

Dipartimento di Impresa e Management
Cattedra di Matematica Finanziaria

**L'immunizzazione
semi-deterministica nella realtà
operativa italiana: il Teorema di
Fisher e Weil**

RELATORE:

Prof.ssa Gabriella Foschini

CANDIDATO:

Alessandro Giordano

Matricola 146051

ANNO ACCADEMICO 2013/14

Indice

Introduzione.....	1
 Capitolo 1. Strumenti, grandezze e indici finanziari.....	3
1.1.Strumenti finanziari: le obbligazioni	3
1.2 Indici di valore: calcolo del prezzo di un titolo obbligazionario	5
1.3 Indici di rendimento: il tasso interno di rendimento e la struttura per scadenza dei tassi di interesse	8
1.4 Un indice temporale: la duration	11
1.5 Un indicatore di rischio: dalla duration alla duration modificata.....	16
1.6 Una migliore approssimazione: la convexity	19
 Capitolo 2. L'immunizzazione finanziaria e il teorema di Fisher e Weil..	23
2.1 La definizione classica di immunizzazione finanziaria.....	24
2.2 Introduzione al teorema di Fisher e Weil.....	26
2.3 Il teorema di Fisher e Weil: dimostrazione	27
2.4 Le importanti implicazioni del teorema di Fisher e Weil	31
 Capitolo 3. Un caso pratico di immunizzazione	36
3.1 Costruzione del portafoglio	36
3.2 Verifiche empiriche sulla tenuta del portafoglio immunizzato	44
 Capitolo 4. Uno studio sugli impatti degli shift	51
4.1 Ipotesi di shift parallelo	51
4.2 Ipotesi di shift non rigido	54
4.3 Ipotesi di shift parallelo che interessa con diversa ampiezza la struttura per scadenza dei tassi OIS e dei BTP	62
 Capitolo 5. Conclusioni.....	66
 Bibliografia	69

Introduzione

Gli sviluppi della finanza durante il XX secolo sono stati incentrati sulla ricerca di un ordine al grande caos generato dai mercati finanziari.

Già nel 1900 lo statista francese Louis Bachelier, nella sua tesi di dottorato dal titolo *“La théorie de la spéculation”*¹, aveva paragonato la variazione dei prezzi dei titoli ad un moto browniano² gettando le basi per un approccio di tipo probabilistico alla valutazione del valore dei titoli e delle opzioni.

Da quel momento ha inizio una storia avvincente, una storia che ha come protagonisti illustri pensatori che oggi non esitiamo a definire geni ma che, al loro tempo, sono stati studenti, professori o semplici impiegati di borsa. Uomini, prima di tutto, che talvolta hanno dovuto pagare, con l'indifferenza da parte dei rappresentanti del mondo economico, il prezzo di intuizioni forse troppo all'avanguardia per l'epoca in cui sono vissuti.

Il loro lavoro di ricerca costituisce la base delle moderne teorie di portafoglio e degli altri sviluppi pionieristici delle discipline finanziarie: da Frederick R. Macaulay, scopritore della duration, a Harry M. Markowitz e i suoi studi sulla diversificazione del portafoglio; e ancora da William F. Sharpe, con i suoi indicatori di performance del portafoglio, fino a Fisher Black, Robert C. Merton e Mayron S. Sholes, noti per i loro studi sul *pricing* delle opzioni ma che, sfortunatamente, finirono per dimostrare come *“Anche i Nobel perdono”*³.

Sulle stesse basi è incentrato il lavoro di Rendington, prima, e di Fisher e Weil, poi, per la definizione delle teorie sull'immunizzazione finanziaria, intese come l'insieme delle tecniche studiate per garantire il mantenimento dell'equilibrio tra le attività e le passività all'interno del portafoglio.

¹ Bachelier L., “Théorie de la spéculation. Théorie mathématique du jeu”. Parigi: Edition Jacques Gabay, 1995.

² L'espressione moto browniano indica il movimento disordinato, del tutto casuale, delle particelle all'interno di soluzioni fluide. Prende il nome dal botanico che per primo osservò il fenomeno nel 1827, lo scozzese Robert Brown.

³ Il riferimento è al titolo del celebre libro di Nicholas Dunbar, *“Anche i Nobel perdono. Idee, persone e fatti della finanza”*, che ripercorre la storia dello sviluppo della teoria sul *pricing* delle opzioni dei premi Nobel R. Merton e M. Sholes e descrive le istanze che portarono al tracollo del fondo speculativo “Long-Term Capital Management” istituito dagli stessi economisti con il supporto di John Meriwether. [Dunbar N., 2003].

Queste teorie si basano sul presupposto che le variazioni intervenute sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse si ripercuotono inevitabilmente sul valore delle poste attive e passive detenute dall'investitore. Egli potrà quindi trovarsi nella condizione di dover fronteggiare una situazione di insolvibilità, nel senso che i flussi di cassa attivi del suo portafoglio non sono in grado di coprire le passività.

Per ovviare a questo problema Fisher e Weil propongono una tecnica di immunizzazione finanziaria basata sul concetto di duration che, oltre ad essere uno strumento attendibile per misurare la durata media finanziaria di un titolo, costituisce anche il mezzo per valutare la sensibilità del valore di uno strumento finanziario al variare dei tassi di interesse.

Analizzeremo il teorema di Fisher e Weil e cercheremo di dimostrare perché nella realtà questo può risultare essere non verificato. Per fare ciò cominciamo, nel primo capitolo, col definire gli strumenti, le grandezze e gli indicatori finanziari che saranno fondamentali per il resto dell'analisi; nel capitolo 2 definiremo l'immunizzazione finanziaria classica nell'accezione proposta, appunto, da Fisher e Weil; nel terzo e nel quarto capitolo, infine, realizzeremo e studieremo un caso di applicazione pratica del teorema dimostrando quali sono le condizioni che possono incidere sulla sua veridicità.

Capitolo 1. Strumenti, grandezze e indici finanziari

Il teorema di Fisher e Weil rientra nella categoria delle teorie dell'immunizzazione finanziaria a carattere semi - deterministico. Se è vero infatti che il semplice concetto di immunizzazione evidenzia di per sé la necessità di far fronte ad una aleatorietà dei risultati attesi, è pur vero che queste teorie assumono, come base, l'esistenza di un mondo deterministico, caratterizzato cioè da condizioni di certezza.

Questa certezza si traduce, nel nostro caso, nella disponibilità di flussi di cassa deterministici, per cui importi ed epoche di esigibilità sono considerati noti, nonché nell'ipotesi di traslazioni di tipo rigido che intervengono sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse.

È indispensabile, allora, prima di affrontare l'affascinante tema dell'immunizzazione finanziaria, soffermarci ad analizzare quelli che sono gli strumenti, gli indicatori e le grandezze finanziarie che utilizzeremo nell'ambito della nostra analisi.

1.1 Strumenti finanziari: le obbligazioni

Le obbligazioni sono titoli, nominativi o al portatore, rappresentativi di un rapporto di debito tra un ente emittente, lo Stato o le imprese, e un creditore, generalmente il pubblico.

Garantiscono, previo il pagamento del prezzo d'acquisto:

- La remunerazione del capitale tramite il riconoscimento, da parte dell'ente emittente, di una serie di flussi di cassa periodici di importo stabilito (cedole);
- Il rimborso, a scadenza, del valore nominale del titolo.

Esistono diversi criteri di classificazione delle obbligazioni che si basano sui loro diversi caratteri distintivi: se ad esempio guardiamo all'ente emittente distinguiamo tra obbligazioni emesse dallo Stato ed obbligazioni emesse dalle imprese o dagli Enti pubblici; se ci concentriamo invece sulla durata, possiamo individuare le obbligazioni a breve termine (con scadenza inferiore ai 12 mesi), a medio termine (con scadenza da 1 a 5 anni) e a lungo termine (con scadenza superiore ai 5 anni); e ancora, focalizzandoci sulle cedole, possiamo distinguere tra obbligazioni *Zero Coupon* e obbligazioni con cedola fissa o indicizzata.

In particolare, nello svolgimento della nostra analisi, supporremo di aver sottoscritto dei Buoni del Tesoro Poliennali (BTP).

I BTP sono titoli del Debito Pubblico a lungo termine con durata di 3, 5, 10, 15 e 30 anni. Offrono una cedola semestrale fissa, stabilita al momento dell'emissione, e vengono collocati sul mercato mediante meccanismo di asta marginale con cadenza quindicinale.

Questi titoli si prestano in maniera molto efficace allo studio delle teorie sull'immunizzazione finanziaria, e in modo particolare delle teorie semi – deterministiche, in quanto ci permettono di comprendere il tratto fondamentale su cui esse poggiano. I titoli di questo tipo sono stati infatti considerati per lungo tempo investimenti poco rischiosi, soprattutto nei periodi caratterizzati da una certa stabilità dei tassi di interesse, per via della certezza loro associata: i flussi di importi, siano essi rappresentati dalle cedole o dal valore nominale di rimborso, sono fissati per contratto, così come lo sono, allo stesso modo, anche le epoche di esigibilità in cui essi si manifestano.

Sulla base di questi presupposti è facile intuire come un operatore che acquisti un titolo con queste caratteristiche e lo detenga in portafoglio fino a scadenza, non supporti, in definitiva, alcun rischio se non quello di fallimento dell'ente emittente (cosiddetto rischio di default).

Tuttavia, con l'accentuarsi del carattere speculativo degli investimenti obbligazionari, si è presto presentato il problema della valutazione delle variazioni nei prezzi dei titoli a seguito delle oscillazioni della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Se, infatti, l'operatore che ha acquistato il titolo

decide di rinegoziarlo prima che esso arrivi a scadenza, egli sarà esposto a una nuova categoria di rischio: il cosiddetto rischio di tasso di interesse.

Come vedremo più avanti, il valore di un portafoglio, e quindi anche quello dei titoli che lo compongono, può essere suddiviso come la somma tra il reddito da reinvestimento, correlato positivamente alla variazione dei tassi, e il valore di realizzo che è invece funzione inversa del tasso di interesse. Agendo in maniera diversa su queste grandezze, la variazione del tasso di interesse si ripercuote inevitabilmente sul prezzo del titolo.

1.2 Indici di valore: calcolo del prezzo di un titolo obbligazionario

I Buoni Poliennali del Tesoro, così come li abbiamo descritti nel paragrafo precedente, sono assimilabili alle operazioni finanziarie di rendita. Una rendita è un particolare tipo di operazione finanziaria composta in cui i flussi di cassa disponibili nelle varie epoche, che in questo caso prendono il nome di rate, sono tutti dello stesso segno e sono preceduti o seguiti da un flusso di cassa di segno opposto.

Il calcolo del prezzo dell'obbligazione, quindi, può essere effettuato utilizzando gli stessi strumenti di cui ci serviamo per il calcolo del valore delle rendite, sotto le ipotesi derivanti dal principio fondamentale della finanza secondo il quale “un euro oggi vale di più di un euro domani”.

Questa affermazione, all'apparenza banale, racchiude in sé una serie di significati che non sono assolutamente da sottovalutare.

Anzitutto possiamo chiederci: “perché l'euro di oggi ha più valore dell'euro di domani?”. La risposta a questo quesito è semplice: perché l'euro oggi può essere investito immediatamente e cominciare a produrre i propri frutti. Inoltre l'euro di oggi è anche più sicuro rispetto all'euro di domani perché non è sottoposto al rischio di aleatorietà dei risultati futuri.

Il principio base della finanza ci permette di spiegare perché nella realtà di tutti i giorni gli indicatori finanziari per eccellenza, come ad esempio i prezzi dei titoli sui mercati finanziari o i ritorni attesi dei progetti di investimento, siano espressi in termini di valore attuale.

Dato un importo x disponibile in epoca s , il suo valore attuale $W(t, x_s)$, calcolato in data t , si ottiene semplicemente moltiplicando x per un fattore di attualizzazione $v(t, s)$ compreso tra 0 e 1:

$$W(t, x_s) = x_s v(t, s) \quad (1)$$

Il fattore di attualizzazione $v(t, s)$, ipotizzando di lavorare con il regime della capitalizzazione composta, è calcolato come il reciproco di 1 più un tasso di interesse, $i(t, s)$, e rappresenta il valore attuale in t di un euro esigibile all'epoca s :

$$v(t, s) = \frac{1}{[1 + i(t, s)]^{(s - t)}}$$

Abbiamo ipotizzato il caso più semplice possibile di un solo importo disponibile in epoca futura ma non sappiamo ancora come calcolare il valore attuale della nostra rendita che, come sappiamo, è composta da più rate aventi date di esigibilità diverse.

Fortunatamente la situazione si complicherà solo parzialmente in quanto possiamo fare appello ad un'importante proprietà del valore attuale: la sua additività.

Poiché, infatti, gli importi futuri sono espressi al loro valore corrente, essi saranno grandezze omogenee e quindi potranno essere sommati tra di loro. Ne consegue che, dati due importi, A e B , disponibili in date future, il valore

attuale del flusso $A + B$ sarà uguale alla somma tra il valore attuale di A e il valore attuale di B .

La formula per il calcolo del valore attuale della rendita può essere quindi enunciata come segue:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{1}{(1+i)^{(t_k - t)}} \quad (2)$$

Dove con x_k sono rappresentati i diversi flussi di cassa x disponibili nelle varie epoche t_k , con $k = \{1, 2, \dots, n\}$ ⁴. Attualizzando le singole rate otteniamo il valore attuale della rendita.

Questa formula è già sufficiente per spiegare come calcolare il prezzo dei titoli facenti parte del portafoglio che andremo a costruire. Per fare maggiore chiarezza, comunque, possiamo ipotizzare di scomporre i flussi derivanti dal nostro titolo individuando così le componenti che incidono sul valore dell'obbligazione:

- Il flusso cedolare, che determina la remunerazione del titolo, può essere assimilato a una rendita di n rate, di importo pari alla cedola, e il suo valore può essere calcolato con la (2);
- Il flusso finale, che rappresenta il rimborso a scadenza del titolo, può invece essere attualizzato separatamente tramite la (1).

Sommando le due parti otteniamo dunque quello che viene comunemente definito prezzo Tel – quel di un titolo obbligazionario che rappresenta il valore a cui un titolo viene negoziato sul mercato. Le quotazioni, invece, onde evitare oscillazioni ingannevoli del prezzo causate dalla prossimità o meno di un titolo alla data di godimento di una cedola, sono espresse in termini di corso secco.

⁴ Per le formule contenute in questo paragrafo si è fatto riferimento al testo di De Felice M. e Moriconi F.: *“La teoria dell’immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie”*. Bologna: il Mulino, 1991.

Il corso secco si ottiene semplicemente detraendo al prezzo *Tel* – quel un rateo, detto anche *dietim*, che rappresenta la parte di cedola maturata tra l'ultima data di godimento e la data di valutazione del titolo. Avremo, dunque:

$$\text{corso secco} = \text{prezzo } Tel \text{ quel} - \text{rateo}$$

1.3 Indici di rendimento: il Tasso Interno di Rendimento e la struttura per scadenza dei tassi di interesse

Un altro elemento caratteristico delle obbligazioni è il rendimento e cioè il tasso che ci consente di misurare l'incremento del capitale investito in un'operazione finanziaria in relazione alla sua durata.

Tra gli strumenti per il calcolo del rendimento di un titolo assume particolare rilevanza il Tasso Interno di Rendimento (TIR), detto anche *Internal Rate of Return* (IRR), che, insieme al valore attuale, costituisce un ottimo indicatore per la valutazione dei progetti di investimento. Esso inoltre è spesso utilizzato sui mercati finanziari come metodo alternativo per l'espressione dei prezzi dei titoli obbligazionari.

Il tasso interno di rendimento è infatti quel tasso che rende vera l'uguaglianza tra il valore attuale di una rendita e la somma dei valori attuali delle singole rate. In altre parole, è quel tasso che fa coincidere il prezzo delle nostre obbligazioni con la somma dei valori attuali dei flussi cedolari e del rimborso alla scadenza.

Consideriamo ancora una volta la formula (1). Se conosciamo il valore attuale $W(t, x)$, l'importo dei flussi di cassa x e le scadenze in cui questi si manifestano, possiamo definire il tasso interno di rendimento come il valore del tasso di interesse che risolve la suddetta equazione nell'incognita i .

Il tasso interno di rendimento è dunque un indicatore della redditività di un titolo che ci consente di analizzare, grazie alla sua sintesi, le variazioni intervenute sui rendimenti dei titoli. Queste variazioni sono indotte da due fattori principali:

- La maturity: intesa come il periodo in cui il sottoscrittore del titolo potrà godere dei flussi di cassa da esso generati;
- Il rischio di default dell'ente emittente, cioè il rischio che esso risulti in qualche modo inadempiente;
- Il tasso "*risk free*" che descrive l'andamento del mercato.

Se ci concentriamo sui titoli emessi dagli Stati, o da altre istituzioni per le quali si può assumere un rischio di default molto basso, se non nullo⁵, siamo in grado di descrivere l'evoluzione dei tassi di interesse che esprimono il loro rendimento in funzione della sola maturity del titolo. Otteniamo, in questo modo, una curva che associa a ogni scadenza un rendimento atteso nel computo del quale è contenuta anche la parte "*risk free*".

Questa curva viene detta struttura per scadenza dei tassi di interesse e può essere crescente, quando i tassi di interesse a lungo termine sono maggiori di quelli a breve termine; decrescente quando sono i tassi di interesse a breve termine ad essere superiori rispetto a quelli a lungo termine; piatta (o *flat*) quando i tassi dei diversi fronti temporali coincidono.

Esistono poi casi in cui la struttura per scadenza dei tassi di interesse si presenta come una serie di tratti con pendenza differente. Alcuni di questi casi verranno analizzati durante lo svolgimento dello studio proposto in seguito.

⁵ In seguito alla crisi che ha interessato l'Euro Zona, e più in generale i mercati globali, è diventato difficile parlare di rischi di default "bassi, se non nulli". Ad oggi le considerazioni riguardanti le strutture per scadenza dei rendimenti, con riferimento particolare ai titoli governativi, seguono più una logica improntata sul concetto di *spread*. Potremmo dire ad esempio che la curva dei rendimenti italiani si trova graficamente al di sopra della curva dei rendimenti tedeschi e ciò è rappresentativo del maggior rischio supportato dagli operatori che detengono titoli rappresentativi del Debito Italiano. Lo scarto esistente tra le diverse curve rappresenta appunto lo spread tra il rendimento dei titoli governativi italiani e tedeschi.

