



**Dipartimento di Impresa e management**

**Cattedra di matematica finanziaria**

## **LA TEORIA DELL'ARBITRAGGIO E LE CURVE DEI RENDIMENTI**

**RELATORE**

**Prof.ssa Gabriella Foschini**

**CANDIDATO**

**Zaffiro Puopolo Giuseppe**

**Matr. 178031**

**ANNO ACCADEMICO**

**2014-2015**

<b>INDICE</b>	2
<b>Introduzione</b>	4
<b>Capitolo 1: La teoria dell'arbitraggio</b>	6
1. Opportunità di arbitraggio	6
1.1 Definizione	
2. Tipologie di arbitraggio	8
2.1 Arbitraggio puro e arbitraggio statistico	8
3. Strategie di arbitraggio	10
3.1 Struttura dei tassi a pronti e a termine	10
3.2 Sfruttare le opportunità di arbitraggio	12
4. Arbitraggio limitato	13
5. Il principio di non arbitraggio	15
5.1 Implicazioni ed applicazioni	16
5.2 Arbitraggio e mercati a termine	17
<b>Capitolo 2: L'evoluzione delle curve dei rendimenti</b>	19
1. Le curve dei rendimenti	22
1.1 Definizione	22
1.2 L'influenza delle aspettative degli operatori	27
1.3 La teoria delle aspettative e la teoria della preferenza per la liquidità	30
2. Gli swap come benchmark	32
2.1 Le nuove curve dei rendimenti benchmark	32
2.2 Il ruolo di benchmark dei Titoli di Stato	32
2.3 Introduzione agli swap	36
2.4 Interest Rate Swap	38

2.5	Overnight Indexed Swap	41
2.6	Gli Interest rates swap possibili benchmark alternativi	43
2.7	Il vantaggio della curva swap	45
3.	La costruzione della curva dei rendimenti swap	47
3.1	Il segmento a breve della curva swap	48
3.2	L'area centrale della curva swap	59
3.3	Il segmento a lungo termine della curva swap	50
3.4	Algoritmi di interpolazione	52
3.4.1	interpolazione lineare	52
3.4.2	cubic spline interpolation	53
3.5	Overview	55
 <b>Capitolo 3: La costruzione della spot rate curve</b>		 57
1.	Bootstrap	58
2.	L'interpolazione mediante funzioni spline	61
3.	Funzioni spline e costruzione della spot rate curve	69
4.	L'evoluzione del mercato	72
4.1	Divergenze tra tassi	73
4.2	Collaterizzazione ed Eonia discounting	76
5.	Evoluzione della metodologia di pricing	77
5.1	Bootstrapping nel quadro mono-curva e nel quadro multi-curve	78
 <b>Conclusione</b>		 81
 <b>Bibliografia</b>		 83
 <b>Sitografia</b>		 85

## Introduzione

Il presente elaborato si propone l'analisi della Teoria dell'arbitraggio e delle Curve dei rendimenti (Yield Curve). I due argomenti, apparentemente indipendenti, sono in realtà strettamente correlati, in quanto le violazioni del "principio di non arbitraggio", che si sono riscontrate sul mercato successivamente alla crisi del 2007-2008, hanno evidenziato i limiti delle ipotesi su cui si fondava la determinazione della curva dei rendimenti ed aperto la strada a nuove metodologie, oggetto di analisi di questo lavoro.

In particolare, nel I capitolo verrà introdotta la Teoria dell'arbitraggio, fornendo alcuni esempi concreti di "opportunità di arbitraggio" e spiegando come gli arbitraggisti riescono a sfruttarle ponendo in essere delle opportune "strategie di arbitraggio".

Il capitolo tratterà, inoltre, il "principio di non arbitraggio", in quanto è stata proprio la sua violazione a rimettere in discussione le modalità di derivazione della curva dei rendimenti. L'assenza di arbitraggio è un concetto chiave in Matematica Finanziaria. Infatti su tale principio si basa una serie molto ampia di modelli di valutazione: è un'ipotesi fondamentale quando si parla di efficienza ed equilibrio del mercato, equilibrio che a sua volta ha un ruolo essenziale nel pricing di strumenti finanziari.

Il II e il III capitolo presentano un'analisi delle curve dei rendimenti. Si tratta di un argomento che ha una notevole applicazione pratica, la struttura per scadenza dei tassi è infatti un indicatore fondamentale per i Titoli del debito pubblico, per le obbligazioni in generale e per i prezzi degli strumenti derivati che dipendono dai tassi di interesse.

La curva dei rendimenti costituisce, inoltre, per le banche centrali e per gli operatori di mercato, un'affidabile fonte di informazioni sulle aspettative dei

mercati riguardo a diverse variabili macroeconomiche fondamentali, quali: inflazione, recessione, grado di incertezza riguardo la stabilità dei prezzi, andamento economico generale.

In questi due capitoli dell'elaborato verrà presa in considerazione l'evoluzione delle metodologie per la derivazione della Yield Curve, spiegando perché le "vecchie" ipotesi risultano ormai anacronistiche e illustrando le metodologie più utilizzate per la derivazione della struttura per scadenza dei tassi.

## CAPITOLO I

### LA TEORIA DELL'ARBITRAGGIO

La teoria dell'arbitraggio si presta ad un'ampia gamma di applicazioni, tra le più rilevanti vi sono sicuramente quelle che legano la suddetta teoria al pricing dei titoli derivati e di conseguenza alle strategie di copertura del rischio sviluppate utilizzando tali titoli.

#### 1. Opportunità di arbitraggio

##### 1.1 Definizione

*“Un' opportunità di arbitraggio può essere definita come una strategia finanziaria che permette di ottenere una ricchezza finale positiva, partendo da una nulla e, soprattutto, senza assumere rischi<sup>1</sup>”.*

Per estensione, si definisce “opportunità di arbitraggio” anche una strategia che, in almeno uno degli istanti di investimento, implichi un profitto positivo conseguito con certezza, a fronte di bilanci (almeno) nulli nelle altre date di intervento nel mercato. L'arbitraggio, infatti, non richiede alcun esborso di denaro e garantisce un profitto sicuro.

Ci sono opportunità di arbitraggio ogni qualvolta una stessa attività finanziaria sia contrattata su due diversi mercati finanziari a prezzi diversi tra di loro, oppure quando due attività finanziarie perfettamente sostituibili tra di loro vengano scambiate su un mercato finanziario a prezzi diversi tra di loro.

---

<sup>1</sup> Corsaro S. (2008): *“I titoli obbligazionari”*, Dispense del corso di “Matematica Finanziaria”, Università degli Studi di Napoli “Parthenope”, [www.economia.uniparthenope.it](http://www.economia.uniparthenope.it)

Un'opportunità di arbitraggio, definita in questo modo così rigoroso, è quindi la possibilità di ottenere un profitto comprando e vendendo titoli a prezzi diversi senza correre alcun rischio.

Gli investitori che sono in grado di individuare le opportunità di arbitraggio possono agire immediatamente acquistando il titolo venduto a un prezzo minore e vendendo il titolo a un prezzo maggiore, lucrando la differenza. L'effetto dell'arbitraggio sarà quello di riportare in linea i prezzi che erano temporaneamente disallineati.

Una definizione di arbitraggio viene fornita da Philip H. Dybvig e Stephen A. Ross<sup>2</sup>:

*“Un’opportunità di arbitraggio è una strategia di investimento che garantisce un flusso finanziario positivo in qualche circostanza, senza generare flussi finanziari negativi, né richiedere investimenti netti. In altri termini, un’opportunità di arbitraggio rappresenta un sistema che produce denaro indefinitamente, una cosiddetta money pump”.*

Dato che rappresentano una preziosa fonte di reddito per chi le individua, è difficile trovare traccia delle operazioni di arbitraggio effettivamente sfruttate. Poiché a volte queste opportunità tendono a ripetersi, gli arbitraggisti evitano di dare informazioni.

Un esempio semplice di arbitraggio è dato dall’opportunità di prendere in prestito e prestare denaro, senza costi di transazione, a due differenti tassi di interesse prefissati. Tuttavia, il disallineamento tra i due tassi non potrà persistere, in quanto gli arbitraggisti stessi con la loro azione porteranno i tassi ad essere uguali tra loro.

---

<sup>2</sup> Dybvig P.H. - Ross S.A. (1996): “Arbitrage”; la traduzione in italiano è quella di Massimo De Felice in De Felice M. - Moriconi F. (1996, p. 3): “Il principio di arbitraggio”, Il Mulino.

Dall' esempio di arbitraggio dato dallo stesso Stephen A. Ross<sup>3</sup> si intuisce quanto sia difficile riuscire a sfruttare le opportunità di arbitraggio presenti sul mercato:

*“Sono stato una volta coinvolto in un gruppo specializzato in arbitraggi su “titoli garantiti da ipoteche”. Si trattava di comprare e vendere “oscuri e arcani” pezzi di carta rappresentativi di tranches di pass-through mortgages. Le tranches erano state ottenute attraverso operazioni di stripping.*

*Ricordo che avevamo scoperto, dopo estese analisi, che una di queste tranches – un tipo particolare di “IO” (Interest Only) – offriva un tasso di rendimento sicuro pari al 37% annuo. Questa era la buona notizia. La cattiva notizia era che l'investimento non era scalabile. Potevamo comprare solo \$600.000 di questa tranche. Dato l'elevato costo delle risorse umane impiegate, il profitto copriva a mala pena il costo dell'analisi. Il mercato aveva trovato un equilibrio anche per questi ottimi affari: i costi delle analisi per individuarli, inclusi i compensi del capitale umano impiegato, erano pressoché pari ai ricavi d'arbitraggio”.*

## **2. Tipologie di arbitraggio**

Le opportunità più frequenti di arbitraggio si presentano nei mercati degli strumenti derivati, per i quali le formule matematiche prevedono relazioni di prezzo relativamente rigide tra titolo sottostante e titolo derivato, rendendo di fatto le due attività perfettamente sostituibili tra di loro, almeno nel brevissimo periodo.

### **2.1 Arbitraggio puro e arbitraggio statistico**

Quando si parla di arbitraggio si può distinguere tra “arbitraggio puro” e “arbitraggio statistico”.

Introduciamo, di seguito, la nozione formale di strategia d'arbitraggio puro:

---

<sup>3</sup>Ross S.A. (2005): “Options and efficiency”, Neoclassical Finance, Princeton University Press.

Un arbitraggio puro è una strategia  $(\alpha, \beta)$  autofinanziante e predicibile, dunque una strategia che non richiede un investimento iniziale perchè ha costo zero, non espone ad alcun rischio perchè il suo valore finale è maggiore o uguale a zero e ha probabilità positiva di assumere un valore strettamente maggiore di zero.

Un modello di mercato  $(S, B)$  è libero da arbitraggi se la famiglia delle strategie autofinanzianti e predicibili non contiene arbitraggi. Realizzare modelli di mercato con questa proprietà è abbastanza complicato. Tali modelli dovrebbero rispecchiare infatti i mercati reali, che si assume siano efficienti, cioè tali che non sia possibile costruire strategie di trading che generano profitti. Tuttavia, alcuni risultati empirici sull'andamento dei prezzi di alcuni beni, mostrano temporanee inefficienze di mercato. Si genera così l'opportunità di intraprendere un tipo di strategia nota come arbitraggio statistico.

Un arbitraggio statistico<sup>4</sup> è una strategia  $(\gamma, \delta)$  autofinanziante e predicibile. Al contrario dell'arbitraggio puro, l'arbitraggio statistico può dare valori della strategia negativi in alcuni istanti temporali. In questo modo il valore medio della strategia può non essere sempre positivo in ogni periodo.

In generale, si creano opportunità di arbitraggio statistico quando si riescono ad individuare delle componenti sistematiche nelle dinamiche dei prezzi di alcuni asset che si muovono con regolarità persistenti e prevalenti. Di conseguenza per gli arbitraggisti è facile prevedere l'andamento di tali prezzi e sviluppare strategie di trading per speculare.

---

<sup>4</sup> Pole A. (2007): "Statistical Arbitrage", Wiley Finance, pag(8-10).

### 3. Strategie di arbitraggio

#### 3.1 *Struttura dei tassi a pronti e a termine*

La successione dei tassi  $i(0,t)$ <sup>5</sup>, prende il nome di struttura per scadenza dei tassi a pronti. Tale struttura si dice crescente se  $i(0,t) < i(0,t+1)$ , decrescente se  $i(0,t) > i(0,t+1)$  oppure costante se  $i(0,t) = i(0,t+1)$ .

Per cui il tasso di interesse su un titolo di durata  $n$  rilevato oggi sul mercato può essere diverso dal tasso riferito ad un titolo con le stesse caratteristiche ma di durata diversa.

Tale diversità può essere spiegata analizzando l'interazione della domanda e dell'offerta di titoli sul mercato dei capitali: se la struttura per scadenza dei tassi di interesse è crescente, gli investitori hanno convenienza ad acquistare titoli a breve termine, in modo da potere reinvestire in futuro ad un tasso maggiore; se invece la struttura dei tassi è decrescente, agli investitori conviene investire in titoli a lungo termine, beneficiando in tal modo del tasso più alto per un lungo periodo.

I tassi di interesse dei titoli vengono determinati in base all'incontro di domanda e offerta, a loro volta determinate dalle aspettative degli operatori sull'andamento futuro dei prezzi stessi.

Tali considerazioni sono sintetizzate nella teoria delle aspettative pure, secondo la quale il mercato è in equilibrio se per un operatore è indifferente, dato un intervallo temporale  $[0,n]$ , investire in un'unica operazione di durata  $n$ , piuttosto che in  $n$  operazioni di durata unitaria<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup> Con il simbolo  $i(0,t)$  si indica il tasso effettivo di rendimento riferito ad un'operazione finanziaria a pronti che inizia all'epoca 0 e si conclude all'epoca  $t$  calcolato su base periodale.

<sup>6</sup> Considerando gli operatori indifferenti al rischio e massimizzatori del profitto

In formule possiamo scrivere:

$$r(0, n) = \prod_{s=1}^n r(s-1, s) \quad (1-3.1)$$

dove  $0 < s < n$

esprimendo la (1-3.1) in funzione dei tassi di interesse si ottiene:

$$[1 + i(0, n)]^n = \prod_{s=1}^n [1 + i(s-1, s)]$$

I tassi a pronti  $i(0, s)$  e  $i(0, n)$  sono tassi certi, mentre I tassi  $i(s, n)$  sono riferiti ad operazioni future e quindi sono incerti.

Per avere all'epoca 0 la certezza sui tassi futuri è necessario introdurre una nuova tipologia di operazioni finanziarie: le operazioni a termine. Queste sono caratterizzate da tre epoche: l'epoca  $x$  in cui avviene l'accordo, l'epoca  $y$  in cui si paga il prezzo del contratto e l'epoca  $z$  in cui si conclude l'operazione finanziaria, con  $x < y < z$ .

In formule:

$$r(x, z) = r(x, y) \cdot r(x, y, z) \quad (1-3.2)$$

La (1-3.2) espressa in funzione dei tassi di interesse:

$$[1 + i(x, z)]^{z-x} = [1 + i(x, y)]^{y-x} \cdot [1 + i(x, y, z)]^{z-y}$$

Tale relazione esprime la condizione di equilibrio dei mercati finanziari. Se tale relazione non è verificata si creano, sul mercato, possibilità di arbitraggio<sup>7</sup>.

La struttura a termine amplifica l'andamento della struttura a pronti.

---

<sup>7</sup> G.Olivieri – G. Foschini – M. Staffa (2007-2008): "Appunti delle lezioni di Matematica Finanziaria", [www.luiss.it](http://www.luiss.it)

In particolare se la struttura a pronti è crescente, la struttura a termine domina quella a pronti; se la struttura a pronti è decrescente, la struttura a termine è dominata da quella a pronti.

### 3.2 Sfruttare le opportunità di arbitraggio

Date tre epoche ordinate  $x \leq y \leq z$ , la condizione di equilibrio del mercato in funzione dei valori attuali unitari è espressa dalla seguente relazione:

$$v(x, z) = v(x, y) \cdot v(x, y, z)$$

dove:

$v(x, z)$  è il prezzo all'epoca  $x$  di un titolo a pronti che assicura all'epoca  $t=z$  il pagamento di un capitale unitario;

$v(x, y)$  è il prezzo all'epoca  $x$  di un titolo a pronti che assicura all'epoca  $t=y$  il pagamento di un capitale unitario;

$v(x, y, z)$  è il prezzo di un titolo a termine contrattato all'epoca  $t=x$ , da pagare all'epoca  $t=y$ , che assicura all'epoca  $t=z$  il pagamento di un capitale unitario.

Se questa relazione non è verificata nel mercato si creano opportunità di arbitraggio, le quali, opportunamente sfruttate dagli operatori finanziari causano pressioni sulla domanda e l'offerta di titoli che riportano il mercato in equilibrio.

Ipotizziamo che il mercato sia in disequilibrio, ovvero che:

$$v(x, z) \neq v(x, y) \cdot v(x, y, z).$$

I casi che possono presentarsi sono due:

$$v(x, z) > v(x, y) \cdot v(x, y, z) \text{ e } v(x, z) < v(x, y) \cdot v(x, y, z)$$

In entrambi i casi, gli operatori di mercato, nel nostro caso gli arbitraggisti, possono sfruttare il disallineamento dei prezzi dei titoli presenti sul mercato,

garantendosi un profitto certo senza alcun impegno futuro. Nella realtà operativa essi pongono in essere delle cosiddette “strategie di arbitraggio” che consistono nell’acquisto e nella vendita dei titoli, avvantaggiandosi dei prezzi diversi a seconda delle scadenze e riuscendo così ad ottenere un profitto immediato e senza rischio detto “profitto di arbitraggio”.

#### **4. Arbitraggio limitato**

Secondo un approccio recente allo studio dei mercati finanziari, che viene chiamato “Finanza comportamentale”, l’arbitraggio non è esente da rischi e da costi. I “comportamentalisti” sostengono in particolare che l’arbitraggio è limitato e quindi non sempre efficace.

Circa la limitatezza dell’arbitraggio Shleifer e Vishny<sup>8</sup>, sostengono nel loro lavoro che un’importante ragione secondo cui l’arbitraggio è limitato è l’imprevedibilità del comportamento dell’investitore.

Tale imprevedibilità diventa meno sopportabile quando gli arbitraggisti sono avversi al rischio o gestiscono i soldi di altre persone.

Ammettiamo che l’arbitraggista, seguendo la sua strategia, proceda all’acquisto di un titolo sottovalutato (titolo che tutti gli investitori irrazionali stanno vendendo, provocando una notevole diminuzione del prezzo, a causa di idee pessimistiche sul futuro dell’azienda cui il titolo è legato) e alla contemporanea vendita di un titolo sostitutivo ma sopravvalutato. Se le idee pessimistiche degli investitori irrazionali (noise traders), dovessero continuare, gli arbitraggisti otterrebbero un rendimento negativo. Gli investitori, che hanno affidato la gestione dei loro fondi agli arbitraggisti, valutando le capacità dei gestori sulla base del rendimento ottenuto, potrebbero considerarli incompetenti e pertanto potrebbero decidere di ritirare i loro fondi, costringendoli a liquidare anticipatamente.

---

<sup>8</sup> Shleifer A., Vishny R. (1997): “The limits if arbitrage”, *Journal of Finance*.

Questo timore induce gli arbitraggisti ad essere più cauti nell'uso di tale strategia. Quindi l'arbitraggio non riesce ad eliminare completamente il mispricing e il comportamento degli investitori influisce sull'equilibrio dei prezzi dei titoli.

