

RIASSUNTO TESI

L'elaborato ha l'obiettivo di investigare l'effetto, sugli investimenti, di lunghezze differenti delle serie storiche dei prezzi dei titoli. Per questo motivo lo studio si sviluppa sull'analisi empirica di tre diverse serie storiche dei prezzi dei titoli che compongono l'indice FTSE MIB. Al fine di capire cosa comporti differenti risultati in base alle tre differenti serie storiche analizzate si indagano i modelli utilizzati e le varie caratteristiche che le contraddistinguono.

Le teorie relative alla costruzioni dei portafogli ottimi si sono da sempre concentrati sugli indici che caratterizzano le serie storiche, soprattutto quelle riguardanti i rendimenti dei vari strumenti finanziari. Essendo, però, l'analisi riferita ad osservazioni passate, emerge il problema dell'orizzonte temporale scelto come riferimento per le serie storiche analizzate.

Tale problematica è stata in un primo momento sottostimata. La "Teoria della Portfolio Selection" di Markowitz, grazie alle ipotesi del modello, che ne semplificano l'analisi, ha spostato in secondo piano tale aspetto. Tutto ciò era possibile supponendo che la distribuzione dei rendimenti logaritmici fosse Guassiana e il processo stazionario. Questo infatti permetteva di descrivere la serie dei rendimenti attraverso due soli indici, il rendimento atteso e la varianza, che *rimanevano costanti e indipendenti dal tempo*.

Gli studi successivi in ambito finanziario si sono focalizzati sulle cause e sulle soluzioni relative alle discordanze tra i risultati teorici prodotti attraverso il modello di Markowitz e i risultati empirici rinvenibili sui mercati finanziari reali. Infatti, le caratteristiche tipiche dei mercati finanziari reali contrastano per lo più con le ipotesi su cui si fonda la teoria di selezione di portafoglio. Le serie finanziari reali fanno emergere due tratti specifici che complicano l'analisi dei titoli, la forma della distribuzione e l'indipendenza temporale tra le osservazioni di uno stesso titolo. Per quanto riguarda il primo aspetto, si osserva che raramente una serie storica finanziaria rispetta i parametri di una distribuzione Guassiana, poiché presenta maggior probabilità di eventi estremi (leptocurtosi), e asimmetria rispetto al valor medio, quindi maggior probabilità di piccole perdite rispetto a piccoli guadagni (asimmetria negativa) o viceversa (asimmetria positiva). Per quanto riguarda la dipendenza temporale delle

osservazioni, ciò rende fuorviante considerare la varianza storica un buon parametro per la varianza futura, e inoltre obbliga a quantificare la dipendenza tra i rendimenti di un particolare arco temporale.

Questi ultimi aspetti trattati, mettono in risalto l'importanza della scelta del periodo temporale studiato. Infatti, le caratteristiche della distribuzione dei rendimenti possono variare di periodo in periodo. Inoltre, non essendo la varianza costante, ogni arco temporale può presentare un proprio valore specifico di volatilità, oltre a poter essere i rendimenti di quel periodo più o meno legati tra loro, con ovvie ripercussioni sull'analisi dei titoli.

Fatte tali premesse che illustrano su grandi linee il contenuto e lo sviluppo dell'elaborato si può passare all'analisi specifica delle diverse sezioni che compongono il lavoro.

Poiché l'analisi si concentra esclusivamente su titoli azionari quotati sul mercato borsistico italiano, il primo capitolo si occupa dello studio di questo particolare strumento finanziario. Innanzitutto, viene spiegato cosa rappresenta l'azione di una società, distinguendone diverse categorie e descrivendo le peculiarità che può presentare. Infatti possono distinguersi diverse tipologie tra cui le azioni ordinarie, straordinarie, privilegiate, correlate, e altre, in base ai diritti, di voto o economico-patrimoniali, che garantiscono. Altra distinzione importante viene fatta tra valore di mercato e valore nominale, quest'ultimo determinato all'emissione del pacchetto di azioni, mentre il primo rappresenta il prezzo al quale l'azione viene scambiata sul mercato.