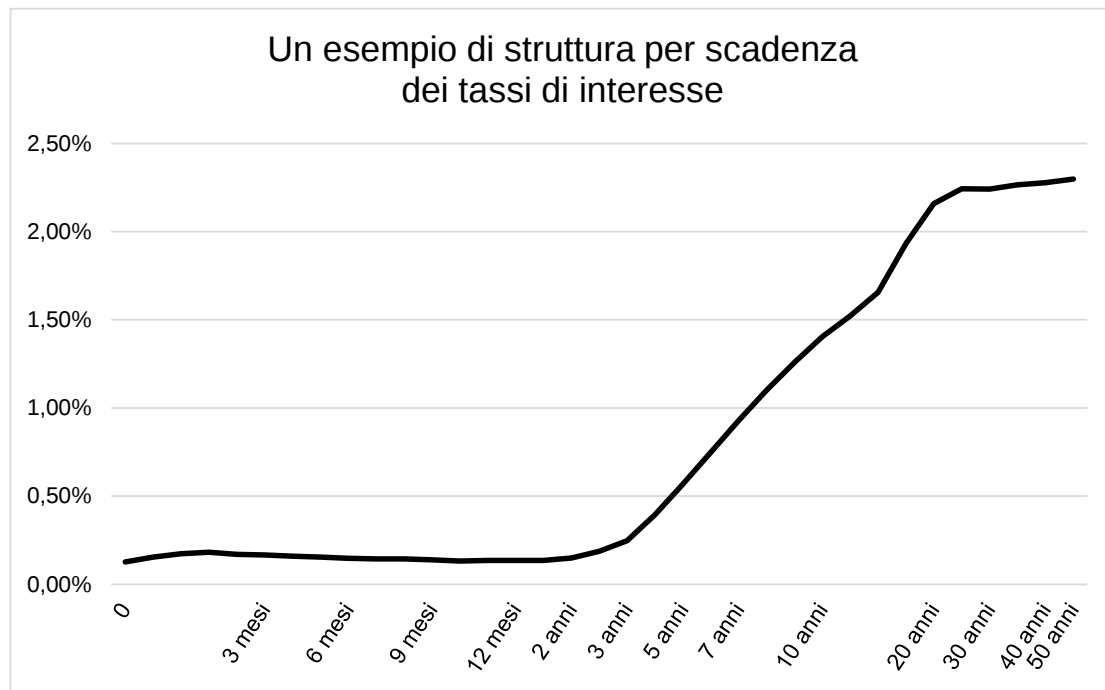


Figura 1.1. La struttura per scadenza dei tassi di interesse ci permette di associare ad ogni scadenza un valore atteso del tasso di interesse. Questo esempio mostra una struttura di tipo crescente poiché il valore dei tassi a lungo termine è superiore rispetto al valore dei tassi di breve periodo⁶.

Per capire come si muove la curva, e quindi avere modo di formulare aspettative razionali riguardo ai rendimenti degli investimenti che poniamo in essere, possiamo servirci di alcune regolarità empiriche che si osservano nella realtà. Analizzando varie strutture per scadenza è infatti emerso che:

- I tassi sui titoli con diverse scadenze tendono prevalentemente a muoversi nella stessa direzione;
- Nel caso in cui i tassi di breve periodo sono bassi è più facile che la curva sia inclinata positivamente, viceversa nel caso opposto;
- La curva dei rendimenti è generalmente inclinata positivamente.

Alcuni di questi punti sembrano essere spiegati dalla cosiddetta “teoria delle aspettative pure” secondo la quale il rendimento di un titolo a lungo termine dovrebbe essere eguagliato dalla media dei rendimenti offerti da titoli a breve termine nello stesso periodo. In altre parole: se consideriamo un arco

⁶ Il grafico è stato ottenuto tramite una nostra elaborazione sfruttando i dati raccolti da Bloomberg.

temporale costituito da 3 epoche (t, s e n, con $t < s < n$), secondo la teoria delle aspettative pure deve necessariamente valere:

$$[1 + i(t, n)]^{n-t} = [1 + i(t, s)]^{s-t} [1 + i(s, n)]^{n-s}$$

Questa teoria ci permette in effetti di spiegare perché i tassi su titoli con scadenze differenti si muovono nella stessa direzione e perché, se i tassi di breve periodo sono bassi, è più facile che la curva sia inclinata positivamente. Ci rimane da spiegare perché la curva dei rendimenti sia generalmente positiva.

La risposta a questo quesito arriva dalla considerazione dell'esistenza di una preferenza per la liquidità da parte degli operatori sul mercato. Se questa condizione è verificata, essi saranno disposti a rinunciare alla disponibilità di liquidità per periodi più lunghi solo in cambio del riconoscimento di un rendimento più elevato.

1.4 Un indice temporale: la duration

Fino ad ora abbiamo concentrato la nostra attenzione su quegli strumenti che ci consentono di attribuire un valore ai nostri titoli. Nulla ancora abbiamo detto sugli indicatori temporali che ci consentono di effettuare considerazioni in relazione alla durata o alla vita residua dei titoli in portafoglio.

È vero, abbiamo sottolineato la relazione che intercorre tra le scadenze dei titoli e i loro rendimenti ma, come vedremo a breve, la maturity non sembra essere un indicatore attendibile sul quale basare le nostre analisi. Lo strumento di cui invece ci serviremo è la duration.

La duration rappresenta la media ponderata delle scadenze di un titolo utilizzando come pesi i flussi di cassa scontati. Dal punto di vista finanziario rappresenta l'epoca ottima di smobilizzo e cioè l'epoca in cui il possessore di

un titolo obbligazionario può disinvestire per ottenere in maniera certa il rendimento atteso dal titolo.

Fu introdotta nel 1938 dall'economista canadese Frederick Robertson Macaulay e ci fornisce un ottimo strumento di analisi per valutare quella che l'autore stesso definisce "*longness*" di un titolo.

Secondo Macaulay, infatti, la maturity è da interpretarsi come un semplice dato contrattuale e non può essere considerata una misura attendibile della vita a scadenza di un titolo perché non tiene conto della distribuzione temporale dei flussi di cassa. Nel suo celebre lavoro, "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*", egli afferma: "*Time to maturity is not an accurate or even a good measure of 'duration'. 'Duration' is a reality of which 'maturity' is only one factor*".

Non a caso, maturity e duration coincidono solo quando vengono calcolate per uno Zero Coupon Bond la cui caratteristica è quella di prevedere un unico flusso di cassa alla scadenza del contratto.

Passiamo a vedere come Macaulay definisce la duration: "*Duration of a bond is an average of the durations of the separate single payment loans into which the bond may be broken up. To calculate this average the duration of each individual single payment loan must be weighted in proportion to the size of the individual loan*"⁷.

Siano:

F, il valore facciale del titolo;

I, l'ammontare di denaro pagato semestralmente, cioè la cedola;

P, il prezzo del titolo;

n, il numero di semestri fino alla maturity;

⁷ Le citazioni e la formula sono tratte dal lavoro dello stesso F. Macaulay: "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*". Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research, 1938.

R, il fattore di attualizzazione semestrale;

Q, il rapporto tra valore facciale e il valore della cedola (F/I).

$$D = \frac{\frac{I}{R} + \frac{2I}{R^2} + \frac{3I}{R^3} + \dots + \frac{nI}{R^n} + \frac{nF}{R^n}}{\frac{I}{R} + \frac{I}{R^2} + \frac{I}{R^3} + \dots + \frac{I}{R^n} + \frac{F}{R^n}}$$

Il risultato a cui pervenne Macaulay segnò una svolta importante per le discipline finanziarie. Si entrava in possesso, finalmente, di uno strumento capace di sintetizzare in un unico indice tutti gli elementi che concorrono al raggiungimento di un determinato risultato in termini di rendimento: dalle scadenze ai flussi di cassa, passando per il fattore di attualizzazione che descrive la struttura per scadenza dei tassi di interesse.

Per capire a fondo l'importanza della duration dobbiamo però soffermarci sulle sue caratteristiche e, in particolare, sui suoi rapporti con le variabili che la costituiscono.

È indubbio, anzitutto, che la duration sia compresa tra t_1 e n , dove con t_1 indichiamo l'epoca in cui si manifesta il primo flusso, e con n facciamo riferimento ancora una volta alla *maturity* del titolo. Seguendo l'impostazione proposta da De Felice e Moriconi, che definiscono la duration come "*baricentro (momento primo) della distribuzione normalizzata dei valori attuali delle poste del flusso di cassa, sull'asse dei tempi*"⁸, risulterà infatti ovvio che la media delle scadenze non potrà mai collocarsi all'infuori dei limiti entro i quali viene calcolata ("*il baricentro non può essere esterno al segmento su cui sono distribuiti i pesi*"). Inoltre, appare altrettanto ovvio come la duration aumenti in relazione alla vita a scadenza del titolo.

Passando invece al rapporto tra duration e tasso di interesse dobbiamo anzitutto soffermarci sulle difficoltà riscontrate dallo stesso Macaulay. Egli

⁸ De Felici M., Moriconi F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*. Bologna: il Mulino, 1991.

infatti riconosceva le “*insuperable difficulties connected with any attempt to discover the real rates of discount for each half – yearly period in the future*”⁹.

Per ovviare a questo problema la duration viene comunemente misurata in una forma più semplice. Riscriviamo la formula della duration come segue:

$$D(t, x) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)}$$

Dove con x_k indichiamo i flussi di cassa che si manifestano nelle diverse scadenze t_k , con $k = \{1, 2, \dots, n\}$, e con $v(t, t_k)$ il fattore di attualizzazione espressivo della struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti nel periodo considerato. Esplicitando tale struttura per scadenza dei tassi avremo:

$$D(t, x) = \frac{\sum_{k=1}^n k x_k [1 + i(t, t_k)]^{-k}}{\sum_{k=1}^n x_k [1 + i(t, t_k)]^{-k}}$$

Se ora ipotizziamo di lavorare con una struttura per scadenza piatta (*flat*), o se in altri termini utilizziamo per il computo dei fattori di attualizzazione il tasso interno di rendimento del titolo, otteniamo una particolare versione della duration che prende il nome di *flat yield curve duration*.

Attraverso quest'impostazione siamo in grado di descrivere un altro tratto interessante della duration: il suo rapporto con il tasso nominale di interesse. Si dimostra infatti che la duration è tanto minore quanto più è elevato il tasso cedolare.

⁹ Macaulay F., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research, 1938.

Data un'obbligazione che garantisce un flusso di n cedole, di importo I , e un rimborso del capitale pari a C , la *yield curve duration* calcolata in epoca 0 può essere scritta come segue:

$$D(0, x) = \frac{I \sum_{k=1}^n k(1+i)^{-k} + nC(1+i)^{-n}}{I \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k} + C(1+i)^{-n}}$$

In altre parole, tra due titoli aventi la stessa maturity, quello con flusso cedolare maggiore presenterà una duration più contenuta.

Inoltre, se il tasso di valutazione è maggiore del tasso nominale, cioè quando il titolo è quotato sotto la pari, al crescere della maturity la duration raggiunge un punto massimo per poi convergere all'asintoto di equazione $(1+i) / i$. Nel caso opposto di titolo quotato sopra la pari, invece, risulta essere monotona crescente verso lo stesso asintoto.

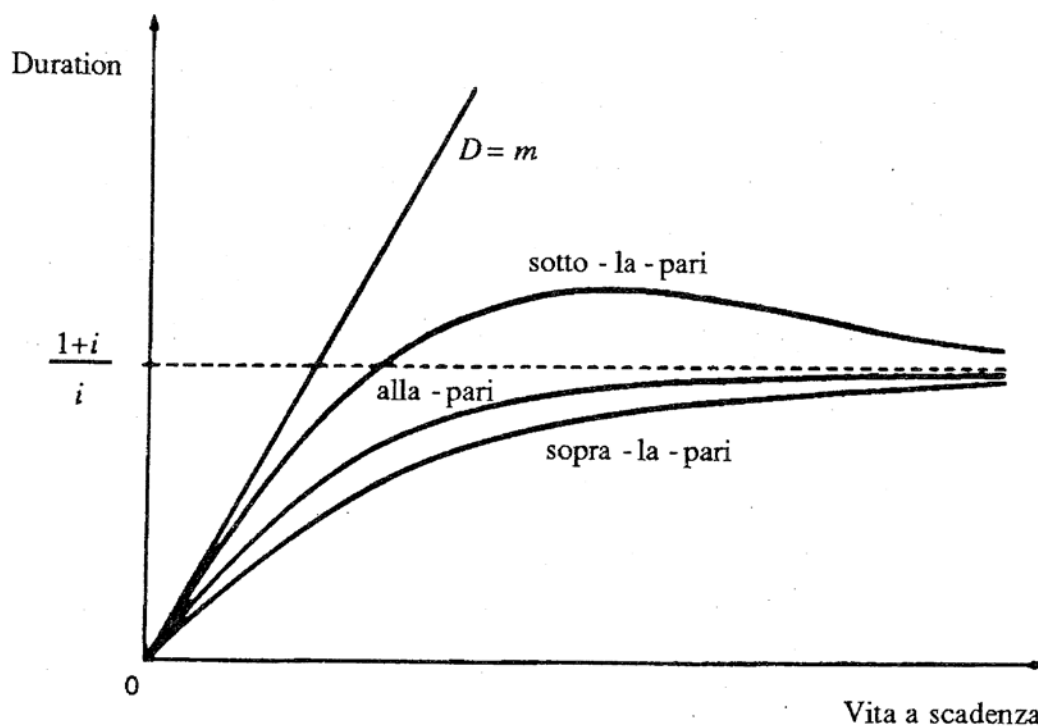


Figura 1.2 L'andamento grafico della duration in relazione al tasso di valutazione. Fonte: De Felice M., Moriconi F., "La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie". Bologna: il Mulino, 1992

1.5 Un indicatore di rischio: dalla duration alla duration modificata

Come abbiamo detto in precedenza l'intuizione geniale di Macaulay ebbe ripercussioni non indifferenti sulla letteratura finanziaria dei decenni successivi.

Era ormai diventato chiaro, infatti, che esistesse una correlazione tra i tassi di interesse e i prezzi dei titoli. Ciò che ancora non si conosceva era come esprimere questa sensibilità dei prezzi alle variazioni dei tassi di interesse.

Fu Lawrence Fisher, diversi anni dopo la scoperta di Macaulay, a dare una risposta a questo quesito. Egli riuscì infatti a dimostrare che¹⁰:

$$\frac{dV}{V} = -D \frac{dr}{1+r}$$

Prima di spiegare le importanti implicazioni della scoperta di Fisher cerchiamo di capire come prevenire a questo risultato. Sia:

$$V_0(i) = \sum_{s=0}^n R_s (1+i)^{-s}$$

il valore attuale di una rendita posticipata di rata R , calcolato all'epoca 0. Se deriviamo questa funzione rispetto ad $(1+i)$ abbiamo:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} = \sum_{s=0}^n -s R_s (1+i)^{-s-1} =$$

¹⁰ Fisher L., *An Algorithm for Finding Exact Rates of Return*. The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security prices, 1966.

$$= -(1+i)^{-1} \sum_{s=0}^n s R_s (1+i)^{-s}$$

Dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza per V_0 otteniamo:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} \frac{1}{V_0(i)} = - \frac{1}{1+i} \frac{\sum_{s=0}^n s R_s (1+i)^{-s}}{V_0}$$

Riconosciamo la formula della duration al secondo membro e quindi riscriviamo:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} \frac{1}{V_0(i)} = - \frac{1}{1+i} D$$

Riordinando i termini perveniamo allo stesso risultato di Fisher:

$$\frac{dV_0(i)}{V_0(i)} = -D \frac{d(1+i)}{1+i}$$

Il contributo di Fisher ci consente finalmente di poter verificare come una variazione dei tassi di interesse si ripercuota sul prezzo dei titoli in cui abbiamo investito. Inoltre otteniamo un indice che sia in grado di misurare la sensibilità del prezzo di un titolo obbligazionario alle variazioni della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Definiamo la volatilità come:

$$Volatilità = - \frac{D}{(1+i)}$$

Il fatto che la relazione sia negativa ci fa comprendere come ad un aumento dei tassi di interesse corrisponda una variazione di senso opposto nei prezzi, e viceversa.

La dimostrazione seguita finora ci consente anche di apprezzare un ulteriore ruolo rivestito dalla duration. Poiché infatti:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} = -D \frac{V_0(i)}{1+i}$$

la duration diviene, a meno di una costante, la derivata prima della funzione del valore attuale rispetto al tasso di interesse. In termini matematici la derivata prima di una funzione rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente ad una funzione in uno specifico punto e ne rappresenta la variazione nell'intorno di riferimento.

Questa retta tangente ci permette quindi di approssimare la funzione del valore attuale nell'intorno di un generico punto i .

Non solo siamo in grado di asserire che ad una maggiore duration corrisponderà una più alta sensibilità del titolo alle variazioni dei tassi di interesse, ma otteniamo un mezzo che ci consente di stimare il nuovo valore attuale dei flussi di cassa a seguito dell'intervento di uno shift sulla curva dei rendimenti. Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial(1+i)} V_0(i) \cong \frac{\Delta V_0(i)}{\Delta i}$$

La derivata della funzione valore attuale rispetto al tasso di interesse descrive, grosso modo, la variazione del valore attuale, $\Delta V_0(i) = V_0(i_1) - V_0(i)$, rispetto alla variazione del tasso di interesse, $\Delta i = i_1 - i$. Ma come abbiamo detto la derivata della funzione del valore attuale rispetto al tasso di interesse può essere approssimata come:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} = -D \frac{V_0(i)}{1+i}$$

Si avrà pertanto:

$$\frac{\Delta V_0(i)}{\Delta i} \cong -D \frac{V_0(i)}{1+i}$$

Da cui ricaviamo:

$$V_0(i) \cong -\frac{D}{1+i} V_0(i)(i_1 - i) + V_0(i)^{11}$$

1.6 Una migliore approssimazione: la convexity

Abbiamo visto come sia possibile approssimare attraverso la duration modificata le variazioni intervenute sui flussi di cassa a seguito di incrementi o diminuzioni dei tassi di interesse. Tuttavia questa approssimazione sembra essere soddisfacente solo per shift di ampiezza contenuta.

