Facoltà di ECONOMIA

Laurea Magistrale in Economia e Finanza

Cattedra di Matematica Finanziaria C.P.

L'INFLUENZA DELLA CADENZA DELLE SERIE STORICHE SULLE SCELTE D'INVESTIMENTO

RELATORE

Chiar.mo Prof. Gennaro OLIVIERI

Candidato

Giuseppe LA CHINA

Matr. 644401

CORRELATORE

Chiar.mo Prof. Nicola BORRI

Anno Accademico 2013 / 2014

Alla mia famiglia

INDICE

INTRODUZIONE

Le teorie relative alla costruzioni dei portafogli ottimi si sono da sempre concentrati sugli indici che caratterizzano le serie storiche, soprattutto quelle riguardanti i rendimenti dei vari strumenti finanziari. Essendo, però, l'analisi riferita ad osservazioni passate, emerge il problema dell'orizzonte temporale scelto come riferimento per le serie storiche analizzate.

Tale problematica è stata in un primo momento sottostimata. La "Teoria della Portfolio Selection" di Markowitz, grazie alle ipotesi del modello, che ne semplificano l'analisi, ha spostato in secondo piano tale aspetto. Tutto ciò era possibile supponendo che la distribuzione dei rendimenti logaritmici fosse Guassiana e il processo stazionario. Questo infatti permetteva di descrivere la serie dei rendimenti attraverso due soli indici, il rendimento atteso e la varianza, che *divenivano dunque costanti e indipendenti dal tempo*.

Gli studi successivi in ambito finanziario si sono focalizzati sulle cause e sulle soluzioni relative alle discordanze tra i risultati teorici prodotti attraverso il modello di Markowitz e i risultati empirici rinvenibili sui mercati finanziari reali. Infatti, le caratteristiche tipiche dei mercati finanziari reali contrastano per lo più con le ipotesi su cui si fonda la teoria di selezione di portafoglio. Le serie finanziari reali fanno emergere due tratti specifici che complicano l'analisi dei titoli, la forma della distribuzione e l'indipendenza temporale tra le osservazioni di uno stesso titolo. Per quanto riguarda il primo aspetto, si osserva che raramente una serie storica finanziaria rispetta i parametri di una distribuzione Gaussiana, poiché presenta maggior probabilità di eventi estremi (leptocurtosi), e asimmetria rispetto al valor medio, quindi maggior probabilità di piccole perdite rispetto a piccoli guadagni (asimmetria negativa) o viceversa (asimmetria positiva). Per quanto riguarda la dipendenza temporale delle osservazioni, ciò rende fuorviante considerare la varianza storica un buon parametro per la varianza futura, e inoltre obbliga a quantificare la dipendenza tra i rendimenti di un particolare arco temporale.

Questi ultimi aspetti trattati, mettono in risalto l'importanza della scelta del periodo temporale studiato. Infatti, le caratteristiche della distribuzione dei rendimenti possono variare di periodo in periodo. Inoltre, non essendo la varianza costante, ogni arco temporale può presentare un proprio valore specifico di volatilità, oltre a poter essere i rendimenti di quel periodo più o meno legati tra loro, con ovvie ripercussioni sull'analisi dei titoli.

Per una dimostrazione empirica di quanto detto, si sono applicate le teorie del modello di Markowitz a tre serie storiche, di lunghezza diversa, dei titoli, quotati sul mercato borsistico italiano, che compongono l'indice FTSE MIB.

Come si evince dai risultati, per ogni serie storica analizzata risultano dati specifici, nonostante siano applicati i medesimi metodi di analisi. Nonostante si presentino alcuni tratti di somiglianza tra le diverse serie storiche, in nessun caso emergono risultati comuni tra i tre portafogli ottimi, o tra i titoli che li compongono, chiaro segno del fatto che l'orizzonte temporale influisca sulla scelta d'investimento che si intende effettuare.

CAPITOLO 1

STRUMENTI FINANZIARI E VARIABILI D'INTERESSE

In questa parte iniziale lo studio si soffermerà sulle caratteristiche tipiche delle azioni di società quotate in Borsa, in seguito unico strumento finanziario preso in considerazione nella creazione di determinati portafogli finanziari. Oltre all'introduzione delle azioni, verranno esaminate le variabili principali con cui poter studiare le caratteristiche dei diversi titoli, e che verranno trattate in maniera più approfondita nel proseguo del testo.

1.1 LE AZIONI SOCIETARIE

L'azione rappresenta la quota di partecipazione di un socio al capitale di rischio di una società. Il possesso del documento rappresentante l'azione conferisce al possessore una serie di diritti amministrativi ed economico-patrimoniali, variabili a seconda della tipologia di azioni. La tipologia più comune è rappresentata dalle azioni ordinarie che danno diritto al voto durante le assemblee della società partecipata e il diritto di ricevere una parte degli utili sotto forma di dividendo. Altre caratteristiche hanno, invece, le azioni di risparmio in cui viene escluso il diritto di voto nelle assemblee in cambio di un dividendo maggiore durante la spartizione degli utili. Categorie meno utilizzate sono le azioni privilegiate, preferenziali, correlate, postergate e infine azioni a favore dei prestatori di lavoro. L'azione non dà alcuna certezza sulla restituzione del capitale, in caso di fallimento della società, né di alcun rendimento, né di una determinata scadenza; l'eventuale rendimento e il valore di rimborso saranno calcolati soltanto alla fine della vita della società o nel caso di uscita del socio dalla stessa.

Distinzione importante avviene per quanto riguarda il valore di ogni azione, in quanto raramente il valore nominale e il valore di mercato coincidono. Il primo rappresenta il valore di ogni quota in cui è diviso il capitale sociale e viene fissato all'emissione del lotto di azioni. Il valore di mercato è rappresentato dal prezzo pagato per l'acquisto dell'azione sul mercato e questo può variare nel tempo, determinando eventuali guadagni o perdite per l'investitore. Per le società quotate il valore di mercato non è altro che il prezzo disponibile in Borsa e il valore complessivo delle azioni emesse è espresso dalla capitalizzazione, risultato della moltiplicazione tra il valore di mercato di un'azione e il numero di azioni complessive della società in uno specifico istante di tempo. Le azioni delle società quotate vengono, dunque, trattate sui mercati borsistici e questo permette una valutazione più immediata e un aggiustamento continuo del prezzo, che tenga conto di tutte le informazioni determinanti per l'esatta valutazione della società stessa.

Molto utilizzati sono anche gli indici, calcolati all'interno delle varie Borse valori, che sintetizzano l'andamento generale del mercato o di un segmento accomunato da caratteristiche simili. La quotazione dell'indice è il prezzo del portafoglio formato da tutti i titoli che ne fanno parte, ponderando i prezzi di ogni titolo con la relativa capitalizzazione di mercato. La composizione del portafoglio può variare nel tempo a causa dell'emergere di alcune società o del declino di altre, per questo l'indice viene rivisto periodicamente (di solito semestralmente), in modo da sintetizzare nella maniera più fedele possibile il reale andamento del mercato o del settore in questione.

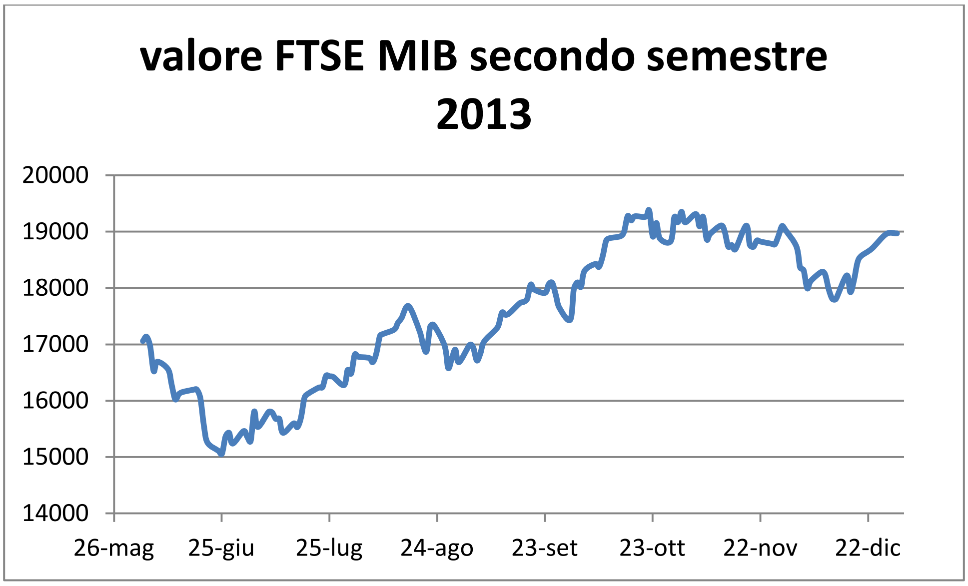
Per quanto riguarda il mercato italiano si fa riferimento all'indice FTSE MIB, il principale indice azionario di Borsa Italiana, nato dopo la fusione tra *Borsa Italiana* e *London Stock Exchange*, e attivo a partire dal Giugno 2009. Questo indice raccoglie l'80% della capitalizzazione del mercato borsistico italiano, esprimendo l'andamento delle maggiori 40 società quotate, per capitalizzazione e liquidità, prestandosi ad essere, dunque, un ottimo riferimento per analizzare l'andamento generale dell'economia italiana.

1.2 IL PREZZO

Il prezzo è la variabile osservabile dalle quotazioni di Borsa. Infatti gli scambi sul mercato e le nuove informazioni relative al titolo, modificano continuamente il prezzo al quale è possibile acquisire l'azione. E' possibile rilevare diversi prezzi sull'intera giornata di quotazioni che si riferiscono a diversi momenti presi come riferimento; infatti possiamo distinguere tra prezzo di apertura (open), prezzo di chiusura (close), prezzo più alto durante l'intera giornata (high) e infine il prezzo più basso (low). Di solito il prezzo di chiusura è quello utilizzato per l'analisi del titolo e verrà preso in considerazione anche in questo studio.

Imprescindibile al fine dell'utilizzo del prezzo, come dato principale per l'analisi dei titoli, è l'ipotesi di efficienza del mercato. Si suppone cioè che il prezzo incorpori tutta l'informazione disponibile e che si aggiusti in maniera rapida in caso di nuove notizie, limitando così la possibilità di extra-rendimenti. Ovviamente un'ipotesi così forte è utilizzata per rendere l'analisi più semplice, così come l'ipotesi di mancanza di costi di transazione durante l'acquisto o la vendita di un titolo.

Per quanto riguarda invece la parte quantitativa, il prezzo sarà rappresentato dalla lettera P indicizzato con la lettera t (P_t), dove t rappresenta il tempo di osservazione di quel dato prezzo. Come è facile notare, il prezzo non potrà mai avere valore negativo, infatti il fallimento della società comporta al massimo l'azzeramento del valore del titolo. Questo aspetto va in contrasto con l'ipotesi di normalità della distribuzione della seria storica, essenziale per l'analisi. Infatti la distribuzione normale copre l'intervallo (-∞;+∞), diversamente dai valori possibili del prezzo, rendendo necessario l'utilizzo di altri dati che più si adattano all'ipotesi di normalità della distribuzione, come ad esempio i rendimenti (trattati in seguito). Altro aspetto critico della distribuzione del prezzo, che ne evidenzia la non stazionarietà, è la dipendenza tra dati temporalmente vicini tra loro. E' intuitivo infatti che il prezzo al tempo t risentirà del valore del titolo in t-1, poiché quest'ultimo sarà il punto di partenza per eventuali variazioni di valore. Anche il grafico, che rappresenta il valore dell'indice FTSE MIB nel secondo semestre del 2013, ci aiuta a evidenziare gli ultimi due aspetti descritti. Infatti non si osservano valori negativi ed è facile notare che, in tutta la curva, il prezzo risente del valore dell'indice nel giorno precedente. Per queste considerazioni si preferisce non utilizzare il prezzo per l'analisi del titolo e costruire serie storiche che facilitano lo studio e meglio si adattano alle ipotesi dei modelli utilizzati.



Dati Bloomberg

1.3 IL RENDIMENTO

Di fondamentale rilevanza negli studi finanziari è il rendimento, utilizzato come principale strumento di analisi in materia. Il rendimento non è altro che la variazione percentuale del prezzo di un titolo in un intervallo temporale. Il grande utilizzo deriva da due aspetti principali:

- l'investitore è interessato alla variazione del proprio capitale, e quindi il rendimento esprime in maniera completa e veloce questa variazione rispetto all'utilizzo del prezzo;

- la distribuzione dei rendimenti presenta caratteristiche che meglio si adattano ai modelli utilizzati nei vari studi finanziari, diversamente dalla serie dei prezzi.

Per il calcolo del rendimento possiamo utilizzare due metodi che presentano caratteristiche e peculiarità proprie.

Partendo dalla definizione di rendimento, tra l'istante t e t-1, è calcolato come:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (1)$$

dove:

- P_t rappresenta il prezzo del titolo al tempo t;

- P_{t-i} rappresenta il prezzo del titolo al tempo t-1;

- D_t sono i pagamenti avvenuti durante il periodo in considerazione.

Ipotizzando, per semplicità, che non ci siano pagamenti ($D_t = 0$), è possibile dalla (1) scrivere:

$$1+R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad \text{da cui} \quad P_t = P_{t-1}\,(1 + R_t). \quad (2)$$

È intuitivo notare che R_t ha come limite inferiore il valore -1. Questo rende difficile studiare la serie poiché non si distribuisce come una normale che ha come limiti $-\infty$ e $+\infty$.

È possibile risolvere tale problematica ricavando il tasso istantaneo di rendimento. Basterà quindi applicare il logaritmo alla (2) e avremo:

$$R_t^* = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \delta\ (t-1, t). \quad (3)$$

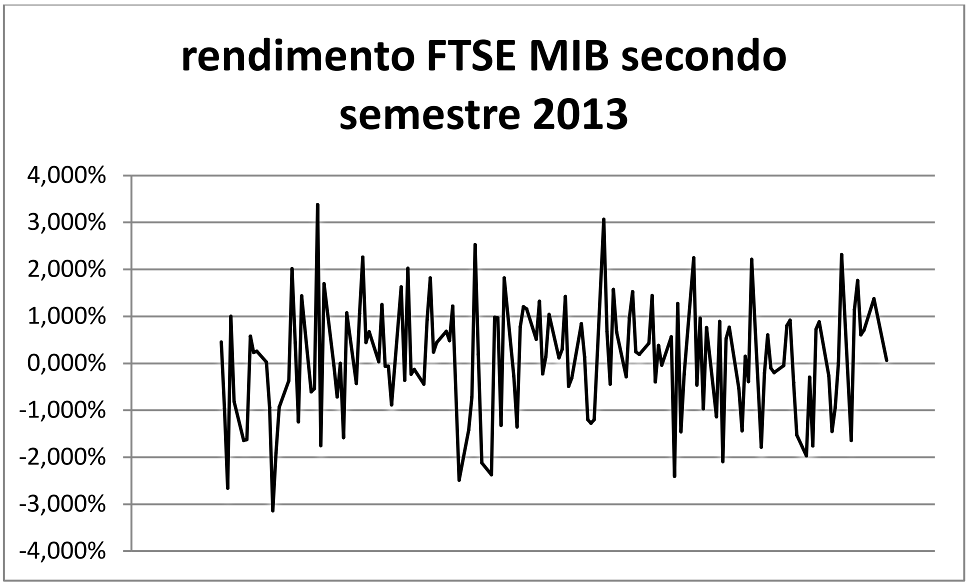
Si può generalizzare la (3) a k periodi infatti, se $R_t^* = \ln P_t - \ln P_{t-1}$:

$$R_t^*(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (\ln P_{t-i} - \ln P_{t-i-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} R_{t-i}^* . \qquad (4)$$

La (4) non è altro che il rendimento logaritmico relativo all'intero periodo (t-k, t), mentre, per, ad esempio, annualizzare il rendimento relativo a k anni, basterà dividere per k (stesso ragionamento vale per i giorni, le settimane o i mesi nell'intero arco di tempo preso in considerazione).

Oltre alla facilità di calcolo con cui è possibile trovare il tasso di rendimento istantaneo relativo ai diversi istanti di tempo, la distribuzione dei rendimenti rispetta le ipotesi della distribuzione normale, infatti i rendimenti possono variare da -∞ a +∞.

In aggiunta, si può notare dal grafico che il valore medio si avvicina molto al valore nullo e il rendimento a un certo istante di tempo sembra non risentire dell'influenza del rendimento precedente rispettando quindi le ipotesi di stazionarietà, come invece non avveniva nel caso dell'utilizzo del prezzo.



Elaborazione personale su dati Bloomberg

CAPITOLO 2

PROPRIETÀ DEI RENDIMENTI

Questa sezione affronterà lo studio della distribuzione dei rendimenti, per descrivere gli indici principali che caratterizzano e sintetizzano l'andamento della serie. Infatti poiché non è possibile conoscere a priori i prezzi futuri dei titoli, e di conseguenza il relativo rendimento, tratteremo quest'ultimo come una variabile casuale a cui è legata una distribuzione di probabilità. Due saranno gli indici principali utilizzati per lo studio della serie storica: il rendimento atteso e la varianza. Essi rappresentano, rispettivamente, una misura della redditività e del rischio dell'attività finanziaria. Esaminati quest'ultimi, si accennerà ad altri due momenti che caratterizzano le serie storiche dei rendimenti, l'indice di simmetria e l'indice di curtosi. Entrambi vengono utilizzati per testare la coerenza della distribuzione della serie rispetto alle ipotesi utilizzate nei vari modelli che trattano la selezione di un portafoglio finanziario. Infatti essi descrivono la forma della curva di distribuzione dei rendimenti, in particolare, rispettivamente, la simmetria di osservazioni rispetto al valore atteso e la densità dei valori estremi (negativi e positivi). Infine verrà fatto un accenno sulla dipendenza tra rendimenti osservati ad epoche diverse, cioè se il rendimento di un titolo al tempo t risente del rendimento verificatosi in epoche precedenti, considerato che per ipotesi i rendimenti debbano essere incorrelati tra loro.

2.1 VALORE ATTESO E VARIANZA

La decisione su quale variabile utilizzare per lo studio dei titoli va ricercata nelle definizione di stazionarietà di un processo stocastico[1], tipica

[1] Un processo stocastico può essere definito come una successione ordinata di variabili aleatorie indicizzate al tempo t, con t = 0,...,T

delle distribuzioni Gaussiane[2]. Dato un insieme di variabili casuali $R_{0,}R_{1,\dots,}$ un processo è definito stazionario se la distribuzione (R_{t1}, ..., R_{tk}) è uguale alla distribuzione (R_{t1+j}, ..., R_{tk+j}) per ogni j, k e t_1, ..., t_k. Ciò significa che le caratteristiche probabilistiche rimangono invariate per ogni spostamento effettuato sull'asse dei tempi. Si parla, invece, di stazionarietà debole se, per qualsiasi sfasamento temporale, il valore atteso e la varianza delle distribuzioni rimangono invariati. La non stazionarietà può manifestarsi in presenza di trend, stagionalità o se la varianza di una serie cambia nel tempo.

Pare evidente dunque che né la serie storica dei prezzi né la serie storica dei rendimenti relativi possiedono le caratteristiche di stazionarietà. Infatti la prima presenta evidenti trend locali mentre la serie dei rendimenti relativi ha come limite inferiore il valore -1, che non permette di usare i modelli Gaussiani aventi come limite inferiore $-\infty$.

Appurate le cause per cui si preferisce escludere le variabili sopracitate, si può iniziare l'analisi della serie dei rendimenti logaritmici, considerati quindi come distribuzione di variabili aleatorie. Lo studio delle variabili aleatorie passa attraverso il calcolo dei momenti che ne caratterizzano la distribuzione. Per la variabile aleatoria continua R si definisce come k-esimo momento (se esiste):

$$E\,(R^k) = \int r^k f_R(r)\, dr \quad \text{definita nell'insieme R}$$

Per k=1 si ha la tradizionale *expectation* della variabile casuale R. Per misurare quanto una variabile casuale è "sparsa" intorno al punto centrale si usa il k-esimo momento centrale definito da:

$$E\,(R - \mu_R) = \int (r-\mu_R)^k f_R(r)\, dr.$$

[2] Dal nome dell'ideatore Carl Friedrich Gauss, matematico, fisico e astronomo tedesco.

Data questa analisi generale, le caratteristiche principali della distribuzione dei rendimenti logaritmici sono sintetizzate dai due momenti teorici principali, cioè il rendimento atteso e la varianza, rispettivamente :

$$\mu_R = E(R) ;$$

$$\sigma_R^2 = Var (R) = E[(R - \mu_R)^2] = E(R^2) - \mu_R^2.$$

Questi momenti danno una misura della redditività media e del rischio del titolo.

Si consideri una realizzazione campionaria della serie storica dei rendimenti logaritmici {r_t, con t=1, 2, ..., T}; allora si possono stimare media e varianza con:

$$\bar{r} = \hat{\mu}_R = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_t;$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (r_t - \hat{\mu}_R)^2.$$

In riferimento alla varianza, bisogna citare la deviazione standard, che non è altro che la radice quadrata della varianza stessa. Viene utilizzata per mantenere l'unità di misura dei dati originali, visto che la varianza è la sommatoria dei *quadrati* degli scostamenti dal valore medio.

Valore atteso e varianza presentano alcune proprietà che saranno utili nel proseguo della trattazione. Per quanto riguarda il valore atteso, noto che il valore atteso di un numero reale è il numero reale stesso quindi:

$E(a) = a$, con a numero reale,

la media della combinazione lineare di variabili casuali è uguale alla combinazione lineare delle medie stesse. Dunque, date due variabili casuali R_1 e R_2 (di media μ_{R1} e μ_{R2} note) e due numeri reali qualsiasi *a* e *b*:

$$E(aR_1+bR_2) = E(aR_1) + E(bR_2) = a\, E(R_1) + b\, E(R_2) = a\, \mu_{R1} + b\, \mu_{R2}$$

Invece la varianza sarà :

$$\begin{aligned} Var\,(aR_1+bR_2) &= E\,[(aR_1+bR_2) - (a\,\mu_{R1} + b\,\mu_{R2})]^2 \\ &= E\,[a(R_1 - \mu_{R1}) + b(R_2 - \mu_{R2})]^2 \\ &= E[a^2(R_1-\mu_{R1})^2+b^2(R_2-\mu_{R2})^2+2ab(R_1-\mu_{R1})\,(R_2-\mu_{R2})] \\ &= a^2Var(R_1) + b^2Var(R_2) + 2ab\,Cov(R_1,R_2). \end{aligned}$$

Sono, quindi, i primi due momenti a riassumere le caratteristiche principali della serie di rendimenti e, di conseguenza, anche dei titoli in esame. Infatti media e varianza sono gli indici utilizzati in finanza per esprimere, rispettivamente, la redditività e il rischio di un investimento, e ricoprono un ruolo centrale nella teoria della selezione di portafoglio.