Vengono introdotti anche gli indici azionari, vista l'importanza nel rappresentare l'andamento di un certo segmento di mercato, oltre ad essere utilizzati come benchmark di riferimento nello studio dei titoli. Per questo motivo viene descritto l'indice FTSE MIB, come composizione e caratteristiche.

Per lo studio dei titoli, la variabile rinvenibile sul mercato è il prezzo delle azioni. Il prezzo varia durante tutto il tempo della quotazione, quindi per l'analisi viene preso come riferimento il prezzo di chiusura. L'efficienza del mercato è fondamentale perché significa che tutta l'informazione disponibile è racchiusa nel prezzo del titolo. Purtroppo però, il prezzo presenta una distribuzione che complica l'analisi. Infatti, è evidente che il prezzo non raggiunge mai valori negativi perché al massimo il fallimento della società comporta l'azzeramento del prezzo. Inoltre i valori dipendono

fortemente tra loro, infatti il prezzo ad un'epoca dipenderà per forza dal prezzo di chiusura dell'epoca immediatamente prima.

Per tale ragione, in ambito finanziario ricopre grossa importanza il rendimento delle azioni, cioè la variazione del prezzo dei titoli, visto che presenta il vantaggio di descrivere in maniera veloce l'andamento dell'investimento e oltretutto la distribuzione presenta caratteristiche simili a quelle di una distribuzione normale. Quest'ultimo punto spiega anche il motivo per cui il rendimento istantaneo viene preferito al rendimento relativo. Infatti, il rendimento logaritmico presenta i tratti caratteristici della distribuzione Gaussiana, e viene utilizzato per l'analisi dei titoli.

Spiegato il motivo per cui è preferibile lavorare con la serie dei rendimenti piuttosto che con quella dei prezzi, e in particolare con i rendimenti logaritmici, nel secondo capitolo si passa all'analisi delle caratteristiche della distribuzione dei rendimenti.

Ipotizzando che la serie dei rendimenti sia stazionaria e la distribuzione Gaussiana, è possibile descrivere la serie attraverso due soli indici, il valore atteso e la varianza. Infatti, sono gli indici maggiormente usati e che saranno utilizzati per la creazione dei portafogli ottimi. In campo finanziario valore medio e varianza rappresentano rispettivamente il rendimento atteso e il rischio dell'investimento. Inoltre, rappresentano i primi due momenti centrali, rispettivamente il momento centrale primo e il momento centrale secondo, e avendo una realizzazione campionaria rappresentano la media dei rendimenti e lo scostamento quadratico medio delle realizzazioni dal valore medio. Un'altra misura di volatilità è la deviazione standard, cioè la radice quadrata della varianza, preferita poiché mantiene la stessa unità di misura dei valori originali.

Tralasciando le ipotesi di distribuzione normale e stazionarietà del processo, diviene interessante trattare altri aspetti sia della distribuzione che della serie dei rendimenti. Infatti, nonostante valore atteso e varianza rappresentino gli indici principali, anche lo studio della simmetria e della curtosi della distribuzione vengono ampiamente trattati in campo finanziario. Quest'ultimi rappresentano rispettivamente il momento centrale terzo e quarto. L'indice di simmetria calcola la frequenza di valori rispetto al valore medio, ed è pari a zero se la distribuzione è simmetrica, mentre ha valori minori di zero se la distribuzione ha un'asimmetria negativa, maggiori di zero nel caso contrario, cioè di asimmetria positiva.

L'indice di curtosi indaga la presenza di valori estremi rispetto al valore medio, e ha valori pari a tre per la distribuzione Gaussiana, minore di tre se la distribuzione è platicurtica, maggiori di tre se presenta leptocurtosi, cioè presenta "code pesanti", e quindi maggiore probabilità di eventi estremi. In ambito finanziario questi due indici ricoprono una grossa importanza poiché se la distribuzione non è normale, l'analisi dei titoli deve tenere conto di questi aspetti relativi alla distribuzione dei rendimenti, visto che mette in discussione le ipotesi principali dei modelli.

