

**Dipartimento di Economia e Finanza**  
**Cattedra di Financial and Credit Derivatives**

**STANDARD AND POOR'S 500 CALL OPTION:  
PRICING E BACKTESTING**

**Relatore**

**Prof.re Federico Calogero Nucera**

**Candidato**

**Antonio Oliva**

**Matricola**

**658021**

**Correlatore**

**Prof.re Domenico Curcio**

**ANNO ACCADEMICO 2014/2015**

# Standard and Poor's 500 Call Option: Pricing e Backtesting

a.	Introduzione.....	2
b.	Capitoli .....	4
1.	MODELLI .....	4
1.1.	Overview .....	4
1.2.	Black-Scholes-Merton.....	7
1.3.	Implied Volatility .....	13
1.4.	BSM con Gram-Charlier .....	15
1.5.	Garch Con Simulazioni Monte Carlo .....	20
1.6.	Modified Implied Volatility Function .....	24
2.	DALLA TEORIA ALLA PRATICA .....	26
2.1.	Generali .....	26
2.2.	Black-Scholes-Merton.....	28
2.3.	BSM con Implied Volatility .....	28
2.4.	BSM con Gram-Charlier .....	29
2.5.	GARCH con simulazioni Monte Carlo .....	30
2.6.	Modified Implied Volatility Function .....	32
3.	RISULTATI NUMERICI.....	34
3.1.	Generali .....	34
3.2.	Dati e fonti.....	34
3.1.	Primo Periodo: 23 dicembre 2008.....	35
3.2.	Secondo Periodo: 28 ottobre 2011 .....	45
3.3.	Terzo Periodo: 03 ottobre 2012.....	55
c.	Conclusioni.....	64
d.	Bibliografia.....	67
e.	Sitografia .....	69

# RIASSUNTO

## a. Introduzione

Questo elaborato implementa empiricamente alcuni tra i più noti modelli di *pricing* per una *call option* europea scritta sull'indice statunitense Standard & Poor's 500, dopo averne fornito una breve descrizione teorica.

La volatilità assume un ruolo cruciale nell'analisi dei derivati e risulta importante valutare il comportamento delle specifiche metodologie, considerando diversi scenari di base. Il lavoro considera un orizzonte temporale che ha inizio nel 2008 e si conclude alla fine del 2012, suddiviso a sua volta in tre diversi intervalli che hanno come discriminante il livello di volatilità del sottostante. Il primo periodo è caratterizzato da una volatilità inizialmente bassa per poi crescere, a seguito della crisi, drasticamente; il secondo, al contrario, è contraddistinto da un esordio instabile ed epilogo stabile; il terzo, in ultimo, presenta stabilità, e quindi volatilità bassa, per l'intera durata. L'intento finale è quello di confrontare i risultati ricavati utilizzando i vari modelli, e valutarne le diverse *performance* che questi hanno nel tempo, e tra loro per fornire un risultato sintetico in termini di *pricing error* e radice dell'errore quadratico medio, rispetto all'effettivo prezzo osservato sul mercato.

Entrando nel merito della trattazione le metodologie presentate sono le seguenti:

- il modello di Black, Scholes e Merton;
- il modello basato sulla volatilità implicita;
- il modello che sfrutta l'espansione di Gram-Charlier;
- il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo;
- il modello che utilizza una versione modificata dell'*Implied Volatility Function*.

L'elaborato si divide in tre capitoli, conclusioni e infine relativa bibliografia e sitografia. In particolare il primo capitolo, dopo aver dato una visione d'insieme del derivato in questione, descrive nel dettaglio i cinque modelli menzionati, ponendo l'attenzione sulle motivazioni alla base delle ipotesi e delle assunzioni sottostanti, un passaggio fondamentale per capire i comportamenti dei modelli. Il secondo capitolo invece, dopo aver motivato la scelta relativa ai dati raccolti, espone le modalità con le quali la teoria viene applicata nella pratica, descrivendo tutti i passaggi per l'implementazione dei modelli e la modalità tramite la quale è possibile arrivare al risultato finale. Il terzo capitolo mostra infine i risultati numerici raggiunti, confrontandoli sia numericamente che graficamente sulla base delle diverse *performance*, dopo aver presentato il metodo di ricerca dei dati e le fonti. Nelle conclusioni si fornisce una visione d'insieme del lavoro presentato alla luce dei risultati ottenuti, descrivendo i pregi e i difetti dei modelli, evidenziati dalla realtà.

## b. Capitoli

### 1. MODELLI

#### 1.1. Overview

Un'opzione europea è un contratto tra due controparti che dà il diritto a chi compra, ma non l'obbligo, di acquistare a scadenza, ad un predeterminato prezzo d'esercizio, una data quantità di sottostante. In generale un'opzione può essere scritta su diversi tipi di sottostante, infatti tra le varie, le più utilizzate sono le opzioni scritte su: azioni, su indici azionari, su *commodities*, su tassi di interesse, su tassi di cambio. Nel presente studio si focalizzerà l'attenzione sulle *call option* scritte sull'indice azionario statunitense Standard and Poor's 500.

Il *payoff* a scadenza di una opzione *call* europea è

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K; 0) \quad (1)$$

- $S_T$  rappresenta il valore del sottostante a scadenza;
- $K$  rappresenta il prezzo di esercizio o *strike price* stabilito in sede di acquisto del derivato.

I fattori che influenzano il prezzo delle opzioni su azioni e/o su indici sono sei:

1. Il valore corrente del sottostante  $S_t$ ;
2. La vita residua in giorni  $T$ ;
3. La volatilità giornaliera del sottostante  $\sigma$ ;
4. Il tasso di interesse privo di rischio su base;
5. Il valore attuale dei dividendi attesi  $D$  o tasso di dividendo atteso giornaliero  $q$ ;
6. Prezzo di esercizio o *strike price*  $K$ .

La variabile che incide in maniera significativa sul valore dell'opzione ed è di difficile derivazione a priori è la volatilità delle variazioni del valore del sottostante. Si può affermare che la volatilità ed il valore della *call option* sono legati da una relazione positiva. Questo perché una *call option out-of-the-money*<sup>1</sup> ha più possibilità di finire *in-the-money*<sup>2,3</sup>; allo stesso modo una *call option in-the-money* ha più possibilità di finire *out-of-the-money*, ma siccome essa ha un limite inferiore, l'incremento incide in misura maggiore rispetto al possibile decremento. I modelli che saranno presentati si differenziano soprattutto per come stimano la volatilità e come essa è sfruttata per il calcolo finale del prezzo dell'opzione<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup>  $S_t < K$

<sup>2</sup>  $S_t > K$

<sup>3</sup> Per completezza una *call option at-the-money* si ha quando  $S_t = K$ .

<sup>4</sup> HULL, J., 2013: "Options, Futures and Other Derivatives," eighth ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, Chap. 10.

## 1.2. Black-Scholes-Merton

Il primo modello che si considera è quello di Black-Scholes-Merton<sup>5</sup>. Le ipotesi alla base della formulazione di Black-Scholes-Merton sono:

- In primo luogo si è visto che il sottostante segue un *Geometric Brownian Motion* con  $\mu$  e  $\sigma$  che non variano nel tempo;
- Il mercato è libero sia da tasse che da costi di transazione quindi ideale rispetto a quello che si presenta nella realtà;
- Le vendite allo scoperto non hanno limiti e sono sempre permesse;
- Tutti gli strumenti in analisi sono perfettamente divisibili, cosa che potrebbe essere parzialmente vera se i volumi presi in considerazione sono adeguatamente elevati;
- Il mercato si suppone sia efficace almeno in senso semi-forte, dato che i prezzi delle *securities* riflettono tutte le informazioni, tranne quelle privilegiate<sup>6</sup> e quindi non esistono opportunità di arbitraggio senza rischio;
- L'analisi si basa un'ipotesi di *trading* continuo, senza nessuna sosta, una approssimazione che facilita i calcoli;
- Il tasso di interesse privo di rischio,  $r_f$  è fisso e uguale per tutte le scadenze, ipotesi di difficile realizzazione dato che il mercato è caratterizzato quasi sempre da una curva dei tassi non *flat*, nello specifico crescente, volta a riflettere il premio per la liquidità e il maggior rischio per periodi di tempo più lontani dal presente.

Il valore delle opzioni è funzione sia del valore del sottostante che del tempo, quindi è importante sapere come varia questa grandezza con l'evolversi delle variabili indipendenti. Uno strumento matematico che aiuta a capire questo processo è il lemma di Itô, il quale è utile per calcolare il differenziale di una particolare funzione in un processo stocastico. Il risultato finale che si raggiunge è il seguente:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (2)$$

Dove:

- $f$  è la funzione che dipende da  $S$  e  $t$ ;
- $dz$  è un processo di Wiener;

---

<sup>5</sup> Fischer Black, Myron Scholes hanno derivato l'equazione parziale differenziale fondamentale. Robert Merton è riuscito a darne una dimostrazione in maniera più generale nello stesso anno, basandosi sul modello del *Capital Asset Pricing Model*. Nel 1997 Scholes e Merton hanno ricevuto il premio Nobel per l'economia, Black era morto nel 1995. Per i risultati simili raggiunti si identificherà il modello come di Black-Scholes-Merton.

<sup>6</sup> Fama 1970.

- $\frac{dS}{S}$  è il rendimento atteso per unità di tempo;
- $\mu$  è il rendimento atteso dell'azione;
- $\sigma$  è la volatilità del rendimento dell'azione;
- $S$  è il prezzo dell'azione.

Ciò suggerisce che sia il sottostante  $S$ , sia la funzione  $f$ , ossia il derivato in questione, condividono la stessa fonte di incertezza, rappresentata proprio dal processo di Wiener, il quale incorpora una componente stocastica. Costruendo un portafoglio con posizione corta sul derivato e lunga su  $\partial f / \partial S$  unità di sottostante si giunge alla *partial differential equation* di Black e Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r_f S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_f f \quad (3)^7$$

Questa relazione è di fondamentale importanza poiché, come si può notare, qualsiasi fonte di incertezza è scomparsa e infatti il termine  $dz$  non è più presente. Ciò sta ad indicare che un portafoglio composto come quello precedente guadagnerà sicuramente il tasso di interesse privo di rischio. La stessa, risulta quindi essere una condizione necessaria e sufficiente affinché uno strumento che dipende dal sottostante e dal tempo possa essere definito un derivato. Una volta derivata la *differential partial equation* e risolta, includendo le *boundary conditions*, equazione (1), si ottiene la formula finale di Black-Scholes-Merton per una *call option*. Tramite il metodo che si basa sul principio della *risk neutral valuation*, il quale si fonda su tre passaggi si deriva l'equazione della *call*:

- 1) Il tasso di rendimento è il *risk-free rate*;
- 2) Si calcola il *pay-off* atteso dell'opzione;
- 3) Il valore ottenuto si sconta al *risk-free rate*.

Quindi il valore della *call* sarà dato da:

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r_f T} N(d_2)^8 \quad (4)$$

<sup>7</sup> Quando il titolo sottostante paga dividendi questa equazione si trasforma semplicemente in:  $\frac{\partial f}{\partial t} + (r_f - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_f f$

<sup>8</sup> Con  $N(d_1) = N \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]$  ed  $N(d_2) = N \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]$ .

### 1.3. Implied Volatility

Una metodologia derivante direttamente da quella analizzata nel paragrafo precedente sfrutta la volatilità implicita nel prezzo delle *call*. È necessario quindi introdurre il concetto di *volatility smile*<sup>9</sup>: essi altro non sono che funzioni con variabile indipendente il prezzo di esercizio e variabile dipendente la volatilità implicita<sup>10</sup>.