2.2 INDICE DI SIMMETRIA E INDICE DI CURTOSI

Nonostante la centralità di valore atteso e varianza, come momenti che spieghino le caratteristiche della distribuzione dei rendimenti, negli studi finanziari trovano ampio spazio altri due momenti centrali, la simmetria e la curtosi della distribuzione. L'indice di asimmetria, descrive la simmetria della distribuzione rispetto al rendimento medio, mentre l'indice di curtosi, tratta la probabilità che si presentino rendimenti lontani rispetto al valore atteso, cioè graficamente la "pesantezza delle code". Dalla formula generale dei momenti centrali è possibile ricavare il modo in cui definire questi due indici, rispettivamente :

$$sk\ (R) = E\left[\left(\frac{R - \mu_R}{\sigma_R}\right)^3\right];$$

$$ku\ (R) = E\left[\left(\frac{R - \mu_R}{\sigma_R}\right)^4\right].$$

Se la variabile aleatoria R è simmetrica (di cui la Gaussiana è un caso speciale), allora *sk*(R) = 0. Per R asimmetrica positiva si ha *sk*(R) > 0, mentre se asimmetrica negativa *sk*(R) < 0.

Per variabili casuali Gaussiane R si ha *ku*(R) = 3. Se *ku*(R) > 3 si dice che la distribuzione è leptocurtica, mentre se è minore di 3 viene definita platicurtica. Da notare che se la distribuzione non è simmetrica, l'indice di curtosi, così calcolato, potrebbe misurare qualcosa che non è la pesantezza delle code.

Considerata la realizzazione campionaria di una serie storica {r_t, con t =1, 2, ..., T}, le stime campionarie di simmetria e curtosi saranno :

$$\hat{s}k\ (R) = \frac{1}{T\sigma_R^3}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu}_R)^3;$$

$$\widehat{k}u\ (R) = \frac{1}{T\sigma_R^4}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu}_R)^4.$$

Entrambi gli indicatori non sono da sottovalutare nell'utilizzo finanziario perché valori diversi da quelli tipici della distribuzione Gaussiana, potrebbero distorcere le conclusioni ottenute attraverso l'analisi del rendimento atteso e del rischio legato al titolo, cioè la varianza. Infatti eventuali asimmetrie della curva o presenza di "code pesanti" potrebbero rappresentare la tendenza a scostarsi con maggior probabilità dal valore atteso o a presentare con maggiore frequenza valori estremi, positivi o negativi.

2.3 DIPENDENZA TEMPORALE DEI RENDIMENTI

I momenti della distribuzione marginale[3] dei rendimenti analizzati, di cui si è trattato nei paragrafi precedenti, esprimono solo alcune delle caratteristiche rilevanti per l'analisi del titolo finanziario. Rilevante è anche lo studio della distribuzione congiunta[4], associata ai rendimenti osservati a epoche differenti. Verrà data una misura, dunque, della dipendenza che lega i rendimenti di epoche differenti. Per studiare la dipendenza lineare tra coppie di variabili aleatorie, è necessario creare un'altra serie di dati dalla serie dei rendimenti a disposizione.

Per fare questa operazione, l'analisi verrà condotta traslando la serie della variabile aleatoria R_t. Si creerà un'altra serie storica formata dalla variabile R_{t+k}, dove *k* rappresenta lo "sfasamento" temporale della serie originale. Gli indici che daranno una misura di questo legame, prendono il nome di autocovarianza e autocorrelazione.

Sotto le condizioni di stazionarietà debole del processo $\{R_t\}$, la funzione di autocovarianza $Cov(R_t, R_{t+k})$ indica il legame lineare tra la variabile casuale R_t e la sua versione traslata di *k* istanti R_{t+k}. In simboli è :

$$\gamma(k) = E\,[(R_t - \mu_R)\,(R_{t+k} - \mu_R)]$$

Si noti che per *k* =0 si ha la varianza, cioè: $\sigma_R^2 = \gamma\,(0)$.

[3] Date due variabile aleatorie (X,Y), definiamo distribuzione marginale di X, la distribuzione che presenta la variabile X a prescindere dalle modalità della variabile casuale Y.

[4] Date due variabili aleatorie (X,Y), definiamo distribuzione congiunta, la distribuzione di probabilità legata al vettore (X,Y).

Per la stazionarietà del processo l'autocovarianza dipende esclusivamente dallo sfasamento k. Infatti la stazionarietà implica che $\mu_{R_t} = \mu_{R_{t+k}}$, quindi possiamo usare il simbolo μ_R.

Si usa "normalizzare" l'autocovarianza dividendo per il valore massimo che può assumere. L'autocorrelazione (ACF, AutoCorrelation Function) si indica con $Cor(R_t, R_{t+k})$ e si ricava come:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}\,.$$

L'autocorrelazione può assumere valori nell'intervallo (-1;1) estremi compresi, essendo una grandezza normalizzata. Un valore positivo alto indica un legame temporale forte del processo aleatorio tra gli istanti t e t+k, con valori dei rendimenti R_t e R_{t+k} altamente legati tra loro linearmente. Un valore dell' ACF pari a zero indica una dipendenza lineare nulla, ma non esclude che possono esserci altri tipi di legami.

Considerando adesso la realizzazione delle variabili aleatorie R_t e R_{t+k}, è possibile andare a calcolare la stima campionaria di autocovarianza e ACF.

Una stima della prima è data da:

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r}).$$

Per k =0 si ha la varianza (marginale) della serie storica:

$$\hat{\sigma}_R^2 = \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2.$$

Per la stima campionaria dell'ACF si ha:

$$\hat{\rho}\ (k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(r_t-\bar{r})(r_{t+k}-\bar{r})}{\sum_{t=1}^{T}(r_t-\bar{r})2.}\ ,\ con\ \ 0 \leq k \leq T-1.$$

E' possibile calcolare l'autocorrelazione per serie storiche non stazionarie in media, però ovviamente troveremo una forte dipendenza lineare tra la serie originale e la serie "sfalsata" temporalmente. Inoltre maggiore è il valore di *k* meno accurata potrà essere l'analisi poiché si ridurrà il numero di osservazioni disponibili.

I dati estrapolati dalla serie storica del titolo e finora esaminati, saranno il punto di partenza dei modelli utilizzati per la selezione di portafoglio. Solo con lo studio di queste variabili è possibile capire quali modelli siano più indicati da utilizzare e quale possibili risultati è prevedibile aspettarsi in futuro. Solo considerando tutte le analisi affrontate in questo capitolo si potrà chiarire perché alcuni modelli non rispecchiano le evidenze empiriche fornite dai dati e di conseguenza spiegare gli scostamenti tra previsione teoriche e realizzazioni reali.

CAPITOLO 3

LA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

Analizzate le serie dei rendimenti di ogni singolo titolo, lo studio si sposta sulle combinazioni che è possibile realizzare sfruttando le variabili esaminate e le considerazioni fatte nei capitoli precedenti. L'obiettivo da perseguire sarà quello di capire quale sia il portafoglio migliore tra quelli ottenibili dato un insieme di titoli. Per riuscire nell'intento bisogna considerare le preferenze dell'investitore e l'aleatorietà del rendimento, ossia il rischio che caratterizza l'investimento.

Nonostante la numerosa letteratura che si è sviluppata negli ultimi decenni sull'argomento, ci si soffermerà sulla teoria di *portfolio selection* inaugurata da Markowitz (1952). Questa scelta scaturisce sia dal fatto che l'articolo pubblicato sul "*Journal of Finance*" viene considerato il punto cardine per la nascita della finanza moderna, sia perché attraverso i risultati ottenuti con questo modello sarà possibile fare interessanti considerazioni sull'importanza delle lunghezza delle serie storiche nelle scelte d'investimento. Sfruttando la tesi di Markowitz, ci si limiterà all'analisi dei primi due momenti della distribuzione della serie dei rendimenti. Infatti la composizione ottima dei portafogli dipenderà solamente dal rendimento atteso e dalla varianza dei titoli a disposizione. Il modello presenta ipotesi forti, ma ha il vantaggio di semplificare l'analisi econometrica e fornire dati espliciti su cui lavorare.

3.1 PRINCIPIO RENDIMENTO ATTESO-VARIANZA

Poiché le scelte di investimento sono prodotte in un contesto di incertezza, come ampiamente trattato nelle sezioni precedenti, un investitore baserà le proprie decisioni considerando il rendimento offerto e la rischiosità dell'operazione. Non avendo certezza sull'andamento futuro dei valori mobiliari si prenderà come riferimento il rendimento atteso e la dispersione della distribuzione intorno al valore atteso, cioè la varianza. Valore atteso e deviazione standard[5] bastano per la valutazione delle operazioni finanziarie sotto l'ipotesi di distribuzione normale delle serie dei rendimenti. Infatti la distribuzione Gaussiana essendo simmetrica, cioè avendo la stessa probabilità di rendimenti maggiori o minori rispetto al valore atteso, permette l'utilizzo dei primi due momenti per operare delle scelte tra i vari titoli.

L'ipotesi di normalità delle serie dei rendimenti, e l'aggiunta dell'ipotesi di operatori razionali, consentono un primo criterio per la scelta dei titoli. Infatti dati due titoli, sarà scelto quello con varianza (rischio) minore, nel caso in cui si abbiano rendimenti uguali, mentre a parità di rischio sarà preferito il titolo che presenta un valore atteso maggiore.

Fatte queste premesse, si possono studiare le possibili combinazioni nel grafico sottostante (figura 1). Tutte le considerazioni saranno fatte avendo come riferimento il portafoglio X, collocato all'incrocio tra i quadranti. Si possono escludere i titoli che appartengono al quadrante in alto a sinistra poiché hanno alta volatilità e basso rendimento, mentre i titoli preferibili saranno quelli collocati nel quadrante in basso a destra che presentano un basso rischio a fronte di un rendimento elevato. Le difficoltà si incontrano nei restanti quadranti poiché non è possibile trarre conclusioni univoche dalla relazione tra rendimento e rischio dei titoli in questione. L'unica discriminazione possibile è tra investitori avversi al rischio e investitori propensi al rischio. Infatti, si può affermare con ragionevolezza che l'avversione al rischio porti a scegliere titoli che cadono nel quadrante in basso a sinistra, contrariamente nel quadrante in alto a destra si troveranno i titoli preferiti da soggetti propensi al rischio.

La scelta dei vari titoli e del livello di rendimento e rischio in questi due quadranti diviene soggettiva, e influenzata dalla propensione o avversione al rischio degli investitori. Diversamente da ciò che avveniva nei restanti quadranti, dove l'ipotesi di agenti razionali, rendeva la discriminazione oggettiva, e il criterio media-varianza sufficiente per la scelta dei titoli.

[5] La deviazione standard è calcolata come la radice quadrata della varianza. In tal modo l'indice ha la stessa unità di misura della variabile aleatoria studiata (il rendimento in questo caso)

La criticità sta nel dover discriminare i titoli appartenenti allo stesso quadrante. Infatti, non tutti i soggetti avversi al rischio, ad esempio, avranno la stessa preferenza di rendimento e varianza, e il criterio media-varianza non dà nessun metodo puntuale per capire in che punto del quadrante andranno a collocarsi.

Figura 1

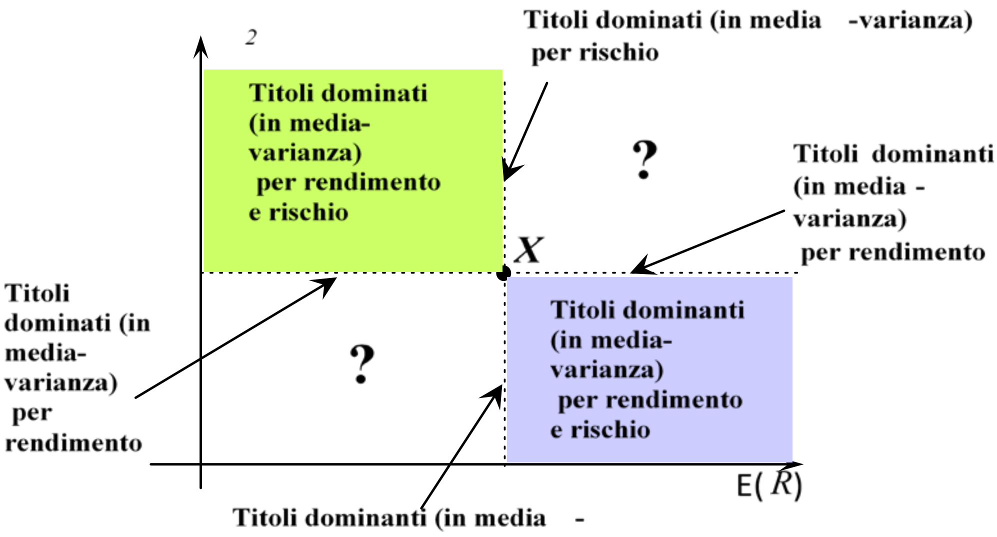


Grafico tratto da: MAGNANI, OLIVIERI, ROSSI E TORRIGIANI, Matematica Finanziaria – ed. Monduzzi, II ed. 1998, 439-471

3.2 LA PORTFOLIO SELECTION (MARKOWITZ, 1953)

Il focus di questa sezione sarà l'investimento in un portafoglio di titoli. Si cercherà, in pratica, di trasferire i concetti riferiti ai singoli strumenti finanziari, all'insieme di attività che formano un portafoglio finanziario. Invece di analizzare come si muove la singola azione, l'obiettivo è capire che succede formando una combinazione di essi.

Il primo tentativo in questa direzione fu lo studio condotto da Markowitz, nel celebre articolo intitolato *Portfolio Selection* del 1953, e divenuto il modello di riferimento per i successivi studi di economia finanziaria. L'articolo ha l'intento di spiegare perché sia conveniente investire in un insieme di titoli piuttosto che in ogni titolo singolarmente. Difatti, nonostante fossero già noti nella pratica finanziaria i vantaggi apportati dalla diversificazione, Markowitz fu il primo a cercare di darne una dimostrazione matematica.

Nelle sezioni successive, come detto, saranno analizzati i fattori relativi a un portafoglio finanziario. Per determinare ciò sarà necessario fare ricorso ai concetti e ai calcoli riguardanti i rendimenti di un titolo (paragrafo 1.3), e alla determinazione del valore atteso e della varianza (paragrafo 2.1).

3.2.1 Ipotesi del modello

Essendo un modello, l'obiettivo è quello di ricreare le condizioni esistenti sui mercati reali, semplificando però alcuni aspetti necessari per l'analisi. Da qui la necessità di formulare alcune ipotesi che agevolano lo studio, senza inficiare la validità delle considerazioni finali.

I concetti su cui si fonda il modello possono essere riassunti in alcuni punti[6]:

- l'investimento avviene in un unico periodo;
- gli agenti sono razionali, quindi desiderano il maggior rendimento possibile minimizzando il rischio;
- il mercato è perfettamente concorrenziale;
- non esistono costi di transazione o imposte;
- i titoli sono divisibili e non esistono lotti minimi;
- gli unici indici che guidano la scelta dell'investimento sono il rendimento atteso e la varianza.

Oltre a queste ipotesi, fondamentali per le analisi condotte dal modello, ci sono altri presupposti che caratterizzano la ricerca.

[6] G. Gandolfi, "Scelta e gestione degli investimenti finanziari", Bancaria Editrice, Roma, 2009

Infatti, per quanto riguarda la distribuzione della serie dei rendimenti, bisogna ricordare che si tratta di variabili aleatorie, quindi caratterizzate dall'incertezza riguardante il valore futuro.

Relativamente a questo punto si suppone che:

- i rendimenti passati siano gli unici rinvenibili in futuro;
- dati due titoli, i rendimenti futuri si presenteranno a coppie (cioè si rileveranno i rendimenti dei due titoli che si erano presentati nella medesima epoca);
- i rendimenti hanno tutti la medesima probabilità di realizzazione.

Sono questi i tratti che caratterizzano il modello, e se da una parte aiutano nella disamina delle dinamiche che portano alla selezione del portafoglio, dall'altra possono costituire delle incongruenze rispetto ai dati rilevati sui mercati reali. Sarà, allora, ragionevole andare a ricercare la causa degli scostamenti dai dati reali, nelle ipotesi su cui il modello fonda i propri risultati.

3.2.2 Il modello a due titoli

Fatte le premesse, discusse nel paragrafo precedente, si passa all'esposizione delle caratteristiche che contraddistinguono i diversi portafogli finanziari. Come anticipato, basterà analizzare il valore atteso e la deviazione standard dei titoli e dei portafogli per ottenere i risultati desiderati.

Per semplicità, inizialmente si ipotizza l'esistenza di due soli titoli che compongono il portafoglio. Quest'ultimo non è altro che una combinazione lineare di titoli, con pesi pari alla quota di ogni titolo nel portafoglio. Data questa definizione il rendimento del portafoglio all'istante t sarà:

$$R_{Pt} = x_1 \, R_{1t} + x_2 \, R_{2t} \, .$$

Allora il rendimento medio del portafoglio sarà dato da:

$$E(R_p) = x_1\, E(R_1) + x_2\, E(R_2).$$

Mentre la varianza avrà valore pari a:

$$\sigma^2 (R_p) = E\, [\, R_p - E(R_p)\,]^2.$$

Sostituendo il valore del rendimento atteso nella varianza si ottiene:

$$\sigma^2 (R_p) = E\, [\, R_p - E(R_p)\,]^2$$

$$= E\, [\, x_1R_1 + x_2R_2 - x_1E(R_1) - x_2E(R_2)]^2$$

$$= E\, \{x_1[R_1 - E(R_1)] + x_2[R_2 - E(R_2)]\}^2$$

$$=E\, \{x_1^2[R_1-E(R_1)]^2+x_2^2[R_2-E(R_2)]^2+2x_1x_2[R_1-E(R_1)]\, [R_2-E(R_2)]\}$$

$$= x_1^2\sigma^2(R_1) + x_2^2\, \sigma^2(R_2) + 2\, x_1x_2\, cov\, (R_1,R_2).$$

La $cov(R_1,R_2)$ può essere sostituita introducendo il coefficiente di correlazione $\rho_{1,2}$, infatti:

$$cov(R_1,R_2) = \rho_{1,2}\;\; \sigma_1\, \sigma_2,$$

dove σ_{i} (i=1,2), è la deviazione standard dei titoli.

La variabilità, e quindi il rischio, del portafoglio sarà misurato dal rischio dei titoli che lo compongono e da quanto variano congiuntamente i titoli.

Difatti, la covarianza indica la presenza di dipendenza lineare dei rendimenti dei titoli. Ma molto più interessante è la conoscenza del coefficiente di correlazione dei titoli. Quest'ultimo essendo un indice normalizzato misura di quanto varia un titolo al variare dell'altro.

Per capire, è possibile considerare tre casi estremi, avremo:

- ρ =-1: relazione lineare perfetta e inversa tra i titoli. A un incremento positivo di un titolo corrisponderà un decremento dello stesso valore dell'altro titolo;

- ρ=+1: indica perfetta relazione lineare. I titoli hanno uguale andamento.

- ρ=0: non esiste relazione lineare, ma non si può escludere una relazione di tipo non lineare.

Il coefficiente di correlazione è fondamentale per definire i vantaggi della diversificazione. Si parta considerando il caso estremo di perfetta correlazione positiva, cioè $\rho_{1,2}$=1. In questa circostanza il rischio minimo sarà quello del titolo con varianza minore, infatti sostituendo il valore 1 nella formula della varianza di portafoglio, otteniamo il quadrato delle combinazione delle deviazioni standard dei titoli ponderati con le quote di ciascun titolo nel portafoglio. Considerando, invece, un valore del coefficiente di correlazione minore di uno, è matematicamente dimostrato che esso lascia invariato il rendimento atteso (poiché non compare nella formula di calcolo del valore atteso), mentre influisce nella determinazione della varianza. Infatti, nella formula di quest'ultima, pesi e deviazioni standard assumeranno valori positivi e un valore più piccolo del coefficiente $\rho_{1,2}$ diminuirà il rischio complessivo di portafoglio. È tale diminuzione che spiega il vantaggio della diversificazione rispetto all'investimento nei singoli titoli.

Altre considerazioni vanno fatte per quanto riguarda la costruzione del portafoglio ottimo. La ricerca del portafoglio efficiente è un problema di ottimo vincolato. Difatti, si minimizza la varianza di portafoglio, avendo il vincolo di un rendimento dato e il vincolo che la somma dei pesi dei titoli sia pari a uno per garantire di investire tutto il capitale a disposizione. In alternativa si può presentare il problema massimizzando il rendimento dati i vincoli di varianza fissata e somma dei pesi pari a uno.

Concentrandosi sul primo caso, dando il valore x_1 al peso del primo titolo, si ha dal secondo vincolo:

$$x_1+x_2=1 \rightarrow x_2=1-x_1 \ .$$

A questo punto conoscendo la formulazione della varianza:

$$\sigma^2 (R_p) = x_1^2 \sigma^2(R_1) + (1-x_1)^2 \sigma^2(R_2) + 2 x_1(1-x_1) \rho_{1,2} \ \sigma_1 \sigma_2 \ ,$$

se si vuole trovare il valore di x_1 che minimizza la varianza basta derivare $\sigma^2(R_p)$ per x_1 e porre la derivata uguale a zero.

Si ha:

$$\frac{\partial \sigma^2(R_p)}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 2x_1 \ \sigma^2(R_1)+2 \ (1-x_1)\sigma^2(R_2)(-1)+2\rho_{1,2} \ \sigma_1 \ \sigma_2[1-x_1+x_1 \ (-1)]=0$$

$$\rightarrow x_1 \sigma^2(R_1)-\sigma^2(R_2)+x_1 \sigma^2(R_2)+ \rho_{1,2} \ \sigma_1 \sigma_2 \ -2x_1 \ \rho_{1,2} \ \sigma_1 \sigma_2 =0$$

$$\rightarrow x_1[\sigma^2(R_1)+\sigma^2(R_2) \ -2x_1 \ \rho_{1,2} \ \sigma_1 \sigma_2] = \sigma^2(R_2)- \rho_{1,2} \ \sigma_1 \sigma_2$$

$$\rightarrow x_1 =\frac{\sigma^2(R_2)- \rho_{1,2} \ \sigma_1 \ \sigma_2}{\sigma^2(R_1)+\sigma^2(R_2)-2 \ \rho_{1,2} \ \sigma_1 \ \sigma_2} \ .$$

Verifichiamo il valore che può assumere x_1 per i diversi valori di $\rho_{1,2}$ presi in considerazioni finora:

- $\rho_{1,2}$=1; → $x_1 = -\frac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1)-\sigma(R_2)}$;

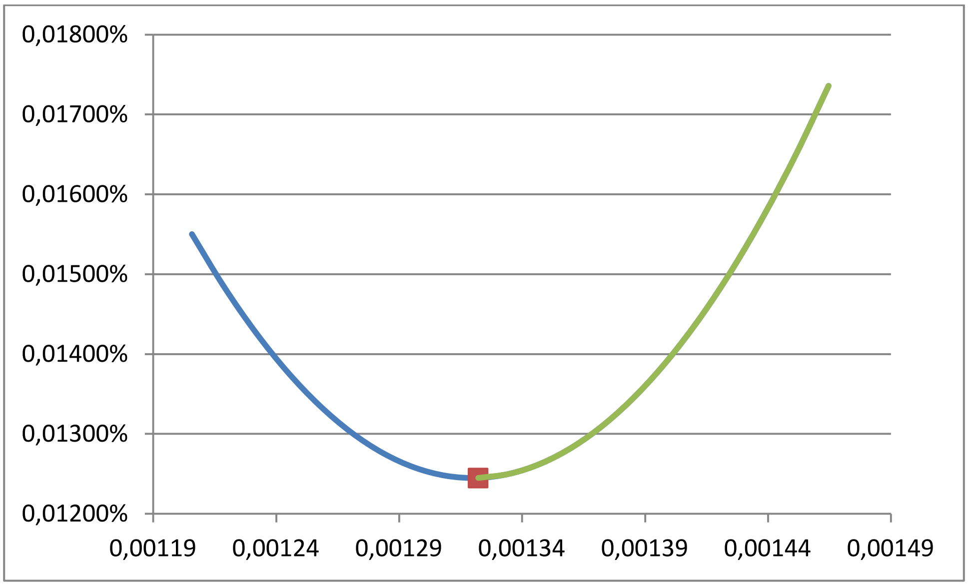
- $\rho_{1,2}$ =0; → $x_1 = \frac{\sigma^2(R_2)}{\sigma^2(R_1)+\sigma^2(R_2)}$;

- $\rho_{1,2}$ = -1; → $x_1 = \frac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1)+\sigma(R_2)}$.