Oltre ai momenti centrali fin qui trattati, merita attenzione la dipendenza temporale dei rendimenti di uno stesso titolo. Per fare ciò bisogna creare un'altra serie dalla originale, traslando quest'ultima in base allo sfasamento temporale preso in considerazione per lo studio del legame temporale. Gli indici che misurano questo tipo di legame sono l'autocovarianza, che rappresenta il legame lineare tra i rendimenti a varie epoche, e l'autocorrelazione che non è altro che l'autocovarianza normalizzata. Quando lo sfasamento temporale è pari a zero l'autocovarianza non è altro che la varianza del titolo. Maggiore è il numero della sfasamento temporale meno accurata sarà l'analisi poiché riduce il numero di osservazioni disponibili.

Analizzate le caratteristiche della serie dei rendimenti, si può passare allo studio della selezione dei titoli in portafoglio. Si cercherà dunque di capire quale sia la combinazione migliore tra i titoli disponibili, in base alle preferenze dell'investitore e ai rendimenti aleatori che ogni investimento presenta. Nel terzo capitolo verrà illustrato l'uso del modello di Markowitz per la creazione dei portafogli ottimi. Il capitolo trae spunto dall'articolo pubblicato sul "Journal of Finance" da Markowitz, e che viene considerato il punto d'inizio della finanza moderna. Nonostante la numerosa letteratura sviluppatosi in seguito, il modello di Markowitz offre spunti interessanti per la comprensione dell'importanza della lunghezza delle serie storiche. Grazie alle ipotesi alquanto forti che presenta il modello, che semplificano in parte l'analisi, lo studio si svilupperà tramite due indici soltanto, vale a dire il rendimento atteso e la varianza dei titoli.

Non conoscendo la realizzazione futura dei rendimenti, la scelta dei titoli avviene in un contesto di incertezza e quindi entrano in gioco le probabilità di realizzazione di ogni evento. Grazie all'ipotesi che le distribuzioni dei rendimenti presentino forma normale, basterà analizzare rendimento atteso e varianza per la scelta dei titoli. Un'ulteriore ipotesi,

cioè quella di agenti razionali, permette di utilizzare un primo criterio di analisi dei titoli. Infatti la razionalità degli agenti e l'utilizzo di media e deviazione standard, fanno sì che a parità di rendimento atteso siano preferiti i titoli con varianza minore, mentre tra i titoli che hanno pari varianza, si preferiscano quelli con rendimento maggiore.

Il problema emerge su titoli che presentano varianza maggiore a cospetto di un rendimento maggiore. In questo caso entrano in gioco le preferenze degli investitori, infatti gli agenti avversi al rischio preferiranno titoli con varianza bassa e rendimento basso, al contrario degli agenti propensi al rischio che a fronte di un rendimento maggiore affrontano un rischio maggiore. Questo criterio quindi permette solo di escludere alcuni titoli ma non di crearne una combinazione che soddisfi le esigenze degli investitori.

Passando all'analisi della combinazione di titoli piuttosto che all'andamento di ogni singola azione, si cerca di capire il beneficio della creazione di un portafoglio finanziario. Markowitz è stato il primo a verificare matematicamente il beneficio della diversificazione attraverso il modello della Portfolio Selection.

Fondamentali risultano le ipotesi del modello, che pur ricreando nella maniera di fedele possibile le condizioni del mercato reale, ne rendono più semplice l'analisi. Le ipotesi riguardano la razionalità degli agenti, la mancanza di costi di transazione, la scelta attraverso soltanto il rendimento atteso e la varianza, titoli divisibili e mercato perfettamente concorrenziale. Inoltre poiché si opera in un contesto di aleatorietà entrano in gioco ulteriori ipotesi, tra cui il fatto che i rendimenti passati siano gli unici che si presenteranno in futuro, i rendimenti di due titoli si presenteranno a coppia e che i rendimenti hanno tutti medesima probabilità di realizzazione. Anche se ne rendono l'analisi più semplice, è ragionevole pensare che è in questi punti che va ricercata la causa della discordanza tra i dati reali e quelli ottenuti tramite il modello.

