Dipartimento di Economia e Management *Cattedra di* Matematica Finanziaria

L'evoluzione delle tecniche di Bootstrap.

Le curve vs Euribor dopo la crisi di Lehman Brother.

RELATORE

Prof.ssa Gabriella Foschini

CANDIDATO

Valeria D'angelo

Matr. 172151

ANNO ACCADEMICO

2013-2014

Sommario

Introduzione

Dalla necessità di valutare in modo univoco tutti gli strumenti finanziari deriva il bisogno di conoscere la curva dei rendimenti (*yield curve*).

La realtà effettiva dei mercati finanziari pone diversi problemi alla rilevazione empirica della struttura per scadenza dei tassi d'interesse (*term structure*), generati soprattutto da incompletezze e imperfezioni del mercato stesso. Nella costruzione di modelli teorici, accade che si includano parametri difficili da osservare o che le ipotesi caratteristiche del modello non vengano confermate dal mercato. L'ostacolo più significativo è da considerarsi la mancata disponibilità di titoli senza cedola per ogni *maturity*. Ci si pone dunque il problema di stimare la *yield curve* partendo da un quadro di informazioni incompleto. Nel tempo si è cercato di affrontare "questo problema di stima con vari gradi di approssimazione e con diversi livelli di raffinatezza metodologica"[1], in questo elaborato si analizzerà il metodo **Bootstrap** [2], metodo ricorsivo largamente utilizzato nelle applicazioni pratiche.

---

[1] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F. Manuale di finanza, vol.1, Tassi d'interesse, mutui e obbligazioni. Il Mulino (2005).

[2] "In inglese il bootstrap è la linguetta cucita sulla parte posteriore degli stivali che aiuta a calzarli; il termine allude a una figura di danza tradizionale dei cow boys che consiste nel *sollevarsi tirandosi su dai propri stivali*, l'immagine è entrata nel linguaggio comune nel senso di *riuscire a fare una cosa con i propri mezzi*. […] Con un'estensione un po' impropria, il termine viene ormai usato anche per indicare procedure basate su metodi di tipo ricorsivo, come quello qui considerato." (Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F. Manuale di finanza, vol.1, Tassi d'interesse, mutui e obbligazioni. Il Mulino (2005), p.294).

L’analisi si aprirà con l’esempio più semplice relativo all’applicazione del metodo ai tassi d’interesse dei titoli di Stato. Nel secondo capitolo si analizzerà, invece, il caso più complesso degli *Interest Swap Rate*. La trattazione si concluderà con l’esposizione delle conseguenze che ha avuto la crisi finanziaria del 2007 nella sua evoluzione, con la conseguente costruzione di due diverse curve, la curva di *discounting* e quella di *forwarding*.

Capitolo 1

IL BOOTSTRAPPING

1. La struttura per scadenza dei tassi d'interesse

Di particolare interesse economico è la determinazione di una struttura per scadenza dei tassi di interesse che consiste nella successione dei tassi a pronti $i(0,t)$ con t=[1, n].

Essa è definita come la relazione tra il rendimento a scadenza di uno *zero coupon bond* e la *maturity* dell'obbligazione.

Si consideri il tempo *0*, il prezzo di uno strumento che paga un'unità di valuta al tempo *t* è indicato con *v(0,t)* e *r(0,t)* è il fattore di capitalizzazione, l'importo di rimborso guadagnato al tempo *t* da un investimento di una unità di valuta al tempo *0*.

Se si decide di stabilire il valore attuale dei derivati è senz'altro necessario far riferimento al regime di capitalizzazione continuo.

Sia $\delta(t)$ il *risk free rate* composto nel continuo e calcolato per la *maturity t*, allora

$$\mathrm{v}(0,\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\delta(\mathrm{t})\mathrm{t}} \qquad (1\text{-}1.1)$$

e

$$\mathrm{r}(0,\mathrm{t}) = e^{\delta(t)t}. \qquad (1\text{-}1.2)$$

In questa analisi introduttiva si preferisce, per semplicità, adottare la capitalizzazione composta, in quanto la trattazione si focalizza sulla valutazione di strumenti meno complessi quali sono i Titoli di Stato.

Supponendo di conoscere i prezzi a pronti di titoli privi di cedole per ciascuna scadenza, è possibile ricavare i tassi di interesse effettivi su base annua come:

i(0,t)= $\sqrt[t]{\frac{VN}{P}} - 1$. (1-1.3)

Per cui

$$v(0,t) = (1 + i)^{-t} \quad (1\text{-}1.4)$$

e

$$r(0,t) = (1 + i)^{t}. \quad (1\text{-}1.5)$$

Nell'*esempio 1-1.1* si tratterà proprio il caso della determinazione del rendimento dei Certificati del Tesoro Zero coupon (CTZ).

Esempio 1-1.1

Dato uno CTZ con *maturity* pari a 2 anni e un prezzo pari a €96,00:

TIR= $\sqrt{\frac{VN}{P}} - 1$ = 2,062%.

Dove VN rappresenta il valore nominale del titolo e P il prezzo dello stesso.

Il rendimento rappresenta anche il tasso spot per cui:

i(0,2) = 2,062%.

In questo modo sarebbe semplice calcolare i tassi a pronti per ogni *maturity* e determinare, così, la struttura per scadenza.

2. Le funzioni del bootstrap

Per la costruzione della *yield curve*, utilizzando il metodo illustrato nel precedente paragrafo, si assume che queste obbligazioni siano scambiate su un mercato il cui livello di liquidità garantisce l'esistenza di uno *zero coupon bond* per ogni scadenza t .

Nella realtà operativa non sono garantiti tali livelli di liquidità, il mercato dei titoli obbligazionari mette a disposizione degli operatori diverse due diverse tipologie di titoli.

- Gli ***zero coupon bond*** (ZCB), che non prevedono la corresponsione di cedole periodiche. Il tasso interno di rendimento (TIR) degli ZCB è determinato, dunque, dalla differenza tra prezzo di emissione e il valore nominale e rappresenta effettivamente il tasso a pronti[3].
- I ***coupon bond*** (CB), che sono caratterizzati dalla la presenza di un rendimento fisso garantito attraverso il pagamento di una *cedola* a scadenze periodiche prefissate. Il tasso di rendimento di un titolo con cedole è invece il tasso che uguaglia il valore attuale del titolo alla sua quotazione di mercato.

Solo questi ultimi non sono disponibili per scadenze medio-lunghe.

Purtroppo, però, i tassi interni di rendimento degli ZCB non possono essere confrontati con quelli dei titoli con cedola poiché disomogenei, il TIR dei CB ipotizza, infatti, il reinvestimento delle cedole periodiche sempre al TIR, mentre i tassi relativi agli ZCB non si basano ovviamente su tale ipotesi.

[3] Come descritto dall'equazione (1-1.3).

Sarà perciò necessario stimare gli *zero rates* relativi, da titoli con cedola utilizzando il **metodo del Bootstrap**.

Il **Bootstrap** è appunto quel metodo che permette l'estrazione sequenziale dei tassi spot dai prezzi dei *coupon bond* partendo dai *par yield* noti, in modo tale da garantire la determinazione degli *zero rate* per ogni *maturity t*.

Nel prossimo paragrafo si illustrerà come è possibile utilizzare tale metodo per la costruzione di una curva dei rendimenti dei Titoli di Stato.

3. Il metodo del bootstrap

Per estrarre i *par yield* dai *coupon* bond è necessario definire gli elementi tipici di un *coupon bond*, la cedola c e il numero di periodi unitari fino alla scadenza n. Il prezzo P che si forma sul mercato si determina nel seguente modo:

$$P=\frac{c}{1+i(0,1)}+\frac{c}{[1+i(0,2)]^2}+\cdots+\frac{c+VN}{[1+i(0,n)]^n} \qquad (1\text{-}3.1)$$

ovvero

$$P-\frac{c}{1+i(0,1)}-\frac{c}{[1+i(0,2)]^2}-\cdots=\frac{c+VN}{[1+i(0,n)]^n}\,. \qquad (1\text{-}3.2)$$

In questa forma la parte sinistra dell'uguaglianza rappresenta il prezzo ipotetico di uno ZCB con maturity *n* e valore di rimborso pari a *c* + VN.

Dunque sottraendo le cedole intermedie, attualizzate in base alla struttura dei tassi a pronti disponibile nel mercato, al prezzo del *coupon bond* è possibile ricavare, dal titolo con cedola, il prezzo di un titolo privo di cedola equivalente ad esso.

In generale la (1-3.2) può essere riscritta come:

$$P-\sum_{t=1}^{n-1}\frac{c}{[1+i(0,t)]^t}=\frac{c+VN}{[1+i(0,n)]^n} \qquad (1\text{-}3.3)$$

per cui è possibile determinare il tasso a pronti *i*(0,*n*) come:

$$\mathrm{i}(0,\mathrm{n})=\sqrt[n]{\frac{c+VN}{P-\sum_{t=1}^{n-1}\frac{c}{[1+i(0,t)]^t}}}-1\,. \qquad (1\text{-}3.4)$$

In questo modo si ricavano i tassi a pronti ignoti $i(0,n)$, se sono noti i tassi a pronti $i(0,t)$ con t=[1, n-1].

Si cerca ora di illustrare il metodo del bootstrap, formalmente teorizzato con la notazione generale, attraverso il caso descritto nell'*esempio 1-3.1*.

Esempio 1-3.1

Per illustrare il metodo bootstrap, si consideri un CB con maturity di 3 anni, cedole annue di *c* = €5,00, un prezzo P = €93,00 e un tasso interno di rendimento TIR=7,70%.

Data i seguenti tassi a pronti:

i(0,1)= 2,041%

i(0,2)= 2,062%

Il prezzo di un ipotetico ZCB coerente con le caratteristiche del CB può essere calcolato, data la (1-3.3), come:

$$€93{,}00 - \frac{€5}{[1+0{,}02041]} - \frac{€5}{[1+0{,}02062\,]^2} = \frac{€105}{[1+i(0{,}3)]^3}$$

$$€82{,}79 = \frac{€105}{[1+i(0{,}3)]^3}$$

Il tasso a pronti relativo $i(0,3)$ che si ottiene dalla (1-1.3) è

$$i(0{,}3) = \sqrt[3]{\frac{€105}{€82{,}79}} - 1 = 8{,}24\%.$$

Se si ipotizza che il titolo venga emesso alla pari, per cui P=VN, e se l'ammontare della cedola è definito come il prodotto tra il valore nominale (VN) e il tasso cedolare *j* (*c*=*j**VN), allora possiamo riscrivere la (1-3.1) come:

$$\mathrm{VN} = \frac{\mathrm{j^*VN}}{1+i(0,1)} + \frac{\mathrm{j^*VN}}{[1+i(0,2)]^2} + \cdots + \frac{\mathrm{j^*VN}}{[1+i(0,n)]^n} + \frac{\mathrm{VN}}{[1+i(0,n)]^n} \qquad (1\text{-}3.5)$$

Se per semplicità si ipotizza, inoltre, che la curva dei rendimenti sia piatta, dunque i(0,n)=i*

Allora

$$\mathrm{VN} = \frac{\mathrm{j^*VN}}{1+i^*} + \frac{\mathrm{j^*VN}}{[1+i^*]^2} + \cdots + \frac{\mathrm{j^*VN}}{[1+i^*]^n} + \frac{\mathrm{VN}}{[1+i^*]^n} \qquad (1\text{-}3.6)$$

e dividendo entrambi i membri della (1-3.6) per VN si ottiene:

$$1 = \frac{\mathrm{j}}{1+i^*} + \frac{\mathrm{j}}{[1+i^*]^2} + \cdots + \frac{\mathrm{j}}{[1+i^*]^n} + \frac{1}{[1+i^*]^n} \ .$$

La (1-3.6) si può riscrivere come:

$$1 = j \ \frac{1\text{-}(1+i^*)^{-n}}{i^*} + (1+i^*)^{-n}.$$

Tale uguaglianza può essere soddisfatta solo se il tasso cedolare coincide con il tasso di attualizzazione, *j* = i*.