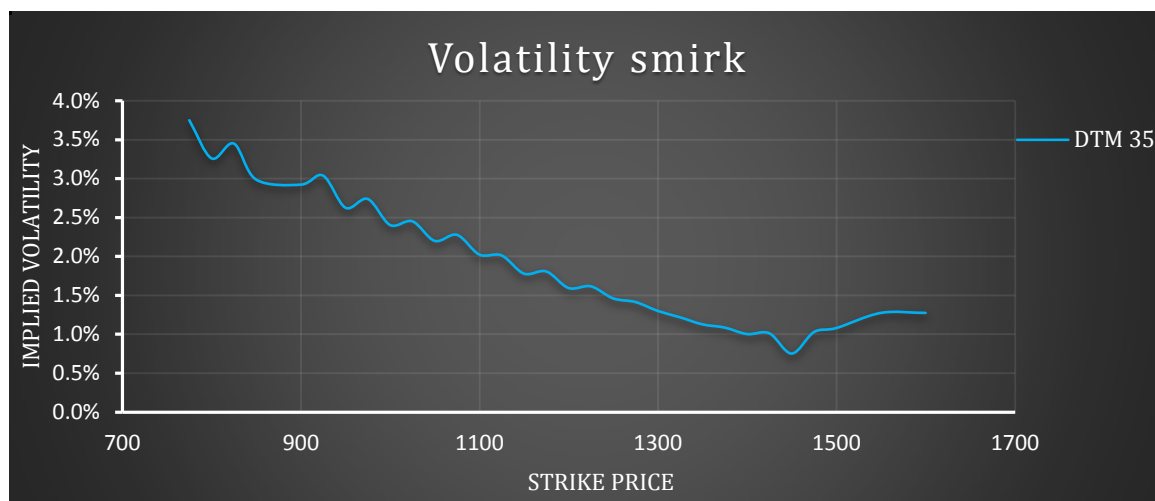


Figura 1<sup>11</sup>

Nella Figura 4 si evince che la volatilità diminuisce al crescere di  $K$  fino ad un determinato livello, per poi crescere. Risulta ragionevole supporre che le opzioni con prezzo di esercizio basso, ossia *call deep-in-the-money* abbiano volatilità implicite più elevate rispetto a *call* con prezzi di esercizio elevati, quindi *deep-out-of-the-money*. Questa caratteristica implica un ragionamento importante, la coda sinistra della distribuzione di probabilità per una opzione su azioni sarà diversa rispetto a quella log-normale. La differenza si sostanzia in una coda sinistra implicita più spessa rispetto a quella teorica, mentre la coda destra si comporta in maniera opposta. Tutto ciò suggerisce che la probabilità per una *call* di finire *in-the-money* è minore nella realtà rispetto alla teoria e una conseguenza importante è che il modello di Black-Scholes-Merton sopra-prezzerebbe *call option* su azioni *out-of-the-money*. Quindi ci si chiede sia possibile estrapolare la volatilità dalle *call* passate per poi utilizzarla come input, formalmente ciò che si vuole risolvere è questa equazione:

$$\sigma^{IV} = c_{BSM}^{-1}(S_t, K, T, r, q, c^{mkt})$$

Dove:

- $\sigma^{IV}$  è la volatilità implicita;

<sup>9</sup> In realtà, quando parliamo di opzioni su azioni e non di opzioni su tassi di cambio, sarebbe meglio parlare di *volatility smirk*, ma la letteratura fa riferimento in generale ai *volatility smile*, salvo poi distinguere i vari casi.

<sup>10</sup> Il primo a studiarli è stato Rubinstein nel (1985).

<sup>11</sup> In figura è rappresentato l'andamento della volatilità implicita giornaliera al crescere dello *strike* su *call option* sullo S&P 500 del 27 ottobre 2011 con *maturity* di 35 giorni.

- $c_{BSM}^{-1}$  è la funzione inversa dell'equazione di Black-Scholes-Merton;
- $c^{mkt}$  è il prezzo di mercato della *call option*.

#### 1.4. BSM con Gram-Charlier

Un altro modo per ovviare all'ipotesi di normalità dei tassi di variazione del sottostante e quindi modellare una distribuzione più simile a quelle che si verifica empiricamente è rappresentato dall'utilizzo dell'espansione di Gram-Charlier. L'assunzione di normalità nei mercati finanziari infatti è sistematicamente violata, figura 2:

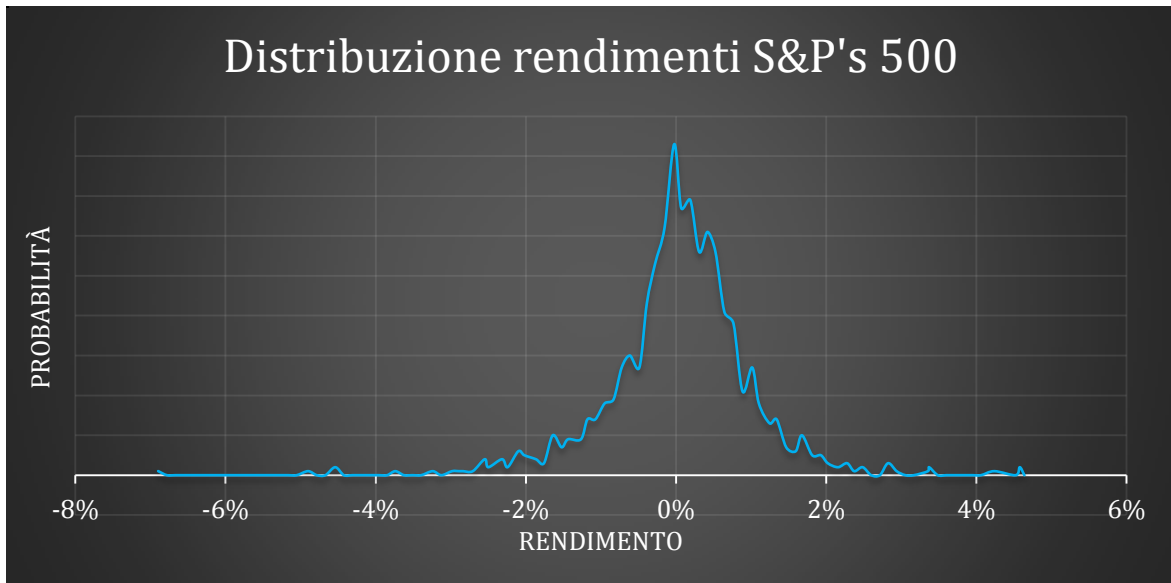


Figura 2

Effettuando il test per la normalità di Shapiro-Wilk, il *p-value* è prossimo allo zero, quindi rifiutiamo l'ipotesi nulla relativa alla normalità dei rendimenti con un livello di confidenza superiore al 99%. Inoltre le statistiche base restituiscono questi valori:

```
> basicStats(rendp)
      rendp
nobs      2264.000000
NAS         0.000000
Minimum    -9.469514
Maximum    10.957196
1. Quartile -0.448417
3. Quartile  0.582017
Mean        0.021383
Median      0.080088
Sum         48.410026
SE Mean     0.028184
LCL Mean    -0.033887
UCL Mean     0.076652
Variance    1.798382
stdev       1.341038
skewness    -0.328251
kurtosis    10.247412
```

Dove:



- $rendp$  rappresenta il vettore dei rendimenti giornalieri dello S&P's 500 dal 10/01/2011 al 31/12/2104.

Quindi la distribuzione empirica è caratterizzata da asimmetria negativa e curtosi diversa da zero. Il risultato è già noto dal paragrafo precedente, quando si è parlato di *volatility smile*, i quali altro non riflettevano la presenza di asimmetria e curtosi. La presenza di *smirk* suggerisce che il modello di Black-Scholes-Merton soffre di *misspecification*. In aiuto subentra l'espansione di Gram-Charlier<sup>12</sup>, consiste in una serie matematica che approssima una distribuzione di probabilità alla somma dei suoi momenti. Riprendendo la (4) e integrando l'espansione, la nuova formula sarà:

$$c_{G-C} \approx S_t N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) + S_t \phi(d_2) \sigma \left[ \frac{\xi}{3!} (2\sqrt{T}\sigma - d_1) - \frac{\frac{\kappa}{\sqrt{T}}}{4!} (1 - d_1^2 + 3d_1\sqrt{T}\sigma - 3T\sigma^2) \right]^{13} \quad (5)$$

### 1.5. Garch Con Simulazioni Monte Carlo

Il modello di Black-Scholes-Merton ed anche quello di Gram-Charlier soffrono di un consistente *bias*: la volatilità risulta essere costante per tutta la durata dell'opzione, infatti è noto che una volatilità costante non corrisponde alla realtà. Un metodo che incorpora tutto ciò è rappresentato dal modello GARCH<sup>14</sup>. Esso si basa su una semplice ma importante considerazione, la presenza, nelle serie storiche finanziarie, dei *volatility cluster*. Quindi periodi a bassa o alta volatilità tendono ad essere seguiti da periodi con simile volatilità.

Il modello base è:

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \alpha(\sigma_t z_t^* - \lambda_t)^2 + \beta\sigma_t^2$$

Con:

- $\alpha + \beta < 1$ ;
- $\gamma$  è il peso assegnato alla varianza di lungo periodo (o deviazione standard);
- $\sigma$  è deviazione standard di lungo periodo;
- $\lambda$  rappresenta il premio per il rischio;
- L'operatore \* rappresenta il contesto di *risk-neutrality*;

<sup>12</sup> Questo approccio è stato introdotto in finanza per la prima volta da Jarrow e Rudd (1982) e utilizzato per la prima volta da Madan and Milne (1994).

<sup>13</sup> Quando è presente il tasso di dividendo atteso  $q$  la (13) si trasforma in:  $S_t e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) + S_t e^{-qT} \phi(d_2) \sigma \left[ \frac{\xi}{3!} (2\sqrt{T}\sigma - d_1) - \frac{\frac{\kappa}{\sqrt{T}}}{4!} (1 - d_1^2 + 3d_1\sqrt{T}\sigma - 3T\sigma^2) \right]$ .

<sup>14</sup> Bollerssev, *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (1986). Il lavoro di Bollerssev generalizza il precedente articolo del premio Nobel per l'economia 2003 Engle: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, (1982).

- $z_t$  è un'estrazione casuale da una normale standard.

Che può essere riscritto come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\sigma_{t-1}z_{t-1}^* - \lambda_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Con:

- $\gamma\sigma^2 = \omega$

Avendo quindi osservato la varianza fino ad oggi, cioè in  $t$ , è possibile stimare i parametri  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , e ottenere successivamente la varianza di lungo periodo. Una volta ottenuti i parametri del GARCH con la metodologia che sfrutta la *maximum likelihood* è possibile arrivare al prezzo finale dell'opzione tramite le simulazioni Monte Carlo, dato che il modello così presentato non dà la possibilità di raggiungere una formulazione chiusa.

### 1.6. Modified Implied Volatility Function

L'ultimo approccio presentato è una versione modificata dell'*implied volatility function*. Esso è creato ad hoc, con poche motivazioni teoriche, ma che dà buoni risultati in termini di scarto dal valore reale. Alla base si ipotizza che la volatilità relativa alla variazione del sottostante sia una funzione deterministica del suo prezzo e che quindi i dati suggeriscono che la volatilità implicita tende ad avere variazioni contenute in piccoli-medi intervalli di tempo. Si effettua una regressione con variabile dipendente la volatilità implicita del giorno precedente a quello di analisi e variabili dipendenti specifici coefficienti, ottenendone una stima come mostrato nell'equazione (6):

$$\begin{aligned} \sigma_{t-1}^{IV} = & \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right) + \beta_2 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right)^2 + \beta_3 \left( \frac{T_i}{252} \right) + \beta_4 \left( \frac{T_i}{252} \right)^2 \\ & + \beta_5 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right) \left( \frac{T_i}{252} \right) + \varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

Dove:

- $\varepsilon$  è il termine di errore.

In questo modo si ottiene la volatilità in funzione del *moneyness* e del *time-to-maturity*. Infine, è possibile calcolare la volatilità con i nuovi dati ed inserirla nel modello di Black-Scholes-Merton ed ottenedere il prezzo finale della *call*.