Passando all'analisi delle combinazioni tra i titoli, all'inizio si ipotizza l'esistenza di due soli titoli, e si calcolano il rendimento atteso e la varianza del portafoglio. In questo caso il rendimento atteso del portafoglio è la combinazione lineare dei rendimenti attesi dei due titoli con pesi pari alla percentuale dei titoli in portafoglio. Per quanto riguarda la varianza invece, il rischio di portafoglio sarà dato dalla varianza dei due

titoli che compongono il portafoglio, con l'aggiunta della dipendenza lineare dei due titoli, vale a dire come varia un titolo al variare dell'altro. Quindi nella formula della varianza di portafoglio comparirà la covarianza tra i due titoli, che può essere sostituita anche dal coefficiente di correlazione che varia da meno uno a più uno.

È proprio l'introduzione di questo legame lineare tra i titoli che spiega il beneficio della diversificazione in ambito finanziario. Infatti andando a sostituire il coefficiente di correlazione, si può notare che il rischio di portafoglio diminuisce, rispetto all'investimento nei singoli titoli, se il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra zero escluso) e meno uno. Infatti lascia invariato il rendimento atteso, non comparando nella formula, ma fa diminuire il valore della varianza. Quindi è necessario che tra i titoli ci sia un legame lineare negativo, e addirittura in caso di relazione lineare perfetta e inversa, vale a dire coefficiente di correlazione pari a meno uno, è possibile annullare il rischio. Matematicamente è dimostrabile risolvendo il problema di ottimo vincolato per la ricerca del portafoglio ottimo. Infatti minimizzando la varianza con un rendimento atteso dato e premettendo che si debba investire tutto il capitale disponibile, quindi i due pesi saranno pari x_1 e $x_2=1-x_1$, a questo punto basta derivare la varianza per x_1 e porre la derivata pari a zero. Tramite il risultato di questa operazione è possibile determinare il valore di x_1 che rende minima la varianza nei tre casi di relazione lineare perfetta positiva e negativa, quindi rispettivamente coefficiente di correlazione pari a uno e meno uno, e nel caso di relazione lineare nulla, cioè coefficiente pari a zero. Come già accennato solo nel caso di coefficiente di correlazione pari a meno uno si ottiene un valore che annulli il rischio, cioè la varianza del portafoglio composto dai due titoli.

Passando all'analisi grafica della costruzione dei portafogli efficienti, basterà variare i pesi dei due titoli in portafoglio per costruire la frontiera. La parte a destra del punto di minimo rappresenterà la frontiera efficiente poiché tutte le combinazioni a sinistra del punto di minimo rappresentano portafogli dominati che quindi verranno esclusi dagli agenti razionali, visto che presentano a parità di varianza un rendimento minore. Inoltre essendo le curve convesse la varianza varia più che proporzionalmente rispetto al rendimento. Quindi dati due titoli è possibile costruire diversi portafogli finanziari, che costituiscono la frontiera. Gli investitori razionali sceglieranno quelli posti sulla frontiera efficiente in base al loro grado di

avversione al rischio; infatti quelli avversi al rischio si piazzeranno nella parte bassa della frontiera efficiente, mentre quelli più propensi sceglieranno titoli posti sulla parte alta.

Ampliando l'analisi al caso di n titoli disponibili, valgono le stesse considerazioni fatte per il caso a due titoli. Infatti sarà necessario calcolare il rendimento atteso e la varianza del portafoglio composto dagli n titoli, e risolvere il problema di ottimo vincolato. L'utilizzo delle matrici rende il calcolo più semplice anche attraverso l'ausilio del software Excel e in particolare tramite l'utilizzo del risolutore. Certamente, sarà possibile costruire un numero maggiore di portafogli rispetto al caso di due titoli, offrendo una maggiore scelta agli investitori. Ma costruita la frontiera, rappresentata nel caso a n titoli da spazi e non più da linee o curve, sarà sempre la propensione o meno al rischio a porre gli investitori in vari punti della frontiera efficiente.