Per migliorare ulteriormente le nostre stime possiamo fare appello ad un'importante strumento della matematica: il Polinomio di Taylor.

¹¹ Per la dimostrazione e le relative formule si è fatto riferimento al materiale didattico distribuito dalla Professoressa G. Foschini durante il corso di Matematica Finanziaria tenuto presso l'Università LUISS Guido Carli di Roma.

Data una funzione $f(x)$, il Polinomio di Taylor di grado n , per f in x_0 , è il polinomio di grado n che meglio approssima il grafico di f in un intorno di $(x_0, f(x_0))$. Tale polinomio può essere scritto come¹²:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sviluppando il polinomio fino al grado 2 otteniamo:

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2$$

Abbiamo dunque bisogno delle derivate prima e seconda della funzione del valore attuale. Conosciamo già la derivata prima che abbiamo calcolato nel paragrafo precedente e sappiamo essere uguale a:

$$V'(i) = -D \frac{V(i)}{1+i}$$

Passiamo allora a calcolare la derivata seconda:

$$V''(i) = \sum_{k=1}^n k(k+1)R_k(1+i)^{-(k+2)}$$

¹² Per la definizione e la formula del Polinomio di Taylor si è fatto riferimento al libro di Castellani M., Gozzi F., *“Matematica di base per l'Economia e l'Azienda”*. Bologna: Società Editrice Esculapio, 2001.

La derivata seconda della funzione del valore attuale, divisa per la funzione stessa, prende il nome di *Convexity* e ci indica il modo in cui il titolo obbligazionario reagisce alle variazioni del tasso di interesse.

$$Convexity = \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)R_k(1+i)^{-k}}{(1+i)^2 V(i)}$$

Non a caso, essendo questa calcolata come derivata seconda della funzione valore attuale, ci consente di analizzare quelle che sono le variazioni che intervengono sulla derivata prima (la *duration* della funzione valore attuale) in conseguenza della movimentazione dei tassi di interesse.

Riprendendo lo sviluppo della serie di Taylor possiamo ora dimostrare come pervenire al risultato desiderato. Infatti, note le derivate prima e seconda della funzione valore attuale, possediamo uno strumento che ci consente di approssimare in maniera più esatta il nuovo valore assunto dalla funzione del valore attuale. Avremo:

$$V_0(i_1) \cong V_0(i) - \frac{D}{1+i} V_0(i)(i_1 - i) + \frac{1}{2} convexity V_0(i)(i_1 - i)^2$$

Un'approssimazione di grado 2, svolta grazie al Polinomio di Taylor, consente di avvicinarsi in maniera più esatta al vero differenziale tra il valore dell'obbligazione con o senza ipotesi di intervento di uno shift a variazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Dunque, da questo nuovo punto di vista, la *convexity* diviene un ottimo strumento per la correzione della stima del nuovo prezzo delle nostre obbligazioni. Essa è in grado di apportare modifiche alla variazione del prezzo aggiustandolo, verso l'alto o verso il basso, a seconda dell'entità dello shift intervenuto: se il tasso di interesse diminuisce la variazione del valore dell'obbligazione aumenta, e viceversa nel caso opposto.

La maggior precisione nella stima del prezzo realizzata tramite un polinomio di Taylor di secondo grado è apprezzabile nella Figura 1.3: dal grafico si nota facilmente come la curva che raccoglie i prezzi in base alla stima effettuata con il computo della convexity (in rosso nel grafico) si sovrappone in maniera quasi perfetta, e in un intorno abbastanza ampio, alla funzione $v(t)$ (in nero) che rappresenta l'evoluzione del prezzo del titolo in base ai diversi valori assunti dal tasso di interesse.

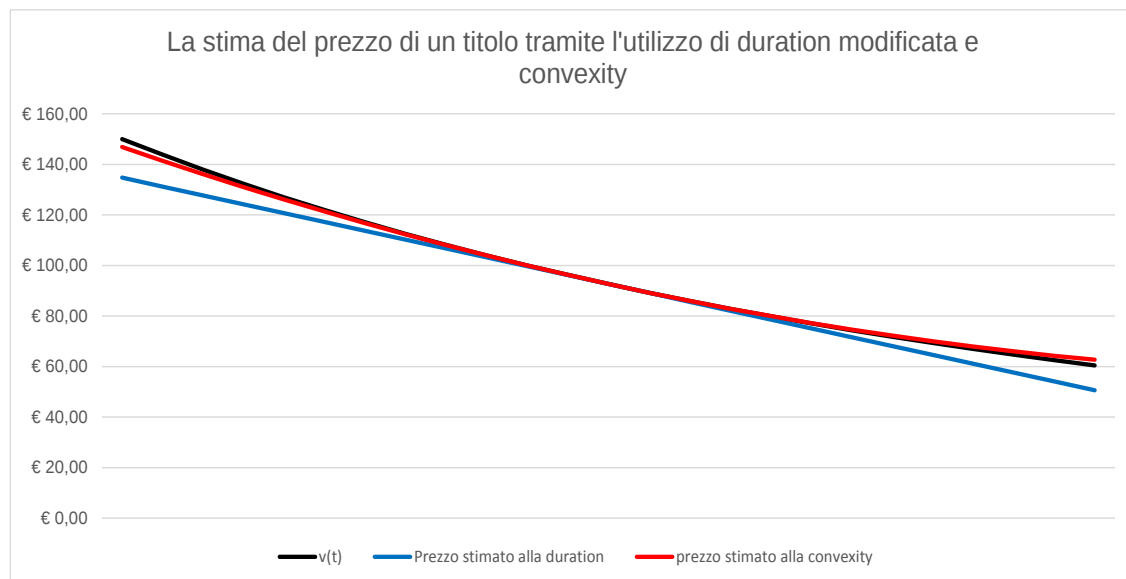


Figura 1.3. Attraverso la rappresentazione grafica siamo in grado di notare come la stima del prezzo sia effettivamente più attendibile tramite l'utilizzo della convexity¹³.

¹³ Nostra elaborazione in base a dati prodotti ad hoc.

Capitolo 2. L'immunizzazione finanziaria e il teorema di Fisher e Weil

L'approccio classico al tema dell'immunizzazione può essere riferito alla risoluzione delle problematiche riguardanti l'equilibrio finanziario di un portafoglio di investimento. Tale equilibrio è verificato, in un determinato istante di valutazione, se il valore attuale delle poste attive è in grado di coprire il valore attuale delle poste passive. In questo caso l'investitore che detiene il portafoglio può essere dichiarato solvibile.

Il problema quindi si riduce allo studio dei flussi di cassa attivi e passivi generati dal portafoglio. Come abbiamo spiegato nel capitolo precedente, la valutazione di questi flussi deve tener conto dell'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Eventuali perturbazioni della curva dei rendimenti incidono sul valore dei flussi e, di conseguenza, sull'equilibrio del portafoglio.

Le teorie classiche sull'immunizzazione finanziaria possono essere viste come dei metodi studiati al fine di rendere il più simile possibile la distribuzione delle poste di attivo e passivo sull'arco temporale, avvicinandosi in tal modo a quella che in gergo viene definita condizione di "*perfect matching*" tra flussi attivi e passivi.

Questo ragionamento si basa su una semplice constatazione: se i flussi di cassa sono perfettamente allineati risentiranno in egual modo delle perturbazioni indotte dalla variazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Quindi, se il loro spread fosse stato originariamente positivo, esso si manterrebbe tale in ogni istante su tutto il fronte di valutazione.

2.1 La definizione classica di immunizzazione finanziaria

Consideriamo un portafoglio di titoli costituito dalla parte dell'attivo da una serie di flussi di cassa non negativi x , con importi $x_1, x_2, \dots, x_n$, e dalla parte del passivo da una serie di flussi di cassa negativi y , con importi $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Siano entrambe i flussi definiti lungo lo scadenziario $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e sia t l'istante di valutazione del portafoglio, con $t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Indichiamo infine con $\delta(t, s)$ l'intensità istantanea di interesse che descrive la struttura per scadenza dei rendimenti all'epoca t .

Le teorie classiche sull'immunizzazione finanziaria possono essere lette come teorie che cercano di verificare l'equilibrio di questo portafoglio a seguito dell'intervento di uno shift additivo sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse in un momento t^+ successivo a t .

Lo shift che interviene sulla curva dei rendimenti viene considerato essere parallelo nelle ipotesi classiche. Ciò significa che la traslazione prodotta sarà di tipo rigido e quindi la nuova curva dei rendimenti risulterà esattamente parallela a quella originaria.

Possiamo descrivere in formule l'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse al tempo t^+ .

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Z(t, t^+)$$

Dove $Z(t, t^+)$ è una variabile aleatoria che rappresenta l'ampiezza dello shift ed è indipendente da s .

È proprio grazie a questa indipendenza di Z da s che la curva non subisce variazioni alla sua forma e si mantiene parallela alla struttura originale così come siamo in grado di apprezzare dalla Figura 2.1.

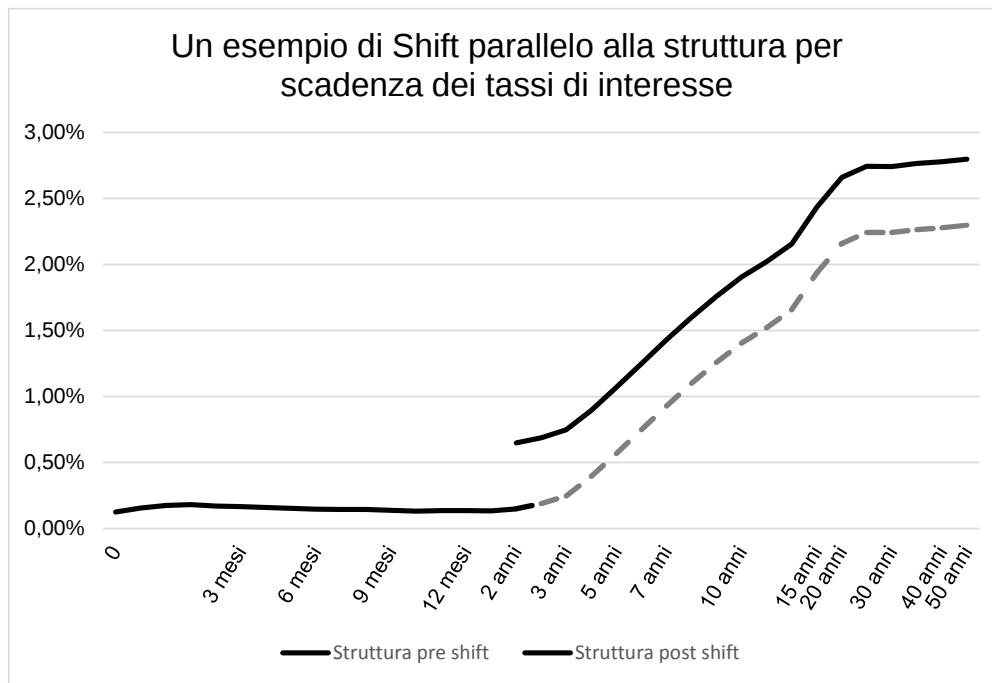


Figura 2.1. Se lo shift che interviene sui rendimenti è di tipo rigido la nuova struttura per scadenza dei tassi di interesse risulterà parallela a quella originaria¹⁴.

Nell'istante t i flussi finanziari di attivo e passivo sono in equilibrio se:

$$W(t, x) = W(t, y)$$

Il portafoglio risulterà immunizzato a seguito dello shift che si manifesta nell'epoca t^+ se e solo se:

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y)$$

Se quest'ultima condizione è verificata, infatti, l'investitore risulterà solvibile anche in t^+ e il valore netto del portafoglio che detiene sarà positivo:

$$W_n(t^+) = W(t^+, x) - W(t^+, y) \geq 0$$

¹⁴ Nostra elaborazione in base ai dati raccolti tramite Bloomberg.

2.2 Introduzione al Teorema di Fisher e Weil

Lawrence Fisher e Roman L. Weil affrontano il tema dell'immunizzazione finanziaria in relazione all'equilibrio di un portafoglio obbligazionario che, a detta degli stessi autori, può dirsi immunizzato solamente se il reddito prodotto alla fine del periodo di valutazione (*holding period*), nel caso in cui si sia manifestato uno shift additivo, risulta comunque non minore del reddito che sarebbe stato prodotto nel caso in cui lo shift non fosse intervenuto.

Nel loro celebre studio "*Coping with the risk of interest – rate fluctuations: returns to bondholders from naïve and optimal strategies*" gli autori affermano: "*A portfolio of investments in bonds is immunized for a holding period if its value at the end of the holding period, regardless of the course of interest rates during the holding period, must be at least as large as it would have been had the interest-rate function been constant throughout the holding period*".

Scorrendo le pagine del lavoro di Fisher e Weil troviamo parecchi riferimenti ad aspetti che abbiamo evidenziato precedentemente: c'è anzitutto il riferimento alle strategie ispirate al raggiungimento di condizioni di *perfect matching*, definite naïve dagli autori: "*One obvious strategy is to buy a bond which matures at the horizon, say, ten years hence. This strategy is the naïve one of our title*"; troviamo anche il richiamo al rischio di default dell'ente emittente che però non viene considerato come un elemento in grado di influenzare i tassi di interesse: "*The investor is concerned about the effect of default risk on his strategy, but we do not analyze this effect*"; infine leggiamo dello strumento cardine sul quale poggia l'analisi dell'immunizzazione del portafoglio, la duration: "*the concept of duration is the corner stone of the strategy for immunizations*".

Fisher e Weil passano quindi a definire l'ipotesi dell'intervento di uno shift parallelo sulla curva dei rendimenti:

"Assumption – If the function $i(t)$ shifts, say from i_a to i_b , then:

$$i_b(t) = i_a(t) + \Delta,$$

where Δ may be positive or negative but is the same for all t "

Da questa ipotesi segue l'enunciazione della tesi:

"Immunization Theorem – if the assumption holds, then a portfolio of nonnegative payments (or rents) is immunized at time t_0 if the duration D_{t_0} , at time t_0 of its promised payments is equal to the length of the desired holding period, $T - t_0$ "¹⁵.

Seguendo l'impostazione proposta da De Felice e Moriconi ne *"La Teoria dell'immunizzazione Finanziaria: Modelli e Strategie"*, cercheremo di spiegare come sia possibile pervenire a questo risultato.

2.3 Il Teorema di Fisher e Weil: dimostrazione

Siano $L > 0$, l'importo di un capitale esigibile in data $H > t$ e x , un flusso di importi non negativi, con scadenze $t_1, t_2, \dots, t_n$ (con $t < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$), il cui valore attuale in t è uguale al valore attuale in t di L :

$$W(t, x) = W(t, L)$$

Secondo il teorema di Fisher e Weil è possibile dimostrare che, a seguito dell'intervento di uno shift di ampiezza aleatoria sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse, il valore post shift del flusso x è non minore del valore

¹⁵ La definizione dell'ipotesi e della tesi del teorema e le citazioni riportate in precedenza nello stesso paragrafo sono estratte dal lavoro originale di Fisher e Weil *"Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bond holders from Naïve and Optimal Strategies"*. Chicago: The Journal of Business, Vol. 44.

post shift del capitale esigibile L se, e solo se, la duration di x , calcolata in t , coincide con la maturity di L . In formule:

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, L)$$

Se, e solo se:

$$D(t, x) = H - t \quad (3)$$

La dimostrazione del teorema parte da un semplice assunto: se il valore post shift del flusso x deve essere non minore del valore post shift di L , allora il rapporto tra queste due grandezze deve essere in ogni momento maggiore o uguale a 1. Definiamo con $Q(t, x, L)$ il rapporto tra i valori attuali di x e L :

$$Q(t, x, L) = \frac{W(t, x)}{W(t, L)} = 1$$

Abbiamo imposto che questo rapporto sia uguale a 1 secondo il vincolo di bilancio facente parte delle ipotesi del teorema.

Per valutare cosa succede alle grandezze considerate in ogni istante possiamo esprimerle sotto forma di valore attuale calcolato secondo il regime della capitalizzazione continua. Avremo quindi:

$$Q(t, x, L) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, u) du}}{L e^{-\int_t^H \delta(t, u) du}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, u) du}$$

Al tempo $t^+ \leq s$ supponiamo l'intervento di uno shift di ampiezza aleatoria Y che modifica la struttura dei rendimenti nel seguente modo:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y \quad (4)$$

Il valore del nostro quoziente al tempo t^+ sarà anche funzione di Y , infatti:

$$Q(t^+, x, L, Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_{t_k}^H (t^+, u) du} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_{t_k}^H (t, u) du} e^{Y(H-t_k)}$$

Il ragionamento sembra funzionare: ricordando che un qualsiasi numero elevato alla 0 dà come risultato 1, siamo in grado di apprezzare come ipotizzando che lo shift sia nullo, cioè nel caso in cui poniamo $Y = 0$, il rapporto si mantenga effettivamente uguale a 1.

Studiamo la funzione in relazione ad Y , calcolandone la derivata prima e seconda:

$$Q'(Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, u) du} e^{Y(H-t_k)}$$

$$Q''(Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k)^2 x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, u) du} e^{Y(H-t_k)}$$

La derivata seconda rispetto a Y risulterà sempre maggiore di 0. Matematicamente questo significa che la curva avrà concavità rivolta verso l'alto. Sappiamo inoltre che per $Y = 0$ la funzione ha valore 1. Quindi per

dimostrare che il rapporto tra $W(t, x)$ e $W(t, L)$ è sempre maggiore di 1 dobbiamo solo assicurarci che la derivata prima della funzione $Q(Y)$ sia nulla per $Y = 0$ denotando così, in quell'istante, l'esistenza di un punto di minimo. Infatti: se la funzione assume valore 1 nel suo punto di minimo assoluto e se la sua concavità è rivolta verso l'alto, arriviamo a dimostrare la tesi di partenza. Imponiamo quindi:

$$Q'(0) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t,u) du} = 0$$

Che equivale a:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{-\int_t^{t_k} \delta(t,u) du}}{L e^{-\int_t^H \delta(t,u) du}} = \frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k)}{L v(t, H)} = 0$$

Riscriviamo l'equazione tenendo conto del vincolo di bilancio $W(t, x) = W(t, L)$:

$$\frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k v(t, t_k)}{L v(t, h)} = H$$

O in maniera equivalente:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{L v(t, H)} = H - t$$

Poiché, per ipotesi, il valore attuale del capitale esigibile (in quest'ultimo caso espresso come $L_v(t, H)$) è uguale al valore attuale dei flussi x , l'espressione di sinistra coincide con la duration di tali flussi e quindi, come volevasi dimostrare, il quoziente tra i valori attuali è maggiore o uguale a 1 se, e solo se vale la relazione tra duration dell'attivo e maturity del passivo espressa nella formula (3).