Il lavoro di Shleifer-Vishny, si basa su un precedente lavoro di De Long-Shleifer-Summers-Waldmann<sup>9</sup>, in cui gli autori presentano un semplice modello di un mercato borsistico nel quale i "noise traders", con le loro convinzioni irrazionali influenzano i prezzi e a volte possono guadagnare anche più dell'atteso.

La non prevedibilità delle idee di tali investitori crea un rischio relativamente all'andamento del prezzo del bene, che scoraggia gli arbitraggisti razionali dallo scommettere aggressivamente contro di loro. Come risultato, i prezzi possono divergere in modo significativo dai valori fondamentali anche in assenza di un rischio reale.

Il nome di "noise traders" è stato attribuito da Kyle<sup>10</sup> e Black<sup>11</sup> a quegli investitori che non diversificano, ma puntano su "certe azioni" redditizie in base a loro personali ricerche o perché suggerite dagli organi di informazione. Le origini del rischio anche per gli arbitraggisti derivano dall'eventuale mancanza di liquidità.

La paura di queste perdite può limitare l'azione di arbitraggio. Viceversa, un arbitraggista che vende un'azione mentre è in ripresa, calcolando che prima o poi il prezzo tornerà a scendere, potrebbe ricevere la sorpresa di un ulteriore rincaro del prezzo e quindi potrebbe subire una perdita nel dover acquistare quel bene ad un prezzo più alto. E' proprio questo cambiamento di opinione dei noise traders che porta il "rischio dei noise traders".

I principali risultati di questo lavoro vengono dall'osservazione che l'arbitraggista non elimina gli effetti di disturbo, perché il disturbo stesso crea il rischio.

---

<sup>9</sup> De Long- Shleifer- Summers- Waldmann (1989): "Noise Trader Risk In Financial Markets", *The Journal of Political Economy*.

<sup>10</sup> Kyle (1985): "Continuous auctions and insider trading", *Econometrica*.

<sup>11</sup>Black (1986): "Noise", *Journal of Finance*.

Il rischio risultante dal cambiamento di opinione aleatorio dei noise traders aumenta la possibilità che i noise traders stessi che sono in media “rialzisti”, guadagnino un più alto profitto rispetto agli investitori razionali e sofisticati, occupati nell’arbitraggio. Se i noise traders sovrastimano i profitti o sottostimano il rischio, allora investono di più sulle azioni rischiose rispetto agli investitori sofisticati e possono avere dei guadagni maggiori. In definitiva i noise traders possono guadagnare di più semplicemente perché si accollano il rischio da loro stessi creato.

Il rischio noise traders limita quindi l’effetto dell’arbitraggio, ma se le opinioni dei noise traders seguono un processo stazionario<sup>12</sup>, c’è una componente di media-regressione nei profitti azionari, che, nel lungo periodo, permette agli investitori sofisticati di riportare il prezzo su posizioni stabili.

## **5. Principio di non arbitraggio**

Secondo il principio di non arbitraggio, se siamo certi che due titoli in una data futura avranno lo stesso valore, allora questi dovranno avere lo stesso valore anche in ogni data precedente.

In ambito matematico non si può rappresentare il principio di non arbitraggio, ma in ogni modello di mercato efficiente si assume che debba valere, eliminando dunque la possibilità di fare soldi gratis. Tuttavia, i mercati reali non sono sempre efficienti come si ipotizza, ma evidenze sperimentali mostrano la presenza di inefficienze temporanee, che generano opportunità di arbitraggio, dette intermarket spreads, che vengono studiate nell’ambito dell’arbitraggio statistico. Gli intermarket spreads riguardano simultanei acquisti e vendite di commodity differenti ma connesse tra loro, cioè che sono legate da una relazione stabile relativamente ai prezzi. Perturbazioni casuali della domanda e dell’offerta nei

---

<sup>12</sup> Le sue caratteristiche statistiche non variano nel tempo

mercati possono causare divergenze nei prezzi, dando luogo a opportunità di intermarket spread.

Se  $X_t$  e  $Y_t$  rappresentano il prezzo al tempo  $t$  di due titoli rischiosi, secondo il principio di non arbitraggio, se  $X_T = Y_T$  allora anche  $X_t = Y_t$

$$\forall t \leq T$$

### *5.1 Implicazioni ed applicazioni*

L'idea di equilibrio di un mercato finanziario si riconduce al concetto di mercato ove siano assenti possibilità di arbitraggi.

L'ipotesi di un mercato in equilibrio nel quale non sono possibili arbitraggi ha un ruolo essenziale nel *pricing* di strumenti finanziari. Infatti se si deve prezzare uno specifico strumento e questo può essere replicato utilizzando un portafoglio composto di altri strumenti il cui prezzo è noto, allora il prezzo del primo deve coincidere con il prezzo del portafoglio che lo replica.

In presenza di più mercati, ad esempio un mercato a pronti e uno derivato, l'arbitraggio consiste nel bloccare un profitto privo di rischio, entrando simultaneamente in transazioni che riguardano due o più mercati. I mercati in generale, e quelli finanziari in particolare, offrono possibilità di arbitraggio, ovviamente molto ricercate, e costituiscono l'attività principale di alcuni operatori, detti appunto *arbitraggisti*. Sono i loro interventi che, influenzando la domanda e l'offerta di prodotti finanziari vari, riportano i prezzi verso i loro valori di equilibrio, in corrispondenza dei quali non vi sono opportunità di arbitraggio.

Nella realtà dei mercati finanziari occorre tenere conto dei costi di transazione e del tempo necessario per chiudere il ciclo: l'incidenza dei costi è ovvia, mentre, per quanto riguarda il tempo, tra l'apertura e la chiusura della posizione i costi potrebbero cambiare e vanificare il profitto.

## 5.2 Arbitraggio e mercati a termine

Consideriamo l'esistenza simultanea di un mercato a pronti (*spot*) e di un mercato a termine (*forward*) per uno stesso bene. Stipulando un contratto *forward*, le due parti si impegnano a scambiarsi un bene, detto *supporto*, a scadenza per un prezzo pattuito al momento della sottoscrizione del contratto stesso. In effetti, la consegna del bene può non avere luogo in quanto nella maggioranza dei casi i contraenti prendono una posizione opposta appena prima della scadenza, bilanciando la precedente, ossia, come si dice, *chiudono la posizione*<sup>13</sup>.

Si indichi con  $t$  la data corrente, con  $T$  la scadenza, con  $S_t$  il prezzo (o *corso*) *spot* al tempo  $t$ , con  $F_t$  il prezzo *forward* al tempo  $t$  e con  $r$  il tasso periodale effettivo senza rischio relativo al periodo  $T-t$ .

Consideriamo ora un operatore che ha aperto una *posizione lunga* (di acquisto) sul supporto e *una corta* (di vendita) sul mercato a termine.

A scadenza, nel caso che nessuna delle due posizioni venga chiusa prima, il saldo dell'operazione è:

$$G_T = F_t - S_t$$

dove  $S_t$  è l'esborso in  $t$  per acquistare il supporto e  $F_t$  è l'incasso pattuito in  $T$  e liquidato in  $T$  relativamente alla vendita a termine.

Il saldo a scadenza è quindi perfettamente noto al momento in cui si apre la posizione (al tempo  $t$ ). L'operazione ha richiesto un investimento di  $S_t$  (infatti  $F_t$  è noto oggi ma lo si otterrà a scadenza) e il suo rendimento tra  $t$  e  $T$  è:  $(F_t - S_t) / S_t$ .

---

<sup>13</sup> Si suppone inoltre, come anche nel seguito, che il mercato non abbia *frizioni*, ossia non si considerano tasse, costi di transazione, è possibile prendere a prestito o prestare allo stesso tasso e sono permesse vendite allo scoperto.

Supponendo una base annua per il calcolo del rendimento e chiamando  $t'=T-t$  la frazione di anno corrispondente alla durata della posizione, il rendimento  $\rho$  è:

$$\rho t' = (F_t - S_t)/S_t \quad (1-5.1)$$

che può essere riscritto come:

$$F_t = S_t \cdot (1 + \rho t')$$

Per non avere opportunità di arbitraggio deve valere  $\rho = r$  in quanto anche il rendimento  $\rho$  è senza rischio e, se così non fosse, si potrebbe sfruttare tale possibilità creando una posizione autofinanziata che produca un reddito.

Si supponga ad esempio che sia  $\rho > r$

In tal caso si può prendere a prestito la somma  $S_t$  e reinvestirla immediatamente nella posizione descritta prima. In  $t$  non è richiesto alcun esborso mentre il saldo a scadenza sarà  $G_T = F_t - S_t(1+rt')$ , dove  $F_t$  è l'incasso dalla vendita a termine e  $S_t(1+rt')$  è il rimborso del prestito.

Sostituendo a  $F_t$  il suo valore si ottiene:

$$G_T = F_t - S_t \cdot (1 + rt') = S_t \cdot (1 + \rho t') - S_t \cdot (1 + rt') = S_t t' \cdot (\rho - r)$$

che è sicuramente positivo nell'ipotesi  $\rho > r$ . Si è dunque realizzato un profitto certo senza alcun impegno di fondi, ovvero si è realizzato un profitto di arbitraggio. L'operazione appena descritta si chiama *cash and carry*. Se fosse  $\rho < r$ , l'operazione che si dovrebbe attuare per ottenere profitti di arbitraggio si chiama *reverse cash and carry*<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Silvana Stefani (2002-2003), "Il principio di non arbitraggio", [www.economia.unimib.it](http://www.economia.unimib.it)

## CAPITOLO II

### L'EVOLUZIONE DELLE CURVE DEI RENDIMENTI

La curva dei rendimenti (yield curve) è uno strumento fondamentale per la valutazione di una serie di strumenti e prodotti finanziari.

Studi recenti hanno riscontrato che la struttura per scadenza dei tassi di interesse, o "curva dei rendimenti", costituisce un'importante fonte di informazioni per le banche centrali ed i policy makers in generale, così come per operatori privati quali banche commerciali ed investitori. In particolare, questa consente di verificare le aspettative dei mercati riguardo a diverse variabili macroeconomiche fondamentali.

L'inclinazione della curva dei rendimenti data dalla differenza tra un tasso a lungo termine e uno a breve termine (differenziale a termine o spread), si è affermata ampiamente come anticipatore del ciclo economico.

La capacità predittiva della curva dei rendimenti si basa fondamentalmente sul fatto che incorpora informazioni circa l'andamento atteso dei tassi di interesse a breve termine futuri, il quale, a sua volta è collegato alle aspettative degli operatori di mercato riguardo all'attività economica.

Come asseriscono Haubrich e Dombrosky<sup>15</sup>, lo spread tra tassi a lungo e tassi a breve ha un potere predittivo piuttosto affidabile circa l'andamento futuro dell'attività economica.

Negli ultimi anni, la simulazione di scenari di variabili macroeconomiche è diventata una questione cruciale.

Operatori istituzionali quali: banche, assicurazioni e banche di investimento devono valutare gli scenari differenti delle variabili macroeconomiche finanziarie prima di adottare una politica monetaria o promuovere un nuovo piano pensionistico.

---

<sup>15</sup> G.Haubrich e A. Dombrosky (1996): "Predicting real growth using yield curve", Federal Reserve Bank of Cleveland

Una ricerca della Federal Reserve Bank<sup>16</sup> sottolinea il ruolo della curva dei rendimenti come predittore di una recessione in corso ed evidenzia una forte relazione tra la curva dei rendimenti, la politica monetaria e le aspettative degli investitori.

La politica monetaria e i cambiamenti nelle aspettative degli investitori influiscono infatti sulla pendenza della struttura a termine dei tassi di interesse, la quale ha un ruolo come indicatore di recessioni in corso, o come strumento predittivo dell'inflazione futura.

I tassi di interesse sono utilizzati anche per altri scopi come la valutazione dei progetti di investimento o il calcolo delle misure di rischio, per cui una buona rappresentazione dell'evoluzione della curva dei rendimenti nel lungo periodo è un fattore chiave per la decisione degli investitori.

I prezzi delle attività finanziarie basate su titoli che fruttano un interesse possono essere utilizzati per ricavare informazioni sulle aspettative dei mercati riguardo all'evoluzione futura dell'attività economica e dell'inflazione, nonché alle variazioni future dei tassi di interesse a breve termine.

Oltre a fornire queste informazioni sulle aspettative dei mercati riguardo a questi fattori, i prezzi di tali attività forniscono anche valide indicazioni sul grado di incertezza che il mercato attribuisce agli andamenti futuri dei titoli.

Sebbene tali indicatori finanziari non siano un sostituto delle valutazioni e delle previsioni elaborate in modo indipendente dalla banca centrale, le informazioni che essi forniscono sono importanti per la politica monetaria, poiché offrono alla banca centrale uno strumento con il quale confrontare le proprie valutazioni riguardo ai rischi per la stabilità dei prezzi e pertanto aiutano a definire le adeguate misure di politica monetaria con le quali far fronte a tali rischi.

Nella letteratura finanziaria ed economica sono stati proposti due differenti modelli per adattare l'evoluzione della curva dei rendimenti: il modello della

---

<sup>16</sup> Arturo Estrella (2005): "Why does the Yield curve predict output and inflation", Federal Reserve Bank of New York

struttura a termine ideato per fini di pricing (Vasicek, 1977<sup>17</sup>; Cox<sup>18</sup>, 1985; Duffie e Kan<sup>19</sup>, 1996) e modelli che tentano di fornire una descrizione statistica dell'evoluzione dei tassi nella misura oggettiva (Nelson e Siegel<sup>20</sup>, 1987; Svensson<sup>21</sup>, 1994).

Recentemente, Diebold e Li<sup>22</sup> (2006) mostrano che un approccio dinamico basato sul modello di Nelson-Siegel è in grado di riprodurre significative caratteristiche della curva dei tassi di interesse con una buona performance di previsione.

Per molti anni, dalla metà degli anni novanta in poi, il modello della struttura a termine dei tassi di interesse Europei è stato costante. Questo ha portato gli operatori del mercato e i ricercatori universitari a chiedersi in che misura la struttura a termine dei tassi di interesse è stata conforme ad uno specifico modello e se questo modello potesse essere decifrato.

L'identificazione del modello specifico consentirebbe l'apprendimento delle informazioni contenute nella curva dei rendimenti; i market makers (responsabili di mercato) e i traders avrebbero così la possibilità di interpretare facilmente tali informazioni e sfruttarle.

Tuttavia, la derivazione empirica della curva dei rendimenti (yield curve) o term structure non è semplice ed univoca a causa delle incompletezze ed imperfezioni che si riscontrano nella realtà dei mercati finanziari.

La varietà delle tecniche di estrazione e di interpolazione plausibili dei dati e i problemi di disponibilità degli stessi impediscono la derivazione di una curva dei rendimenti completamente uniforme ed efficiente.

---

<sup>17</sup>O. Vasicek (1977): "An equilibrium characterization of the term structure", Journal of financial economics

<sup>18</sup> John C. Cox (1985): "A theory of the term structure of the interest rates", Econometrica

<sup>19</sup> Duffie e Kan (1996): "A yield factor model of interest rates", Mathematical finance

<sup>20</sup> Nelson C.R., Siegel A.F. (1987): "Parsimonious Modeling of Yield Curves", the Journal of Business.

<sup>21</sup> Svensson L.E. (1994): "Estimating and interpreting forward interest rates", Swede 1992-1994 IMF Working Paper.

<sup>22</sup> Diebold F.X. and Li (2006): "Forecasting the term structure of government bond yields", journal of econometrics.

I modelli utilizzati per ricavare la curva si basano su ipotesi che non sempre vengono confermate dal mercato, per cui è accaduto e può accadere che stimino delle curve dei rendimenti non perfettamente aderenti alla realtà.

In questo capitolo verranno espone ed analizzate diverse metodologie per la derivazione della curva dei rendimenti e per l'interpolazione dei dati osservabili sul mercato, con annessi vantaggi e svantaggi associabili a ciascuno dei metodi utilizzati.

## 1. Le curve dei rendimenti

### 1.1 Definizione

La curva dei rendimenti o Struttura a termine dei tassi di interesse formalizza la relazione tra i tassi di remunerazione di mercato e il tempo rimanente alla scadenza dei titoli di debito.

La curva viene tracciata collocando la durata residua del titolo sull'asse orizzontale e la percentuale di rendimento sull'asse verticale.

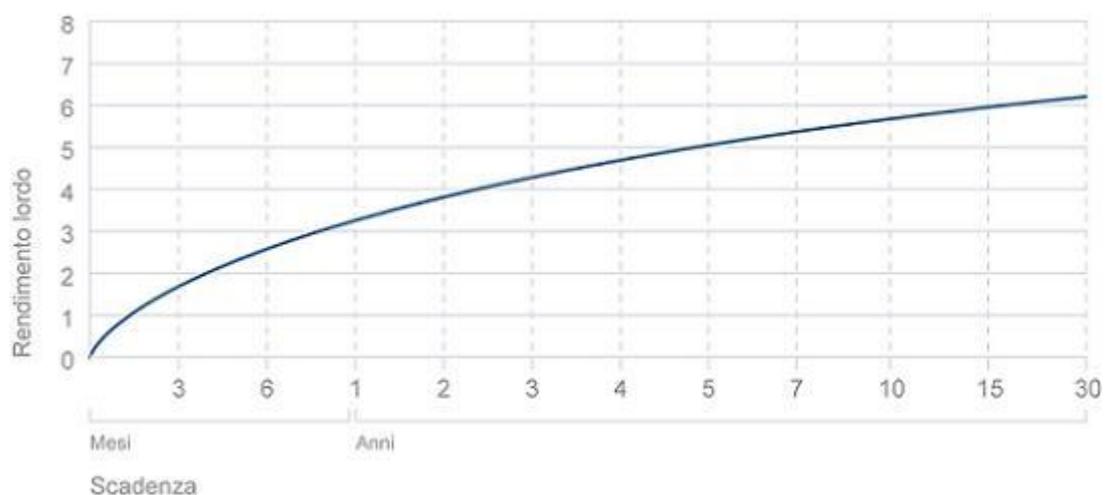


Figura 1: La curva dei rendimenti

[www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it)

La curva dei rendimenti è convenzionalmente divisibile in quattro segmenti di riferimento:

- *La curva dei rendimenti monetari*

*Ovvero il segmento che va dai tassi a un giorno (overnight) a quelli ad un anno. Le determinanti principali di questi tassi sono le banche centrali per i tassi a brevissimo e il cosiddetto mercato monetario, cioè quello degli strumenti con scadenza inferiore all'anno come: pronti contro termine, BOT (o gli equivalenti negli altri paesi come i T-Bill negli USA o i Bubill in Germania), depositi interbancari, certificati di deposito. Le obbligazioni con scadenza residua inferiore all'anno in realtà sono poco liquide e tendono ad assestarsi sui livelli di rendimento del mercato monetario.*

- *La curva dei rendimenti a breve termine*

*Questa è la parte della curva che va da 1 a 3 anni di scadenza ed ha come principale determinante i rendimenti delle obbligazioni governative. Il Tesoro Italiano emette periodicamente BTP (Buoni del tesoro Poliennali) e CTZ (strumenti simili ai BOT cioè senza cedola o zero coupon ma a scadenza 18 mesi o 2 anni).*

- *La curva dei rendimenti a medio-lungo termine*

*Vale a dire la parte della curva che va da 3 a 10 anni, la cui principale determinante sono i rendimenti delle obbligazioni governative di questa scadenza.*

*Il Tesoro Italiano emette periodicamente BTP (Buoni del tesoro Poliennali) con scadenza a 5 e 10 anni. Questo segmento è probabilmente il più liquido del mercato obbligazionario.*

- *La curva dei rendimenti a lungo termine*  
*Cioè la parte della curva che va da 10 a 30 anni, la cui principale determinante sono i rendimenti delle obbligazioni governative di questa scadenza.*  
*Il Tesoro Italiano emette periodicamente BTP (Buoni del tesoro Poliennali) con scadenza a 15 e 30 anni. Dal momento che una delle principali determinanti dei rendimenti a lunga scadenza è l'inflazione, il Tesoro Italiano emette anche titoli indicizzati all'inflazione, a scadenze solitamente di 10 o 30 anni, in modo da proteggere l'investitore da un eventuale aumento dell'inflazione.*

Due aspetti fondamentali quando si guarda la curva dei rendimenti sono il livello della curva e la forma della stessa. Il livello della curva e suoi spostamenti possono riflettere il comportamento di politica monetaria della Banca centrale. Si pensi alle manovre di *quantitative easing* e in generale di politica monetaria espansiva da parte della FED dallo scoppio della Grande Recessione del 2008. Queste mosse hanno contribuito a spostare verso il basso la curva dei rendimenti, riducendo i tassi d'interesse sulle varie scadenze.