## 2. DALLA TEORIA ALLA PRATICA

### 2.1. Generali

In questo capitolo si vedrà come possono essere costruiti praticamente i modelli e soprattutto le assunzioni che si trovano alla base della scelta dei parametri. Nel precedente si sono viste le variabili che influenzano il prezzo dell'opzione e si è spiegato come la volatilità sia di difficile

derivazione e calcolo, infatti la volatilità dei mercati non è costante, soprattutto durante periodi di turbolenze finanziarie. Questo aspetto rappresenta il maggiore limite dei modelli che utilizzano volatilità costante e che ha portato allo sviluppo di modelli che ne permettono un percorso dinamico. Essa rappresenta la discriminante fondamentale per i modelli e per i periodi presi in esame. I periodi considerati sono 3 e, come già introdotto la loro scelta è basata sulla volatilità del sottostante. Il primo considera come giorno di analisi il 23/12/2008, poco dopo il crollo di Lehman Brothers, e le variazioni dell'indice sottostante dalla fine di settembre in poi sono state molto più ampie che in passato, con il conseguente aumento della volatilità. Per il secondo invece si è scelto il 28/10/2011, il ragionamento si basa esattamente sulla considerazione opposta. Infine per l'ultimo giorno la scelta si è orientata verso un periodo con volatilità bassa e soprattutto stabile sia passata che presente, quindi si è considerato il 03/10/2012. L'obiettivo finale consiste nell'effettuare un'analisi di *backtesting* dei diversi sistemi di *option pricing* in vari, particolari, periodi storici, per dare una motivazione agli eventuali diversi risultati. Per fare ciò, per ogni prezzo teorico si calcolerà lo scarto quadratico da quello di mercato, e per ogni modello e per ogni periodo si otterrà la media come indicatore della sua buona o cattiva *performance*.

## 2.2. Black-Scholes-Merton

Il modello di Black-Scholes-Merton si basa sull'ipotesi semplificatrice che i rendimenti giornalieri del sottostante seguano una distribuzione log-normale con varianza costante in intervalli di tempo medio-brevi. Per questo motivo risulta di semplice implementazione, nonostante possa sembrare particolarmente complicata la sua teoria. Infatti, dopo aver scelto i primi cinque parametri<sup>15</sup>, l'ultimo, e l'unico, che resta da stimare è la volatilità. Essa è stata calcolata come semplice deviazione standard delle variazioni del sottostante in un arco temporale di sei mesi, per tutte le opzioni, a prescindere dalla loro *maturity*. Ottenuti tutti gli input basta inserirli nella (4).

## 2.3. Implied Volatility

L'intuizione alla base di questo modello è la seguente: la volatilità delle *call* passate fornisce una stima più corretta e precisa di quella risultante dalla semplice analisi delle variazioni del sottostante, dato che la realtà dei mercati mostra una distribuzione dei rendimenti del sottostante diversa da una log-normale. Si calcola il prezzo teorico dell'opzione del giorno precedente a quello di analisi con il modello di Black-Scholes-Merton, utilizzando la volatilità storica, successivamente si calcola lo scarto quadratico con il prezzo di chiusura verificatosi sul mercato. Ora resta da minimizzare lo scarto quadratico medio al variare della volatilità, sotto il vincolo che essa sia strettamente maggiore di zero. La volatilità così ottenuta diventa il nuovo input per il modello di Black-Scholes-Merton.

---

<sup>15</sup> *Strike price, Stock Price, tasso di interesse, days to maturity, dividend yield.*

## 2.4. BSM con Gram-Charlier

Il ragionamento qui è analogo a quello fatto per l'*Implied volatility*, e nello specifico considerare anche i momenti successivi dovrebbe migliorare le prestazioni del modello di Black-Scholes-Merton. Per il calcolo di asimmetria e curtosi si calcola il prezzo della *call* del giorno precedente a quello di analisi con la (5). Anche in questo caso ci si avvale di un risolutore per minimizzare lo scarto al quadrato dal suo vero valore al variare della curtosi ed asimmetria. Questi ultimi poi saranno i valori corretti per il *pricing* della *call*.

## 2.5. GARCH con simulazioni Monte Carlo

Il ragionamento parte dal presupposto che la varianza condizionata  $\sigma_{t+1}^2$  non è possibile osservarla ma la si può ottenere sfruttando la metodologia della massima verosimiglianza. L'ipotesi di distribuzione normale standard implica che la funzione di verosimiglianza (*likelihood*) in un dato momento  $t$  è:

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Con:

$$- R_t = \sigma_t z_t.$$

La verosimiglianza dell'intero campione altro non è che il prodotto di tutte le funzioni di verosimiglianza:

$$L = \prod_{t=1}^T l_t$$

Prendendo i logaritmi equivale a massimizzare la sommatoria dei logaritmi delle singole funzioni di verosimiglianza, ossia ottimizzare la seguente espressione:

$$\text{Max} \left[ -\frac{1}{2} \left( \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right]$$

Per l'analisi sono stati utilizzati 700 giorni lavorativi antecedenti al periodo di riferimento, poiché una *window* troppo ampia vanificherebbe la scelta dei periodi, mentre una troppo piccola, potrebbe causare una distorsione nei risultati. Ottenuti i parametri dal GARCH model è possibile passare alle simulazioni Monte Carlo. La varianza condizionata in  $t + 1$  può essere così definita:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

Con  $\sigma_{t+1}^2$  è possibile ottenere una serie di simulazioni relative al primo giorno di analisi, infatti

$$\check{R}_{i,t+1}^* = r_f - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}\check{z}_{i,1}^*$$

Con:

- $i$  indica la simulazione  $i$ -esima;
- $\check{R}_{i,t+1}^*$  che rappresenta l' $i$ -esimo rendimento relativo a domani.

Una volta create le  $i$  simulazioni per ogni giorno fino a scadenza si ottiene un determinato valore del sottostante,  $S_T$ , con il quale si calcola il *pay-off* della *call* da attualizzare al giorno di valutazione. Infine la media degli  $i$  valori rappresenta la stima finale.

## 2.6. Modified Implied Volatility Function

Per procedere con i calcoli si parte con l'estrapolazione delle volatilità implicite dalle opzioni del giorno precedente a quello di riferimento; successivamente si effettua una regressione lineare che ha come variabile dipendente la volatilità implicita appena estrapolata e variabili indipendenti i seguenti parametri:

- $\frac{S_t}{K_i}$ ;
- $\left(\frac{S_t}{K_i}\right)^2$ ;
- $\frac{T_i}{252}$ ;
- $\left(\frac{T_i}{252}\right)^2$ ;
- $\left(\frac{S_t}{K_i}\right)\left(\frac{T_i}{252}\right)$ .

In questo modo si stimano i coefficienti ( $\beta$ ) della regressione che saranno utilizzati per calcolare la nuova volatilità considerando i nuovi regressori da inserire nella formula di BSM. Questo valore è confrontato con quello di mercato, ottenendone lo scarto al quadrato che sarà minimizzato al variare proprio dei  $\beta$ . I coefficienti così ottenuti sono i nuovi input per il calcolo della volatilità da inserire poi nella formula di Black-Scholes-Merton (4).

## c. Risultati, Commenti e Conclusioni

La scelta di condurre tale studio è giustificata dall'estrema importanza del ruolo che la volatilità riveste nel contesto del *pricing* degli strumenti derivati. L'obiettivo è stato quello di calcolare l'impatto, sui prezzi delle opzioni, delle differenti condizioni di volatilità storica e attuale. I periodi di analisi sono tre e nello specifico il primo presenta un passato con un basso livello di volatilità a fronte di una situazione attuale di instabilità dei mercati, il secondo invece presenta caratteristiche

esattamente opposte, mentre l'ultimo è stato scelto per il suo passato e presente molto simili, con i mercati senza tensioni. Il confronto è avvenuto tra i prezzi restituiti dai modelli con quelli effettivamente visti sul mercato, sintetizzati dallo scarto quadratico medio. Sulla base di quest'ultimo si sono analizzate le diverse *performance* per provare, infine, a fornirne una motivazione e/o giustificazione tenendo in considerazione le assunzioni teoriche sottostanti ogni modello. Nel primo capitolo è stata presentata una descrizione teorica dei cinque modelli ponendo l'attenzione sulle ipotesi sottostanti, nel secondo invece le modalità di scelta dei dati, periodi e la messa in pratica dei modelli, mentre nel terzo ed ultimo capitolo è possibile vedere i risultati numerici e grafici dopo una breve descrizione delle opzioni e delle fonti. Essi offrono diversi spunti di riflessione. Il primo aspetto da notare è che, come da attese, nel terzo periodo si ha, in media, una migliore *performance* dei modelli. Il valore medio degli scarti quadratici medi risulta essere poco superiore a 20, mentre per il primo si osserva un valore leggermente maggiore di 40 e nel secondo, la media si colloca poco 130<sup>16</sup>, questo risultato non sorprende. La fonte è rappresentata dal *database* Thomson Reuters Eikon<sup>17</sup>, attraverso il quale sono state estratte le serie storiche dei prezzi delle *call*. Passando ai modelli, si nota come il modello di Black-Scholes-Merton mostri il suo maggior limite, ossia considerare la volatilità costante per tutta la durata di vita dell'opzione e soprattutto uguale per ogni opzione, senza tenere conto della *maturity*, stimandola dai dati passati. Esso riesce a raggiungere risultati migliori in un contesto di stabilità dei mercati, mentre tende a fallire, riportando elevati scarti quadratici, in periodi con volatilità non costante, come lo sono il primo ed il secondo. Il *pricing* migliore avviene quando il rapporto tra *stock* e *strike price* è vicino ad uno, mentre quando si allontana l'andamento è lo stesso che ci ha anticipato la teoria.

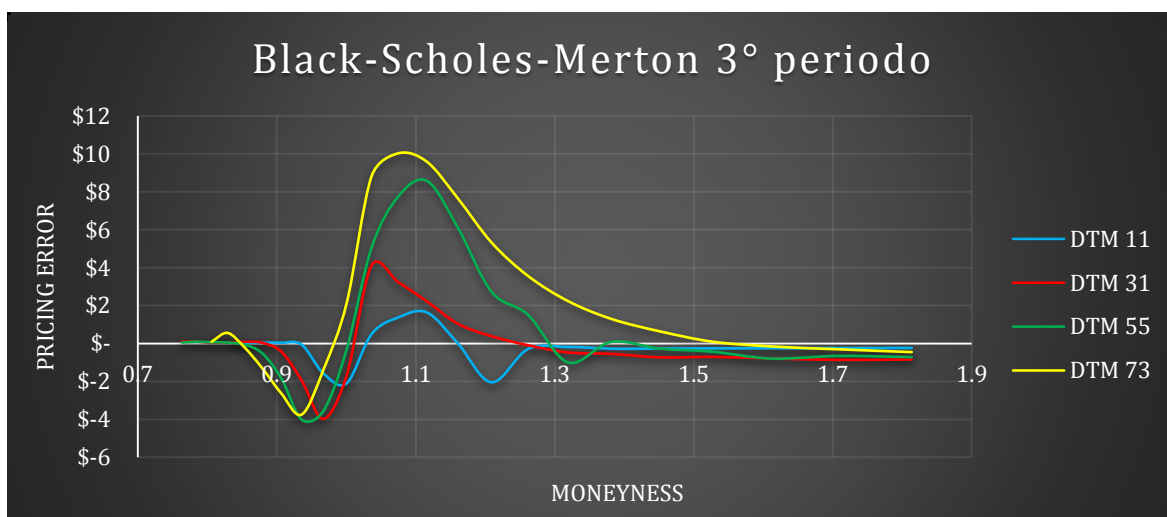


Figura 3<sup>18</sup>

<sup>16</sup> Per questo periodo il modello GARCH con le simulazioni è la causa principale di un valore così alto.

<sup>17</sup> <http://financial.thomsonreuters.com/en/products/tools-applications/trading-investment-tools/eikon-trading-software.html>.

<sup>18</sup> Il grafico mostra l'andamento del *pricing error* all'aumentare del *moneyness* per modello di Black-Scholes-Merton relativamente al terzo periodo di analisi per le quattro scadenze.