2.4 Le importanti implicazioni del teorema di Fisher e Weil

Il teorema di Fisher e Weil, oltre a dimostrare come sia possibile pervenire a una situazione di immunizzazione finanziaria, ci consente di disporre di una tecnica efficace per la costruzione di un portafoglio composto da titoli obbligazionari. Siamo in grado, applicando i dettami del teorema, di selezionare una serie di flussi non negativi a copertura di un presunto capitale esigibile (presunto perché, ad esempio, questo capitale potrebbe essere virtuale e rappresentare semplicemente una soglia di rendimento prefissata ad hoc) in modo tale che il portafoglio costituito risulti, in ogni istante, immunizzato da potenziali shift additivi che intervengono sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse.

Supponiamo infatti di dover procedere a copertura di un importo L disponibile in data H , con $H > t$. Sul mercato dobbiamo selezionare una serie di titoli che garantiscano una serie flussi non negativi definiti al tempo t .

L'insieme dei titoli può essere rappresentato tramite una matrice A composta da m colonne che raccolgono i flussi e n righe a indicare le scadenze. La nostra matrice risulterà composta quindi dai generici elementi a_{ik} che rappresentano l'ammontare dell' i -esimo flusso di cassa esigibile all'epoca k con:

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Indicando con α_i la quota dell'i-esimo titolo detenuto in portafoglio siamo in grado di descrivere i generici flussi x oggetto dell'immunizzazione come:

$$x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik}$$

Il valore attuale, calcolato al tempo t , dei flussi di cassa sarà pertanto:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} v(t, t_k)$$

Secondo Fisher e Weil il portafoglio risulterà immunizzato se vengono rispettati: il vincolo di bilancio, che impone l'uguaglianza tra valore attuale dei flussi e valore attuale del capitale esigibile L ; la condizione di duration, che impone una durata media finanziaria dei flussi uguale alla maturity del capitale esigibile L . In formule:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} v(t, t_k) = L v(t, t_k)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (t_k - t) \alpha_i a_{ik} v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} v(t, t_k)} = H - t$$

Dal punto di vista matematico il problema si traduce nella risoluzione di un sistema di due equazioni lineari a n incognite finalizzato alla ricerca del vettore $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ in grado di soddisfare le condizioni imposte dal teorema di Fisher e Weil.

Vedremo in seguito come nella pratica questo problema venga risolto servendosi di strumenti di programmazione lineare.

Il teorema ha anche un'ulteriore applicazione alquanto interessante. Esso infatti può essere utilizzato per ricercare l'epoca ottima di smobilizzo.

Il valore in un generico istante H di un portafoglio di investimento che garantisce un flusso di importi x ($x_1, x_2, \dots, x_n$) non negativi nelle scadenze t ($t_1, t_2, \dots, t_n$) può essere scritto come la somma del reddito da reinvestimento, funzione diretta del tasso di interesse, e del valore di realizzo, che è invece funzione inversa del tasso di interesse:

$$R(H, x) = \sum_{k=1}^H \frac{x_k}{v(t_k, H)} + \sum_{k=H}^n x_k v(H, t_k)$$

Se la struttura per scadenza dei tassi di interesse non subisce shift additivi nell'intervallo di tempo che va da t ad H , il reddito prodotto dal portafoglio al tempo H può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} R(H, x) &= \sum_{K=1}^H x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t, u) du} + \sum_{K=H}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t, u) du} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t, u) du} \end{aligned}$$

Questo risultato ha un'importante implicazione perché ci consente di mostrare come, in assenza di shift alla struttura per scadenza dei rendimenti, il reddito prodotto da x in H coincide con il valore attuale di x calcolato in t e successivamente capitalizzato fino ad H .

Cosa succede invece se lo shift additivo si manifesta? In questo caso il reddito prodotto dai flussi x in H dipenderà dai valori che i tassi di interesse assumono nel periodo compreso tra t ed H .

Il teorema di Fisher e Weil può essere utilizzato per dimostrare allora che, se il portafoglio è immunizzato, la duration dei flussi x in portafoglio (che è supposta essere uguale alla maturity del capitale esigibile L), corrisponde con l'epoca ottima di smobilizzo e cioè l'epoca in cui è possibile, disinvestendo, ottenere il rendimento associato al titolo in condizioni di assenza di uno shift additivo.

Supponiamo ancora una volta che, nell'epoca $t+ \leq s$, si manifesti uno shift additivo di ampiezza rigida pari a Y . La nuova struttura per scadenza dei tassi di interesse sarà anche in questo caso rappresentata dall'intensità istantanea vista nella formula (4).

Esprimiamo il reddito prodotto dal flusso x in funzione di Y :

$$\begin{aligned} R(Y, H, x) &= \sum_{k=1}^H x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t^+, u) du} + \sum_{k=H}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t^+, u) du} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t^+, u) du} = \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t, u) du} e^{-Y(t_k - H)} \end{aligned}$$

Moltiplicando e dividendo per $e^{-\int_t^H \delta(t, u) du}$ otteniamo:

$$R(Y, H, x) = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k) e^{-Y(t_k - H)}$$

Come già fatto nell'ambito della dimostrazione del Teorema di Fisher e Weil, possiamo studiare le derivate prima e seconda della funzione ottenuta per

capire l'andamento della curva che la descrive. Poiché anche in questo caso la derivata seconda rispetto ad Y risulterà sempre positiva, per poter affermare che la duration è l'epoca ottima di smobilizzo possiamo dimostrare, di nuovo, che la derivata prima della funzione è nulla per $Y = 0$ individuando così un punto di minimo assoluto.

$$\frac{\partial}{\partial Y} R(Y, H, x) = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k) = 0$$

Da cui si ricava:

$$H = \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)}$$

Riconosciamo, nella parte di destra dell'equazione, la duration dei flussi di cassa x ¹⁶. Questo significa che il momento dell'ottimo smobilizzo è dato proprio dalla duration. Ciò significa che disinvestendo in quest'epoca riusciamo ad ottenere un ritorno pari all'ammontare preventivato in assenza di shift coerentemente con quanto dimostrato in precedenza durante lo sviluppo del teorema di Fisher e Weil.

¹⁶ Per le formule contenute in questo paragrafo e nei due precedenti si è fatto riferimento al libro di De Felice M., Moriconi F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*. Bologna: il Mulino, 1991.

Capitolo 3. Un caso pratico di immunizzazione

Per saggiare l'efficacia del Teorema di Fisher e Weil procediamo con la realizzazione e lo studio di un caso pratico: ipotizzeremo di finanziarci, per un determinato periodo, tramite l'emissione di uno *Zero Coupon Bond*, investendo poi la liquidità ottenuta in un portafoglio di Buoni Poliennali del Tesoro costruito secondo i vincoli imposti dal teorema. In un secondo momento verificheremo l'effettiva tenuta dell'immunizzazione a seguito delle variazioni delle strutture dei tassi di interesse sul mercato, sia dal lato dell'attivo, sia dal lato del passivo.

3.1. Costruzione del portafoglio

La nostra analisi prende il via con la costituzione di un passivo. In data 05 maggio 2014 decidiamo di finanziarci per un importo pari a € 100.000.000,00 mediante l'emissione di uno *Zero Coupon Bond*¹⁷ con scadenza a 7 anni.

A fronte della liquidità ricevuta ci impegniamo, alla scadenza del contratto, a restituire l'importo finanziato maggiorato dell'interesse maturato nel periodo di riferimento. Calcoliamo il compenso per il creditore utilizzando il tasso di interesse desumibile dalla struttura per scadenza dei rendimenti costruita con i tassi OIS sull'EONIA¹⁸ al 5 maggio (vedi Figura 3.1).

¹⁷ Uno *Zero Coupon Bond*, detto anche “titolo a capitalizzazione integrale”, è uno strumento finanziario che si caratterizza per l'assenza di flusso cedolare. Un investimento in un titolo che gode di queste caratteristiche dà vita a operazioni finanziarie definite semplici.

¹⁸ I tassi OIS, *Overnight Index Swap*, riflettono il valore medio atteso del tasso overnight (EONIA), indice di riferimento per le operazioni di finanziamento interbancarie. Si parla di swap sui tassi EONIA per definire un accordo tra due parti finalizzato allo scambio, per un periodo di tempo determinato, di due distinte serie di pagamenti giornalieri: la prima serie con interesse calcolato sull'EONIA (quindi ad un tasso variabile); la seconda serie con un tasso fisso stabilito al momento del contratto (OIS, appunto).

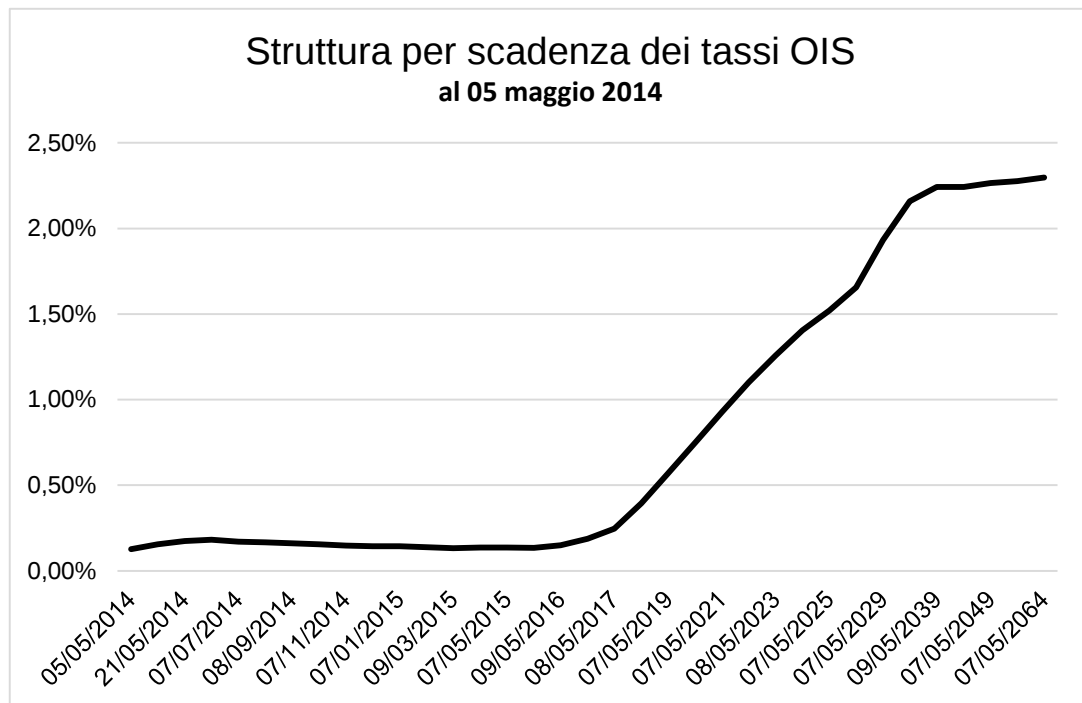


Figura 3.1 La curva ci mostra l'andamento dei tassi di interesse OIS assegnando a ogni scadenza il relativo valore atteso per quell'istante¹⁹.

Interpolando la suddetta curva risulta che il tasso di interesse per operazioni con scadenza a 7 anni è pari allo 0,9273%. Utilizzando il regime della capitalizzazione composta, il capitale alla scadenza sarà quindi:

Capitale alla scadenza = Importo finanziato x fattore di capitalizzazione =

$$= € 100.000.000,00 \times (1 + 0,009273)^7 = € 106.674.579,30$$

Riassumiamo i dati relativi al passivo nella tabella 3.1.

¹⁹ Nostra elaborazione in base ai dati sui tassi di interesse OIS raccolti tramite Bloomberg.

Importo Finanziato	€ 100.000.000,00
Data di decorrenza	5 maggio 2014
Data di scadenza	5 maggio 2021
Tasso di valutazione	0,9273%
Capitale da Rimborsare	€ 106.674.579,30
Maturity	7 anni
Duration	7 anni

Tabella 3.1 Dati relativi alla costituzione del passivo. Come era lecito supporre la duration del nostro finanziamento coincide con la sua maturity. Come abbiamo già visto nel Capitolo 1 ciò avviene nel caso di titoli a capitalizzazione integrale.

A questo punto decidiamo di investire la somma ricavata dal finanziamento in un portafoglio costituito da Buoni Poliennali del Tesoro. Abbiamo selezionato tre BTP²⁰ di cui riassumiamo le caratteristiche²¹:

ISIN: IT0004594930

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Emesso da: Repubblica italiana

Data di godimento: 1 marzo 2010

Data prima cedola: 1 settembre 2010

Frequenza cedole: semestrale

Tasso cedolare: 4,00%

Scadenza: 1 settembre 2020

Corso secco al 05 maggio 2014: € 111,03

²⁰ I BTP (Buoni del Tesoro Poliennali) sono strumenti appartenenti alla categoria dei Titoli di Stato rappresentativi di operazioni finanziarie di rendita. Il compenso per l'acquirente si manifesta sotto forma di remunerazione periodale, con lo stacco di cedole di importo e scadenza prefissati, e di rimborso finale, con il pagamento a scadenza del capitale investito.

²¹ Per il reperimento dei dati si è fatto affidamento a Bloomberg.

ISIN: IT0004801541

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Emesso da: Repubblica italiana

Data di godimento: 1 marzo 2012

Data prima cedola: 1 settembre 2012

Frequenza cedole: semestrale

Tasso cedolare: 5,50%

Scadenza: 1 settembre 2022

Corso secco al 05 maggio 2014: € 120,40

ISIN: IT0005001547

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Emesso da: Repubblica italiana

Data di godimento: 1 marzo 2014

Data prima cedola: 1 settembre 2014

Frequenza cedole: semestrale

Tasso cedolare: 3,75%

Scadenza: 1 settembre 2024

Corso secco al 05 maggio 2014: € 105,65

Ai fini della costruzione del nostro portafoglio, noto il corso secco dei titoli, dobbiamo calcolare il prezzo Tel - quel per ciascun BTP. Perveniamo a questo risultato sommando al corso secco un rateo (detto anche *dietim*) che rappresenta la parte di cedola maturata dalla data di stacco dell'ultima cedola alla data di analisi. Si avrà quindi:

$$Rateo = Importo\ cedola \times \frac{\Delta t}{\Delta T}$$

Dove con Δt indichiamo lo scarto temporale tra la data di analisi e la data di pagamento dell'ultima cedola, mentre con ΔT definiamo il periodo che intercorre tra lo stacco delle due cedole.

Il prezzo Tel – quel, oltre a costituire l'esborso che dovremmo sostenere per l'acquisto di ogni singolo titolo, rappresenta la sommatoria dei flussi di cassa, generati dal titolo, attualizzati alla data di analisi. Questo ha una valenza indiretta molto importante per il proseguo della nostra analisi perché ci consente di calcolare il Tasso Interno di Rendimento (TIR) dei titoli.

Considerando infatti che è possibile calcolare il valore attuale (W) in t dei flussi x con scadenze $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ come:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{1}{(1+i)^{(t_k-t)}}$$

siamo in grado di definire il Tasso Interno di Rendimento come l'unico numero reale soluzione dell'equazione, nell'incognita i .

Calcoliamo i prezzi Tel – quel e il TIR dei BTP ottenendo i risultati mostrati nella Tabella 3.2.

ISIN	Prezzo Tel - quel	TIR
IT0004594930	€ 111,74	2,13475%
IT0004801541	€ 121,37	2,757631%
IT0005001547	€ 106,31	3,126576%

Tabella 3.2 Prezzi e TIR per i titoli che compongono l'attivo del nostro portafoglio.

Possiamo rappresentare graficamente l'andamento della struttura per scadenza dei BTP implicita nei prezzi dei titoli che abbiamo calcolato.

Naturalmente questa rappresenterà solo un'approssimazione della reale curva governativa italiana ma ci consentirà di analizzare anche graficamente cosa avviene durante lo svolgimento della nostra analisi.

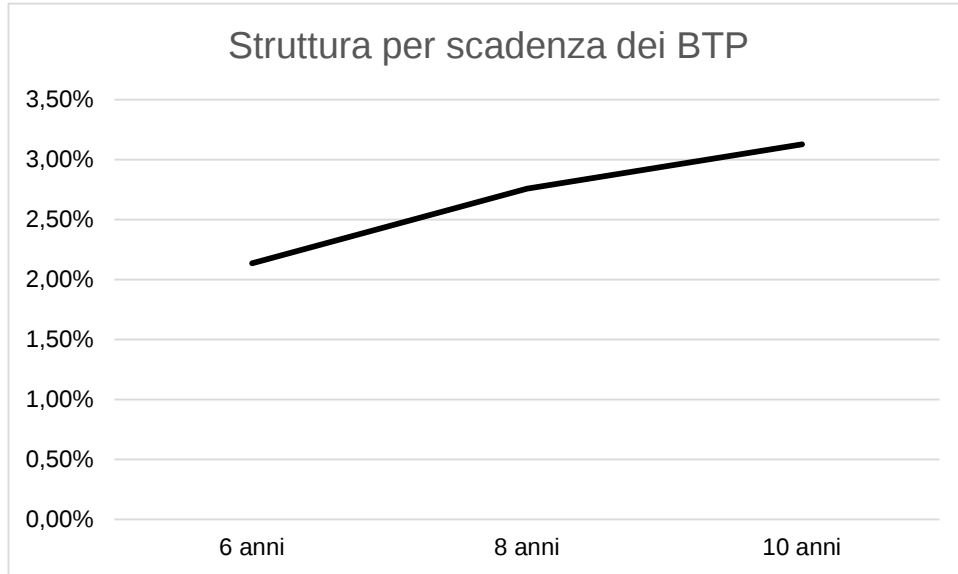


Figura 2.2. Un'approssimazione dell'andamento della struttura per scadenza dei titoli governativi italiani ottenuta tramite i rendimenti che abbiamo calcolato per i BTP che costituiscono il nostro portafoglio.

