13%
ES EWMA	41.200.35	3.766.20	10.486.03	10.299.65	19.483.85	8.368.54	2.562.00	153.15	2.141.43	593.84
per euro	0.34%	0.12%	0.41%	0.20%	0.76%	0.63%	0.37%	0.02%	0.32%	0.09%
ES O-GARCH	47.387.69	4.331.38	12.477.06	11.074.15	23.518.50	9.464.92	2.824.88	166.12	2.319.02	636.74
per euro	0.39%	0.13%	0.49%	0.21%	0.92%	0.72%	0.41%	0.02%	0.35%	0.10%
Simulaz. Storica	67.511.29	6.053.31	17.963.80	14.821.09	33.672.44	13.002.93	3.904.34	205.90	3.096.72	837.24
per euro	0.55%	0.19%	0.71%	0.28%	1.32%	0.98%	0.57%	0.02%	0.46%	0.12%

Invece, le stime ottenute sulle esposizione al rischio di tasso del portafoglio di negoziazione con holding period di 10 giorni:

BANKING BOOK - 10d	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12,259,492	3,249,915	2,541,379	5,240,439	2,553,043	1,322,188	690,774	870,336	671,587	669,907
Basilea	489,127.75	51,978.83	122,693.73	176,049.74	182,109.51	87,295.78	55,743.08	5,143.10	37,599.08	14,405.27
per euro	3.9898%	1.5994%	4.8278%	3.3594%	7.1330%	6.6024%	8.0697%	0.5909%	5.5985%	2.1503%
VaR SMA	172,032.90	15,723.04	45,292.57	40,402.95	85,407.79	34,355.40	10,288.06	611.38	8,442.88	2,337.35
per euro	1.4033%	0.4838%	1.7822%	0.7710%	3.3453%	2.5984%	1.4894%	0.0702%	1.2572%	0.3489%
VaR EWMA	113,612.75	10,385.56	28,915.92	28,401.97	53,728.02	23,076.81	7,064.89	422.32	5,905.15	1,637.57
per euro	0.9267%	0.3196%	1.1378%	0.5420%	2.1045%	1.7454%	1.0227%	0.0485%	0.8793%	0.2444%
VaR O-GARCH	130,674.74	11,944.07	34,406.35	30,537.73	64,853.86	26,100.16	7,789.79	458.09	6,394.84	1,755.84
per euro	1.0659%	0.3675%	1.3538%	0.5827%	2.5403%	1.9740%	1.1277%	0.0526%	0.9522%	0.2621%
Simulaz. Storica	143,197.34	13,300.41	38,952.15	32,348.78	75,516.35	29,453.80	7,279.40	377.34	6,429.12	1,737.86
per euro	1.1681%	0.4093%	1.5327%	0.6173%	2.9579%	2.2277%	1.0538%	0.0434%	0.9573%	0.2594%
ES SMA	197,281.05	18,030.61	51,939.87	46,332.63	97,942.53	39,397.52	11,797.97	701.10	9,681.98	2,680.38
per euro	1.6092%	0.5548%	2.0438%	0.8841%	3.8363%	2.9797%	1.7079%	0.0806%	1.4417%	0.4001%
ES EWMA	130,286.95	11,909.78	33,159.73	32,570.34	61,613.33	26,463.64	8,101.76	484.31	6,771.81	1,877.90
per euro	1.0627%	0.3665%	1.3048%	0.6215%	2.4133%	2.0015%	1.1729%	0.0556%	1.0083%	0.2803%
ES O-GARCH	149,853.02	13,697.03	39,455.94	35,019.55	74,372.04	29,930.72	8,933.04	525.32	7,333.37	2,013.53
per euro	1.2223%	0.4215%	1.5525%	0.6683%	2.9131%	2.2637%	1.2932%	0.0604%	1.0919%	0.3006%
Simulaz. Storica	166,362.38	15,030.74	45,074.21	34,115.02	85,612.06	32,344.97	9,063.48	423.59	7,281.77	1,797.81
per euro	1.3570%	0.4625%	1.7736%	0.6510%	3.3533%	2.4463%	1.3121%	0.0487%	1.0843%	0.2684%

Il rapporto nella simulazione storica dove viene considerata la distribuzione empirica del portafoglio nella sua completezza:

ES / VaR HS	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
1 day holding	1.13	1.11	1.14	1.03	1.13	1.08	1.11	1.10	1.06	1.08
10 days holding	1.16	1.13	1.16	1.05	1.13	1.10	1.25	1.12	1.13	1.03

Dall'analisi del banking book emergono i seguenti risultati:

- Valgono le stesse evidenze statistiche riscontrate sul trading book e sopra descritte.
- Il banking book sembrerebbe più esposto al rischio di tasso rispetto al trading book. Dopo la crisi dei debiti sovrani, le banche hanno iniziato a spostare i titoli di debito dal portafoglio di negoziazione verso il banking book, concentrando i volumi nelle fasce a scadenza maggiore. In altre parole, dopo il 2009, è iniziato un trend di acquisti di titoli di debito a lungo termine ed a tasso fisso, che vengono inseriti nel portafoglio bancario, in particolare nelle fasce temporali a lungo termine in corrispondenza della loro effettiva scadenza. Questo ha condotto ad un incremento della durata media finanziaria delle attività. Per questo motivo, il banking book è più esposto a variazioni dei tassi rispetto al trading book, dunque ad una prima analisi sembrerebbe estremamente rischioso.

- In realtà l'esposizione del banking book non è così elevata: le variazioni del fair value dei titoli di debito presenti non viene imputata a conto economico, bensì in una riserva di rivalutazione nel patrimonio. Le variazioni di valore delle attività finanziarie detenute ai fini di negoziazione, valutate al fair value, vanno ad influenzare il reddito di esercizio, dunque devono essere imputate a conto economico. Differentemente, le variazioni di valore degli assets del banking book devono essere imputate ad una riserva di valutazione del patrimonio netto. In questo modo si evita di trasferire sul reddito dell'anno la volatilità generata dalla valutazione al fair value del banking book. A conto economico si iscrivono solo gli interessi maturati (ed eventuali dividendi nel caso delle azioni). Dunque la gestione "contabile" degli investimenti in titoli di debito ha un forte impatto sul profilo rischio/valore delle banche che seguono gli IAS.

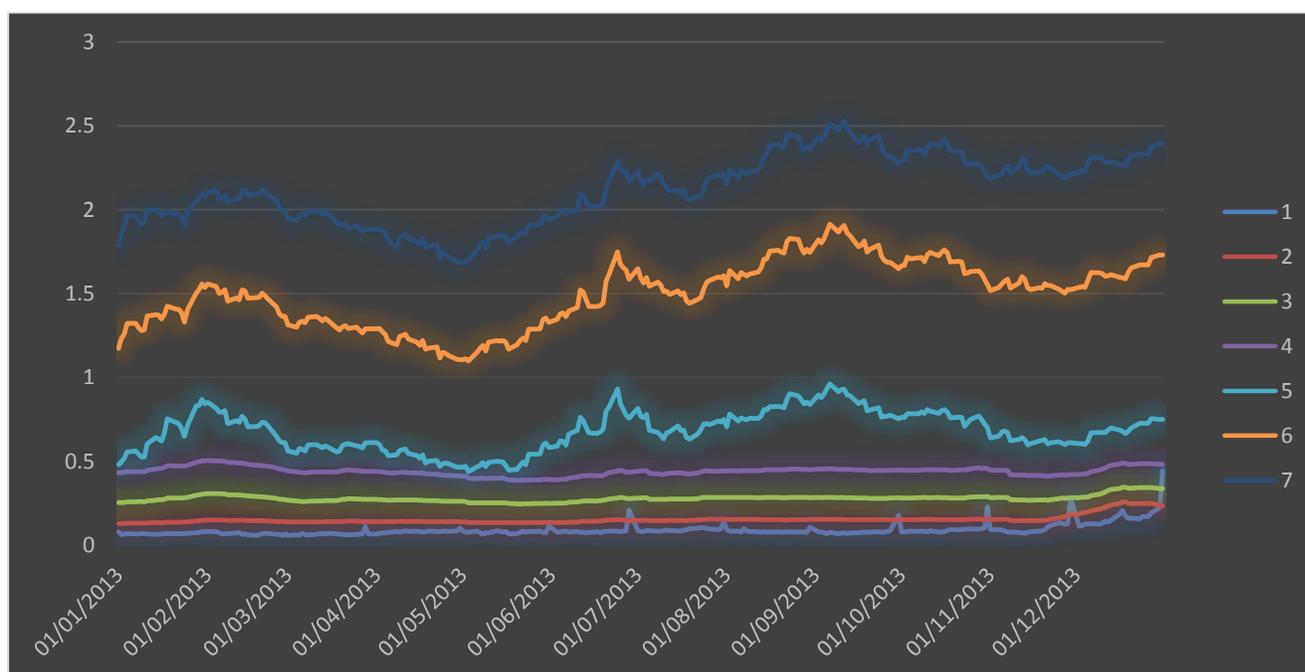
CAPITOLO 14

BACKTESTING

Ogni modello VaR deve essere sottoposto a test retrospettivi. Il BackTesting di questo modello viene effettuato utilizzando la serie storica delle variazioni dei key rates l'anno successivo al 2012. In altre parole, per stimare il VaR si è utilizzata la serie delle variazioni dei tassi d'interesse nei 250 precedenti il 31/12/2012, mentre per testare il modello si utilizza la serie delle variazioni degli stessi tassi ma nei 250 giorni successivi al 31/12/2012.

Per effettuare questo test retrospettivo, bisogna fare un'ipotesi molto forte: le posizioni sui titoli di debito delle banche nel campione restano costanti nei 250 giorni successivi al 31/12/2012. In altre parole, si ipotizza che i portafogli rimangano immutati durante tutto il 2013. Questa è un'ipotesi irrealistica dato che la composizione del trading book e del banking book cambia frequentemente (in particolare quella del trading book). Purtroppo quelli sono valori contabili, non osservabili sul mercato, dunque questo è l'unico modo per effettuare il BackTesting del modello.

Si considerano dunque i key rates dell'anno successivo, ottenuti nuovamente con l'interpolazione lineare tra i tassi zero-coupon della term structure in modo da mappare i titoli ai punti medi delle fasce temporali:



Il BackTesting è così costruito: si osservano le serie storiche delle variazioni giornaliere dei key rates dal 1/1/2013 al 31/12/2013 e si calcola il valore effettivo del portafoglio nell'ipotesi che i valori nominali degli ZCB delle varie fasce siano costanti. Si conta il numero delle volte che la perdita realizzata sull'intero portafoglio supera il livello predetto dal modello VaR. Se il modello è corretto, questo numero non dovrebbe essere maggiore dell'1% dei casi.

Il test è stato effettuato sia su base giornaliera che decadale, i risultati sul VaR con orizzonte temporale di 1 giorno sono i seguenti:

violazioni TRADING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	2.40%	7.20%	4.80%	2.00%
vicenza	3.20%	7.60%	5.60%	2.40%
veneto	4.80%	7.20%	6.40%	3.60%
milano	3.20%	6.80%	5.60%	2.40%
carige	4.00%	6.80%	6.40%	3.20%
marche	4.40%	7.20%	6.40%	3.20%
etruria	3.60%	7.60%	6.40%	6.40%
bolzano	4.80%	7.20%	6.40%	4.40%
bcc	0.00%	7.20%	5.20%	4.80%
ravenna	0.00%	7.60%	0.40%	24.00%

media	3.04%	7.24%	5.36%	5.64%
-------	-------	-------	-------	-------

violazioni BANKING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	2.80%	6.80%	4.80%	2.00%
vicenza	2.40%	6.80%	4.80%	2.00%
veneto	2.00%	6.40%	4.40%	1.20%
milano	4.00%	7.20%	6.40%	3.20%
carige	1.60%	7.20%	4.40%	1.20%
marche	2.40%	6.40%	4.80%	2.00%
etruria	3.60%	6.80%	6.40%	2.80%
bolzano	4.80%	7.60%	6.40%	4.80%
bcc	4.00%	7.20%	6.40%	2.40%
ravenna	4.80%	7.20%	6.40%	4.00%

media	3.24%	6.96%	5.52%	2.56%
-------	-------	-------	-------	-------

I risultati sul VaR con holding period di 10 giorni sono i seguenti:

violazioni TRADING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	0.78%	3.53%	2.35%	1.96%
vicenza	0.78%	3.92%	2.75%	2.35%
veneto	1.57%	5.10%	4.71%	4.71%
milano	0.78%	4.31%	3.14%	2.35%
carige	1.18%	5.49%	4.31%	4.71%
marche	1.18%	4.71%	3.92%	3.92%
etruria	1.96%	7.45%	5.88%	21.96%
bolzano	1.96%	6.27%	4.71%	4.71%
bcc	0.00%	13.73%	1.57%	18.82%
ravenna	1.18%	13.73%	2.35%	41.57%

media	1.14%	6.82%	3.57%	10.71%
-------	-------	-------	-------	--------

violazioni BANKING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	0.39%	3.14%	1.57%	1.57%
vicenza	0.39%	3.14%	1.96%	1.57%
veneto	0.00%	2.35%	1.57%	0.78%
milano	1.18%	5.49%	3.92%	3.53%
carige	0.00%	2.35%	1.57%	0.39%
marche	0.39%	3.14%	2.35%	1.57%
etruria	0.78%	5.10%	3.53%	4.71%
bolzano	1.96%	7.06%	4.71%	7.84%
bcc	0.78%	5.49%	3.92%	3.92%
ravenna	1.96%	5.10%	4.71%	4.71%

media	0.78%	4.24%	2.98%	3.06%
-------	-------	-------	-------	-------

Osservazioni:

- I modelli VaR costruiti sono imperfetti, tutti registrano scostamenti con statistica superiore all'1%, fatta eccezione per il modello SMA su base decadale del banking book che in media ha la performance migliore con lo 0.78% di scostamenti. In generale, tra i modelli VaR, la SMA è l'algoritmo che prevede meglio le perdite future con il minor margine d'errore. Differentemente il modello EWMA risulta il meno accurato, in quanto l'algoritmo del livellamento esponenziale sottovaluta la volatilità dei tassi del 2013. Alla fine del 2012 si è verificata sul mercato una minore volatilità ed il modello EWMA effettua le stime dando maggior peso al "passato più recente", cioè agli ultimi mesi del 2012, quando la volatilità era in diminuzione. Per questo motivo le stime VaR del modello EWMA sono più contenute e più "fallibili" se testate con i dati del 2013, dove la volatility dei key rates di alcune fasce è più elevata:

volatility dei key rates	2012	2013
1	0.015%	0.025%
2	0.007%	0.002%
3	0.007%	0.003%
4	0.006%	0.004%
5	0.024%	0.030%
6	0.033%	0.034%
7	0.039%	0.033%

- Per poter svolgere questo test retrospettivo si è ipotizzato che la composizione del trading book e del banking book resti costante per tutto il 2013. In realtà l'imprecisione dei modelli VaR è dovuta anche a questa forte ipotesi: è inverosimile che i portafogli rimangano immutati, in particolare il trading book. Nel banking book vengono contabilizzate le posizioni di lungo periodo, mentre nel portafoglio di negoziazione sono collocate le attività che le banche intendono detenere solo per breve tempo, dunque l'ipotesi di composizione costante si associa meglio all'analisi del banking book rispetto al trading book. Ciò comporta che i risultati del BackTesting sui trading books sono meno affidabili. Infatti nelle tabelle delle violazioni dei trading book sono più frequenti dei numeri "anomali" (evidenziati) che riducono la precisione dei risultati medi.