Inoltre è possibile dire che gli scarti quadratici sono direttamente proporzionali alla scadenza della *call*. Per quanto riguarda il modello che impiega la *modified implied volatility function*, c'è da dire che è molto condizionato non solo dal periodo di riferimento, ma anche dalla variazione, rispetto al giorno precedente, dell'indice di riferimento sottostante, così come l'*implied volatility*. Esso è per questo motivo, insieme al sopracitato, quello che ha, in media, la migliore *performance* per tutti i periodi, dato che riesce ad ovviare alla staticità della volatilità storica. Il suo punto di forza infatti consiste nello sfruttare la presenza dei *volatility cluster* nelle serie storiche finanziarie, senza considerare il passato più lontano. Un caso particolare è poi quello che si può osservare dalla figura 5, relativa al terzo periodo, dato che l'andamento del *pricing error* per il modello della MIVF visto riesce a replicare, quasi perfettamente, quello del modello di Black-Scholes-Merton, diversamente dagli altri periodi, ad esempio nel secondo, figura 6. La metodologia che comunque migliora decisamente il modello base di Black-Scholes-Merton, è quello che sfrutta la volatilità implicita delle *call* passate. Esso è preferibile alla luce dei risultati visti, ed è supportato anche dal superiore scarto quadratico medio per il primo ed il secondo periodo rispetto al terzo, poiché suggerisce una migliore *performance* di BSM quando la volatilità storica è costante, figura 4. Quando invece si considera la presenza di curtosi ed asimmetria diverse da zero, l'utilizzo dell'espansione di Gram-Charlier, porta a miglioramenti superiori al 100%<sup>19</sup> in ogni contesto, e riesce a “performare” in misura molto simile a BSM con volatilità implicita. Un caso interessante da considerare è quello mostrato nella figura 7. Come è stato già detto infatti il *pricing error* risulta essere costante per tutte le scadenze, a riprova del fatto che riesce a tenere in conto della particolare forma della distribuzione dei rendimenti del sottostante, soprattutto quando i mercati sono stabili.

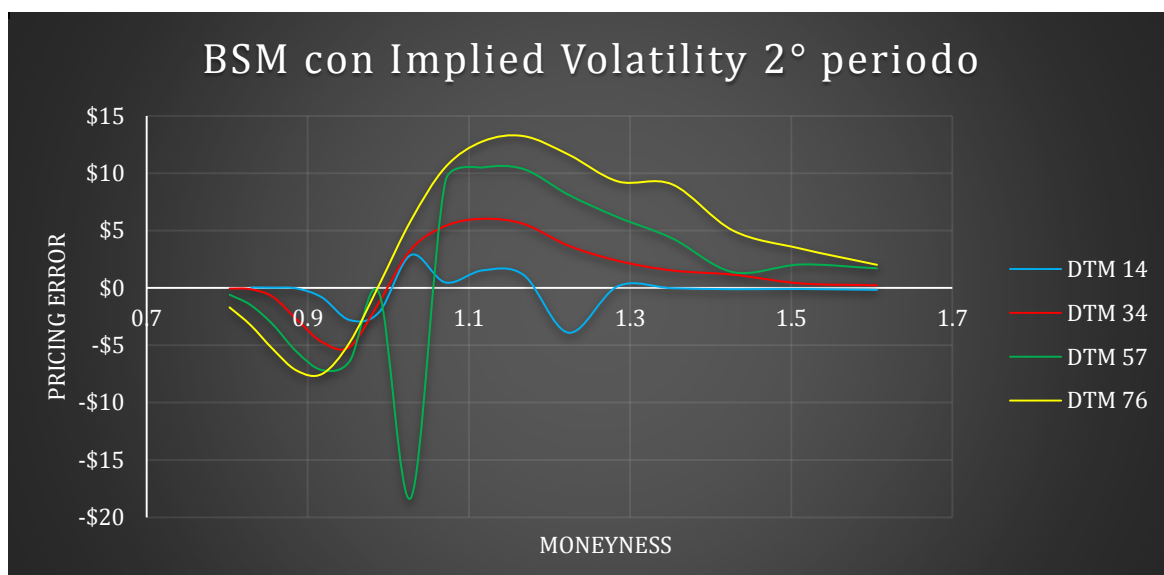


Figura 4

<sup>19</sup> Rispetto al valore restituito dal modello di Black-Scholes-Merton.

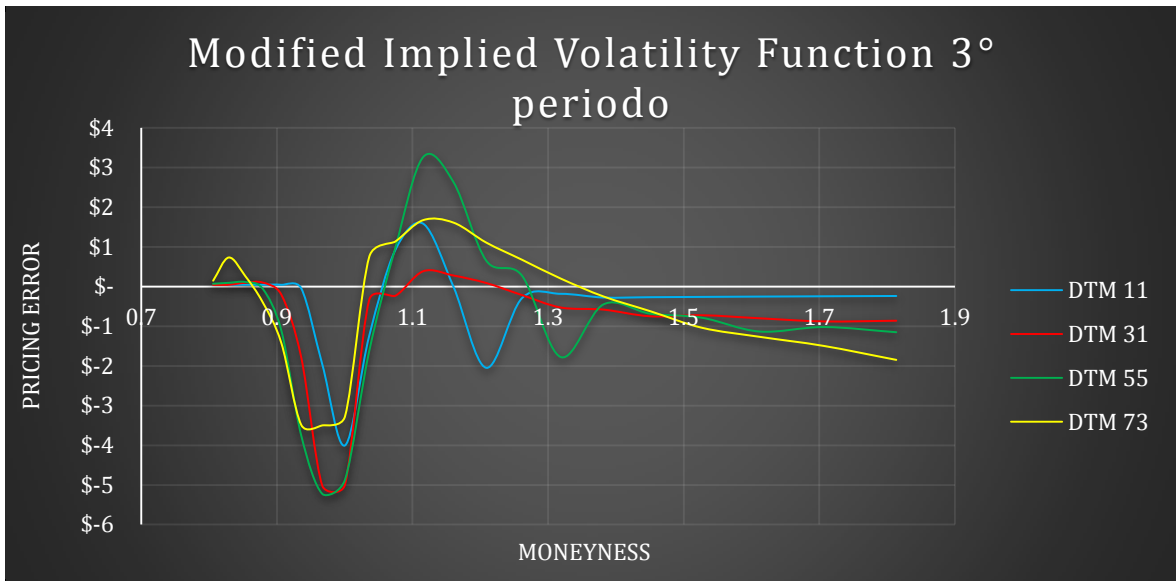


Figura 5

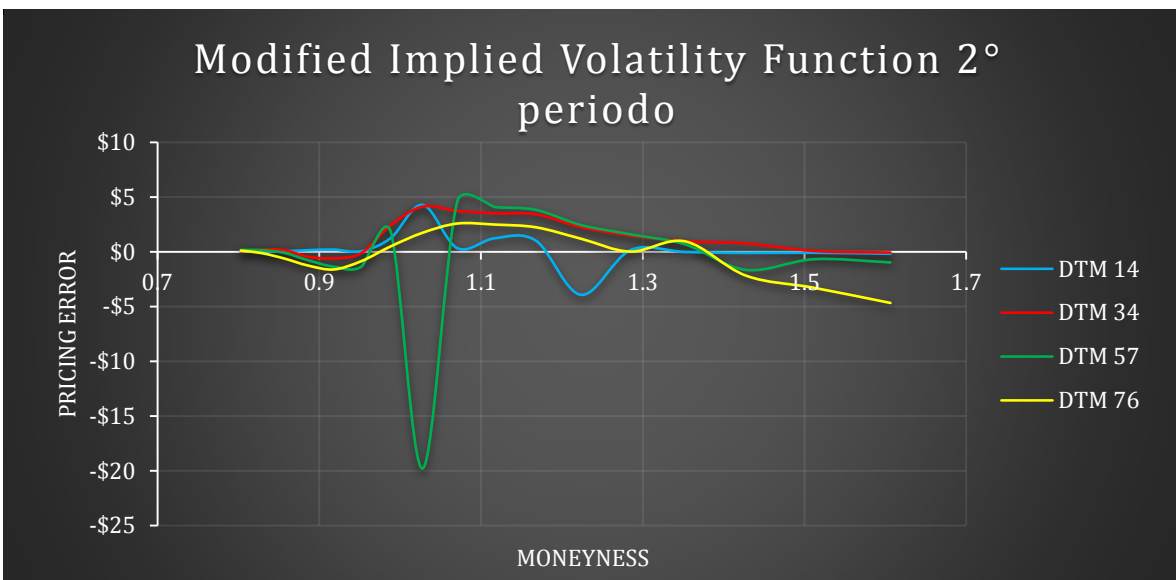


Figura 6

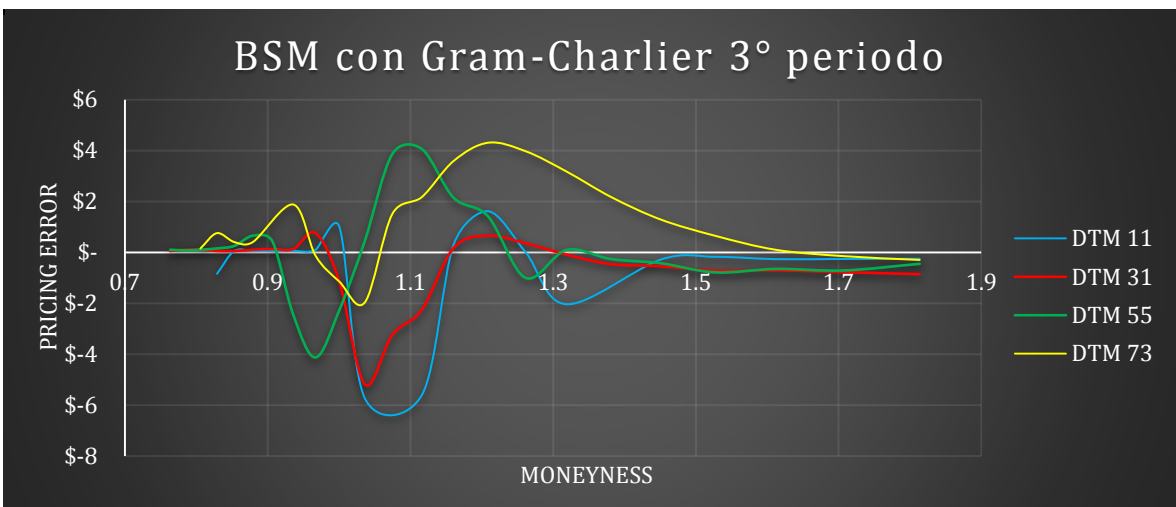


Figura 7

Infine si è utilizzato il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo per permettere di dare alla volatilità un percorso dinamico invece che considerarla statica. Esso mostra un andamento atipico



rispetto agli altri. È possibile vedere che il più basso scarto quadratico medio lo si osserva non nel terzo figura 8, ma nel primo periodo, figura 9, mentre nel secondo raggiunge livelli altissimi. Una possibile spiegazione si fonda sulla possibilità che il modello in analisi vada a sovra-prezzare le opzioni rispetto ai valori osservati sul mercato. Un eventuale motivo può risiedere nel fatto che la distribuzione dei rendimenti, alla base del modello GARCH sia una normale standard, ipotesi irrealistica. Infatti nel primo periodo, sulla base di una volatilità storica bassa, restituisce un valore minore o simile a quello visto sul mercato<sup>20</sup>, mentre nel secondo, a seguito di volatilità passata molto alta, restituisce un valore per la *call* molto più elevato di quello effettivamente riscontrato.