L'ultimo indice di cui abbiamo bisogno è quello che esprime la durata media finanziaria dei titoli che comporranno il nostro portafoglio, la *duration*. Attraverso questo indice saremo in grado non solo di costruire il portafoglio ma anche di tenere d'occhio l'evoluzione dei prezzi dei nostri titoli al variare dei tassi di interesse per il concetto di *volatility* che abbiamo affrontato nei precedenti capitoli.

Noto il flusso cedolare, il valore nominale di rimborso a scadenza, le epoche in cui questi flussi si manifesteranno e il TIR calcoliamo la *duration* come segue:

$$D(t, x) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo i risultati riportati nella Tabella 3.3.

ISIN	Time to maturity	Duration
IT0004594930	6,3315	5,6632
IT0004801541	8,3315	6,9014
IT0005001547	10,3342	8,6647

Tabella 3.3 Un confronto tra la maturity e la duration dei BTP.

Possediamo adesso tutti gli strumenti per costruire il nostro portafoglio secondo le indicazioni del teorema di Fisher – Weil. Non dovremo far altro che trovare le quantità dei titoli da acquistare che ci consentano di minimizzare il costo del portafoglio e che rispettino i vincoli imposti dal teorema:

- 1) Il valore attuale dell'attivo deve coincidere con il valore attuale del passivo;
- 2) La duration dell'attivo deve necessariamente essere uguale alla duration del passivo.

Rispettando i suddetti vincoli il nostro portafoglio risulterà immunizzato rispetto ad eventuali shift additivi. Se infatti lo shift, che nelle ipotesi del teorema è supposto essere parallelo, interviene sui rendimenti di attivo e passivo questi rimarranno allineati consentendoci di mantenere il portafoglio in equilibrio.

Nella pratica, la ricerca delle quantità α dei titoli da acquistare per costruire il nostro portafoglio può essere interpretato come un semplice problema di algebra lineare per la risoluzione del quale ci serviamo di uno strumento di programmazione lineare.

La programmazione lineare è una branca della programmazione matematica finalizzata alla risoluzione di quei problemi che hanno come obiettivo la ricerca di un punto di ottimo (nel nostro caso la quantità di titoli che ci consente di minimizzare il costo del portafoglio) sotto determinati vincoli (sempre con riferimento al nostro caso, il vincolo di bilancio di uguaglianza tra attivo e passivo e il vincolo di duration). Si traduce nella ricerca dei valori massimi e minimi assumibili da una funzione lineare definita su un dominio individuato da un sistema di equazioni anch'esse lineari.

Risolvendo il problema otteniamo i risultati riportati nella Tabella 3.4.

ISIN	Quantità α	Prezzo Tel - Quel	Esborso totale
IT0004594930	€ 0,00	€ 111,74	€ 0,00
IT0004801541	775.427,34	€ 121,37	€ 94.114.754,60
IT0005001547	55.358,07	€ 106,31	€ 5.885.247,28

Tabella 3.4 Utilizzando la programmazione lineare abbiamo trovato le quantità di titoli che ci consentono di rispettare i vincoli imposti per la costruzione del portafoglio.

Possiamo calcolare il rendimento del portafoglio come una media ponderata dei tassi interni di rendimento, utilizzando come pesi i controvalori dei titoli in prezzi. Da questa analisi emerge che il rendimento del portafoglio sarà pari al 2,782%.

Rappresentiamo graficamente la composizione del nostro portafoglio per avere un'idea immediata della partecipazione di ogni singolo titolo al rendimento finale.



Figura 3.3. La composizione del portafoglio. Dal grafico a torta è possibile apprezzare la predominanza del titolo IT0004801541 a scapito degli altri due (il titolo IT0004594930 è addirittura assente).

3.2. Verifiche empiriche sulla tenuta del portafoglio immunizzato

Per verificare l'effettiva efficacia dell'immunizzazione finanziaria sul nostro portafoglio, decidiamo di analizzare la nuova composizione del passivo e dell'attivo, nei mesi successivi allo studio iniziale, a seguito delle variazioni intervenute sui rendimenti e sui prezzi dei titoli.

Lo studio viene ripetuto in 2 date distinte, 30 giugno e 8 agosto 2014, tenendo conto delle particolari condizioni che si sono verificate sul mercato finanziario italiano nel periodo di riferimento.

PRIMA VERIFICA, 30 GIUGNO 2014

Verifichiamo anzitutto cosa è successo dal lato del passivo: interpolando la struttura per scadenza dei tassi OIS al 30 giugno otteniamo il nuovo tasso di valutazione del nostro passivo che sarà pari allo 0,65639%.

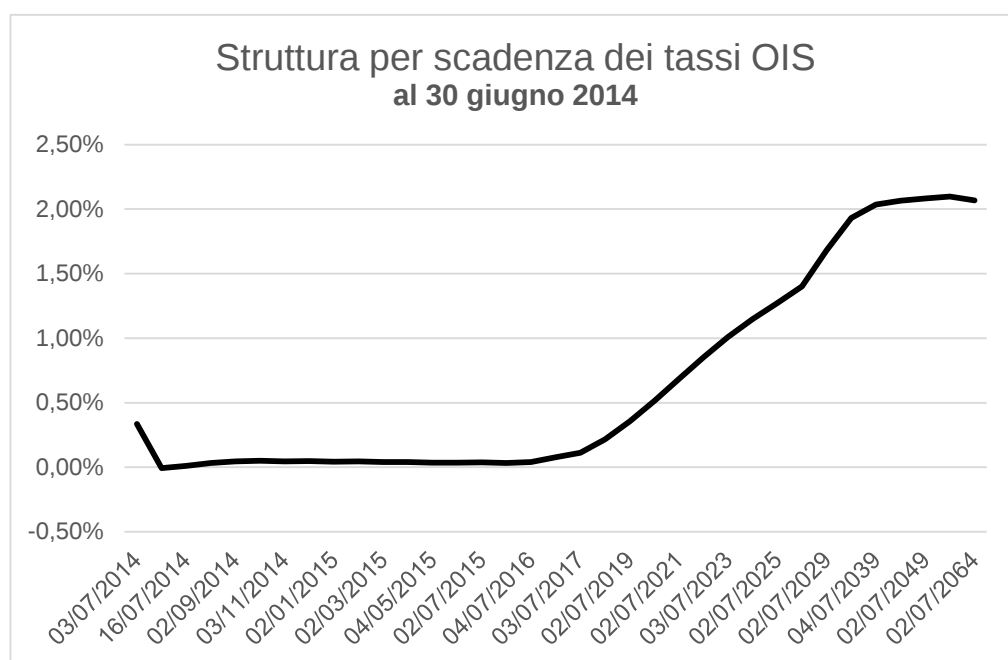


Figura 3.4. La nuova struttura per scadenza dei tassi OIS alla data del 30 giugno 2014²².

²² Nostra elaborazione in base ai dati raccolti tramite Bloomberg.

La riduzione del tasso di valutazione è deducibile dalla trasposizione della struttura per scadenza dei tassi OIS che, come siamo in grado di apprezzare nella Figura 3.5, si trova ora al di sotto di quella rilevata in data 5 maggio.

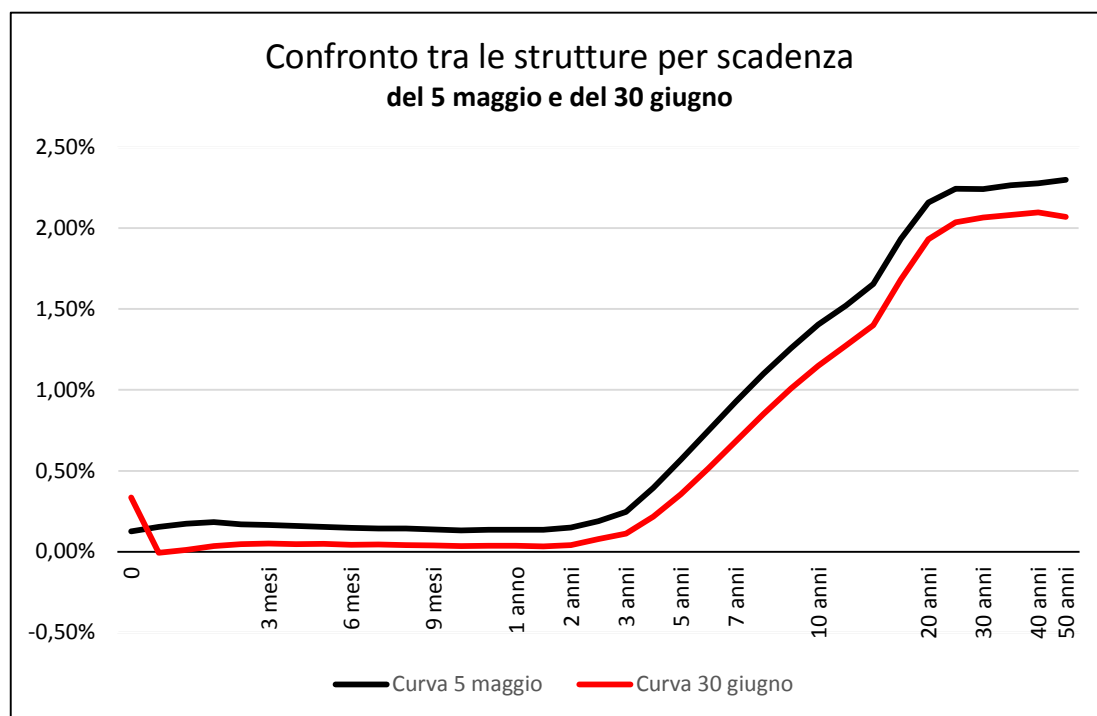


Figura 3.5. Il confronto tra le curve ci consente di verificare in che maniera è intervenuto lo shift additivo.

Questa condizione comporta un apprezzamento del nostro passivo che adesso avrà un valore attuale pari a € 101.997.989,79. Ricordiamo infatti che il valore attuale di un capitale disponibile in data futura è funzione decrescente rispetto al tasso di interesse:

Possiamo passare, quindi, ad analizzare quali sono le variazioni intervenute dalla parte dell'attivo.

La composizione quantitativa del portafoglio è rimasta invariata perché non abbiamo ricevuto alcun flusso cedolare da reinvestire nei titoli ivi compresi. Ciò che è variato, invece, è il prezzo dei BTP per effetto della variazione della struttura per scadenza dei loro rendimenti. Riassumiamo nella Tabella 3.5 le informazioni relative ai prezzi, ai rendimenti e alle quantità dei titoli presenti in portafoglio:

ISIN	Prezzo Tel-quel	TIR	Quantità α
IT0004594930	€ 114,31	1,7733%	0,00
IT0004801541	€ 124,62	2,4202%	775.427,34
IT0005001547	€ 109,34	2,8440%	55.358,07

Tabella 3.5. Informazioni sull'attivo al 30 giugno 2014²³.

Come già fatto per il passivo, procediamo anche ad un confronto grafico tra le curve che rappresentano la struttura per scadenza dei tassi di rendimento dei BTP. Apprezziamo questo confronto nella Figura 3.6.

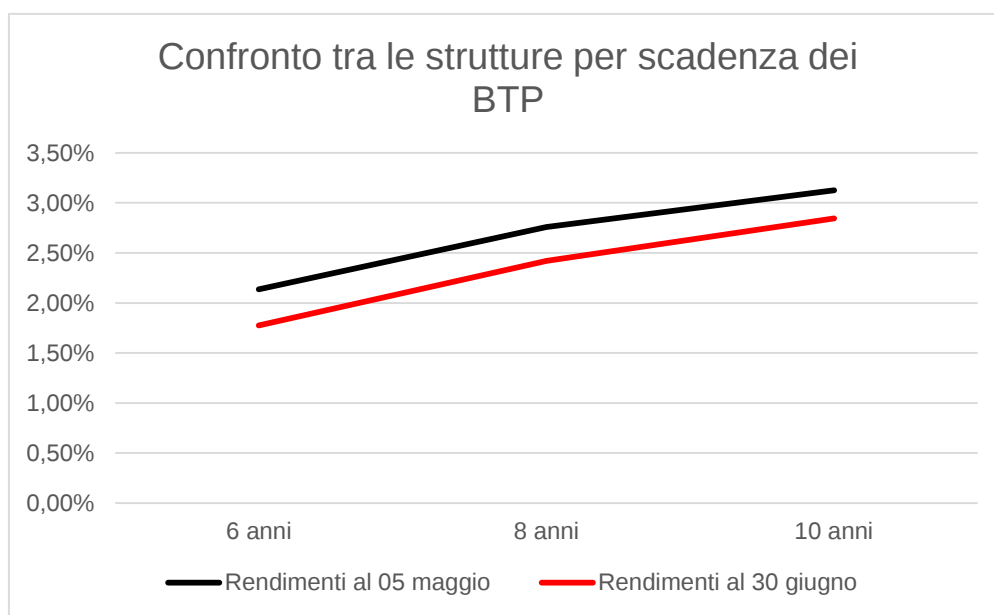


Figura 3.6. Il confronto tra le strutture per scadenza implicite nei prezzi dei BTP. Graficamente apprezziamo il parallelismo quasi accademico tra le curve.

Moltiplicando i prezzi dei titoli per le loro quantità siamo in grado di calcolare il nuovo valore del nostro attivo che sarà pari a € 102.685.550,12.

La situazione sembra, già ad occhio, confortante. Poiché:

²³ Il prezzo Tel – quel e le altre grandezze sono stati ricavati tramite il corso secco rilevato in data 30 giugno per i titoli.
[Fonte Bloomberg].

valore del passivo = € 101.997.989,79

e valore dell'attivo = € 102. 685. 550, 12

notiamo che l'immunizzazione del portafoglio ha effettivamente funzionato portandoci a ipotizzare anche un profitto futuro pari alla differenza tra i due parziali. Infatti:

$$\begin{aligned}\text{Valore Netto del Portafoglio} &= \text{Valore dell'attivo} - \text{Valore del passivo} = \\ &€ 102. 685. 550, 12 - € 101.997.989,79 = € 687.560, 34\end{aligned}$$

Sulla scia del lavoro effettuato da Fisher e Weil per la dimostrazione dell'efficacia del teorema, possiamo evidenziare la tenuta dell'immunizzazione calcolando il rapporto tra attivo e passivo. Essendo questo rapporto pari a 1,0067, quindi maggiore di 1, possiamo effettivamente asserire che l'immunizzazione del portafoglio ha dato i frutti sperati.

SECONDA VERIFICA, 08 AGOSTO 2014

Ripetiamo la verifica in data 8 agosto per constatare se l'immunizzazione finanziaria del nostro portafoglio continua a offrire risultati positivi.

Come già fatto per l'analisi del 30 giugno, partiamo con lo studio delle variazioni che intervengono dal lato del passivo. La nuova struttura per scadenza dei tassi OIS è quella mostrata in Figura 3.7.

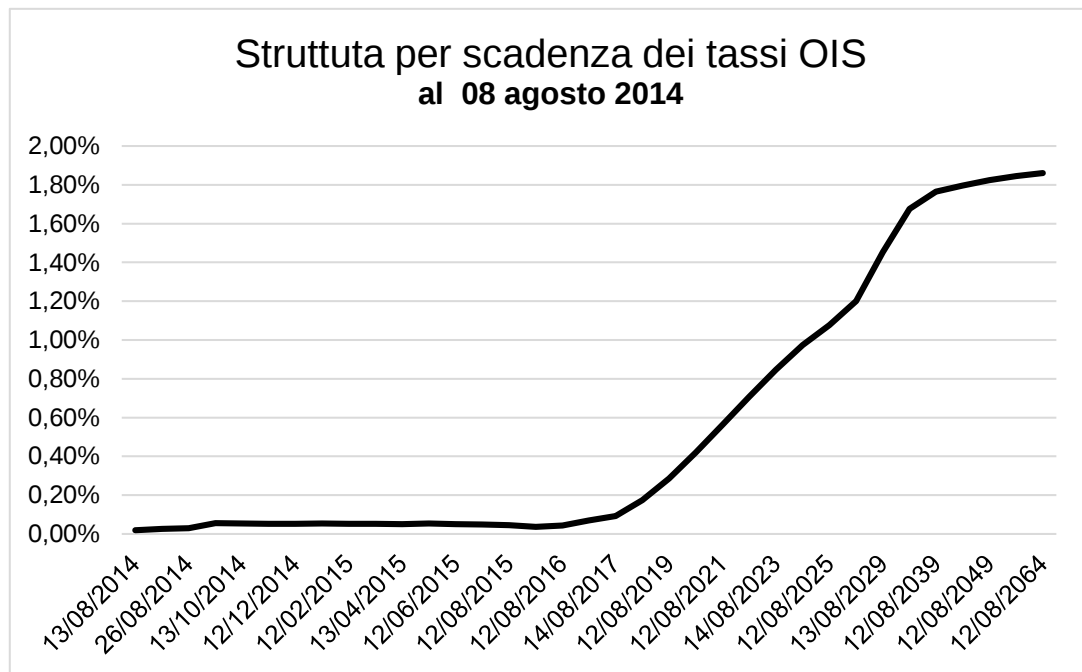


Figura 3.7. La struttura per scadenza dei tassi OIS sull'EONIA in data 08 agosto 2014²⁴.

Procedendo con l'ormai consueta interpolazione della curva otteniamo il tasso di valutazione del passivo che sarà questa volta pari allo 0,5235%, facendo registrare quindi un'ulteriore flessione, rispetto al 30 giugno, alla quale, come sappiamo, corrisponderà un nuovo apprezzamento del valore attuale del passivo che ammonterà a € 102.846.076,76.

Costruiamo anche in questo caso il grafico che ci permette di confrontare le strutture per scadenza dei tassi in modo tale da avere un'idea visiva di quanto sta succedendo sul mercato.

²⁴ Nostra elaborazione in base ai dati sui tassi OIS reperiti tramite Bloomberg.