Quanto alla forma della curva dei rendimenti, l'aspetto rilevante è la sua inclinazione, la quale è influenzata da diversi fattori: attese, premi per il rischio e segmentazione/preferenze dei mercati.

Le principali spiegazioni del suo andamento sono due: i premi per il rischio, che gli investitori richiedono per investire in obbligazioni a lungo termine rispetto a quelle a breve termine e le aspettative degli investitori sui tassi d'interesse in futuro.

Tali aspettative a loro volta riflettono ciò che il mercato si attende circa il livello dei prezzi, l'andamento dell'economia e il comportamento della Banca centrale.

Per queste ragioni l'inclinazione della curva non è di facile interpretazione.

L'inclinazione della curva dei rendimenti si ottiene come differenza tra il rendimento di un titolo a lunga scadenza e uno a breve scadenza. Ad essa viene riconosciuto il merito di essere uno dei più potenti strumenti di previsione della congiuntura economica.

In termini generali, la curva dei rendimenti subisce un appiattimento (la differenza tra tassi a lungo e tassi a breve diminuisce) quando il mercato obbligazionario prevede che ci possa essere una riduzione dei tassi d'interesse a breve futuri ed un rallentamento nella crescita economica. Viceversa, la curva dei rendimenti diventa più ripida (la differenza tra tassi a lungo e tassi a breve aumenta) quando il mercato prevede un aumento dei tassi d'interesse a breve futuri ed un miglioramento della congiuntura.

La curva dei rendimenti può assumere tre forme tipiche:

- Piatta:  
quando i tassi a breve sono circa uguali a quelli a lungo. Tale forma può segnalare un'aspettativa di rallentamento dell'attività economica. Una curva del genere è insolita e generalmente indica una fase di transizione verso un'inclinazione positiva o negativa.

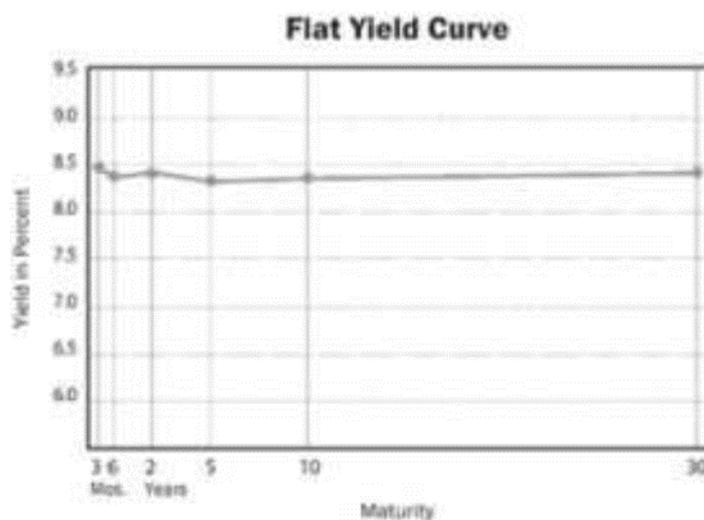


Figura 2: La curva piatta dei rendimenti

- **Inclinata negativamente:**  
 in questa situazione, all'aumentare delle scadenze, i tassi diminuiscono. I mercati finanziari si aspettano che in futuro i tassi a breve saranno più bassi. Tale forma è indicativa di una fase economica recessiva e/o deflattiva e può riflettere aspettative di politica monetaria espansiva. Generalmente questo tipo d'inclinazione non dura a lungo.

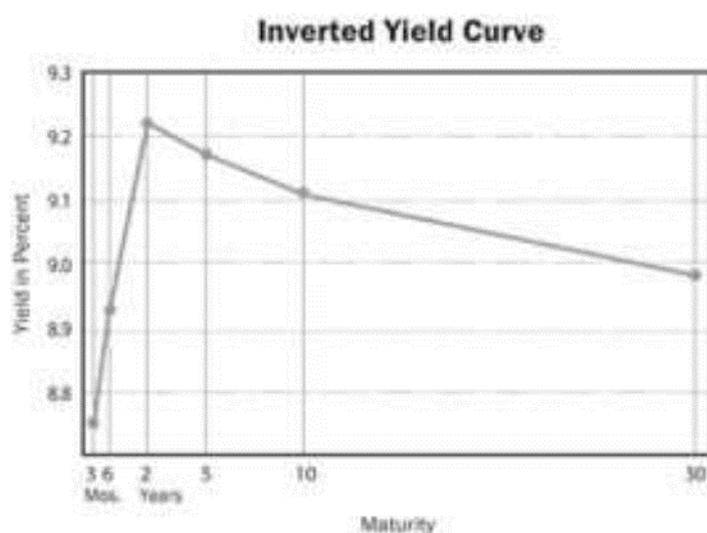


Figura 3: La curva dei rendimenti invertita

[www.bankpedia.org](http://www.bankpedia.org)

- **Inclinata positivamente:**  
 è l'inclinazione "normale" della curva per cui, all'aumentare delle scadenze, i tassi aumentano. Ciò è imputabile alla maggiore rischiosità. Questo accade perché le obbligazioni a lungo termine sono più rischiose: è facilmente intuibile che se un investitore si priva oggi di una somma, la presta e sa che potrà riceverla indietro tra molti anni, chiederà un premio più grande.  
 L'inclinazione della curva può spiegarsi anche con le aspettative dei mercati finanziari che prevedono tassi d'interesse a breve più alti in

futuro. Tale inclinazione è indicativa di una fase economica espansiva e/o inflattiva e può riflettere aspettative di politica monetaria restrittiva (aumento dei tassi d'interesse).

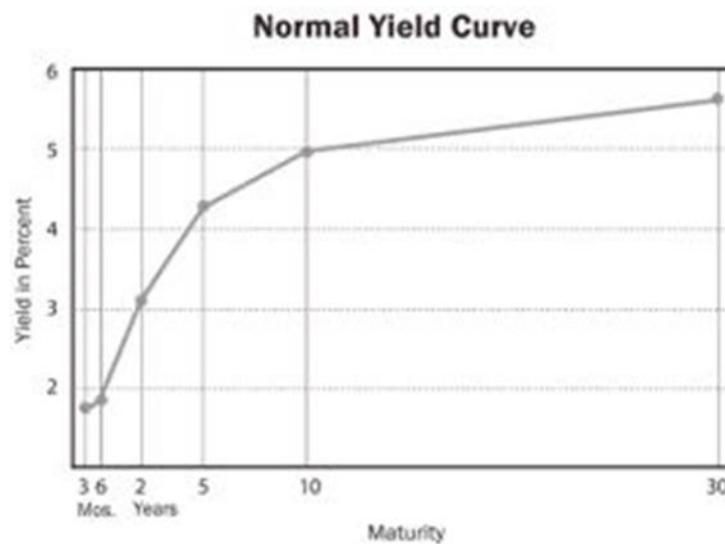


Figura 4: La curva normale dei rendimenti

[www.bankpedia.org](http://www.bankpedia.org)

### 1.2 *L'influenza delle aspettative degli operatori*

La struttura dei tassi d'interesse secondo la scadenza è una funzione che lega il tasso d'interesse ottenibile da un certo strumento finanziario alla scadenza dello strumento stesso.

A questo scopo vengono generalmente utilizzati titoli del debito pubblico, poiché essendo considerati privi di rischio d'insolvenza (in passato) possono evidenziare essenzialmente la relazione esistente tra i rendimenti a diverse scadenze.

Inoltre è frequente l'utilizzo di tassi di interesse interbancari (Libor e Euribor) per comporre curve dei rendimenti di breve periodo, generalmente fino a 12 mesi.

Le differenze tra i tassi con diversa scadenza sono solitamente rappresentate diagrammaticamente, come è rappresentato nella figura 5.

L'analisi del comportamento degli operatori è in grado di spiegare chiaramente l'impatto delle aspettative sulla struttura per scadenza dei tassi d'interesse.

Se si ipotizza ad esempio che sia atteso un incremento dei tassi di interesse (si veda ancora la figura 5), gli attuali detentori di attività finanziarie tenderanno di evitare di rimanere impegnati in titoli con rendimenti relativamente bassi; preferiranno investire solo per orizzonti temporali molto brevi, nell'attesa che alla scadenza possano nuovamente concedere prestiti a tassi d'interesse più elevati.

Per questi motivi ci sarà una tendenza all'incremento dell'offerta di fondi a breve ed una corrispondente riduzione dell'offerta di fondi a lungo termine.

Allo stesso modo però coloro che necessitano di prestiti vorranno impegnarsi all'attuale tasso d'interesse più basso, per la più lunga durata possibile, al fine di evitare il maggior costo per interessi futuro. In tal modo la domanda di fondi a lungo termine crescerà, di fronte alle riduzioni nella domanda per fondi a breve termine.

Questi cambiamenti sia nella domanda che nell'offerta di fondi per le diverse scadenze in una situazione in cui ci sono aspettative di crescita dei tassi, evidenziano un eccesso di offerta sulla domanda nel breve termine di fronte ad un eccesso di domanda sull'offerta nel lungo periodo.

L'evidente effetto di questa situazione sarà il decremento dei tassi d'interesse a breve ed il corrispondente aumento dei tassi a lungo. L'intero processo ritornerà in equilibrio quando il gap tra tassi d'interesse a breve ed a lungo sarà sufficientemente esteso da compensare le aspettative del mercato per un futuro aumento del costo del denaro.

Evidentemente, quando le aspettative sono per una futura diminuzione dei tassi, la reazione degli operatori sarà esattamente opposta alla situazione descritta precedentemente.

Le conseguenze saranno quindi l'incremento dei tassi d'interesse a breve e la corrispondente diminuzione dei tassi a lungo. Queste variazioni si rifletteranno generalmente in una curva dei rendimenti più piatta del normale.

L'insolita curva decrescente (inverted yield curve) potrà essere osservata solo se l'aspettativa del mercato è per un futuro taglio del costo del denaro molto consistente e tale aspettativa si rivela essere molto fondata. In questo caso l'influenza del rischio e della propensione alla liquidità non è sufficiente a controbilanciare questa convinzione radicata di un futuro deciso ribasso dei tassi d'interesse.

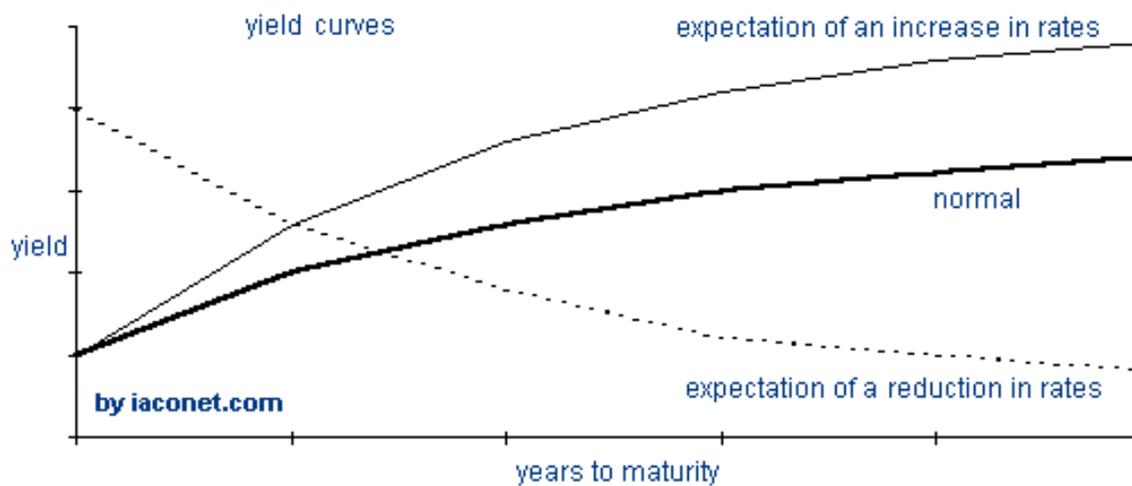


Figura 5: Le aspettative sui tassi

www.ansa.it

### *1.3 La teoria delle aspettative e la teoria della preferenza per la liquidità*

La struttura a termine dei tassi di interesse viene generalmente usata per la valutazione dei titoli obbligazionari, vale a dire titoli di debito emessi dallo Stato, dagli enti pubblici e dalle società private.

La scadenza di un titolo obbligazionario è rappresentata dalla vita residua, la struttura dei tassi di interesse secondo la scadenza (term structure of interest rates) è una funzione che lega il tasso di interesse alla sua scadenza  $t$ .

Esistono diverse teorie sulla struttura dei tassi per scadenze: le più note sono: “la teoria delle aspettative” e “la teoria della preferenza per la liquidità”<sup>23</sup>.

Secondo la teoria delle aspettative i tassi a lungo termine dipendono dalle aspettative degli investitori sui tassi a breve. Quando le aspettative sono al rialzo, gli investitori, avendo la possibilità di investire a breve per poi reinvestire dopo pochi mesi a tassi più alti, chiedono tassi maggiori per investire a lungo termine e quindi la struttura dei tassi sarà crescente.

Quando viceversa le aspettative sono al ribasso, gli investitori chiederanno tassi più alti per investire a breve, in quanto ritenuto meno vantaggioso e di conseguenza la struttura dei tassi sarà decrescente.

Riepilogando, la curva ha un’inclinazione positiva quando ci sono aspettative di rialzo dei tassi a breve, ha un’inclinazione negativa quando ci si attende un futuro calo del livello dei tassi a breve termine.

La teoria della preferenza per la liquidità invece sostiene che i rendimenti obbligazionari a breve sono normalmente inferiori rispetto ai tassi a lungo a causa della propensione alla liquidità degli operatori, i quali richiederebbero un premio per rinunciare alla disponibilità di fondi proporzionale alla durata del prestito.

---

<sup>23</sup> M.Bagella (2015), “L’euro e la politica monetaria”, [www.giappichelli.it](http://www.giappichelli.it)

Secondo la teoria delle aspettative della struttura a termine dei tassi di interesse, il tasso di un titolo a lungo termine equivale a una media del tasso corrente a breve e le aspettative dei tassi a breve futuri lungo tutta la durata del titolo. Le variabili fondamentali per queste aspettative sono quindi il tasso di inflazione atteso e il tasso di interesse reale a lungo.

Nel lungo periodo il tasso di equilibrio è determinato dalla domanda e dall'offerta di risparmio, la banca centrale non ha pressochè nessun controllo sul tasso di equilibrio reale a lungo, che invece dipende dai ritorni attesi dagli investimenti e dalle prospettive di risparmio dei singoli individui.

Al contrario la politica monetaria ha una forte influenza sul tasso a breve. In presenza di mercati efficienti lo spread riflette la relazione tra il tasso a breve termine influenzato dalla politica monetaria e il tasso reale di equilibrio a lungo termine, per cui la politica monetaria attuale ha un impatto sull'attività economica futura.

Ovviamente gli impulsi della politica monetaria non sono l'unica fonte dei cambiamenti dell'attività economica. Gli shocks alle variabili reali, che si riflettono in cambiamenti dei tassi a lungo termine, risultano essere almeno altrettanto importanti.

Dato che i tassi dei titoli a lungo termine incorporano i valori attesi di equilibrio, lo spread varia sistematicamente in corrispondenza di cambiamenti nell'attività economica, da qui deriva il potere predittivo dell'inclinazione della curva dei rendimenti.

## **2. Gli swap come benchmark**

### *2.1 Le nuove curve dei rendimenti benchmark*

Per poter guidare correttamente le scelte dei prenditori e dei datori di fondi, i mercati finanziari dovrebbero incorporare tutte le informazioni disponibili sulle future prospettive dei mutuatari e sulla volontà degli investitori di differire il consumo e di assumere rischi.

Il processo attraverso il quale i prezzi sul mercato del reddito fisso si adeguano alle nuove informazioni muovendosi verso il valore di equilibrio è più efficiente allorché gli operatori assegnano concordemente a certi strumenti una funzione di riferimento “benchmark” nel fissare il prezzo di altri titoli.

Negli ultimi decenni i mercati si sono serviti delle curve dei rendimenti dei titoli di Stato per valutare il costo del credito su differenti orizzonti temporali. Le informazioni di prezzo circa le prospettive di inflazione e le altre grandezze macroeconomiche fondamentali erano desunte principalmente dai rendimenti delle obbligazioni statali.

Tuttavia, anche taluni strumenti debitori del settore privato, e in particolare le obbligazioni garantite da ipoteca e gli swaps su tassi d’interesse, si prestano a fungere da benchmark, e di fatto essi sono stati utilizzati in misura crescente a questo fine<sup>24</sup>.

### *2.2 Il ruolo di benchmark dei titoli di Stato*

Il ruolo di benchmark dei titoli di debito pubblici deriva da vari fattori che, nel loro insieme, conferiscono a questi strumenti caratteristiche uniche nei mercati finanziari.

---

<sup>24</sup> Rassegna trimestrale BRI (2001): “The changing shape of fixed income markets, a collection of studies by Central Bank economists”, BIS papers.

In primo luogo, nella maggior parte dei Paesi industriali, lo Stato è percepito come il mutuatario più affidabile, e i titoli da esso emessi sono ritenuti sostanzialmente esenti dal rischio di insolvenza. Per tale ragione la curva dei rendimenti dei titoli di Stato è vista come la migliore proxy del tasso d'interesse nominale a rischio nullo.

In secondo luogo, il grande ammontare di debito in essere e la fungibilità delle emissioni facilitano le negoziazioni. Pertanto, i titoli di Stato, e in particolare quelli emessi per ultimi ("on-the-run"), sono in genere più liquidi di altri strumenti finanziari.

In terzo luogo, a causa dell'ingente fabbisogno di finanziamento e della loro durata nel tempo, i governi sono in grado di offrire una gamma di scadenze più vasta rispetto a molti altri prenditori, il che facilita la costruzione di curve dei rendimenti.

Infine, la presenza di efficienti mercati pronti contro termine (pct) e derivati consente agli operatori di assumere posizioni corte e lunghe conformi alle loro attese circa la futura evoluzione dei tassi d'interesse.

L'utilità di una curva dei rendimenti quale benchmark per le informazioni di prezzo sui fondamentali macroeconomici dipende dalle determinanti della struttura per scadenze.