Nel caso di perfetta correlazione inversa ($\rho_{1,2}$ = -1), sostituendo il valore del coefficiente di correlazione nella formula della varianza di portafoglio è possibile azzerare completamente il rischio, con x_1 pari al valore dell'equazione calcolata sopra. Risultato non ottenibile negli altri due casi, infatti per un valore del coefficiente di correlazione pari a 1 si ottiene il quadrato della somma delle deviazioni standard dei titoli ponderati per le quote di ciascun titolo nel portafoglio, che ha ovviamente valore positivo. Se il coefficiente di correlazione è pari a zero si ha la somma delle varianze ponderate con il quadrato delle quote dei titoli nel portafoglio, perciò di certo un valore maggiore di zero.

Per la costruzione della frontiera basterà assegnare valori diversi al peso dei due titoli, calcolando il valore atteso del portafoglio e la relativa varianza. In figura 2 è possibile osservare la frontiera costruita considerando la serie storica dei titoli *Atlantia* e *Generali* relativa al secondo semestre del 2013, che hanno un coefficiente di correlazione pari a 0,52 (calcolato tramite la funzione *correlazione* di Excel).

Figura2

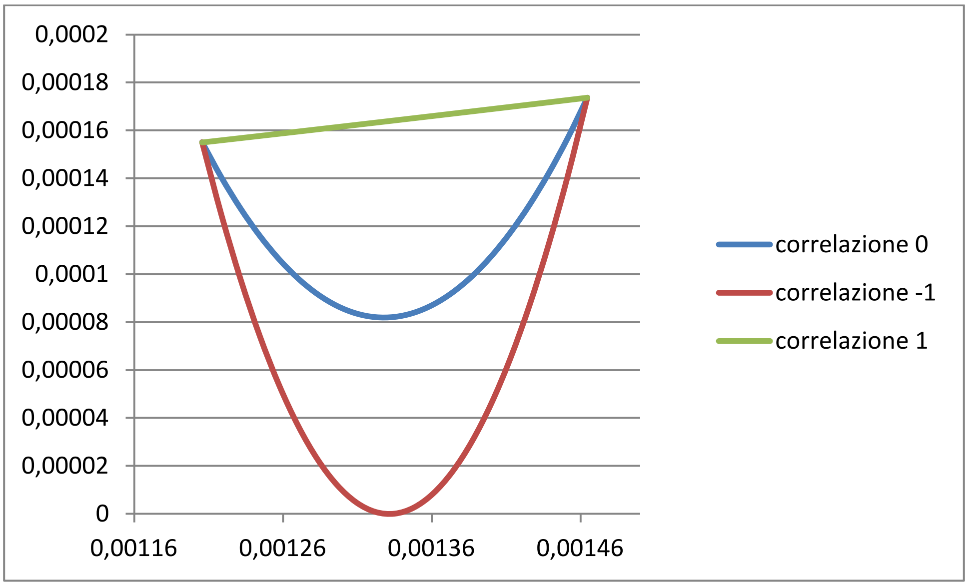


Elaborazione su dati Bloomberg

La frontiera efficiente (linea verde) è rappresentata in figura dalla parte a destra del punto a varianza minima (punto rosso), poiché la restante parte della curva è dominata dai portafogli che compongono la frontiera efficiente avendo, a parità di varianza, rendimento maggiore.

Se invece si è interessati a come varia graficamente la frontiera al variare del valore del coefficiente di correlazione, la figura 3 ne mostra un esempio. Considerando la medesima serie storica dei due titoli introdotti prima, invece di calcolare la correlazione sui dati reali, si ipotizza assuma i valori estremi analizzati in questo paragrafo. Ovviamente come detto per il grafico in figura 2, la frontiera efficiente sarà il tratto di curva a destra del punto di minimo. Nel caso di coefficiente di correlazione uguale ad uno la frontiera efficiente è rappresentata da tutta la retta.

Figura3



Elaborazione su dati Bloomberg

Concludendo, dati due titoli è possibile costruire diversi portafogli; alcuni saranno portafogli non efficienti e saranno scartati dagli agenti razionali. Le combinazioni di titoli che compongono i portafogli che giacciono sulla frontiera efficiente, saranno i portafogli che gli investitori andranno a scegliere in base al loro gradimento di rischio e rendimento. In pratica, investitori avversi al rischio preferiranno portafoglio posizionati sulla parte in basso a sinistra della frontiera efficiente, al contrario degli agenti propensi al rischio che si piazzeranno sulla parte in alto a destra, con rendimento e rischio maggiori. Da notare, inoltre, che, essendo la frontiera rappresentata da curve convesse, all'aumentare del rendimento la varianza aumenta in maniera più che proporzionale, come è facile osservare nel caso di correlazione perfettamente negativa (curva rossa).

3.2.3 Il modello ad n titoli

Le considerazioni fatte per il caso a due titoli possono essere riproposte in questo paragrafo, generalizzando tutte le analisi e le conclusioni al caso di un portafoglio di n titoli. Anche in questa sezione sarà fatto riferimento solamente al valore atteso e alla varianza per studiare la combinazione ottima di titoli nel portafoglio.

Il rendimento atteso di portafoglio sarà dato dalla media ponderata dei rendimenti attesi dei titoli in portafoglio, con pesi pari alla quota di ogni titolo nel portafoglio. In formula:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i).$$

Mentre il rischio sarà misurato dalla varianza data da:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i \ \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \ \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \text{ , con } j \neq i.$$

Se si introduce la notazione matriciale, si indichi:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

il vettore dei pesi dei titoli in portafoglio;

$$\overline{\mathrm{E}} = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ . \\ . \\ . \\ E(R_n) \end{bmatrix},$$

il vettore dei rendimenti attesi dei singoli titoli.

Si potrà scrivere il rendimento atteso di portafoglio come:

$$\mathrm{E(R_p)} = \bar{x}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathrm{E}} \ .$$

Esprimiamo con:

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \ \dots \ \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_{2,n} \\ & . \\ & . \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} \ \dots \ \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

la matrice varianza-covarianza, che ha sulla diagonale principale la varianza di ogni titolo, mentre sul resto della matrice le covarianze tra i titoli in portafoglio. Poiché per un numero elevato di n, calcolare tutta la matrice richiede tempi lunghi, si può sfruttare la definizione di covarianza per velocizzare i calcoli, sempre in notazione matriciale.

Definita la matrice degli scarti dei rendimenti dei titoli dai loro valori medi, dove m è il numero di periodi presi in considerazione:

$$A = \begin{bmatrix} R_{11} - E(R_1) & R_{21} - E(R_2) \dots & R_{n1} - E(R_n) \\ R_{12} - E(R_1) & R_{22} - E(R_2) \dots & R_{n2} - E(R_n) \\ & . & \\ & . & \\ R_{1m} - E(R_1) & R_{2m} - E(R_2) \dots & R_{nm} - E(R_n) \end{bmatrix},$$

per la definizione di valore medio di prodotto degli scarti si ha:

$$S = \frac{A^T \cdot A}{m}$$

Definita la modalità di calcolo della matrice S, la varianza di portafoglio è definita da:

$$Var\ (R_p) = \bar{x}^T \cdot S \cdot \bar{x}$$

Espressi valore atteso e varianza del portafoglio, si può passare alla ricerca dei portafogli ottimi. Come detto nel paragrafo precedente, la ricerca risulta un problema di ottimo vincolato.

Nel caso in cui si voglia minimizzare la varianza, fissato un determinato rendimento indicato con μ, si ha:

$$\min Var\ (R_p) = \bar{x}^T \cdot S \cdot \bar{x}$$

sotto i vincoli:

$$\begin{cases} E(Rp) = \bar{x}^T \cdot \bar{E} = \mu \\ \bar{x}^T \cdot I \end{cases}$$

Come nel caso a due titoli, anche qui i vincoli saranno un rendimento prefissato e la sommatoria dei pesi pari a uno per far si che venga investito tutto il capitale disponibile. Infatti, nell'ultimo vincolo I rappresenta un vettore colonna unitario di dimensione n.

Viceversa si può massimizzare il rendimento atteso di portafoglio, fissato un valore per la varianza di portafoglio. In questo caso si avrà:

$$\max E(R_p) = \bar{x}^T \cdot \bar{E},$$

sotto i vincoli:

$$\begin{cases} Var(Rp) = \bar{x}^T \cdot S \cdot \bar{x} \\ \bar{x}^T \cdot I \end{cases}$$

Il maggior numero di titoli rende più ampio l'insieme di portafogli possibili, e questa differenza si può notare anche graficamente. Difatti, non si tratterà di linee o curve, come nel paragrafo precedente ma di spazi.

Analizzata la differenza di calcoli e di scrittura, derivanti dal maggior numero di titoli da prendere in considerazione, valgono le stesse conclusioni tratte dallo studio dei portafogli formati dai due titoli. Infatti anche in questo caso, dati tutti i portafogli fattibili combinando i diversi titoli, gli agenti razionali rifiuteranno quelli che non compongono la frontiera efficiente, mentre la scelta del portafoglio ottimo dipenderà dalla propensione al rischio degli investitori. Difatti, sarà proprio la propensione o meno al rischio che farà collocare gli investitori in diversi punti della frontiera efficienti, là dove l'investimento presenta le caratteristiche di rendimento e rischio ideali per ogni soggetto.

CAPITOLO 4

EVIDENZE EMPIRICHE CONTRO IL MODELLO

Nonostante sia stato necessario qualche anno per comprendere l'importanza dello studio condotto da Markowitz, a partire dagli anni Sessanta, tutti gli studi sulla moderna teoria finanziaria si sono basati sui concetti della *portfolio selection.* Quindi, la gestione dei portafogli finanziari è stata sviluppata attraverso le direttive e le considerazioni su cui si fonda il modello illustrato nel capitolo precedente. Basandosi su questi concetti, il bilanciamento tra rendimento e rischio è stato ottenuto focalizzandosi soltanto su due indici statistici, cioè media e varianza. Tale semplificazione è dovuta alle ipotesi su cui poggia il modello. Infatti, valore atteso e deviazione standard sono sufficienti per sintetizzare le caratteristiche dei rendimenti, presupponendo che la distribuzione della serie di quest'ultimi sia Gaussiana e il processo stocastico stazionario. Ovviamente queste sono ipotesi forti, che semplificano l'analisi ma che possono avere ripercussioni sulla veridicità dei risultati del modello.

Detto ciò, in questo capitolo l'obiettivo sarà quello di capire quali ripercussioni hanno le ipotesi del modello sui risultati ottenuti e confrontati con i dati rinvenuti sui mercati reali.

Si partirà da alcuni fatti stilizzati[7], analizzando dunque i mercati reali e le loro caratteristiche empiriche, per confrontarli con i concetti trattati nel modello. Mostrata l'esistenza di incongruenze tra i dati reali e le considerazioni dei modelli teorici, si cercherà di capire quali possano essere le cause che giustificano tale diversità.

[7] Un fatto stilizzato è un insieme di proprietà comuni ai mercati o ai tempi di osservazione, ottenuti tramite l'osservazione dei dati reali.

4.1 ALCUNE EVIDENZE EMPIRICHE

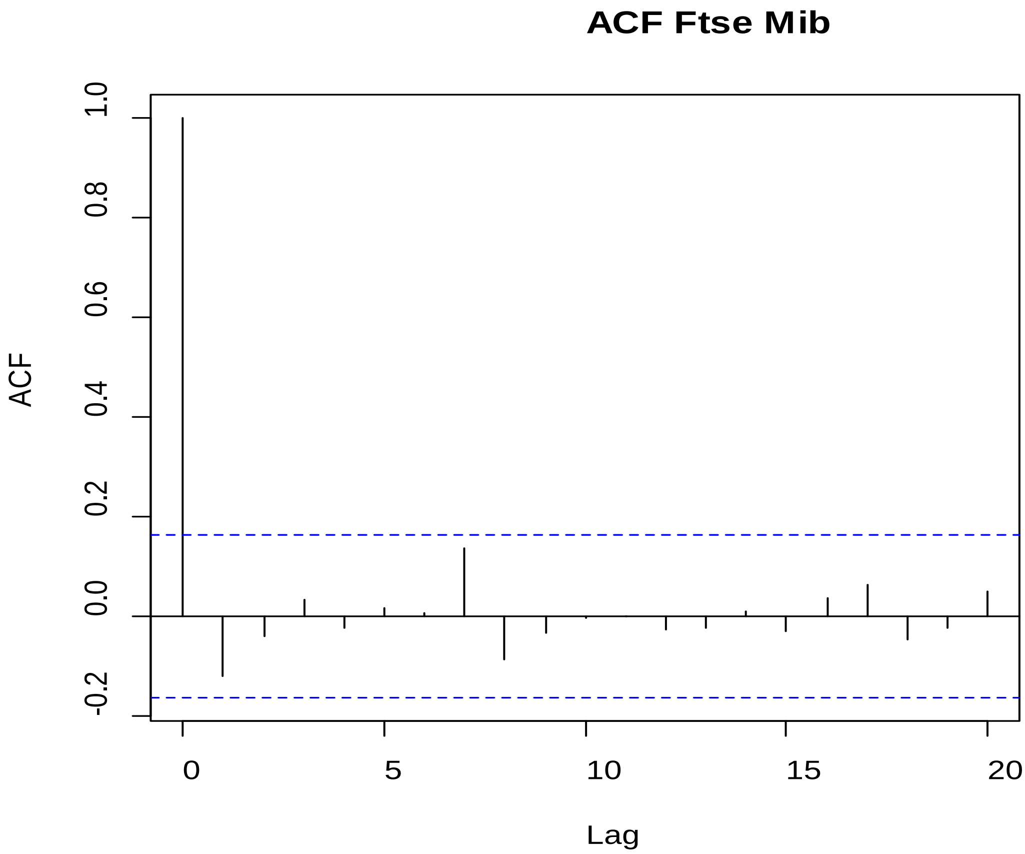
Per capire quali sono i caratteri che contraddistinguono la serie dei rendimenti, si fa riferimento ad alcuni tratti caratteristici delle serie riscontrabili direttamente sui vari mercati. I fatti stilizzati sono lo strumento migliore, nonostante la scarsa rigidità teorica, per studiare i tratti comuni delle serie reali. Estrarre le proprietà tipiche della serie dei rendimenti dalle evidenze rinvenute sui dati reali permetterà un confronto diretto con le ipotesi e i risultati che qualificano il modello teorico.

Lo studio delle evidenze empiriche delle serie dei rendimenti degli strumenti finanziari ha interessato gran parte della letteratura sulla finanza moderna. Verranno elencati di seguito alcuni fatti stilizzati da cui è possibile trarre alcuni spunti utili per un primo confronto con le basi della teoria di selezione del portafoglio[8].

- **Mancanza di autocovarianza per i rendimenti**. Nessuna dipendenza di tipo lineare tra i rendimenti dello stesso titolo a epoche diverse. Diminuendo l'unità di misura degli scostamenti, si osserva un'autocovarianza rilevante che scompare dopo i primi 15/20 minuti dall'apertura delle quotazioni in Borsa, quindi si suppone sia dovuto a effetti di microstruttura. Il correlogramma[9] sul rendimento dell'indice FTSE MIB nel secondo semestre del 2013 conferma quanto esposto precedentemente.

[8] Cont, R., "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues" in: Quantitative Finance, Vol 1, No 2, (March 2001) 223-236.

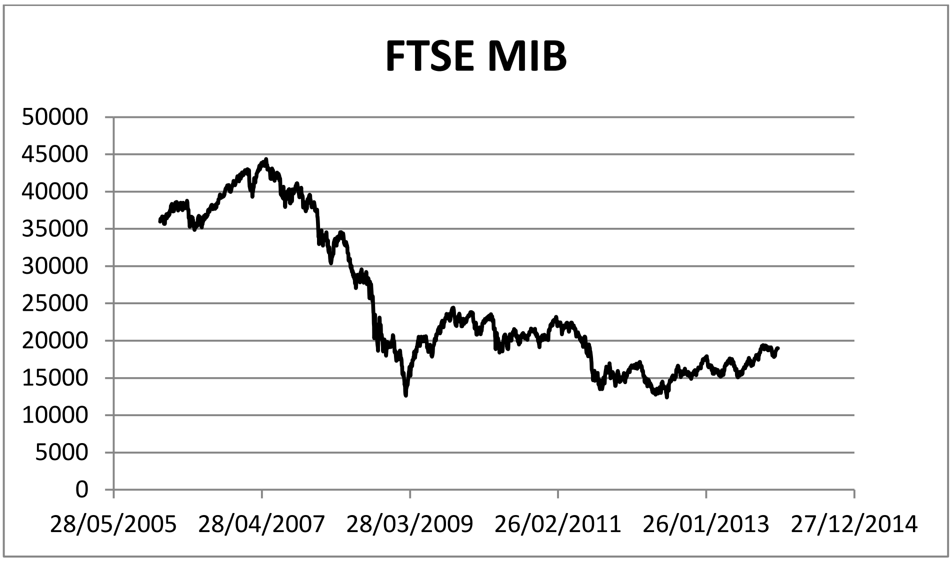
[9] Il correlogramma è il grafico che studia la funzione di autocorrelazione. Sull'asse delle ascisse compaiono i ritardi temporali (lag), mentre su quello delle ordinate i valori dell'ACF corrispondente ad ogni lag.



Elaborazione personale su R su dati Bloomberg

- **Presenza di code pesanti.** Indicano la presenza di una frequenza maggiore di rendimenti estremi positivi e negativi, mentre sono meno frequenti i rendimenti vicino al valore atteso. Tutto ciò complica l'adattamento della distribuzione alla Gaussiana, che presenta code meno spesse.

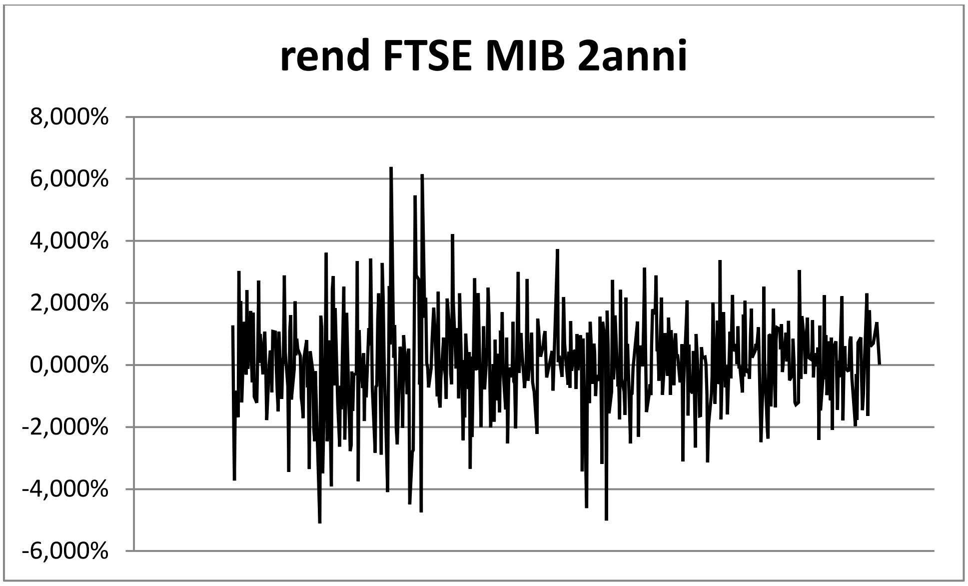
- **Asimetria tra perdite e guadagni.** Si osserva che agli shock di prezzo ribassisti non sono contrapposti rialzi altrettanto repentini, ma avviene una graduale risalita, influenzando in questo modo anche la serie dei rendimenti. Nel grafico sottostante è rappresentato l'andamento dell'indice FTSE MIB a partire dal 1 Gennaio 2006 fino al 31 Dicembre 2013. Come si può notare, dopo il crollo repentino del 2007, il trend crescente è molto meno marcato.



Elaborazione su Excel da dati Yahoo Finanza

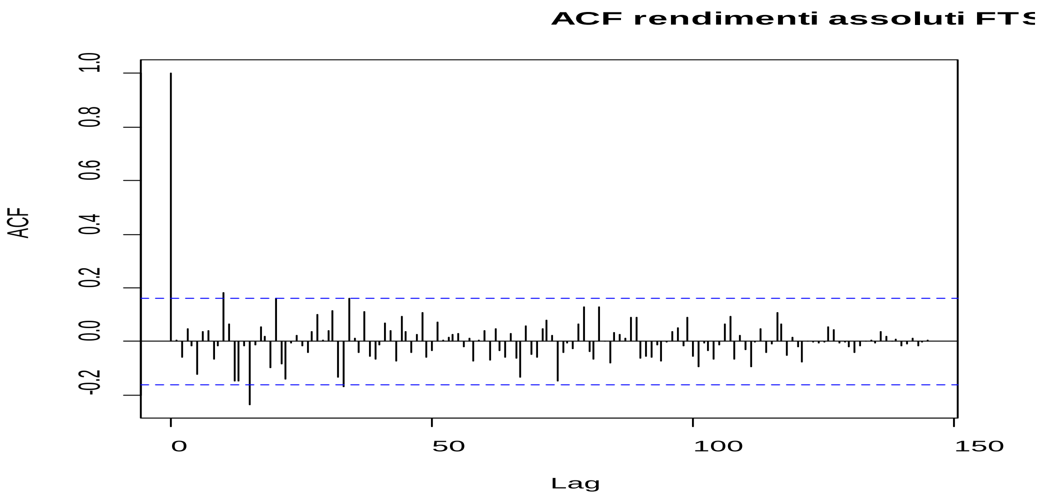
- **Aggregazione Gaussiana.** Aumentando l'arco temporale di riferimento la distribuzione dei rendimenti di un determinato titolo somiglia sempre più a una distribuzione normale. A parte ciò, si nota che per intervalli di tempo diversi, si presentano distribuzioni di frequenza differenti dei rendimenti del medesimo titolo.

- **Volatility clustering.** Osservando la serie dei rendimenti è possibile notare momenti con picchi di variazione dei valori. Questo porta a considerare che intervalli ad alta volatilità tendono a raggrupparsi nel corso della serie storica. Di conseguenza si può affermare che esiste una certa dipendenza temporale tra i rendimenti nei periodi con alta volatilità. Nel grafico, che rappresenta la serie dei rendimenti dell'indice FTSE MIB dal Gennaio 2012 a Dicembre 2013, è possibile notare che intorno alla prima perdita maggiore del 4% si concentra una serie di perdite consistenti mostrando un periodo di intensa volatilità.