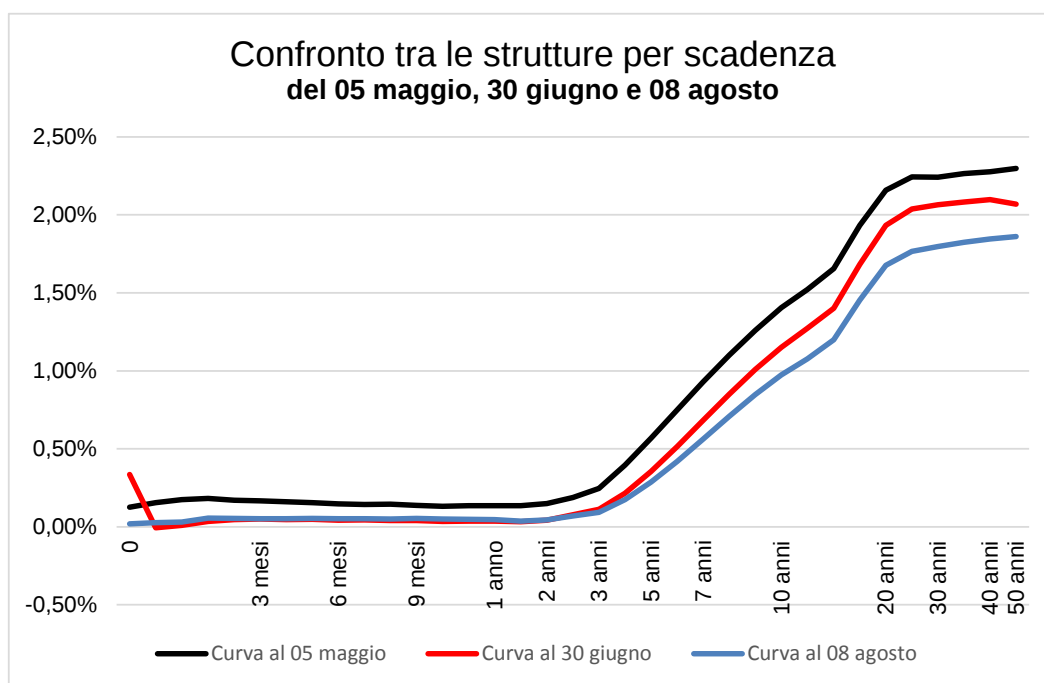


Figura 3.8. Il confronto tra le strutture per scadenza nelle tre date di analisi.

Vediamo cosa accade dal lato dell'attivo.

Come già constatato nelle precedente verifica, la composizione quantitativa del portafoglio non subirà alcuna modifica perché i BTP in portafoglio non pagheranno alcuna cedola prima del 01 settembre. Le variazioni, ancora una volta, interessano i prezzi dei titoli anche se, in questo caso, con tendenza meno accentuata rispetto a quanto avvenuto al 30 giugno. Nella Tabella 3.6 sono riportate le indicazioni sul prezzo e sulla quantità dei titoli in portafoglio.

ISIN	Prezzo Tel - quel	TIR	Quantità
IT0004594930	€ 113,19	1,99450%	0,00
IT0004801541	€ 122,75	2,69310%	775.427,34
IT0005001547	€ 108,33	2,99495%	55.358,07

Tabella 3.6 La nuova situazione dell'attivo in data 08 agosto²⁵.

²⁵ Il prezzo Tel – quel e le altre grandezze sono stati ricavati tramite il corso secco rilevato per i titoli in data 08 agosto.
[Fonte Bloomberg].

Rappresentiamo graficamente anche in questo caso la variazione intervenuta sui rendimenti dei BTP nella Figura 3.9.

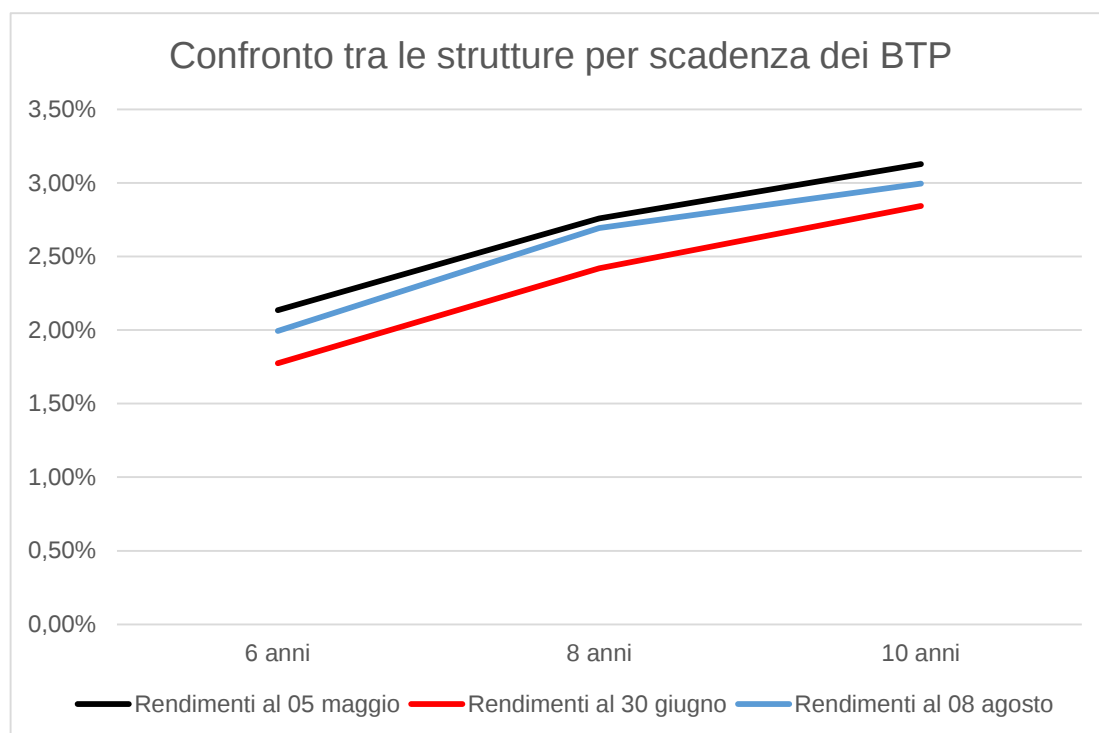


Figura 3.9. In questo confronto tra le strutture per scadenza dei BTP notiamo che lo shift si è manifestato in maniera non del tutto parallela. Lo shift inoltre sembra aver avuto ampiezza minore rispetto al 30 giugno.

Moltiplicando il prezzo dei titoli per le relative quantità contenute in portafoglio otteniamo il valore totale del nostro attivo che ammonterà a € 101.176.492,26.

Come è già possibile notare l'immunizzazione finanziaria in questo caso non ha prodotto i frutti desiderati: il valore netto, derivante dalla differenza tra il valore dell'attivo e il valore del passivo, sarà infatti pari a - € 1.669.584,50.

La tendenza negativa è confermata anche dal rapporto tra le poste attive e passive del portafoglio: il valore del quoziente è infatti 0,98377 ben al di sotto del valore di 1,0067 calcolato in data 30 giugno.

Capitolo 4. Uno studio sugli impatti degli shift

Cosa è successo? A cosa è dovuta questa incoerenza tra i risultati ottenuti in data 30 giugno e 8 agosto? Per rispondere a queste domande facciamo un passo indietro e torniamo al momento in cui abbiamo costruito il nostro portafoglio secondo le ipotesi del teorema di Fisher e Weil. Proviamo, quindi, a sollecitare le strutture per scadenza dei tassi, ai quali ci finanziamo e ai quali investiamo, secondo degli stress prodotti ad hoc.

4.1 Ipotesi di shift parallelo

Come primo caso ipotizziamo l'intervento di uno shift parallelo che interessa, con la stessa ampiezza, sia la struttura per scadenza dei tassi OIS che quella dei rendimenti dei BTP.

Ricordiamo infatti che, nella sua impostazione classica, il teorema di Fisher e Weil ipotizza perturbazioni rigide alla struttura per scadenza dei rendimenti. Abbiamo visto come lo shift possa essere descritto dalla formula:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t')$$

Ciò significa che la curva dei rendimenti subirà una traslazione parallela (verso l'alto o verso il basso) a seconda dell'ampiezza dello shift additivo descritta dalla variabile Z che è indipendente da s .

La Figura 4.1 descrive la traslazione della struttura per scadenza dei tassi OIS a seguito di uno shift parallelo di ampiezza +0,5%.

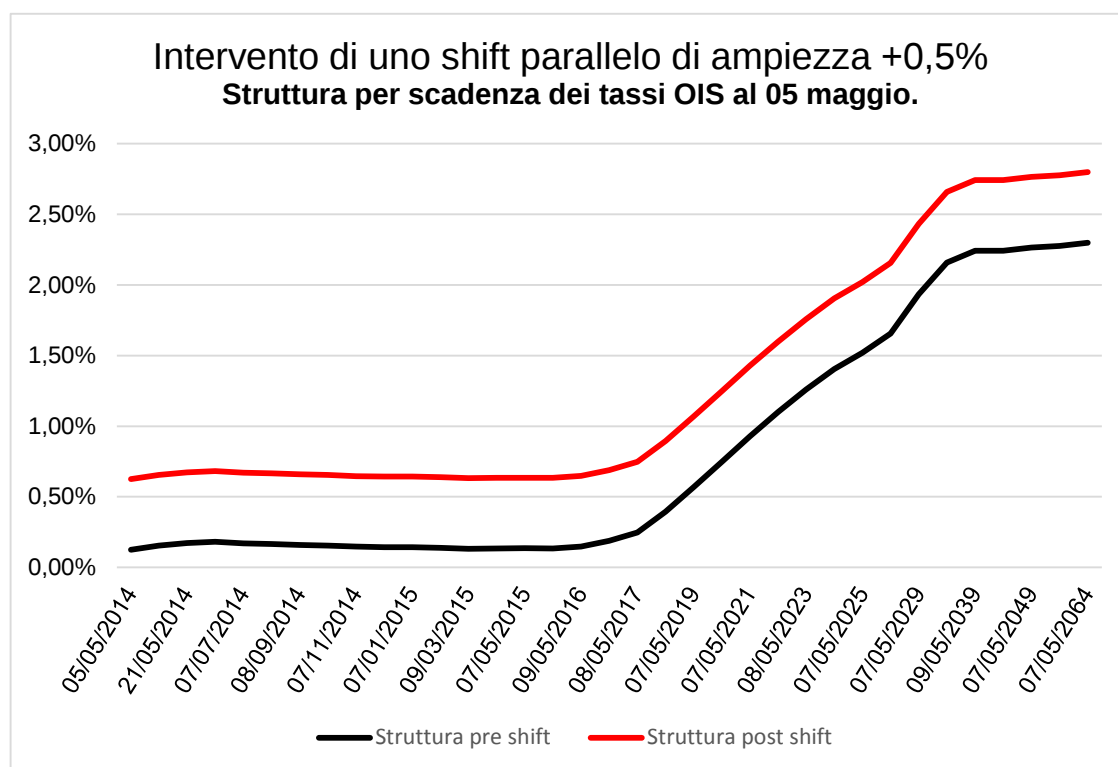


Figura 4.1 Ipotesi di shift parallelo di ampiezza +0,5% sulla struttura per scadenza dei tassi OIS sull'EONIA²⁶.

Poiché la suddetta traslazione è di tipo rigido, non abbiamo bisogno di interpolare la curva per ricercare il nuovo tasso di interesse che possiamo calcolare semplicemente aggiungendo al tasso rilevato in data 05 maggio uno 0,5% in più. Avremo quindi:

$$\text{Nuovo tasso} = 0,009273 + 0,005 = 1,4273\%$$

Ad un aumento del tasso di interesse, coerentemente con quanto già rilevato durante le analisi precedenti, corrisponderà un deprezzamento del valore attuale dell'importo finanziato che ammonterà ora a € 96.599.868,50.

La traslazione della struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP si ripercuoterà inevitabilmente in una variazione, di stessa ampiezza, del tasso interno di rendimento che avevamo calcolato, in sede di costruzione del

²⁶ Nostra elaborazione in base ai dati raccolti tramite Bloomberg.

portafoglio, per i nostri titoli. Questa variazione si tradurrà, poi, in una riduzione dei prezzi dei BTP.

Riportiamo nella Tabella 4.1 i nuovi tassi interni di rendimento e i nuovi prezzi dei titoli che compongono la parte attiva del portafoglio al 05 maggio.

ISIN	Nuovo TIR	Nuovo Prezzo
IT0004594930	2,6347%	€ 108,69
IT0004801541	3,2576%	€ 117,38
IT0005001547	3,6266%	€ 101,96

Tabella 4.1 Intervento dello shift additivo sul TIR e sul prezzo dei BTP in portafoglio.

Osserviamo anche graficamente il manifestarsi dello shift in Figura 4.2.

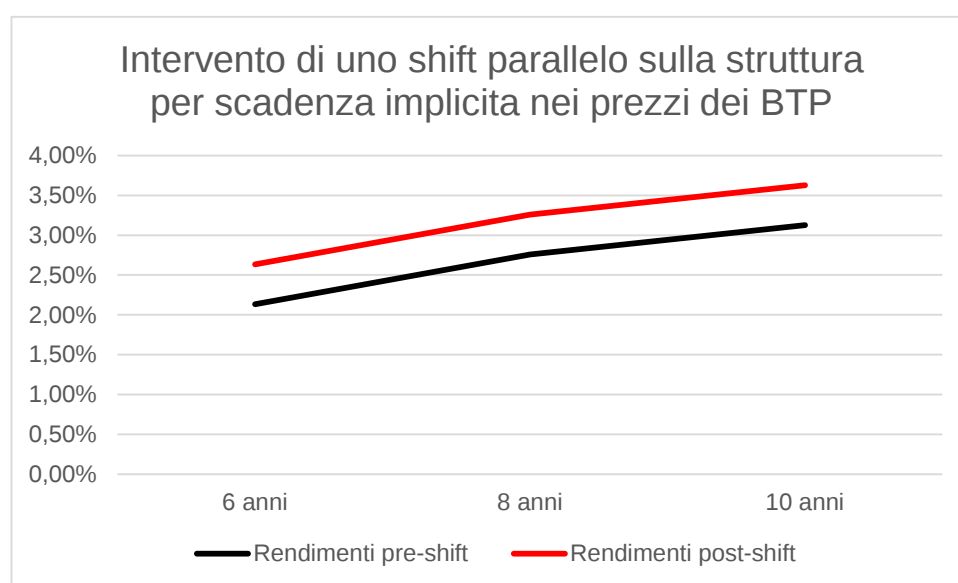


Figura 4.2. Uno shift di stessa natura e ampiezza di quello che ha colpito la struttura per scadenza dei tassi OIS interessa anche la curva dei rendimenti impliciti nei prezzi dei BTP.

È chiaro che, a seguito della diminuzione dei prezzi dei BTP, il valore dell'attivo subisca una variazione di segno negativo. Il suo nuovo valore ammonterà a € 96. 664. 934,15.

Detraendo il valore attuale del passivo dal valore attuale dell'attivo, siamo in grado di apprezzare il valore netto del nostro portafoglio che in questa circostanza sarà pari a € 65.065,65. Se consideriamo inoltre che il rapporto tra

i due parziali ammonta a circa 1,0006736, abbiamo effettivamente dimostrato l'efficacia del teorema di Fisher e Weil che ci ha consentito di costruire un portafoglio perfettamente immunizzato. Ciò, comunque, non deve sorprenderci in quanto abbiamo ipotizzato di trovarci esattamente nelle condizioni di shift descritte dagli autori.

4.2. Ipotesi di shift non rigido

Vediamo ora cosa succede invece quando lo shift si manifesta in maniera non rigida, quando cioè le strutture per scadenza dei tassi OIS e dei rendimenti dei BTP subiscono traslazioni non parallele. Sappiamo infatti che la condizione di shift parallelo è una delle ipotesi fondamentali sulla quale si basano le teorie classiche sull'immunizzazione finanziaria. Possiamo quindi aspettarci che stress di diversa natura indotti alle strutture per scadenza possano portare a risultati discordanti rispetto all'analisi precedente.

Studieremo l'ipotesi di shift non rigidi che si manifestano secondo tre diverse configurazioni.

IL CASO DEL *FLATTENING*

Quando i tassi a breve termine crescono in maniera più accentuata rispetto ai tassi a lungo termine ci troviamo di fronte a un caso di *Flattening*. Questo fenomeno comporta un appiattimento della struttura per scadenza dei tassi di interesse per via della minore differenza tra i tassi dei diversi fronti temporali.

La Figura 4.3 ci mostra come si evolva la struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP, desumibile dai prezzi dei titoli in portafoglio, a seguito di un aumento non rigido dei tassi di interesse intervenuto sotto forma di *Flattening*.

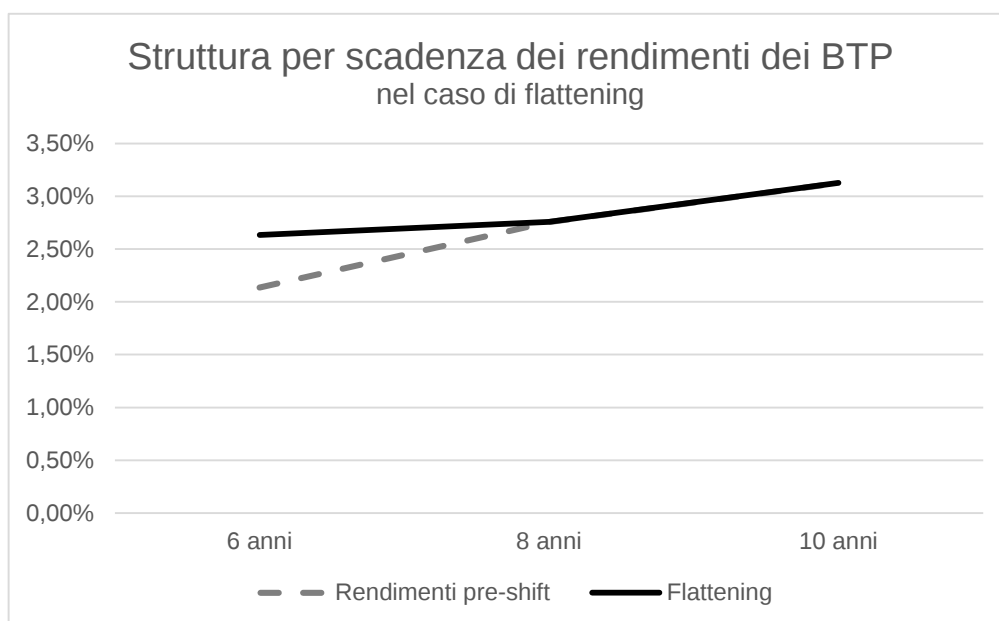


Figura 4.3 Un esempio di Flattening. I tassi a breve termine sono cresciuti in maniera più accentuata rispetto ai tassi a lungo termine (che abbiamo supposto rimanere invariati). Questo fenomeno comporta un appiattimento della struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP.