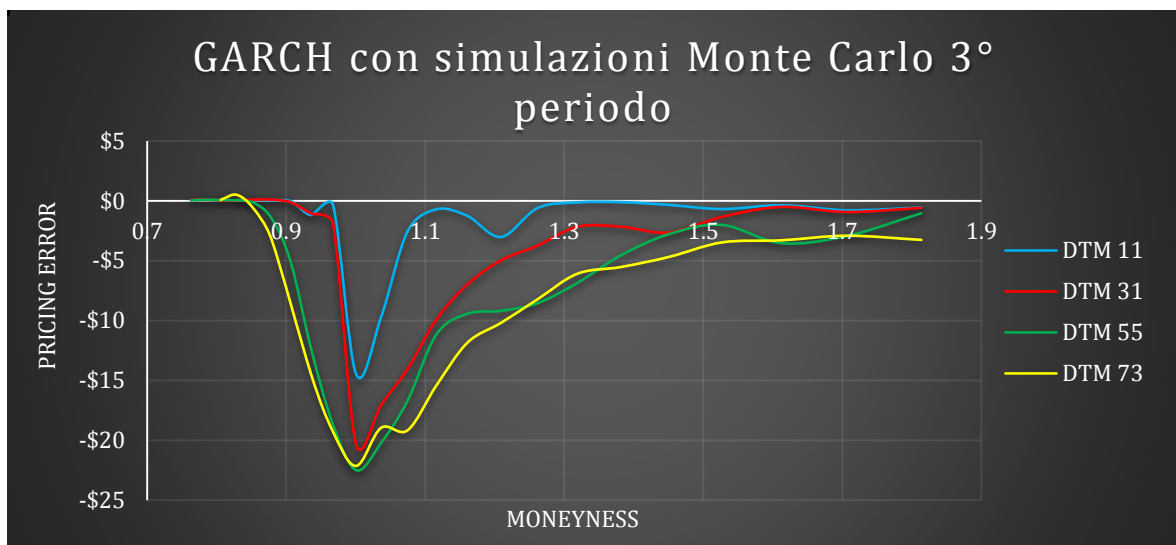


Figura 8

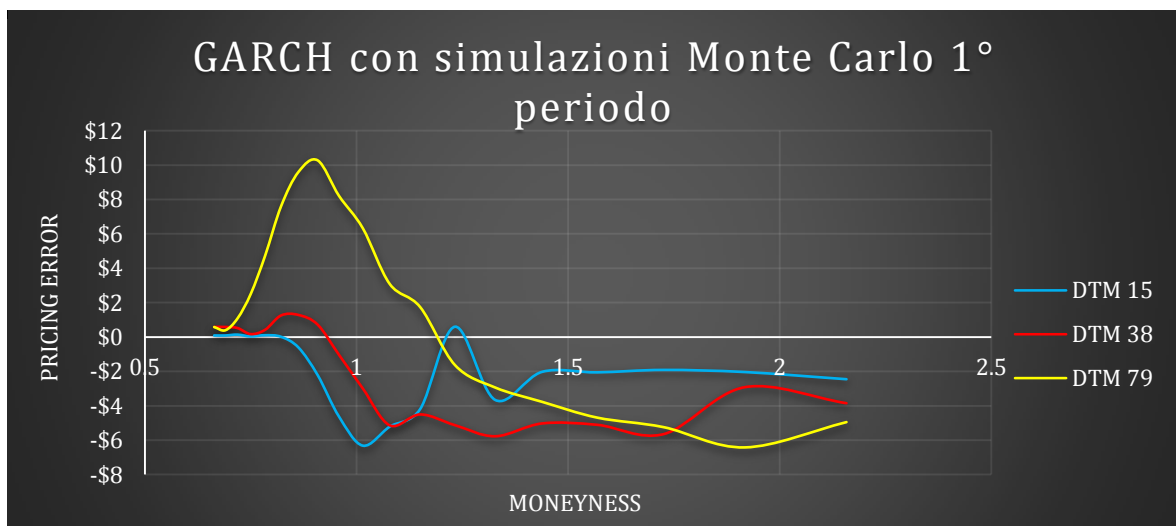


Figura 9

In ultimo, per il terzo periodo, ragionando analogamente ci si aspetta un prezzo finale maggiore di quello di mercato ma con uno scarto inferiore al secondo ma maggiore al privo, cosa che si verifica effettivamente. Questo perché il GARCH replica in maniera dinamica<sup>21</sup> il passato nel futuro. Ciò porta ad errori importanti quando vi è elevata differenza tra volatilità passata ed attuale, e

<sup>20</sup> Si ricorda la relazione positiva tra volatilità e prezzo dell'opzione.

<sup>21</sup> Quindi aiuta a superare il limite del modello di Black-Scholes-Merton.

soprattutto, come si è potuto vedere, quando la prima è maggiore della seconda. Il lavoro ha quindi mostrato come la volatilità influenza in misura significativa il *pricing* delle opzioni e soprattutto come i modelli tendono a fallire quando<sup>22</sup> i mercati sono in cambiamento, confermando quindi che la situazione passata non riflette necessariamente, in misura accurata, il presente. Si è comunque potuto vedere che alcune delle assunzioni possono essere migliorate, e quindi arrivare a miglioramenti, grazie ai quali si riesce a replicare con maggiore fedeltà l'andamento dei mercati.

---

<sup>22</sup> Alcuni in misura maggiore rispetto ad altri.

	<b>DTM</b>	<b>BSM</b>	<b>BSM con IV</b>	<b>BSM con G-C</b>	<b>GARCH con MC</b>	<b>MIVF</b>
<b>Primo Periodo</b>	15	20,67	4,43	2,56	7,72	1,90
	38	82,16	13,90	10,19	11,95	0,96
	79	299,46	60,26	49,79	28,79	8,36
	<b>SQM di periodo</b>	<b>134,10</b>	<b>26,19</b>	<b>20,84</b>	<b>16,15</b>	<b>3,74</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>11,58</b>	<b>5,12</b>	<b>4,57</b>	<b>4,02</b>	<b>1,93</b>
<b>Secondo Periodo</b>	14	10,22	2,38	2,25	129,90	1,89
	34	35,33	11,11	10,67	377,87	3,40
	57	131,70	53,38	52,53	756,90	27,97
	76	115,24	58,92	57,82	744,42	3,79
	<b>SQM di periodo</b>	<b>73,12</b>	<b>31,44</b>	<b>30,82</b>	<b>502,27</b>	<b>9,26</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>8,55</b>	<b>5,61</b>	<b>5,55</b>	<b>22,41</b>	<b>3,04</b>
<b>Terzo periodo</b>	11	0,82	1,47	3,64	16,28	1,49
	31	2,99	4,31	2,44	55,68	2,92
	55	12,08	12,46	3,50	109,91	4,84
	73	20,26	16,69	4,04	125,71	2,76
		<b>SQM di periodo</b>	<b>9,04</b>	<b>8,73</b>	<b>3,40</b>	<b>76,89</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>3,01</b>	<b>2,96</b>	<b>1,84</b>	<b>8,77</b>	<b>1,73</b>

Tabella 1<sup>23</sup>

<sup>23</sup> La tabella mostra la media degli scarti al quadrato per ogni modello in ogni periodo per ogni specifica scadenza e la sua radice quadrata.

## d. Bibliografia

BACKUS, D., FORESI, S., LI, K., WU, L., 1997: "Accounting for Biases in Black-Scholes," Manuscript, The Stern School at New York University.

BAKSHI, G., CAO, C., CHEM, Z., 1997: "Empirical performance of alternative option pricing models," J. Finance, 52, 2003-2050.

BLACK, F. e M., SCHOLE (1973): "The valuation of Option and Corporate Liabilities," J. Political Econ., 81, 637-659.

BOLLERSEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," J. Economet., 31, 307-327.

BOYLE, P. (1977): "Options: a Monte Carlo Approach," J. Financial Econ., 4, 323-338.

CHRISTOFFERSEN, P. 2012: "Elements of Financial Risk Management," second ed. The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5, 1GB, UK.

CHRISTOFFERSEN, P., DORION, C., JACOBS, K., WANG, Y., 2010a: "Volatility components: Affine restrictions and non-normal innovations," J. Bus. Econ. Stat., 28, 483-502.

CHRISTOFFERSEN, P., ELKAMHI, R., FEUNOU, B., JACOBS, K., 2010b: "Option valuation with conditional heteroskedasticity and non-normality," Rev. Financ. Stud. 23, 2139-2183.

CHRISTOFFERSEN, P., HESTON, S., JACOBS, K., 2006: "Option valuation with conditional skewness," J. Econom., 131, 253-284.

CHRISTOFFERSEN, P., JACOBS, K., 2004a: "Which GARCH model for option valuation?" Manag. Sci. 50, 1204-1221.

CHRISTOFFERSEN, P., JACOBS, K., ORNTHANALAI, C., 2010: "GARCH option valuation, theory and evidence," In: Duan. J.-C., Gentle. J., Hardle, W.(Eds.), Handbook of Computational Finance, forthcoming. Springer, New York, NY.

COX, J.C., S.A. ROSS, 1976: "The valuation of options for alternative stochastic processes," Journal of Financial Economics, 3, 145-166.

DERMAN, E., KANI, (1994): "Riding on a Smile," Risk, 32-9.

DUAN, J.-C. (1995): "The GARCH Option Pricing Model," Math. Finance 5, No. 1, 13-32.

DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R., 1998: "Implied volatility functions: Empirical tests," J. Finance 53, 2059-2106.

DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R., E., (1998): "Implied Volatility Functions: Empirical Tests," The Journal of Finance, 53, 2059-2106.

DUPIRE, B., (1994): "Pricing with a Smile," Risk Magazine, Incisive Media.

ENGLE, R. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation," Econometrica, 50, 987-1008.

ENGLE, R., e C., MUSTAFA (1992): "Implied ARCH Models from Options Prices," J. Economet., 52, 289-311.

HULL, J. and A., WHITE (1987): "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," J. Finance, 42, 281-300.

HULL, J., 2013: "Options, Futures and Other Derivatives," eighth ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

MERTON, R. (1973): "The theory of Rational Option Pricing," Bell J. Econ. Management Sci., 4, 141-183.

NELSON, D. (1990): "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model," Economet. Theory, 6, 318-334.

RUBINSTEIN, M., (1994): "Implied Binomial Trees," Journal of Finance.

SHEIKH, A. (1991): "Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing," J. Financial Quant. Analysis., 26, 459-475.

## e. Sitografia

Bloomberg, Database,

<http://www.bloombergssoftware.com>

Federal Reserve System, Database,

<http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>

Social Science Research Network, Pubblicazioni,

<http://www.ssrn.com/en/>

The Journal of Derivatives, Pubblicazioni,

<http://www.ijournals.com/toc/jod/current>

Thomson Reuters, Database,

<http://financial.thomsonreuters.com/en/products/tools-applications/trading-investment-tools/eikon-trading-software.html>



**Dipartimento di Economia e Finanza**  
**Cattedra di Financial and Credit Derivatives**

**STANDARD AND POOR'S 500 CALL OPTION:  
PRICING E BACKTESTING**

**Relatore**

**Prof.re Federico Calogero Nucera**

**Candidato**

**Antonio Oliva**

**Matricola**

**658021**

**Correlatore**

**Prof.re Domenico Curcio**

**ANNO ACCADEMICO 2014/2015**

# Standard and Poor's 500 Call Option: Pricing e Backtesting

a.	Introduzione.....	2
b.	Capitoli .....	4
1.	MODELLI .....	4
1.1.	Overview .....	4
1.2.	Black-Scholes-Merton.....	7
1.3.	Implied Volatility .....	13
1.4.	BSM con Gram-Charlier .....	15
1.5.	Garch Con Simulazioni Monte Carlo .....	20
1.6.	Modified Implied Volatility Function .....	24
2.	DALLA TEORIA ALLA PRATICA .....	26
2.1.	Generali .....	26
2.2.	Black-Scholes-Merton.....	28
2.3.	BSM con Implied Volatility .....	28
2.4.	BSM con Gram-Charlier .....	29
2.5.	GARCH con simulazioni Monte Carlo .....	30
2.6.	Modified Implied Volatility Function .....	32
3.	RISULTATI NUMERICI.....	34
3.1.	Generali .....	34
3.2.	Dati e fonti.....	34
3.1.	Primo Periodo: 23 dicembre 2008.....	35
3.2.	Secondo Periodo: 28 ottobre 2011 .....	45
3.3.	Terzo Periodo: 03 ottobre 2012.....	55
c.	Conclusioni.....	64
d.	Bibliografia.....	67
e.	Sitografia .....	69



## a. Introduzione

Questo elaborato implementa empiricamente alcuni tra i più noti modelli di *pricing* per una *call option* europea scritta sull'indice statunitense Standard & Poor's 500, dopo averne fornito una breve descrizione teorica.