Questa dovrebbe esprimere, per ogni dato momento, le aspettative correnti del mercato riguardo ai futuri tassi d'interesse a breve. In altre parole, nessun fattore al di fuori dei tassi a pronti attesi dovrebbe influire sistematicamente sui rendimenti a termine.

Le analisi empiriche delle curve dei titoli di Stato generalmente non confortano la teoria della struttura per scadenze basata sulle sole aspettative. I tassi a termine insiti nella curva dei rendimenti di Stato sono influenzati, oltre che dai futuri tassi a breve, anche dal variare nel tempo dei premi di liquidità.

Inoltre, i vari titoli presentano convessità disuguali, e ciò dà luogo a differenze di rendimento alle varie scadenze. Sui rendimenti paiono incidere anche altri fattori, come le condizioni di offerta e di domanda dei singoli titoli.

Ad esempio, Hattori et al. (2001)<sup>25</sup> hanno riscontrato che i rendimenti sul mercato dello yen variano a seconda dell'offerta relativa di titoli privati e pubblici. Altri studi hanno evidenziato come influisca anche l'offerta in termini assoluti.

Di conseguenza, i tassi a termine sui titoli di Stato tendono a fornire stime distorte dei futuri tassi a pronti.

Dagli anni 2000 l'importanza di fattori specifici nella determinazione dei rendimenti di Stato pare essere aumentata. La crisi finanziaria globale del 1998 ha indotto molti operatori, specie quelli attivi come market-makers, a riconsiderare le proprie strategie di gestione del rischio (CSFG, 1999)<sup>26</sup>.

In particolare, data l'accresciuta sensibilità al rischio di liquidità e alle correlazioni fra i diversi rischi, gli operatori primari e altri importanti attori del mercato obbligazionario sono divenuti meno propensi a impegnarsi in operazioni di arbitraggio.

Il tracollo di diversi hedge funds globali sulla scia della crisi del 1998 – tre dei più celebrati fondi (Long-Term Capital Management, Tiger e Quantum) sono stati liquidati o ristrutturati – è indicativo della mutata filosofia di investimento (Tsatsaronis, 2000)<sup>27</sup>.

La crisi del 1998 ha inoltre evidenziato i rischi insiti nell'impiego dei titoli di Stato e dei connessi derivati per coprire posizioni in altri valori, una prassi comune prima d'allora.

---

<sup>25</sup> Hattori, M., K. Koyama e T. Yonetani (2001): "Analysis of credit spread in Japan's corporate bond market", in *The changing shape of fixed income markets: a collection of studies by central bank economists*, BIS Papers, n. 5, Basilea, ottobre, pagg. 113-146.

<sup>26</sup> Comitato sul sistema finanziario globale (1999): *A review of financial market events in autumn 1998*, BRI, Basilea, ottobre.

<sup>27</sup> Tsatsaronis, K. (2000): "Hedge funds", in *Rassegna trimestrale BRI: Evoluzione dell'attività bancaria internazionale e del mercato finanziario internazionale*, pagg. 68-79.

La diminuzione dell'offerta di titoli di Stato ha ulteriormente ampliato l'influsso di fattori specifici sulle variazioni dei rendimenti pubblici, con pregiudizio per la liquidità. Dalla metà degli anni novanta quasi tutti i Paesi industriali, a parte il Giappone, hanno compiuto notevoli progressi verso l'equilibrio di bilancio. Ne è conseguito un sensibile calo delle emissioni di titoli pubblici, e persino un rimborso netto di debito nei paesi con avanzi fiscali.

Impiegando i differenziali di swap come misura della possibile divergenza fra i rendimenti pubblici e l'effettivo tasso d'interesse a rischio nullo, Cooper e Scholtes (2001)<sup>28</sup> hanno riscontrato che tale riduzione dell'offerta ha spinto i rendimenti dei titoli pubblici USA e britannici al di sotto del tasso d'interesse puro.

Reinhart e Sack<sup>29</sup> hanno scomposto le variazioni dei rendimenti decennali del Tesoro USA in vari fattori non osservabili direttamente, fra cui una componente specifica che coglie gli effetti di offerta e di altro tipo influenti unicamente sui titoli del Tesoro.

Questi autori concludono che tale componente è aumentata negli ultimi anni e che, di conseguenza, i rendimenti di questi titoli si discostano in misura crescente dai tassi d'interesse a rischio nullo.

In seguito ai cambiamenti nei mercati del reddito fisso indotti dagli eventi del 1998, dalle mutate condizioni di offerta e dall'introduzione dell'euro, i titoli di Stato hanno perso, come strumenti di riferimento, la posizione di primato che detenevano e non sono ormai più considerati dei tassi risk-free.

Per un certo periodo di tempo il Libor e l'Euribor erano considerati le migliori proxy dei tassi risk-free, in realtà questi tassi sono esposti al rischio di credito, il

---

<sup>28</sup> Cooper, N. e C. Scholtes (2001): "Government bond market valuations in an era of dwindling supply", in *The changing shape of fixed income markets: a collection of studies by central bank economists*, BIS Papers, n. 5, Basilea, pagg. 147-69.

<sup>29</sup> Reinhart, V. e B. Sack (2002): "The changing information content of market interest rates", in *Market functioning and central bank policy*, BIS Papers, Basilea.

quale è emerso nel 2008 con il fallimento della banca d'affari americana Lehman Brothers.

Questo episodio ha portato gli operatori finanziari a dubitare della solvibilità delle banche e ciò ha fatto schizzare in alto i tassi Libor ed Euribor.

I "market makers" hanno perciò rivolto lo sguardo altrove per trovare delle buone proxy dei tassi risk-free ed hanno individuato negli swaps degli indicatori affidabili, ad essere precisi negli Overnight indexed swaps (OIS).

### 2.3 Introduzione agli swap

I primi contratti swap risalgono agli inizi degli anni ottanta e successivamente questa tipologia di strumenti derivati si è sviluppata molto rapidamente.

Lo swap nella sua forma elementare è un accordo che prevede che due contraenti si scambino dei flussi finanziari calcolati con un criterio prestabilito a date prefissate.

È possibile distinguere varie tipologie di operazioni di swap sulla base dei flussi finanziari scambiati:

- *swap su interessi (Interest Rate Swap, IRS)*: è un contratto che prevede lo scambio periodico, tra due operatori, di flussi di cassa aventi la natura di "interesse" calcolati sulla base dei tassi di interesse predefiniti e differenti e di un capitale teorico di riferimento (nozionale);
- *swap su valute (currency swap, CS)*: è un contratto stipulato fra due controparti che si scambiano nel tempo un flusso di pagamenti denominati in due diverse valute. Si pone quale scambio a pronti di una

determinata valuta e nel contempo in uno scambio di eguale ammontare e cambio, ma di segno opposto, a una data futura prestabilita;

- *swap su commodities*: è un contratto stipulato fra due controparti che si scambiano nel tempo un flusso di pagamenti indicizzati al cambiamento di una commodity da un lato e a un tasso fisso dall'altro. Un esempio comune sono swap sul prezzo del petrolio (*Oil swaps*);
- *swap di protezione dal fallimento di un'azienda (Credit default swap, CDS)*. È un contratto di assicurazione che prevede il pagamento di un premio periodico in cambio di un pagamento di protezione nel caso di fallimento di un'azienda di riferimento.

La finalità di uno swap può essere:

- *hedging*: riduzione (fino ad annullamento) di una potenziale perdita (rischio finanziario);
- *trading*: profitto sulla variazione di prezzo (nel tempo), assumendo un rischio finanziario;
- *arbitraggio*: profitto sulla differenza di prezzo fra due mercati (in un dato tempo). Si acquista in un mercato, e si vende il derivato o il sottostante in un altro.

Lo schema dei flussi finanziari degli swap è completamente diverso da quello degli altri derivati. Lo swap non ha un prezzo di acquisto col quale la controparte

diviene proprietaria di un sottostante, o del diritto di acquistarlo o venderlo a un dato prezzo alla scadenza (come per le opzioni call e put), né a scadenza ha facoltà di esercitare o meno tale diritto con dei gradi di libertà: i flussi hanno date certe e stabilite dal contratto, di segno opposto (spesso più di due nel tempo), e quelli di almeno una controparte sono deterministici (di importo noto: es. quantità di valuta, tasso fisso, premio per un CDS).

La quantità e il valore degli swap scambiabili (e il rischio di controparte) sono meno legati al prezzo del sottostante rispetto ad altri strumenti derivati. Con un'opzione, la controparte che acquista deve avere liquidità pari al prezzo del derivato e del sottostante (se esercita l'opzione), mentre per uno swap entrambe le controparti devono essere solvibili, ma solamente per la differenza fra due tassi di interesse (spread fisso-variabile, cambio fra valute, probabilità di default per un CDS) che sono percentuali del sottostante (interessi rispetto al capitale di debito, delta cambio fra valute).

## 2.4 Interest Rate Swap

La più comune forma di swap negoziata e la più importante ai fini di questo elaborato è sicuramente lo swap su tassi di interesse (IRS: Interest Rate Swap). Graficamente possiamo rappresentare i flussi di un Interest Rate Swap con la figura 6.

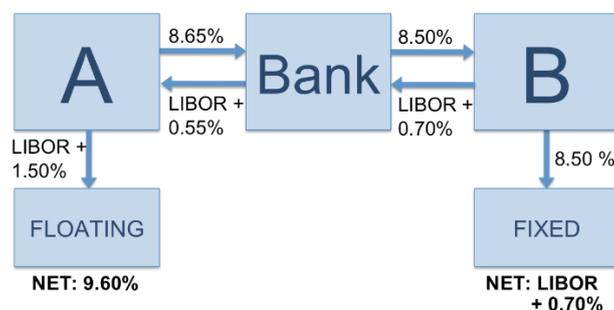


Figura 6: flussi Interest Rate Swap

[www.safehaven.com](http://www.safehaven.com)

L'Interest Rate Swap è un contratto mediante il quale una società si impegna a pagare nel tempo, il flusso netto di interessi relativo ad un'altra società, quando entrambe aprono un'operazione di prestito di segno opposto, la prima a tasso fisso la seconda a tasso variabile.

L'esecuzione del contratto si compone di elementi strutturali decisi al momento della stipula.

Il primo è sicuramente il capitale nozionale, che determina l'importo su cui vengono applicati i tassi e definisce la dimensione dell'operazione, non è oggetto di scambio, per cui viene definito figurativo.

Un secondo elemento strutturale sono le date, possiamo distinguere tra "trade date" e "fixing date", rispettivamente la data di stipula e la data di rilevazione del parametro di indicizzazione, quest'ultima indica le scadenze in cui si regolano le posizioni, che si sottintende siano relative non all'intero debito assunto ma al netto da compensare alla controparte, in questo caso si parla di netting nell'ambito di un singolo swap.

Gli obiettivi delle parti contraenti sono assolutamente speculari, la prima che ha investito denaro in un tasso garantito, vuole porre il proprio capitale su un impiego indicizzato in modo da soddisfare le proprie esigenze speculative, la seconda che ha in essere un finanziamento a tasso variabile vuole coprirsi dall'andamento futuro imprevedibile.

Gli swap sono uno strumento finanziario molto duttile che consente la facile trasformazione ed eliminazione del rischio di tasso<sup>30</sup>.

Il termine "*plain vanilla*" identifica i contratti di interest rate swap più diffusi ed utilizzati, la loro esecuzione, con il passare del tempo, è diventata sempre più semplice e comune.

Vengono utilizzati come riferimento base per la creazione e valutazione di strumenti finanziari maggiormente complessi ed innovativi. Sono dei veri e propri

---

<sup>30</sup> Hull J.C. (2003): "Opzioni, futures e altri derivati" 5a edizione, traduzione di Emilio Barone, New Jersey, Peason education.

benchmark in quanto consentono di poter dare una valutazione sia tecnica che di mercato. L'ISDA (Associazione Internazionale dei Dealers in Swap) ha creato una guida consultabile dalle controparti utile per costruire al meglio il contratto a loro congeniale e definirlo in ogni dettaglio<sup>31</sup>.

Modificando lievemente le caratteristiche dei contratti base, definiti plain vanilla, si può ottenere una vasta gamma di prodotti finanziari tutt'ora in notevole sviluppo.

Le modifiche principali avvengono in tre elementi ricorrenti: il tasso, la durata ed il capitale nozionale.

Le variazioni del tasso consistono ad esempio, nel far riferimento rispetto al lato variabile di un IRS ad un tasso diverso dai comuni Libor ed Euribor, ad esempio considerare indici o tassi del mercato monetario, oppure calcolare lo spread sul tasso variabile in maniera non usuale può risultare un elemento di variazione dei contratti standard.

Le variazioni della durata sono invece presenti nei contratti che prevedono il regolamento delle posizioni solo a scadenza, di conseguenza i flussi compensati vengono accumulati in un unico importo che assieme ad un premio per il rischio di credito viene liquidato alla fine.

Le variazioni sul capitale consistono nel modificare il capitale nozionale nel tempo, al fine di adattarsi ad operazioni che presentano un piano di rimborso del capitale, questo tipo di contratti è replicabile utilizzando più IRS a capitale costante.

---

<sup>31</sup> International Swaps and Derivatives Association (ISDA), (1999): "ISDA Credit Derivatives Definitions".

## 2.5 Overnight Indexed Swap

Gli Overnight Indexed Swap (OIS) sono una particolare categoria di Interest Rate Swap (IRS), in cui si scambia un tasso fisso con un tasso variabile ottenuto come media geometrica dei tassi overnight giornalieri<sup>32</sup>.

Gli swap su indici overnight sono divenuti particolarmente popolari sui mercati finanziari in euro quali strumenti atti a coprire e assumere posizioni.

Sul mercato dell'euro essi sono prevalentemente riferiti al tasso EONIA (Euro Over Night Index Average), una media ponderata dei tassi negoziati per i prestiti overnight non garantiti sul mercato interbancario dell'area dell'euro.

Le contrattazioni di swap sull' EONIA presentano un'alta concentrazione sulle scadenze pari o inferiori a tre mesi, e i corrispondenti tassi sono comunemente considerati il principale benchmark sul segmento a breve termine della curva dei rendimenti in euro.

Banche, fondi pensione, compagnie di assicurazione, fondi d'investimento del mercato monetario e hedge fund fanno tutti ampio ricorso a questi strumenti a fini speculativi e di copertura sui movimenti dei tassi a breve (BCE, 2001 e 2002)<sup>33</sup>.

Gli OIS sono altresì negoziati sui mercati del dollaro e di altre importanti valute, pur non essendo considerati come benchmark.

Lo status di riferimento della curva swap in euro è rispecchiato dalle prassi di quotazione delle obbligazioni societarie. Tali prassi dipendono spesso dal merito creditizio dell'emittente e dalla nazionalità dell'investitore. I titoli in euro emessi da mutuatari di qualità bancaria sono solitamente quotati in termini di spread

---

<sup>32</sup> Una differenza di rilievo tra swap "overnight index" e "plain vanilla" risiede nella posizione (o "gamba") variabile: mentre nel primo caso essa viene determinata e corrisposta unicamente alla scadenza, nel secondo è calcolata a una certa data di regolamento (quindi a priori rispetto al pagamento) e versata a quella successiva (quindi a posteriori rispetto al calcolo).

<sup>33</sup> Banca centrale europea (2001): *"The euro money market"*, Francoforte sul Meno, luglio.

Banca centrale europea (2002): *"Euro money market study (MOC)"*, Francoforte sul Meno, dicembre.

rispetto alla curva swap, mentre quelli di qualità non bancaria sotto forma di mero rendimento nominale.

L'impiego degli swap di tasso come benchmark si sta diffondendo anche sul mercato del dollaro USA (McCauley, 2001)<sup>34</sup>, anche se tale processo è meno avanzato che sul mercato dell'euro.

Gli OIS swap tendono ad avere relativamente breve durata (spesso tre mesi o meno). Tuttavia, le transazioni che durano più a lungo (5-10 anni) stanno diventando sempre più comuni.

Per gli swap di un anno o meno vi è un unico pagamento a scadenza pari alla differenza tra il tasso fisso e il tasso variabile moltiplicato per il capitale nozionale. Se il tasso fisso è maggiore del tasso variabile, vi è un pagamento di chi paga il tasso fisso a chi paga il tasso variabile, altrimenti vi è un pagamento di chi paga il tasso fluttuante a chi paga il tasso fisso.

Analogamente agli swap sul LIBOR, gli OIS a lungo termine sono divisi in tre sotto-periodi mensili e il pagamento viene effettuato alla fine di ogni sub-periodo.

Collin-Dufresne e Solnik (2001)<sup>35</sup> hanno dimostrato che il tasso swap a 5 anni per una transazione con pagamenti trimestrali è pari al tasso di 20 prestiti consecutivi a 3 mesi in cui il rating di credito della controparte è AA all'inizio di ciascun periodo.

Tale assunzione è ovviamente valida anche per gli OIS.

Sulla base di queste argomentazioni, si può concludere che il tasso OIS è un buon indicatore del tasso privo di rischio a lungo termine.

La differenza tra Libor a tre mesi e overnight indexed swap a tre mesi viene chiamato Libor-OIS spread a tre mesi, questo riflette la differenza tra il rischio di credito di un prestito a tre mesi ad una banca con una qualità di credito

---

<sup>34</sup> McCauley, R. (2001): "Spostamento dei benchmark nei mercati monetario e obbligazionario", *Rassegna trimestrale BRI*, pagg. 39-45.

<sup>35</sup> Collin-Dufresne and Bruno Solnik (2001), "On the Term Structure of Default Premia in the Swap and Libor Market," *The Journal of Finance*, 56, pagg. 1095-1115.

considerata accettabile e il rischio di credito continuamente aggiornato di prestiti giornalieri a banche con una qualità di credito considerata accettabile.

La OIS zero-curve si può ottenere in modo simile alla Libor/swap zero-curve. Se la curva è richiesta per maturity superiori alla scadenza del OIS più lungo, l'approccio naturale è supporre che il differenziale tra la curva OIS e la curva Libor / swap è pari a quello che si riscontra per la maturity più lunga della curva OIS per cui esistono dati affidabili.

Sottraendo questo spread alla Libor/swap zero-curve si può ottenere la continuazione della OIS zero-curve dopo la maturity per la quale non è possibile ottenere una misura affidabile del tasso OIS.

In questo modo, si può creare una struttura a termine dei tassi di interesse risk free.

Un approccio alternativo per estendere la curva OIS zero è utilizzare i tassi basis swap, dove viene scambiato il tasso Libor a tre mesi con il tasso medio di fondi federali (federal funds) maggiorato di uno spread; tali swap hanno scadenze che arrivano fino ai 30 anni negli Stati Uniti<sup>36</sup>.

## *2.6 Gli Interest rates swap possibili benchmark alternativi*

Storicamente gli swaps si caratterizzavano per un rischio di credito elevato e condizioni di liquidità mediocri al di là delle scadenze ravvicinate. A partire dalla metà degli anni novanta la costituzione di sussidiarie con rating AAA specializzate in strumenti derivati e l'adozione di varie tecniche di attenuazione del rischio, fra

---

<sup>36</sup> Tali tipi di swap si basano su una media aritmetica e non geometrica dei tassi osservabili nei "federal funds" per il periodo considerato, per cui è necessario un aggiustamento della convexity, come espresso da Takada (2011): "Valuation of arithmetic average of Fed Funds Rates and Construction of the US Dollar Swap Yield Curve".

cui il deposito di margini e di collaterale, hanno dissipato molti dei timori circa il rischio creditizio di controparte (Remolona et al., 1996)<sup>37</sup>.