Enunciate le teorie alla base del modello di Markowitz e descritte le fasi che portano alla composizione del portafoglio ottimo, nel quarto capitolo si effettua il confronto tra i dati ottenuti dal modello e quelli relativi ai mercati finanziari reali. Dopo aver testato la presenza di incongruenze tra dati reali e dati teorici si indaga sulle cause che comportano tali differenze e quali ripercussioni possano avere sugli investimenti.

Per prima cosa si descrivono le caratteristiche tipiche dei mercati finanziari reali in maniera tale da creare un confronto diretto con i dati rinvenuti dal modello teorico. Per questo motivo vengono illustrati i fatti stilizzati, cioè proprietà tipiche delle serie finanziarie, estratte direttamente dall'osservazione del mercato. Ecco alcuni tratti che contraddistinguono le serie finanziarie reali:

- mancanza di autocovarianza per i rendimenti, cioè assenza di relazione lineare tra i rendimenti, a epoche diverse, dello stesso titoli;
- presenza di code pesanti, cioè maggiore probabilità di eventi estremi;
- asimmetria tra perdite e guadagni, infatti agli shock ribassisti non sono contrapposti aumenti di prezzo repentini;
- prendendo in considerazione archi temporali differenti, si presentano distribuzioni di frequenza differenti dei rendimenti dello stesso titolo;

-volatility clustering, cioè periodi di alta o bassa volatilità che tendono a raggrupparsi durante la serie storica, mostrando una certa relazione tra i rendimenti;

-esistenza di autocorrelazione per alcune serie trasformate dei rendimenti;

-effetto leva, fa sì che la volatilità aumenti maggiormente in corrispondenza delle perdite, poiché aumentando il rapporto tra indebitamento e valore della società aumenta il rischio del titolo e quindi la sua volatilità;

-esistenza di un legame tra volume degli scambi e volatilità, infatti si osserva un aumento degli scambi nei periodi ad alta volatilità.

Da questo elenco si evince che principalmente tali aspetti si ripercuotono sulla distribuzione di frequenza della serie dei rendimenti. In particolare, emerge che le serie finanziarie presentino maggiore probabilità di eventi estremi, e quindi presenza di leptocurtosi, e asimmetria rispetto al valore medio. Di conseguenza, non è ragionevole studiare la serie dei rendimenti attraverso soltanto la media e la varianza e presupponendo che la serie presenti distribuzione Gaussiana, poiché tali ipotesi potrebbero avere delle ripercussioni sui risultati finali. A questo punto diviene fondamentale l'analisi della presenza di asimmetria e "code pesanti" nella distribuzione della serie dei rendimenti. Quest'ultima analisi è stata argomento di numerosi studi finanziari, che hanno comportato la creazione di test per la verifica della normalità delle distribuzioni finanziarie. In questo elaborato vengono utilizzati i test di Fisher e Pearson, rispettivamente per l'analisi della simmetria e della curtosi della serie dei rendimenti. Inoltre viene sfruttato il test congiunto di normalità di Jarque-Bera. In caso di presenza di asimmetria e curtosi emerge il problema dell'utilizzo del modello di Markowitz per la creazione del portafoglio ottimo, poiché potrebbero emergere risultati fuorvianti rispetto ai dati reali.

Le evidenze empiriche trattate precedentemente hanno delle ripercussioni sui risultati ottenuti sfruttando le ipotesi di normalità della serie dei rendimenti. In particolare tali conclusioni vanno ad inficiare gli aspetti riguardanti la rischiosità dell'investimento. Infatti, la presenza di dipendenza temporale tra i rendimenti ad epoche differenti dello stesso titolo comporta la non stazionarietà della serie, e quindi non è plausibile considerare la varianza costante nel tempo e presumere che la varianza storica sia una buona approssimazione di quella futura, poiché dipenderà

dall'arco temporale di riferimento e dalla forma della distribuzione di quella particolare serie. Inoltre, il legame tra rischio e distribuzione della serie si evince nel calcolo del valore a rischio (VaR). Infatti, il valore dipenderà, oltre che dal valore atteso, dalla deviazione standard e dal quantile della distribuzione. Oltre alla problematica del calcolo della deviazione standard accennato nelle righe precedenti, ulteriore problema sorge per il calcolo del quantile. Infatti, utilizzando la coda sinistra di una distribuzione normale, si sottostima il rischio, poiché le distribuzioni delle serie finanziarie presentano code più pesanti rispetto a quelle di una Gaussiana.