Elaborazione su dati Bloomberg

- **Persistenza della correlazione per alcune serie trasformate dei rendimenti.** Infatti, se si guarda il correlogramma della serie del valore assoluto o del quadrato dei rendimenti, si nota che inizialmente esistono valori statisticamente significativi e poi la serie decade molto lentamente. Questa caratteristica denota che la serie dei rendimenti del titolo presenta una certa dipendenza anche se non di tipo lineare. E la forma sinusoidale è dovuto alla presenza dei cluster di volatilità.



- **Effetto leva.** La volatilità risulta correlata in maniera inversa al rendimento del titolo. Infatti si nota che la varianza aumenta maggiormente in corrispondenza di perdite del titolo, rispetto agli intervalli in cui il prezzo sale. Ciò può essere spiegato tramite l'effetto leva. Infatti una diminuzione del prezzo del titolo aumenta il rapporto tra indebitamento e valore della società, facendo aumentare la percezione di rischio e di conseguenza la volatilità legata a questo fattore.

- **Correlazione tra volume degli scambi e volatilità.** Questo argomento ha acquisito notevole importanza negli ultimi decenni in ambito finanziario. Tali studi si concentrano sulla possibilità di prevedere l'andamento del mercato in base ai volumi scambiati, infatti si riscontrano scambi frequenti durante periodi di alta volatilità e viceversa, inoltre si inserisce negli studi di finanza comportamentale, analizzando le azioni degli agenti in situazioni di volatilità differenti.

Sono queste, in sintesi, le principali evidenze empiriche rinvenibili dallo studio dei dati reali sul mercato, che caratterizzano le serie storiche dei rendimenti dei titoli. Partendo da queste considerazioni, si cerca di capire quali sono i fatti stilizzati che influenzano maggiormente la selezione del portafoglio ottimo e quali conseguenze possono comportare.

4.2 DIFFORMITÀ DELLE DISTRIBUZIONI

Il paragrafo precedente elenca semplicemente ciò che emerge dall'analisi delle serie storiche reali dei titoli. Viste quali sono le caratteristiche riscontrare sui mercati, l'obiettivo ora è quello di capire quali conseguenze possano avere sui modelli teorici.

Dando uno sguardo alle evidenze empiriche elencate precedentemente, si nota che in prevalenza interessano la distribuzione della serie. A questo punto è necessario approfondire lo studio delle caratteristiche della distribuzione dei rendimenti per meglio cogliere gli effetti sulle ipotesi del modello. Infatti, da ciò che emerge dai fatti stilizzati, media e varianza non sono sufficienti a cogliere in maniera completa il rischio dei titoli. Si completerà dunque l'analisi trattando anche il momento centrale terzo e quarto, rispettivamente la simmetria e la curtosi della distribuzione. Nel modello era stato possibile sorvolare su tali aspetti perché si ipotizzava che la distribuzione fosse Gaussiana e il processo aleatorio stazionario. Ma alla luce di quanto visto nel paragrafo 4.1, l'esistenza di asimmetria e leptocurtosi non è da sottovalutare, anzi questi aspetti caratterizzano la maggioranza delle evidenze empiriche descritte. A questo punto può essere fuorviante interpretare i dati empirici, che presentano asimmetria e leptocurtosi, attraverso una distribuzione normale che è per definizione simmetrica e mesocurtica.

Un'ipotesi economica sulle cause della presenza di asimmetria nella distribuzione dei rendimenti dei portafogli può essere la diversa concezione di rischio, e quindi di preferenze, degli agenti. In pratica gli investitori differenziano tra probabilità di perdite e probabilità di guadagni, mostrandosi meno propensi al rischio di perdite piuttosto che alla possibilità di extra guadagni. Per questo motivo sarà necessario un premio al rischio maggiore per investire nei portafogli a sinistra del valor medio rispetto a quelli a destra, nonostante presentino lo stesso valore in termini di scostamenti quadratici dalla media.

Tutti questi aspetti hanno interessato numerosi studi di finanza degli ultimi decenni. L'obiettivo è quello di creare dei test che diano conferma delle caratteristiche della serie dei rendimenti e comporre dei modelli che possano interpretare in maniera appropriata i dati reali adattandosi alle caratteristiche osservate sui mercati.

Per quanto riguarda il calcolo degli indici di asimmetria e curtosi della serie dei rendimenti nel Capitolo 2 (Par. 2.2) è stata già illustrata una misura teorica e campionaria dei due momenti centrali. È possibile avere così una prima indicazione sulle caratteristiche della distribuzione dei rendimenti. Per un'analisi più approfondita sono stati creati test statistici, che confermano o meno l'adattabilità della distribuzione a una distribuzione normale.

Per quanto concerne l'asimmetria della distribuzione si ha: sotto ipotesi di normalità dei rendimenti logaritmici R, la distribuzione di $s\hat{k}(R)$ è Gaussiana con media zero e varianza 6/T (per campioni con T grande).

Si può testare H_0 : $sk(R) = 0$ contro H_1 : $sk(R) \neq 0$, sfruttando la statistica test:

$$z(sk) = \frac{s\hat{k}(R)}{\sqrt{6/T}}$$

che sotto H_0 diventa Gaussiana standard. Quindi valori di $|z(sk)| > 2$ portano a rifiutare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% circa.

Simile il test riguardante la curtosi della distribuzione, infatti: sempre sotto ipotesi di normalità dei rendimenti logaritmici R, la distribuzione di $k\hat{u}(R)$ è Gaussiana (per campioni con T grande), con media zero e varianza 24/T.

Si può testare H_0 : $ku(R) - 3 = 0$ contro H_1 : $ku(R) - 3 \neq 0$, sfruttando la statistica test:

$$z(ku) = \frac{k\hat{u}(R) - 3}{\sqrt{24/T}}$$

che sotto H_0 diventa Gaussiana standard. Se $|z(ku)| > 2$ si può rifiutare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5% circa.

Per studiare contemporaneamente sia l'asimmetria che la curtosi della distribuzione si può introdurre il test congiunto di normalità Jarque-Bera. Per la variabile aleatoria R di definisce il test:

$$\text{JB} = \frac{T}{6}\left\{\left[s\hat{k}(R)\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\hat{k}u(R) - 3\right]^2\right\}.$$

Il test JB combina in un'unica formula gli indici di simmetria e curtosi. Essendo la somma di due variabili aleatorie Gaussiane standardizzate, sotto l'ipotesi nulla, la distribuzione di JB corrisponde alla distribuzione della somma di due variabile casuali normali al quadrato. Se vale l'ipotesi di normalità della distribuzione marginale dei rendimenti logaritmici, JB ha distribuzione $\chi^2(2)$ con tra parentesi i gradi di libertà.

L'ipotesi nulla di normalità di R si scrive $H_0 : R \sim N(0,1)$. Se H_0 è vera $JB \sim \chi^2(2)$, quindi il valore di JB va confrontato con i quantili di una $\chi^2(2)$. Se $JB > 6$ possiamo rifiutare l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5%, quindi è poco verosimile che la serie sia Gaussiana.

Attraverso questi test statistici è possibile analizzare la normalità della distribuzione dei rendimenti. In caso di esito negativo, emerge il problema dell'uso del modello per la costruzione del portafoglio ottimo. Infatti l'utilizzo del modello, e di conseguenza delle ipotesi sottostanti, potrebbe comportare risultati fuorvianti e non coerenti con i dati reali.

4.3 IMPLICAZIONI PRATICHE

Le considerazioni fatte fin qui hanno delle conseguenze sui risultati pratici ottenuti dall'applicazione delle teorie di selezione del portafoglio. Non essendo verificate alcune ipotesi dei modelli diviene fondamentale capire quali siano le ripercussioni sui dati ottenuti.

Una prima analisi va fatta sulla presenza di legame (anche se non lineare) tra i rendimenti alle diverse epoche di tempo e sull'evidenza empirica riguardante la varianza non costante e legata ai trend di mercato del prezzo. Tali caratteristiche empiriche hanno conseguenze sulla scelta della varianza storica come indice di rischio del portafoglio. Infatti, nel modello di Markowitz era plausibile tale scelta poiché si suppone una distribuzione normale e una serie stazionaria, quindi con varianza costante nel tempo. Ma i fatti stilizzati (Par. 4.1), evidenziano come un determinato livello di varianza non sia corretto per descrivere il rischio del titolo ad ogni epoca temporale. Si può avere conferma di ciò considerando le serie storiche degli stessi titoli con lunghezze diverse. Infatti, non risulterà una varianza costante, ma diversa per ogni serie storica considerata.

Per capire il legame tra il rischio del portafoglio e la distribuzione della serie dei rendimenti si può analizzare l'approccio del Value at Risk (VaR)[10]. Il VaR è un indice di rischio molto utilizzato in campo finanziario, essendo, nella sua formula base, di facile comprensione anche per i non addetti al settore. Il VaR rappresenta, dato un certo livello di confidenza e un dato intervallo temporale, la massima perdita possibile in condizioni normali di mercato. L'espressione più semplice per calcolare questo indice consiste nell'individuare il quantile sulla coda sinistra della distribuzione, cioè la parte in cui rientrano le perdite, per la relativa deviazione standard. In formula:

$$VaR = -F^{-1}(\alpha)\, \sigma + \mu.$$

Quindi il valore a rischio dipende sia dalla deviazione standard σ che dal valore atteso della distribuzione μ, ma soprattutto dal quantile della distribuzione. Poiché il VaR utilizza l'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti, è facile comprendere come ciò possa influire sui risultati ottenuti. Infatti una diversa forma della distribuzione comporta risultati differenti, che nel caso del VaR, può portare a stimare in maniera errata il rischio, con evidenti conseguenze nella scelta degli investimenti.

[10] Si veda Appendice 1

CAPITOLO 5

APPLICAZIONE EMPIRICA

In questa sezione verranno testate le teorie economiche, espresse nei capitoli precedenti, su delle serie di dati reali. Per l'analisi dei concetti descritti, è stato preso come riferimento l'indice FTSE MIB. In particolare, verranno analizzati 37 dei 40 titoli che compongono l'indice, poiché sono stati scartati i titoli di recente quotazione visto che non presentavano una serie storica completa e, affinché non fosse compromessa la correttezza dello studio, non sono stati presi in considerazione. Inoltre è stato considerato l'andamento dell'indice stesso, come benchmark di riferimento.

I titoli selezionati sono:

1) A2A
2) AUTOGRILL (AGL)
3) ATLANTIA (ATL)
4) AZIMUT HOLDING (AZM)
5) BANCA MONTE PASCHI DI SIENA (BMPS)
6) BANCO POPOLARE SOCIETÀ COOPERATIVA (BP)
7) BANCA POPOLARE DELL'EMILIA ROMAGNA (BPE)
8) BUZZI UNICEM (BZU)
9) CAMPARI (CPR)
10) ENEL GREEN POWER (EGPW)
11) ENEL
12) ENI
13) EXOR (EXO)
14) FIAT (F)
15) FINMECCANICA (FNC)
16) GENERALI (G)
17) GTECH (GTK)
18) INTESA SAN PAOLO (ISP)
19) LUXOTTICA (LUX)

20) MEDIOBANCA (MB)
21) MEDIOLANUM (MED)
22) MEDIASET (MS)
23) PIRELLI (PC)
24) BANCA POPOLARE MILANO (PMI)
25) PRYSMIAN (PRY)
26) SALVATORE FERRAGAMO (SFER)
27) SAIPEM (SPM)
28) SNAM (SRG)
29) STMICROELECTRONICS (STM)
30) TENARIS (TEN)
31) TELECOM ITALIA (TIT)
32) TOD'S (TOD)
33) TERNA (TRN)
34) UBI BANCA (UBI)
35) UNICREDIT (UCG)
36) UNIPOLSAI ASSICURAZIONI (US)
37) YOOX.

Ci si è concentrati su tre diverse serie storiche di tali titoli variando l'orizzonte temporale al fine di comprendere se le ipotesi delle teorie economiche prese in considerazione fossero rispettate e per capire come la variazione della lunghezza della serie influisse sulle scelte di investimento. Quindi sono stati analizzati i prezzi di chiusura dei titoli dell'ultimo semestre del 2013, la serie che comprende i prezzi riguardanti tutto l'anno 2013 e infine i prezzi a partire dal primo Gennaio 2012 fino al 31 Dicembre 2013. Dai prezzi giornalieri si sono ricavate le serie dei rendimenti logaritmici. Infatti, è dall'analisi dei rendimenti logaritmici che saranno disponibili tutti i dati necessari per scelta degli investimenti in portafoglio e per le successive riflessioni sui risultati ottenuti. Il primo passo sarà il calcolo del rendimento atteso e della varianza di ogni singolo titolo, poiché attraverso questi due indici potranno essere fatte le prime considerazioni sui titoli e iniziare il processo di selezione.

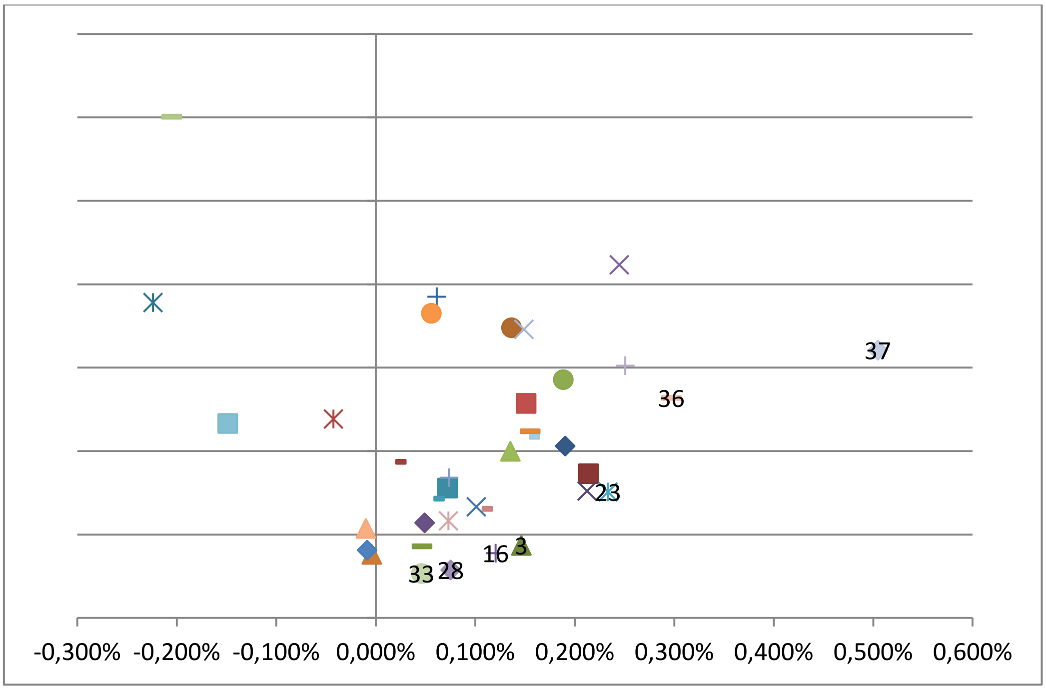
Si vedranno, quindi, di seguito le varie fasi del processo di analisi dei titoli, partendo dalla selezione di portafoglio, per poi indagare su come i dati reali si adattano alle ipotesi delle teorie finanziarie.

5.1 TITOLI NON DOMINATI

Dopo aver calcolato dai prezzi i relativi rendimenti logaritmici, e in seguito valore medio e varianza di tali rendimenti per tutti i titoli dell'indice e per l'indice stesso, un primo criterio da applicare è il criterio media-varianza. Tramite questa operazione si avrà una scrematura dei titoli su cui lavorare, poiché la selezione si concentrerà solamente su quei titoli che non è possibile discriminare attraverso il criterio media-varianza. Per attuare questa operazione si studia il grafico su cui sono collocati i titoli in base al rendimento atteso e alla varianza. Sull'asse delle ascisse si trovano i valori medi mentre su quello delle ordinate i valori della varianza. In base a questo criterio i titoli su cui concentrarsi saranno quelli in basso scorrendo verso destra, cioè quelli che, a parità di varianza, presentano valore medio maggiore o parità di valor medio una varianza minore.

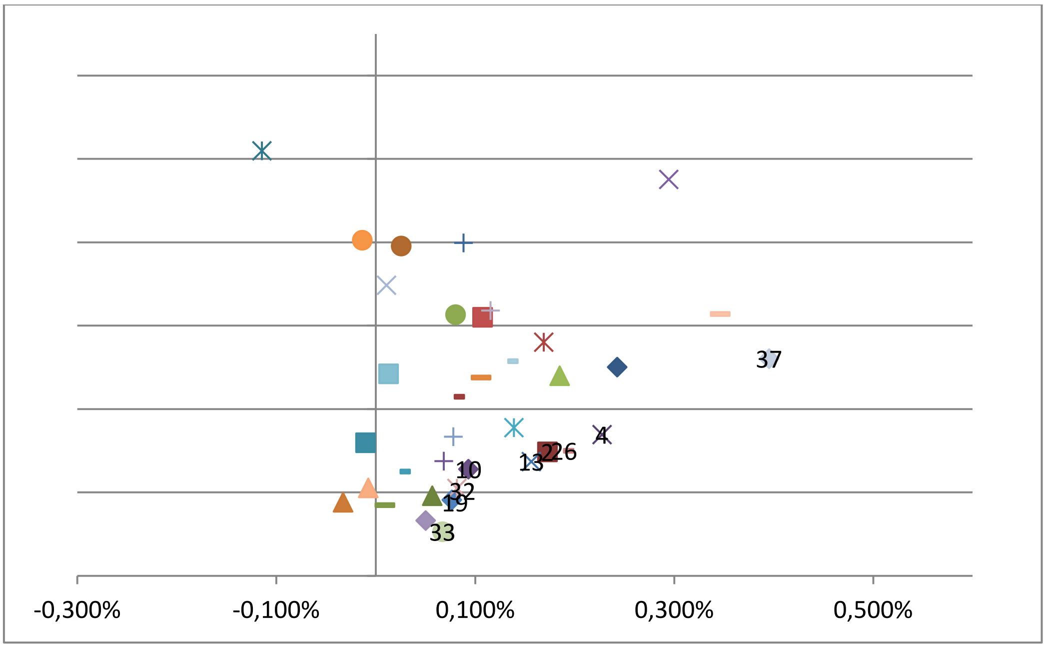
Sarà effettuata questa valutazione per le tre serie storiche considerata ottenendo i seguenti grafici, in cui i punti all'interno rappresenteranno ogni singolo titolo dell'indice FTSE MIB:

Per la serie di 6 mesi:



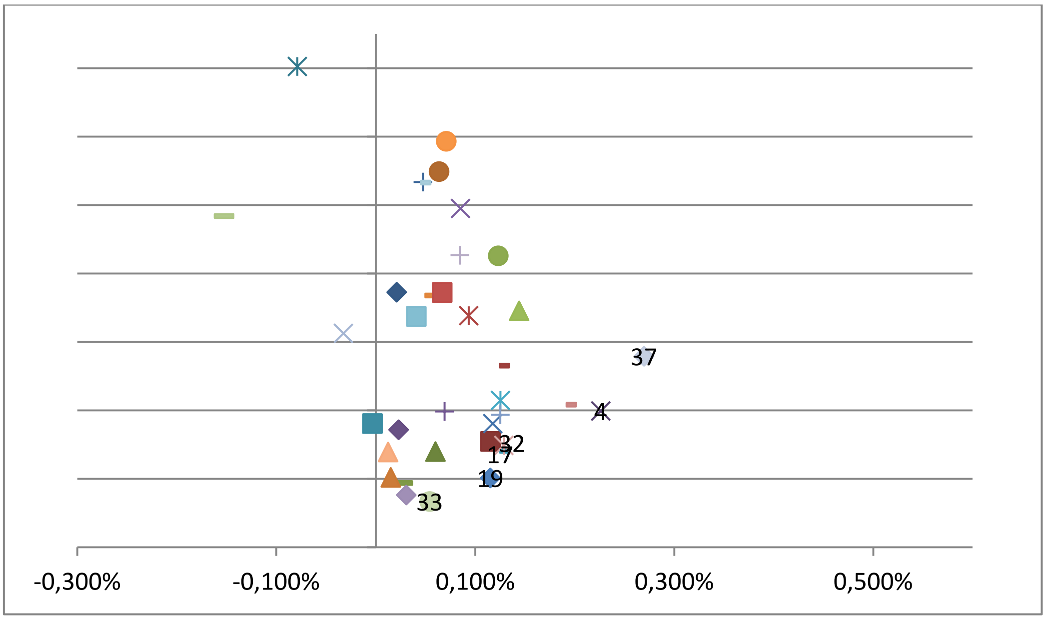
Dati Bloomberg

Per la serie di 1 anno:



Dati Bloomberg

Per la serie di 2 anni:



Dati Bloomberg

Osservando i grafici si può notare che all'aumentare della lunghezza della serie diminuisce la dispersione dei titoli, infatti, il valore medio si avvicina maggiormente al valore nullo e i titoli risultano più concentrati nell'aria adiacente all'asse delle ordinate. Detto di questo aspetto grafico, si può passare ad elencare i titoli non dominati, e su cui si ci concentrerà nel seguito il lavoro.

Per quanto riguarda la serie che comprende il secondo semestre del 2013, i titoli non dominati sono i seguenti:

	RENDIMENTO	VARIANZA
ATL	0,1465%	0,0174%
G	0,1206%	0,0155%
PC	0,2336%	0,0302%
SRG	0,0754%	0,0115%
TRN	0,0460%	0,0106%
US	0,2973%	0,0527%
YOOX	0,5048%	0,0642%

Per la serie di lunghezza un anno i titoli non dominati sono nove:

	RENDIMENTO	VARIANZA
AGL	0,1727%	0,0297%
AZM	0,2276%	0,0339%
EGPW	0,0932%	0,0256%
EXO	0,1565%	0,0274%
LUX	0,0766%	0,0182%
SFER	0,1894%	0,0300%
TOD	0,0817%	0,0210%
TRN	0,0672%	0,0106%
YOOX	0,3955%	0,0521%

Infine per l'ultima serie che comprende il 2012 e il 2013, i titoli non dominati si riducono:

	RENDIMENTO	VARIANZA
AZM	0,2263%	0,0399%
GTK	0,1249%	0,0283%
LUX	0,1152%	0,0203%
TOD	0,1289%	0,0298%
TRN	0,0543%	0,0134%
YOOX	0,2698%	0,0559%

Quindi presupponendo che gli agenti siano razionali, sono questi i titoli con cui andare a creare i portafogli efficienti e quindi su cui concentrare la successiva fase di analisi.

5.2 LA PORTFOLIO SELECTION

L'analisi svolta nel paragrafo precedente permette soltanto di capire quali sono i titoli da prendere in considerazione, ma non dice nulla su quali pesi debbano avere tali titoli all'interno del portafoglio per la creazione, appunto, del portafoglio ottimo. In questa sezione, sfruttando la teoria della "Portfolio Selection" di Markowitz, saranno illustrati i risultati ottenuti sulle tre serie storiche prese in considerazione. Per ottenere il portafoglio ottimo è necessario risolvere il problema di ottimo vincolato, in questo caso minimizzando la varianza, dato un determinato rendimento atteso del FTSE MIB e supponendo che venga utilizzato tutto il capitale a disposizione in modo tale che la somma dei pesi in portafoglio sia pari a 1. Inoltre, non sono permesse vendite allo scoperto quindi si avranno soltanto quote di composizione positive. Per risolvere tale problema di ottimo vincolato è possibile sfruttare il risolutore di Excel (vedi par. 3.2), considerando un rendimento atteso maggiore di quello dell'indice FTSE MIB, usato come benchmark. Tutto ciò è possibile ipotizzando che i rendimenti abbiano una distribuzione Gaussiana e il processo sia stazionario.