Nel caso specifico del titolo con cedola emesso alla pari, il tasso cedolare rappresenta anche il tasso interno di rendimento dei *cash flow* del titolo considerato.

Nella realtà, però, il TIR dipende dalla durata del titolo con cedola per cui sul mercato si osserveranno diversi tassi i^{TIR}(0,t) con t=[1,n].

È opportuno riscrivere la relazione nel seguente modo:

$$\text{VN} = \frac{\text{VN} * i^{TIR}(0,n)}{1+i(0,1)} + \frac{\text{VN} * i^{TIR}(0,n)}{[1+i(0,2)]^2} + \cdots + \frac{\text{VN} * i^{TIR}(0,n)}{[1+i(0,n)]^n} + \frac{\text{VN}}{[1+i(0,n)]^n} \qquad (1\text{-}3.7)$$

Dividendo entrambi i membri della (1-3.7) per VN si ottiene:

$$1 = \frac{1 * i^{TIR}(0,n)}{1+i(0,1)} + \frac{1 * i^{TIR}(0,n)}{[1+i(0,2)]^2} + \cdots + \frac{1 * i^{TIR}(0,n)}{[1+i(0,n)]^n} + \frac{1}{[1+i(0,n)]^n} \,.$$

L'**equazione di Bootstrap** necessaria per ricavare il tasso a pronti i(0,n), quando sono noti il tasso cedolare i^{TIR}(0,n) e i tassi a pronti i(0,t) con t=[1, n-1] si può riscrivere come:

$$i(0,n) = \sqrt[n]{\frac{i^{TIR}(0,n) + 1}{1 - i^{TIR}(0,n)\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{[1+i(0,t)]^t}}} - 1 \;. \qquad (1\text{-}3.8)$$

In questa prima analisi si considerano in particolare i tassi dei Titoli di Stato, tassi a cui gli Stati si finanziano nella loro valuta locale. Solitamente si assume che sia nulla la probabilità che uno Stato risulti insolvente nella sua stessa valuta, perciò questi tassi sono considerati privi di rischio (*risk free*).

Se si analizza il mercato dei Titoli di Stato italiani esistono due soli titoli *zero coupon*, con una scadenza massima di 24 mesi:

- **Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)**, titoli a breve termine con scadenza a 3, 6, 12 mesi o qualsiasi altra durata compresa entro l'anno.
- **Certificati del Tesoro Zero coupon (CTZ)**, titoli con durata pari a 24 mesi.

Mentre i Titoli di Stato a tasso fisso che prevedono la corresponsione delle cedole sono caratterizzati da scadenze medio-lunghe:

- **Buoni del Tesoro Poliennali (BTP)**, titoli con scadenze a 3, 5, 10, 15 o 30 anni, che pagano cedole semestrali a tasso fisso costante.

Nell'*esempio 1-3.1* è possibile osservare come si riesce a ricavare la struttura dei tassi d'interesse, utilizzando i titoli disponibili sul mercato e grazie all'applicazione del **metodo del Bootstrap**.

Esempio 1-3.1

Si considerino i prezzi dei seguenti titoli sul mercato:

- BOT di durata 12 mesi: P=€99,50
- CTZ di durata 24 mesi: P= €98,90
- BTP di durata 3 anni j(1)= 2,30%: P=€100,00

Con i seguenti dati disponibili sul mercato possiamo ricavare la struttura dei tassi d'interesse.

In primo luogo si ricavano i tassi spot dai Titoli di Stato *zero coupon*.

t(anni)	BOT(12 mesi)	CTZ(24 mesi)
0	-€ 99,50	-€ 98,90
1	€ 100,00	
2		€ 100,00
3		
TIR	0,503%	0,555%

Tabella 1-1

Grazie a questi dati possiamo ricavare il valore attuale unitario, v(0,t), necessario all'applicazione del metodo del bootstrap al titolo *coupon bond*.

t(anni)	v(0,t)
0	
1	0,995
2	0,989

Tabella 1-2

Applicando la (1-3.2), le cedole del BTP vengono attualizzate ai tassi di mercato e sottratte al prezzo iniziale.

Si ottiene così il nuovo prezzo P_b= €96,20

			Bootstrap
t(anni)	**BTP(3 anni)**	**v(0,t)**	**Btp**
0	-€ 100,76		-€ 96,20
1	€ 2,30	0,995	
2	€ 2,30	0,989	
3	€ 102,30		€ 102,30
TIR	2,036%		2,072%

Tabella 1-3

Come è possibile osservare, il Tasso Interno di Rendimento del BTP originale risulta diverso rispetto a quello ottenuto applicando il **metodo del Bootstrap**.

Solo il Tasso di Rendimento ottenuto con il metodo del bootstrap (TIR= 2,072%) è omogeneo ai tassi ottenuti dal BOT e dal CTZ, perché è stato anch'esso ricavato da uno *zero coupon bond*.

Si può quindi procedere alla determinazione della **struttura per scadenza dei tassi di interesse** utilizzando i tassi di rendimento dei titoli privi di cedola.

t(anni)	i(0,t)
0	
1	0,503%
2	0,555%
3	2,072%

Tabella 1-4

La **Figura 1-1** riporta la rappresentazione grafica di una *zero yield curve* ottenuta in base al metodo del **bootstrap**.

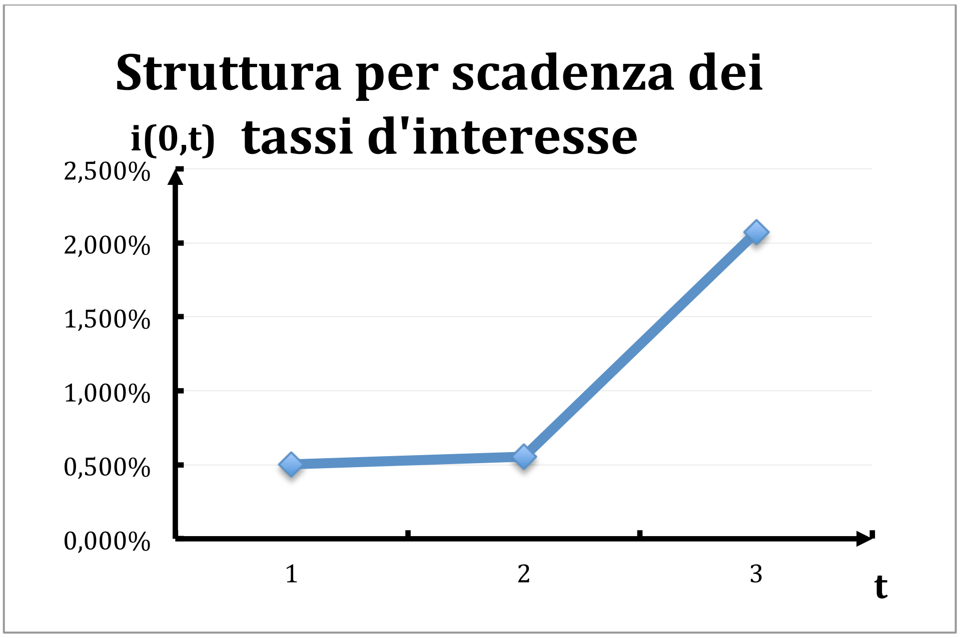

Figura 1-1

Capitolo 2

LA SWAP ZERO RATES CURVE

Nel precedente capitolo sono stati presi in analisi i tassi dei Titoli di Stato per la determinazione della *zero rates curve*.

Nella realtà operativa però i *derivatives traders* non utilizzano i tassi dei Titoli di Stato come *benchmarks* per i *risk-free rates*.

Negli anni passati, le migliori *proxy* del tasso privo di rischio sembravano quindi essere il Libor[4] o l'Euribor[5], nel caso dei tassi in Euro; questi rappresentano il costo opportunità a breve termine del capitale per le banche con rischio di insolvenza nullo o quanto meno molto basso.

Per estendere gli Euribor *zero rates* oltre i 12 mesi i *traders* utilizzavano le quotazioni dei tassi *swap* e dei *futures* su tasso o dei FRAs.

In realtà i tassi Libor e Euribor non sono completamente privi di rischio di credito, c'è sempre la possibilità che la banca debitrice fallisca. Tale rischio si è concretizzato nel 2008 con il fallimento della banca d'affari americana **Lehman Brothers**.

Durante la crisi dunque è cresciuta la diffidenza nei confronti del prestito interbancario, causa questa dell'aumento dei tassi Libor/Euribor.

---

[4] London Interbank Offer Rate

[5] EURo Inter Bank Offered Rate, tasso interbancario di riferimento risultante dalla media ponderata dei tassi d'interesse ai quali le banche operanti nell'UE cedono i depositi in prestito

Si è perciò preferito utilizzare i tassi degli *overnight indexed swap* (OIS) come *proxy* dei tassi *risk-free*.

In questo elaborato l'analisi sarà rivolta all'utilizzo dei tassi *swap* per la costruzione della *zero rates curve*[6] utilizzando il **metodo del Bootstrap**.

[6] Non si prenderà in considerazione la parte breve della curva, ma solo le scadenze superiori ai 12 mesi.

1. Gli swap

Uno *swap* è un contratto stipulato tra due controparti per lo scambio di flussi finanziari. Le quantità scambiate possono essere della stessa valuta (***Interest Rate Swap***) o denominate in valute differenti (***currency swap***).

Considerato l'obbiettivo dell'elaborato ci si concentrerà in particolare sulla descrizione degli *swap* su tassi d'interesse (IRS).

1.1 Gli Interest Rate Swap

Il più comune tipo di *swap* su tassi d'interesse è il *plain vanilla*, in questo tipo di contratto la controparte A pagherà, per un dato numero di anni, alla controparte B un importo (P_{fix}) a un tasso fisso predeterminato calcolato su un "capitale nozionale" (*notional capital*) [7]. Invece la controparte B pagherà alla controparte A un importo a tasso variabile. Negli IRS denominati in euro, il tasso variabile solitamente utilizzato è il l'Euribor a 6 mesi.