Anche il premio di liquidità insito negli swaps su tassi d'interesse è andato calando, e la rapida espansione di questi contratti nell'ultima parte degli anni novanta si è accompagnata a un restringimento degli spreads "denaro-lettera" e a una crescita in spessore dei mercati.

La liquidità continua a essere massima nel segmento a breve, di fatto, gli swaps riferiti al tasso medio overnight sull'euro (EONIA) rappresentano ora il comparto più liquido del mercato monetario dell'euro (BCE, 2001)<sup>38</sup>.

La gamma di operatori che fanno ricorso agli swaps è in continua espansione, sicuramente i pionieri sono state le banche commerciali e di investimento che hanno usato tali strumenti finanziari derivati come curve di rendimento benchmark.

Poiché le loro passività sono per lo più basate su un tasso interbancario a breve, come il Libor o l'Euribor, le banche tendono a parametrare i prezzi in riferimento alla curva swap, che incorpora le aspettative circa l'evoluzione futura di tali tassi. Anche gli investitori finali e i grandi mutuatari con portafogli e programmi di finanziamento in diverse valute fanno sempre più spesso ricorso ai differenziali di rendimento sugli swaps, anziché sui titoli di Stato.

Mentre le diversità fra i mercati nazionali dei titoli pubblici rendono più difficili i raffronti delle curve dei rendimenti, gli swaps consentono di comparare in modo abbastanza semplice i rendimenti e i costi di finanziamento nei diversi mercati.

Persino i governi stanno iniziando a utilizzare gli swaps per gestire le proprie esposizioni.

La tendenza a preferire gli swaps è particolarmente pronunciata nel mercato dell'euro, dove gli investitori si sono rapidamente resi conto dei vantaggi che

---

<sup>37</sup> Remolona, E. M., W. Bassett e I. S. Geoum (1996): "Risk management by structured derivative product companies", *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, n. 2, pagg. 17-38.

<sup>38</sup> Banca centrale europea (2001): *The euro money market*, BCE, Francoforte.

comporta il riferirsi a una sola curva di swap in euro, anziché scegliere fra 12 curve dei rendimenti pubblici.

D'altro canto, un fattore che riduce l'attrattiva della curva dei tassi swap come benchmark è la struttura del mercato. La contrattazione nel segmento degli swaps su tassi d'interesse è appannaggio di pochi operatori di qualità primaria. Pertanto, l'attuale segmento degli swaps opera probabilmente con costi di transazione più elevati e rimane meno liquido rispetto a un mercato in cui gli swaps fossero negoziati in borse organizzate (McCauley, 2001)<sup>39</sup>.

Sebbene siano stati compiuti passi in questa direzione, per il momento i contratti scambiati in borsa rappresentano una quota trascurabile del mercato globale degli swaps.

Inoltre, essendo riferiti a tassi su depositi interbancari non garantiti, i tassi swap restano sensibili ai cambiamenti nella qualità creditizia delle banche. Ad esempio, il basso merito di credito delle banche giapponesi aumenta l'incertezza circa l'evoluzione futura dei tassi swap in yen, scoraggiandone l'impiego come benchmark.

## *2.7 Il vantaggio della curva swap*

Il mercato degli swap offre una serie di vantaggi. Non è praticamente sottoposto a nessuna normativa governativa, il che rende possibili comparazioni in mercati differenti; mentre alcune emissioni sovrane offrono una varietà di benefici fiscali per gli investitori nazionali ed esteri, rendendo le analisi comparative delle curve - basate su titoli governativi - tra i vari Paesi abbastanza incoerente.

Il mercato degli swap è un mercato sempre più liquido, con bassi spread domanda-offerta e un'ampia gamma di scadenze.

---

<sup>39</sup> McCauley, R. N. (2001): "Spostamento dei benchmark nei mercati monetario e obbligazionario", in *Rassegna trimestrale BRI: Evoluzione dell'attività bancaria internazionale e del mercato finanziario internazionale*, marzo, pagg. 42-49.

L'offerta di swap dipende solamente dal numero di controparti che desiderano effettuare transazioni in un dato momento, non è richiesta alcuna posizione in un'attività sottostante.

Considerata la liquidità e la grande dimensione del mercato degli swap, nuovi swap con scadenze standard sono rilasciati quotidianamente. La fungibilità degli swap previene inoltre il trading di swap con cash flow simili a tassi sostanzialmente diversi, contribuendo all'efficienza del mercato.

Il debito pubblico è considerato privo di rischio, tuttavia, i governi hanno differente rischio di credito a seconda del Paese.

Il rischio di credito è incorporato nella curva swap in quanto gli swap si basano sul bilancio del settore bancario. Inoltre, i tassi swap sono altamente correlati con i rendimenti su altri titoli a reddito fisso, anche in condizioni di mercato avverse, rendendo gli swap uno strumento di copertura nettamente migliore delle emissioni governative.

I prezzi swap sono spesso quotati in base allo spread sulle emissioni del governo e quindi costituiscono un indicatore del rischio di credito del settore bancario.

Lo spread swap è la differenza tra il tasso fisso di un contratto swap su tassi di interesse e il rendimento di un titolo di Stato con un tenore equivalente.

Il tasso fisso swap è il tasso che eguaglia a zero il valore attuale dello swap stesso.

Considerare la curva swap come spread sulle emissioni governative può essere inaffidabile, in quanto vi è un disallineamento delle scadenze tra le varie emissioni governative e le corrispondenti emissioni di swap. I tassi swap dovrebbero essere espressi direttamente nel mercato degli swap.

Esprimere il tasso swap come spread sulle emissioni governative è comune soprattutto nel mercato degli swap anglosassone.

L'impedimento più importante alla liquidità del mercato swap è l'esposizione al rischio di credito della controparte, in quanto si tratta di un contratto bilaterale.

Il rischio è la perdita potenziale nell'attuale posizione in swap in caso di

insolvenza della controparte. Pertanto, le parti che effettuano una transazione in swap devono essere a conoscenza della qualità creditizia della loro controparte. In sintesi, la struttura a termine dei tassi swap offre diversi vantaggi rispetto alle curve basate sui titoli governativi, ed è un ottimo strumento sia di pricing che di copertura.

Le correlazioni tra i Titoli di Stato e gli altri prodotti a reddito fisso sono diminuite, rendendo la struttura a termine dei tassi swap uno strumento sempre più efficiente di copertura e pricing (Theobald e Singh, 2000)<sup>40</sup>.

Con il declino dell'offerta di Titoli di Stato e le alte correlazioni tra credit spreads e swap spreads, la struttura a termine swap è una potenziale alternativa alla struttura a termine basata sui Titoli di Stato come benchmark per misurare il valore relativo di differenti classi di debito.

### **3. La costruzione della curva dei rendimenti swap**

La curva swap raffigura la relazione tra la struttura a termine e i tassi swap.

La curva swap è costituita dai tassi di interesse di mercato osservati, derivati da strumenti di mercato che rappresentano gli strumenti più liquidi e dominanti per i rispettivi orizzonti temporali, bootstrappati e combinati con un algoritmo di interpolazione<sup>41</sup>, i metodi di interpolazione più usati sono: l'interpolazione lineare e l'interpolazione cubic spline.

Nel derivare la curva swap, gli input dovrebbero coprire la struttura a termine completa (cioè a breve, medio, e lungo termine). Gli input devono essere osservabili, liquidi, e con simili proprietà di credito. L'utilizzo di una adeguata metodologia di interpolazione, consente la formazione di una curva dei rendimenti completa e coerente che replica i dati di mercato osservati.

---

<sup>40</sup> Theobald, D. and G. Singh (2000) "The Outlook for Swaps as a Hedge Vehicle", JP Morgan, New York.

<sup>41</sup> Castellani, G., De Felice, M. & Moriconi, F. (2005), "Manuale di finanza I: Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni" Bologna, Il Mulino.

Una volta derivata la struttura a termine swap completa, uno strumento finanziario è quotato sul mercato estraendo il tasso appropriato dalla curva ricavata.

La tecnica per la costruzione della struttura a termine swap utilizzata dagli operatori di mercato consiste nel dividere la curva in tre segmenti: la parte a breve della struttura a termine swap è derivata utilizzando i tassi sui depositi interbancari; la zona centrale della curva swap utilizzando sia i contratti Forward rate agreements (FRAs) che i contratti interest rate futures; la parte a lungo termine della struttura a termine è costruita utilizzando i tassi swap presenti sul mercato degli swap stessi.

Quindi si può affermare che una combinazione di diversi tassi di interesse costituisce la base per la costruzione della curva dei rendimenti swap.

Quando il mercato future o forward è illiquido, inefficiente o inesistente per alcune maturity, si è soliti utilizzare i tassi sui depositi interbancari a più lungo termine e affidarsi all'interpolazione.

D'altra parte, per valute come il dollaro americano, dove il mercato future e forward è liquido ed esiste anche per le scadenze a più lungo termine, si utilizzano i contratti futures o forward rate agreement con scadenze più lunghe.

### *3.1 Il segmento a breve della curva swap*

Il segmento a breve della curva swap (da 0 a 3 mesi), si basa sui tassi di deposito overnight a un mese, due mesi e tre mesi. I tassi di deposito a breve termine sono tassi zero coupon e hanno bisogno di essere convertiti alla frequenza di capitalizzazione e secondo la convenzione del conteggio del giorno della valuta di base del tasso swap.

Lo zero rate swap ( $r_c$ ) in capitalizzazione composta continua si ottiene come:

$$r_c = \frac{t_y}{t_m} \cdot \ln\left(1 + \frac{r_d}{\frac{t_y}{t_m}}\right) \quad (2-3.1)$$

dove  $r_d$  rappresenta il tasso di deposito osservato sul mercato,  $t_m$  rappresenta il numero dei giorni a scadenza e  $t_y$  rappresenta il numero di giorni nell'anno come specificato in base alla convenzione per il conteggio dei giorni.

### 3.2 L'area centrale della curva swap

L'area centrale della curva swap (fino a due anni), è derivata utilizzando sia i tassi FRA che i contratti futures su tassi di interesse.

In generale i FRAs sono preferibili, tuttavia questi per la maggior parte delle valute, non sono osservabili o soffrono di mancanza di liquidità. Inoltre, i contratti futures essendo negoziati in borsa, sono più uniformi, liquidi e trasparenti.

Estrarre i tassi forward dai tassi future richiede però un adattamento della convexity<sup>42</sup>. L'aggiustamento è dovuto alle diverse caratteristiche della convexity dei contratti futures e forward<sup>43</sup>.

Gli interest rates future trimestrali composti corretti per la convexity sono convertiti in zero rates composti in capitalizzazione continua come segue:

si converte il tasso future trimestrale composto in un tasso analogo in capitalizzazione continua utilizzando l'equazione (2-3.1), dove  $t_m$  rappresenta il "time to maturity" del future (differenza in giorni tra due contratti futures consecutivi). Il future rate composto in capitalizzazione continua viene quindi convertito in uno zero rate composto in capitalizzazione continua utilizzando la seguente trasformazione:

---

<sup>42</sup> La convexity è una misura della volatilità delle obbligazioni e si riferisce alla variazione della duration di un titolo a reddito fisso al variare del suo rendimento. Corrisponde alla derivata seconda negativa del rapporto prezzo/rendimento dell'obbligazione.

<sup>43</sup> Kirkos G. and D. Novak (1997): "Convexity Conundrums"

$$r_2 = \frac{r_f \cdot (t_2 - t_1) + r_1 t_1}{t_2}$$

dove  $r_f$  è il tasso future composto in capitalizzazione continua per il periodo tra  $t_1$  e  $t_2$ , mentre  $r_1$  e  $r_2$  sono gli zero rates in capitalizzazione continua continua riferiti alle maturity  $t_1$  e  $t_2$  rispettivamente.

### 3.3 Il segmento a lungo termine della curva swap

Il segmento a lungo termine della curva swap (fino a dieci anni) è derivato direttamente dai tassi cedolari degli swap osservabili sul mercato. Ovvero interest rate swap di generici plain vanilla in cui i tassi fissi sono scambiati con tassi di interesse variabili.

I tassi fissi swap sono quotati alla pari e di solito sono capitalizzati semestralmente. Il metodo del bootstrap viene utilizzato per ricavare i tassi di interesse zero-coupon a partire dai tassi swap nominali.

A partire dal primo tasso swap, dati tutti gli zero rates composti continuamente per i cash flow delle cedole prima della maturity, lo zero rate swap composto continuamente alla scadenza dello swap è bootstrappato come segue:

$$r_t = - \frac{\ln\left[\frac{100 - \sum_{i=m}^{T-m} \left(\frac{c}{m} e^{-r_i t_i}\right)}{100 + \frac{c}{m}}\right]}{T}$$

dove  $m$  è la frequenza del pagamento swap per anno,  $c$  è il coupon per anno, che è uguale al tasso di swap nozionale, e  $r_i$  rappresenta lo zero rate composto continuamente al tempo  $t_i$ .

Il tasso di interesse bootstrappato,  $r_t$ , è lo zero rate composto continuamente al tempo  $T$ .

Procedendo in modo ricorsivo con tutti i tassi swap osservati e interpolando i dati osservati sul mercato si ottiene il segmento finale completo della curva swap<sup>44</sup>.

La figura 7 illustra le curve dei rendimenti derivate dai tassi swap relative all' area Euro, Dollaro e Sterlina Inglese.

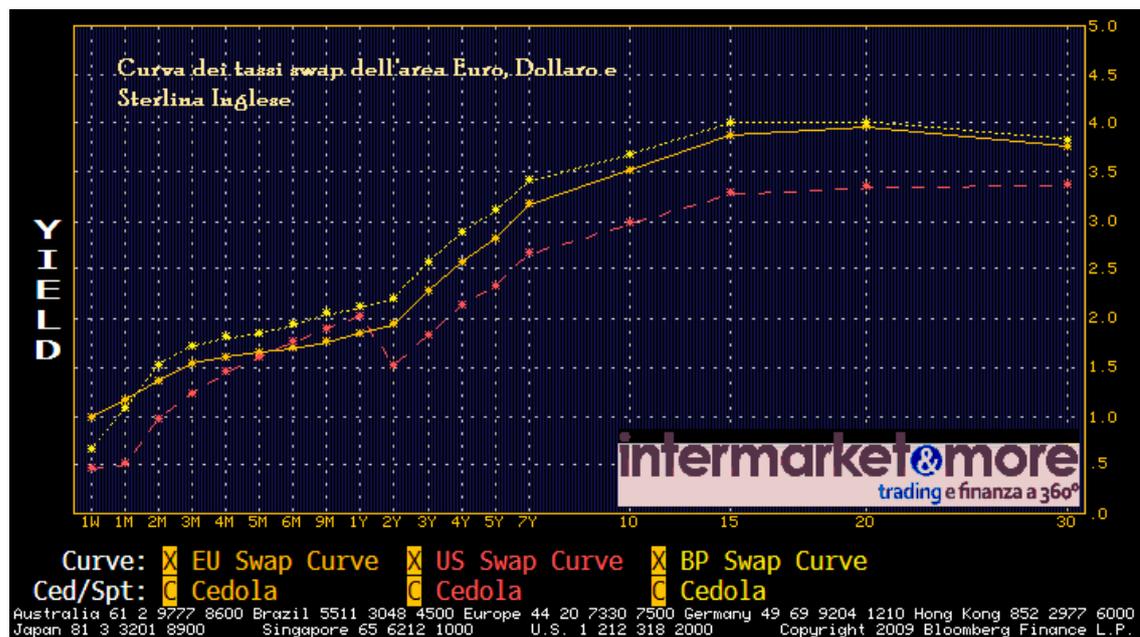


Figura 7: Curva dei tassi swap

[www.intermarketetandmore.finanza.com](http://www.intermarketetandmore.finanza.com)

<sup>44</sup>Ametrano F.M. e Bianchetti M. (2009): "Bootstrapping the illiquidity".  
Uri Ron (2000): "A practical guide to swap curve construction", Bank of Canada.  
Clarke J. (2010): "Bootstrapping a Libor Curve Off an OIS Curve", Edu Risk International.

### *3.4 Algoritmi di interpolazione*

Non esiste un unico metodo per collegare i tassi di interesse su depositi, interest rate future e interest rate swap e costruire così la struttura completa termine swap; tuttavia, vi sono una serie di convenzioni fondamentali che devono essere seguite, al fine di garantire la validità della curva.

La curva dei rendimenti derivata dovrebbe essere coerente e fedele a tutti i dati di mercato osservati. Tuttavia, a volte le correzioni apportate alla curva stessa possono causare l'eliminazione di importanti informazioni circa i prezzi di mercato.

Questa è la principale critica che viene mossa alle avanzate tecniche di interpolazione, come ad esempio le funzioni di Nelson e Siegel (1987)<sup>45</sup> e Svensson(1994)<sup>46</sup>. Queste funzioni utilizzano i dati di mercato in modo impreciso, il che è appropriato per l'estrazione di aspettative o analisi comparative tra i vari Paesi, ma non è appropriato per il pricing degli strumenti di mercato.

La convenzione del mercato è stata quella di utilizzare una serie di tecniche di interpolazione allo scopo di generare una struttura completa a termine che approssimi al meglio i dati osservati sul mercato.

I più diffusi algoritmi di interpolazione utilizzati nella pratica per creare una struttura a termine swap sono: "linear interpolation" e "cubic splines".

#### *3.4.1 Interpolazione lineare*

Tutti i punti ricavati dai dati di mercato osservati sono collegati da una linea retta per formare una struttura completa a termine. Il valore dei nuovi punti ricavati dai dati viene assegnato in base alla loro posizione lungo una linea retta tracciata tra i punti precedentemente stabiliti.

---

<sup>45</sup> Nelson C.R. and A.F. Siegel (1987): "Parsimonious Modelling of YieldCurves", Journal of Business 60.

<sup>46</sup> Svensson, L.E. (1994): "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates", CEPR Discussion Paper 1051.

L'interpolazione lineare è semplice da implementare e replica bene i tassi di interesse di mercato. Tuttavia, tende a produrre dei problemi nelle zone di transizione in cui la curva dei rendimenti cambia inclinazione.

Pertanto, l'interpolazione lineare è inadeguata per le curve di rendimento che cambiano spesso inclinazione e mostrano una struttura a termine con curvatura significativa.

Il processo di interpolazione lineare può essere espresso come:

$$R(t) = R(t_i) + \left[ \frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} \right] \cdot [R(t_{i+1}) - R(t_i)] \quad (2.3-2)$$

dove  $R(t)$  rappresenta il tasso di interesse corrispondente alla scadenza  $t$ , con  $t_i < t < t_{i+1}$ .

### 3.4.2 Cubic spline interpolation

L'uso di funzioni polinomiali che passano attraverso i punti ricavati dai dati di mercato osservati creano una curva dei rendimenti lineare e levigata che replica bene le osservazioni ed evita oscillazioni.

È possibile usare sia un singolo polinomio di grado  $n-1$  (dove  $n$  è il numero di osservazioni), o mettere insieme polinomi di ordine inferiore (ad esempio, quadratici, cubici).

Il vantaggio di utilizzare più polinomi di ordine inferiore (splines) è che i gradi in più di libertà possono essere utilizzati per imporre vincoli aggiuntivi in modo tale da garantire una stima più precisa della curva.