Per testare le conseguenze delle proprietà delle serie finanziarie reali sui risultati ottenuti tramite il modello di Portfolio Selection di Markowitz, il quinto ed ultimo capitolo si occupa di uno studio empirico su dei titoli del mercato borsistico italiano. In particolare, verranno studiate tre serie storiche di lunghezza differente riguardanti 37 dei 40 titoli che compongono l'indice FTSE MIB (tre sono stati esclusi poiché non presentavano le serie storiche complete, essendo di recente quotazione). Le tre serie storiche sono invece così composte: una serie storica che copre l'ultimo semestre del 2013, una che tratta tutto l'anno 2013 e l'ultima che va dal primo Gennaio 2012 al 31 Dicembre 2013. Le serie storiche sono composte dai prezzi di chiusura giornalieri dei vari titoli, da cui sono stati calcolati i rendimenti logaritmici, per i motivi elencati nel primo capitolo. Per le tre serie storiche verranno effettuate le medesime operazioni, in modo tale da poter ottenere un confronto tra i risultati.

Dopo aver calcolato il valore atteso e la varianza di ogni titolo e aver immesso i dati in un grafico costruito tramite il software Excel, si passa alla prima scrematura dei titoli da inserire in portafoglio tramite il metodo media-varianza. In questo modo saranno, eventualmente, inseriti in portafoglio solo i titoli non dominati. Fatto ciò per tutte e tre le serie storiche, si passa alla costruzione del portafoglio ottimo e quindi a calcolare i pesi di ogni titolo in portafoglio. Per questa operazione si segue il processo descritto da Markowitz, quindi sarà necessario risolvere un problema di ottimo vincolato. Il problema consiste nell'ottenere il portafoglio che minimizza la varianza sotto i vincoli di rendimento maggiore di quello dell'indice FTSE MIB, nel periodo coperto dalla serie storica in considerazione, di investire il totale del capitale a disposizione e infine senza che siano possibili vendite allo scoperto, quindi pesi maggiori di zero. Per la soluzione si utilizza il risolutore di Excel che rende rapidi i

calcoli, grazie anche alle ipotesi di distribuzione normale e serie stazionaria. Creati i portafogli ottimi si può passare al confronto tra essi. Infatti i portafogli sono diversi tra loro ed è quindi possibile analizzare congruenze e differenze nella composizione e nella performance. Guardando la composizione si nota subito una netta differenza tra il portafoglio composto tramite la serie storica di lunghezza sei mesi e gli altri due che invece presentano molti titoli in comune, in particolare i titoli che compaiono nel portafoglio della serie storica a due anni, sono presenti anche nel portafoglio costruito tramite la serie storica di un anno. Gli unici titoli che compaiono in tutti e tre i portafogli sono Terna e Yoox. Per capire la causa di questa differenza di composizione si è analizzato l'andamento dei titoli non dominati, dei vari portafogli, nei due anni studiati. Analizzando il grafico si evince che i titoli che compongono il portafoglio creato tramite la serie storica lunga sei mesi presentano inizialmente un andamento altalenante, mentre nell'ultimo periodo c'è un netto trend rialzista. Andamento opposto per i titoli degli altri due portafogli; infatti per questi titoli nell'arco dei due anni si evidenzia una netta crescita del prezzo (quindi rendimenti positivi), che si affievolisce soltanto nell'ultimo periodo del 2013. Questa netta variazione di trend tra l'intero arco dei due anni e gli ultimi mesi del 2013 ha comportato la preferenza di diversi titoli per la composizione dei portafogli ottimi, mostrando così che l'arco temporale di riferimento influisce sulla scelta degli investimenti. Per quanto riguarda invece la performance, si confronteranno i rendimenti su base annua dei tre portafogli, e i valori del VaR su base annua, preso come indice di rischio. Per quanto riguarda il rendimento, il portafoglio creato con la serie storica di un anno presenta il rendimento più alto seguito da quello a due anni e infine dal portafoglio costruito con la serie storica di sei mesi. Anche per il VaR i risultati offrono la stessa "classifica" a dimostrazione del fatto che a un rendimento atteso maggiore corrisponde un livello di rischio superiore. Anche per quanto riguarda la performance, comunque, si può notare che i portafogli a uno e due anni offrono risultati molto vicini rispetto al restante portafoglio, a dimostrazione del fatto che le due serie storiche presentano caratteristiche simili.