I risultati ottenuti offrono i primi spunti per l'analisi delle serie storiche.

5.2.1 Portafoglio ottimo con la serie storica di 6 mesi

Risolvendo il problema di ottimo vincolato il portafoglio sarà così composto:

ATL	17,98%
G	9,72%
PC	1,71%
SRG	23,39%
TRN	42,14%
US	0,00%
YOOX	5,05%

A questo punto è possibile confrontare il portafoglio con l'indice FTSE MIB.

	PORTAFOGLIO	FTSE MIB
RENDIMENTO	0,1046%	0,0727%
VARIANZA	0,0076%	0,0149%

Come è evidente dalla tabella precedente, il portafoglio così costituito migliora, in termini di performance, le attese rispetto al benchmark utilizzato.

5.2.2 Portafoglio ottimo con la serie storica di 1 anno

Considerando la serie storica dei rendimenti dell'intero anno del 2013, variano i titoli non dominati e quindi anche i risultati rispetto alla serie precedente. Ecco i pesi che i titoli assumono nel portafoglio ottimo:

AGL	5,65%
AZM	0,00%

EGPW	4,28%
EXO	0,00%
LUX	10,29%
SFER	4,06%
TOD	15,15%
TRN	55,41%
YOOX	5,15%

Il portafoglio così formato darà i seguenti valori in termini di valore atteso e varianza:

	PORTAFOGLIO	FTSE MIB
RENDIMENTO	0,0896%	0,0461%
VARIANZA	0,0080%	0,0172%

Anche in questo caso il portafoglio ha una performance migliore dell'indice sia in termini di rendimento atteso che di varianza.

5.2.3 Portafoglio ottimo con la serie di 2 anni

Aumentando la lunghezza della serie storica fino a Gennaio del 2012, la selezione subisce ulteriori variazioni, infatti il portafoglio avrà pesi pari a:

AZM	0,00%
GTK	8,15%
LUX	20,18%
TOD	12,54%
TRN	55,53%
YOOX	3,60%

Con questa percentuale di titoli in portafoglio si veda il confronto con l'indice FTSE MIB.

	PORTAFOGLIO	FTSE MIB
RENDIMENTO	0,0895%	0,0406%
VARIANZA	0,0103%	0,0244%

Pure questa serie storica conferma il miglioramento della performance, rispetto all'indice, utilizzando la teoria di Markowitz.

5.2.4 Confronto tra portafogli ottimi

Calcolati separatamente i tre portafogli ottimi, può risultare interessante metterli a confronto tra loro per poter notare aspetti che legano le varie serie storiche analizzate.

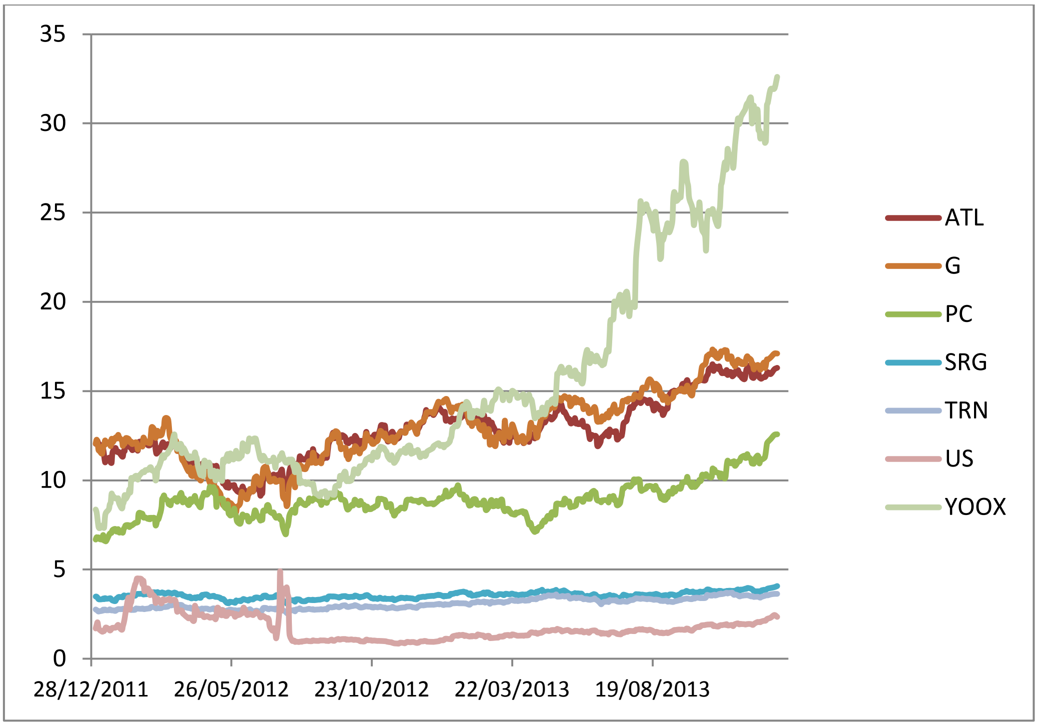
Composizione portafogli ottimi

6 MESI		**1 ANNO**		**2 ANNI**	
ATL	17,98%	AGL	5,65%	AZM	0,00%
G	9,72%	AZM	0,00%	GTK	8,15%
PC	1,71%	EGPW	4,28%	LUX	20,18%
SRG	23,39%	EXO	0,00%	TOD	12,54%
TRN	42,14%	LUX	10,29%	TRN	55,53%
US	0,00%	SFER	4,06%	YOOX	3,60%
YOOX	5,05%	TOD	15,15%		
		TRN	55,41%		
		YOOX	5,15%		

Dalla tabella si evince che i titoli comuni ai tre portafogli ottimi sono Terna e Yoox, con il primo che rappresenta il titolo con maggior peso indipendentemente dalla serie storica utilizzata, esprimendo, quindi, un buon rapporto tra rendimento e rischio. Altri aspetti che si possono desumere dall'osservazione dei dati è la marcata differenza tra i titoli della prima serie storica rispetto agli altri due. Infatti, mentre i titoli che compongono il portafoglio ottimo ottenuto dalla serie di lunghezza due anni, rientrano anche nel portafoglio ottimo della serie di lunghezza un anno, mostrando, di conseguenza, un certo grado di affinità, il portafoglio ottimo risultato dalla serie storica di sei mesi presenta titoli diversi dagli altri due portafogli ad eccezione di Terna e Yoox.

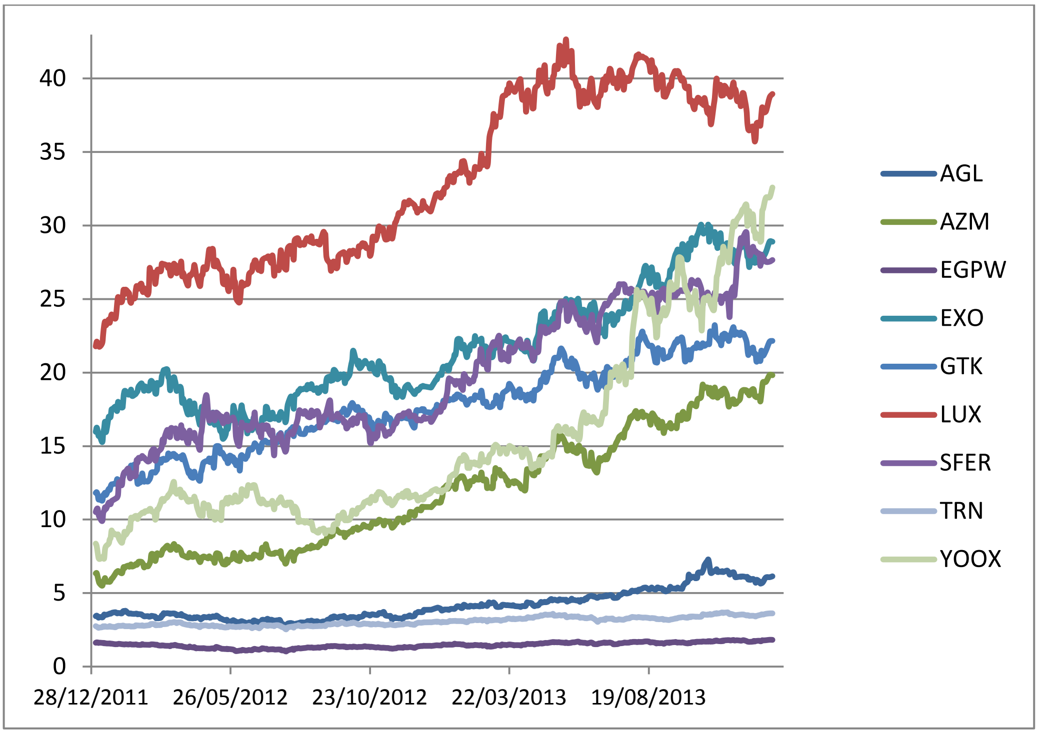
Può essere utile, per indagare le cause che comportano la marcata differenza tra il portafoglio composto attraverso la serie storica di sei mesi e gli altri due, analizzare l'andamento del prezzo dei titoli nei due anni presi in considerazione. Per semplificare l'analisi verranno utilizzati due grafici distinti. In uno sarà mostrato l'andamento dei titoli che compongono il primo portafoglio ottimo, mentre nell'altro saranno visionati i prezzi dei titoli che compongono gli altri due portafogli poiché sono molto simili tra loro.

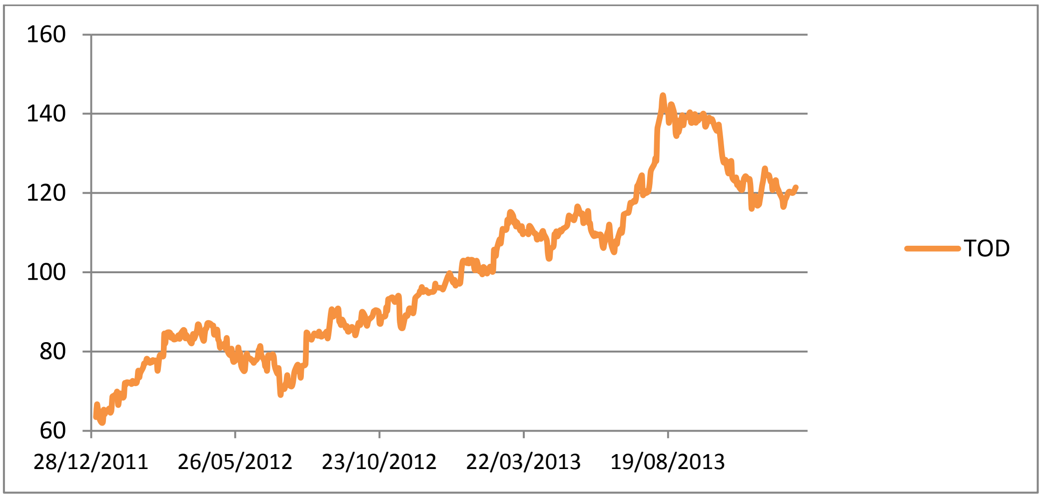
Grafico 1



Dati Bloomberg

Grafico 2





Dati Bloomberg

Nei due grafici[11] si può riscontrare la causa che ha comportato la diversità tra i titoli che compongono il portafoglio costruito attraverso la serie storica lunga sei mesi e i titoli che compongono gli altri due portafogli.

[11] A causa dell'alto prezzo dell'azione di Tod's rispetto alle altre, si è preferito rappresentare l'andamento in un grafico a parte, per non compromettere la nitidezza del trend degli altri titoli.

Per la costruzione del primo, infatti, si deve analizzare la parte finale dei tracciati dei due grafici. Di conseguenza, è evidente che nel primo grafico tutti i titoli hanno un trend positivo sulla coda del tracciato, mentre nel secondo grafico la maggior parte dei titoli ha andamento piatto o addirittura negativo nell'ultimo periodo analizzato. Per questo motivo sono stati utilizzati i titoli del primo grafico per la creazione del portafoglio ottimo considerando le serie storiche di lunghezza sei mesi.

Per costruire invece i portafogli allungando le serie storiche fino a uno e due anni bisogna analizzare i tracciati nella loro interezza. In questo caso nel primo grafico i titoli hanno andamenti altalenanti nella prima parte e positivo solo negli ultimi mesi del 2013. Nel secondo grafico invece i titoli presentano un netto trend rialzista partendo dall'inizio del 2012 e lievi flessioni solo nell'ultimo periodo, prestandosi meglio alla costruzione del portafoglio ottimo prendendo in analisi una serie storica più lunga. Inoltre titoli che presentano un andamento abbastanza piatto (ad esempio Terna), sono vantaggiosi in termini di varianza, e quindi presenti all'interno dei portafogli.

In definitiva, una differenza così marcata, tra l'andamento negli ultimi sei mesi e l'andamento nell'intero periodo di due anni dei vari titoli, ha comportato una netta distinzione di composizione tra il portafoglio formato analizzando il secondo semestre del 2013 e gli altri due portafogli composti attraverso serie storiche più lunghe.

Esaminate le differenze di composizione tra i vari portafogli, non si può tralasciare il confronto in termini di performance, quindi di rendimento e rischio. Sarà utilizzato il rendimento atteso su base annuale[12] e il VaR[13] come indice di rischio. Per il VaR sarà considerato un orizzonte temporale di un anno e due livelli di significatività, cioè al 95% e al 99%. Per il calcolo il metodo utilizzato è quello parametrico. Nonostante sia il metodo meno sofisticato, tra i tre disponibili, quello parametrico è il metodo che si rifà alle ipotesi della teoria di portafoglio di Markowitz, e quindi il più appropriato al tipo di analisi affrontata fino ad adesso.

[12] Calcolando i rendimenti dei portafogli sui rendimenti logaritmici relativi a tutto l'anno 2013, basta moltiplicare il rendimento medio giornaliero per il numero di giorni in un anno. Considerando i giorni lavorativi i rendimenti saranno moltiplicati per 256.

[13] I valori del VaR sono calcolati dalla piattaforma Bloomberg, caricando sul portale i vari portafogli.

Partendo dal rendimento atteso i portafogli ottimi presentano risultati interessanti:

Rendimento portafogli su base annua

6 MESI	1 ANNO	2 ANNI
20,31%	22,93%	21,70%

Riguardo questo aspetto, cioè il rendimento dei tre portafogli su un arco di tempo omogeneo, si nota un certo equilibrio tra i vari portafogli che differiscono tra loro per pochissimi punti percentuali, nonostante la grande differenza di composizione tra il portafoglio a sei mesi e gli altri due.

In termini di performance comunque il secondo portafoglio offre un rendimento atteso superiore, e quindi su questo aspetto è da preferire rispetto agli altri due.

Però è interessante prendere in considerazione il benchmark utilizzato in questo studio, cioè l'indice FTSE MIB. Il rendimento di quest'ultimo produce considerazioni diverse rispetto a quelle fatte per i portafogli ottimi. Per chiarire, si parta dai rendimenti attesi giornalieri dell'indice:

Rendimento medio giornaliero FTSE MIB

6 MESI	1 ANNO	2 ANNI
0,073%	0,046%	0,041%

Come si nota dalla precedente tabella, il FTSE MIB presenta un rendimento nettamente superiore considerando il secondo semestre del 2013 rispetto alle due altre serie storiche. In questo caso l'indice presenta valori molto simili considerando l'arco temporale di uno e due anni, mentre presenta un valore di gran lunga maggiore nella serie storica lunga sei mesi, marcando la differenza di andamento tra l'ultimo semestre del 2013 e gli altri due archi temporali e confermando che *la scelta dell'intervallo temporale studiato influisce nella selezione degli investimenti.*

Considerazioni simili emergono anche dall'analisi del rischio dei portafogli. Come già anticipato, l'indice di rischio utilizzato è il VaR, calcolato utilizzando il metodo parametrico, su orizzonte annuo, e considerando due livelli di confidenza.

I risultati ottenuti:

VaR portafogli ottimi

PORTAFOGLI	**VaR 95%**	**VaR 99%**
6 MESI	26,21%	37,06%
1 ANNO	27,61%	39,04%
2 ANNI	27,50%	38,90%

Elaborazione Bloomberg

Passando dal rendimento atteso al VaR le considerazioni sui tre portafogli ottimi rimangono molto simili. Anche in questo caso il portafoglio composto tramite la serie storica lunga sei mesi risulta meno rischioso rispetto agli altri due e quindi preferibile. Inoltre, i portafogli che considerano le serie storiche di lunghezza un anno e due anni presentano valori del VaR molto vicini.

Stesso discorso vale, oltretutto, per la spiegazione di questo gap tra il primo portafoglio e gli altri due. Infatti, analizzando l'indice FTSE MIB, che funge da benchmark per il segmento di titoli analizzato, si nota che lo scostamento quadratico medio dei rendimenti dal valor medio è minore negli ultimi sei mesi del 2013 rispetto alle due altre serie storiche. Di conseguenza una minor varianza esprime un minor grado di rischio che si riflette, ovviamente, sui valori rinvenuti calcolando il Value at Risk. Per un confronto immediato, si riporta di seguito la varianza giornaliera del FTSE MIB per ognuna delle tre serie storiche di riferimento.

Varianza giornaliera FTSE MIB

6 MESI	**1 ANNO**	**2 ANNI**
0,014%	0,017%	0,024%

Quindi, un valore più basso del VaR del portafoglio ottimo, costruito attraverso la serie storica lunga 6 mesi rispetto agli altri due portafogli ottimi, riflette un andamento meno volatile di tutto il mercato borsistico di riferimento nel secondo semestre del 2013, e quindi la scelta dei titoli su cui investire risente anche dal periodo storico preso in considerazione.

5.3 CRITICITÀ DEL MODELLO

Applicato il modello di Markowitz ai dati reali dei titoli del FTSE MIB, si indaga adesso rispetto alle ipotesi alla base della teoria di selezione del portafoglio. Il fine è quello di dare un senso ai risultati ottenuti sulle tre serie storiche considerate, che risultano contraddittori rispetto ai concetti su cui si fonda il lavoro di Markowitz.

Nel paragrafo precedente lo studio si è concentrato su due parametri principali delle serie, vale a dire il rendimento atteso e la varianza dei vari portafogli. Il rischio è stato misurato inizialmente attraverso la varianza del rendimento del portafoglio e in seguito è stato calcolato anche il "valore a rischio" di ogni investimento, per avere un ulteriore indice di rischio su cui basare la selezione. Tale semplificazione è stata legittimata dalle ipotesi del modello che permettono di limitarsi alla conoscenza del rendimento atteso e della varianza, come indici per l'analisi delle serie storiche. Infatti, ipotizzando che le serie storiche siano distribuiti come una normale, e che siano inoltre stazionarie, il momento primo e il momento secondo sono le uniche due variabili necessarie per lo studio della serie dei rendimenti. Partendo dalla verifica di queste ipotesi, è possibile analizzare le cause che comportano risultati diversi da quelli che è possibile presumere dalla costruzione dei tre portafogli ottimi secondo il modello. Ulteriore supporto a questo tipo di analisi deriva dai fatti stilizzati, che come detto si rifanno allo studio sulle serie storiche finanziarie reali. Rifacendosi, appunto, a quanto dimostrato grazie alle verifiche empiriche sul mercato borsistico, l'analisi si concentrerà sull'ipotesi di normalità delle serie storiche studiate e sulla stazionarietà delle stesse, per capire se il rendimento atteso, la varianza e il VaR parametrico, siano indici sufficienti per la selezione del portafoglio e bastino ad approssimare rendimento e rischio dell'investimento.

Per quanto riguarda l'ipotesi di normalità della distribuzione, saranno calcolati simmetria e curtosi delle curve di distribuzione, e sarà inoltre eseguito il test di normalità attraverso il test di Jarque-Bera. Mentre per l'analisi della stazionarietà della serie, si ci concentrerà sull'autocorrelazione dei rendimenti, studiando il correlogramma di ogni serie storica dei titoli.

5.3.1 L'ipotesi di normalità

Questa parte è dedicata all'esposizione dei valori campionari del momento centrale terzo e del momento centrale quarto, rispettivamente asimmetria e curtosi della distribuzione. Saranno analizzati tutti i titoli non dominati per ogni serie storica presa come riferimento. Richiamando quanto già scritto nel capitolo 4 (Par. 4.2), la distribuzione Gaussiana presenta un valore di zero per quanto riguarda l'asimmetria, sfruttando l'indice di Fisher[14], e di tre per la curtosi, utilizzando come riferimento l'indice di curtosi di Pearson[15]. Sarà quindi effettuato un test congiunto per verificare se la curva possa essere considerata Gaussiana o meno. In particolare, se il test di Jarque-Bera presenta un valore maggiore di sei si rifiuta l'ipotesi di normalità della serie con un livello di significatività del 5%.

Per il calcolo dei vari indici e dei test si è sfruttato l'ausilio del software Excel, sfruttando le formule descritte nel capitolo 4, fornendo risultati identici rispetto all'utilizzo del software statistico R, che attraverso i comandi kurt e skew, rispettivamente per curtosi e simmetria delle varie serie storiche, sviluppa direttamente i valori richiesti.

I titoli non dominati della serie storica lunga sei mesi presentano i seguenti valori:

[14] Dal nome del matematico, statistico e biologo britannico Ronald Fisher.

[15] Dal nome del matematico e statistico britannico Karl Pearson.

Dati relativi alla serie storica di ampiezza 6 mesi

	ASIMMETRIA	CURTOSI	TEST JB
ATL	-0,33	3,65	5,44
G	-0,12	2,66	1,05
PC	0,03	3,17	0,22
SRG	0,03	3,01	0,03
TRN	-0,44	6,71	88,73
US	0,14	2,80	0,74
YOOX	0,88	4,67	36,05

Dalla lettura della tabella emerge che solo i titoli Terna e Yoox non presentano una distribuzione normale come si evince dai valori significativamente maggiori di sei nel test di normalità. Si evince dai valori in tabella che la non-normalità è causata dalla presenza di "code pesanti" nella distribuzione infatti se l'asimmetria presenta valori prossimi a zero, la curtosi si scosta molto dal valore tre presente nelle distribuzioni Gaussiane.

Passando ai titoli della serie storica che considera l'intero anno 2013 i valori calcolati sono:

Dati relativi alla serie storica di ampiezza 1 anno

	ASIMMETRIA	CURTOSI	TEST JB
AGL	0,21	5,25	55,16
AZM	0,45	3,66	13,33
EGPW	-0,11	3,95	10,07
EXO	-0,16	3,74	6,98
LUX	-0,05	3,15	0,39
SFER	0,45	4,09	21,34
TOD	0,01	4,71	30,73
TRN	-0,55	5,78	94,21
YOOX	0,73	5,20	73,32

Elaborazione personale

Situazione totalmente diversa per i titoli non dominati di questa serie storica. Infatti, in questo caso soltanto due titoli presentano valori simili a quelli di una distribuzione normale, cioè Exo e Luxottica, mentre per gli altri titoli è possibile affermare che non presentino una serie Gaussiana come anche confermato dai valori del test Jarque-Bera (JB) chiaramente superiori a sei. Anche in questo caso Terna e Yoox presentano i valori più alti nel test di normalità e in generale si hanno valori di curtosi maggiori di tre, evidenziando la presenza di "code pesanti".