A ogni scadenza le controparti dovrebbero versare i seguenti importi[8]:

$$P_{fix} = Ci_{fix} \tag{2-1.1}$$

$$P_{fl} = Ci_t \tag{2-1.2}$$

---

[7] Il capitale è definito nozionale perché non viene scambiato dalle controparti. Nello *swap* il capitale è lo stesso sia per la componente fissa che per quella variabile dunque un eventuale scambio non ne muterebbe la natura.

[8] Nella realtà gli swap sono strutturati in modo tale che solo una delle due parti paghi all'altra la differenza tra i due importi.

dove

C è il capitale nozionale

i_{fix} è il tasso fisso

i_t è il tasso variabile relativo alla data scadenza t.

Graficamente possiamo rappresentare i flussi di un *plain vanilla* con la figura 2.

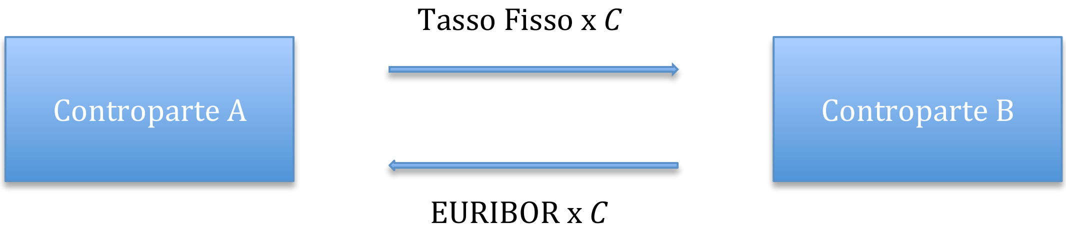

Figura 2-1

Il principale utilizzo degli *swap* è il controllo del rischio da tasso d'interesse. Gli *swap* possono efficacemente essere usati per trasformare le passività, rendendo un finanziamento a tasso variabile in uno a tasso fisso o viceversa. Sono anche utilizzati per trasformare un'attività che offre un tasso d'interesse fisso in una che offre un tasso variabile e viceversa.

Nella realtà le società non-finanziarie non entrano direttamente in contatto tra loro, le controparti trattano con un **intermediario finanziario**.

Gli *swap* più comuni sono strutturati in modo che la banca guadagni circa 3-4 punti base per ogni coppia di *swap* di segno opposto, il guadagno deriva dalla differenza tra le quotazioni denaro (*bid rate*[9]) e le quotazioni lettera (*ask rate*[10]). Il *bid-ask spread* compensa in parte la banca per il rischio d'insolvenza a cui si espone in questo tipo di contratti, infatti, l'intermediario finanziario deve comunque onorare il suo debito con una delle controparti anche se l'altra fallisce. L'intermediario sottoscrive i due contratti separatamente e spesso entra in uno *swap* senza averne uno di segno opposto con un'altra controparte, agisce quindi da *market maker*.

Nella **Figura 2-2** sono rappresentati i flussi di uno *swap* in presenza di un intermediario finanziario.

Figura 2-2

1.2 Gli Overnight Indexed Swaps

Una particolare tipologia di *Interest Rate Swap* sono gli *Overnight Indexed Swaps* (OISs), *swap* in cui si scambia il tasso fisso con la media geometrica dei tassi *overnight* calcolata in un certo periodo di tempo.

---

[9] Tasso fisso che un *market maker* è disposto a pagare in cambio del Libor/Euribor.

[10] Tasso fisso che un *market maker* vuole ricevere in cambio del Libor/Euribor.

Gli OISs consentono alle banche di trasformare finanziamenti o impieghi al tasso *overnight* in finanziamenti o impieghi a tasso fisso[11]. Il tasso fisso degli OISs è detto *overnight indexed swaps rate*. Se una banca A si finanzia al tasso *overnight* per concedere un prestito al tasso Libor alla banca B e entra in un OISs per trasformare le raccolta *overnight* in raccolta a tasso fisso, allora l'*overnight indexed swaps rate* dovrà essere minore del Libor perché la banca che concede il prestito chiede un compenso per il rischio di credito.

La differenza tra Libor e *overnight indexed swaps* è nota come Libor-OISs *spread* e viene utilizzata come misura delle condizioni di stress sui mercati finanziari. Con la crisi finanziaria del 2007 il Libor-OISs *spread* è passato da 10 punti base a 364, perciò oggi l'*overnight indexed swaps rate* viene sempre più utilizzato come *proxy* del tasso d'interesse privo di rischio.

[11] Il tasso d'interesse effettivo pagato/incassato da una banca che si indebita/da in prestito al tasso *overnight* e rinnova il prestito ogni giorno è pari alla media geometrica dei tassi *overnight*.

2. La valutazione degli swap su tassi d'interesse

Il **tasso *swap*** (*swap rate*) quotato sul mercato è il tasso fisso che l'intermediario è disposto a pagare/ricevere in cambio del tasso variabile.

Se il mercato evidenzia un "differenziale denaro-lettera" allora lo *swap rate* risulterà essere la media tra il *bid rate* e *ask rate*.

Dal punto di vista teorico, il tasso *swap* è determinato come quel tasso in base a cui il valore attuale degli importi dovuti da chi paga il tasso fisso (VA_{fix}) uguaglia quello degli importi di chi paga il tasso variabile (VA_{fl}).

Al momento della negoziazione deve valere:

$$VA_{fix} = VA_{fl} \qquad (2\text{-}2.1)$$

Riscrivendo la (2-1.1) come

$$C i_{sw} \sum_{j=1}^{n} v_j = C \sum_{j=1}^{n} i_j v_j \qquad (2\text{-}2.2)$$

dove

C è il capitale nozionale,

i_j con j =[1, n] è il tasso *forward* corrente al momento della quotazione,

v_j con j =[1, n] è il fattore di attualizzazione[12] determinato in base alla struttura dei tassi.

[12] Si tenga in considerazione che verrà utilizzato il regime di capitalizzazione continua, considerata prassi per gli operatori del mercato che generalmente utilizzano questo regime per la valutazione dei derivati.

Al momento della negoziazione il contatto è equo per definizione di tasso *swap*, mentre il valore dello *swap* al tempo generico t dipenderà da come e quanto il tasso di mercato si scosterà da quello previsto in t_0.

Il valore teorico di un contratto *swap* si calcola come la differenza tra il valore attuale degli importi dovuti da chi paga il tasso fisso e quello degli importi di chi paga il tasso variabile.

$VA_{sw} = VA_{fix} - VA_{fl}$ (2-2.3)

Nell'*esempio 2-2.1* si analizzano i flussi generati da uno *swap* e il suo valore attuale.

Esempio 2-2.1

Si consideri uno *swap*[13] in cui la controparte A si impegna a pagare alla controparte B il Euribor a 12 mesi e a ricevere in cambio un tasso fisso dell'4% annuo su un capitale nozionale di € 100. Gli *zero rates* a 1 e 2 anni osservabili sul mercato sono pari al 4,5% e al 5%. Il tasso Euribor a 12 mesi osservato è del 4,82%[14].

In base all'equazione (2-1.1) è possibile calcolare i pagamenti a tasso fisso che saranno appunto:

P_{fix} = € 100 x 0,04= € 4.

[13] Solitamente lo scambio di pagamenti di uno *swap* avviene ogni 6 mesi, in questo esempio per semplicità si ipotizza che lo scambio avvenga ogni 12 mesi.

[14] Il dato si riferisce al tasso Euribor rilevato lo 08/08/2014 e riportato dal sito Global-Rates.com.

Per quanto riguarda il calcolo del tasso variabile relativo al primo anno si applica la (2-1.2) utilizzando il tasso Euribor a 12 mesi rilevato alla data della sottoscrizione dello *swap*, per cui:

P^1_{fl}= € 100 x 0,0482 = € 4,82.

Per conoscere il pagamento a tasso variabile relativo alla seconda scadenza si deve calcolare il tasso *forward* per il periodo compreso tra 1 e 2 anni .

In generale se R_1 e R_2 sono i tassi *spot* relativi a T_1e T_2 anni, allora il tasso *forward*, R_F, per il periodo compreso tra T_1 e T_2 è dato da

$$R_F = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1} . \qquad (2\text{-}2.4)$$

Per la (2-2.4), il tasso *forward* per il periodo compreso tra 1 e 2 anni sarà:

R_F= 0,05x2 + 0,045 = 0,055

P^2_{fl}= € 100 x 0,055 = € 5,50

		Pagamenti		
t(anni)	**v(t)**	**a tasso fisso**	**a tasso variabile**	**Saldo**
0				
1	0,955997482	€ 4,00	€ 4,82	-€ 0,82
2	0,904837418	€ 4,00	€ 5,50	-€ 1,50
	Valore Attuale	€ 7,44	€ 9,58	-€ 2,14

Tabella 2-1

Dato che i fattori di attualizzazione[15], $v_{(t)}$, sono pari a e^{-RT}, il valore corrente dello *swap* calcolato in base alla (2-2.3) sarà pari a -€ 2,14.

Per definire il modo in cui gli interessi maturano nel tempo, se si conosce l'interesse relativo a un dato periodo di riferimento e si vuole calcolare l'interesse riferito a un periodo diverso, si utilizzano le **regole di calcolo dei giorni[16]**. Queste regole vantano una notevole importanza poiché influenzano i pagamenti degli *swap*, soprattutto se rendono non confrontabili direttamente le due gambe, fissa e variabile[17].

Nell'*esempio 2-2.2* si calcola il valore di un pagamento variabile di uno *swap*.

Esempio 2-2.2

Si consideri uno *swap* il cui capitale nozionale è €100, il primo pagamento variabile, relativo a un periodo che va dal 1° marzo al 1° settembre, si basa su un tasso Euribor a 6 mesi del 4,82%.

---

[15] Si ipotizza il regime di capitalizzazione continua.

[16] Le regole del calcolo dei giorni possono essere espresse come: X/Y, dove X definisce il metodo con cui si calcola il numero dei giorni relativo all'intervallo tra le due date e Y definisce il metodo con cui si calcola il numero complessivo di giorni nel periodo di riferimento.

[17] I pagamenti fissi degli *swap* sono calcolati in base a una particolare regola del calcolo dei giorni, il tasso fisso può essere quotato con la regola effettivi/365 o 30/360, perciò non è direttamente confrontabile con il tasso variabile. Per renderli confrontabili si deve moltiplicare l'Euribor per 365/360 o il tasso fisso per 360/365.

Dato che l'Euribor viene quotato in base alla convenzione effettivi/360, in generale i pagamenti variabili vengono calcolati come[18]:

$$CEn/_{360} \tag{2-2.5}$$

Considerando che tra il 1° marzo e il 1° settembre ci sono 184 giorni, il pagamento variabile deve essere uguale a:

$$€100 \times 0{,}0482 \times \frac{184}{360} = €2{,}46.$$

[18] Si consideri che C è il capitale nozionale, E è l'Euribor e n è il numero dei giorno trascorsi dall'ultimo pagamento.