Visto che i risultati empirici non rispettano le attese del modello di selezione di portafoglio, si cerca di capire quali siano le cause di tali incongruenze. Sfruttando quanto visto nel capitolo quattro si indaga dunque sulla forma della distribuzione e sul legame temporale dei

rendimenti dello stesso titolo in epoche differenti. Per far questo si eseguono i test di normalità sulla serie dei rendimenti per capire se possano essere considerate Gaussiane, e si studiano i correlogrammi per analizzare l'autocorrelazione dei rendimenti.

Per quanto riguarda il primo punto, vengono effettuati i test di Fisher, Pearson e Jarque-Bera, per verificare rispettivamente l'asimmetria, la curtosi e la normalità delle serie di rendimenti. I risultati mostrano che soltanto i titoli non dominati della serie di lunghezza sei mesi possono essere approssimabili tramite una normale ad eccezione di due soli titoli, mentre i titoli che compongono gli altri due portafogli presentano risultati lontani da quelli tipici di una Gaussiana, soprattutto per la presenza di code pesanti (leptocurtosi) tipica delle serie finanziarie. Quindi ipotizzare che la distribuzione sia Gaussiana comporta la sottostima della probabilità di eventi estremi, soprattutto perdite, e quindi una sottostima del rischio. Per quanto riguarda invece la dipendenza temporale dei rendimenti di uno stesso titolo, si osservano i correlogrammi costruiti tramite il software statistico R, che rappresenta i vari valori dell'autocorrelazione per vari sfasamenti (lag) temporali. Per studiare il legame non lineare tra i rendimenti, si è trasformata la serie originale calcolando il quadrato di ogni osservazione. Tramite l'osservazione dei correlogrammi dei diversi titoli non dominati, è possibile affermare che molti titoli presentano valori statisticamente insignificanti, mostrando indipendenza temporale tra i rendimenti in epoche diverse. Ma l'esistenza di autocorrelazione per alcuni titoli complica l'analisi per la costruzione del portafoglio ottimo, perché sarà necessario testare la presenza di autocorrelazione e poi analizzare il grado di dipendenza che lega i vari rendimenti dello stesso titolo, non permettendo di usare la varianza storica come approssimazione di quella futura.

A questo punto è possibile affermare che l'analisi dei titoli tramite l'ipotesi di normalità della distribuzione può comportare la sottostima del livello di rischio degli investimenti, considerato la presenza di asimmetria e leptocurtosi nella distribuzione e di legame temporale tra i rendimenti di uno stesso titolo. Per tale motivo, gli studi successivi a quello di Markowitz si sono concentrati sulla soluzione di tale problematica, e grazie ad alcuni modelli, vedi i modelli ARCH e GARCH, si cerca di stimare la varianza tenendo conto delle specificità delle serie finanziarie.

Si può dunque affermare che la scelta dell'orizzonte temporale di riferimento è cruciale per lo studio dei titoli finanziari. Infatti per ogni epoca analizzata, la distribuzione della serie dei dati presenterà delle caratteristiche specifiche, diverse da periodo a periodo, che si ripercuotono sulle scelte finali di investimento. Per questo motivo, può essere un buon compromesso scegliere la lunghezza della serie storica da analizzare in base all'orizzonte temporale dell'investimento che si intende effettuare, sembrando più probabile che si ripresentino, nello stesso arco temporale, condizioni e caratteristiche molto simili.