Per costruire un insieme di splines cubiche, si considera la funzione  $R_i(t)$  che denota il "polinomio cubico" associato al segmento  $(t_i, t_{i+1})$ :

$$R_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + r_i$$

I coefficienti della funzione “cubic spline” definiti nell'intervallo  $[t; T]$  possono essere ottenuti imponendo i seguenti vincoli:

$$a_i(t_{i+1} - t_i)^3 + b_i(t_{i+1} - t_i)^2 + c_i(t_{i+1} - t_i)^1 = r_{i+1} - r_i$$

$$3a_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + c_{i-1} - c_i = 0$$

$$6a_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + 2b_{i-1} - 2b_i = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$6a_{n-1}(t_n - t_{n-1}) + 2b_{n-1} = 0$$

Il primo set di  $n-1$  vincoli richiedono che la funzione spline sia perfettamente collegata nei punti di nodo. La seconda e la terza serie di  $2n-2$  vincoli richiedono che alla derivata del primo e del secondo vincolo corrispondano splines adiacenti.

Infine, gli ultimi due vincoli sono relativi al punto finale e stabiliscono che la derivata sia uguale a zero ad entrambe le estremità.

Il sistema algebrico lineare consiste di  $3n-3$  equazioni e  $3n-3$  incognite che possono essere determinate per produrre un'ottimale spline cubica (Press, 1998)<sup>47</sup>.

---

<sup>47</sup> Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. 1998. Numerical Recipes in C, 2nd edition. NY: Cambridge University Press.

### *3.5 Overview*

La struttura completa a termine si ottiene unendo le differenti parti della struttura a termine swap con la metodologia di interpolazione prescelta. Il risultato finale è una struttura a termine swap completa che è uno strumento fondamentale per la quotazione sul mercato dei titoli obbligazionari, nella misurazione del valore delle relative classi di debito, e nel determinare le aspettative sui tassi di interesse.

La zero term structure è usata per prezzare diversi strumenti finanziari del mercato valutando e attualizzando i loro cash flow futuri in modo da ottenere il loro valore attuale.

La costruzione della struttura a termine swap non è una pratica uniforme, la varietà di strumenti finanziari considerati e le diverse tecniche di derivazione si combinano per formare una varietà di plausibili strutture a termine swap.

I problemi più importanti sorgono attorno alle aree di transizione comprese tra gli input, in particolare la zona di transizione intorno alla scadenza dei due anni mostra una mancanza di linearità e un accenno di oscillazione.

Tra le diverse possibili soluzioni vi è l'utilizzo di strutture a termine diverse a seconda delle applicazioni e gli adeguamenti al set dei tassi utilizzati.

In generale, le istituzioni tendono ad adottare un approccio proprio, tuttavia, le troppe modifiche della struttura a termine possono essere controproducenti, perché eliminano preziose informazioni per il pricing, incorporate nella struttura stessa.

In generale, sia l'interpolazione lineare a tratti che quella cubic spline generano simili strutture a termine swap.

In particolare, analizzando le aree relativamente instabili della struttura a termine, l'interpolazione cubic spline si dimostra superiore a quella lineare nel replicare la curvatura della struttura a termine e permette di ottenere una curva più levigata.

Tuttavia, l'interpolazione cubic spline può produrre strutture a termine forward incoerenti o non plausibili.

Trattandosi di stime della struttura a termine swap, è molto difficile determinare con precisione quale stima è più indicata come benchmark.

In ogni caso, la struttura a termine swap offre molti vantaggi rispetto alla struttura a termine derivata dai Titoli di Stato.

Con le emissioni governative su indici obbligazionari in calo e la volatilità dello spread, la struttura a termine swap sta diventando sempre più influente (De Stefano 2000)<sup>48</sup>.

Date tali tendenze nei mercati finanziari, l'importanza della struttura a termine swap come benchmark per prezzare i titoli obbligazionari è destinata ad aumentare.

---

<sup>48</sup> DeStefano, M.T. (2000): "Government Sponsored Enterprises Challenged.", Standard and Poor's Commentary, New York.

## CAPITOLO III

### LA COSTRUZIONE DELLA SPOT RATE CURVE

Il presente capitolo si propone di suggerire una metodologia per interpolare i dati riferiti alle determinazioni effettivamente osservate sul mercato allo scopo di ottenere la struttura per scadenza dei tassi, la quale consente di prezzare un titolo di qualsivoglia durata. Infatti, nell'ipotesi di poter lavorare in mercati completi, ovvero in mercati che offrono titoli zero coupon per ciascuna scadenza possibile, la struttura per scadenza dei tassi di interesse può rappresentarsi, non come una successione di punti, ma come una curva continua, con ovvie ripercussioni sul calcolo dei rendimenti in qualsiasi epoca.

La costruzione della suddetta curva è soggetta ad alcune difficoltà, una delle quali è l'assenza di titoli zero coupon per scadenze superiori ai due anni<sup>49</sup>. Tale problema può essere agevolmente risolto utilizzando la tecnica del bootstrap, illustrata brevemente nel paragrafo seguente.

Tuttavia, il problema operativo maggiore è la non completezza dei mercati: a causa di questa caratteristica dei mercati non è possibile calcolare i tassi di interesse intermedi tra due rilevazioni successive, non esistendo alcun titolo che abbia tale maturity. Le funzioni spline di tipo naturale cubico utilizzate per l'interpolazione dei dati permettono la risoluzione di tale problema, queste infatti consentono di ottenere una curva continua e dunque di poter determinare il rendimento di mercato per ciascuna possibile scadenza. Inoltre l'interpolazione mediante funzioni spline del tipo naturale cubico permette di stimare i tassi futuri a pronti.

---

<sup>49</sup> In Italia, infatti, i titoli zero coupon possono avere scadenze a 3,6,12 mesi (Buoni Ordinari del Tesoro, BOT) e 24 mesi (Certificati del Tesoro Zero Coupon, CTZ).

## 1. Bootstrap

La procedura del bootstrap consente di estrarre da ciascun titolo del tipo coupon bond un tasso di interesse zero coupon in maniera sequenziale. Il titolo con cedola viene quindi convertito in un portafoglio di titoli privi di cedole, in modo da poter calcolare il tasso zero coupon che ci interessa.

Siano disponibili sul mercato i prezzi dei seguenti titoli, tutti con valore nominale di rimborso  $C=100,00\text{€}$ :

$P^{ZC}(t_0, t_1)$ : prezzo di un titolo zero coupon quotato all'epoca  $t_0$ , con maturity  $t_1$ ;

$P^{ZC}(t_0, t_2)$ : prezzo di un titolo zero coupon quotato all'epoca  $t_0$ , con maturity  $t_2$ ;

$P^C(t_0, t_3)$ : prezzo di un titolo con cedole quotato all'epoca  $t_0$ , con maturity  $t_3$ , le cedole  $\check{c} = C (j(m)/m)$  sono in scadenza alle epoche  $t_1, t_2, t_3$ ,  $j(m)$  è il tasso cedolare nominale annuo convertibile  $m$  volte l'anno.

Come è noto, è possibile ricavare immediatamente<sup>50</sup> i due tassi a pronti<sup>51</sup> zero coupon riferiti ai primi due titoli; il tasso di interesse su base periodale<sup>52</sup> relativo al titolo zero coupon quotato all'epoca  $t_0$  e con maturity  $t_1$ ,  $\bar{i}(t_0, t_1)$  è rappresentato nella (3-1.1):

$$\bar{i}(t_0, t_1) = \left[ \frac{C}{P^{ZC}(t_0, t_1)} \right]^{\frac{1}{t_1 - t_0}} \quad (3-1.1)$$

---

<sup>50</sup> Si veda, ad esempio, Bortot, P., Magnani, U., Olivieri, G., Rossi, F. A., Torrigiani, M., "Matematica Finanziaria", II edizione, Monduzzi Editore, Bologna, 1998.

<sup>51</sup> In questa trattazione ci riferiamo a tassi di interesse nel discreto. Nella pratica è utilizzato il tasso istantaneo di interesse, per le indubbe proprietà matematiche di cui esso gode: il ragionamento comunque non cambia nella sostanza, sia che ci riferiamo a tassi nel discreto sia che essi siano definiti nel continuo.

<sup>52</sup> Quindi se  $t_s - t_{s-1} = 1$  per ogni  $s \in [0, n]$ , si lavora con una equiripartizione temporale e il tasso riferito al primo titolo è direttamente su base periodale (annua se ogni scadenza è annua).

Ripetendo il calcolo per il titolo zero coupon quotato all'epoca  $t_0$  e con maturity  $t_2$  si ottiene il tasso su base annua  $i(t_0, t_2)$ , rappresentato nella (3-1.2):

$$\bar{i}(t_0, t_2) = \left[ \frac{C}{P^{ZC}(t_0, t_2)} \right]^{\frac{1}{t_2 - t_0}} \quad (3-1.2)$$

Possiamo scrivere la relazione di equilibrio per l'ipotesi di assenza di arbitraggi che descrive il prezzo del titolo con cedole spiegato in precedenza:

$$P^C(t_0, t_3) = \frac{\check{c}}{[1 + \bar{i}(t_0, t_1)]^{t_1 - t_0}} + \frac{\check{c}}{[1 + \bar{i}(t_0, t_2)]^{t_2 - t_0}} + \frac{\check{c} + C}{[1 + \bar{i}(t_0, t_3)]^{t_3 - t_0}} \quad (3-1.3)$$

Nella (3-1.3) l'unica incognita è il tasso *zero coupon*  $\bar{i}(t_0, t_3)$  che risulta dunque:

$$\bar{i}(t_0, t_3) = \left\{ \frac{\check{c} + C}{P^C(t_0, t_3) - \check{c} \cdot \sum_{s=1}^2 [1 + \bar{i}(t_0, t_s)]^{-(t_s - t_0)}} \right\}^{\frac{t}{t_3 - t_0}} \quad (3-1.4)$$

Da un punto di vista finanziario, se riscriviamo la (3-1.3) nella forma (3-1.3'), determiniamo il prezzo (termine a sinistra dell'uguaglianza) di uno *zero coupon* bond "sintetico", quotato all'epoca  $t_0$ , con *maturity*  $t_3$ , e valore nominale di rimborso ( $\check{c} + C$ ):

$$P^C(t_0, t_3) - \frac{\check{c}}{[1 + \bar{i}(t_0, t_1)]^{t_1 - t_0}} - \frac{\check{c}}{[1 + \bar{i}(t_0, t_2)]^{t_2 - t_0}} = \frac{\check{c} + C}{[1 + \bar{i}(t_0, t_3)]^{t_3 - t_0}} \quad (3-1.3')$$

A questo punto, noto il prezzo di un *coupon bond* quotato all'epoca  $t_0$  e con maturity  $t_4$ , le cui cedole siano  $\check{c}$ , pagate alle scadenze  $t_1, t_2, t_3$  e  $t_4$ , il tasso *zero coupon*  $\bar{i}(t_0, t_4)$  si ottiene riapplicando la procedura appena descritta, e quindi risulta:

$$\bar{i}(t_0, t_4) = \left\{ \frac{\check{c}r + C}{P^C(t_0, t_4) - \check{c}r \times \sum_{s=1}^3 [1 + \bar{i}(t_0, t_s)]^{-(t_s - t_0)}} \right\}^{\frac{t}{t_4 - t_0}} - 1$$

Si procede quindi iterativamente fino a calcolare tutti i tassi *zero coupon* in base ai dati di mercato, ottenendo la successione dei tassi per tutte le scadenze  $\{t_s\}$ , con  $s=1, 2, \dots, n$ ;

indicata con  $\check{c}^k$  la cedola relativa al titolo con prezzo  $P^C(t_0, t_k)$ , quotato all'epoca  $t_0$  e con *maturity*  $t_k$ , il tasso *zero coupon* che si ricava mediante il *bootstrap* è:

$$\bar{i}(t_0, t_k) = \left\{ \frac{\check{c}^k + C}{P^C(t_0, t_k) - \check{c}^k \times \sum_{s=1}^{k-1} [1 + \bar{i}(t_0, t_s)]^{-(t_s - t_0)}} \right\}^{\frac{t}{t_k - t_0}} - 1$$

Un primo problema evidente che si riscontra è il calcolo del fattore di sconto relativo alle cedole dei titoli con uno scadenzario  $\{\tau_s\}$  diverso da  $\{t_s\}$ . In pratica si procede semplicemente "unendo" i punti, ovvero calcolando il valore richiesto tramite una semplice interpolazione lineare tra i due tassi più vicini a quello incognito. In altri termini, per ogni epoca  $t_s < \tau_s < t_{s+1}$ , si calcola il tasso  $\bar{i}(t_0, \tau_s)$  in base alla (3-1.5):

$$\bar{i}(t_0, \tau_s) = \bar{i}(t_0, t_{s+1}) \frac{t_{s+1} - \tau_s}{t_{s+1} - t_s} + \bar{i}(t_0, t_s) \frac{\tau_s - t_s}{t_{s+1} - t_s} \quad (3-1.5)$$

La successione dei tassi ottenuta può essere rappresentata graficamente come una linea "spezzata", che potrebbe non corrispondere esattamente all'andamento reale dei tassi di mercato. Inoltre, la curva ottenuta con questa metodologia, non è "levigata" e non è dotata di derivate continue in ogni punto.

Un ulteriore problema è che, nel caso si abbiano due o più titoli con la stessa *maturity*, scegliendone solo uno per costruire la curva dei tassi a pronti, si perde parte dell'informazione contenuta nel titolo "scartato".

Nel paragrafo successivo si esaminerà una metodologia per "estrarre" dai prezzi di tutti i titoli disponibili una *spot rate curve*, che abbia tutte le caratteristiche di regolarità, di continuità e di derivabilità ritenute soddisfacenti.

## 2. L'interpolazione mediante funzioni spline

L'interpolazione<sup>53</sup> di dati statistici riveste un'importanza fondamentale nella matematica applicata, e consiste nell'individuazione di una opportuna funzione, che possa ben approssimare i dati di partenza.

Quando si interpolano i dati relativi alla successione degli *spot rate* riferiti a *zero coupon* ci troviamo in un caso in cui la funzione interpolante non è nota, ma di questa conosciamo alcuni valori su un insieme di punti e vogliamo avere indicazioni sul comportamento della funzione in altri punti. L'obiettivo è quindi presentare un modello rappresentativo della curva dei tassi di interesse a pronti *zero coupon*.

Storicamente le funzioni interpolanti più note e utilizzate sono state i polinomi, perché di semplice valutazione, facilmente sommabili, integrabili e derivabili. L'interpolazione tramite polinomi, può però presentare problemi di forti

---

<sup>53</sup> Parliamo di interpolazione e non di perequazione perché i dati statistici di partenza (serie dei tassi rilevata o calcolata mediante bootstrap) si presuppone esatta e non affetta da errori di rilevazione, dunque si vuole che la curva interpolante passi esattamente per i dati di partenza.

oscillazioni tra i dati. Per limitare tale oscillazione tra i dati si scelgono usualmente polinomi di interpolazione di pochi dati.

Nel caso in cui si è di fronte a problemi d'interpolazione con un numero elevato di punti, la funzione interpolante è cercata in una classe più ampia, che includa quella dei polinomi. Si tratta di scegliere opportune funzioni interpolanti per ciascun intervallo di dati (funzioni che eseguono l'interpolazione per intervalli), definite su di un numero finito e contiguo d'intervalli, in ognuno dei quali coincidono con un polinomio.

In particolare, se le funzioni interpolanti per ciascun tratto sono di grado  $n$ , si avranno  $m$  polinomi di grado  $n$ , uno per ciascun intervallo in cui ripartiamo la massa dei dati di partenza.

Utilizzando più polinomi interpolanti si riesce a limitare l'oscillazione della funzione che si avrebbe con un unico polinomio interpolante, ottenendo così una curva più "levigata"<sup>54</sup> rispetto a polinomi di grado elevato, anche se la funzione ottenuta può non essere derivabile nei punti di interpolazione.

A tale problema si può ovviare utilizzando una particolare classe di funzioni polinomiali di grado  $n$ : le funzioni *spline* di grado  $n$ , continue e derivabili fino all'ordine  $n-1$ . Le più impiegate nelle applicazioni sono le *spline naturali* cubiche<sup>55</sup>.

Una funzione *spline* è una funzione ottenuta unendo una sequenza di archi di polinomi, scelti in modo che le derivate di ordine minore o uguale al grado del polinomio usato meno uno, siano continue ovunque, anche nei punti in cui gli archi si incontrano, i cosiddetti nodi.

---

<sup>54</sup> Sul concetto di levigatezza e di aderenza ai dati di partenza si veda: Del Chiaro, A., *Tavole di Eliminazione*, Edizioni Scientifiche Einaudi, 1958.

<sup>55</sup> L'interpolazione mediante funzioni polinomiali a tratti di grado  $s$  passante per gli  $s+1$  punti soddisfa la condizione di levigatezza solo localmente, nel senso che ciascun polinomio è continuo con derivate di primo e secondo ordine continue (in ipotesi di  $s \geq 2$ ), ma nei punti in cui si cambia polinomio ciò può non essere vero. Le funzioni *spline*, di contro, assicurano la continuità e la derivabilità in ciascun punto della funzione stessa.

Per costruzione, quindi, le funzioni *spline* risultano continue a tratti, dunque estremamente versatili per replicare l'andamento di dati soggetti ad andamenti diversi in funzione della loro ascissa. In particolare, dato un intervallo chiuso  $[a;b]$  in cui sono rilevati i dati di partenza, ordinati in modo che risulti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

una funzione *spline*,  $s(x)$ , di grado  $k$ , definita sull'intervallo  $[a;b]$ , con ascisse nei nodi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è una funzione tale che, per  $i \in [0;n]$  e  $x \in [x_i; x_{i+1}]$ , è un polinomio in  $x$  di grado non maggiore di  $k$ :

$$s(x) = p_i(x)$$

I singoli polinomi  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  si uniscono in modo tale che  $s(x)$  sia differenziabile  $(k-1)$  volte nell'intervallo  $(a;b)$ . Tale condizione distingue le funzioni *spline* dalle funzioni polinomiali a tratti<sup>56</sup>.

Per costruire una funzione *spline*, si può procedere nel seguente modo. Sia  $p_0(x)$  un polinomio di grado  $k$  definito sull'intervallo  $[x_0, x_1]$ , e con  $(k+1)$  parametri. Il valore della funzione e le sue  $(k-1)$  derivate prime sono definite in prossimità del nodo  $x_1$ . Le derivate del polinomio  $p_0(x)$ , per definizione, devono essere anche le derivate del secondo polinomio,  $p_1(x)$ , sempre calcolate nel punto nodale  $x_1$ . Inserendo un ulteriore parametro nel polinomio  $p_1(x)$  ed aggiungendolo all'espressione ottenuta di  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$  risulta completamente definito sull'intervallo  $[x_1, x_2]$ . Ripetendo il procedimento per ciascun sottointervallo di  $[a; b]$  si ottiene una funzione *spline* di grado  $k$ , con  $n$  nodi e  $(k+n+1)$  parametri. Quindi una *spline* cubica definita su  $n$  nodi è caratterizzata da  $(n+4)$  parametri.

---

<sup>56</sup> Tra i nodi la condizione di differenziabilità è automaticamente assicurata da ciascun polinomio definito.