3. Il bootstrap della curva dei tassi *swap*

È possibile utilizzare gli *swap rates* per calcolare gli *zero rates* attraverso il metodo del bootstrap.

Come è noto, uno *swap* è formato da una *Fixed Leg*, flusso di pagamenti a tasso fisso, e una *Float Leg*, flusso di pagamenti a tasso variabile.

Se imponiamo che i pagamenti a tasso fisso vengono calcolati come il prodotto tra il capitale nozionale e l'Euribor e lo stesso tasso Euribor viene utilizzato come tasso di attualizzazione, allora si otterrà che il valore attuale della *Float Leg* sarà uguale al capitale nozionale (**Appendice**),

$$VA_{fl} = C \qquad (2\text{-}3.1)$$

Se per la (2-2.1) il valore attuale della *Fixed Leg* è uguale alla *Float Leg*, allora anche il valore attuale dei pagamenti a tasso fisso sarà uguale al capitale nozionale,

$$VA_{fix} = C \qquad (2\text{-}3.2)$$

e sostituendo si avrà che,

$$VA_{fix} = c_{fix} \sum_{j=1}^{n-1} v_j + (c_{fix} + C) v_n \qquad (2\text{-}3.3)$$

dove c_{fix} è il pagamento a tasso fisso, si otterrà che

$$c_{fix} \sum_{j=1}^{n-1} v_j + (c_{fix} + C) v_n = C. \qquad (2\text{-}3.4)$$

Nell'*esempio 2-3.1* si calcolerà lo *swap zero rate* a 18 mesi con il **metodo del Bootstrap**.

Esempio 2-3.1

Si consideri uno *swap* (con pagamenti semestrali) in cui la controparte A si impegna a pagare alla controparte B il Euribor a 6 mesi e a ricevere in cambio un tasso fisso dell'5% annuo su un capitale nozionale di € 100.
Il tasso *swap* a 18 mesi è del 5%, per cui il pagamento a tasso fisso sarà pari a € 2,5. Gli *zero rates* a 6 e 12 mesi osservabili sul mercato sono pari al 4,5% e al 4,8%. Per la (2-3.4),

$$€2{,}5e^{-0{,}045\times 0{,}5} + €2{,}5e^{-0{,}048\times 1} + €102{,}5e^{-R_3\times 1{,}5} = €100$$

per cui applicando il metodo del bootstrap, lo *swap zero rate* a 18 mesi sarà pari a

$$R_3 = \frac{\ln(€102{,}5/€100-€4{,}38)}{1{,}5} = 4{,}95\%.$$

In generale per calcolare lo *zero rate* al tempo *n*, dove R_n è un tasso d'interesse composto continuamente[19], e se per semplicità si ipotizzano i pagamenti un volta all'anno, data la (2-3.4) si avrà che:

$$R_n = \ln\left[\frac{(\,c_{fix}+C)}{C-\,c_{fix}\sum_{j=1}^{n-1} v_j}\right]/t \qquad (2\text{-}3.5)$$

È necessario evidenziare che il **Bootstrap** è una procedura iterativa, non è dunque possibile trovare lo *zero rate* relativo alla *maturity* n

[19] Perciò il fattore di attualizzazione verrà calcolato come $v_j = e^{-R_j}$.

se non sono stati calcolati prima i tassi relativi ai precedenti punti della curva.

Nell'*esempio 2-3.2* si considera il caso in cui i pagamenti variabili sono calcolati basandosi sul tasso *Eonia*[20].

Esempio 2-3.2

Si considerino i seguenti tassi *swap*[21] disponibili sul mercato per le diverse *maturity* comprese tra 1 e 10 anni.

Maturity	**Input rate**
1	-0,0500%
2	-0,0395%
3	0,0063%
4	0,0780%
5	0,1830%
6	0,3120%
7	0,4550%
8	0,6020%
9	0,7420%
10	0,8690%

Tabella 2-2

Si procede dunque al calcolo delle cedole fisse annue per ogni *swap*, considerando che il tasso d'interesse utilizzato è quello riportato nella **tabella 2-2**.

[20] Euro OverNight Index Average è il tasso d'interesse medio di riferimento nelle operazioni a brevissima scadenza svolte sul mercato interbancario europeo.
[21] I dati si riferiscono ai tassi rilevati sul mercato in data 23 settembre 2014.

Per cui i valori dei diversi pagamenti a tasso fisso saranno quelli riportati nella **tabella 2-3**.

c_{fix}
-€ 0,05
-€ 0,04
€ 0,01
€ 0,08
€ 0,18
€ 0,31
€ 0,46
€ 0,60
€ 0,74
€ 0,87

Tabella 2-3

È interessante notare che le cedole relative agli *swap* a 1 e 2 anni sono negative, questo dato apparentemente incoerente è dovuto alle politiche monetarie della BCE[22] in risposta alla crisi di liquidità del sistema: nel breve periodo i tassi tendono a essere talmente prossimi allo zero tanto da risultare negativi.

Il tasso di sconto applicabile allo *swap* a 1 anno, tale da rispettare l'ipotesi (2-3.4), è semplicemente calcolato come un tasso *zero rate*[23].

Attraverso l'**equazione di Bootstrap** (2-3.5), procedendo con il metodo iterativo si può derivare l'intera curva dei tassi Eonia da 1 a 10 anni, il cui grafico è riportato nella **figura 2-3.**

[22] Banca Centrale Europea.

[23] Si ricorda per semplicità si considerano *swap* che prevedono lo scambio dei pagamenti fisso/variabile una volta l'anno.

Maturity	Eonia Rate
1 Y	-0,0500%
2 Y	-0,0395%
3 Y	0,0063%
4 Y	0,0781%
5 Y	0,1834%
6 Y	0,3134%
7 Y	0,4583%
8 Y	0,6084%
9 Y	0,7525%
10 Y	0,8845%

Tabella 2-3

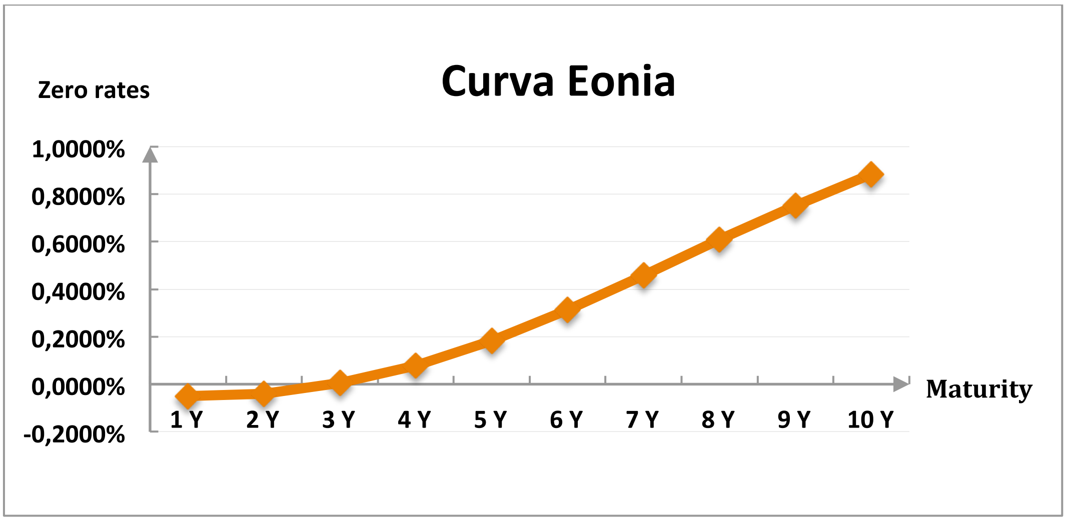

Figura 2-3

Appendice

Per dimostrare la (2-3.1) si deve partire dalla determinazione dell'ammontare di una qualsiasi cedola a tasso variabile, c_j:

$$c_j = Ci(j-1, j) \quad \text{(2-A.1)}$$

con j =[1, n].

Il valore di c_j è calcolato sulla base dell'interesse periodale $i(j-1, j)$, fissato sul mercato all'inizio del j-esimo periodo di competenza.

Se si ipotizza il rimborso a scadenza, l'ultima cedola, c_n, sarà così calcolata:

$$c_n = C + Ci(n-1, n) = C[1 + i(n-1, n)]\ . \quad \text{(2-A.2)}$$

Si deve sempre tenere in considerazione che il valore delle cedole, relative ai periodi compresi tra 2 e n, sono aleatori perché l'Euribor con cui verranno calcolati i pagamenti sarà noto solamente all'inizio di ogni periodo.

L'unico ammontare della cedola sicuramente noto in t_0 è quello della prima cedola, che viene fissata in linea con il tasso corrente di mercato.

$$c_1 = Ci(0,1). \quad \text{(2-A.3)}$$

Per calcolare il valore attuale della *Float Leg* si devono tenere in considerazione sia le componenti deterministiche che gli importi aleatori, ottenendo:

$$VA_{fl} = c_1 v(0,1) + \sum_{j=2}^{n-1} c_j v(0, j) + c_n v(0, n). \quad \text{(2-A.4)}$$

Tenendo in considerazione che nella sommatoria i fattori di sconto con scadenza maggiore di 1 e minore di n si eliminano, si può riscrivere la (2-A.4) come:

VA$_{fl}$= $Ci(0,1)v(0,1) + C[v(0,1) - v(0,n)] + Cv(0,n)$. (2-A.5)

Se imponiamo, per ipotesi l'assenza di possibilità di arbitraggio[24], si ottiene che:

$Ci(0,1)v(0,1) = C[1 - v(0,1)]$. (2-A.6)

Possiamo quindi riscrivere la (2-3.1.5) come:

VA$_{fl}$= $C - Cv(0,1) + Cv(0,1) - Cv(0,n) + Cv(0,n)$. (2-A.7)

Riducendo la (2-A.7) attraverso le ovvie semplificazioni, si arriva a dimostrare che il valore gamba variabile al tempo 0 deve essere uguale al capitale investito, (2-3.1).

[24] Per cui $i(0,1) = \frac{1}{v(0,1)} - 1$

Capitolo 3

MODELLO A CURVE MULTIPLE

1. L’evoluzione del mercato

La crisi finanziaria scoppiata nel 2007 ha causato una profonda evoluzione della struttura classica adottata nella negoziazione dei derivati. In particolar modo, la problematica legata al credito e alla liquidità ha provocato un impatto senza precedenti nella valutazione degli strumenti finanziari, siano essi *plain vanilla* o *esotici*. Gli effetti dell’instabilità del mercato persistono tuttora, che si consideri terminata o meno la crisi finanziaria.