14.1. Perdite superiori al VaR

In questo BackTest si ha anche la possibilità di osservare le perdite superiori al VaR che si sarebbero verificate nel 2013, se il trading book ed il banking book fossero rimasti invariati. In questo modo, sempre basandosi sull'ipotesi forte iniziale, è possibile confrontare le perdite medie superiore al VaR con le stime ES. Si procede nel seguente modo:

$$(ES - Loss) / VaR$$

dove:

- Loss è la perdita media > VaR;
- Se $ES - Loss > 0$ significa che il modello avevo previsto una perdita media sufficiente da coprire il worst case del 2013.

Ecco i risultati con orizzonte temporale di 1 giorno:

scostamento dall'ES / VaR TRADING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	-24%	-32%	-36%	-26%
vicenza	-20%	-34%	-34%	-29%
veneto	-24%	-56%	-52%	-34%
milano	-20%	-41%	-35%	-22%
carige	-28%	-56%	-47%	-34%
marche	-23%	-52%	-47%	-30%
etruria	-31%	-56%	-46%	-37%
bolzano	-30%	-63%	-60%	-34%
bcc	115%	-34%	9%	-16%
ravenna	115%	-30%	-1%	-148%
media	3%	-46%	-35%	-41%

scostamento dall'ES / VaR BANKING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	-13%	-34%	-31%	-12%
vicenza	-17%	-33%	-30%	-14%
veneto	-9%	-32%	-23%	-9%
milano	-26%	-50%	-45%	-30%
carige	-8%	-24%	-17%	-4%
marche	-21%	-38%	-33%	-20%
etruria	-23%	-49%	-38%	-25%
bolzano	-28%	-59%	-58%	-38%
bcc	-22%	-46%	-40%	-37%
ravenna	-27%	-59%	-56%	-34%
media	-20%	-42%	-37%	-22%

I seguenti sono, invece, i risultati ottenuti su un orizzonte di 10 giorni:

scostamento dall'ES / VaR TRADING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	4%	-12%	-10%	-6%
vicenza	1%	-14%	-10%	-10%
veneto	1%	-21%	-13%	-24%
milano	6%	-9%	-3%	-3%
carige	1%	-15%	-12%	-15%
marche	2%	-18%	-13%	-16%
etruria	-2%	-25%	-15%	-7%
bolzano	-2%	-18%	-16%	-29%
bcc	115%	-51%	-3%	-46%
ravenna	9%	-55%	-13%	-478%
media	13%	-24%	-11%	-64%

scostamento dall'ES / VaR BANKING BOOK	SMA	EWMA	O-GARCH	sim.storica
ubi	7%	-10%	0%	5%
vicenza	6%	-11%	-5%	2%
veneto	115%	-13%	0%	7%
milano	3%	-12%	-12%	-16%
carige	115%	-11%	4%	7%
marche	2%	-13%	-5%	-3%
etruria	3%	-11%	-8%	0%
bolzano	-3%	-18%	-21%	-32%
bcc	-2%	-10%	-8%	-9%
ravenna	1%	-23%	-16%	-29%
media	25%	-13%	-7%	-7%

Si riscontra che:

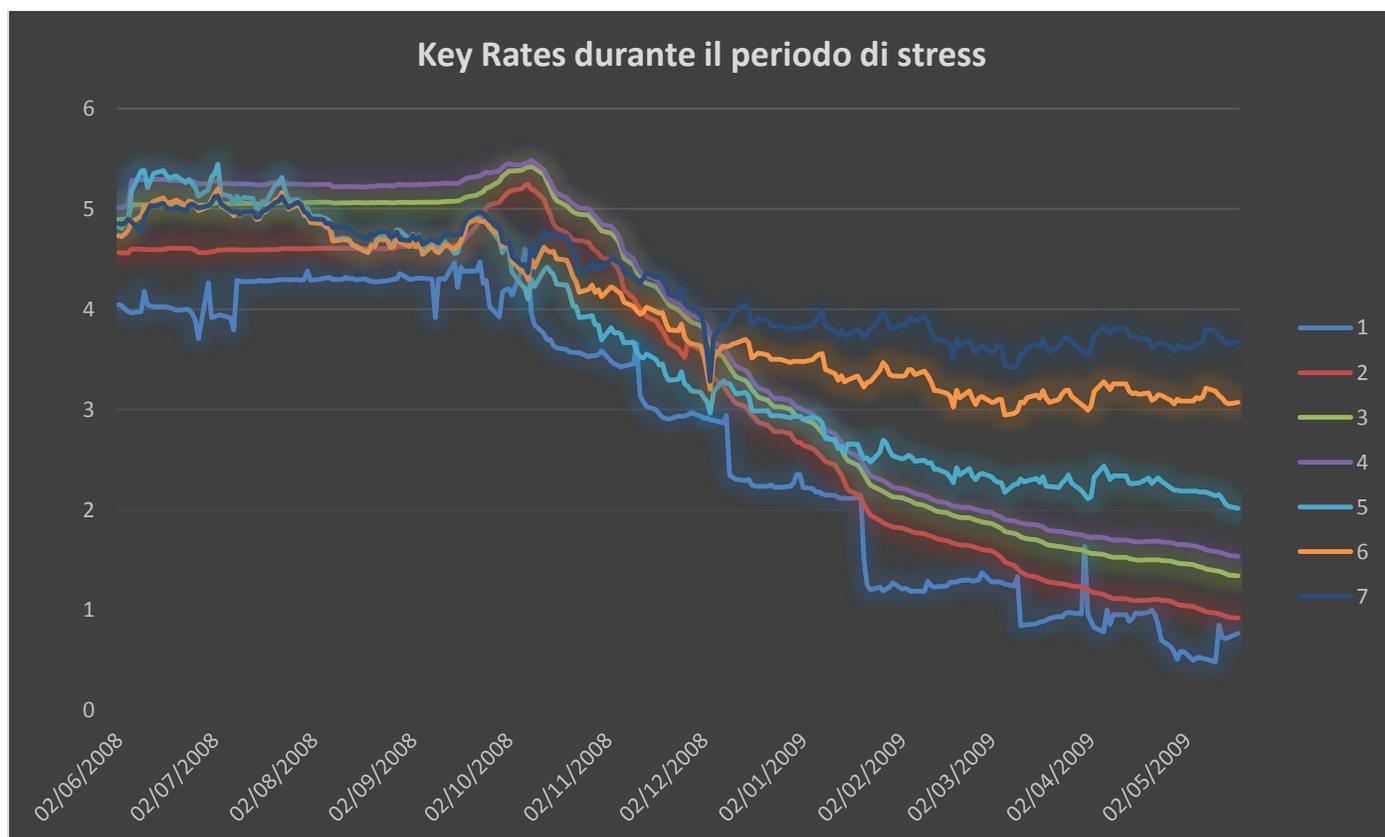
- Il modello ES è imperfetto in quanto non riesce spesso a cogliere il livello della perdita media superiore al VaR. Ciò è causato da due fattori: le stime ES derivano da i modelli VaR e si è già visto che questi sono, a loro volta, imperfetti; a questo si deve aggiungere l'effetto dell'ipotesi irrealistica alla base del Backtesting.
- Le stime ES riescono meglio a cogliere le code della distribuzione quando si utilizza come holding period un orizzonte di 10 giorni; questo perché l'utilizzo della tecnica delle osservazioni sovrapposte rende la serie storica meno volatile.
- Il modello che riscontra più successo è, nuovamente, la SMA, in quanto è il più conservativo e più prudenziale. Dando lo stesso peso a tutta la serie storica del 2012, non si commette l'errore di sottostimare la volatilità dell'anno successivo, come invece fa il modello EWMA, che risulta il meno efficace sia nelle stime VaR che ES.

CAPITOLO 15

STRESSED VaR

Il Comitato di Basilea nel 2009 ha proposto⁸³ l'introduzione di una nuova misura di rischio: lo stressed VaR (sVaR). Consiste in un incremento del requisito di capitale che prevede l'applicazione dei modelli VaR già utilizzati, considerando come campione storico di osservazioni un periodo di forte stress di mercato. In uno studio recente⁸⁴ Burchi analizza questa nuovo approccio, suggerendo di prendere in considerazione i periodi di stress tra il 2002 e il 2003 oppure tra il 2008 e il 2009.

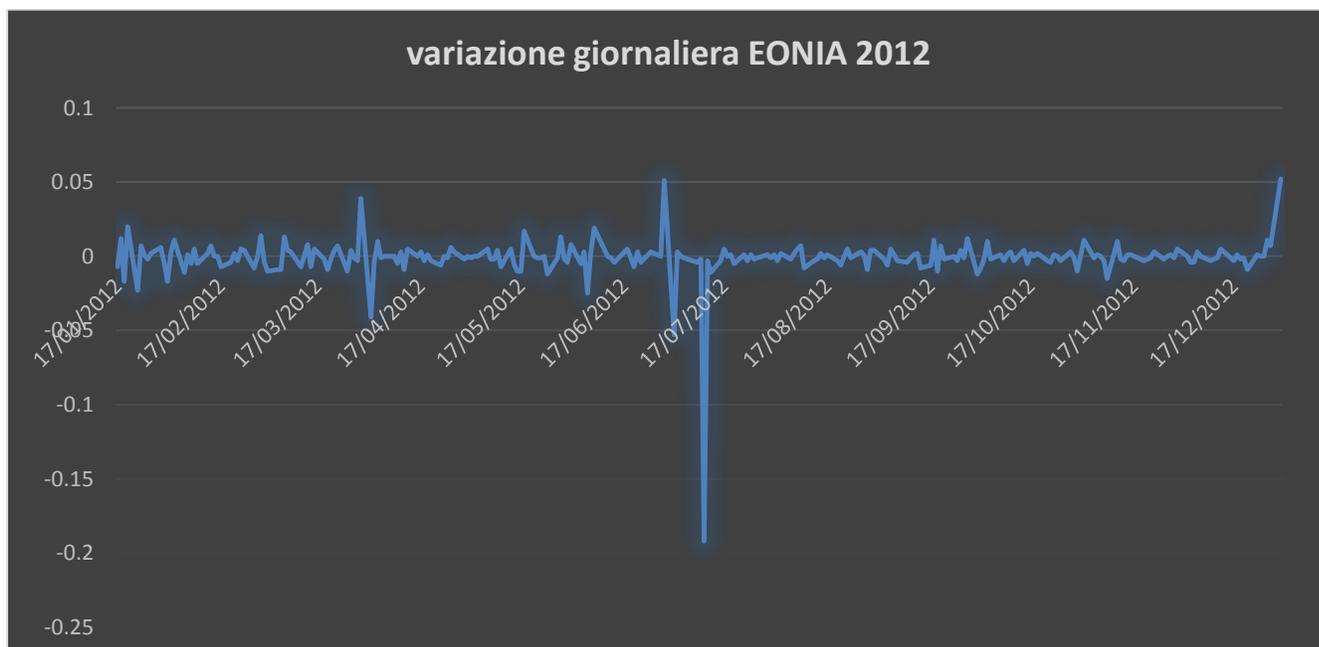
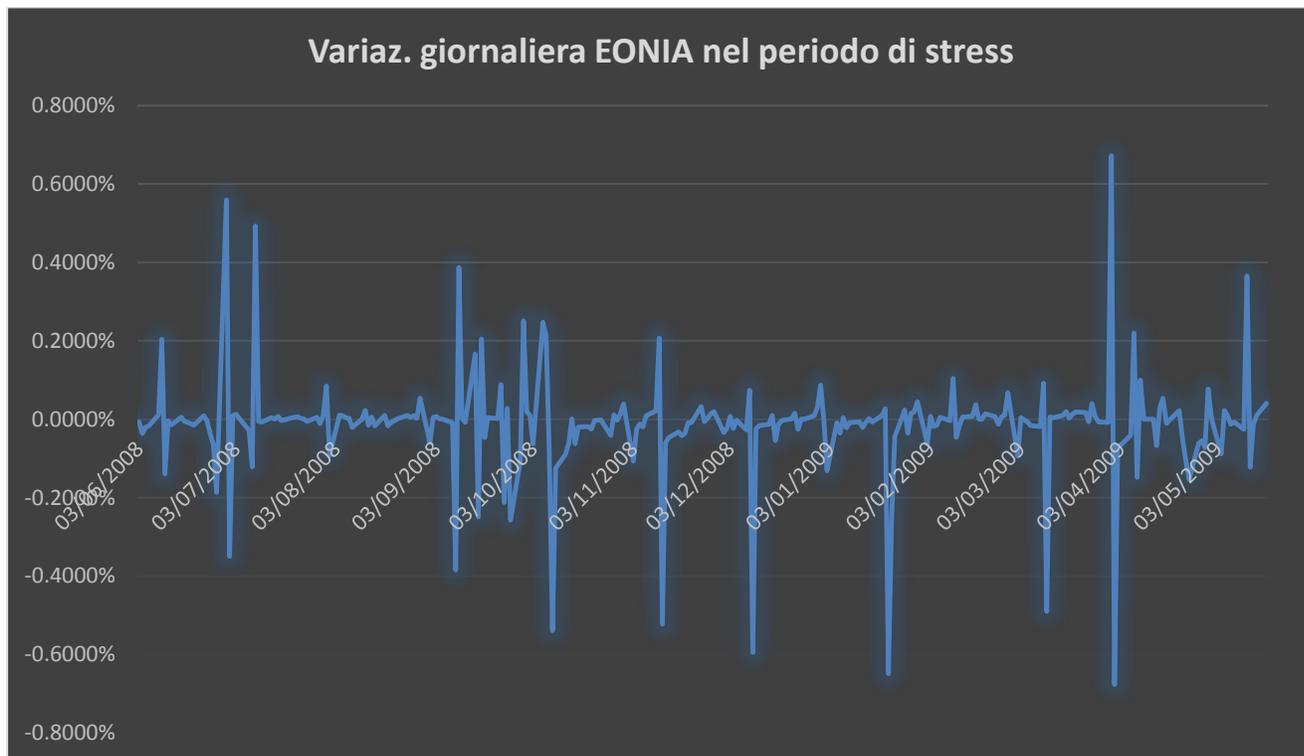
In questo caso lo sVaR è stato calcolato utilizzando 250 osservazioni comprese tra il 2008 e il 2009. Questi sono i key rates relativi alle 7 fasce temporali durante il periodo di stress:



⁸³ Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2009a)

⁸⁴ Burchi, A. (2011)

Si nota che i tassi sono molto più volatili in questo periodo rispetto al 2012. Ad esempio le variazioni giornaliere dell'eonia:



Il calcolo dello sVaR non è solo uno stress test per studiare il profilo di rischi/rendimento dei portafogli in periodi di forte stress di mercato, bensì rappresenta anche un pesante elemento aggiuntivo del capitale regolamentare.

Per le stime sVaR, si sono utilizzati sia l'approccio parametrico che il metodo di simulazione storica. Tra i vari modelli parametrici, si è scelto di applicare la SMA per due motivi: per prima cosa, questo è il modello più "penalizzante" in quanto ha portato a stime di rischio maggiori rispetto all' EWMA e l'O-GARCH; in secondo luogo, si è scelto la SMA perché attribuisce uguale peso a tutto il periodo di stress.

I calcoli sono stati fatti ipotizzando un holding period di 10 giorni:

TRADING BOOK	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12,259,492	3,249,915	2,541,379	5,240,439	2,553,043	1,322,188	690,774	870,336	671,587	669,907
Stressed VaR parametrico	102,951.36	694.84	666.57	1,028.05	1,925.57	585.13	9.48	772.61	108.74	50.53
per euro	0.840%	0.021%	0.026%	0.020%	0.075%	0.044%	0.001%	0.089%	0.016%	0.008%
Stressed VaR sim.storica	71,237.15	575.97	587.41	756.47	1,655.74	475.32	11.18	659.78	180.02	65.39
per euro	0.581%	0.018%	0.023%	0.014%	0.065%	0.036%	0.002%	0.076%	0.027%	0.010%

STRESSED VaR / VaR	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
sma	1.95	2.12	2.81	2.25	2.64	2.70	3.36	3.04	3.50	3.97
hs	1.58	2.14	3.41	2.13	3.05	2.81	10.69	3.44	26.10	114.90

BANKING BOOK	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
TIER 3	12,259,492	3,249,915	2,541,379	5,240,439	2,553,043	1,322,188	690,774	870,336	671,587	669,907
Stressed VaR parametrico	356,958.36	31,594.96	88,631.79	103,047.38	160,590.19	68,978.34	25,862.13	1,907.39	20,375.45	6,794.26
per euro	2.91%	0.97%	3.49%	1.97%	6.29%	5.22%	3.74%	0.22%	3.03%	1.01%
Stressed VaR sim.storica	230,360.83	20,586.56	53,466.29	83,323.84	92,428.38	45,129.82	21,395.79	1,875.48	16,861.78	5,960.86
per euro	1.88%	0.63%	2.10%	1.59%	3.62%	3.41%	3.10%	0.22%	2.51%	0.89%

STRESSED VaR / VaR	1.UBI	2.VICENZA	3.VENETO	4.MILANO	5.CARIGE	6.MARCHE	7.ETRURIA	8.BOLZANO	9.BCC ROMA	10.RAVENNA
sma	2.07	2.01	1.96	2.55	1.88	2.01	2.51	3.12	2.41	2.91
hs	1.61	1.55	1.37	2.58	1.22	1.53	2.94	4.97	2.62	3.43

Le perdite potenziali stimate sono significativamente superiori rispetto al VaR tradizionale, ciò è dovuto alla forte volatilità delle variabili di mercato durante il periodo di stress:

volatilità delle variazioni giornaliere dei key rates	stress	2012
A VISTA	0.14%	0.02%
FINO A 3 MESI	0.03%	0.01%
DA 3 MESI A 6 MESI	0.03%	0.01%
DA 6 MESI A 1 ANNO	0.03%	0.01%
DA 1 ANNO A 5 ANNI	0.07%	0.02%
DA 5 ANNI A 10 ANNI	0.07%	0.03%
OLTRE 10 ANNI	0.07%	0.04%

Lo sVaR aumenta drasticamente il requisito di capitale ad un punto tale che non è nemmeno più rilevante quale tipo di approccio sia utilizzato per stimare il VaR. Infatti, che venga utilizzato un modello parametrico, ipotizzando una distribuzione Normale, o la simulazione storica, per cogliere meglio le caratteristiche empiriche delle variabili di mercato, è del tutto indifferente in quanto l'incremento del requisito patrimoniale sarà comunque vertiginoso. Infatti, considerando che il requisito di capitale sul rischio generico per titoli di debito è dato dalla somma algebrica del VaR e dello sVaR su holding period decennale:

TRADING BOOK	TIER 3	VaR + sVaR param	per euro	VaR + sVaR sim.stor.	per euro	Basilea	per euro
1.UBI	12,259,492	155,860.59	1.27%	116,340.73	0.95%	134,448.78	1.10%
2.VICENZA	3,249,915	1,023.14	0.03%	845.69	0.03%	1,348.62	0.04%
3.VENETO	2,541,379	903.71	0.04%	759.66	0.03%	1,519.77	0.06%
4.MILANO	5,240,439	1,484.78	0.03%	1,111.84	0.02%	1,873.26	0.04%
5.CARIGE	2,553,043	2,654.54	0.10%	2,199.36	0.09%	3,965.28	0.16%
6.MARCHE	1,322,188	802.21	0.06%	644.20	0.05%	1,106.33	0.08%
7.ETRURIA	690,774	12.30	0.00%	12.22	0.00%	35.79	0.01%
8.BOLZANO	870,336	1,026.73	0.12%	851.78	0.10%	1,653.81	0.19%
9.BCC ROMA	671,587	139.78	0.02%	186.92	0.03%	744.98	0.11%
10.RAVENNA	669,907	63.27	0.01%	65.96	0.01%	299.76	0.04%
BANKING BOOK	TIER 3	VaR + sVaR param	per euro	VaR + sVaR sim.stor.	per euro	Basilea	per euro
1.UBI	12,259,492	528,991.27	4.31%	373,558.18	3.05%	489,127.75	3.99%
2.VICENZA	3,249,915	47,318.01	1.46%	33,886.97	1.04%	51,978.83	1.60%
3.VENETO	2,541,379	133,924.36	5.27%	92,418.43	3.64%	122,693.73	4.83%
4.MILANO	5,240,439	143,450.33	2.74%	115,672.62	2.21%	176,049.74	3.36%
5.CARIGE	2,553,043	245,997.98	9.64%	167,944.72	6.58%	182,109.51	7.13%
6.MARCHE	1,322,188	103,333.74	7.82%	74,583.62	5.64%	87,295.78	6.60%
7.ETRURIA	690,774	36,150.18	5.23%	28,675.19	4.15%	55,743.08	8.07%
8.BOLZANO	870,336	2,518.77	0.29%	2,252.82	0.26%	5,143.10	0.59%
9.BCC ROMA	671,587	28,818.33	4.29%	23,290.90	3.47%	37,599.08	5.60%
10.RAVENNA	669,907	9,131.60	1.36%	7,698.71	1.15%	14,405.27	2.15%

Il requisito di capitale raggiunge persino il livello del metodo standard di Basilea ed in alcuni casi arriva persino a superarlo. Dunque lo sVaR scoraggia le banche ad utilizzare i modelli interni nonostante essi siano più precisi ed accurati dell'approccio di Basilea.

CONCLUSIONI

In questa Tesi, si è analizzato il rischio di tasso di interesse del portafoglio titoli di debito presente nel trading book e nel banking book di 10 banche italiane al 31/12/2012. L'oggetto del campione consiste in 10 istituzioni finanziarie di media dimensione presenti nel territorio italiano. L'analisi si è focalizzata sulla tipica figura italiana di banca commerciale territoriale: medie dimensioni, legata fortemente al territorio locale, ruolo dominante dei depositi al dettaglio nella composizione delle passività e prevalenza del credito commerciale alle imprese nell'attivo. In banche di questo genere il rapporto tra raccolta di depositi e erogazione del credito tende a essere stabile nel tempo e omogeneo geograficamente. Gli strumenti utilizzati sono stati, prevalentemente, i modelli interni, cioè i modelli VaR. In aggiunta, è stato anche usato l'approccio standard di Basilea basato sulla scadenza dei titoli di debito, per confrontare la misurazione del rischio di tasso. I modelli VaR adottati sono sia quello parametrico che la simulazione storica. In particolare, per quanto riguarda l'approccio parametrico, le volatilità e correlazioni dei key rates sono state stimate con 3 diversi metodi: la media mobile semplice, il livellamento esponenziale (RiskMetrics) e l'Orthogonal-GARCH.

Riguardo ai tassi della term structure con cui sono stati costruiti i key rates, durante il 2012 si sono registrati sia momenti di bassa volatilità, sia dei cluster. In particolare: tutti i tassi hanno un trend decrescente, ma tutte le serie storiche diventano più stazionarie, cioè meno volatili, verso la fine del 2012. Inoltre, i tassi swap sono quelli più variabili, il tasso eonia, invece, è il più stazionario. Tutte queste serie storiche hanno una comune particolarità: un netto cambio di livello, a luglio per i tassi a breve, a maggio per i tassi swap. Ciò è dovuto al taglio del tasso ufficiale di riferimento della BCE (tasso refi) da 1.00% a 0.75%, nel luglio 2012.

Si è riscontrato che la correlazione tra i tassi dell'area euro del 2012 (e dei key rates) aumenta fino alla quarta fascia, per poi diminuire. Inoltre, in termini assoluti, i tassi più correlati sono quelli relativi alla sesta e settima fascia e quelli della terza e quarta fascia. Quelli meno correlati, invece, sono quello relativo alla prima fascia e quello dell'ultima fascia. Il tasso a brevissimo termine (eonia) e quello a più lungo termine (oltre 10 anni) sono i meno correlati. La correlazione con la prima fascia (a vista) aumenta fino alla quarta (1 anno) per poi diminuire, dunque la correlazione massima del tasso eonia si ha con l'euribor a 9 mesi. Inoltre, gli euribor sono molto più correlati tra loro rispetto a quanto sono correlati con i tassi swap (viceversa per gli swap). Infine, il tasso

eonìa ha correlazione negativa con lo swap a 3 anni (quinta fascia) nelle prime due matrici (SMA e EWMA), mentre nell'ultima questi due tassi sono legati positivamente (O-GARCH).

Le stime ottenute su un orizzonte temporale giornaliero mostrano che la simulazione storica riesce a cogliere meglio le caratteristiche della distribuzione delle variazioni giornaliere dei tassi. Questo perché si basa su una logica di full valuation senza ipotizzare una distribuzione teorica Normale. Le distribuzioni empiriche delle variazioni giornaliere dei tassi presentano forme di leptokurtosi, con code più spesse e picchi più alti. Dunque l'ipotesi di distribuzione Normale, su cui si basano i modelli parametrici, sottostima il rischio racchiuso nelle code. Il modello di simulazione storica, invece, riesce a cogliere meglio questo rischio e restituisce stime VaR maggiori, cioè perdite potenziali più elevate.