Una funzione *spline* di grado dispari  $(2k-1)$  con ascisse nei nodi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è detta naturale se in ciascuno dei due intervalli estremi  $(-\infty; x_1)$  e  $(x_n; +\infty)$  la funzione è data da due polinomi, non necessariamente uguali, di grado minore o uguale a  $k-1$ . Dunque una funzione *spline* è naturale cubica se le derivate di primo e secondo ordine calcolate nei punti estremi del dominio sono pari a zero. Applicando il procedimento descritto per la costruzione di una generica funzione *spline* ad una *spline* naturale cubica, definiamo i nodi nei punti di coordinate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  con  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  e  $k=2$ . Nell'intervallo  $(-\infty; x_1)$ , per definizione, la *spline* naturale cubica è un polinomio di grado uno (quindi rappresentabile tramite una retta su un sistema di assi cartesiani) la cui equazione è:

$$y = a_0 + a_1x \quad x < x_1 \quad (3-2.1)$$

Nel punto  $(x_1; y_1)$  il polinomio è di grado tre, continuo in  $x_1$  e con derivate del primo e del secondo ordine nel punto  $x_1$  continue. Aggiungendo alla (3-2.1) un termine di terzo grado si ottiene un polinomio con le caratteristiche richieste:

$$y = a_0 + a_1x + b_1(x - x_1)^3 \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3-2.2)$$

Quindi la funzione *spline* naturale cubica può definirsi come

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ (x - x_1)^3 & x \geq x_1 \end{cases} \quad (3-2.3)$$

Combinando la (3-2.1), la (3-2.2) e la (3-2.3) otteniamo:

$$y = a_0 + a_1x + b_1\Phi_1(x) \quad (3-2.4)$$

Nel successivo intervallo  $[x_2; x_3]$  il polinomio è di terzo grado ma differente dal precedente, con la condizione che entrambi abbiano le stesse derivate prime e seconde nel punto  $x_2$  : aggiungendo il polinomio  $b_2 (x-x_2)^3$  alla (3-2.4) otteniamo la spline naturale sull'intervallo  $(x_2; x_3)$ . Posto

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & x < x_2 \\ (x - x_2)^3 & x \geq x_2 \end{cases}$$

otteniamo

$$y = a_0 + a_1x + b_1\phi(x) + b_2\phi_2(x)$$

Il procedimento viene dunque ripetuto iterativamente per tutti gli  $n$  nodi prescelti, ottenendo la (3-2.5), valida su tutto l'intervallo  $(-\infty; +\infty)$ :

$$y = a_0 + a_1x + \sum_{j=1}^n b_j \phi_j(x) \quad (3-2.5)$$

con

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & x < x_j \\ (x - x_j)^3 & x \geq x_j \end{cases}$$

Per  $x > x_n$  la (3-2.5) deve essere nuovamente una retta, quindi i termini di secondo e terzo grado nella (3-2.6) devono essere nulli:

$$y = \sum_{j=1}^n b_j (x^3 - 3x^2x_j + 3xx_j^2 - x_j^3) \quad (3-2.6)$$

Imponiamo dunque la seguente condizione:

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n b_j x_j = 0$$

pertanto:

$$b_{n-1} = -\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-2} b_j (x_n - x_j)$$

$$b_n = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-2} b_j (x_{n-1} - x_j)$$

Da cui la *spline* cubica naturale nell'intero intervallo  $(-\infty; +\infty)$  è

$$y = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^{n-2} b_j \phi_j(x) \quad (3-2.7)$$

con

$$\phi_j(x) = \phi_j - \frac{x_n - x_j}{x_n - x_{n-1}} \phi_{n-1}(x) + \frac{x_{n-1} - x_j}{x_n - x_{n-1}} \phi_n(x)$$

Per determinare gli  $n$  parametri  $(a_0, a_1, b_1, \dots, b_{n-2})$  presenti nella (3-2.7) si possono usare tecniche di regressione lineare multipla, in particolare, il metodo dei minimi quadrati, che si pone l'obiettivo di rendere minima la somma dei quadrati degli scarti fra valori teorici e valori effettivi.

La scelta dei  $k$  nodi è libera, non devono infatti essere equidistanti, né esiste una regola per sceglierne la posizione. E' però vincolante il loro numero: se  $k$  è maggiore del numero dei dati ( $n$ ) il sistema non ammette soluzioni, quindi  $k$  deve essere sempre minore o uguale a  $n$ ; infine, se  $k$  è esattamente pari ad  $n$  si

ottiene una funzione *spline* perfettamente aderente ai dati di partenza, in tal caso però la funzione ottenuta non rispetta il requisito della levigatezza.

Da un punto di vista pratico, si posizionano i  $k$  nodi in prossimità di un cambiamento della curvatura della funzione che si vuole ottenere.

Effettuata l'interpolazione, si deve procedere con i test sulla levigatezza e sull'aderenza ai dati di partenza (bontà dell'adattamento effettuato). Nella prima categoria rientra l'analisi sulla gradualità delle differenze prime e seconde,  $\Delta y(x)$  e  $\Delta^2 y(x)$ , che devono mostrare un'evoluzione regolare. Solo in seguito si analizzano le differenze del terzo ordine  $\Delta^3 y(x)$ , che devono essere sufficientemente piccole. Se, ad esempio, si vogliono confrontare due interpolazioni mediante due diverse funzioni *spline* effettuate, con nodi diversi, si procede a calcolare la somma delle differenze del terzo ordine per entrambe le interpolazioni, scegliendo come più soddisfacente quella con  $\sum_{x=1}^n |\Delta^3 y(x)|$  minore.

Tra i test per la verifica dell'aderenza dei dati interpolati ai dati di partenza, il più utilizzato è il test del  $X^2$ . In tale test si vuole valutare la seguente ipotesi nulla: "i dati osservati hanno un andamento pari a quello descritto dai dati interpolati". Indichiamo con  $\delta(x)$  la variabile aleatoria "prezzo unitario" fra le durate  $x$  e  $x + 1$ . Per ipotesi tale variabile si distribuisce normalmente, con media  $E(x)$  e varianza  $\delta^2(x)$ . La statistica

$$\check{y} = \sum_{x=x_1}^{x_n} \frac{(\delta(x) - E(x))^2}{\delta^2(x)}$$

segue la distribuzione del  $X^2$  con  $n$  gradi di libertà. Fissato un livello di confidenza  $1-\alpha$  (ad esempio al 95%), l'ipotesi nulla sarà rifiutata se i valori osservati  $\Theta(x)$  sono tali che la determinazione

$$y = \sum_{x=x_1}^{x_n} \frac{(\Theta(x) - E(x))^2}{\delta^2(x)}$$

della statistica  $\hat{y}$  supera una data soglia  $\check{y}$  :

$$prob(\hat{y} > \check{y}) = a$$

Non si accetta dunque l'ipotesi nulla se il valore empirico del  $X^2$  cade nella regione di rifiuto, ovvero è maggiore del valore critico del  $X^2$ , determinato in relazione al livello di significatività prescelto.

Seppure molto utilizzato, il test del  $X^2$  può non rilevare alcune discrepanze tra i dati di partenza e quelli interpolati, quali l'esistenza di scostamenti eccessivamente elevati per alcune ascisse, controbilanciate da scostamenti elevati ma di segno opposto; la presenza di scarti cumulati alti; infine, un eccessivo raggruppamento di scarti dello stesso segno. Per tali motivi si utilizzano anche altri test, quali gli scarti individuali standardizzati, gli scarti assoluti, il test sui cambiamenti di segno degli scarti. I primi due test menzionati si basano sul confronto tra gli scarti (standardizzati o assoluti) delle variabili osservate e quelli di una normale standardizzata. I test sui cambiamenti di segno degli scarti sono molteplici, citiamo qui il test binomiale di cambiamento dei segni. In base a tale test, sotto l'ipotesi nulla che i dati osservati si distribuiscano esattamente come quelli interpolati, c'è la stessa probabilità che i segni degli scarti successivi siano uguali o contrari: pertanto il numero di cambiamenti di segno in una sequenza di  $n$  osservazioni è una variabile binomiale con parametri  $(n-1)$  e  $\frac{1}{2}$ . Si rifiuta l'interpolazione se il numero effettivo di cambiamenti di segno  $N$  cade nella regione inferiore della distribuzione binomiale con parametri  $(n-1; 1/2)$ , definita ad un livello di confidenza del 95%.

Infine, una misura dell'aderenza ai dati di partenza è fornita dall'indice  $R^2$ , dato dal quadrato del coefficiente di correlazione tra la serie dei dati di partenza e quella ottenuta con la curva interpolante. Ricordando che  $0 \leq R^2 \leq 1$  e che tanto

più  $R^2$  tende ad uno e tanto maggiore è l'adattamento della funzione interpolante ai dati di partenza, si accetta l'interpolazione se  $R^2 > 0,5$ .

### 3. Funzioni spline e costruzione della spot rate curve

Chiamiamo  $P^k(t_0, t_s)$  il prezzo del k-esimo titolo sul mercato (a prescindere se si tratti di un titolo con cedole o privo di cedole) quotato all'epoca  $t_0$  e con *maturity*  $t_s$ . A fronte del pagamento del prezzo l'acquirente si assicura un vettore  $x_{t_s}^{-k}$  di importi in entrata<sup>57</sup>. I singoli fattori di sconto possiamo indicarli come funzione della data di quotazione del titolo  $t_0$ , dell'epoca di scadenza  $t_s$  del titolo stesso e di una serie di parametri indicati nel vettore riga  $\mathfrak{b}$ :

$$\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

quindi il generico fattore di attualizzazione è indicato nella (3-3.1):

$$v(t_0, t_s, \mathfrak{b}) \tag{3-3.1}$$

Si deve pertanto procedere alla scelta della forma funzionale della (3-3.1) e alla stima dei parametri del vettore  $\mathfrak{b}$ . In base alla (3-3.1) il prezzo teorico di un generico titolo, è dato dalla (3-3.2):

$$P^k(t_0, t_n) = \sum_{s=1}^n x_{t_s}^{-k} v(t_0, t_s, \mathfrak{b}) \tag{3-3.2}$$

Da un punto di vista statistico, per misurare lo scostamento della funzione prescelta per l'interpolazione rispetto ai dati di partenza, si utilizza il vettore dei residui, ovvero quel vettore  $\check{r}$  con componenti date dalla differenza tra i dati

---

<sup>57</sup> Quindi se il titolo è privo di cedole  $x_{t_s}^{-k}$  è pari a zero per  $t_s < t_n$  e pari a C per  $t_s = t_n$ .

osservati ( $P^k(t_0, t_n)$ ) e quelli stimati con la funzione interpolante ( $\dot{P}^k(t_0, t_n)$ ). L'obiettivo consiste nel minimizzare il vettore dei resti al quadrato, si parla infatti di problema dei minimi quadrati:

$$\min \sum_{k=1}^N [\dot{P}^k(t_0, t_s) - P^k(t_0, t_s)]^2 \quad (3-3.3)$$

Nel caso in cui la funzione  $\dot{P}^k(t_0, t_n)$  è un polinomio di grado  $n-1$ , l'imposizione delle condizioni necessarie di minimo (derivate parziali prime rispetto ai parametri pari a zero) alla funzione (3-3.3), porta alla risoluzione del sistema di equazioni (3-3.4), che fornisce i coefficienti ( $b_1, b_2, \dots, b_m$ ) del polinomio che realizza la migliore approssimazione del modello prescelto<sup>58</sup>.

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k^{m-1} \\ \sum_{k=1}^N \dot{P}_k & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k^2 & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k^m \\ \sum_{k=1}^N \dot{P}_k & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k^m & \sum_{k=1}^N \dot{P}_k^{2m-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N P_k \\ \sum_{k=1}^N P_k \\ \sum_{k=1}^N P_k \end{bmatrix} \quad (3-3.4)$$

Si deve quindi procedere alla scelta della funzione  $v(\cdot)$  più adatta a rappresentare il fenomeno dell'attualizzazione. Sicuramente è più agevole scegliere una funzione che assicuri la traslabilità della legge di attualizzazione, in modo tale che  $v(t_0, t_s) = v(t_s - t_0)$ . Si vuole inoltre una funzione continua e derivabile (così da poter calcolare anche l'intensità istantanea di interesse della legge stessa); infine, per le note condizioni sulle leggi di attualizzazione, la funzione deve essere monotona non crescente e deve risultare pari ad uno per durate nulle.

Posto  $\tau = t_s - t_0$ , per quanto detto possiamo scrivere:

$$v(\tau, \mathbf{b}) = a_0 + \sum_{j=1}^m b_j f_j(\tau) \quad (3-3.5)$$

---

<sup>58</sup> Sotto la ovvia condizione che la matrice dei coefficienti A della (3-3.4) abbia determinante diverso da zero.

con

a)  $a_0=1$

b)  $f_j(0)=0$

Pertanto la (3-3.5) diviene semplicemente:

$$v(\tau, \mathbf{b}) = 1 + \sum_{j=1}^m b_j f_j(\tau) \quad (3-3.6)$$

La (3-3.6) è la funzione da stimare in relazione agli  $m$  parametri  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Se scegliamo di interpolare i dati tramite le funzioni *spline* del tipo naturale cubico, ovvero una funzione del tipo:

$$y = a_0 + a_1 \cdot \tau + \sum_{j=1}^{m-2} b_j \phi_j(\tau) \quad (3-3.7)$$

con  $m$  numero dei nodi e dei parametri ( $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots, b_{m-2}$ ) da stimare. Le  $\phi_j$  sono specificate nella (3-3.8), in cui con  $\epsilon_s$ , con  $s=1,2,\dots, m$  si sono indicati i nodi prescelti:

$$\phi_j(\tau) = \beta_0(\tau) - \frac{\epsilon_m - \epsilon_j}{\epsilon_m - \epsilon_{m-1}} \cdot \beta_{m-1}(\tau) + \frac{\epsilon_{m-1} - \epsilon_j}{\epsilon_m - \epsilon_{m-1}} \cdot \beta_m(\tau) \quad (3-3.8)$$

Il problema centrale è la specifica degli  $m$  nodi, da collocare dove la curva dei dati "grezzi" mostra un cambiamento della curvatura (punti di flesso) e immediatamente prima e dopo i punti estremanti della curva (punti di massimo e di minimo). Solitamente il numero dei nodi e dei parametri è pari a  $K=N^{(1/2)}$ , infatti se scegliamo  $k$  troppo "grande" arriviamo ad una funzione che segue esattamente i dati di partenza, senza fornire alcun aggiustamento; viceversa un

valore di  $k$  troppo piccolo può generare una funzione che si discosta eccessivamente dai dati di partenza.

#### **4. L'evoluzione del mercato**

Anche la spot rate curve, così come per la curva dei rendimenti dei Titoli di Stato qualche anno prima, ha perso la sua funzione di riferimento sul mercato in seguito ad una crisi finanziaria che ha apportato delle novità sul mercato. La crisi finanziaria dell'estate 2007 ha evidenziato chiaramente i limiti delle ipotesi che venivano normalmente effettuate nei metodi tradizionali di pricing e di risk management degli strumenti finanziari su tassi d'interesse. Infatti, i rischi di liquidità e di controparte, fino ad allora completamente trascurati, hanno acquisito una dimensione tale da provocare un forte impatto nella valutazione degli strumenti finanziari derivati.

Inoltre, nonostante la crisi si sia in parte stabilizzata e tali divergenze dei prezzi si siano ridotte, continuano tuttavia a persistere a dei livelli molto più elevati rispetto a quelli pre-crisi.

Il mercato ha quindi conservato in memoria le cause e gli effetti della crisi e pertanto i prezzi di mercato tengono ormai conto dei rischi di liquidità e di controparte.

A partire dall'estate 2007 sono state constatate divergenze significative tra le quotazioni dei tassi di interesse del mercato interbancario (i tassi Libor, Euribor, Eonia e Federal Bunds) e quelle tra i tassi FRA e i tassi forwards indotti da due depositi consecutivi.

Inoltre le quotazioni di mercato degli spread dei contratti Basis Swaps, che secondo il quadro tradizionale di pricing dovrebbero essere nulli o comunque molto vicini a zero, sono ormai molto lontane dal poter essere trascurate.

In aggiunta a tutto ciò, l'uso sempre più frequente di contratti con collaterale, col l'obiettivo di gestire il rischio di controparte, hanno indotto la comunità

finanziaria a considerare l'idea di abbandonare la teoria classica di pricing dei prodotti su tassi di interesse e le relazioni d'assenza d'opportunità d'arbitraggio comunemente accettate ed utilizzate e di orientarsi piuttosto verso un nuovo quadro teorico che possa inglobare e giustificare le diverse osservazioni constatate sul mercato durante la crisi e che perdurano. In particolare, sembra che una sola ed unica curva non sia più sufficiente per descrivere correttamente il mercato dei prodotti su tassi d'interesse. Attualmente le nuove pratiche del mercato consistono nel considerare una segmentazione del mercato stesso. E' necessario distinguere da una parte la curva per l'attualizzazione dei flussi futuri (curva discount) dalla curva per il calcolo dei tassi forward (curva forecast), e dall'altra bisogna distinguere le curve forecast per ogni tenore, in tal senso ci si indirizza verso una descrizione di tipo multi-curve.

In tal contesto il pricing dei prodotti derivati su tassi di interesse cambia completamente e le relazioni d'arbitraggio normalmente accettate che derivano dalla teoria classica debbono essere abbandonate, per far spazio ad un quadro totalmente nuovo e più generale<sup>59</sup>.

#### *4.1 Divergenze tra tassi*

I tassi Euribor e Eonia hanno sempre mostrato la stessa tendenza a qualche basis point di differenza, ragione per cui essi venivano considerati entrambi come tassi d'interesse senza rischio. Tuttavia, nell'Agosto 2007 un innalzamento improvviso dei tassi di swap Euribor e un decremento dei tassi di swap Eonia hanno comportato un ingrandimento dello spread tra di loro, fino a toccare più di cento basis points l'Ottobre dell'anno successivo, cosa che coincide esattamente con il fallimento di Lehman Brothers.

---

<sup>59</sup> Bianchetti M., Carlicchi M., Interest Rate After The Credit Crunch: Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR, The Capco Journal of Financial Transformation, Applied Finance (32): 35-48, 2011

In seguito, tale scarto è diminuito sensibilmente e si è stabilizzato a circa cinquanta basis points nel caso dell'Euribor 6M vs Eonia 6M, ma ad ogni modo esso non è mai più ridisceso ai valori precedenti la crisi.

Uno swap Eonia<sup>60</sup> è un contratto swap con gamba fissa contro una gamba variabile, che è indicizzata al tasso overnight (si ha un fixing giornaliero e il tasso è una media ponderata dei depositi overnight negoziati lo stesso giorno). Vista la durata molto corta alla quale il tasso Eonia fa riferimento, si può dire che esso ingloba un rischio di credito e di liquidità talmente piccoli da poter essere trascurati; pertanto è possibile considerarlo come un buon candidato per essere scelto come tasso d'interesse senza rischio.

Il tasso Euribor<sup>61</sup> è il tasso di riferimento per le transazioni effettuate nel mercato OTC della zona Euro. Esso rappresenta il tasso offerto nel sistema interbancario tra le banche di prima categoria e viene pubblicato quotidianamente da Thomson Reuters alle ore 11:00 (ora italiana) a partire dai dati provenienti dalle banche che hanno il più grande volume di attività nel mercato monetario della zona Euro. L'Euribor è una media arrotondata al terzo decimale dei tassi ai quali le banche selezionate sarebbero pronte a remunerare i depositi ragionevolmente significativi, escludendo dal calcolo i 15 più alti e più bassi. I tassi Euribor riflettono quindi il costo medio di finanziamento delle banche nel mercato interbancario, per una serie di date di scadenza fissate. Quando la solidità del sistema finanziario mondiale è stata messa in discussione durante la crisi, l'importante aumento dei rischi di credito e di liquidità si è ripercosso sui tassi Euribor.

La durata molto breve sulla quale il tasso Eonia è definito ci autorizza a non prendere in considerazione i rischi di liquidità e di credito in esso contenuti, in modo tale da poter essere considerato come il migliore candidato del mercato per rappresentare il tasso d'interesse senza rischio.