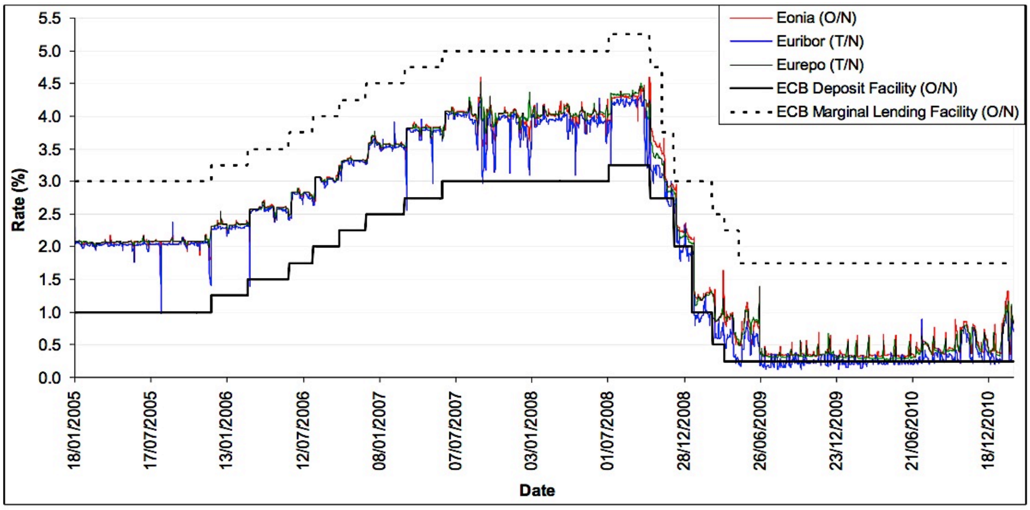

Figura 3.1[25]

---

[25] EUR interest rate corridor, quotation Jan 2005-2010 (European Central Bank press releases e Bloomberg).

Come è possibile notare dalla **Figura 3.1**, sin dall'Agosto 2007 i principali tassi d'interesse relativi al mercato interbancario, come *Libor*, *Euribor*, *Eonia* e *Federal Founds Rate*[26], hanno registrato degli *spread* tali da raggiungere anche i 200 *basis points*.

Nel caso particolare dello *spread* tra Euribor Deposit e Eonia OIS, dopo un aumento dei tassi Euribor e una simultanea diminuzione dei tassi Eonia, si è raggiunto il picco massimo di 220 bps nell'ottobre del 2008 con il fallimento della banca d'investimento americana Lehman Brother. (**Figura 3.2**)

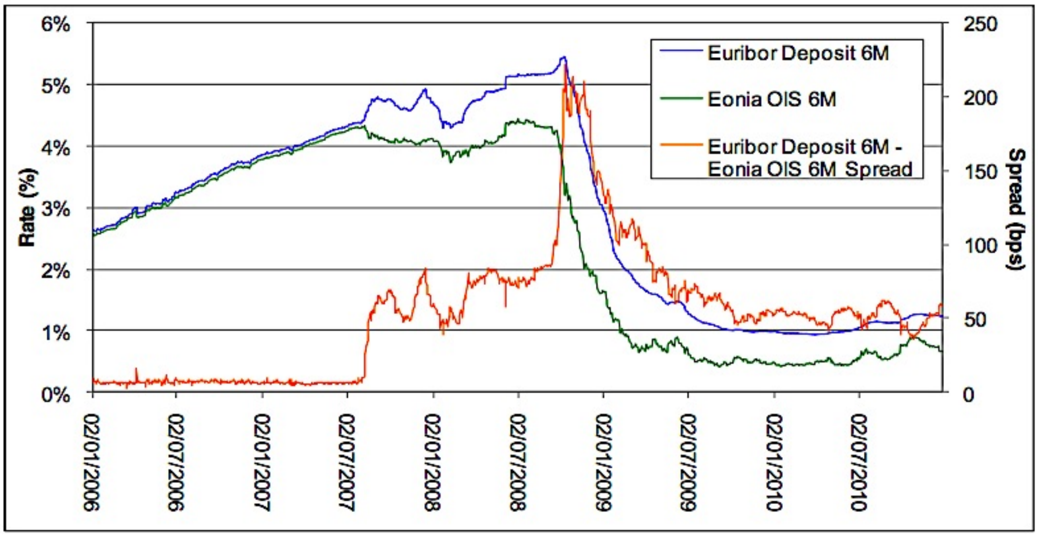

Figura 3.2[27]

[26] È il tasso principale del mercato degli USD ed è determinato dalla *Federal Open Market Committee* (FOMC) in maniera conforme alle politiche monetare della *Federal Reserve* (FED).

[27] Serie storica (Gennaio 2006-Dicembre2010) di Euribor Deposit 6M rate e Eonia OIS rate. (Bloomberg)

L’esplosione dello *spread*, iniziata nell’Agosto 2007, è dovuta essenzialmente al diverso rischio di credito e di liquidità implicito nei due tassi. È soprattutto il *daily tenor* dei tassi Eonia OIS che rende il rischio trascurabile, lo stesso non vale per i tassi Euribor Deposit.

Si possono rilevare simili fluttuazioni tra i FRA *rates* e i *forward rates* e allo stesso modo tra i tassi *Swap* con diversi *Floting Leg tenure*. L’aumento dello *spread* tra tassi *swap* mostrata nella **figura 3.3** può essere interpretata in termini di differente rischio di credito e liquidità causato dai sottostanti tassi Euribor relativi ai diversi *tenor*.

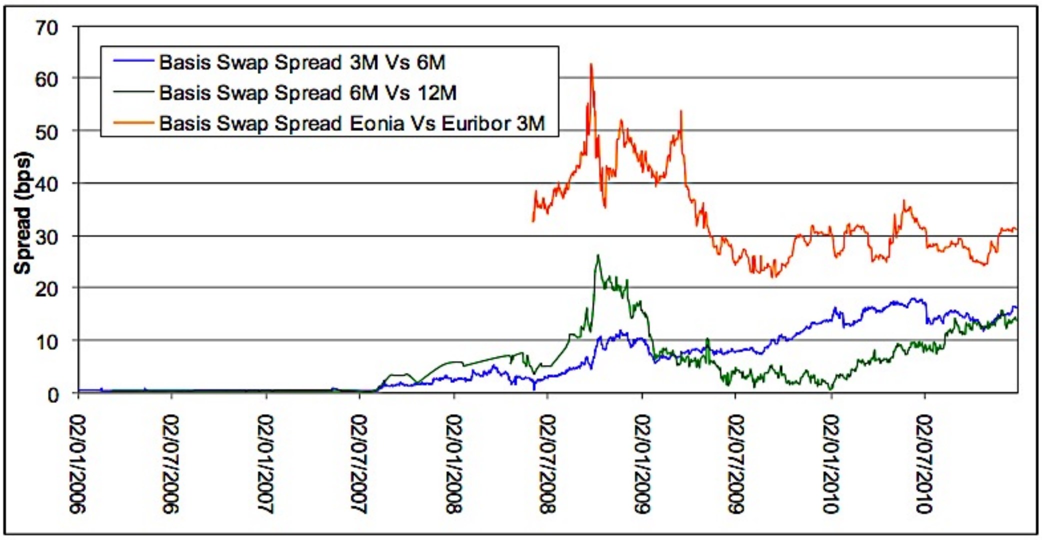

Figura 3.3[28]

Un ulteriore effetto del *credit crunch* è l’ampia diffusione dei ***collateral agreement*** [29] , sottoscritti dalle controparti nelle

[28] Basis Swap spread (Gennaio 2006-Dicembre 2010). Si noti che le quotazioni giornaliere per alcune tipologie di Basis Swap non erano disponibili prima della crisi.

negoziazioni sul mercato interbancario per ridurre il rischio di controparte.

1.1 La collateralizzazione

Una qualsiasi transazione finanziaria che prevede un flusso futuro di *cash flows* causa l'esposizione delle due controparti a rischio di credito, ciò deve essere assolutamente tenuto in considerazione nel calcolo dei *present value* dello strumento finanziario. Questo tipo di esposizione può essere mitigata attraverso la stipulazione, contestuale alla transazione, di una garanzia definita *collateral agreement* o *Credit Support Asset* (CSA). Queste tipologie di contratti vengono regolamentati e pubblicati dall'ISDA[30].

La caratteristica principale dei CSA è il *margination mechanism* simile a quello utilizzato dalle *clearing house* per il trattamento degli strumenti standard come i *future*. Prendendo in considerazione il caso degli *swap*, le controparti a ogni scadenza, fissata contrattualmente, verificano il valore della loro posizione e regolano i margini, aggiornandoli in base alle variazioni dei tassi Euribor/Libor/Eonia rispetto alla precedente scadenza. Nel caso in cui il derivato sia garantito proprio da un contratto CSA, lo scambio dei margini è regolato attraverso il trasferimento di garanzie in contanti o in titoli di rating molto elevato, concordati dalle parti

[29] Questo argomento sarà ampiamente approfondito nel paragrafo successivo.

[30] International Swap and Derivatives Association, organizzazione che si occupa della standardizzazione dei contratti per le transazioni in derivati.

preventivamente. L'ammontare viene versato al creditore ma è il debitore a ricevere un interesse, solitamente definito in base al parametro giornaliero Eonia, sul valore depositato. La funzione di garanzia svolta dal *collateral* sta proprio nel fatto che l'importo diventa disponibile al creditore nel momento in cui è accertato lo stato di *default* del debitore, il primo dunque può disporre del denaro e/o vendere i titoli come risarcimento. Infatti, in caso di fallimento della controparte, il *collateral*, insieme agli interessi già percepiti durante la vita dello *swap*, dovrebbe coprirne il valore finale.

Oltre alla riduzione del rischio di controparte, gli ulteriori benefici apportati da questa forma di garanzia sono la migliore liquidità del mercato e l'ottimizzazione della gestione del credito. Ampio sviluppo dell'istituto del *colateral*, soprattutto nell'area euro, è anche dovuto al recepimento da parte dell'UE della disciplina di Basilea II[31]che fa dell'attenuazione del rischio di credito uno dei suoi fondamentali principi[32].

La **figura 3.4** mostrata l'evoluzione del mercato, dal 2000 al 2010, degli strumenti assicurati contro il rischio di *default* della controparte, i cosiddetti *Secured*.

---

[31] "*International Convergence of Capital Measurament and Capital Standard*"(giugno 2006)

[32] In base ai principi di Basilea II il peso del rischio di credito su *swap* collateralizzati è significativamente inferiore rispetto a quello definito per quelli non garantiti.