Questa evidenza empirica era già stata analizzata da diversi autori in letteratura, ma qui si è riscontrato, inoltre, che i risultati si invertono nel calcolo del VaR ipotizzando un holding period di 10 giorni: il metodo di simulazione fornisce stime minori della perdite potenziale rispetto ai modelli varianze-covarianze, in particolare la SMA porta sempre ad una perdita potenziale maggiore rispetto alla simulazione storica. Ciò è dovuto alla "tecnica delle osservazioni sovrapposte" utilizzata per la simulazione storica, per cui le osservazioni utilizzate su base decadale sono serialmente correlate. Il generico n-esimo dato, per esempio, ha 9/10 di periodo temporale in comune con i dati n-1 e n+1, 8/10 in comune con i dati n-2 e n+2, e così via. Si verifica, quindi, che la nuova serie decadale sia meno volatile della serie di osservazioni indipendenti.

Tra i modelli parametrici, la SMA è il modello che fornisce i valori VaR più elevati, in quanto le volatilità stimate sono maggiori rispetto ai risultati dell'EWMA e dell'O-GARCH. Le stime sono differenti tra loro perché la SMA fornisce una stima globale della volatilità attribuendo lo stesso peso a tutte le osservazioni, quindi l'osservazione meno recente impatta sulla stima quanto l'osservazione più recente. Differentemente l'algoritmo della EWMA fornisce una stima locale dato che i pesi sono esponenzialmente decrescenti ed il passato conta sempre meno per la stima della volatilità. Poiché ogni key rate considerato presenta dei cluster di volatilità durante il 2012 per poi tornare più stabile verso la fine dell'anno, la media mobile esponenziale, dando più peso alle osservazioni recenti e meno al passato, fornisce stime che sono più aggiornate e riflettono le condizioni recenti del mercato. Nella media mobile semplice invece i cluster passati hanno lo stesso peso delle osservazioni più recenti, per questo le volatilità SMA sono maggiori di quelle EWMA. Il modello O-GARCH si presta come una buona mediazione tra i due approcci, anche se può risultare molto più complesso. Questo modello però presenta anche un altro vantaggio: le matrici di covarianza saranno sempre semidefinite positive, non c'è bisogno di imporre vincoli ai parametri come nei dati RiskMetrics o nei modelli GARCH multivariati standard. Dunque si è riscontrato lo stesso risultato ottenuto da Carol Alexander nel suo studio "A Primer on the Orthogonal GARCH model" (2000).

Dai risultati del BackTesting si conclude che i modelli VaR costruiti sono imperfetti, tutti registrano scostamenti con statistica superiore all'1%, fatta eccezione per il modello SMA su base decennale del banking book che in media ha la performance migliore con lo 0.78% di scostamenti. In generale, tra i modelli VaR, l'algoritmo SMA prevede meglio le perdite future con il minor margine d'errore. Differentemente il modello EWMA risulta il meno accurato, in quanto l'algoritmo del livellamento esponenziale sottovaluta la volatilità dei tassi del 2013. Alla fine del 2012 si è verificata sul mercato una minore volatilità ed il modello EWMA effettua le stime dando maggior peso al "passato più recente", cioè agli ultimi mesi del 2012, quando la volatilità era in diminuzione. Per questo motivo le stime VaR del modello EWMA sono più contenute e più "fallibili" se testate con i dati del 2013, dove la volatilità dei key rates di alcune fasce è più elevata. Per poter svolgere il test retrospettivo si è ipotizzato che la composizione del trading book e del banking book resti costante per tutto il 2013. In realtà l'imprecisione dei modelli VaR è dovuta anche a questa forte ipotesi: è inverosimile che i portafogli rimangano immutati, in particolare il trading book. Nel banking book vengono contabilizzate le posizioni di lungo periodo, mentre nel portafoglio di negoziazione sono collocate le attività che le banche intendono detenere solo per breve tempo, dunque l'ipotesi di composizione costante si associa meglio all'analisi del banking book rispetto al trading book. Ciò comporta che i risultati del BackTesting sui trading books sono meno affidabili.

Il confronto tra i modelli interni e la metodologia standardizzata di Basilea giustifica la necessità delle banche di trovare un'alternativa all'approccio standard imposto dal Comitato. Molte istituzioni finanziarie hanno fortemente criticato l'utilizzo dell'approccio standard. I meccanismi sono onerosi e non coerenti con il principio generale di imposizione di un requisito patrimoniale in grado di coprire le perdite potenziali su un arco temporale di dieci giorni lavorativi con un elevato livello di confidenza. Inoltre, l'approccio standard presenta una distinzione troppo eccessiva tra il trading book ed il banking book. In questo modo è impossibile considerare in modo unitario l'esposizione al rischio di interesse, che emerge non solo dalle obbligazioni detenute ai fini di negoziazione, ma anche dal banking book. La misurazione del rischio attraverso l'approccio standard non è accurata in quanto le variazioni di tasso sono semplicemente ipotizzate senza considerare l'effettiva volatilità dei fattori di rischio. I Δ i proposti dal Comitato sono ritenuti "ragionevoli" ma portano ad una sovrastima del rischio che si traduce in un accantonamento eccessivo di capitale, che invece potrebbe essere utilizzato per altri investimenti che incrementino il valore ed il reddito della banca. Per questi motivi la maggior parte delle banche preferisce utilizzare i modelli interni.

Per quanto riguarda le perdite medie superiori al VaR, nelle stime con orizzonte temporale giornaliero, i valori di Expected Shortfall della simulazione storica sono simili alle stime della SMA. Entrambi i modelli, infatti, prevedono livelli di perdite elevati nel "worst case scenario"

(cioè in caso il VaR viene superato). Il risultato però si inverte nelle stime con orizzonte temporale di 10 giorni: i valori ES del modello di simulazione si distaccano nettamente dal primo modello parametrico, mentre si avvicinano alle stime EWMA e O-GARCH. Il modello ES è imperfetto in quanto non riesce spesso a cogliere il livello della perdita media superiore al VaR. Ciò è causato da due fattori: le stime ES derivano da i modelli VaR e si è già visto che questi sono, a loro volta, imperfetti; a questo si deve aggiungere l'effetto dell'ipotesi irrealistica alla base del Backtesting. Le stime ES riescono meglio a cogliere le code della distribuzione quando si utilizza come holding period un orizzonte di 10 giorni; questo perché l'utilizzo della tecnica delle osservazioni sovrapposte rende la serie storica meno volatile. Il modello che riscontra più successo è, nuovamente, la SMA, in quanto è il più conservativo e più prudentiale. Dando lo stesso peso a tutta la serie storica del 2012, non si commette l'errore di sottostimare la volatilità dell'anno successivo, come invece fa il modello EWMA, che risulta il meno efficace sia nelle stime VaR che ES.

L'analisi svolta si è estesa anche al confronto tra VaR e stressed VaR (sVaR). La proposta del Comitato di Basilea consiste in uno stress test che ha anche un forte impatto sul patrimonio netto in quanto rappresenta un incremento del requisito di capitale regolamentare. Esso prevede l'applicazione dei modelli VaR già utilizzati, considerando come campione storico di osservazioni un periodo di forte stress di mercato. Seguendo l'esempio di Burchi in "Capital requirements for market risks: value-at-risk models and stressed-VaR after the financial crisis" (2013), si è preso in considerazione il periodo di stress tra il 2008 e il 2009. Le perdite potenziali stimate sono significativamente superiori rispetto al VaR tradizionale, ciò è dovuto alla forte volatilità delle variabili di mercato durante il periodo di stress. Lo sVaR aumenta drasticamente il requisito del capitale ad un punto tale che non è nemmeno più rilevante quale tipo di approccio sia utilizzato per stimare il VaR. Infatti, che venga utilizzato un modello parametrico, ipotizzando una distribuzione Normale, o la simulazione storica, per cogliere meglio le caratteristiche empiriche delle variabili di mercato, è del tutto indifferente in quanto l'incremento del requisito patrimoniale sarà comunque vertiginoso. Il requisito di capitale raggiunge persino il livello del metodo standard di Basilea ed in alcuni casi arriva persino a superarlo. Dunque lo sVaR scoraggia le banche ad utilizzare i modelli interni nonostante essi siano più precisi ed accurati dell'approccio di Basilea.

Infine, è stata rilevata un'altra importante evidenza empirica: dopo la crisi dei debiti sovrani, le banche hanno iniziato a spostare i titoli di debito dal portafoglio di negoziazione verso il banking book, concentrando i volumi nelle fasce a scadenza maggiore. In altre parole, dopo il 2009, è iniziato un trend di acquisti di titoli di debito a lungo termine ed a tasso fisso, che vengono inseriti nel portafoglio bancario, in particolare nelle fasce temporali a lungo termine in corrispondenza della loro effettiva scadenza. Questo ha condotto ad un incremento della durata media finanziaria

delle attività. Per questo motivo, il banking book è più esposto a variazioni dei tassi rispetto al trading book, dunque ad una prima analisi sembrerebbe estremamente rischioso.

In realtà, le variazioni del fair value dei titoli di debito presenti non viene imputata a conto economico, bensì in una riserva di rivalutazione nel patrimonio. Inserire i titoli in un portafoglio contabile o in un altro impatta sulla rischiosità e redditività della banca. Dopo che i dubbi sulla solidità dell'euro e sulla solvibilità dei governi europei sono sfociati nella crisi del 2009, i prezzi dei titoli pubblici sono caduti, influenzando i bilanci delle banche a seconda della loro classificazione contabile. Le variazioni di valore di un titolo iscritto nel portafoglio Fair Value Profit and Loss (FVPL) vengono imputate a conto economico come risultati della negoziazione di tale titolo sul mercato. Differentemente, se un titolo è inserito nel portafoglio Available for Sales (AFS), le sue variazioni di valore sono iscritte in un'apposita riserva da rivalutazione del patrimonio netto. La variazione cumulata di quest'ultima è iscritta a conto economico solo quando l'attività finanziaria è ceduta o si estingue.

Alla luce di quanto detto finora, si può concludere dicendo che, per le banche italiane, l'esposizione al rischio di interesse è contenuta e che il rischio di mercato del trading book è in diminuzione. Questi risultati sono coerenti con quanto riportato dalla Banca d'Italia nei Rapporti sulla stabilità finanziaria degli ultimi due anni: con l'allentamento delle tensioni sui mercati finanziari, le banche hanno ceduto parte dei titoli sovrani a lunga scadenza detenuti nel portafoglio di negoziazione. Sfruttando il miglioramento delle quotazioni, le banche hanno sostituito i titoli a lungo termine, nel trading book, con investimenti a più breve scadenza, ottenendo effetti positivi sulla redditività e sui profili di rischio. Durante il 2012, la durata complessiva del portafoglio di negoziazione si è pertanto accorciata e l'entità del VaR si è ridotta; il rischio di mercato relativo all'intero portafoglio titoli (che include sia il trading book sia i titoli detenuti a fini di investimento nel banking book) è sceso anch'esso, ma in misura contenuta. Tale andamento riflette anche la prassi, diffusa tra le principali banche europee, di classificare i titoli di Stato di nuova acquisizione nel portafoglio AFS, in seguito al forte inasprimento dei requisiti di capitale sulle attività detenute nel portafoglio di negoziazione.

BIBLIOGRAFIA

Acerbi C., Nordio C., Sirtori C. (2001), Expected shortfall as a tool for financial risk management, *working paper*.

Acerbi C., Tasche D. (2001), Expected shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, *working paper*.

Alexander C., Leigh C. (1997), On the covariance matrices used in VaR models, *Journal of Derivatives*, n.4 (3): 50-62.

Alexander C. (1998), Volatility and correlation: methods, models and applications, *Risk Management and Analysis: Measuring and Modelling Financial Risk*, Wileys.

Alexander C. (2001), A primer on Orthogonal GARCH model, *Mimeo, ISMA Centre*.

Artzner P., Delbaen F., Eber J., Heath D. (1999), Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, n.9 (3): 203–228.

Banca d'Italia (2012), *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n.4, novembre.

Banca d'Italia (2013 a), *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n.5, aprile.

Banca d'Italia (2013 b), *Applicazione in Italia del regolamento (UE) n. 575/2013 e della direttiva 2013/36/UE*, Roma, agosto.

Banca d'Italia (2013 c), *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n.6, novembre.

Banca d'Italia (2013d), *Circolare N. 285 – Istruzioni di Vigilanza per le banche*, dicembre.

Banca d'Italia (2014), *Circolare N. 229 – Istruzioni di Vigilanza per le banche, Versione esclusivamente informativa annotata con le comunicazioni modificative ed integrative*, giugno.

Barone-Adesi G., Bourgoin F., Giannopoulos K. (1997), A probabilistic approach to worst case scenarios, *Risk*, Agosto.

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. (2006), Multivariate GARCH models: a survey, *Journal of Applied Econometrics*, n.21: 79-109.

Bazzana F. (2001), I modelli interni per la valutazione del rischio di mercato secondo l'approccio del Value at Risk, *ALEA Tech Reports, Università di Trento*.

Bertsimas D., Lauprete G.J., Samarov A. (2004), Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications, *Working paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge*.

Bollerslev T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, n.31: 307-327.

Boudoukh J., Richardson M., Whitelaw R. (1998), The Best of Both Worlds, *Risk*, May: 64-67.

Burchi A. (2011), Modelli VaR e requisito di capitale per il rischio di mercato, *Banca Impresa e Società*, n.1: 75-103.

Burchi A. (2013), Capital requirements for market risks: value-at-risk models and stressed-VaR after the financial crisis, *Journal of Financial Regulation and Compliance*, Vol. 21 n.3: 284-304.