Per denotare più chiaramente l'effetto che il flattening ha sulla curva dei rendimenti abbiamo supposto che i tassi dei BTP a 6 anni abbiano sofferto uno shift di ampiezza +0,5% mentre i rendimenti dei BTP a 8 e 10 anni siano rimasti sostanzialmente invariati²⁷.

A questo punto i possibili scenari che si prospettano per il nostro portafoglio sono due:

- 1) Se la struttura per scadenza dei tassi OIS, che si suppone abbia sofferto uno shift della stessa entità, non varia nell'arco temporale tra i 6 e gli 8 anni (ricordiamo che il finanziamento che costituisce il nostro passivo ha maturity pari a 7 anni), allora uno shift del genere non ha alcun effetto sul nostro portafoglio. Infatti l'unico titolo a risentire del cambiamento dei tassi di interesse sarebbe l'IT0004594930 che però non è presente nel nostro portafoglio;

²⁷ Gli effetti che andiamo a descrivere in questo esempio, e nei successivi, hanno valenza del tutto accademica. Quando ipotizziamo degli shift di questa natura consideriamo i loro effetti sui tassi a breve e a lungo termine. Nel nostro caso l'arco temporale di riferimento è abbastanza ristretto e i tassi di interesse possono essere tranquillamente considerati tutti a lungo termine. Sarebbe più corretto parlare di tassi "a più breve" o "a più lungo termine".

- 2) Se lo shift si protrae invece fino alla scadenza dello *Zero Coupon Bond*, gli equilibri risulteranno sfalsati, anche se in maniera positiva, in quanto l'innalzamento del tasso di valutazione del nostro titolo a capitalizzazione integrale comporterebbe un deprezzamento del passivo a fronte di un attivo che rimarrebbe invece invariato.

Supponiamo infatti che la nuova struttura per scadenza dei tassi OIS si presenti come mostrato in Figura 4.4.

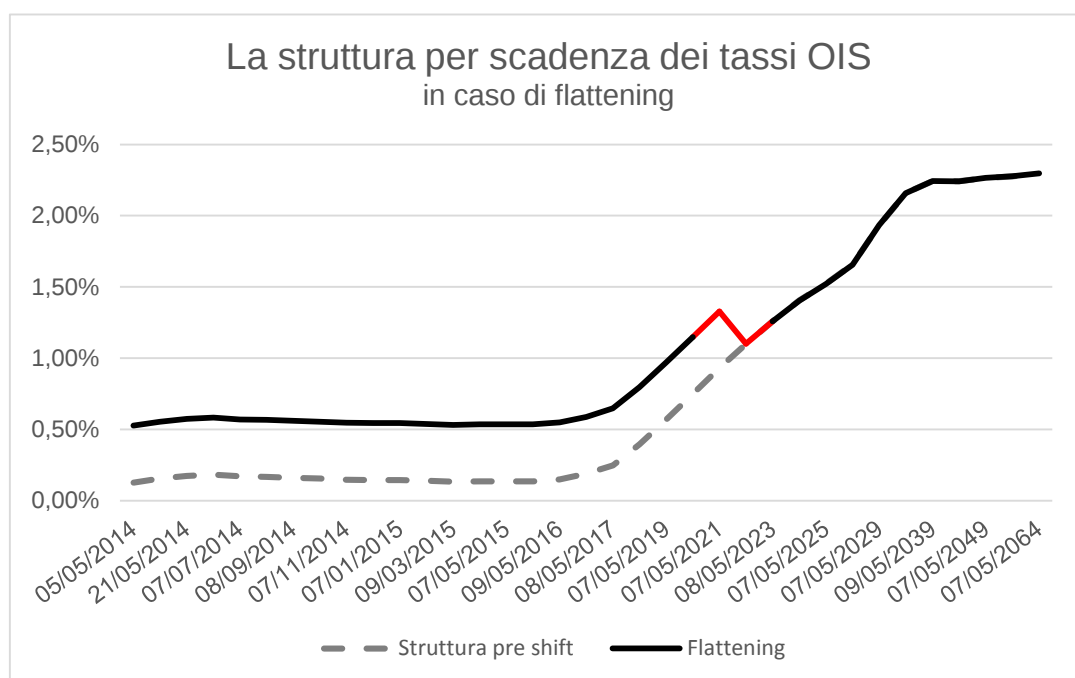


Figura 4.4. Possibili ripercussioni del Flattening sul nostro passivo. In rosso è evidenziata la parte di curva entro la quale possiamo apprezzare il valore del tasso di interesse al quale valuteremo il nostro finanziamento²⁸.

Abbiamo evidenziato in rosso l'area della struttura per scadenza dei tassi OIS entro la quale è compreso il nuovo tasso di interesse al quale valuteremo il nostro finanziamento. Interpolando la curva infatti risulterà che il nuovo tasso per il calcolo del valore attuale del passivo ammonterà al 1,3273%.

Come da previsione, all'incremento del tasso di valutazione corrisponderà un deprezzamento del valore del passivo che adesso sarà pari a € 97.269.267,55.

²⁸ Nostra elaborazione ottenuta a partire sulle rilevazioni dei tassi OIS in data 05 maggio.
[Fonte: Bloomberg].

Ma se il passivo si deprezza e l'attivo rimane invariato l'equilibrio del nostro portafoglio risulterà decentrato verso le poste positive consentendoci di rimanere solvibili.

IL CASO DEL MOTO A FARFALLA (*BUTTERFLY*)

Il moto a farfalla si registra quando i tassi intermedi crescono, o decrescono, in maniera più accentuata rispetto ai tassi di breve e di lungo periodo o addirittura si muovono con tendenza opposta. Questa particolare condizioni comporta un "ingobbimento" della struttura per scadenza dei tassi di interesse (da qui la definizione di *butterfly* per l'analogia tra gli estremi della curva e le ali di una farfalla).

Osserviamo nella figura 4.5 cosa succede alla struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP allorché supponiamo l'intervento di uno shift di questa entità:

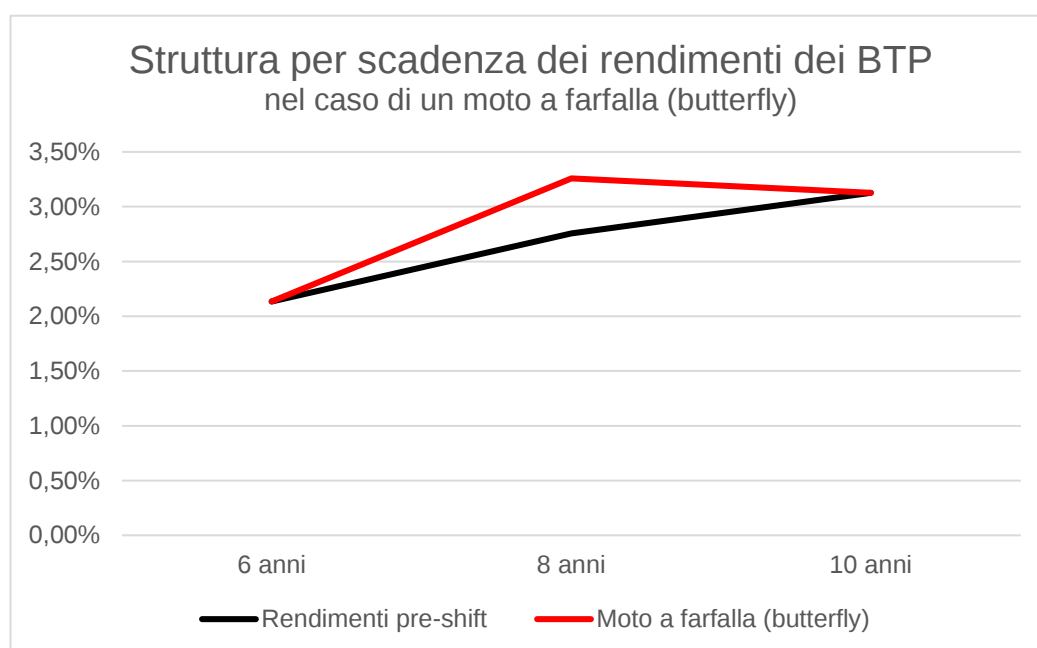


Figura 4.5. Un esempio di shift secondo moto a farfalla. I rendimenti dei BTP a 8 anni sono supposti essere crescenti a differenza dei rendimenti dei BTP a 6 e a 10 anni.

Nel nostro caso abbiamo supposto che i rendimenti dei BTP a 8 anni subiscano un incremento mentre i rendimenti dei BTP a 6 e a 10 anni rimangono inalterati.

Supponiamo invece che la struttura per scadenza dei tassi OIS subisca variazioni che intervengono solo a partire dall'ottavo anno (queste naturalmente cesseranno prima del decimo anno avendo noi ipotizzato che i BTP con tale maturity non subiscano variazioni di rendimento). Rappresentiamo graficamente la situazione del passivo nella Figura 4.6.

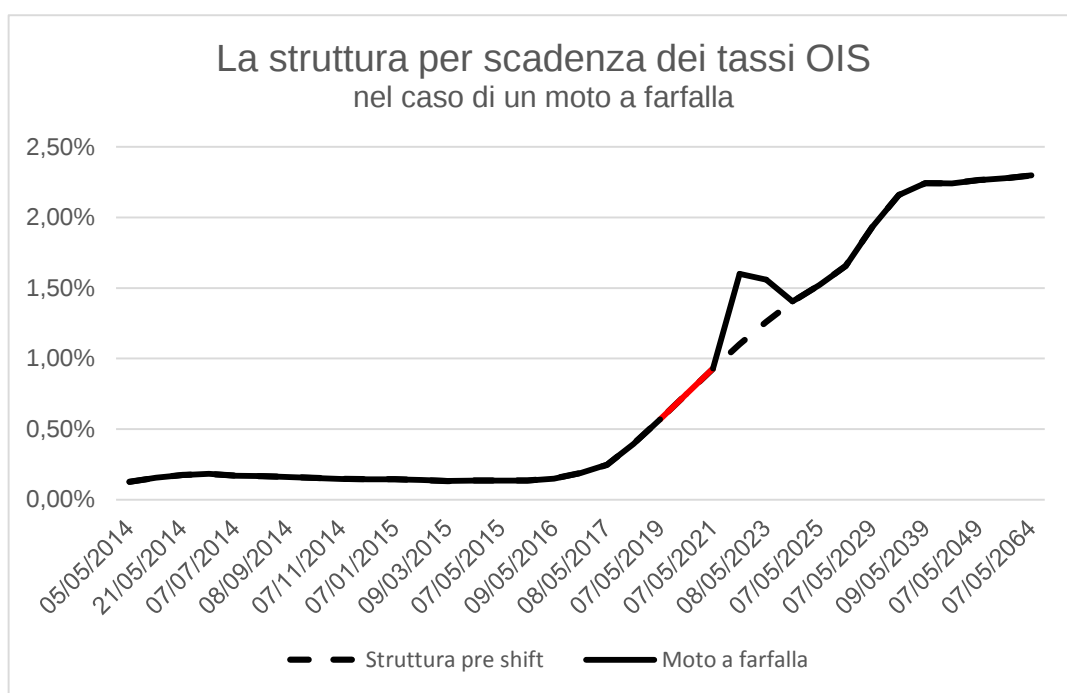


Figura 4.6. Il moto a farfalla genera una gobba sulla struttura per scadenza dei tassi OIS. Supponiamo comunque che lo shift non abbia effetto sul valore del passivo del nostro portafoglio²⁹.

In questo caso, dunque, ci ritroveremo in una situazione diametralmente opposta a quella vista in precedenza: se da un lato il passivo risulta essere invariato, dall'altro l'attivo viene colpito dallo shift proprio in corrispondenza del punto in cui esso risulta essere più vulnerabile. L'incremento del tasso di

²⁹ Nostra elaborazione ottenuta a partire sulle rilevazioni dei tassi OIS in data 05 maggio.
[Fonte: Bloomberg].

interesse si ripercuoterà infatti sul rendimento, e quindi sul prezzo, del titolo che è maggiormente presente nel nostro portafoglio: il titolo IT0004801541.

Vediamo numericamente cosa succede servendoci dei dati raccolti nella Tabella 4.2.

ISIN	TIR	Prezzo al TIR	Quantità
IT0004594930	2,1347%	€ 111,74	0,00
IT0004801541	3,2576%	€ 117,38	775.427,34
IT0005001547	3,1266%	€ 106,31	55.358,07

Tabella 4.2. Nuovi indicatori di prezzo e rendimento dei BTP in portafoglio.

Il prezzo del titolo IT0004801541 è sceso sensibilmente. La conseguenza sarà naturalmente un decremento del valore del nostro attivo con conseguente ripercussione sull'equilibrio di portafoglio. Infatti:

Valore del passivo = € 100.000.000,00

Valore dell'attivo = € 96.905.884,52

Il valore netto del portafoglio sarà chiaramente negativo e farà registrare uno scoperto di ammontare pari a € 3.094.115,48. Il rapporto tra attivo e passivo si attesta sullo 0,969059 a dimostrazione del fatto che, in questo caso, uno shift di questo tipo rende impossibile la tenuta del portafoglio.

IL CASO DELLO *STEEPENING*

L'ultimo caso che analizziamo in questo paragrafo riguarda il cosiddetto *Steepening* e cioè la situazione in cui i tassi a lungo termine crescono in maniera più accentuata rispetto a quelli di breve periodo. Come è facile intuire ciò si riflette in un'impennata della struttura a scadenza dei tassi di interesse.

Vediamo cosa accade ai rendimenti dei BTP nella Figura 4.7.

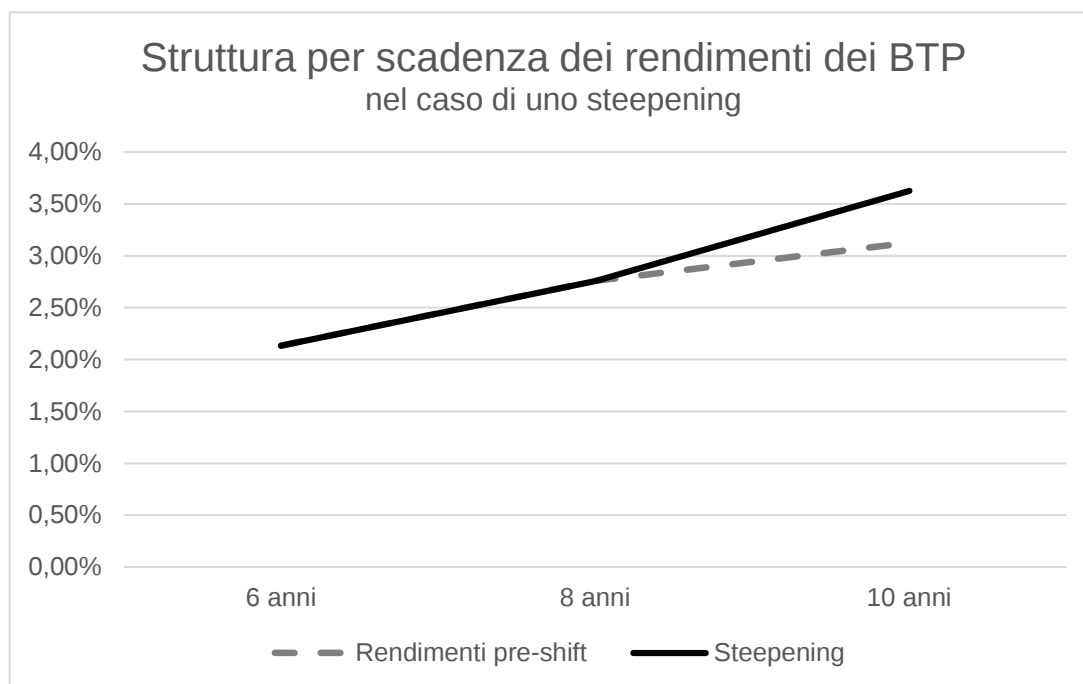


Figura 4.7. Lo Steepening e la conseguente impennata della struttura per scadenza dei BTP.

Anche stavolta abbiamo deciso di spingere verso l'alto solo i rendimenti dei BTP interessati dallo shift (in questo caso specifico i BTP a 10 anni) lasciando invariati gli altri. Come apprezzato nei casi precedenti, comunque, anche una semplice variazione di questo genere può avere ripercussioni sostanziose sugli equilibri del nostro portafoglio.

Se guardiamo al passivo infatti notiamo immediatamente che lo shift non produrrà alcun effetto sulla struttura per scadenza dei tassi OIS. Questo perché gli effetti delle variazioni intervenute sui rendimenti si manifesteranno soltanto in un'epoca successiva alla scadenza dello *Zero Coupon Bond* che costituisce il nostro finanziamento.

Osservando la Figura 4.8 apprezziamo come l'impennata della curva che descrive l'andamento dei tassi OIS non interessi in alcun modo il nostro portafoglio.

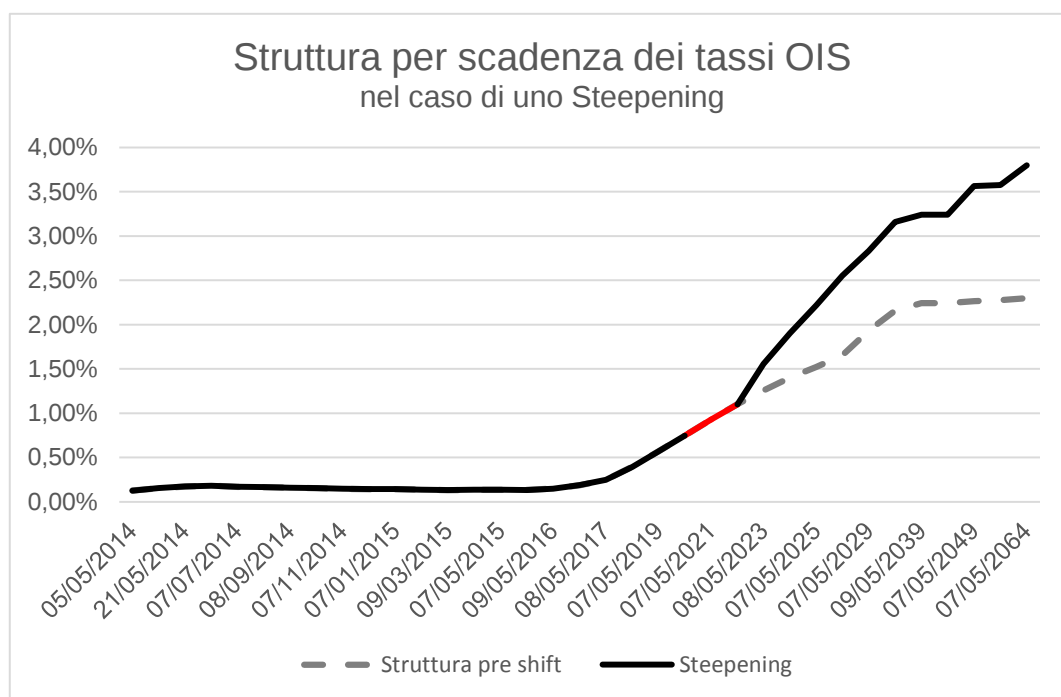


Figura 4.8. Lo Steepening sulla struttura per scadenza dei tassi OIS³⁰.