Per finire i sei titoli non dominati dell'ultima serie storica lunga due anni presenta tali valori:

Dati relativi alla serie storica di ampiezza 2 anni

	ASIMMETRIA	CURTOSI	TEST JB
AZM	0,38	4,01	34,23
GTK	-0,06	4,82	70,66
LUX	0,01	3,98	20,21
TOD	0,45	6,31	247,75
TRN	-0,21	5,44	128,90
YOOX	0,56	5,29	137,81

Elaborazione personale

Nessuno dei titoli non dominati di questa serie può essere ricondotta a una distribuzione Gaussiana come risulta dalla tabella soprastante. Tutte le serie in considerazione presentano valori del test JB estremamente alti soprattutto a causa di una forte leptocurtosi.

In definitiva, anche sull'ipotesi di normalità emergono similitudini con quanto visto a proposito della composizione, del rendimento e del rischio dei tre portafogli ottimi. Infatti, anche in questo caso i portafogli creati attraverso le serie storiche di lunghezza un anno e due anni presentano risultati alquanto simili e fortemente discostanti da quelli emersi dalla serie storica lunga sei mesi. Infatti i titoli non dominati di quest'ultima serie sono per lo più approssimabili ad una normale ad eccezione di due soli titoli,. Di contro, gli altri due portafogli, oltre ad essere molto simili come composizione, e nell'analisi del rendimento e del rischio, presentano diversi titoli peri quali si rifiuta l'ipotesi di normalità, facendo emergere soprattutto la presenza di leptocurtosi, tipica della serie storiche finanziarie, e di conseguenza dimostrando che lo studio attraverso la distribuzione normale sottovaluta la presenza di eventi estremi presenti, invece, nei mercati reali.

5.3.2 L'ipotesi di indipendenza temporale dei rendimenti

Dopo aver testato la prevalenza di distribuzioni non Gaussiane per quanto riguarda le serie storiche finanziarie e quindi la negazione di una delle ipotesi base del modello di Markowitz, l'analisi si sposta sull'indipendenza dei rendimenti rispetto al tempo. Infatti, secondo la teoria della selezione di portafoglio, i rendimenti sono tutti indipendenti tra loro, e inoltre essendo la serie stazionaria, la varianza non dipende dal tempo, permettendo così di utilizzare la varianza storica come approssimazione della varianza futura dei titoli.

L'indagine sarà condotta tramite lo studio dei correlogrammi di tutti i titoli non dominati che compongono i portafogli ottimi costruiti attraverso la teoria della "Portfolio Selection". Il numero di ritardi temporali (lag) preso come riferimento è 50, abbastanza ampio da permettere di individuare qualsiasi valore statisticamente significativo. Inoltre, poiché non si è interessati solamente a un legame di tipo lineare, ma a qualunque forma di dipendenza anche di grado superiore, le serie dei rendimenti sono state trasformate, calcolando il quadrato del rendimento ad ogni osservazione. Inoltre per due titoli, Pirelli e Salvatore Ferragamo, è stato necessario anche mostrare il correlogramma della serie originale dei rendimenti logaritmici, a causa della mancanza di autocorrelazione della serie trasformata.

I correlogrammi, osservabili nella sezione appositamente dedicata che fa seguito al paragrafo, mostrano risultati in linea con quanto detto nel capitolo 4, sulle evidenze empiriche rinvenibili sui mercati reali. Infatti tutti i titoli mostrano la presenza di autocorrelazione statisticamente significativa anche se con modalità differenti l'uno dall'altro. Difatti alcuni titoli presentano un'autocorrelazione rilevante per diversi lag temporali, dimostrazione di un legame significativo per diversi periodi, mentre altri titoli avendo valori significativi isolati, provano una presenza di dipendenza solo in specifici periodi. Per i due titoli citati pocanzi, vale a dire Pirelli e Salvatore Ferragamo, la serie trasformata non mostra nessun tipo di dipendenza, ma analizzando il correlogramma della serie originale, per entrambi i titoli emerge un legame lineare significativo, molto marcato per il titolo Salvatore Ferragamo, meno per il rendimento dell'azione Pirelli. Un altro aspetto interessante è la forma sinusoidale, tipica di tutti i titoli finanziari, causata dai "cluster di volatilità, cioè dei periodi vicini di marcata volatilità, chiaro segno del fatto che sia il rendimento che la varianza, in quel determinato periodo, siano legati temporalmente.

La presenza di legame temporale dei rendimenti, intacca l'ipotesi di indipendenza dei rendimenti e, di conseguenza, di stazionarietà del processo. Questo aspetto ha delle conseguenze rilevanti, in quanto complica l'analisi delle serie storiche. Infatti, considerare ad esempio la varianza storica una buona approssimazione di quella futura, comporta degli errori nell'analisi del rischio dell'investimento, poiché non è più valida l'ipotesi di varianza costante nel tempo. Questo implica inoltre che la varianza dipenda dal periodo preso ad esame e di conseguenza dall'orizzonte temporale in considerazione per la serie storica studiata.

Correlogrammi

In questa sezione saranno esposti i correlogrammi di tutti i titoli che hanno contribuito alla formazione dei portafogli ottimi. Per i titoli comuni a più portafogli è stata analizzata la serie storica meno lunga, considerando il fatto che le serie storiche sono in parte sovrapposte. Tutte le serie storiche, come già detto, sono state trasformate calcolando il quadrato del rendimento ad ogni osservazione. Inoltre per i titoli Pirelli e Salvatore Ferragamo saranno mostrati i correlogrammi della serie originale.

I Correlogrammi sono stati costruiti tramite il programma R, caricando le varie serie e utilizzando la funzione acf (auto correlaction function), che riproduce automaticamente il correlogramma di ogni serie così come saranno mostrati di seguito.

Poiché tutti i campioni sono finiti, i valori non possono essere tutti pari a zero così come ci si aspetti da una serie incorrelata. Una soluzione a tale problematica è fornita dal *Teorema della distribuzione asintotica*[16] *delle autocorrelazioni empiriche*[17], che fornisce la distribuzione asintotica della funzione di autocorrelazione. Essendo la distribuzione asintotica Gaussiana in mancanza di autocorrelazione, i limiti di confidenza al livello (1-α)% sono dati da $\pm z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$, dove n rappresenta il numero di osservazioni. Vale a dire che se la percentuale di valori della funzione di autocorrelazione che oltrepassano il livello di confidenza è minore o uguale ad α%, con una probabilità pari a (1-α)% si può affermare che la serie non sia correlata[18].

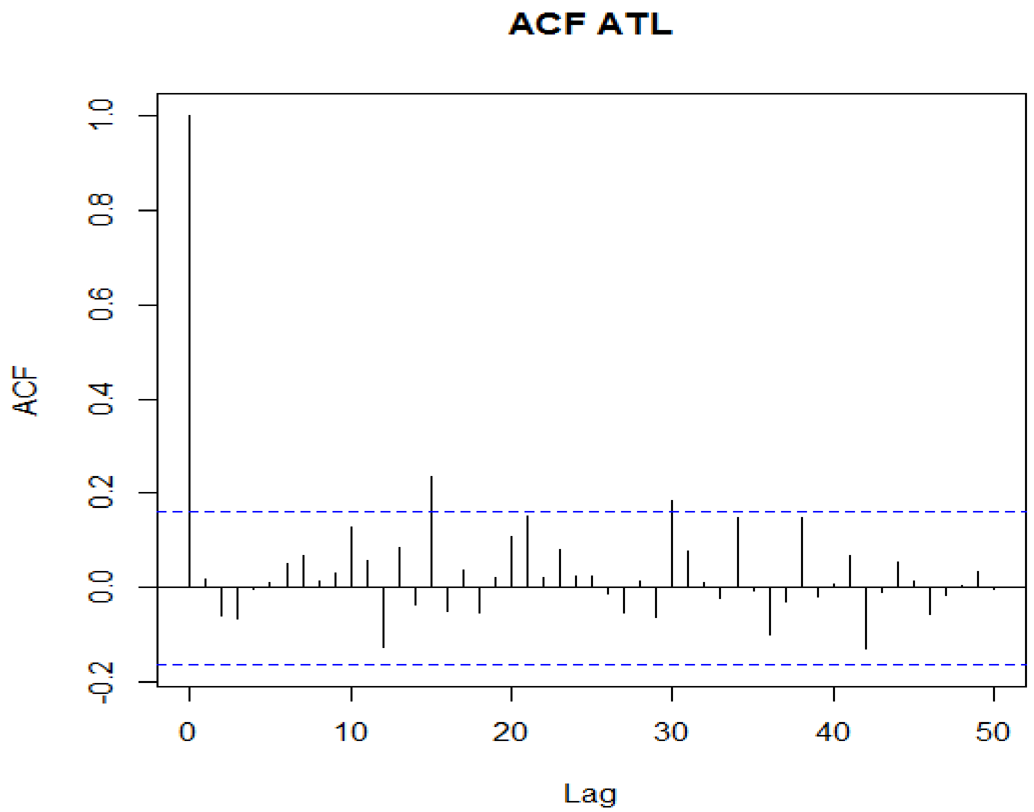
Nei correlogrammi seguenti la probabilità è pari al 95%, quindi le bande di confidenza saranno pari a $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$. Inoltre essendo α=5 la serie sarà considerata incorrelata se non più di due valori supereranno le bande di confidenza tratteggiate.

Per i seguenti titoli è stata considerata la serie storica che considera il secondo semestre del 2013:

[16] La distribuzione asintotica è una distribuzione di probabilità che corrisponde al limite verso il quale tende la distribuzione di una successione di variabili casuali. Il concetto di distribuzione asintotica è particolarmente importante in statistica, poiché la conoscenza della distribuzione limite di uno stimatore permette di conoscerne le proprietà statistiche per grandi campioni e quindi di approssimarne le proprietà in campioni finiti (definizione tratta dalla versione on-line del Dizionario di Economia e Finanza dell' "Enciclopedia Treccani").

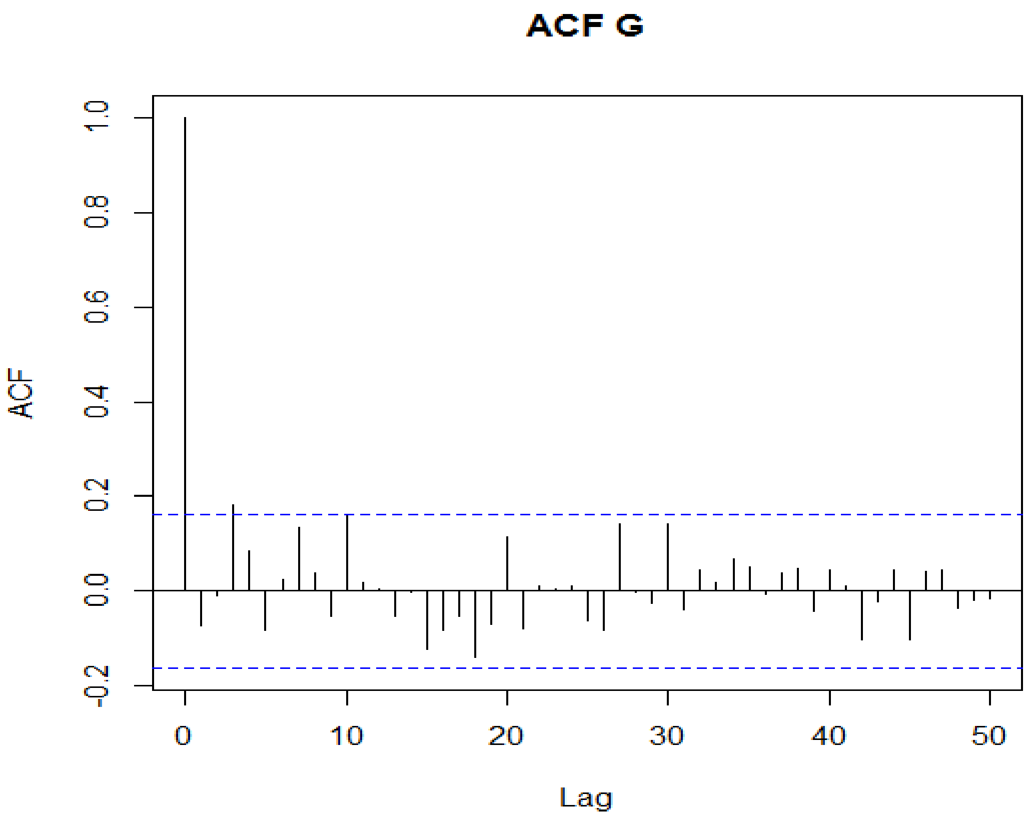
[17] In caso di assenza di autocorrelazione la distribuzione asintotica della stima del coefficiente di autocorrelazione è di tipo normale.

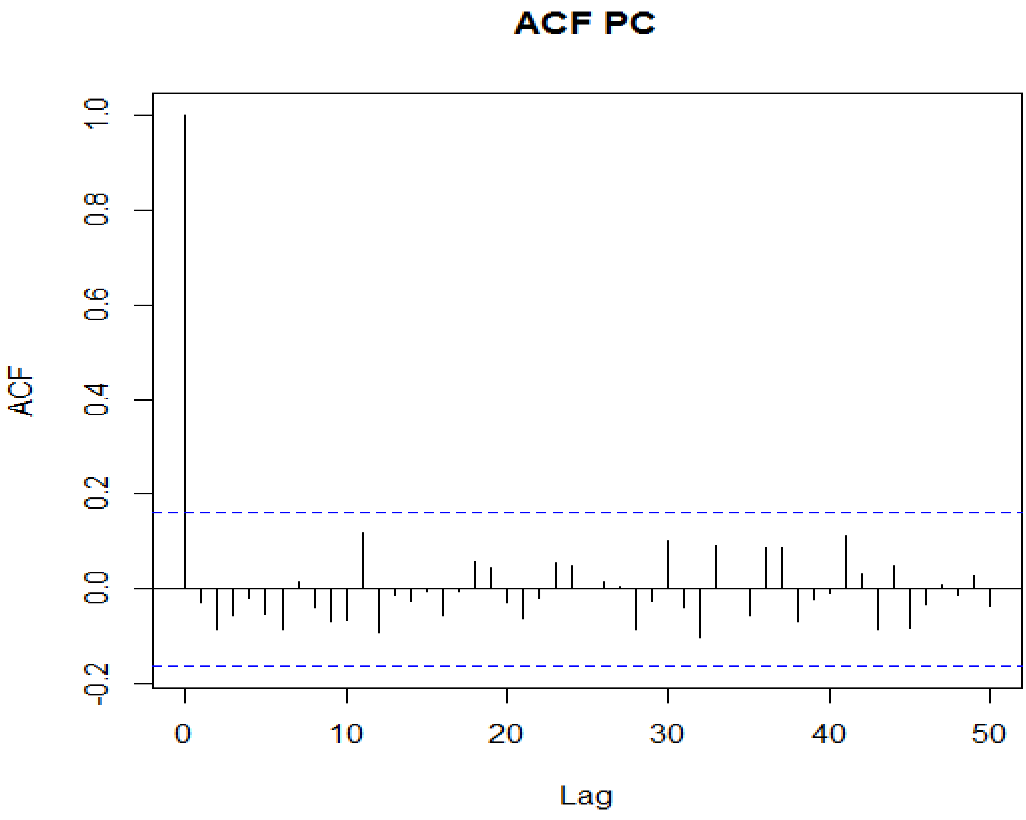
[18] Flavio Santi, Marco Bee, "Finanza Quantitativa con R", Apogeo Editore, 2013.

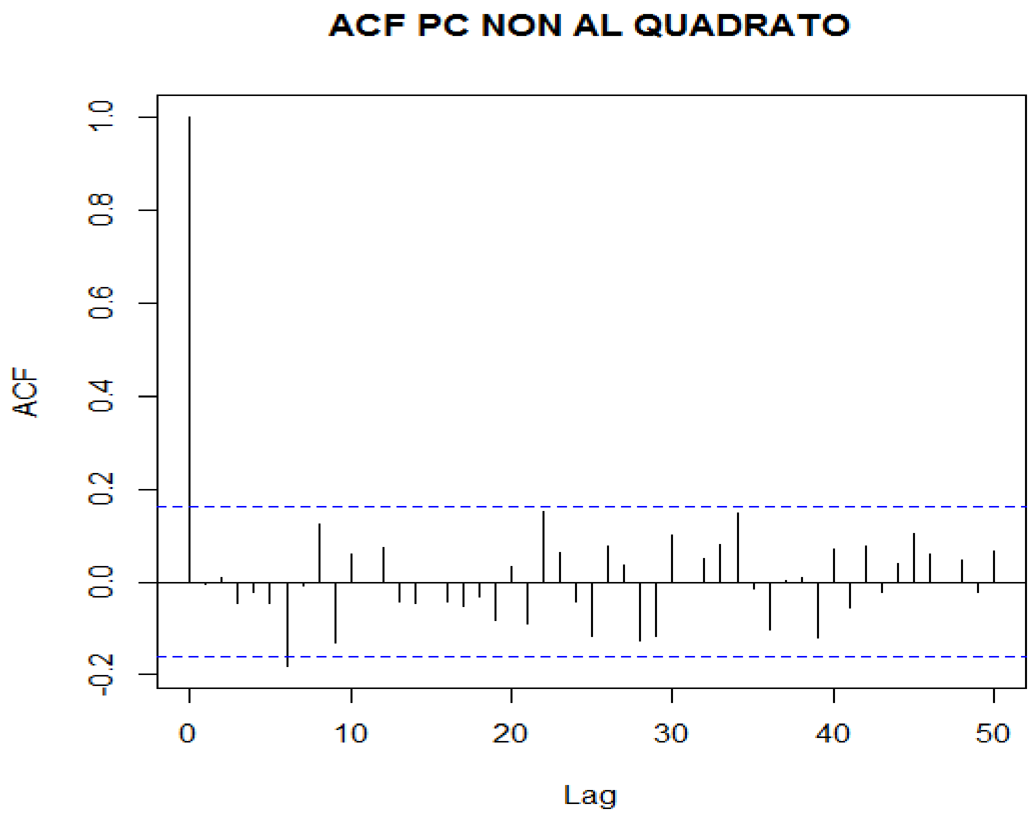


Nel correlogramma soprastante, in cui è rappresentata la serie di Atlantia, si nota che solo in due "ritardi" si presentano valori statisticamente significativi, ma si può comunque affermare che la serie non sia correlata per quanto affermato nella pagina precedente, nonostante diversi valori si avvicinano molto alle bande di confidenza tratteggiate.

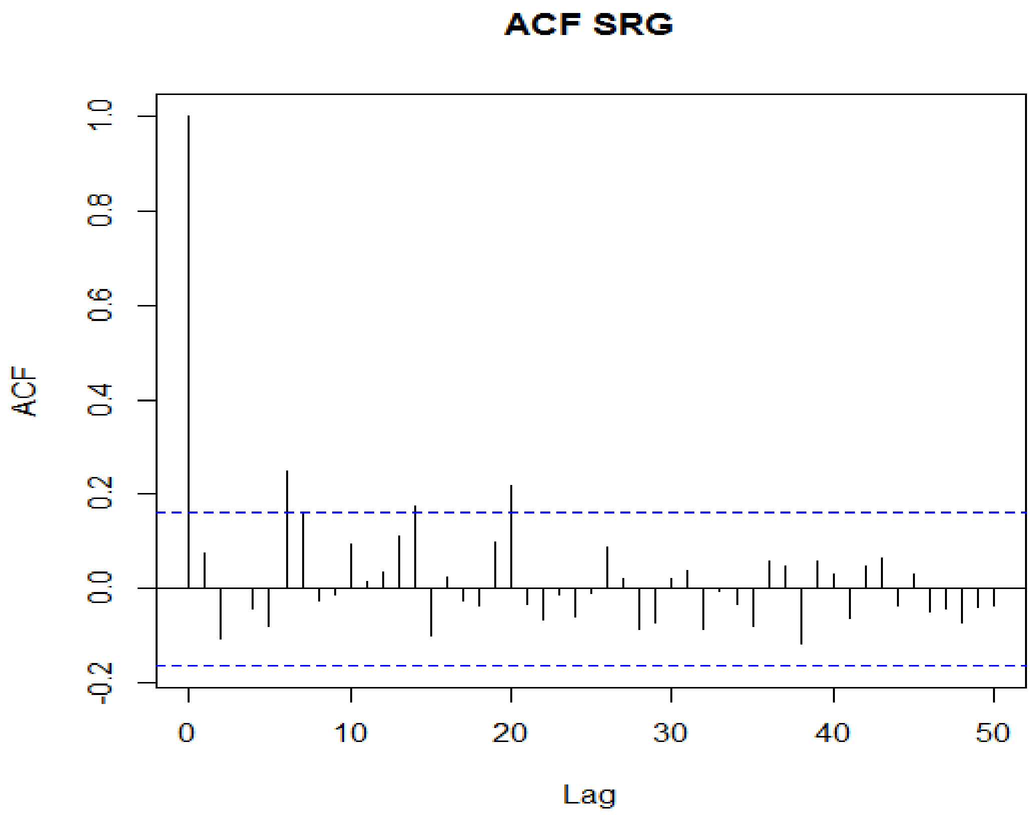
Stessa valutazione varrà in seguito per i correlogrammi che presentano non più di due valori oltre le bande di confidenza, per cui si potrà affermare che i rendimenti siano indipendenti temporalmente tra loro.