Butler J.S., Schachter B. (1997), Estimating Value at Risk with a Precision Measure by Combining Kernel Estimation with Historical Simulation, *Review of Derivatives Research*.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1988), *Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali minimi*, Basilea, luglio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1995a), *Progetto di supplemento all'accordo sui requisiti patrimoniali per incorporare i rischi di mercato*, Basilea, aprile.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1995b), *Proposta di pubblicazione di un supplemento all'accordo di Basilea sui requisiti patrimoniali per contemplare i rischi di mercato*, Basilea, aprile.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1995c), *Un approccio basato sui modelli interni per l'applicazione dei requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di mercato*, Basilea, aprile.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1996a), *Schema prudenziale per l'uso di test retrospettivi nel quadro dell'approccio basato sui modelli interni per determinare i requisiti patrimoniali a fronte del rischio di mercato*, Basilea, gennaio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1996c), *Emendamento dell'accordo sui requisiti patrimoniali per incorporare i rischi di mercato*, Basilea, gennaio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (1998), *Schema per la valutazione dei sistemi di controllo interno*, Basilea, gennaio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2004a), *Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali, nuovo schema di regolamentazione*, Basilea, giugno.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2004b), *Principles for the Management and supervision of Interest rate Risk*, Basilea, luglio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2007), *Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali, nuovo schema di regolamentazione, Versione Integrale*, Basilea, maggio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2009a), *Revisions to the Basel II market risk framework*, Basilea, luglio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2009b), *Analysis of the trading book quantitative impact study*, Basilea, ottobre.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2010a), *La risposta del Comitato di Basilea alla crisi finanziaria: rapporto al G20*, Basilea, novembre.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2010b), *Basilea 3 – Schema di regolamentazione internazionale per il rafforzamento delle banche e dei sistemi bancari*, Basilea, novembre.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2011a), *Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali minimi*, Basilea, marzo.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2011b), *Basilea 3 – Schema di regolamentazione internazionale per il rafforzamento delle banche e dei sistemi bancari*, Basilea, giugno.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (2014), *Rapporto sullo stato di avanzamento nell'attuazione degli standard di Basilea*, Basilea, aprile.

Culbertson J.M. (1957), The Term Structure of Interest Rates, *Quarterly Journal of Economics*, n.71: 485-517.

Duffie D., Pan J. (1997), An overview of value at risk, *Journal of Derivatives*, n.4 (3): 7-49.

Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch, T. (1997), Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, *Springer*, Berlin.

Embrechts P. (2000), Extreme value theory: potential and limitations as an integrated risk management tool, *mimeo*, ETH Zentrum, Zurigo.

Engle R. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, n.50: 987-1007.

Fama E.F. (1965), The behaviour of stock prices, *Journal of Business*, n.38: 34-105.

Figlewski S. (1994), Forecasting Volatility Using Historical Data, *New York University, Salomon Center*.

Fiori R., Iannotti S. (2007), Scenario-based principal component value-at-risk when the underlying risk factors are skewed and heavy-tailed: an application to Italian banks' interest rate risk exposure, *Journal of Risk*, n.3 (9): 39-99.

Gianfrancesco I. (2013), Le implicazioni della crisi del debito sovrano sull'asset & liability management delle banche, *Banche e Banchieri*, n.2: 217-230.

Hendricks D. (1996), Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data, *Federal Reserve Bank of New York, Economic Policy Review*.

Hull J. (1997), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 4th edn, Princeton-Hall, Princeton, NJ.

Hull J. (2012), *Risk Management e Istituzioni Finanziarie*, 2nd ed. Emilio Barone, Luiss Guido Carli, Roma.

Hull J., White A. (1997), Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed, *Journal of Derivatives*, Spring 1998: 9-19.

Hull J., White A. (1998), Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for VaR, *Journal of Risk*, n.1(1): 5–19.

J. P. Morgan, Reuters (1996), *RiskMetricsTM Technical documents*, IV ed. J.P. Morgan, New York.

Li D.X. (1999), Value at risk based on the volatility, skewness and kurtosis, *mimeo*, Riskmetrics Group, New York.

Maspero D. (1997), I modelli VaR basati sulle simulazioni, in *A. Sironi, M. Marsella: La misurazione e la gestione dei rischi di mercato*, Il Mulino, Bologna.

Parlamento Europeo e Consiglio dell'Unione Europea (2013), *Regolamento (UE) N. 575/2013 del parlamento Europeo e del consiglio del 26 giugno 2013 relativo ai requisiti prudenziali per gli enti creditizi e le imprese di investimento e che modifica il regolamento (UE) n. 648/2012*, Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea, giugno.

Pepe G. (2013), Basel 2.5: potential benefits and unintended consequences, Banca D'Italia, *Questioni di economia e finanza*, n.159.

Resti A., Sironi A. (2008), *Rischio e valore nelle banche*, EGEA spa, Milano.

Rockafellar R., Uryasev S. (2002), Conditional value at risk for general loss distributions, *Journal of Banking and Finance*, n.26: 1443-1471.

Smith R.L. (1990), Extreme Value Theory, *Handbook of Applicable Mathematics, Supplement*, ed. W. Ledermann, Chichester: 437-72.

Van Horne J.C. (1965), Interest Rate risk and the term structure of Interest Rates, *Journal of Political Economy*, n.73: 344-351.

Inoltre, Bilancio Consolidato al 31/12/2012 di:

Ubi Banca;

Banca Popolare Vicenza;

Veneto Banca;

Banca Popolare Milano;

Banca Carige;

Banca delle Marche;

Banca Etruria;

Cassa di Risparmio di Bolzano;

Banca di Credito Cooperativo di Roma;

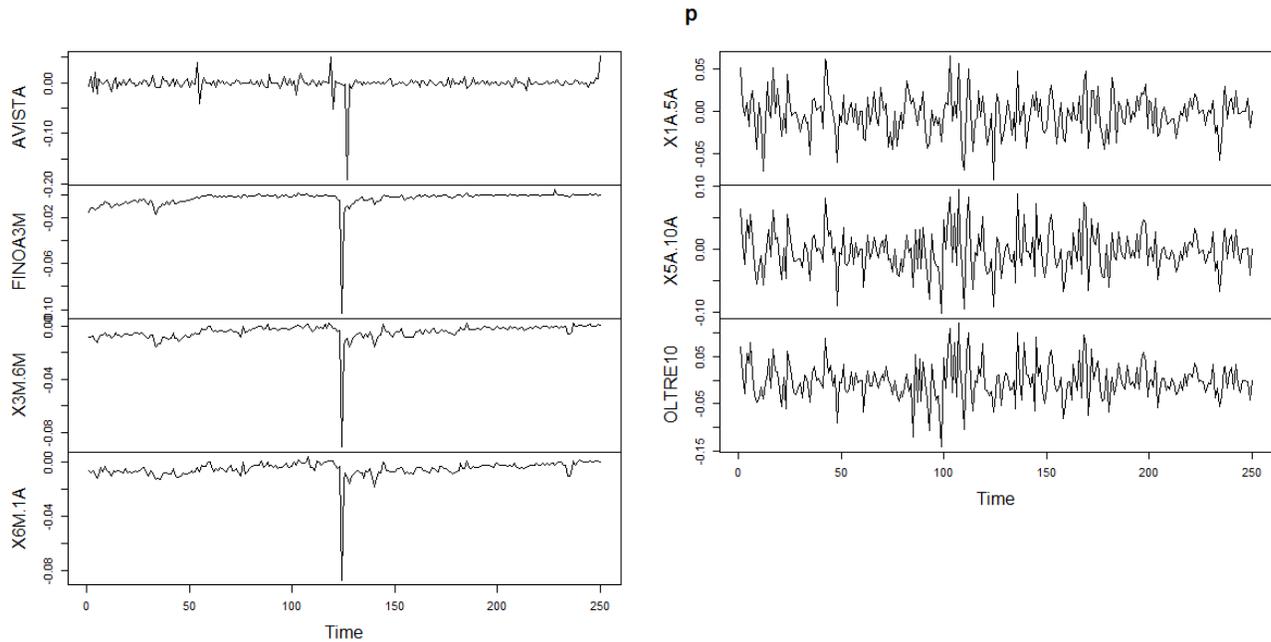
Cassa di Risparmio di Ravenna.

APPENDICE

Analisi delle serie storiche delle variazioni giornaliere dei key-rates

Si sono prese in considerazione 7 serie storiche per i 7 key rates rispettivi a ciascuna fascia temporale del banking book e trading book.

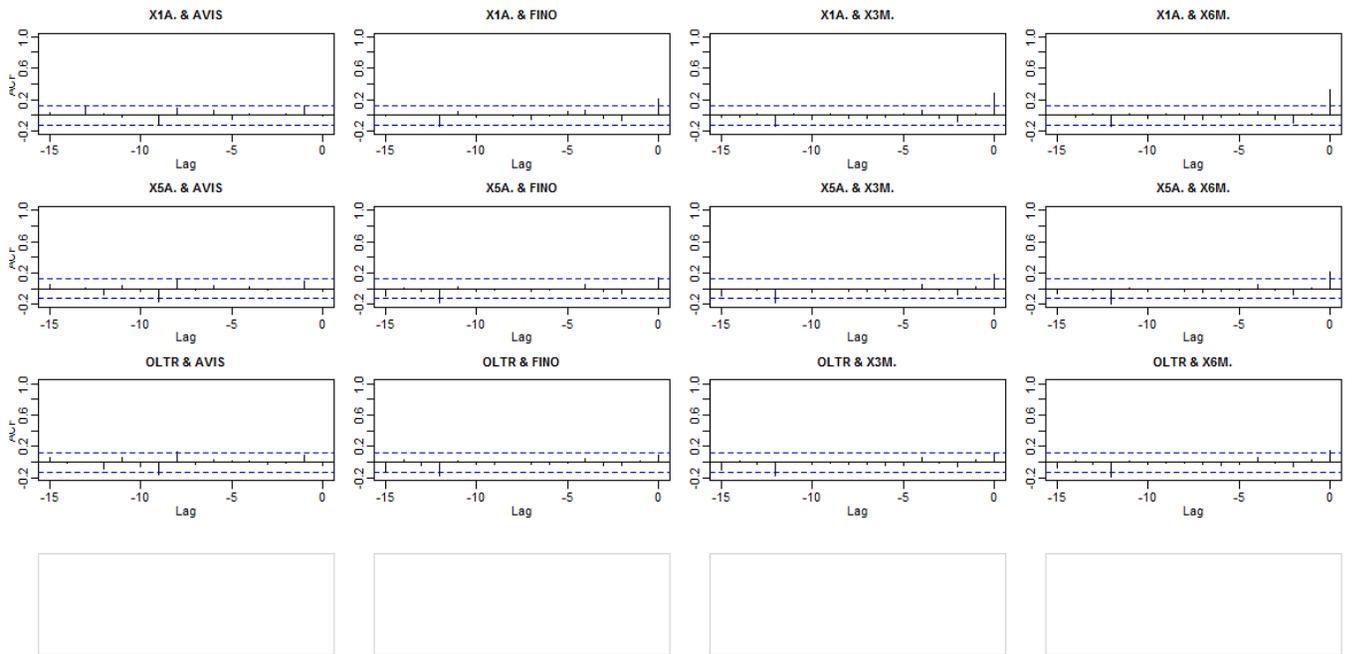
In questa sezione sono riportati i risultati dello studio sull'autocorrelazione delle 7 variabili. Ecco le serie storiche in analisi:



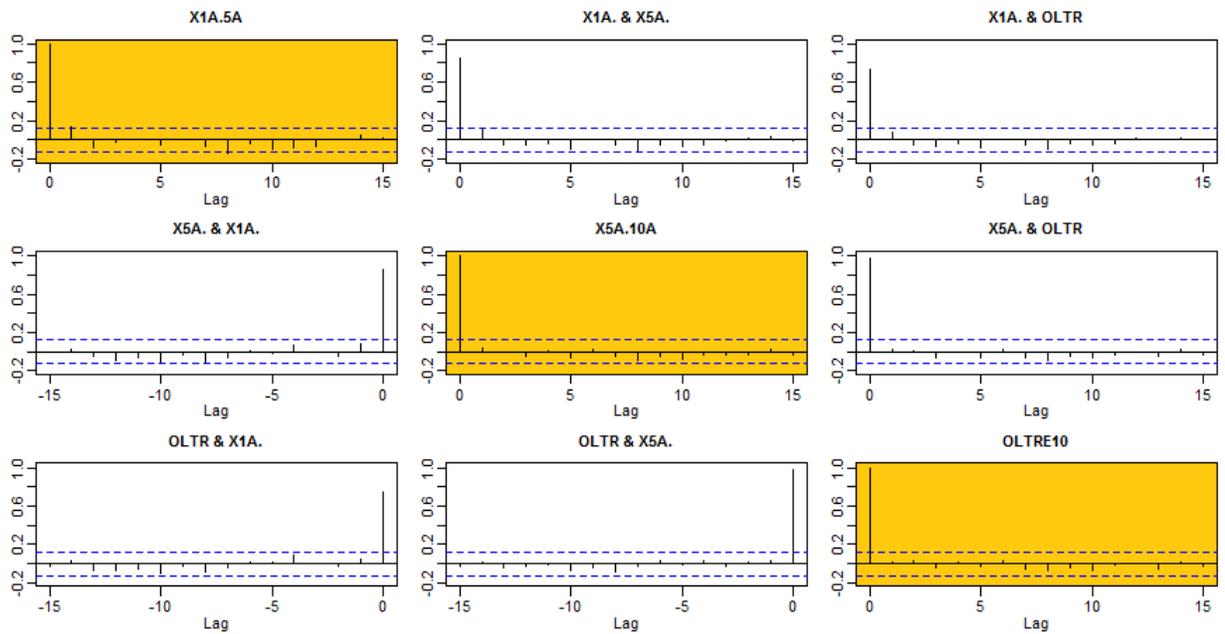
Si riportano le correlazioni e autocorrelazioni sul grafico ACF:



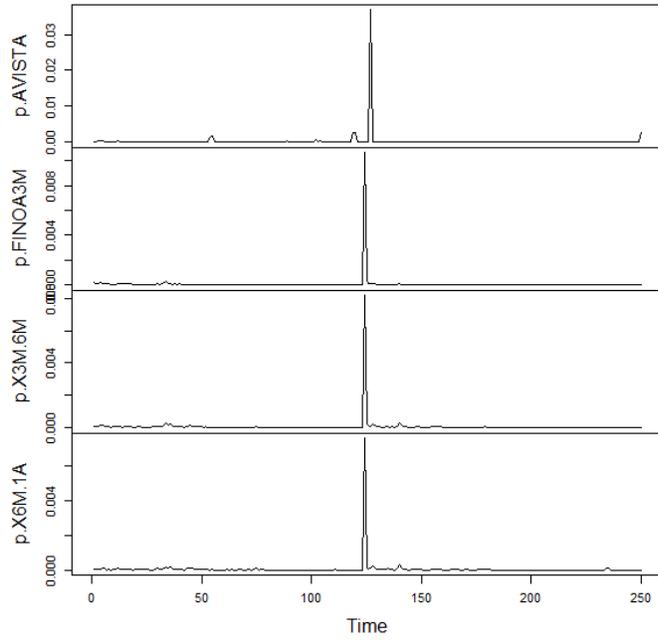
[1, 2]



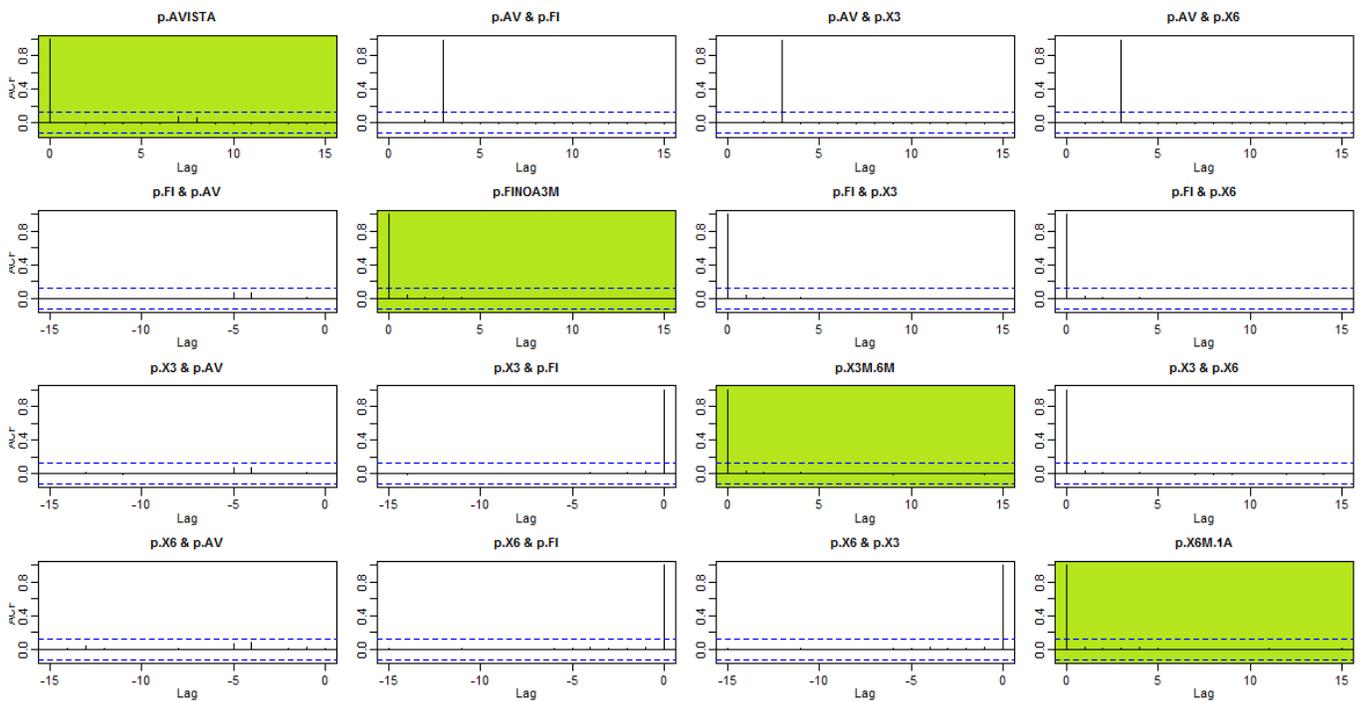
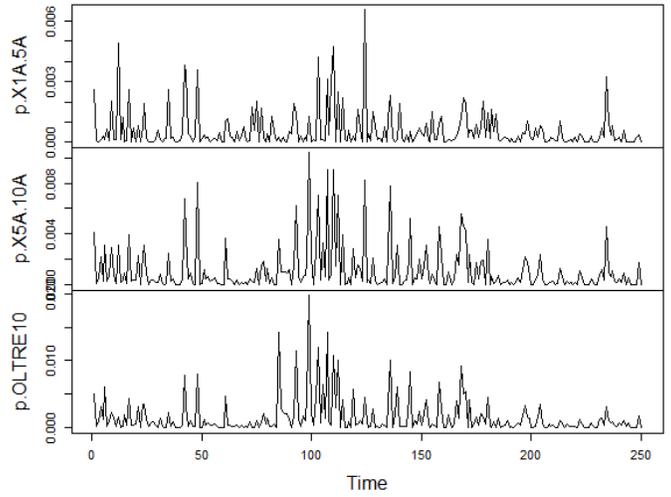
[2, 1]

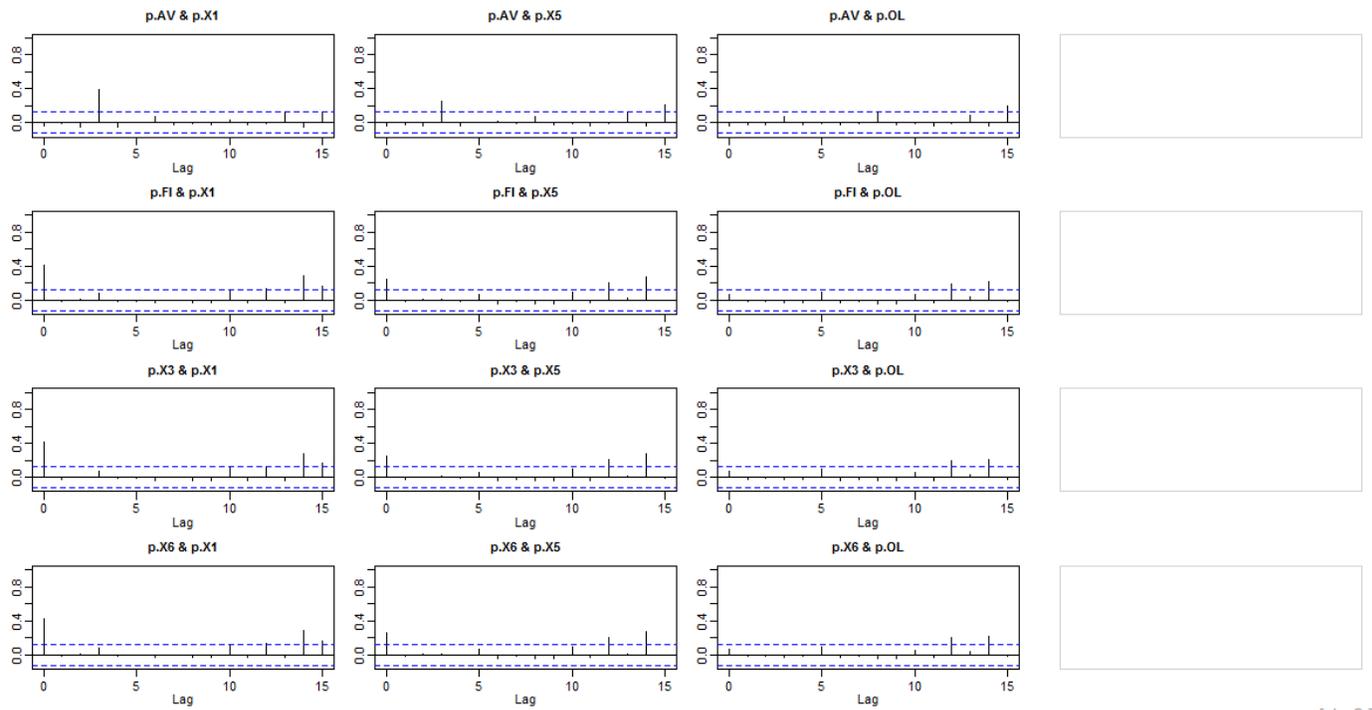


Le serie al quadrato sono:

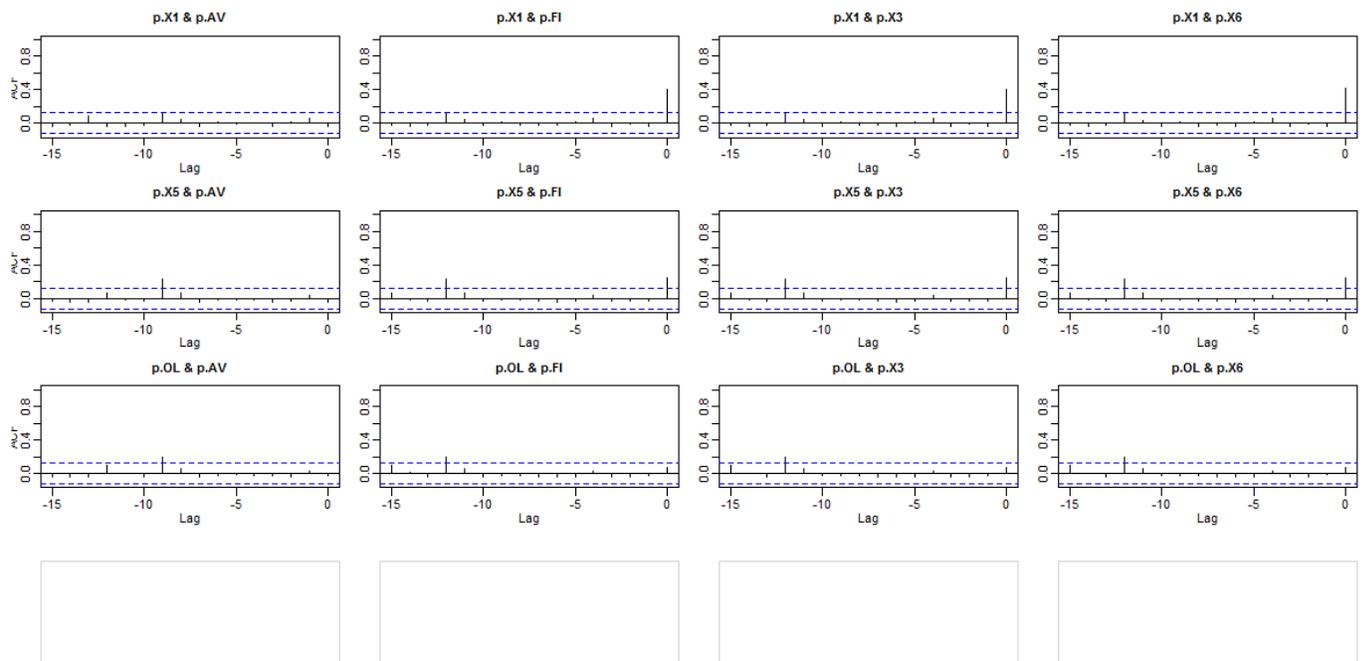


k

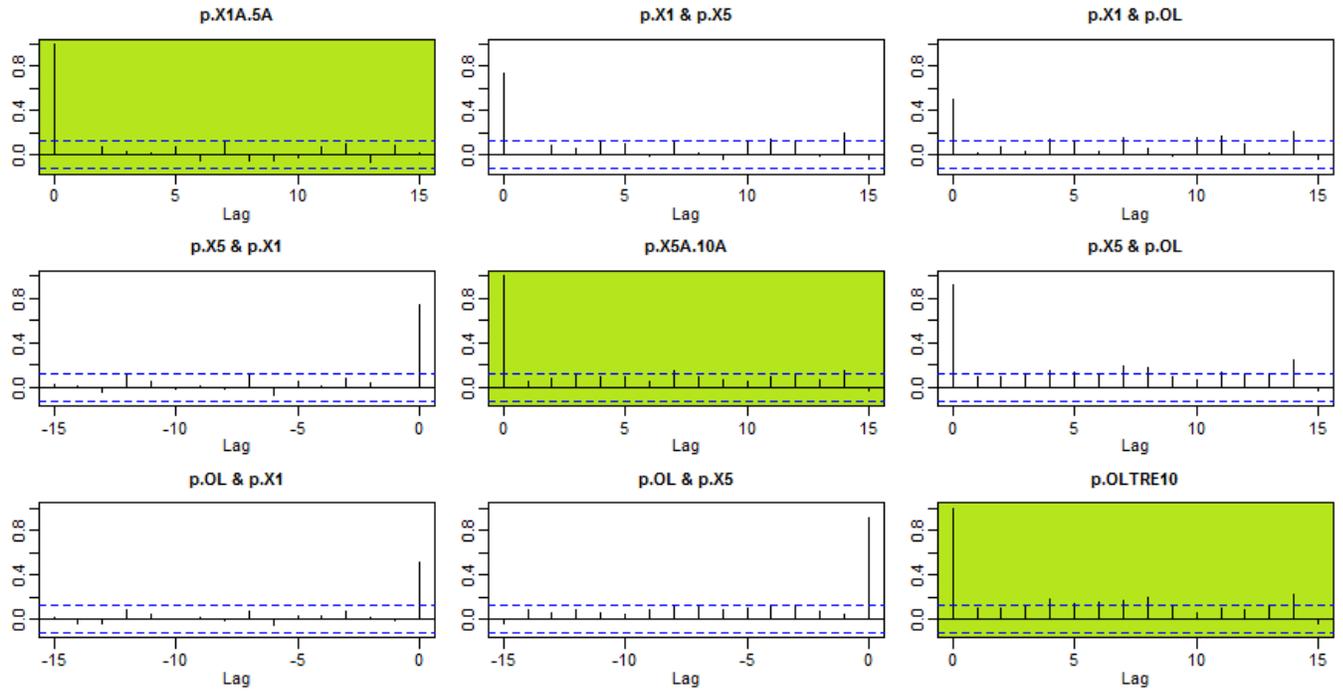




[1, 2]