La volatilità assume un ruolo cruciale nell'analisi dei derivati e risulta importante valutare il comportamento delle specifiche metodologie, considerando diversi scenari di base. Il lavoro considera un orizzonte temporale che ha inizio nel 2008 e si conclude alla fine del 2012, suddiviso a sua volta in tre diversi intervalli che hanno come discriminante il livello di volatilità del sottostante. Il primo periodo è caratterizzato da una volatilità inizialmente bassa per poi crescere, a seguito della crisi, drasticamente; il secondo, al contrario, è contraddistinto da un esordio instabile ed epilogo stabile; il terzo, in ultimo, presenta stabilità, e quindi volatilità bassa, per l'intera durata. L'intento finale è quello di confrontare i risultati ricavati utilizzando i vari modelli, e valutarne le diverse *performance* che questi hanno nel tempo, e tra loro per fornire un risultato sintetico in termini di *pricing error* e radice dell'errore quadratico medio, rispetto all'effettivo prezzo osservato sul mercato.

Entrando nel merito della trattazione le metodologie presentate sono le seguenti:

- il modello di Black, Scholes e Merton;
- il modello basato sulla volatilità implicita;
- il modello che sfrutta l'espansione di Gram-Charlier;
- il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo;
- il modello che utilizza una versione modificata dell'*Implied Volatility Function*.

L'elaborato si divide in tre capitoli, conclusioni e infine relativa bibliografia e sitografia. In particolare il primo capitolo, dopo aver dato una visione d'insieme del derivato in questione, descrive nel dettaglio i cinque modelli menzionati, ponendo l'attenzione sulle motivazioni alla base delle ipotesi e delle assunzioni sottostanti, un passaggio fondamentale per capire i comportamenti dei modelli. Il secondo capitolo invece, dopo aver motivato la scelta relativa ai dati raccolti, espone le modalità con le quali la teoria viene applicata nella pratica, descrivendo tutti i passaggi per l'implementazione dei modelli e la modalità tramite la quale è possibile arrivare al risultato finale. Il terzo capitolo mostra infine i risultati numerici raggiunti,

confrontandoli sia numericamente che graficamente sulla base delle diverse *performance*, dopo aver presentato il metodo di ricerca dei dati e le fonti. Nelle conclusioni si fornisce una visione d'insieme del lavoro presentato alla luce dei risultati ottenuti, descrivendo i pregi e i difetti dei modelli, evidenziati dalla realtà.

## b. Capitoli

### 1. MODELLI

#### 1.1. Overview

Un'opzione europea è un contratto tra due controparti che dà il diritto a chi compra, ma non l'obbligo, di acquistare a scadenza, ad un predeterminato<sup>1</sup> prezzo d'esercizio, una data quantità di sottostante. In generale un'opzione può essere scritta su diversi tipi di sottostante, infatti esistono sul mercato opzioni scritte su: azioni, su indici azionari, su *commodities*, su tassi di interesse, su tassi di cambio<sup>2</sup>. Nel presente studio si focalizzerà l'attenzione sulle *call option* scritte sull'indice azionario statunitense Standard and Poor's 500.

Il *payoff* a scadenza di una opzione *call* europea è

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K; 0) \quad (1)$$

- $S_T$  rappresenta il valore del sottostante a scadenza;
- $K$  rappresenta il prezzo di esercizio o *strike price* stabilito in sede di acquisto del derivato.

Graficamente il risultato è quello presentato in Figura 1:



Figura 1

<sup>1</sup> Predeterminato in sede di acquisto della *call option*. Infatti in sede di sottoscrizione l'unico pagamento è quello relativo al premio o prezzo dell'opzione, ossia l'oggetto di interesse di questo lavoro.

<sup>2</sup> Queste sono le più note.

Il possessore dell'opzione deciderà di esercitarla quando il prezzo del sottostante sarà superiore al prezzo di esercizio<sup>3</sup>.



Figura 2<sup>4</sup>

La valutazione di opzioni è di cruciale importanza nel panorama finanziario e particolare attenzione vi è stata data a causa della particolare relazione che esiste tra prezzo del derivato e valore del sottostante, la quale risulta non essere lineare come è possibile notare dalla Figura 3. Il grafico sottostante è stato costruito considerando una *call option* con *strike* a 1450\$ e *days to maturity* pari a 55, il cui prezzo, all'aumentare del sottostante, è calcolato con il modello di Black-Scholes-Merton.

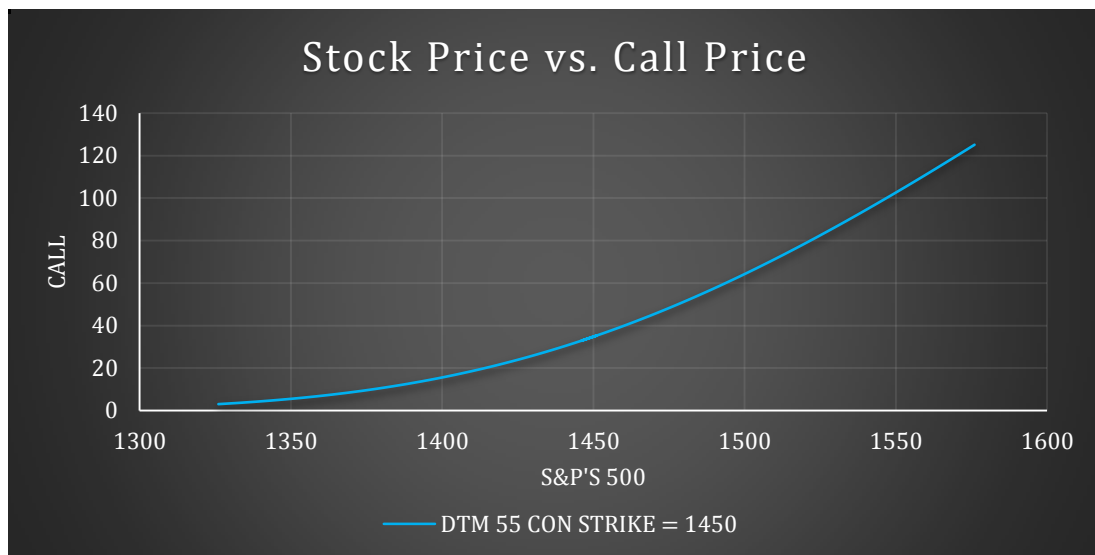


Figura 3

<sup>3</sup> In questo caso non si parla di profitto, poiché per avere un profitto, strettamente positivo, il prezzo del sottostante dovrà essere superiore al prezzo di esercizio maggiorato del costo stesso dello strumento derivato. In ogni caso l'esercizio avverrà non appena  $S_T$  supererà  $K$ , poiché il possessore avrà interesse a ridurre le perdite.

<sup>4</sup> Il grafico in questione raffigura il profitto o la perdita per un acquirente di una *call*, dato che considera il premio iniziale pagato, in questo caso pari a 5.

Inoltre, data la complessità, dovuta alle molteplici variabili che influenzano il suo prezzo, è possibile dire che non esiste un modello univoco che fornisce una stima esatta del suo valore.

I fattori che influenzano il prezzo delle opzioni su azioni e/o su indici sono sei:

1. Il valore corrente del sottostante  $S_t$  ;
2. La vita residua in giorni  $T$ ;
3. La volatilità giornaliera del sottostante  $\sigma$ ;
4. Il tasso di interesse privo di rischio su base giornaliera  $r_f$ ;
5. Il valore attuale dei dividendi attesi,  $D$ , o tasso di dividendo atteso giornaliero  $q$ ;
6. Prezzo di esercizio o *strike price*  $K$ .

Il prezzo di esercizio  $K$ , il valore corrente del sottostante  $S_t$ , la vita residua  $T$ , il tasso di interesse  $r_f$  e il tasso di dividendo atteso, o il valore attuale, sono noti<sup>5</sup>. La variabile che incide in maniera significativa sul valore dell'opzione ed è di difficile derivazione a priori è la volatilità delle variazioni del valore del sottostante. Si può affermare che la volatilità ed il valore della *call option* sono legati da una relazione positiva. Questo perché una *call option out-of-the-money*<sup>6</sup> ha più possibilità di finire *in-the-money*<sup>7</sup>; allo stesso modo una *call option in-the-money* ha più possibilità di finire *out-of-the-money*, ma siccome essa ha un limite inferiore (Figura 1 e 2), l'incremento incide in misura maggiore rispetto al possibile decremento<sup>8</sup>. Per questo motivo la volatilità rappresenta un elemento di fondamentale importanza per valutare le opzioni. I modelli che saranno presentati si differenziano soprattutto per come stimano la volatilità e come essa è sfruttata per il calcolo finale del prezzo dell'opzione.

---

<sup>5</sup> Questo vale strettamente per i primi tre fattori ( $K, S_t, T$ ); il tasso di interesse privo di rischio non è di semplice calcolo. Solitamente si utilizza il rendimento del titolo di stato del paese di origine del sottostante con scadenza simile poiché  $r_f$  indicherebbe il costo opportunità di un investimento. Esistono diversi titoli di stato, ma quasi nessuno con la stessa scadenza dell'opzione. D'altra parte alcuni analisti utilizzano per tasso privo di rischio il tasso LIBOR (il tasso al quale le banche si prestano liquidità overnight al di fuori dell'area Euro) oppure il tasso EURIBOR (il tasso al quale le banche si prestano liquidità overnight all'interno dell'area Euro), ma per la presente analisi si ipotizzerà un  $r_f$  fisso per tutte le scadenze. Per quanto riguarda i dividendi attesi o il tasso di dividendo è possibile effettuare una stima su ciò che è avvenuto in passato la quale risulta essere precisa.

<sup>6</sup>  $S_t < K$

<sup>7</sup>  $S_t > K$

<sup>8</sup> HULL, J., 2013: "Options, Futures and Other Derivatives," eighth ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, Chap. 10.

## 1.2. Black-Scholes-Merton

Il primo modello che si considera è quello di Black-Scholes-Merton<sup>9</sup>. L'idea di base è che gli investitori attendano un rendimento che non dipenderà dal valore delle azioni<sup>10</sup>, ma è lo stesso a prescindere da questo valore, e che in un breve intervallo di tempo, quindi per  $\Delta t$  che tende a 0 il tasso di varianza del titolo è lo stesso, indipendentemente dal livello del prezzo.

Come punto di inizio si può considerare la seguente equazione differenziale in tempo continuo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (2)^{11}$$

Che rappresenta l'andamento del prezzo di un'azione; i parametri sono:

- $\frac{dS}{S}$  è il rendimento atteso per unità di tempo;
- $\mu$  è il rendimento atteso dell'azione<sup>12</sup>;
- $\sigma$  è la volatilità del rendimento dell'azione<sup>13</sup>;
- $S$  è il prezzo dell'azione.

In tempo discreto si può dire che:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

Dove:

- $\varepsilon$  rappresenta una estrazione casuale da una distribuzione normale standard che si ipotizza sia quella seguita dalla variazione del prezzo delle azioni.

---

<sup>9</sup> Fischer Black, Myron Scholes hanno derivato l'equazione parziale differenziale fondamentale. Robert Merton è riuscito a darne una dimostrazione in maniera più generale nello stesso anno, basandosi sul modello del *Capital Asset Pricing Model*. Nel 1997 Scholes e Merton hanno ricevuto il premio Nobel per l'economia, Black era morto nel 1995. Per i risultati simili raggiunti si identificherà il modello come di Black-Scholes-Merton.

<sup>10</sup> Ciò che è detto per le azioni, allo stesso modo vale per gli indici azionari.

<sup>11</sup> Noto come *Geometric Brownian Motion*.

<sup>12</sup> Ciò che gli investitori attendono di ricevere investendo in questo strumento finanziario.

<sup>13</sup> Volatilità che può essere presa dalla serie storica del titolo, con un intervallo di tempo variabile a seconda delle necessità.

Il valore delle opzioni è funzione sia del valore del sottostante che del tempo, quindi è importante sapere come varia questa grandezza con l'evolversi delle variabili indipendenti. Uno strumento matematico che aiuta a capire questo processo è il lemma di Itô, il quale è utile per calcolare il differenziale di una particolare funzione in un processo stocastico. Il risultato finale che si raggiunge è il seguente:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (4)$$

Dove:

- $f$  è la funzione che dipende da  $S$  e  $t$ ;
- $dz$  è un processo di Wiener.