ACF G
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
10
20
30
40
50
Lag

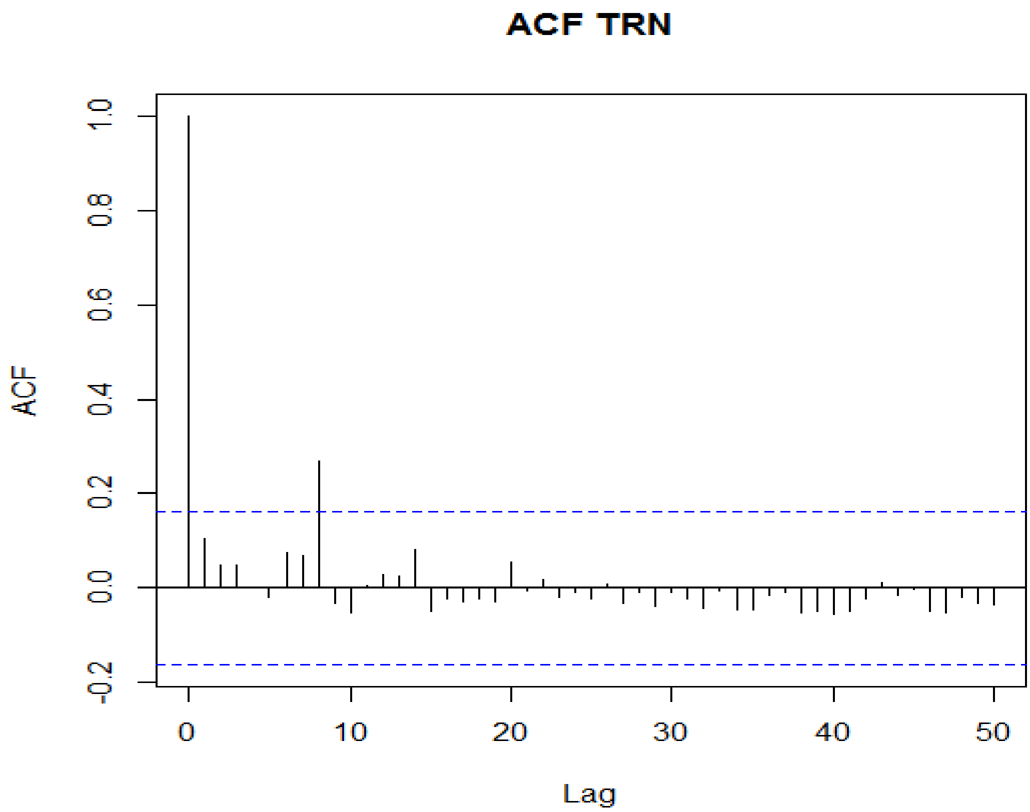

ACF PC
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
10
20
30
40
50
Lag

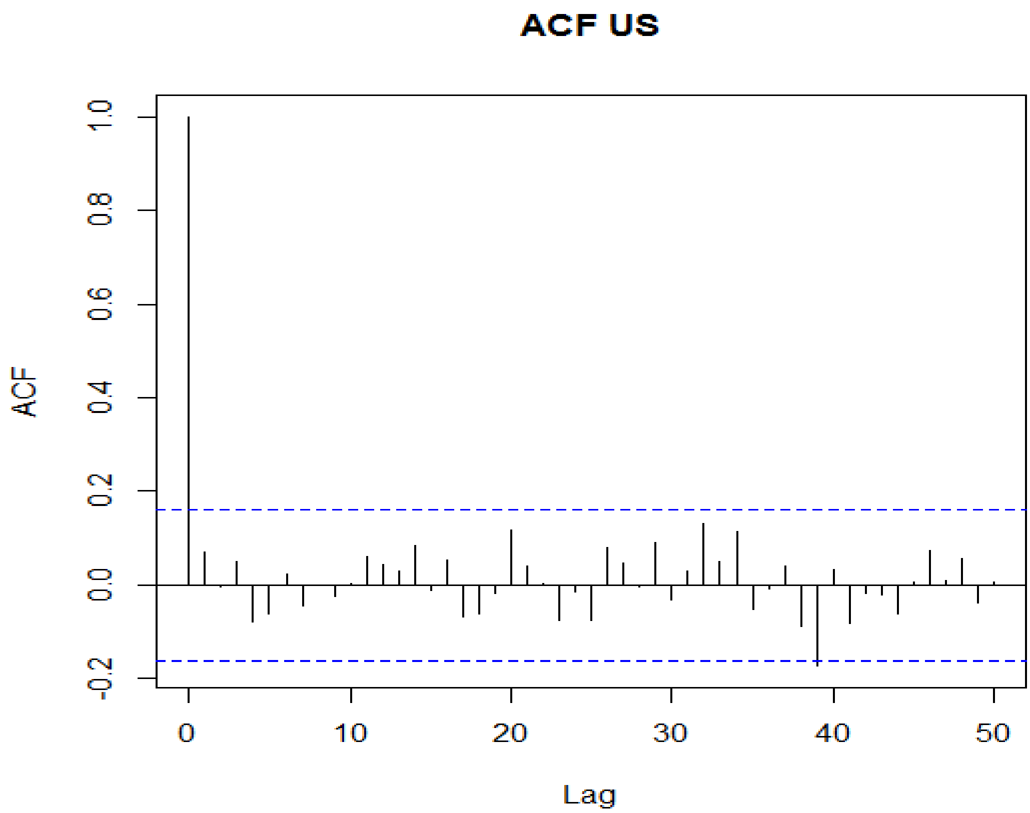


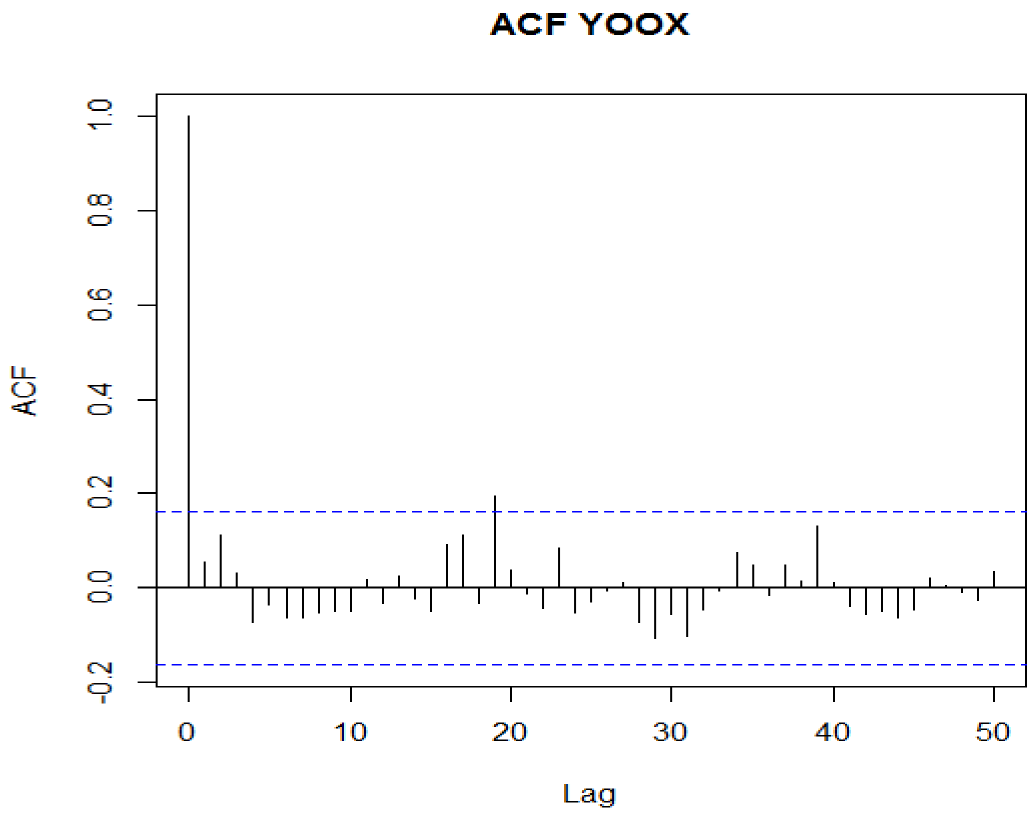
Per il titolo Pirelli, come già detto è stato rappresentato il correlogramma della serie originale oltre a quello della serie elevata al quadrato, poiché la serie al quadrato non mostrava nessun valore statisticamente significativo. Come si evince dal grafico sopra, per la serie originale un solo valore supera le bande di confidenza, mostrando quindi assenza anche di dipendenza di tipo lineare tra i rendimenti.



Per quanto riguarda il correlogramma di Snam, i valori che oltrepassano le bande di confidenza sono più di due, ciò è sufficiente per affermare che esiste una dipendenza temporale tra i rendimenti. Inoltre i valori significativi si concentrano nella prima parte del grafico mostrando un determinato arco di tempo in cui i rendimenti erano legati tra loro, mentre con l'aumentare dello sfasamento temporale questa dipendenza viene meno.

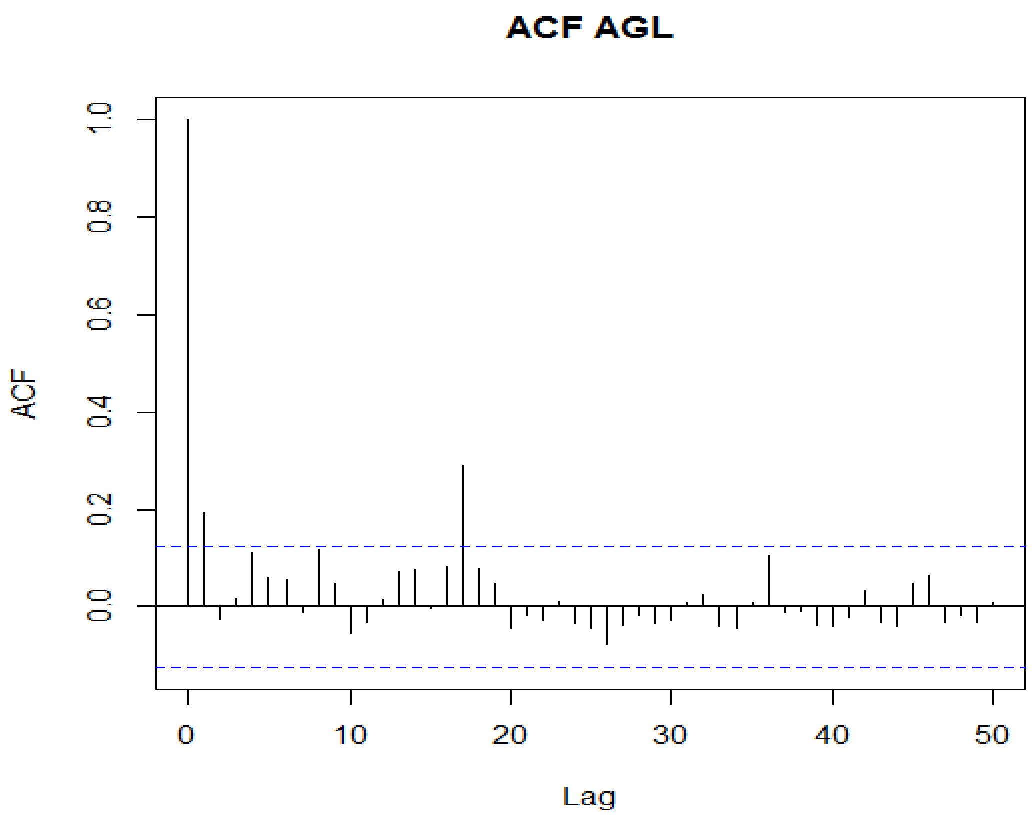

ACF TRN
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
10
20
30
40
50
Lag


ACF US
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
0
10
20
30
40
50
Lag



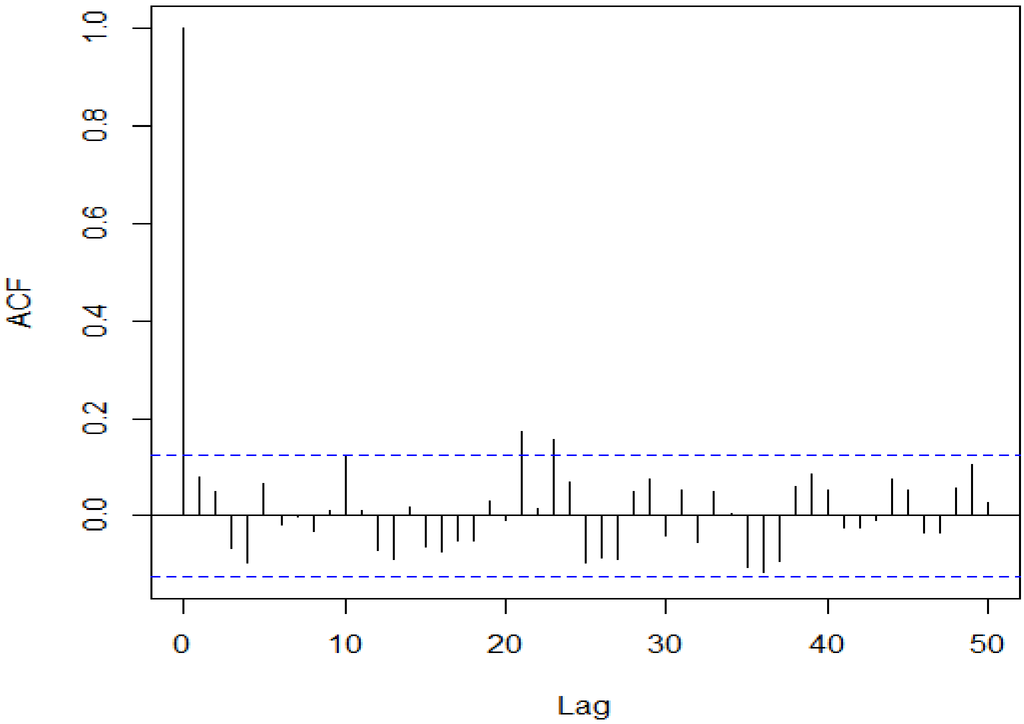
Per la serie storica di sei mesi solo il titolo Snam ha presentato una dipendenza tra i rendimenti significativa, mentre per il resto dei titoli si può affermare che le serie siano incorrelate, nonostante in molti grafici siano presente valori molto vicini alle bande di confidenza tracciate nei correlogrammi. Comunque la presenza anche di un titolo con i rendimenti correlati temporalmente tra loro, complica l'analisi per la selezione dei titoli, compromettendo in buona parte lo studio svolto per la composizione del portafoglio ottimo.

Per i titoli di seguito la serie storica presa in considerazione è quella di lunghezza un anno, ad eccezione del titolo Gtech (GTK) per cui è stata utilizzata la serie lunga due anni poiché compare solo nel portafoglio ottimo costruito tramite quella serie.

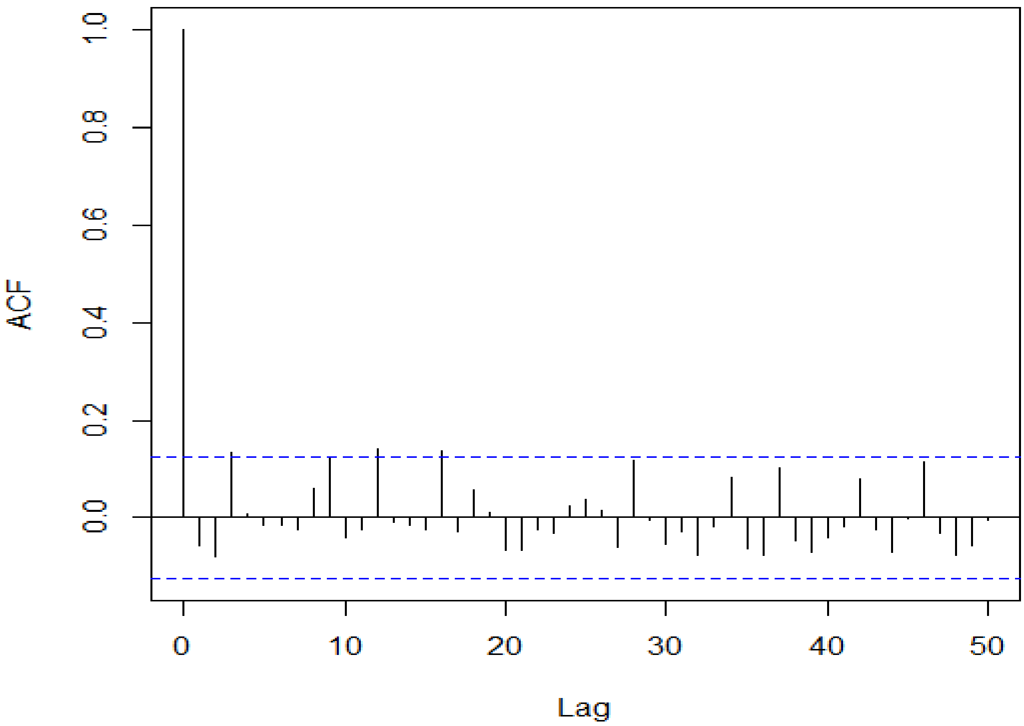


Il correlogramma del titolo Autogrill mostra soltanto due valori oltre il livello di confidenza quindi si può ritenere che la serie non sia autocorrelata. Ma è interessante notare che la presenza di valori vicino alle bande di confidenza si concentrano nella prima parte del grafico, mentre qualsiasi legame svanisce per lag temporali via via maggiori quasi azzerandosi verso la fine. Mentre se si osserva il grafico di seguito, vale a dire del titolo Azimut Holding, i valori significativi sono sempre due ma valori comunque vicini alle bande di confidenza permangono per tutto il grafico, anche a sfasamenti alti, mostrando comunque un legame maggiore rispetto ai rendimenti del titolo Autogrill.

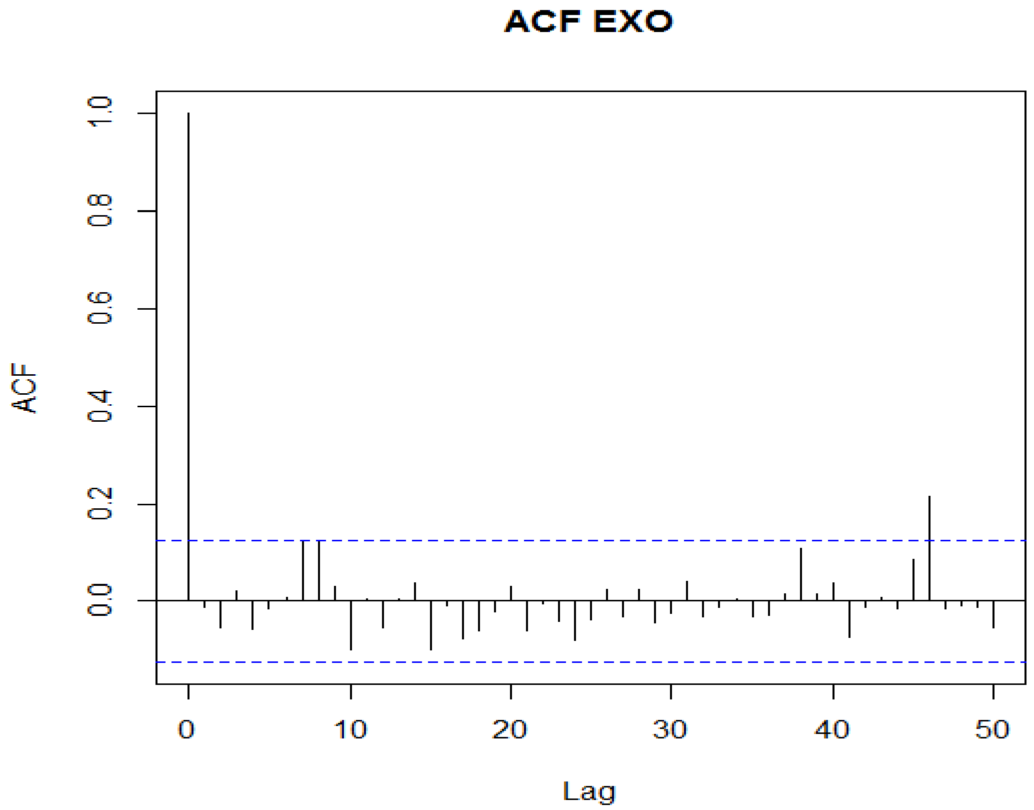
ACF AZM



ACF EGPW

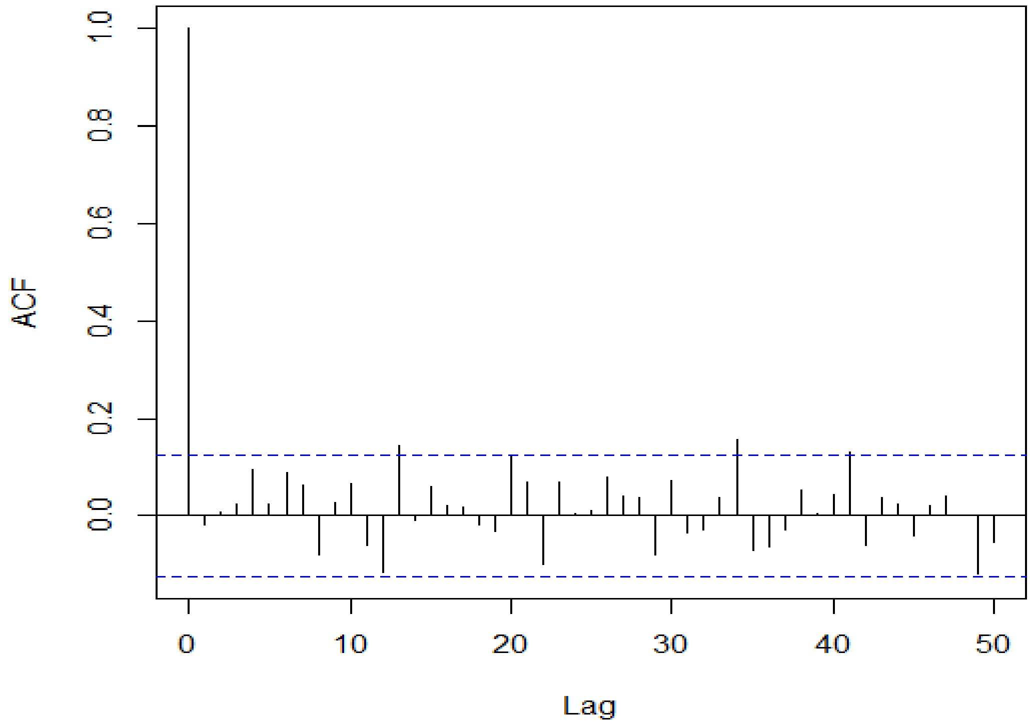


Enel Green Power presenta diversi valori della funzione di autocorrelazione oltre le bande di confidenza, mostrando così la presenza di dipendenza tra i vari rendimenti ad epoche diverse. Inoltre lungo tutto il correlogramma si possono notare valori molto vicini alle linee tratteggiate, per cui l'autocorrelazione non si azzera completamente neanche all'aumentare dello sfasamento temporale.