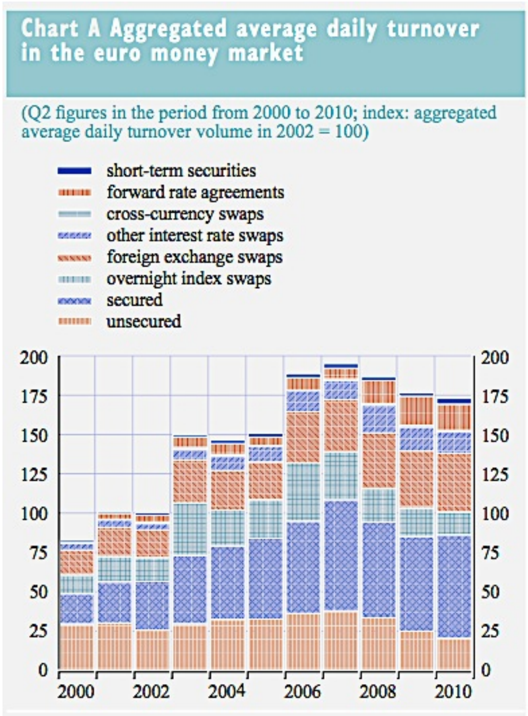

Figura 3.4[33]

Gli strumenti *Unsecured* hanno visto il loro mercato ridursi per ogni livello di *maturity*, sebbene i più colpiti sono stati quelli a lunga scadenza. Al contrario il mercato degli strumenti assicurati è continuato a crescere, questo a dimostrare che il fenomeno della collateralizzazione si sta espandendo.

Recentemente è quindi emersa la problematica relativa agli effetti dei *collateral*. La prima conseguenza della diffusione dei *collateral agreement* ricade sul prezzo dei derivati quotati. Le teorie standard basate su ipotesi di non arbitraggio risultano ormai obsolete, per cui la definizione data, nel precedente capitolo, di IRS e la relativa *swap pricing formula* devono essere abbandonate.

[33] *Financial Stability Review*, European Central Bank, (Dicembre 2010). Nota: lo studio si basa su 85 istituti di credito nel 2000-2001 e su 105 negli anni successivi.

Un seconda importante conseguenza è che, in condizioni di non arbitraggio, il tasso applicato ai CSA dovrebbe essere uguale al *discounting rate* usato per attualizzare i futuri *cash flows*.

In precedenza era valida l'assunzione per cui ogni *cash flow* dello *swap* poteva essere finanziato e reinvestito al tasso Euribor e ciò faceva di questo tasso un appropriato *discounting rate*.

Se non si tiene conto della presenza dei derivati e si utilizza la *term structure* tradizionale per la determinazione del valore attuale dei futuri flussi di cassa, ne derivano importanti conseguenze.

Dal momento che lo *swap* è collateralizzato, ci sono due diverse forme di flussi di cassa:

- i pagamenti che derivano dal contratto, fissi e variabili;
- i pagamenti collegati al *collateral*, che si effettuano o si ricevono come assicurazione dei *cash flow*.

Poiché lo *swap* guadagnerà il tasso Eonia invece del tasso Euribor, scontarne i flussi di cassa a quest'ultimo potrebbe causare diversi problemi.

Non è più possibile basarsi sulla teoria della costruzione di un'unica curva dei tassi d'interesse *risk free*, che riflette allo stesso tempo il valore attuale di un futuro *cash flow* e il livello dei tassi *forward*. Perciò la comunità finanziaria è stata spinta a teorizzare una nuova struttura, che tenga in considerazione un ampio spettro di fattori di rischio rilevanti: il **modello a curve multiple**.

2. La costruzione delle *multiple yield curves*

Il nuovo *framework* è basato sull'approccio multicurva che prevede l'utilizzo di due curve distinte:

- ***Discounting curve***: la *yield curve* utilizza per scontare i futuri *cash flow*. La curva deve essere costruita in modo tale da riflettere il costo di finanziamento collegato al contratto che genera i flussi di cassa.
- ***Forwarding curve***: la *yield curve* utilizza per calcolare i *forward rate*. La curva deve essere costruita considerando la *tenor* e il tipo di tasso sottostante al contratto da valutare.

È necessario chiarire che per la determinazione delle curve possono essere utilizzate diverse tecniche di interpolazione e di Bootstrap e, poiché la prassi dei principali operatori di mercato non è uniforme nella costruzione delle curve, nei paragrafi successivi si spiegheranno le assunzioni effettuate nell'analisi.

2.1 La curva di *discounting*

Analizzando derivati garantiti da un contratto CSA, si costruirà una curva di discounting basata sui tassi di *swap* che hanno come sottostante il parametro Eonia[34].

Si prosegue alla determinazione della **Curva Eonia** definendo come dati di input i tassi di deposito e gli OIS *rate*, per il breve periodo, e gli *swap rate*[35] per scadenze superiori ai 12 mesi.

---

[34] Si ricorda che l'Eonia è il tasso a cui sono remunerati i margini a titolo di garanzia.

Ulteriori assunzioni devono essere fatte per la definizione della procedura di bootstrapping utilizzata.

Si utilizza il **metodo del Bootstrap** *linear par swap*, partendo dagli *zero rate* noti si procede alla determinazione dei tassi necessari alla costruzione della curva attraverso un processo iterativo basato sull'equazione (2-3.5) ricavata nel precedente capitolo e qui riportata:

$$R_n = \ln\left[\frac{(\,c_{fix}+C)}{C - c_{fix}\sum_{j=1}^{n-1} v_j}\right].$$

Si prevede inoltre il metodo dell'**interpolazione** lineare[36] per tutte le scadenze intermedie[37], non disponibili sul mercato ma necessarie per la costruzione della curva.

Un prototipo di curva Eonia è già stato fornito nel precedente capitolo nell'*esempio 2-3.2*.

2.2 La curva di *forwarding*

Le curve di *forwarding* solitamente sono costruite in base al parametro di mercato a cui risultano indicizzati i derivati considerati. Essendo l'analisi concentrata sugli IRS che hanno pagamenti semestrali, si considerano i tassi Euribor a 6 Mesi.

---

[35] Si ricorda che in questo elaborato non si analizza la parte breve della curva dunque per questo tipo di dati si utilizzeranno *discounting rate* calcolati da appositi *software* di *pricing* disponibili sul mercato.

[36] Ogni coppia di punti adiacenti è unita da un segmento, che può essere calcolato in maniera indipendente dagli altri.

[37] Non esistono tassi *swap* di mercato per tutte le date di pagamento delle cedole.

Per la costruzione della **Curva vs Euribor 6 M** si effettuano diverse scelte metodologiche, si può scegliere l'interpolazione log-lineare invece della più semplice interpolazione lineare utilizzata per la curva Eonia.

Per quanto riguarda il metodo di bootstrap utilizzato, si fa riferimento al *Bootstrap esogeno*, che prevede l'applicazione del *discounting* OIS anche nella fase di *bootstrapping*. Questo metodo è preferibile proprio perché ormai i derivati, da cui sono dedotti i tassi *swap* (che costituiscono l'input del processo di *Bootstrap*), sono assistiti dai *collateral* e quindi sottintendono la curva OIS come curva dei tassi per il calcolo del *present value*.

2.2.1 Metodo con discounting esogeno

Un metodo alternativo, che si sta sempre più diffondendo sui mercati, per calcolare una curva di tassi *swap zero coupon* è, appunto, quello che prevede un discounting esogeno ed è basato su un approccio matriciale.

Si considera una curva di sconto D utilizzata per attualizzare i flussi di interessi dei derivati, solitamente questa curva viene derivata dai tassi OIS. La presenza di un fattore di sconto esogeno non garantisce la (2-3.1), il valore della gamba fissa dell'IRS al tasso di mercato non sarebbe più uguale a 100. La curva D permette di avere, però, a disposizione il fattore di sconto v_j per ogni *maturuty* t_j.

In questo caso l'obbiettivo è, dunque, ricavare i fattori di sconto v_j' relativi alla curva di sconto D', derivata da una curva dei tassi *swap* che costituiscono l'input del *Bootstrap*.

Per calcolare la curva D' si applica la seguente metodologia.

Si consideri S, una serie di *swap prices* con i relativi *cash flow* periodici e sia i_j lo *swap rate* relativo a uno *swap* con *maturuty* t_j, per cui il pagamento della gamba fissa sarà uguale a c_j[38]. Il prezzo relativo alla *Fixed Leg*, tenendo conto che è scontata al tasso esogeno OIS, si ottiene nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} c_1 + C & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 + C & 0 & 0 \\ c_3 & c_3 & c_3 + C & 0 \\ c_4 & c_4 & c_4 & c_4 + C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}2.1)$$

Una caratteristica dello *swap* è che il valore attuale della gamba fissa deve essere uguale al valore attuale della gamba variabile al momento della negoziazione.[39] Per cui:

$$\begin{bmatrix} Cv_1 & 0 & 0 & 0 \\ Cv_1 & Cv_2 & 0 & 0 \\ Cv_1 & Cv_2 & Cv_3 & 0 \\ Cv_1 & Cv_2 & Cv_3 & Cv_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' - Cv_1 \\ P_2' - Cv_2 \\ P_3' - Cv_3 \\ P_4' - Cv_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}2.2)$$

[38] Dove $c_j = i_j * C$ e C è il capitale nominale dello *swap*, si consideri uguale a 100.

[39] Vedi (2-2.1).

con a_j[40] che rappresenta il tasso *forward* necessario per calcolare i *cash flow* della *Float Leg*.

Così il valore attuale dei flussi variabili sarà uguale al valore attuale della gamba fissa, a cui viene sottratto il valore attuale del capitale nominale relativo a quellaspecifica *maturity*.

Se si risolve la (3-2.2) per a_j, sarà poi possibile calcolare i fattori di sconto v_j' dalla seguente equazione:

$$v_j' = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j+1} \qquad (3\text{-}2.3)$$

Nell'*esempio 3-2.1* si cercherà di chiarire l'utilizzo di tale metodo basato sull'utilizzo dei *discounting rate* esogeni.

Esempio 3-2.1

Siano disponibili sul mercato i seguenti dati relativi ai tassi OIS e ai tassi *swap* per le *maturity* da 1 a 5 anni.

Maturity	**OIS Rate**	v_j	**Swap Rate**
0			
1	0,60%	0,9940	0,75%
2	0,75%	0,9851	0,90%
3	1,00%	0,9704	1,15%
4	1,35%	0,9474	1,50%
5	1,55%	0,9254	1,75%

Tabella 3.1

[40] La relazione che lega il fattore di sconto con il fattore di accumulazione è la seguente: $a = {}^{1}/_{v} - 1$.

Si provvede al calcolo dei prezzi P_j' degli swap attualizzando i *cash flow* con il fattore di sconto derivato dalla curva dei tassi OIS, sia applica dunque la (3-2.1):

Fixed Leg						$\boldsymbol{v_j}$		$\boldsymbol{P_j'}$
€ 100,75	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,9940		€ 100,15
€ 0,90	€ 100,90	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,9851		€ 100,28
€ 1,15	€ 1,15	€ 101,15	€ 0,00	€ 0,00	x	0,9704	=	€ 100,39
€ 1,50	€ 1,50	€ 1,50	€ 101,50	€ 0,00		0,9474		€ 100,43
€ 1,75	€ 1,75	€ 1,75	€ 1,75	€ 101,75		0,9254		€ 100,64

Tabella 3.2

Se per definizione il valore attuale della *fixed leg* deve essere uguale al valore attuale della *float leg*, si procede applicando la (3-2.2) per il calcolo dell'incognita a_j.