Ciò suggerisce che sia il sottostante  $S$ , sia la funzione  $f$ , ossia il derivato in questione, condividono la stessa fonte di incertezza, rappresentata proprio dal processo di Wiener, il quale incorpora una componente stocastica. Tramite il lemma di Itô è possibile dimostrare che il prezzo delle azioni segue una distribuzione di tipo log-normale e che quindi l'incertezza o deviazione standard è direttamente proporzionale alla radice quadrata del tempo<sup>14</sup>. Detto questo si può affermare che:

$$\ln \left( \frac{S_T}{S_t} \right) \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma^2 T \right] \quad (5)$$

Dove:

- Il termine sulla sinistra indica il tasso di rendimento in tempo continuo dell'azione sottostante;
- $S_t$  è il prezzo al momento dell'analisi e  $S_T$  è il prezzo a scadenza.

Il valore atteso sarà quindi dato da:

$$\mathbb{E}(S_T) = S_t e^{\mu T}$$

Mentre la varianza è:

---

<sup>14</sup> Inteso come intervallo da ora fino a quando alla scadenza dell'opzione.

$$Var(S_T) = S_t^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Nel modello di Black-Scholes-Merton la volatilità è calcolata sulla base di dati storici. Essa rappresenta la deviazione standard della variazione del prezzo del sottostante calcolata su un determinato intervallo di tempo e poi resa omogenea in termini temporali alle altre variabili. Dopo aver descritto gli strumenti, è utile vedere quali sono i concetti che risiedono alla base della formulazione di Black-Scholes-Merton.

Grazie al lemma di Itô, sia il sottostante che il derivato si basano sulla stessa fonte di incertezza, quindi è possibile creare un portafoglio che va ad eliminare il rischio. Esso è quindi completamente sicuro e crescerà al tasso di interesse *risk-free*.

È possibile comporre un portafoglio senza rischio in questo modo:

−1: *derivato*

$$+ \frac{\partial f}{\partial S} : \text{unità di sottostante}$$

Il valore del portafoglio sarà:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

E la sua rispettiva variazione di valore:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

Inoltre poiché il portafoglio cresce al tasso *risk-free*<sup>15</sup>:

$$\Delta \Pi = r_f \Pi \Delta t$$

Tenendo a mente la (2) e la (4), sostituendo i valori otteniamo la *partial differential equation* di Black e Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r_f S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_f f \quad (6)^{16}$$

<sup>15</sup> L'analisi si basa sull'assunzione che ci si trova in un mondo *arbitrage free*.

<sup>16</sup> Quando il titolo sottostante paga dividendi questa equazione si trasforma semplicemente in:  
 $\frac{\partial f}{\partial t} + (r_f - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_f f$ .



Questa relazione è di fondamentale importanza poiché, come si può notare, qualsiasi fonte di incertezza è scomparsa e infatti il termine  $dz$  non è più presente. Ciò sta ad indicare che un portafoglio composto come quello precedente guadagnerà sicuramente il tasso di interesse privo di rischio. La stessa, risulta quindi essere una condizione necessaria e sufficiente affinché uno strumento che dipende dal sottostante e dal tempo possa essere definito un derivato.

Una volta derivata la *differential partial equation* e risolta, includendo le *boundary conditions* (1), si ottiene la formula finale di Black-Scholes-Merton per una *call option*. In aggiunta, un ulteriore metodo è quello definito sulla base del principio della *risk neutral valuation*, il quale si fonda su tre passaggi:

- 1) Il tasso di rendimento è il *risk-free rate*;
- 2) Si calcola il *pay-off* atteso dell'opzione;
- 3) Il valore ottenuto si sconta al *risk-free rate*.

Formalmente si ha che in un mondo neutrale al rischio:

$$\mathbb{E}^Q(S_T) = S_t e^{\mu T}$$

Dove:

- $\mathbb{E}^Q$  rappresenta il valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio.

Quindi

$$Payoff = S_t e^{r_f T} - K$$

In questo modo

$$\mathbb{E}^Q(S_T - K) = S_t e^{r_f T} - K$$

$$e^{-r_f T} (S_t e^{r_f T} - K) = S_t - K e^{-r_f T}$$

Dove:

- $r_f$  è il *risk-free rate*.

Il valore atteso di una opzione *call* sarà:

$$\mathbb{E}^Q[\max(S_T - K; 0)]$$

Mentre quello attualizzato:

$$c = e^{-rfT} \mathbb{E}^Q[\max(S_T - K; 0)] \quad (7)$$

Per arrivare alla classica formula della *call option* sono necessari ulteriori passaggi; si definisce  $g(S_T)$  come una funzione di densità di una distribuzione log-normale ( $S_T$ ), quindi

$$\mathbb{E}^Q[\max(S_T - K; 0)] = \int_K^{+\infty} (S_T - K)g(S_T)dS_T \quad (8)$$

Detto ciò, la variabile  $\ln(S_T)$  di distribuirà come una normale come media pari a:

$$m = \ln[\mathbb{E}^Q(S_T)] - \frac{s^2}{2}$$

Con:

- $s$  che rappresenta la deviazione standard della distribuzione della variabile  $\ln(S_T)$ , che è  $\sigma\sqrt{T}$

Poiché è una distribuzione normale, è possibile standardizzarla, ottenendo una nuova variabile così definita:

$$Q = \frac{\ln(S_T) - m}{s}$$

La cui funzione di densità sarà:

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Q^2}{2}}$$

È possibile quindi trasformare la (8) in

$$\int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} (e^{Qs+m} - K)h(Q)dQ$$

Proseguendo con l'algebra

$$S_t e^{r_f T} \int_{\frac{[\ln(K)-m]}{s}}^{+\infty} h(Q-s) dQ - K \int_{\frac{[\ln(K)-m]}{s}}^{+\infty} h(Q) dQ \quad (9)$$

Prendendo separatamente i due integrali della (9) notiamo che, con le dovute trasformazioni, il primo indica:

$$N \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] \quad (10)$$

Con  $N[.]$  che rappresenta la funzione di distribuzione cumulata di una normale standard. La (10) viene definita con  $N(d_1)$ <sup>17</sup>

Per il secondo integrale il ragionamento è analogo e si ottiene

$$N \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]$$

Il quale rappresenta la probabilità di esercitare l'opzione e viene indicato con  $N(d_2)$ <sup>18</sup>. Sostituendo il tutto nella (7) si ottiene l'equazione finale per una *call*:

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r_f T} N(d_2)$$

Risulta ora comodo riassumere tutte le ipotesi alla base dell'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton in pochi punti:

- In primo luogo si è visto che il sottostante segue un *Geometric Brownian Motion* con  $\mu$  e  $\sigma$  che non variano nel tempo;
- Il mercato è libero sia da tasse che da costi di transazione quindi ideale rispetto a quello che si presenta nella realtà;
- Le vendite allo scoperto non hanno limiti e sono sempre permesse;

---

<sup>17</sup> In caso di tasso di dividendi  $q$  si trasforma in:  $d_1 = \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$ .

<sup>18</sup> In caso di tasso di dividendi  $q$  si trasforma in:  $d_2 = \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$ .

- Tutti gli strumenti in analisi sono perfettamente divisibili, cosa che potrebbe essere parzialmente vera se i volumi presi in considerazione sono adeguatamente elevati;
- Il mercato si suppone sia efficace almeno in senso semi-forte, dato che i prezzi delle *securities* riflettono tutte le informazioni, tranne quelle privilegiate<sup>19</sup> e quindi non esistono opportunità di arbitraggio senza rischio;
- L'analisi si basa un'ipotesi di *trading* continuo, senza nessuna sosta, una approssimazione che facilita i calcoli;
- Il tasso di interesse privo di rischio,  $r_f$  è fisso e uguale per tutte le scadenze, ipotesi di difficile realizzazione dato che il mercato è caratterizzato quasi sempre da una curva dei tassi non *flat*, nello specifico crescente, volta a riflettere il premio per la liquidità e il maggior rischio per periodi di tempo più lontani dal presente.

### 1.3. Implied Volatility

Una metodologia derivante direttamente da quella analizzata nel paragrafo precedente sfrutta la volatilità implicita nel prezzo delle *call*. Si è visto come la volatilità ricopra un ruolo decisamente importante, dato che risulta essere una delle variabili che potrebbe non avere valore univoco in senso di calcolo. È utile iniziare col dire che i *traders* utilizzano molto il modello di Black-Scholes-Merton, ma con una differenza importante: essi tengono in considerazione che la volatilità non è costante rispetto al sottostante. Essa è infatti calcolata in maniera dipendente dal prezzo di esercizio e dal *time-to-maturity* dell'opzione in oggetto. Una possibile motivazione che spinge gli operatori a preferire questa metodologia sta nell'evidenza che i dati mostrano. Infatti i tassi di variazione del sottostante mostrano un andamento diverso rispetto alla nota distribuzione normale alla base del modello del paragrafo precedente.

È necessario quindi introdurre il concetto di *volatility smile*<sup>20</sup>: essi altro non sono che unzioni con variabile indipendente il prezzo di esercizio e variabile dipendente la volatilità implicita<sup>21</sup>.

---

<sup>19</sup> Fama 1970.

<sup>20</sup> In realtà, quando parliamo di opzioni su azioni e non di opzioni su tassi di cambio, sarebbe meglio parlare di *volatility smirk*, ma la letteratura fa riferimento in generale ai *volatility smile*, salvo poi distinguere i vari casi.

<sup>21</sup> Il primo a studiarli è stato Rubinstein nel (1985).

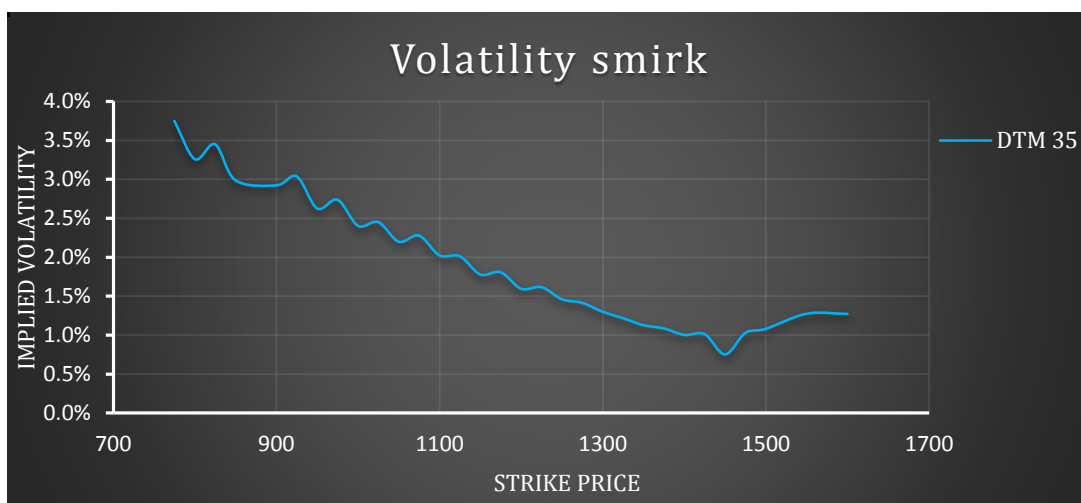


Figura 4

Nella Figura 4<sup>22</sup> si evince che la volatilità diminuisce al crescere di  $K$  fino ad un determinato livello, per poi crescere. Risulta ragionevole supporre che le opzioni con prezzo di esercizio basso, ossia *call deep-in-the-money* abbiano volatilità implicite più elevate rispetto a *call* con prezzi di esercizio elevati, quindi *deep-out-of-the-money*. Questa caratteristica implica un ragionamento importante, la coda sinistra della distribuzione di probabilità per una opzione su azioni sarà diversa rispetto a quella log-normale. La differenza si sostanzia in una coda sinistra implicita più spessa rispetto a quella teorica, mentre la coda destra si comporta in maniera opposta. Tutto ciò suggerisce che la probabilità per una *call* di finire *in-the-money* è minore nella realtà rispetto alla teoria e una conseguenza importante è che il modello di Black-Scholes-Merton sopra-prezzerebbe *call option* su azioni *out of the money*. Il dubbio riguarda quindi la possibilità, guardando l'andamento reale delle opzioni, di estrapolarne la volatilità dai valori di mercato. Intuitivamente, l'obiettivo è derivare la volatilità implicita invertendo la formula di Black-Scholes-Merton:

$$\sigma^{IV} = c_{BSM}^{-1}(S_t, K, T, r, q, c^{mkt})$$

Dove:

- $\sigma^{IV}$  è la volatilità implicita;
- $c_{BSM}^{-1}$  è la funzione inversa dell'equazione di Black-Scholes-Merton;

<sup>22</sup> In figura è rappresentato l'andamento della volatilità implicita giornaliera al crescere dello *strike* su *call option* sullo S&P 500 del 27 ottobre 2011 con *maturity* di 35 giorni.