---

<sup>60</sup> Euro Overnight Index Average

<sup>61</sup> Euro interbank offered rate

L'esplosione dello *spread*, iniziata nell'Agosto 2007, è dovuta essenzialmente al diverso rischio di credito e di liquidità implicito nei due tassi e soprattutto il *daily tenor* dei tassi Eonia OIS che rende il rischio trascurabile, lo stesso non vale per i tassi Euribor Deposit.

Nonostante l'aumento della liquidità, soprattutto grazie ai numerosi interventi delle banche centrali e dei governi, tale scarto è ancora presente ed è quindi indispensabile prenderlo in considerazione.

Lo stesso tipo di osservazioni fatte nel caso del tasso swap Euribor e del tasso swap Eonia si possono estendere al caso del tasso Euribor FRA e al tasso Forward Eonia.

Il FRA3x6 (Forward Rate Agreement) è un contratto che comincia in data spot, cioè oggi più due giorni lavorativi nella zona Euro, con maturità 6 mesi e una gamba variabile indicizzata al tasso forward tra 3 e 6 mesi contro una gamba fissa. Si definisce tasso FRA3x6 il valore del tasso che rende il contratto FRA equo. Se si osservano le dinamiche delle quotazioni di mercato dei tassi FRA e dei tassi forward ottenuti a partire da due depositi Eonia consecutivi, è possibile constatare in questo caso anche la presenza di una divergenza importante tra di essi a partire dal mese di Agosto 2007, con un picco nel mese di Ottobre 2008, cosa che corrisponde perfettamente, come precisato precedentemente, con il fallimento di Lehman Brothers. Inoltre, come per lo spread Euribor versus Eonia, si vede bene che anche quello tra i tassi FRA e forward si è stabilizzato ad un livello che è molto diverso da zero.

Un altro fenomeno totalmente improvviso che è stato osservato a partire da Agosto 2007, è l'esplosione sorprendente delle quotazioni degli spreads dei Basis Swaps.

Un Basis Swap è un contratto in cui ci sono due flussi indicizzati su due tassi Euribor di tenori diversi. Esso è quotato sul mercato come la differenza dei due tassi di swap. La teoria classica assicura che bisogna osservare uno spread nullo o comunque molto piccolo. Tuttavia, durante la crisi gli spreads quotati erano

tutt'altro che trascurabili, con un picco raggiunto nell'Ottobre 2008. E' possibile spiegare tale fenomeno grazie all'aumento dei rischi di liquidità e di credito, ma anche grazie al fatto che i tassi Euribor sottostanti con tenori diversi portano con se dei rischi diversi. Infatti, con la crisi ci si è resi conto del fatto che gli attori del mercato preferiscono molto di più ricevere dei pagamenti con una frequenza più alta indicizzata sul tasso Euribor di tenore più basso e pagare un premio per la differenza. Pertanto, in un Basis Swap la gamba variabile indicizzata sul tasso Euribor con tenore più alto deve inglobare un premio per il rischio più elevato rispetto a quello inglobato nella gamba variabile indicizzata sul tenore più basso. Ne risulta quindi uno spread tra i tassi d'equilibrio corrispondenti.

#### *4.2 Collateralizzazione ed Eonia discounting*

Uno degli effetti più importanti dovuti alla crisi è l'aumento considerevole della presenza sul mercato di contratti con collaterale, al fine di ridurre il rischio di controparte nei prodotti derivati nel mercato OTC. Infatti, è possibile diminuire l'esposizione al rischio di controparte grazie all'uso del contratto di collateralizzazione (Collateral Agreement o Credit Support Annexe-CSA-) che si basa sul sistema del margin, cioè un accordo contrattuale in cui le due controparti si impegnano a depositare una somma che è uguale alla variazione del Mark to Market rispetto al margin precedente (in cash o azioni). Gli scambi di liquidità tra creditore e debitore previsti dal collateral permettono di considerare il collaterale come un mezzo di finanziamento su delle maturità più importanti rispetto al caso dei depositi e allo stesso tempo come un mezzo di protezione contro il default della controparte. A causa della grande diffusione di tale tipo di contratti, i prezzi dei prodotti derivati quotati sul mercato possono essere visti come delle transazioni senza rischio. Inoltre, per il principio

d'assenza d'opportunità d'arbitraggio il margin interest rate CSA deve essere uguale al tasso usato per l'attualizzazione dei cashflows futuri.

Il contratto di collateralizzazione più utilizzato è caratterizzato dalla presenza dei margin con frequenza giornaliera e dall'overnight collateral rate. Per questa ragione è necessario utilizzare le quotazioni overnight per costruire la curva dei tassi con cui attualizzare i cashflows. Gli swap Eonia risultano essere gli strumenti più indicati per la costruzione della curva discount, in quanto forniscono la migliore approssimazione della curva del tasso senza rischio.

## **5. Evoluzione della metodologia di pricing**

In seguito alle evoluzioni constatate nel mercato dei tassi di interesse descritte precedentemente, le ipotesi abituali dei modelli di pricing non sono più verificate. E' pertanto indispensabile abbandonare il quadro classico di pricing, che si basa sulla costruzione di una sola curva di tassi utilizzata per il calcolo sia dei tassi forward che dei fattori di discount. Ci si orienta piuttosto verso un approccio di tipo multi-curve che tiene in considerazione la segmentazione del mercato.

La nuova metodologia è basata sull'utilizzo di due curve distinte:

- Discounting curve: la *yield curve* utilizzata per scontare i futuri *cash flow*. La curva deve essere costruita in modo tale da riflettere il costo di finanziamento collegato al contratto che genera i flussi di cassa.
- Forwarding curve: la *yield curve* utilizzata per calcolare i *forward rate*. La curva deve essere costruita considerando il *tenor* e il tipo di tasso sottostante al contratto da valutare.

Per quanto riguarda la curva per attualizzare i cashflows futuri, bisogna distinguere più casi:

- in presenza di CSA con margin di tipo giornaliero e l'overnight collateral rate si usa la curva Eonia ;
- in assenza di collaterale si usa la curva di funding
- in presenza di CSA non standard bisogna considerare delle curve specifiche a seconda del caso.

E' possibile riassumere la procedura da seguire nel caso multi-curve nel modo seguente:

- costruire una curva discount seguendo la procedura tradizionale di tipo mono-curva;
- selezionare diversi insiemi di strumenti plain vanilla separati, di maturità crescenti, in cui ogni insieme sia omogeneo nel tasso sottostante (si considerano tipicamente i tenori 1M, 3M, 6M e 12M);
- costruire delle curve forecast separate, una per ogni tenore, usando la procedura di bootstrapping sugli strumenti selezionati precedentemente;
- valutare i tassi forward ed i cashflows corrispondenti su ogni curva forecast per i prodotti sullo stesso sottostante;
- calcolare i fattori d'attualizzazione grazie alla curva di discount;
- stimare i prezzi sommando i cashflows attualizzati.

### *5.1 Bootstrapping nel quadro mono-curva e nel quadro multi-curve*

Tradizionalmente, la sola ed unica curva di tassi è calibrata su una successione di strumenti di mercato definita da: un segmento a breve termine costituito da tassi monetari di maturità inferiori a 6 mesi; un segmento medio a termine costituito da contratti Future (o eventualmente da FRA) di maturità superiori a quella dell'ultimo tasso monetario e un segmento a lungo termine costituito da swap di maturità superiori a quella dell'ultimo contratto future.

Consideriamo I strumenti di mercato, di maturità  $(T_i)_{i=1,\dots,l}$  a cui corrispondono le quotazioni di mercato  $(f_i^*)_{i=1,\dots,l}$ . Supponiamo anche che  $T_1 < T_2 < \dots < T_l$ .

Chiamiamo  $f_i$  il prezzo dell'  $i$ -esimo strumento di mercato; possiamo allora esprimerlo in funzione della curva d'attualizzazione in modo che

$$f_i = f_i[P(t_0, t)_{t \leq T_i}]$$

Il metodo di bootstrapping è un approccio di tipo ricorsivo che riduce il problema della calibrazione della struttura a termine ad una successione di risoluzioni d'equazioni ad una sola incognita, secondo lo schema:

$$f^{\circ}_1 = f_1(P(t_0, T_1))$$

$$f^{\circ}_2 = f_2(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2))$$

$$f^{\circ}_3 = f_3(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2), P(t_0, T_3))$$

$$f^{\circ}_l = f_l(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2), P(t_0, T_3), \dots, P(t_0, T_l))$$

Tale procedura è indipendente dal tipo di strumento di calibrazione. I fattori d'attualizzazione vengono determinati ad ogni passo grazie alla risoluzione numerica di tipo dicotomica.

Come è stato spiegato nella sezione precedente, l'uso di una sola curva di tassi non è sufficiente per poter spiegare e descrivere correttamente i tassi forward per dei tenori diversi.

Per quel che riguarda la curva di discount  $C_d$ , si costruisce la curva Eonia utilizzando le quotazioni di mercato degli swaps Eonia per tenori diversi secondo la procedura di bootstrapping tradizionale, come nel caso mono-curva. Dopodichè, per ogni tenore  $\Delta$  fissato, si considera un numero finito di strumenti di mercato di tenore  $\Delta$  e si costruisce la curva forecast  $C_\Delta$  grazie alla curva di discount  $C_d$  che è stata ottenuta precedentemente e alle quotazioni di mercato.

La procedura di bootstrap, nel caso multi-curve si schematizza come segue:

$$f^{\circ}_1 = f_1(P_d(t_0, T_1), P_{\Delta}(t_0, T_1))$$

$$f^{\circ}_2 = f_2(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), P_{\Delta}(t_0, T_1), P_{\Delta}(t_0, T_2))$$

$$f^{\circ}_3 = f_3(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), P_d(t_0, T_3), P_{\Delta}(t_0, T_1), P_{\Delta}(t_0, T_2), P_{\Delta}(t_0, T_3))$$

$$f^{\circ}_I = f_I(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), \dots, P_d(t_0, T_I), P_{\Delta}(t_0, T_1), P_{\Delta}(t_0, T_2), \dots, P_{\Delta}(t_0, T_I))$$

Nella pratica, soprattutto per quanto riguarda gli swaps sulla parte a lungo termine della curva, si è in presenza di troppe incognite rispetto al numero di equazioni disponibili<sup>62</sup>. E' quindi necessario fare un'ipotesi di interpolazione per completare il bootstrap, come illustrato nella parte iniziale del capitolo.

---

<sup>62</sup> Ametrano F. M., Bianchetti M., Bootstrapping the illiquidity Multiple Curve Construction for Coherent Forward Rates Estimation, in Mercurio F., Modelling Interest Rates: Latest Advances for Derivatives Pricing, Risk Books, London, 2009

## **Conclusione**

In questo elaborato si è evidenziata l'importanza delle curve dei rendimenti per la valutazione di un'ampia serie di strumenti finanziari, quali Titoli del debito pubblico, obbligazioni e titoli derivati. La capacità predittiva circa l'andamento del ciclo economico della "term structure", dovuta alle informazioni che incorpora riguardo l'andamento atteso dei tassi e le aspettative degli operatori di mercato, rende la curva dei rendimenti uno strumento di fondamentale importanza ed utilità per le banche centrali, le banche di investimento, i policy makers e gli investitori che hanno la necessità di valutare diversi scenari che dipendono da variabili macroeconomiche.

Constatata la centralità della struttura per scadenza dei tassi nella valutazione di strumenti finanziari e come anticipatore del ciclo economico, il problema diviene stimare in modo preciso la term structure. Nella realtà dei mercati finanziari infatti vi sono delle incompletezze ed imperfezioni che impediscono la derivazione di una curva dei rendimenti completamente uniforme ed aderente alla realtà.

In questo elaborato sono state prese in considerazione differenti metodologie che consentono di ottenere una stima della suddetta curva. Per molti anni i mercati hanno assegnato alla curva dei rendimenti dei Titoli di Stato la funzione di benchmark, ma successivamente alla crisi finanziaria del 1998, i Titoli di Stato hanno perso la posizione di riferimento che detenevano ed oggi non sono più considerati dei tassi di interesse risk-free.

Gli Overnight Indexed Swaps sono stati individuati come delle buone proxy dei tassi privi di rischio e la struttura a termine swap è diventata un'alternativa presa sempre più in considerazione. Nell'elaborato è stato illustrato come viene derivata la curva dei rendimenti swap a partire dai dati osservati sul mercato, in particolare nell'ultimo capitolo sono state evidenziate le differenze tra le

metodologie di interpolazione dei dati al fine di ottenere una buona stima della struttura per scadenza dei tassi.

In particolare si è visto che con la sola procedura del bootstrap si riesce a risolvere il problema legato all'assenza di titoli zero coupon per scadenze superiori ai due anni, ma non il problema legato alla non completezza dei mercati che non consente il calcolo dei tassi di interesse intermedi tra due rilevazioni successive. Per risolvere tale problema è stata presentata una metodologia di interpolazione dei dati che utilizza funzioni spline di tipo naturale cubico e consente la costruzione di una spot rate curve "levigata", continua e derivabile in tutto l'intervallo considerato.

Infine l'elaborato si conclude esponendo gli approcci più recenti utilizzati per la stima della term structure. Le teorie standard e le ipotesi su cui si basava la derivazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse, risultano ormai obsolete, sia perché si basavano su ipotesi di non arbitraggio che sono state più volte violate, sia perché il mercato negli ultimi anni si è evoluto capovolgendo alcune delle assunzioni ritenute valide fino a qualche anno prima.

La comunità finanziaria si è resa conto che non è più possibile basarsi su un'unica curva dei tassi di interesse risk free ed ha teorizzato una nuova struttura che tiene conto di più fattori di rischio rilevanti: il modello a curve multiple.

## Bibliografia

- Ametrano F. M., Bianchetti M. (2009), "Bootstrapping the illiquidity", Multiple Curve Construction for Coherent Forward Rates Estimation.
- Arturo Estrella (2005): "Why does the Yield curve predict output and inflation", Federal Reserve Bank of New York.
- Banca centrale europea (2001): "The euro money market", BCE, Francoforte.
- Bianchetti M., Carlicchi M. (2011): "Interest Rate After The Credit Crunch", Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR, The Capco Journal of Financial Transformation.
- Black (1986): "Noise", Journal of Finance.
- Bortot, P., Magnani, U., Olivieri, G., Rossi, F. A., Torrigiani, M., "Matematica Finanziaria", II edizione, Monduzzi Editore, Bologna, 1998.
- Castellani, G., De Felice, M. & Moriconi, F. (2005), "Manuale di finanza I", Bologna, Il Mulino.
- Clarke J. (2010): "Bootstrapping a Libor Curve Off an OIS Curve", Edu Risk International.
- Collin-Dufresne and Bruno Solnik (2001), "On the Term Structure of Default Premia in the Swap and Libor Market," The Journal of Finance, 56, pagg. 1095-1115.
- Comitato sul sistema finanziario globale (1999): A review of financial market events in autumn 1998, BRI, Basilea, ottobre.
- Cooper, N. e C. Scholtes (2001): "Government bond market valuations in an era of dwindling supply", BIS Papers, n. 5, Basilea, pagg. 147-69.
- Corsaro S. (2008): "I titoli obbligazionari", Dispense del corso di "Matematica Finanziaria", Università degli Studi di Napoli "Parthenope", [www.economia.uniparthenope.it](http://www.economia.uniparthenope.it)
- De Long- Shleifer- Summers- Waldmann (1989): "Noise Trader Risk In Financial Markets", The Journal of Political Economy.
- Del Chiaro, A.(1958): "Tavole di Eliminazione", Edizioni Scientifiche Einaudi, 1958.
- DeStefano, M.T. (2000): "Government Sponsored Enterprises Challenged.", Standard and Poor's Commentary, New York.
- Diebold F.X. and Li (2006): "Forecasting the term structure of government bond yields", Journal of econometrics.
- Duffie e Kan (1996): "A yield factor model of interest rates", Mathematical finance.
- Dybvig P.H. - Ross S.A. (1996): "Arbitrage", la traduzione in italiano è quella di Massimo De Felice in De Felice M. - Moriconi F. (1996, p. 3): "Il principio di arbitraggio", Il Mulino.

- G.Haubrich e A. Dombrosky (1996): "Predicting real growth using yield curve", Federal Reserve Bank of Cleveland.
- G.Olivieri, G. Foschini, M. Staffa (2007-2008): "Appunti delle lezioni di Matematica Finanziaria", [www.luiss.it](http://www.luiss.it).
- Hattori, M., K. Koyama e T. Yonetani (2001): "Analysis of credit spread in Japan's corporate bond market", in *The changing shape of fixed income markets: a collection of studies by central bank economists*, BIS Papers, n. 5, Basilea, ottobre, pagg. 113-46.
- Hull J.C. (2003): "Opzioni, futures e altri derivati" 5a edizione, traduzione di Emilio Barone, New Jersey, Peason education.
- John C. Cox (1985): "A theory of the term structure of the interest rates", *Econometrica*.
- Kile (1985): "Continuous auctions and insider trading", *Econometrica*.
- Kirkos G. and D. Novak (1997): "Convexity Conundrums", [www.powerfinance.com](http://www.powerfinance.com).
- M.Bagella (2015), "L'euro e la politica monetaria", [www.giappichelli.it](http://www.giappichelli.it)
- McCauley, R. (2001): "Spostamento dei benchmark nei mercati monetario e obbligazionario", *Rassegna trimestrale BRI*, pagg. 39-45.
- McCauley, R. N. (2001): "Spostamento dei benchmark nei mercati monetario e obbligazionario", in *Rassegna trimestrale BRI: Evoluzione dell'attività bancaria internazionale e del mercato finanziario internazionale*, marzo, pagg. 42-49.
- Nelson C.R, Siegel A.F. (1987): "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *the Journal of Business*.
- Nelson C.R. and A.F. Siegel (1987): "Parsimonious Modelling of YieldCurves", *Journal of Business* 60.
- O. Vasicek (1997): "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of financial economics*.
- Pole A. (2007): "Statistical Arbitrage", *Wiley Finance*, pagg. 8-10.
- Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery (1998): "Numerical Recipes in C, 2nd edition", NY, Cambridge University Press.
- Reinhart, V. e B. Sack (2002): "The changing information content of market interest rates", in *Market functioning and central bank policy*, BIS Papers, Basilea.
- Remolona, E. M., W. Bassett e I. S. Geoum (1996): "Risk management by structured derivative product companies", *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, n. 2, pagg. 17-38.
- Ross S.A. (2005): "Options and efficiency", *Neoclassical Finance*, Princeton University Press.
- Shleifer A., Vishny R. (1997): "The limits if arbitrage", *Journal of Finance*.
- Svensson L.E. (1994): "Estimating and interpreting forward interest rates", *Swede 1992-1994 IMF Working Paper*.

- Svensson, L.E. (1994): "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates", CEPR Discussion Paper 1051.
- Theobald, D. and G. Singh (2000): "The Outlook for Swaps as a Hedge Vehicle", JP Morgan, New York.
- Tsatsaronis, K. (2000): "Hedge funds", in Rassegna trimestrale BRI: Evoluzione dell'attività bancaria internazionale e del mercato finanziario internazionale, pagg. 68-79.
- Uri Ron (2000): "A practical guide to swap curve construction", Bank of Canada.

### **Sitografia**

- Borsa Italiana, <http://www.borsaitaliana.it>
- Il Sole 24 Ore, <http://www.ilsole24ore.com>
- Assogestioni, <http://www.assogestioni.it>
- Finanza Online, <http://www.finanzaonline.it>