Anche stavolta quindi le variazioni dei tassi di interesse si ripercuoteranno esclusivamente sul lato dell'attivo colpendo, nello specifico, il titolo IT0005001547.

Analizzando i dati contenuti nella Tabella 4.3 possiamo apprezzare le variazioni intervenute sul rendimento e sul prezzo del BTP in questione:

ISIN	TIR	Prezzo al TIR	Quantità
IT0004594930	2,1347%	€ 111,74	0,00
IT0004801541	2,7576%	€ 121,37	775.427,34
IT0005001547	3,6266%	€ 101,96	55.358,07

Tabella 4.3 La variazione della struttura per scadenza dei BTP si ripercuote esclusivamente sul titolo IT0005001547.

³⁰ Nostra elaborazione ottenuta a partire sulle rilevazioni dei tassi OIS in data 05 maggio.
[Fonte: Bloomberg].

Come è già avvenuto analizzando l'impatto del moto a farfalla anche in questo caso è lecito attendersi che la diminuzione del prezzo del titolo IT0005001547 incida negativamente sulla tenuta del nostro portafoglio. Infatti:

Valore del passivo = € 100.000.000,00

Valore dell'attivo = € 99.759.049,62

Il valore netto è ancora una volta negativo e sarà pari a - € 240.950,38. Una perdita più contenuta rispetto al caso precedente che è facilmente spiegabile con il minor peso che il titolo IT0005001547 ha sul portafoglio. A questa perdita corrisponderà un valore del rapporto tra attivo e passivo inferiore a 1. Esso ammonterà infatti a 0,99759.

Anche un incremento dei soli tassi di lungo periodo è stato sufficiente a rendere vana l'immunizzazione del nostro portafoglio. Se ci fossimo trovati in una situazione di *Steepening* saremmo risultati insolventi alla data del 05 maggio 2021.

4.3 Ipotesi di shift parallelo che interessa con diversa ampiezza la struttura per scadenza dei tassi OIS e dei BTP

L'ultimo caso di cui ci occupiamo riguarda il manifestarsi di uno shift parallelo ma che colpisce con ampiezza differente le strutture per scadenza dal lato dell'attivo e dal lato del passivo. Una situazione del genere sconfessa una delle ipotesi di base su cui poggiano le tecniche classiche di immunizzazione finanziaria e cioè quella secondo cui avvicinandosi il più possibile ad una

situazione di *perfect matching*, è possibile rendere ugualmente vulnerabili le attività e le passività del portafoglio.

Quando nei capitoli precedenti abbiamo parlato di immunizzazione abbiamo infatti ipotizzato che lo shift parallelo interferisse allo stesso modo sui tassi di interesse passivi e sui rendimenti dei titoli in portafoglio. Nella realtà questa situazione difficilmente viene verificata.

Naturalmente dovremmo essere in grado, a questo punto, di avere un'idea precisa di cosa succeda quando l'attivo e il passivo subiscono oscillazioni dei rendimenti differenti. Poiché infatti il loro valore attuale è funzione decrescente del tasso di interesse, ad un maggiore valore del tasso corrisponderà un deprezzamento più accentuato delle attività o delle passività che stiamo valutando in quel momento.

È tramite questo ragionamento che siamo quindi in grado di apprezzare ancor di più il valore degli indicatori di rischio che abbiamo osservato nel capitolo 1 e che ci permettono di descrivere la sensibilità e il comportamento dei titoli del portafoglio a seguito di una variazione dei tassi di interesse.

Serviamoci comunque di un esempio numerico per verificare se le nostre ipotesi hanno effettivamente valore: ipotizziamo che la struttura per scadenza dei tassi OIS sull'EONIA alla data del 05 maggio subisca uno shift parallelo, a partire da un generico istante t , di ampiezza $+0,2\%$ (Figura 4.9).

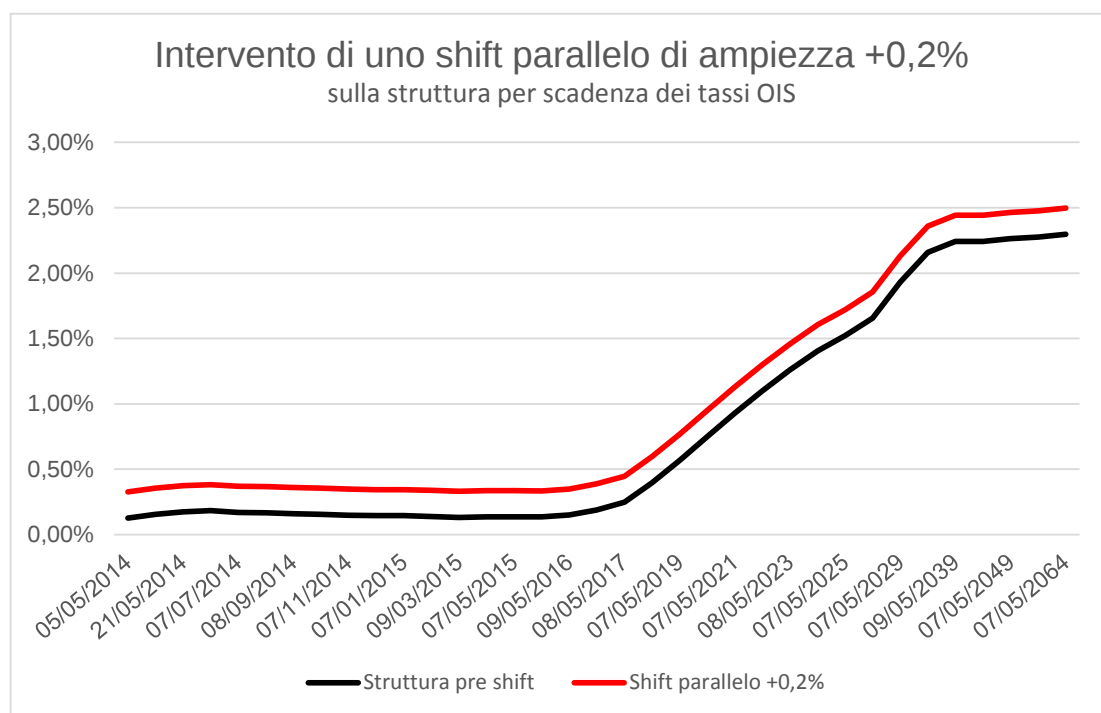


Figura 4.9. Lo shift parallelo di ampiezza positiva trasla la curva verso l'alto.

Poiché lo shift è rigido il tasso di interesse per la valutazione del finanziamento si muoverà esattamente nello stesso modo dell'intera struttura per scadenza. Esso sarà quindi pari al 1,1273%³¹.

Il valore del passivo (deprezzato) ammonterà invece a € 98.623.793,18.

A questo punto ipotizziamo che anche la struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP subisca gli effetti di uno shift parallelo. Stavolta però imponiamo un ampiezza maggiore: ad esempio +0,5% (Figura 4.10).

³¹ Abbiamo semplicemente sommato uno 0,002 al valore del tasso di interesse che avevamo calcolato in data 05 maggio.

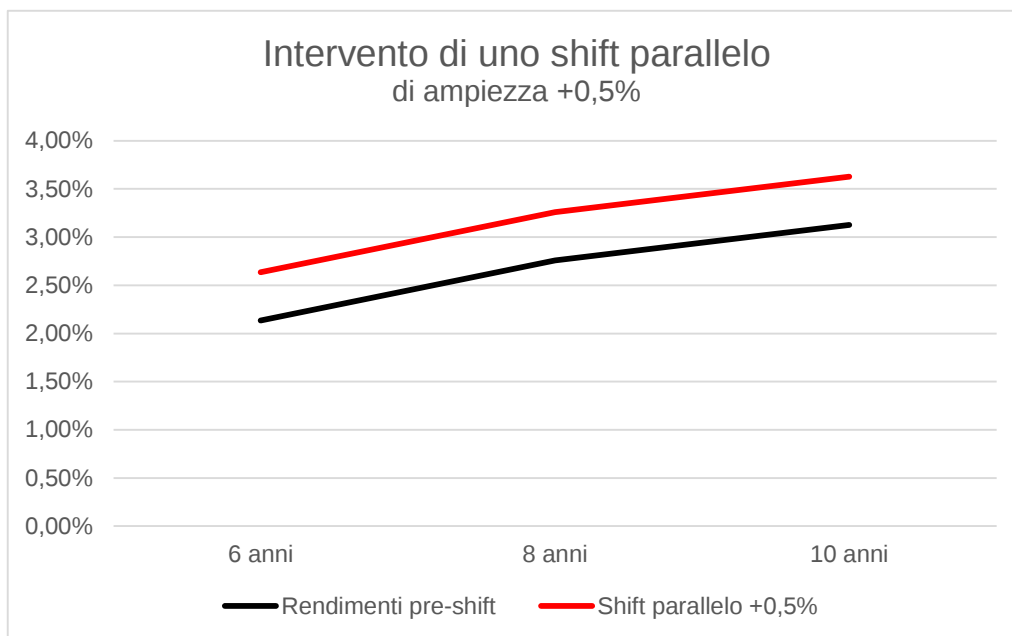


Figura 4.10 Anche la struttura per scadenza dei BTP subisce gli effetti di uno shift parallelo.

I rendimenti dei BTP avranno un'impennata così come i loro TIR e di conseguenza anche i loro prezzi. Riportiamo i dati relativi alla nuova situazione dell'attivo nella Tabella 4.4.

ISIN	TIR	Prezzo al TIR	Quantità
IT0004594930	2,6347%	€ 108,69	0,00
IT0004801541	3,2576%	€ 117,38	775.427,34
IT0005001547	3,6266%	€ 101,96	55.358,07

Tabella 4.4. I nuovi TIR e i nuovi prezzi dei BTP in portafoglio.

Come avevamo intuito i prezzi dei titoli sono diminuiti. Diminuirà pertanto anche il valore dell'attivo che ammonterà adesso a € 96.664.934,15.

Ci troviamo naturalmente di fronte a una situazione di squilibrio di portafoglio che non ci permette di far fronte alle nostre obbligazioni. Infatti il rapporto tra attivo e passivo ammonta a 0,98014. A questo valore negativo del rapporto tra le grandezze corrisponde un valore altrettanto negativo della loro differenza: il valore netto del portafoglio si presenta sotto forma di una perdita che ammonta a - € 1.958.859,03.

Capitolo 5. Conclusioni

Come è emerso dall'applicazione del caso pratico nel capitolo 3, e successivamente nel capitolo 4 anche per lo studio effettuato tramite gli shift prodotti ad hoc, la puntuale applicazione del teorema di Fisher e Weil non è sempre sufficiente per garantire la tenuta dell'immunizzazione del portafoglio.

Il portafoglio costruito in data 05 maggio ha risposto positivamente alle variazioni dei tassi di interesse attivi e passivi registrati alla data del 30 giugno 2014. In quell'occasione abbiamo infatti stimato un valore positivo (1,0067) del coefficiente che esprime il rapporto tra le poste attive e passive ed il valore netto del nostro portafoglio risultava essere pari a € 687.560, 34.

Con il senno di poi siamo in grado di affermare che questa situazione si è manifestata grazie a due tipi di istanze:

- 1) Lo shift registrato è stato quasi perfettamente parallelo;
- 2) Lo shift ha interessato con ampiezza simile le strutture per scadenza dei tassi OIS e dei rendimenti dei BTP

Questi fattori ci hanno ricondotto in una condizione simile a quella che abbiamo testato nel capitolo 4 (paragrafo 4.1) quando abbiamo ipotizzato, coerentemente con quanto affermato dalle ipotesi di fondo sui cui si basa il teorema di Fisher e Weil, l'intervento di shift paralleli e di stessa ampiezza sulle curve dei tassi passivi e dei rendimenti.

La situazione è invece degenerata in data 08 agosto quando, verificando gli effetti delle variazioni dei tassi di interesse sul nostro portafoglio, abbiamo riscontrato una drastica diminuzione del rapporto tra attivo e passivo che in quell'occasione ammontava a 0,9837. La stessa sorte ha interessato anche il valore netto del portafoglio che è sceso fino al valore di - € 1.669.584,50.

Il fallimento del secondo tentativo può essere imputato al manifestarsi di uno degli altri casi che abbiamo studiato nei paragrafi 4.2 e 4.3. La causa del tracollo del nostro portafoglio potrebbe ricercarsi ad esempio in una diversa ampiezza degli shift che sono intervenuti sulla struttura per scadenza dei tassi OIS e su quella dei rendimenti dei BTP. Ad onor del vero non ci pare questo il caso, o meglio non solo questo: nello studio effettuato nel paragrafo 4.3, infatti, abbiamo riprodotto una perdita simile a quella registrata in data 08 agosto producendo shift di ampiezza molto diversa tra loro sulle due curve (0,3 punti percentuali). Se analizziamo invece la situazione del portafoglio ad agosto, notiamo che la differenza tra gli shift non è stata altrettanto significativa.

La vera motivazione di quello che eufemisticamente parlando potremmo definire il nostro “*venerdì nero*”³² deriva, con molta probabilità, dalla manifestazione di uno shift non rigido che ha interessato in maniera particolare la struttura per scadenza dei BTP. La nostra ipotesi può essere confermata se torniamo ad osservare la Figura 3.9: focalizzando la nostra attenzione sul confronto tra la curva dei rendimenti al 05 maggio (in nero) e al 08 agosto (in azzurro) notiamo analogie, anche se con tendenza opposta, tra questa situazione e quella emersa in ambito di confronto tra la struttura per scadenza dei rendimenti dei BTP nel caso di un moto a farfalla (Figura 4.5).

In questo caso i rendimenti intermedi dei BTP hanno subito un calo meno accentuato rispetto ai rendimenti di più breve e più lungo periodo. Tutto questo ha inciso in maniera forte sul rendimento dell’attivo del nostro portafoglio che, come abbiamo visto nel paragrafo 4.2, è stato colpito proprio nel suo punto di maggiore vulnerabilità: ad un decremento meno consistente dei tassi intermedi è seguito un apprezzamento più contenuto del titolo IT0004801541 rispetto agli altri titoli dell’attivo e rispetto, soprattutto, allo *Zero Coupon Bond* che rappresentava il nostro passivo.

Abbiamo individuato quindi dei limiti all’applicazione del teorema di Fisher e Weil che si sostanziano proprio nel suo carattere di essere una teoria a stampo semi – deterministico. Se da un lato infatti la possibilità di lavorare con flussi di cassa con importi e scadenza noti ci consente, attraverso l’utilizzo di indicatori

³² Il riferimento è al “Lunedì nero”. Con questa locuzione si fa riferimento all’improvviso crollo che interessò i mercati finanziari di tutto il mondo e che ebbe inizio lunedì 19 ottobre 1987.

come la duration, di pervenire ad un allineamento quasi perfetto tra attivo e passivo, dall'altro la presunzione che la struttura per scadenza dei tassi di interesse si muova esclusivamente in modo rigido e che le variazioni di rendimento interessino in egual modo sia i tassi passivi che quelli attivi, rendono il nostro tentativo di costruire portafogli dal rendimento garantito.

In effetti una delle prime lezioni che si impara quando si approccia ad una qualsiasi materia che si occupi di finanza è la seguente: "le macchine da soldi non esistono". Pur se il teorema di Fisher e Weil sembra abbracciare appieno questa filosofia, esso rimane, insieme alle altre teorie sviluppate in questo ambito, un utile strumento d'ausilio nelle scelte gestionali e di portafoglio a patto che, naturalmente, si abbia un'idea ben precisa dei suoi limiti e dei casi in cui la manifestazione di uno shift può produrre risultati differenti rispetto a quelli attesi.

Del resto un coefficiente di solvibilità pari al 98%, o anche al 96%, è un risultato più apprezzabile rispetto a scenari ben più desolanti.

Bibliografia

Arcelli M., *L'economia monetaria e la politica monetaria dell'Unione Europea*, nona edizione. Padova: CEDAM, 2007;

Bachelier L., "Théorie de la spéculation. Théorie mathématique du jeu". Parigi: Edition Jacques Gabay, 1995.

Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F. A., Torrigiani M., *Matematica Finanziaria. Seconda edizione*. Bologna, Monduzzi Editore, 1998;

Brealey R. A., Myers S. C., Allen F., Sandri S, *Principi di finanza aziendale. Quinta edizione*. Milano: McGraw-Hill, 2007;

Carluccio E., Cucurachi P. A., Zorzoli S., *Economia e gestione della banca*. Milano: EGEA, 2006;

Castellani M., Gozzi F., "Matematica di base per l'Economia e l'Azienda". Bologna: Società Editrice Esculapio, 2001;

De Felice M., Moriconi F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*. Bologna: il Mulino, 1991;

Di Giorgio G., *Lezioni di economia monetaria, terza edizione*. Padova: CEDAM, 2007;

Dunbar N., *Anche i Nobel perdono. Idee, persone e fatti della finanza*. Milano: EGEA, 2003;

Fisher L., *An Algorithm for Finding Exact Rates of Return*. Chicago: The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security prices, 1966;

Fisher L., Weil R. W., *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies*. Chicago: The Journal of Business, Vol. 44;

Foschini G., materiale didattico del corso di Matematica Finanziaria. Roma: Università LUISS Guido Carli, 2011.

Improta G., *Programmazione Lineare*, Napoli: Edizioni Scientifiche Italiane, 2004;

Macaulay F., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research, 1938;

Nadotti L., Porzio C., Previati D., *Economia degli intermediari finanziari*. Milano: McGraw-Hill, 2010.