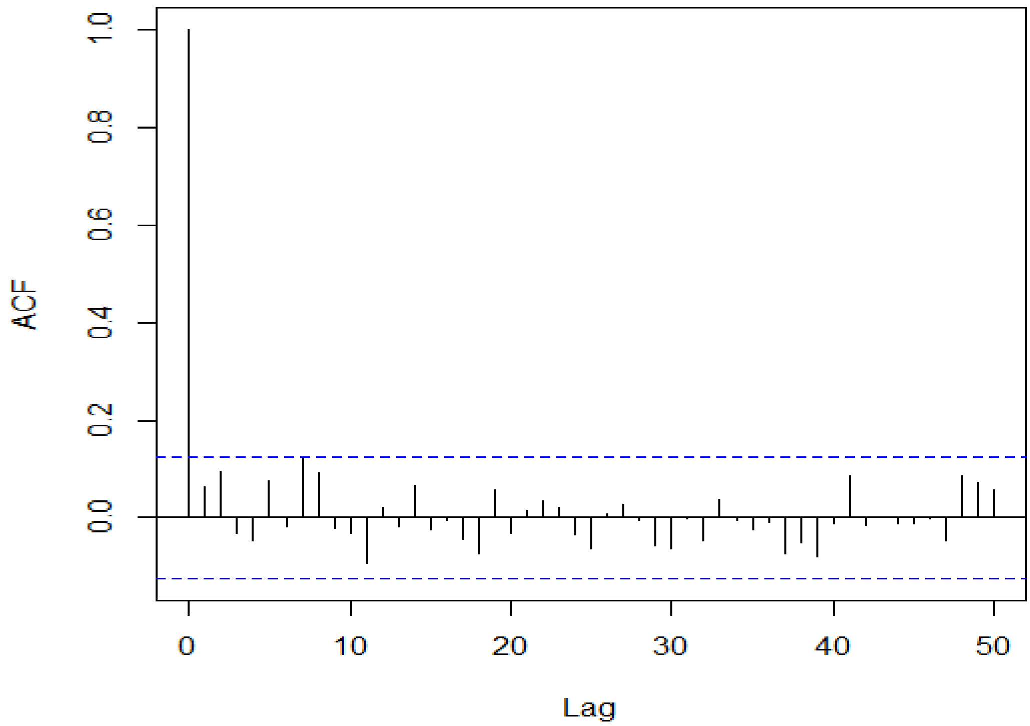


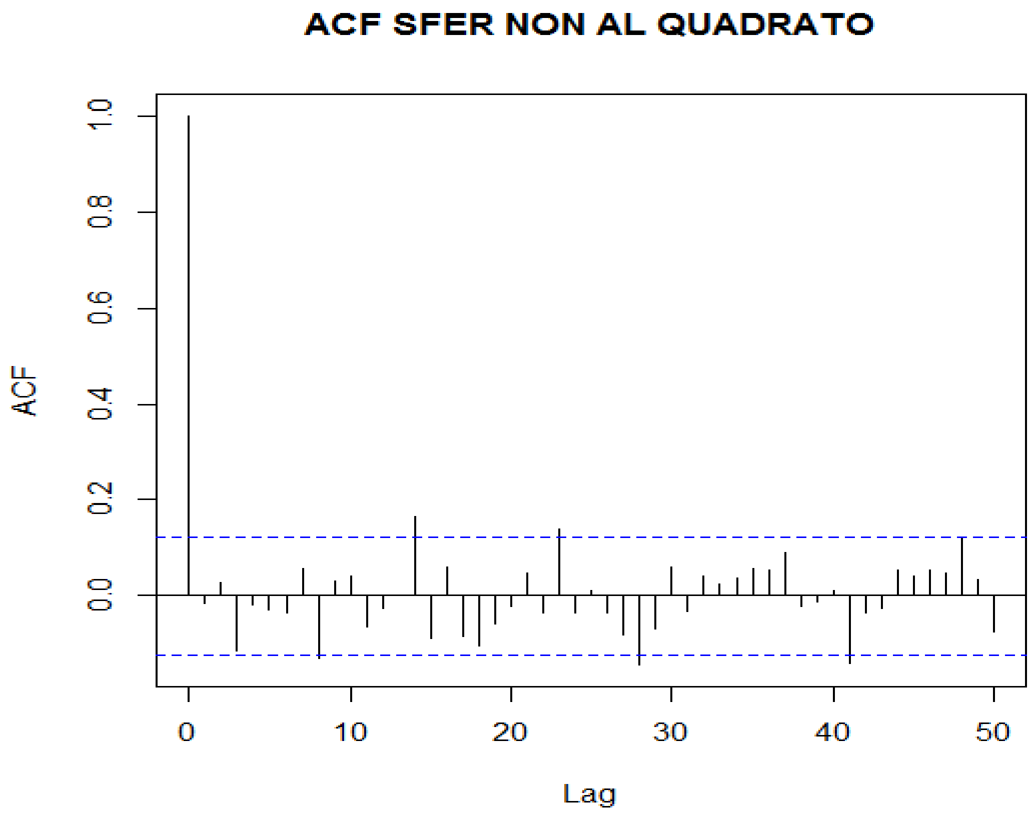
Il correlogramma rappresentato di seguito, che fa riferimento alla serie dei rendimenti del titolo Luxottica, presenta diversi valori significativi, segno di dipendenza temporale tra i rendimenti a varie epoche. I valori diversi da zero si distribuiscono su tutto il grafico quindi anche in corrispondenza di lag temporali maggiori. Inoltre, si può notare la tipica forma sinusoidale, che indica periodi con una relazione maggiore tra i rendimenti, tipica dei cluster di volatilità.

ACF LUX

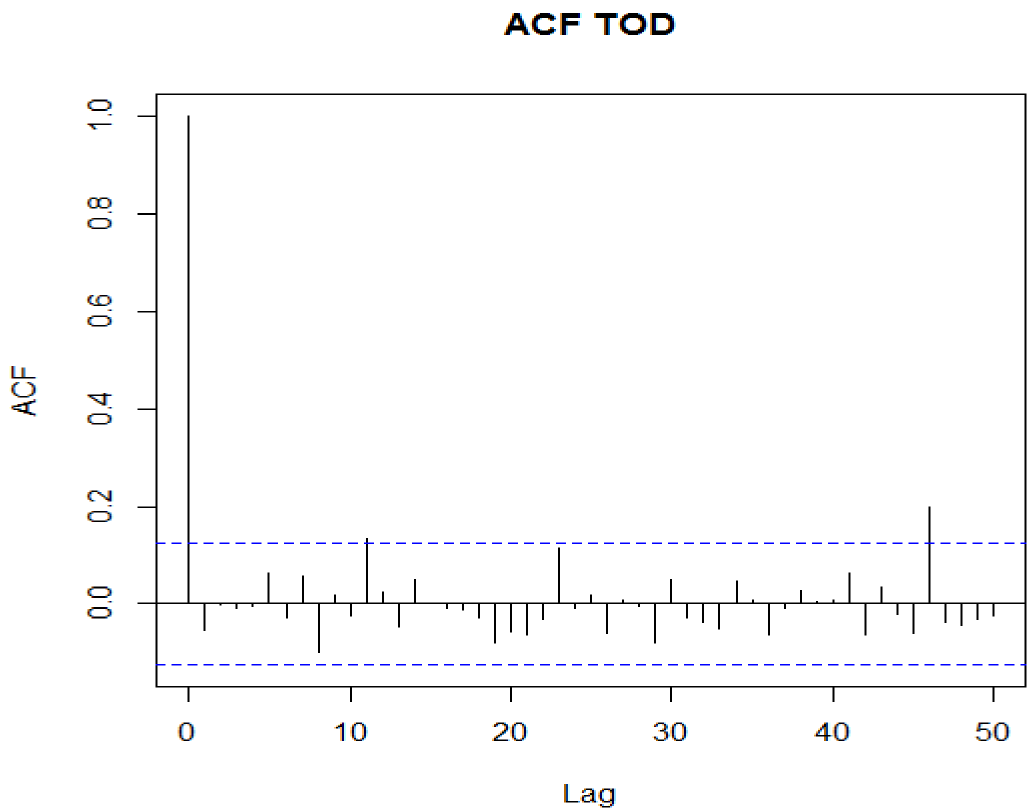


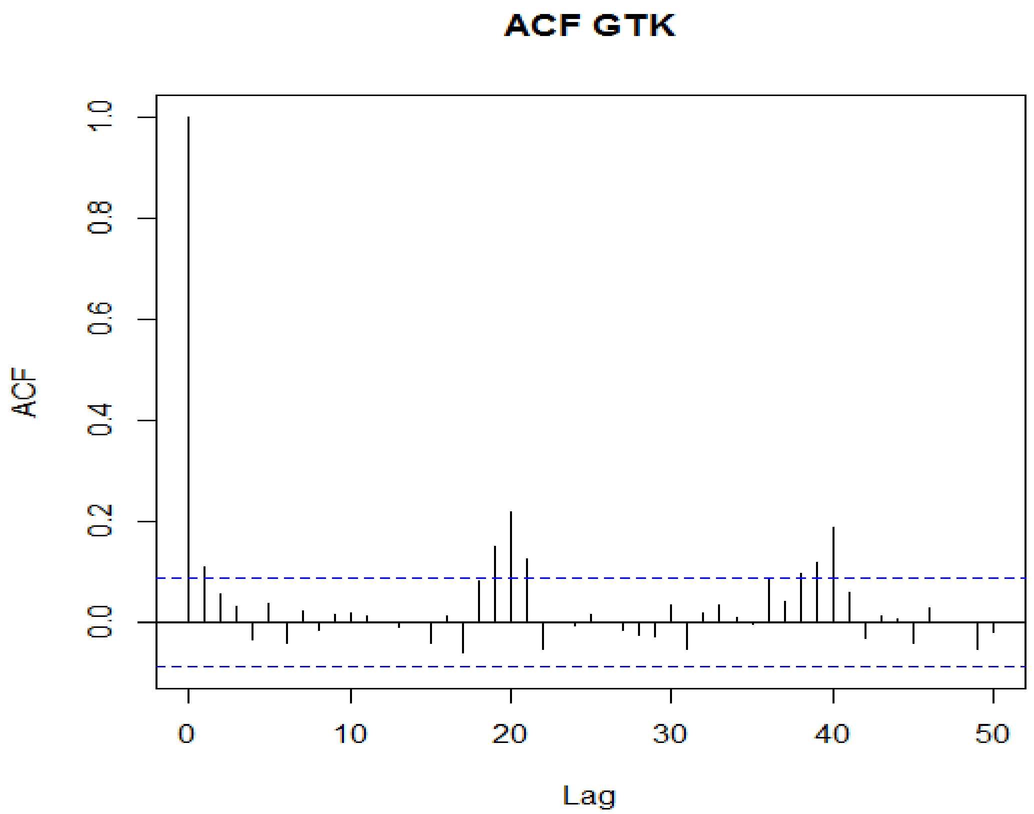
ACF SFER





Anche per il titolo Salvatore Ferragamo, come per il titolo Pirelli, è stato rappresentato il correlogramma della serie originale oltre a quello della serie dei rendimenti al quadrato. Anche in questo caso la serie trasformata non presenta alcun valore oltre le bande di confidenza e quindi si è analizzata l'autocorrelazione della serie originale. Proprio su questa serie emergono le differenze rispetto al titolo Pirelli. Infatti, se quest'ultimo presentava una correlazione molto scarsa (quasi nulla per tutti i lag), il correlogramma dei titolo Salvatore Ferragamo presenta numerosi valori oltre le linee tratteggiate, chiaro segno di dipendenza, in questo caso lineare essendo la serie in questione quella originale. I valori significativi si distribuiscono su tutto il correlogramma, a evidenziare un legame persistente anche per sfasamenti temporali significativi.


ACF TOD
ACF
Lag


ACF GTK
ACF
Lag

L'ultimo correlogramma, relativo al titolo Gtech, è molto interessante. Infatti, oltre a presentare diversi valori statisticamente significativi, presenta diversi periodi altamente correlati. In questo caso è evidente la presenza di cluster di volatilità relativi ai periodi ad alta autocorrelazione, mentre relativamente ai restanti sfasamenti temporali i valori sono molto prossimi allo zero, quindi non si evince nessun legame temporale tra i rendimenti a quelle epoche.

In definitiva, si è visto che molti titoli presentano un'autocorrelazione molto bassa, statisticamente trascurabile, e quindi potrebbero avvalere la tesi che i rendimenti siano indipendenti tra loro. Però si presentano anche titoli per cui non è possibile trascurare il legame temporale che lega alcuni rendimenti a diverse epoche e questi titoli complicano l'analisi per la selezione del portafoglio ottimo.

CONCLUSIONI

Come si evince dal titolo dell'elaborato, l'obiettivo è quello di investigare come l'orizzonte temporale delle serie storiche analizzate possa influire sull'investimento finanziario, partendo dalle ipotesi del modello di Markowitz che ne limitano l'importanza.

Sviluppando l'analisi empirica su tre serie storiche di dati di lunghezza differente è stato possibile evidenziare le criticità del modello teorico di selezione del portafoglio creato da Markowitz. Se era intuibile, che le eventuali debolezze del modello fossero da ricercare nelle stringenti ipotesi, per quanto utili per un'analisi più immediata del problema di selezione dei titoli, solo attraverso il riscontro pratico è stato possibile testare le conseguenze su un investimento reale.

Diversamente da ciò che era lecito attendersi rispettando le teorie del modello di Portfolio Selection, i risultati hanno mostrato un'influenza notevole dell'orizzonte temporale di riferimento sulle scelte di investimento, a supporto inoltre, degli studi riguardanti le evidenze empiriche sui mercati finanziari reali, che contrastano con le ipotesi del modello teorico. Infatti, le evidenze empiriche dei mercati reali offrono spunti per capire su quali indici e in che modo l'orizzonte temporale possa influenzare la scelta dei titoli.

Rifacendosi a quanto mostrato dall'analisi delle tre serie storiche dei 37 titoli dell'indice FTSE MIB, l'orizzonte temporale influenza due aspetti principali dell'operazione di selezione del portafoglio: la composizione dei portafogli ottimi e il rischio dell'investimento.

Per quanto riguarda il primo aspetto, la scelta dei titoli da inserire in portafoglio risente del periodo di tempo preso in esame. Infatti, nell'analisi dei titoli non dominati, non può essere ignorato l'andamento sul mercato delle azioni, che può variare notevolmente da periodo a periodo, come è avvenuto confrontando i titoli nel secondo semestre del 2013 rispetto all'intero arco dei due anni riguardanti il 2012 e il 2013. Come visto nel capitolo 4, agli shock ribassisti non corrispondono trend rialzisti altrettanto repentini, quindi questo aspetto oltre ad influire sull'asimmetria delle perdite rispetto ai guadagni che si ripercuote sull'asimmetria della distribuzione dei rendimenti, fa si che il periodo scelto per l'analisi possa influire sulla scelta di un titolo rispetto ad un altro.

Maggiore importanza ricopre invece il secondo aspetto su cui influisce la lunghezza della serie storica, vale a dire il rischio dell'investimento. Infatti, tutte le evidenze empiriche contro il modello si ripercuotono su questo aspetto dell'investimento, piuttosto che sul rendimento atteso.

Considerando due indici di rischio, cioè la varianza e il VaR, entrambi risentono della non normalità della curva di distribuzione dei rendimenti e della non stazionarietà del processo.

Per quanto riguarda la varianza, l'ipotesi di normalità garantiva che valore atteso e varianza appunto, bastassero per descrivere la distribuzione dei rendimenti. Tralasciando però la possibilità di presenza di asimmetria negativa (quindi maggiore probabilità di perdite), e la presenza di leptocurtosi (cioè presenza maggiore di eventi estremi, specialmente di segno negativo), si può sottostimare il rischio dell'investimento. Dalla ricerca empirica è emerso come un diverso periodo di riferimento possa far variare anche questo aspetto. Infatti, se per la serie di lunghezza sei mesi le serie dei titoli erano approssimabili a delle distribuzioni normali, per le altre due serie storiche ciò non accadeva, inficiando l'analisi dei titoli e quindi la selezione del portafoglio ottimo. Rimanendo sull'analisi della varianza inoltre, la mancanza di stazionarietà fa si che diventi fondamentale l'arco temporale di riferimento. Infatti, non essendo la varianza costante, può variare da periodo a periodo, e risentire ad esempio dei cosiddetti cluster di volatilità. In questo modo può essere fuorviante considerare la volatilità storica una buona approssimazione della volatilità futura.

Alcune di queste considerazioni sulla varianza si ripercuotono anche sul "valore a rischio". Infatti, essendo il VaR influenzato dalla deviazione standard (cioè la radice quadrata della varianza) e dalla forma della distribuzione non può non risentire delle considerazioni fatte sopra. Un errato calcolo della varianza comporterebbe un errore anche nel calcolo del VaR, inoltre supporre che la distribuzione sia Gaussiana comporta il rischio di sottostimare la presenza di leptocurtosi e quindi di una maggiore probabilità di perdite estreme, con conseguente sottostima del valore a rischio e quindi della rischiosità dell'investimento.

Proprio per questi motivi, dalla pubblicazione dell'articolo di Markowitz, lo studio in ambito finanziario si è concentrato sulla ricerca di modelli che captassero le specificità delle serie finanziari reali. Su queste tracce di sono mossi gli studi di Engle e Bollerslev, che hanno dato origine rispettivamente ai modelli ARCH E GARCH per una più corretta specificazione della varianza e della distribuzione della serie dei rendimenti.

In definitiva, la scelta del periodo temporale di riferimento non è da sottovalutare nell'analisi dei titoli finanziari, in quanto si ripercuote negli indici che ne caratterizzano la serie dei rendimenti e quindi sulle scelte di investimento che ne derivano. Per questo motivo può essere consigliabile scegliere la lunghezza della serie storica in base all'orizzonte temporale dell'investimento che si intende effettuare, nell'ipotesi che essendo il medesimo arco temporale si presentino le medesime condizioni e caratteristiche della serie storica.

APPENDICE 1

L'APPROCCIO DEL VALORE A RISCHIO

La misurazione del rischio legato alle variazioni del mercato ha occupato gran parte della letteratura finanziaria degli ultimi decenni. Grande importanza su questo tema è ricoperta dalla metodologia del *Value at Risk*, più comunemente *VaR.*

Quest'ultimo indica il rischio potenziale di un determinato strumento finanziario, attribuibile alle variazioni del mercato, e la sua facilità di comprensione e la sua duttilità ne hanno favorito la diffusione. L'uso robusto fatto in ambito finanziario ha prodotto numerose ricerche sull'argomento, comportando la sofisticazione e la presenza di numerose varianti del modello, che meglio si adattano alle variabili che caratterizzano il rischio.

Introduzione

Il VaR misura la maggior perdita possibile di un portafoglio finanziario, dato un certo livello di probabilità e un preciso arco temporale, dovuta all'andamento del mercato. La Teoria della Selezione di Portafoglio costituisce la base del modello del VaR, che, infatti, utilizza la volatilità e le correlazioni tra i titoli che compongono il portafoglio come variabili principali del modello. La misura della volatilità è rappresentata statisticamente dalla deviazione standard, cioè lo scostamento dei rendimenti dal valore atteso. Quindi è necessaria la stima futura di questi due parametri, deviazione standard e correlazione, per l'utilizzo del modello. Il rendimento medio invece è supposto pari a zero, considerando un'osservazione dei dati ad alta frequenza e per un orizzonte temporale breve.

Per la stima della deviazione standard futura è in gran parte utilizzato il calcolo della volatilità storica. Questa metodologia si basa sulle assunzioni delle Teoria di Portafoglio di Markowitz, in base alla quale, essendo la serie dei rendimenti stazionaria ed avendo distribuzione Gaussiana, media e varianza sono costanti nel tempo, e quindi, la volatilità storica è una buona stima di quella futura. Questo approccio però si scontra con le evidenze empiriche che caratterizzano le serie dei rendimenti dei titoli finanziari. Per sopperire a tale problematica sono stati proposti modelli alternativi di stima della volatilità. I modelli ARCH e GARCH, proposti rispettivamente da Engle (1982) e Bollerslev (1986), stimano la deviazione standard futura, basandosi sulle serie storiche, ma adattandosi alle caratteristiche empiriche delle serie reali dei titoli finanziari.

La correlazione, invece studia il legame che esiste tra l'andamento di due titoli. In altre parole, spiega quanto due titoli si muovono simultaneamente e in quale direzione l'uno rispetto all'altro. L'indice di correlazione assume valori compresi tra -1 e +1 ed è ottenuto dal rapporto tra la covarianza dei due titoli e il rapporto tra le deviazioni standard dei titoli.

Metodi di calcolo

Esistono diverse metodologie di calcolo del VaR, ognuno dei quali presenta vantaggi e svantaggi legati alla semplicità di implementazione o all'adattamento alle specificità dei portafogli finanziari. Si possono considerare tre metodi differenti:

- metodi analitici (o parametrici);
- simulazione storica;
- metodo Monte Carlo.

I metodi analitici vengono utilizzati per la facilità di implementazione, a cui si contrappongono, però, alcune lacune legate alle ipotesi del modello. Infatti, i metodi parametrici si rifanno alle ipotesi del modello di Portfolio Selection di Markowitz, supponendo cioè che la distribuzione della serie dei rendimenti sia normale e il processo stazionario. In questo modo basta studiare il valore medio e la varianza per analizzare la serie. Tra i metodi analitici grande importanza ricopre quello proposto da JP Morgan, RiskMetrics. Le ipotesi semplificatrici del modello hanno prodotto numerose critiche da parte degli studiosi. Infatti, in primo luogo l'ipotesi di normalità è contestata poiché le serie reali dei titoli non mostrano una distribuzione Gaussiana ma presentano code più spesse, cioè maggiore frequenza di valori estremi. Questo comporta una sottostima del valore del VaR, visto che la coda sinistra della normale è più sottile della distribuzione della serie reale dei rendimenti. In secondo luogo, studi empirici hanno mostrato che il processo non è stazionario e quindi media e varianza non sono costanti nel tempo. Di conseguenza non è possibile usare la varianza storica come stima della varianza futura dei rendimenti dei titoli.

La simulazione storica ha l'obiettivo di superare alcuni limiti dei metodi analitici. Questo metodo cerca di capire quale sarà l'andamento del titolo utilizzando l'andamento storico. Infatti, vengono creati numerosi scenari futuri possibili ripercorrendo i rendimenti passati del titolo e producendo quindi diverse possibili perdite o guadagni. Creata, quindi, la distribuzione empirica, dalla serie storica dei rendimenti, si ricava il VaR in base alla probabilità ricercata. Tramite tale processo, questo metodo non ipotizza nessuna forma della distribuzione, superando l'ipotesi di normalità dei rendimenti dei metodi analitici, ma costruisce la curva in base ai possibili scenari ricavati dai rendimenti passati. Le critiche però interessano il fatto di voler spiegare l'andamento futuro attraverso i rendimenti passati, ed è poco attendibile fare previsioni attraverso un serie passata.

Il Metodo Monte Carlo riprende parte delle caratteristiche dei due metodi precedenti, in quanto crea una serie di possibili scenari futuri dai rendimenti storici, come il metodo della simulazione storica, ma è necessario presupporre una distribuzione precisa come avviene nei metodi analitici. Questo metodo presenta il vantaggio di creare un numero elevato di scenari futuri e di poter adattare i rendimenti anche a distribuzioni non Gaussiane. Dalla serie storica dei rendimenti si estraggono gli indici (media, varianza, ecc.) che descriveranno la distribuzione di probabilità.

Presenta il limite di dover usare una precisa distribuzione con il rischio che non si adatti perfettamente ai dati reali e di risentire dell'influenza dei parametri estratti dai rendimenti storici.

BIBLIOGRAFIA

Benninga S. " Modelli Finanziari – La finanza con Excel", Mc-Grow-Hill education, 2010.

Bollerslev, Tim (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". Journal of Econometrics 31 (3): 307–327.

Bollerslev, Tim (1992). "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence". Journal of Econometrics 52 (1-2): 5–59.

Bortot, Magnani, Olivieri, Rossi e Torrigiani, "Matematica Finanziaria", Monduzzi Editore (1998).

Castellani G., De Felice M., Moriconi F., "Manuale di finanza, Teoria del portafoglio e mercato azionario", Il Mulino, 2005, Bologna.

Cicchitelli F., "Statistica: Principi e Metodi", Pearson, 2008.

Cont, R., "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues" in: Quantitative Finance, Vol 1, No 2, (March 2001) 223-236.

Di Fonzo T. e Lisi F. (2005), "Serie storiche economiche. Analisi statistiche e applicazioni", Carocci editore, Roma.

Engle, R. (1982) Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica 50, 987-1008.

Gallo G., Pacini B., "Metodi quantitativi per i mercati finanziari", Carocci.

Gandolfi G., Scelta e gestione degli investimenti finanziari, Bancaria Editrice, Roma, 2009.

Granger, C., Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, in Econometrica, 37, pp. 424-438, 1969.

Laurini F. (2012) "Elementi di analisi delle serie storiche finanziarie", Libreria Medico Scientifica , Parma.

Markowitz, H.M. (March 1952), "Portfolio Selection", The Journal of Finance 7 (1): 77–91.

Resti A., Sironi A., "Rischio e Valore nelle Banche"(2008), Egea.

Ricci V., "Analisi delle Serie Storiche con R", 2005.

Santi F., Bee M.,"Finanza quantitativa con R", Apogeo editore, 2013.

Tsay R.,"An Introduction to Analysis of Financial Data with R", Wiley, 2013.

Tsay R.,"Analysis of Financial Time Series", 2010 Wiley.