Float Leg						$\boldsymbol{a_j}$		$\boldsymbol{P_j'}$**-100**
€ 99,40						a_1		€ 0,75
€ 99,40	€ 98,51					a_2		€ 1,77
€ 99,40	€ 98,51	€ 97,04			x	a_3	=	€ 3,35
€ 99,40	€ 98,51	€ 97,04	€ 94,74			a_4		€ 5,68
€ 99,40	€ 98,51	€ 97,04	€ 94,74	€ 92,54		a_5		€ 8,10

Tabella 3.3

Risolvendo per a_j si otterranno i seguenti risultati:

a_j
0,750%
1,043%
1,623%
2,466%
2,607%

Tabella 3.4

Questi valori rappresentano proprio i tassi *forward* necessari per la costruzione della curva riportata nella **figura 3.5**

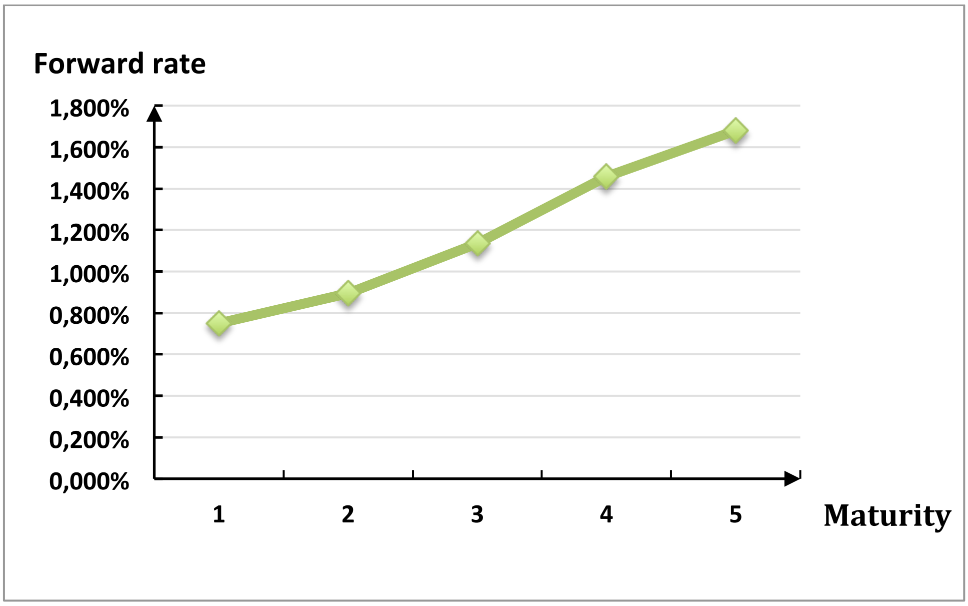

Figura 3.5

Tenendo in considerazione la formula (3-2.3), da a_j, è possibile ricavare v_j', in questo modo si è in grado di costruire la curva di sconto D' riportata nella **figura 3.6**.

v'_j
0,992556
0,982308
0,966622
0,943357
0,919385

Tabella 3.6

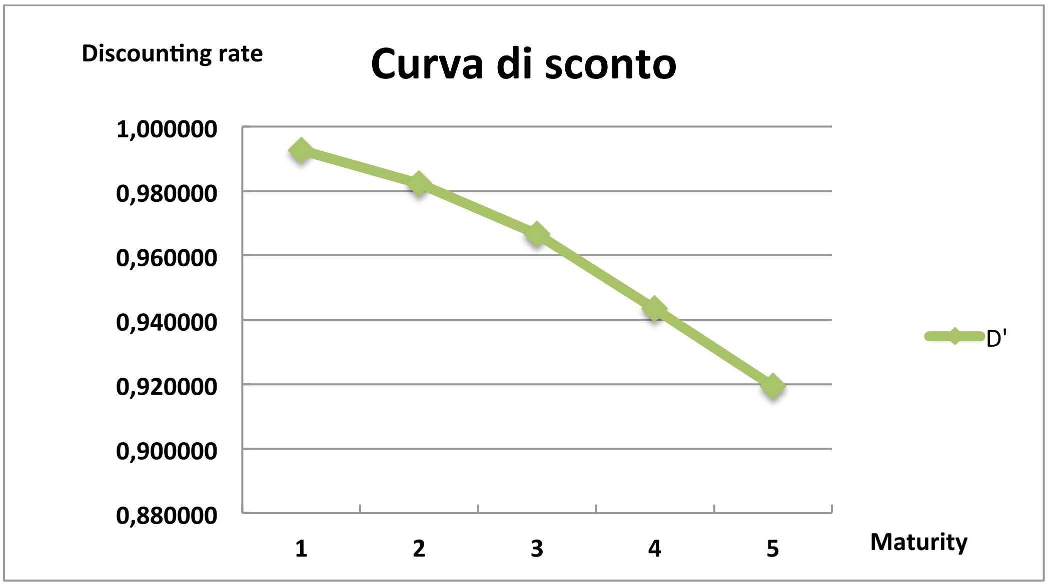

Figura 3.6

Nell'*esempio 3-2.2* si calcola la curva di *forwarding,* utilizzando i tassi di mercato al 23/09/2014, con il metodo del *discounting* esogeno.

Esempio 3-2.2

Si parte dai risultati dai risultati ottenuti nell'*esempio 2-3.2* e si considerano gli *swap rate* disponibili sul mercato.

Maturity	Eonia Rate	v_j	Swap Rate
0			
1	-0,0500%	1,00050	0,18%
2	-0,0395%	1,00079	0,22%
3	0,0063%	0,99981	0,28%
4	0,0780%	0,99688	0,37%
5	0,1830%	0,99089	0,49%
6	0,3120%	0,98145	0,63%
7	0,4550%	0,96865	0,78%
8	0,6020%	0,95298	0,92%
9	0,7420%	0,93540	1,06%
10	0,8690%	0,91677	1,19%

Tabella 3.7

Si provvede al calcolo dei prezzi P_j' degli *swap*. Per prima cosa si determinano i *cash flow* della gamba fissa, poi si procede ad attualizzarli utilizzando i fattori di sconto derivato dalla curva dei Eonia *rate*.

Per calcolare i tassi *forward* si considera l'ipotesi di determinazione del tasso *swap* per cui il valore della gamba fissa deve essere uguale al valore della gamba variabile come riportato nella (2-2.1).

I risultati ottenuti dall'elaborazione dei dati sono riportati nella **tabella 3.8** e nella **tabella 3.9**.

Fixed Leg											v_j		P_j
€ 100,18	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		1,00050		€ 100,23
€ 0,22	€ 100,22	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		1,00079		€ 100,52
€ 0,28	€ 0,28	€ 100,28	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,99981		€ 100,82
€ 0,37	€ 0,37	€ 0,37	€ 100,37	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,99688		€ 101,18
€ 0,49	€ 0,49	€ 0,49	€ 0,49	€ 100,49	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,99089		€ 101,54
€ 0,63	€ 0,63	€ 0,63	€ 0,63	€ 0,63	€ 100,63	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	x	0,98145	=	€ 101,90
€ 0,78	€ 0,78	€ 0,78	€ 0,78	€ 0,78	€ 0,78	€ 100,78	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		0,96865		€ 102,25
€ 0,92	€ 0,92	€ 0,92	€ 0,92	€ 0,92	€ 0,92	€ 0,92	€ 100,92	€ 0,00	€ 0,00		0,95298		€ 102,57
€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 1,06	€ 101,06	€ 0,00		0,93540		€ 102,89
€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 1,19	€ 101,19		0,91677		€ 103,22

Tabella 3.8

Float Leg											a_j		Pj-100
€ 100,05	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_1		€ 0,18
€ 100,05	€ 100,08	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_2		€ 0,44
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_3		€ 0,84
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_4		€ 1,49
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_5		€ 2,45
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 98,15	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00	x	a_6	=	€ 3,75
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 98,15	€ 96,87	€ 0,00	€ 0,00	€ 0,00		a_7		€ 5,38
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 98,15	€ 96,87	€ 95,30	€ 0,00	€ 0,00		a_8		€ 7,27
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 98,15	€ 96,87	€ 95,30	€ 93,54	€ 0,00		a_9		€ 9,35
€ 100,05	€ 100,08	€ 99,98	€ 99,69	€ 99,09	€ 98,15	€ 96,87	€ 95,30	€ 93,54	€ 91,68		a_{10}		€ 11,55

Tabella 3.9

Si procede dunque al calcolo del tasso *forward* incognito, a_j , applicando la (3-2.2). I valori ottenuti sono riportati nella tabella **tabella 3.10**; nella **figura 3.7** è appunto rappresentata graficamente la **curva vs Euribor 6M**.

Maturity	a_j
1 Y	0,184%
2 Y	0,254%
3 Y	0,401%
4 Y	0,652%
5 Y	0,965%
6 Y	1,306%
7 Y	1,653%
8 Y	1,943%
9 Y	2,174%
10 Y	2,332%

Tabella 3.10

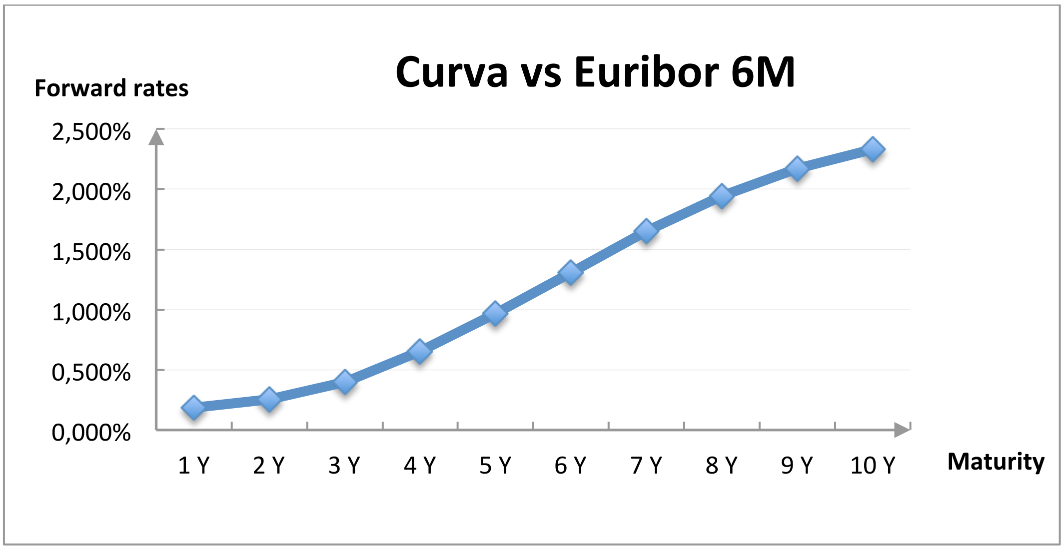

Figura 3.7

Conclusioni

L'analisi dei dati di mercato mi ha permesso di ottenere dei riscontri empirici sull'analisi teorica effettuata in questo elaborato.