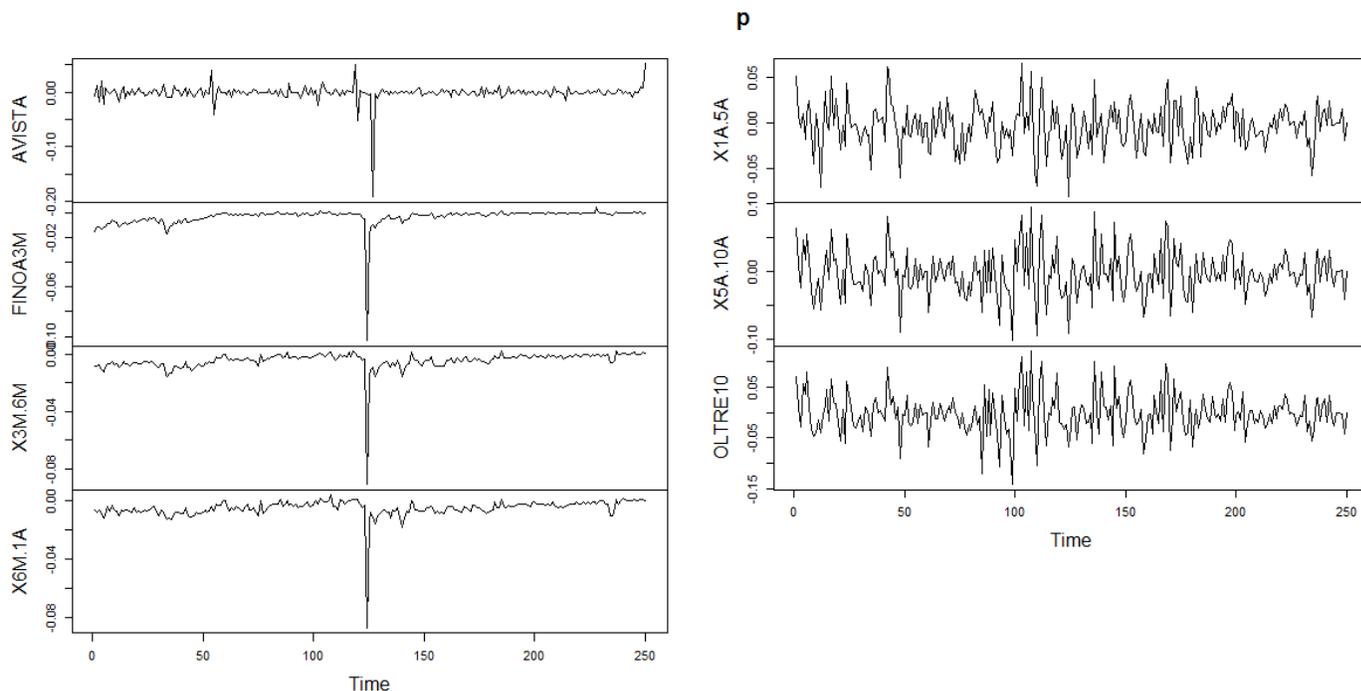


[2, 1]



Stime O-GARCH

Si considerano inizialmente le 7 serie storiche delle variazioni giornaliere dei 7 key rates (250 osservazioni per serie):



Summary delle informazioni statistiche per ogni fascia:

AVISTA		FINOA3M		X3M.6M		X6M.1A	
Min.	:-0.19200	Min.	:-0.103250	Min.	:-0.090500	Min.	:-0.087000
1st Qu.	:-0.00300	1st Qu.	:-0.004500	1st Qu.	:-0.006500	1st Qu.	:-0.007000
Median	: 0.00000	Median	:-0.001250	Median	:-0.003500	Median	:-0.004500
Mean	:-0.00102	Mean	:-0.003195	Mean	:-0.004432	Mean	:-0.005004
3rd Qu.	: 0.00300	3rd Qu.	:-0.000250	3rd Qu.	:-0.001500	3rd Qu.	:-0.002000
Max.	: 0.05200	Max.	: 0.004250	Max.	: 0.002000	Max.	: 0.004000

X1A.5A		X5A.10A		OLTRE10	
Min.	:-0.081000	Min.	:-0.102000	Min.	:-0.14050
1st Qu.	:-0.016000	1st Qu.	:-0.021375	1st Qu.	:-0.02325
Median	:-0.002000	Median	:-0.004000	Median	:-0.00500
Mean	:-0.002928	Mean	:-0.002856	Mean	:-0.00227
3rd Qu.	: 0.011000	3rd Qu.	: 0.018875	3rd Qu.	: 0.01588
Max.	: 0.065000	Max.	: 0.095000	Max.	: 0.11950

La matrice Σ di var-cov incondizionata dei key rates

	row.names	AVISTA	FINOA3M	X3M.6M	X6M.1A	X1A.5A	X5A.10A	OLTRE10
1	AVISTA	0.02278%	0.00087%	0.00078%	0.00086%	-0.00047%	-0.00174%	-0.00242%
2	FINOA3M	0.00087%	0.00540%	0.00463%	0.00428%	0.00360%	0.00353%	0.00251%
3	X3M.6M	0.00078%	0.00463%	0.00431%	0.00408%	0.00433%	0.00414%	0.00308%
4	X6M.1A	0.00086%	0.00428%	0.00408%	0.00402%	0.00496%	0.00465%	0.00354%
5	X1A.5A	-0.00047%	0.00360%	0.00433%	0.00496%	0.05617%	0.06768%	0.06879%
6	X5A.10A	-0.00174%	0.00353%	0.00414%	0.00465%	0.06768%	0.11194%	0.12799%
7	OLTRE10	-0.00242%	0.00251%	0.00308%	0.00354%	0.06879%	0.12799%	0.15416%

Si effettua la decomposizione spettrale di Σ :

V è la matrice degli autovettori

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
1	-0.010343	0.7410968	0.6639661	0.0989406	-0.001949	0.0038667	0.0030836
2	0.0183558	0.1880799	-0.12384	-0.597097	-0.012725	0.7308403	-0.241118
3	0.0217282	0.184436	-0.130877	-0.516017	0.0325989	-0.229698	0.7926444
4	0.0245508	0.1902406	-0.135661	-0.468395	0.0608195	-0.638909	-0.559915
5	0.3666332	0.5064516	-0.6123	0.3577104	0.3208255	0.0569075	0.0071757
6	0.6082609	0.0298299	-0.026652	0.0050027	-0.791783	-0.038251	-0.00328
7	0.7029083	-0.296328	0.3642234	-0.14155	0.5149989	0.0138054	0.0004915

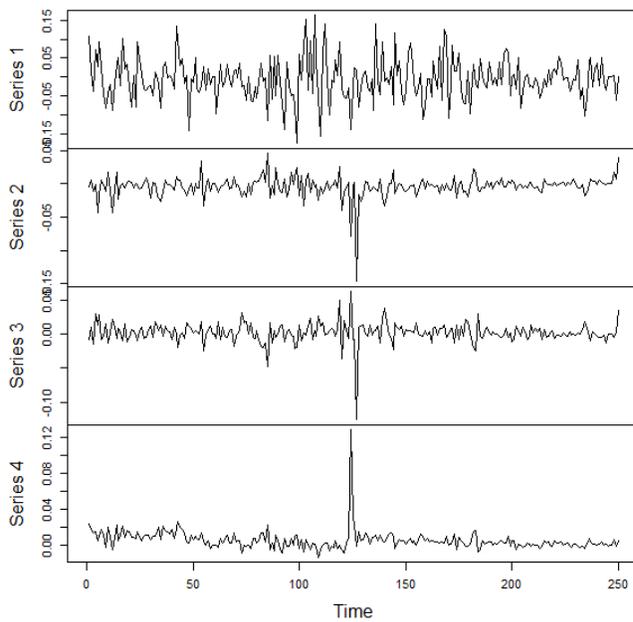
Λ è la matrice degli autovalori

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
1	0.301114%	-	-	-	-	-	-
2	-	0.023992%	-	-	-	-	-
3	-	-	0.021466%	-	-	-	-
4	-	-	-	0.011024%	-	-	-
5	-	-	-	-	0.000793%	-	-
6	-	-	-	-	-	0.000345%	-
7	-	-	-	-	-	-	0.000053%

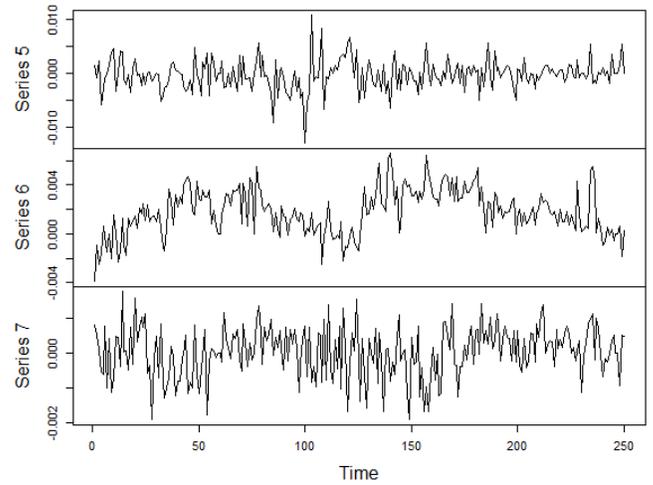
Gli autovalori sono ordinati in ordine crescente



Ora è possibile costruire i 7 fattori:



ts(f)



Varianza spiegata da ciascun fattore:

```
lambda[1]/sum(lambda)
[1] 0.839257
> lambda[2]/sum(lambda)
[1] 0.06686941
> lambda[3]/sum(lambda)
[1] 0.05982905
> lambda[4]/sum(lambda)
[1] 0.03072537
> lambda[5]/sum(lambda)
[1] 0.002210373
> lambda[6]/sum(lambda)
[1] 0.0009604271
> lambda[7]/sum(lambda)
[1] 0.0001483701
```

Come si nota, i fattori sono ordinati in ordine di importanza: il primo è quello che spiega la varianza delle variabili di mercato più di tutti.

Lo step successivo è quello di modellare ogni fattore con un GARCH(1,1), dunque si hanno 7 regressioni:

```
Title:
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x00000000e77e1e8>
[data = f[, i]]

Conditional Distribution:
norm

Coefficient(s):
      mu      omega      alpha1      beta1
-0.00526412  0.00010833  0.07919107  0.88232563

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      -5.264e-03  3.141e-03  -1.676   0.0937 .
omega    1.083e-04  9.746e-05  1.112   0.2663
alpha1   7.919e-02  3.564e-02  2.222   0.0263 *
beta1    8.823e-01  5.685e-02  15.522  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
380.4009      normalized: 1.521604
```

Description:

Sun Jul 13 19:49:14 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi ²	3.496308	0.1740951
Shapiro-wilk Test	R	W	0.9901964	0.09029452
Ljung-Box Test	R	Q(10)	7.653946	0.6625976
Ljung-Box Test	R	Q(15)	9.579151	0.8453448
Ljung-Box Test	R	Q(20)	10.4333	0.9596175
Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	5.290501	0.8709468
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	8.740455	0.8906925
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	12.3931	0.9018818
LM Arch Test	R	TR ²	4.809263	0.964048

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-3.011207	-2.954864	-3.011709	-2.988531

Title:

GARCH Modelling

Call:

garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:

```
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x00000000eae95e8>
[data = f[, i]]
```

Conditional Distribution:

norm

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	beta1
-2.6118e-03	1.0823e-05	3.2198e-01	7.0808e-01

Std. Errors:

based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
mu	-2.612e-03	6.786e-04	-3.849	0.000119	***
omega	1.082e-05	4.972e-06	2.177	0.029481	*
alpha1	3.220e-01	8.155e-02	3.948	7.88e-05	***
beta1	7.081e-01	5.663e-02	12.505	< 2e-16	***

 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:

736.1787 normalized: 2.944715

Description:

Sun Jul 13 19:49:14 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi ²	210.3189	0
Shapiro-wilk Test	R	W	0.917493	1.537574e-10
Ljung-Box Test	R	Q(10)	11.44061	0.3242355
Ljung-Box Test	R	Q(15)	17.05945	0.315323
Ljung-Box Test	R	Q(20)	18.32915	0.5657356

Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	14.00712	0.1726671
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	15.39065	0.4236613
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	15.79349	0.72935
LM Arch Test	R	TR ²	19.48506	0.07747572

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-5.857430	-5.801086	-5.857931	-5.834753

Title:

GARCH Modelling

Call:

`garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)`

Mean and Variance Equation:

`data ~ garch(1, 1)`
 <environment: 0x00000000df049c8>
 [data = f[, i]]

Conditional Distribution:

norm

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	beta1
2.1061e-03	1.2019e-05	1.8865e-01	7.7236e-01

Std. Errors:

based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
mu	2.106e-03	7.034e-04	2.994	0.002751	**
omega	1.202e-05	6.003e-06	2.002	0.045263	*
alpha1	1.887e-01	5.387e-02	3.502	0.000462	***
beta1	7.724e-01	5.985e-02	12.904	< 2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:

737.4821 normalized: 2.949929

Description:

Sun Jul 13 19:49:14 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:

		Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi ² 241.2171	0
Shapiro-wilk Test	R	w 0.9390222	1.125982e-08
Ljung-Box Test	R	Q(10) 6.693342	0.7540434
Ljung-Box Test	R	Q(15) 11.46229	0.7191883
Ljung-Box Test	R	Q(20) 19.49665	0.4897854
Ljung-Box Test	R ²	Q(10) 27.63273	0.002066388
Ljung-Box Test	R ²	Q(15) 28.12834	0.02077935
Ljung-Box Test	R ²	Q(20) 29.20595	0.08378259
LM Arch Test	R	TR ² 28.7374	0.00430934

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-5.867857	-5.811514	-5.868358	-5.845181

```

Title:
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x000000000e8a2400>
[data = f[, i]]

Conditional Distribution:
norm

Coefficient(s):
      mu      omega    alpha1    beta1
5.5960e-03 1.1024e-10 6.3988e-01 7.1424e-01

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      5.596e-03 5.521e-04 10.136 < 2e-16 ***
omega   1.102e-10 1.770e-06  0.000      1
alpha1  6.399e-01 1.559e-01  4.103 4.07e-05 ***
beta1   7.142e-01 4.544e-02 15.720 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
804.6571      normalized: 3.218629

Description:
Sun Jul 13 19:49:15 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:
      Statistic p-Value
Jarque-Bera Test  R      Chi^2 33981.55 0
Shapiro-wilk Test R      W    0.6922118 0
Ljung-Box Test   R      Q(10) 36.92317 5.835182e-05
Ljung-Box Test   R      Q(15) 55.30148 1.589111e-06
Ljung-Box Test   R      Q(20) 70.02576 1.803819e-07
Ljung-Box Test   R^2    Q(10) 0.2356097 0.9999998
Ljung-Box Test   R^2    Q(15) 0.5438109 1
Ljung-Box Test   R^2    Q(20) 0.6634916 1
LM Arch Test     R      TR^2 0.3085213 1

Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-6.405257 -6.348914 -6.405758 -6.382581

```

```

Title:
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x000000000ece2a60>
[data = f[, i]]

```

Conditional Distribution:
norm

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	beta1
-1.4167e-04	2.4336e-07	6.6859e-02	9.0076e-01

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-1.417e-04	1.606e-04	-0.882	0.3776
omega	2.434e-07	1.736e-07	1.401	0.1611
alpha1	6.686e-02	2.800e-02	2.388	0.0169 *
beta1	9.008e-01	4.109e-02	21.922	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
1126.461 normalized: 4.505846

Description:
Sun Jul 13 19:49:15 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:

		Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	24.14627 5.710893e-06
Shapiro-wilk Test	R	W	0.9813948 0.002330402
Ljung-Box Test	R	Q(10)	5.842641 0.828306
Ljung-Box Test	R	Q(15)	8.395006 0.9069722
Ljung-Box Test	R	Q(20)	18.27228 0.5694774
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	3.870109 0.9530164
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	30.11681 0.01150721
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	31.06075 0.0543935
LM Arch Test	R	TR^2	8.567458 0.7393635

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-8.979691	-8.923348	-8.980193	-8.957015

Title:
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x00000000e9956b8>
[data = f[, i]]

Conditional Distribution:
norm

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	beta1
1.7154e-03	2.5472e-07	3.3435e-01	6.1813e-01

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	1.715e-03	1.231e-04	13.935	< 2e-16 ***
omega	2.547e-07	1.365e-07	1.866	0.06209 .
alpha1	3.343e-01	1.068e-01	3.129	0.00175 **
beta1	6.181e-01	9.627e-02	6.421	1.36e-10 ***

 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
 1235.692 normalized: 4.942767

Description:
 Sun Jul 13 19:49:15 2014 by user: mauro

Standardised Residuals Tests:

		Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R Chi^2	0.2441189	0.8850957
Shapiro-Wilk Test	R W	0.9920383	0.1963375
Ljung-Box Test	R Q(10)	311.2569	0
Ljung-Box Test	R Q(15)	356.037	0
Ljung-Box Test	R Q(20)	391.0883	0
Ljung-Box Test	R^2 Q(10)	10.68166	0.382851
Ljung-Box Test	R^2 Q(15)	13.01067	0.6014738
Ljung-Box Test	R^2 Q(20)	16.75869	0.6685827
LM Arch Test	R TR^2	16.22969	0.1809407

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-9.853534	-9.797191	-9.854035	-9.830858

Title:
 GARCH Modelling

Call:
 garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = f[, i], trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
 data ~ garch(1, 1)
 <environment: 0x00000000e177080>
 [data = f[, i]]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	beta1
1.0209e-04	1.5171e-08	5.6361e-02	9.1404e-01

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	1.021e-04	4.874e-05	2.095	0.0362 *
omega	1.517e-08	1.462e-08	1.038	0.2994 .
alpha1	5.636e-02	2.976e-02	1.894	0.0582 .
beta1	9.140e-01	4.030e-02	22.679	<2e-16 ***

 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
 1454.346 normalized: 5.817382

Description:

Sun Jul 13 19:49:15 2014 by user: mauro

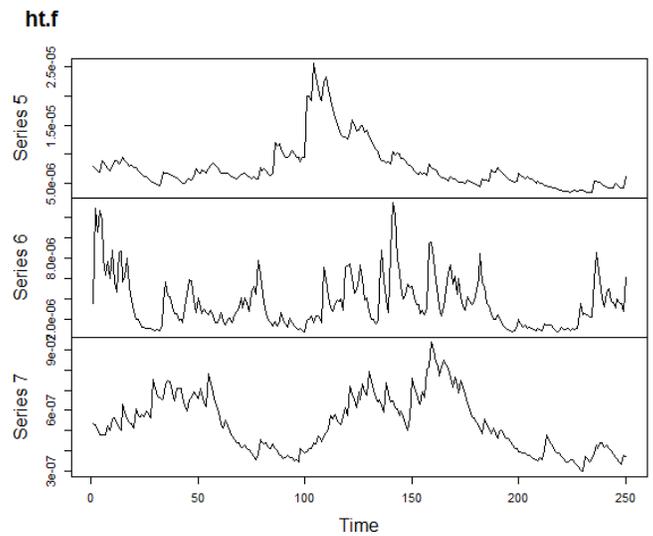
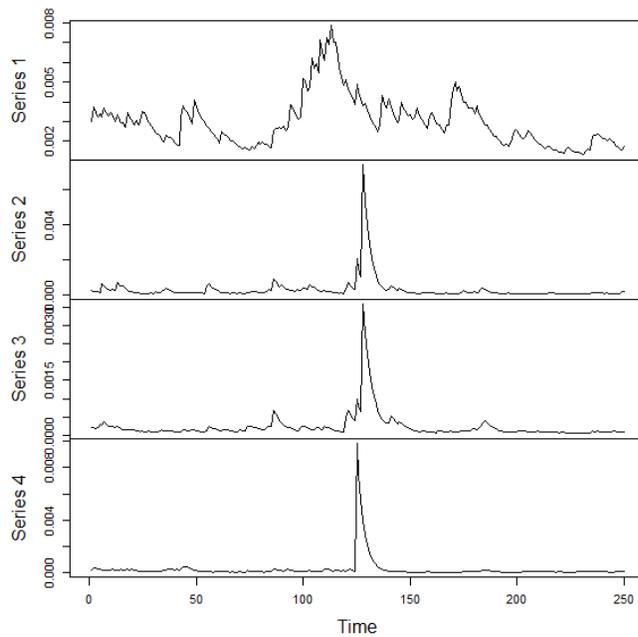
Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi ²	3.320903	0.1900532
Shapiro-wilk Test	R	W	0.991472	0.1551368
Ljung-Box Test	R	Q(10)	27.74054	0.001986165
Ljung-Box Test	R	Q(15)	36.30604	0.001596609
Ljung-Box Test	R	Q(20)	40.27828	0.004605897
Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	13.00696	0.2232829
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	15.9041	0.3884534
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	20.96346	0.3992859
LM Arch Test	R	TR ²	15.88438	0.1965895

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-11.60276	-11.54642	-11.60327	-11.58009

Ottenendo così le 7 varianze condizionate dei fattori:



L'ultimo passo è la ricomposizione spettrale per ottenere la matrice var-cov desiderata:

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
1	0.01278%	0.00133%	0.00128%	0.00135%	0.00268%	-0.00086%	-0.00315%
2	0.00133%	0.00320%	0.00248%	0.00217%	0.00214%	0.00203%	0.00145%
3	0.00128%	0.00248%	0.00241%	0.00231%	0.00250%	0.00239%	0.00180%
4	0.00135%	0.00217%	0.00231%	0.00241%	0.00285%	0.00269%	0.00206%
5	0.00268%	0.00214%	0.00250%	0.00285%	0.03143%	0.03899%	0.04031%
6	-0.00086%	0.00203%	0.00239%	0.00269%	0.03899%	0.06470%	0.07382%
7	-0.00315%	0.00145%	0.00180%	0.00206%	0.04031%	0.07382%	0.08866%

Da cui si passa facilmente alla matrice di correlazione:

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
1	1	0.20745	0.23123	0.24348	0.13386	-0.02976	-0.09355
2	0.20745	1	0.89273	0.78140	0.21352	0.14132	0.08597
3	0.23123	0.89273	1	0.96115	0.28780	0.19163	0.12296
4	0.24348	0.78140	0.96115	1	0.32699	0.21550	0.14121
5	0.13386	0.21352	0.28780	0.32699	1	0.86456	0.76361
6	-0.02976	0.14132	0.19163	0.21550	0.86456	1	0.97467
7	-0.09355	0.08597	0.12296	0.14121	0.76361	0.97467	1

Codice script RStudio per O-GARCH

```
setwd("C:/Users/mauro/Desktop/OGARCH TESI")

my = read.csv("serierates.csv", header = T) #header=T-->la prima riga contiene i nomi
my = my[,complete.cases(t(my))]

csel = c(1,2,3,4,5,6,7) #considero tutte e 7 le fasce

p = ts(my[,csel])    # p è la mia variabile vettore

plot(p)

N= ncol(p)

n = nrow(p)

summary(p)          #summary delle statistiche delle fasce

pairs(p)            # grafico a coppie

library(fGarch)     #carico il pacchetto R per i garch

#scomposizione spettrale

y=p

Sigma = cov(y)

C = cor(y)

SpectralDec = eigen(Sigma, symmetric=TRUE)

V = SpectralDec$vector #Autovettori

V

lambda = SpectralDec$values #Autovalori
```

```
lambda
barplot(lambda)
Lambda = diag(lambda)
```

```
#Fattori
```

```
v1 = V[,1]
f1 = ts(as.matrix(y) %*% v1)
var(f1)
lambda[1]
```

```
v2 = V[,2]
f2 = ts(as.matrix(y) %*% v2)
var(f2)
lambda[2]
```

```
v3 = V[,3]
f3 = ts(as.matrix(y) %*% v3)
var(f3)
lambda[3]
```

```
v4 = V[,4]
f4 = ts(as.matrix(y) %*% v4)
var(f4)
```

```
lambda[4]
```

```
v5 = V[,5]
```

```
f5 = ts(as.matrix(y) %*% v5)
```

```
var(f5)
```

```
lambda[5]
```

```
v6 = V[,6]
```

```
f6 = ts(as.matrix(y) %*% v6)
```

```
var(f6)
```

```
lambda[6]
```

```
v7 = V[,7]
```

```
f7 = ts(as.matrix(y) %*% v7)
```

```
var(f7)
```

```
lambda[7]
```

```
#la correlazione tra i fattori è nulla
```

```
cor(f1,f2)
```

```
cor(f1,f3)
```

```
cor(f1,f4)
```

```
cor(f1,f5)
```

```
cor(f1,f6)
```

```
cor(f1,f7)
```

cor(f2,f3)

cor(f2,f4)

cor(f2,f5)

cor(f2,f6)

cor(f2,f7)

cor(f3,f4)

cor(f3,f5)

cor(f3,f6)

cor(f3,f7)

cor(f4,f5)

cor(f4,f6)

cor(f4,f7)

cor(f5,f6)

cor(f5,f7)

cor(f6,f7)

importanza dei fattori

lambda[1]/sum(lambda)

lambda[2]/sum(lambda)

```
lambda[3]/sum(lambda)
lambda[4]/sum(lambda)
lambda[5]/sum(lambda)
lambda[6]/sum(lambda)
lambda[7]/sum(lambda)
sum(lambda[1:6])/sum(lambda)
```

```
f = ts(as.matrix(y) %*% V)
cov(f)
plot(ts(f))
```

```
# fit di un garch(1,1) ai fattori
ht.f = matrix(0, n, N)
for (i in 1:N)
{
  fit = garchFit(~ garch(1,1), data = f[, i], trace = FALSE);
  summary(fit);
  ht = volatility(fit, type = "h");
  ht.f[, i] = ht;
}
```

```
#RICOMPOSIZIONE SPETTRALE
```

```
ht.f = ts(ht.f)
```

```
plot(ht.f)
```

```
vechH_matrix = matrix(0, N * (N+1)/2, n) #riporto la matrice H in un vettore colonna, usando  
l'operatore vech
```

```
for (t in 1:n)
```

```
{
```

```
  H_t = V %*% diag(ht.f[t,]) %*% t(V);
```

```
  vechH_matrix[,t] = vech(H_t);
```

```
}
```

```
vechH_matrix_t = ts(t(vechH_matrix))
```

Un ringraziamento speciale alla mia famiglia per avermi sempre supportato, ai miei amici, compagni di mille battaglie, ai professori D. Curcio e I. Gianfrancesco per avermi insegnato e seguito durante la stesura di questo elaborato.