Com'è possibile notare dalla figura 3.8, i tassi utilizzati per l'attualizzazione dei flussi di cassa si discostano anche di molto rispetto ai tassi *forward* nelle diverse *maturity* (**figura C.1**). Non è quindi più verificata l'ipotesi fondamentale del **Bootstrap classico**, secondo cui il valore attuale della gamba variabile deve risultare uguale al capitale nozionale, (2-3.1).

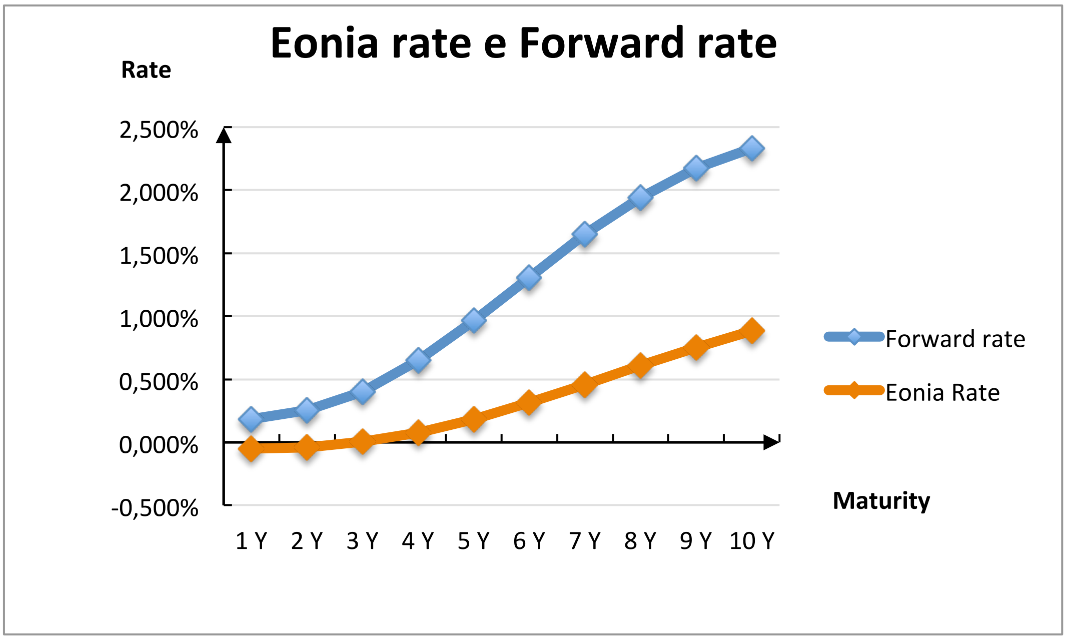

Figura C.1

La prova che l'utilizzo del metodo di **Bootstrap con *discounting* esogeno** sia adatto alle condizioni del mercato attuale è stata ottenuta da un confronto svolto tra i miei risultai e i valori di *output* di un opportuno *software* di *pricing*.

Infatti nel confronto tra i *discounting rate* estratti dai i tassi Eonia, ottenuti con l'utilizzo del metodo del **Bootstrap** nell'*esempio 2-3.2*, e quelli ottenuti dal *software*, le curve coincidono esattamente (**figura C.2**).

Maturity	v_j
1 Y	1,00050
2 Y	1,00079
3 Y	0,99981
4 Y	0,99688
5 Y	0,99089
6 Y	0,98145
7 Y	0,96865
8 Y	0,95298
9 Y	0,93540
10 Y	0,91677

Tabella C.1

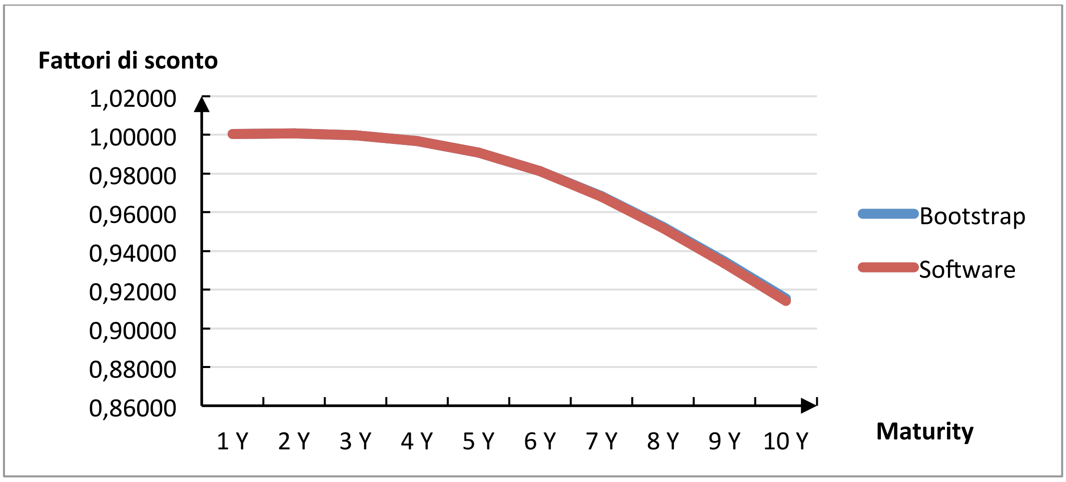

Figura C.2

Lo stesso risultato vale per i fattori di sconto estratti dai i tassi *forward* relativi alla **curva Euribor vs 6M**.

Maturity	v_j
1 Y	0,9982
2 Y	0,9956
3 Y	0,9917
4 Y	0,9852
5 Y	0,9758
6 Y	0,9632
7 Y	0,9476
8 Y	0,9295
9 Y	0,9097
10 Y	0,8890

Tabella C.1

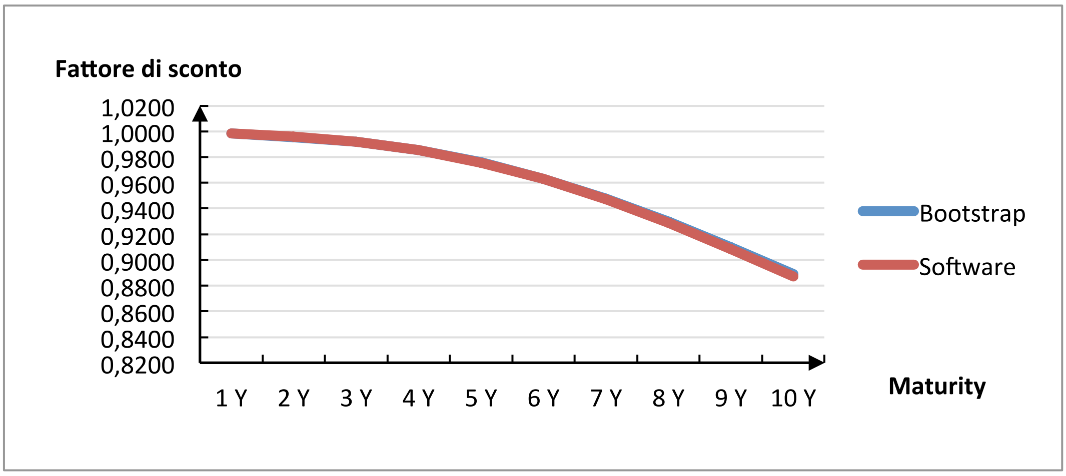

Figura C.2

Bibliografia

Ametrano, F. M., & Bianchetti, M. (2009, Marzo). Bootstrapping the illiquidity. Multiple yiel curve contruction for market coherent forward rate estimation.

Bianchetti, M. (2011). Interest Rate After Credit Crunch, Markets and Models Evolution. *IX RiskLab Meeting on Financial Risks.* Madrid.

Bianchetti, M., & Carlicchi, M. (2011, Marzo 11). Interest Rate fter The Credit Crunch: Multiple-Curve vanilla Derivates and SABR.

Cacciafesta, F. (2001). *Lezioni di matematica finanziaria classica e moderna.* Giuppichelli.

Castellani, G., De Felice, M., & Moriconi, F. (2005). *Manuale di finanza* (Vol. 1). Il Mulino.

Clarke, J. (2010, Ottobre). Bootstrapping A Libor Curve Off an OIS Curve . Edu Risk International.

Hull, J. C. (2012). *Opzioni, Future e altri derivati.* Milano, Torino-Italia: Pearson.

LCH.CLEARNET. (2010, Ottobre 6). SwapClear Zero Coupon Rate Curve Construction Methodology. *Initial Margin and Variation Margin Zero Coupon Rate Curve Assignment*.

Nashikkar, A. (2011, Febbraio 24). Interest Rates Strategy. *Understanding OIS discounting* . Barclays Capital.

Rozzi, A., & Bruno, F. (2009, Gennaio). La collateralizzazione degli strumenti finanziari derivati OTC alla luce del Dlgs. 170/2004: cenni storici e problemi irrisolti. *Rivista di Diritto bancario*.

Principali siti Consultati

Borsa Italiana, http://www.borsaitaliana.it

MEF Dipartimento del Tesoro, http://www.dt.tesoro.it

Global-Rates.com, http://www.global-rates.com

Il Sole 24 Ore, http://www.ilsole24ore.com

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va alla prof.ssa Gabriella Foschini per avermi dato l'opportunità di confrontarmi con un argomento che ha messo alla prova i miei limiti e le mie capacità.

Colgo anche l'occasione per ringraziare la prof.ssa Silvia Buttarazzi per la sua disponibilità e serietà nel guidarmi durante tutto lo sviluppo di questo elaborato.

Non posso senza dubbio mancare nell'esprimere la mia riconoscenza al Pio Sodalizio dei Piceni, perché è anche grazie alla borsa di studio concessami che sono riuscita ad affrontare il mio percorso di studi sempre in maniera rigorosa.

Ringrazio la persona che mi ha cresciuta con la frase "non lasciare mai le cose a metà", perché mi ha accompagnata nei momenti più duri nello studio e non solo.

Ringrazio chi mi ha più sopportato e supportato nei momenti di ansia e di sconforto, che siano stati essi giustificati o meno.

Ringrazio la persona che ha condiviso con me il sogno di studiare in questa città così caotica e al tempo stesso così affascinante, perché è riuscita a non farmi sentire sola anche vivendo dall'altra parte della città.

Non possono mancare i ringraziamenti a tutti quelli che hanno condiviso con me sia i momenti spensierati e allegri che le situazioni più ostili.

In fine uno speciale ringraziamento va alle due persone che sarebbero state le più orgogliose di me in questa occasione, voglio

dedicargli questo traguardo perché sono stati loro che hanno maggiormente influenzato il mio carattere e forse anche le mie scelte negli studi.