- $c^{mkt}$  è il prezzo di mercato della *call option*.

Guardando la derivazione del modello precedente si nota che non esiste una formula chiusa che restituisce la volatilità, conoscendo il prezzo della *call*. Fortunatamente è possibile comunque trovarne il valore, avvalendosi di metodi di risoluzione presenti in diversi pacchetti informatici<sup>23</sup>. Nel capitolo due si vedrà nel dettaglio come impostare i parametri in modo da ottenere la variabile desiderata.

#### 1.4. BSM con Gram-Charlier

Un altro modo per ovviare all'ipotesi di normalità dei tassi di variazione del sottostante e quindi modellare una distribuzione più simile a quelle che si verifica empiricamente è rappresentato dall'utilizzo dell'espansione di Gram-Charlier. Una distribuzione log-normale (figura 5) si caratterizza dall'essere simmetrica rispetto alla media e non presentare curtosi<sup>24</sup>.

L'assunzione di normalità nei mercati finanziari infatti è sistematicamente violata, infatti confrontando anche solo graficamente la distribuzione teorica (Figura 5<sup>25</sup>) con quella empirica (figura 6<sup>26</sup>), è possibile notare questa differenza.

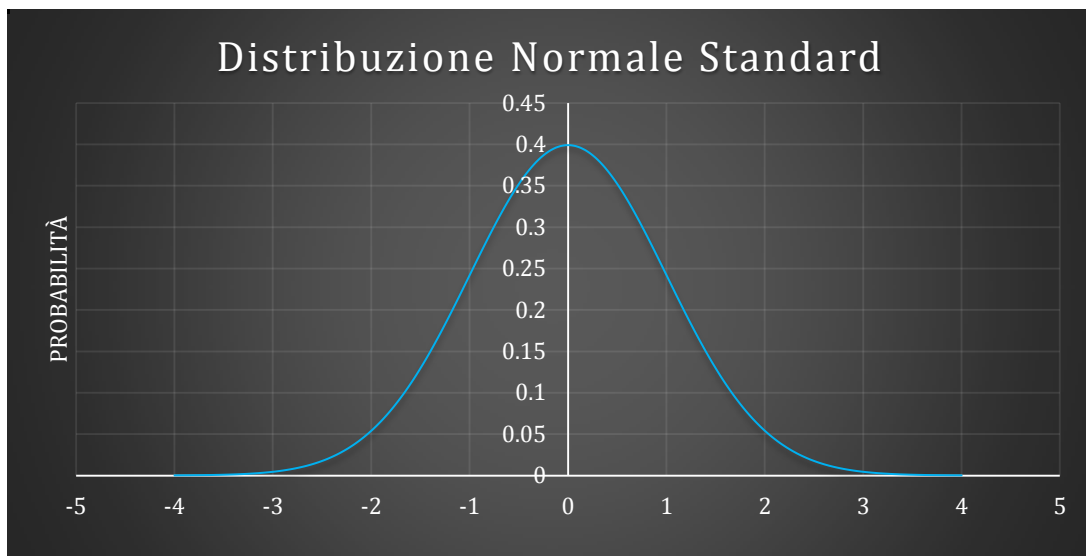


Figura 5<sup>27</sup>

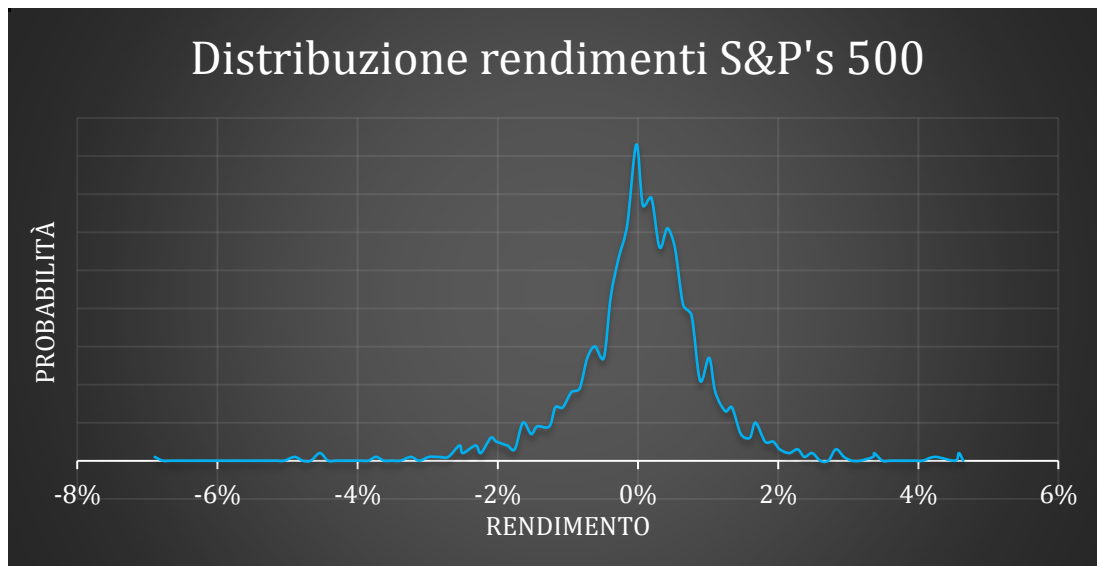
<sup>23</sup> Un esempio è la funzione "Solver" di Excel.

<sup>24</sup> In realtà la curtosi di una normale è pari a 3, ma solitamente un indicatore di più facile comprensione è l'*excess kurtosis*, che è rappresentato dalla curtosi - 3.

<sup>25</sup> Nel caso specifico con media pari a 10 e varianza pari a 4.

<sup>26</sup> Distribuzione empirica dei rendimenti giornalieri dello S&P's 500.

<sup>27</sup> La distribuzione mostrata ha media pari a zero e varianza unitaria.



La distribuzione mostrata dai dati è lontana dall'essere una normale, e una ulteriore prova si ha utilizzando il test Shapiro-Wilk per la normalità. Infatti si ottiene il seguente risultato<sup>29</sup>:

Title:  
shapiro - wilk Normality Test

Test Results:  
STATISTIC:  
w: 0.8742  
P VALUE:  
< 2.2e-16

Il *p-value* è prossimo allo zero, quindi rifiutiamo l'ipotesi nulla relativa alla normalità dei rendimenti con un livello di confidenza superiore al 99%. Inoltre le statistiche base ed in particolare i valori relativi al momento terzo e quarto sono:

---

<sup>28</sup> I rendimenti vanno dal 10/01/2011 fino al 31/12/2014.

<sup>29</sup> Il test è stato effettuato con il software statistico RStudio.

```

> basicStats(rendp)
              rendp
nobs          2264.000000
NAS            0.000000
Minimum       -9.469514
Maximum       10.957196
1. Quartile   -0.448417
3. Quartile   0.582017
Mean          0.021383
Median        0.080088
Sum           48.410026
SE Mean       0.028184
LCL Mean      -0.033887
UCL Mean      0.076652
Variance      1.798382
Stdev         1.341038
Skewness      -0.328251
Kurtosis      10.247412

```

Dove:

- *rendp* rappresenta il vettore dei rendimenti giornalieri dello S&P's 500 dal 10/01/2011 al 31/12/2104.

Una curtosi diversa da zero indica che gli eventi estremi sono più probabili di quanto la teoria statistica afferma, mentre gli altri, meno. Nello specifico, come si osserva dalla figura 6 la coda di sinistra, quella degli eventi negativi, appare più spessa di quella di destra, ossia quella degli eventi definiti positivi. Ciò suggerisce che nella realtà la probabilità che le cose vadano “male” è maggiore rispetto ai casi favorevoli e quindi l’analisi deve considerare questa particolarità. Il risultato è già noto dal paragrafo precedente, quando si è parlato di *volatility smile*, i quali altro non riflettevano la presenza di asimmetria e curtosi. La presenza di *smirk* suggerisce che il modello di Black-Scholes-Merton soffre di *misspecification*.

È ragionevole chiedersi cosa sia possibile fare per tenere tutto ciò in conto. In aiuto subentra l’espansione di Gram-Charlier<sup>30</sup>, dal nome dei suoi autori Jørgen Pedersen Gram e Carl Charlier. Essa consiste in una serie matematica che approssima una distribuzione di probabilità alla somma dei suoi momenti. Proseguendo in questo modo, l’analisi non si limita a considerare solamente media e varianza ma si estende anche alla asimmetria, una derivazione dal momento terzo e alla curtosi, derivazione dal quarto. Per partire è utile riproporre concetti già visti. Innanzitutto si ricorda la distribuzione del tasso di rendimento in tempo continuo:

---

<sup>30</sup> Questo approccio è stato introdotto in finanza per la prima volta da Jarrow e Rudd (1982) e utilizzato per la prima volta da Madan and Milne (1994).



$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right]$$

La media risulta quindi essere pari a:

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

Mentre la varianza:

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) = \sigma^2 T$$

Una distribuzione si definisce simmetrica quando la sua funzione di densità è simmetrica rispetto ad un dato punto  $x_t$ , ossia vale la seguente relazione:

$$f(x_t - x) = f(x_t + x)$$

Un indicatore della asimmetria è quel valore che riesce ad affermare quanto una distribuzione non è simmetrica, esso è definito *skewness*, ed è:

$$\xi^{31} = \frac{\mathbb{E}(r_1 - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^3}{\sigma^3} \quad (11)$$

Dove:

- $r_1$  è il rendimento in capitalizzazione continua, giornaliero;

Una *skewness* positiva (negativa) indica che gli eventi positivi (negativi) hanno più probabilità di verificarsi rispetto ai negativi (positivi).

La curtosi, invece, indica quanto una distribuzione si discosta da quella di una normale in termini di allungamento e appiattimento delle code. Se le code sono più piatte, allora la distribuzione si dice platocurtica, mentre quando sono più spesse leptocurtica. L'indicatore solitamente utilizzato è definito *excess kurtosis*, il quale è:

$$\kappa^{32} = \frac{\mathbb{E}(r_1 - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^4}{\sigma^4} - 3 \quad (12)$$

---

<sup>31</sup> Su base giornaliera.

<sup>32</sup> Su base giornaliera.

Il termine “*excess*” è dovuto alla presenza del secondo termine nell’equazione (12), mentre il primo termine è la curtosi semplice. Se la *excess kurtosis* è positiva (negativa), vuol dire che le code della distribuzione sono più spesse (sottili) di una normale, quindi gli eventi, sia positivi che negativi, hanno più (meno) probabilità di verificarsi.

In un orizzonte di tempo  $T$  la *skewness* e *excess kurtosis* relative sono:

$$\xi_T = \frac{\xi_1}{\sqrt{T}}$$

$$\kappa_T = \frac{\zeta}{T}$$

Come si può vedere sia  $\xi_T$  che  $\kappa_T$  tendono a 0 all’aumentare di  $T$ .

Il ritorno standardizzato del periodo  $T$  è pari a:

$$v_T = \frac{r_T - T(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sqrt{T}\sigma}$$

Quindi:

$$r_T = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}v_T$$

Riprendendo l’espansione di Gram-Charlier e interrompendola al quarto termine si ottiene:

$$f(v_T) = \phi(v_T) - \xi_T \frac{1}{3!} \delta^3 \phi(v_T) + \kappa_T \frac{1}{4!} \delta^4 \phi(v_T)$$

Dove:

- $\phi(v_T)$  è la funzione di densità di una normale standard;
- $\delta^i$  è la derivata  $i$ -esima;
- $f(v_T)$  è la funzione di densità Gram-Charlier.

È utile osservare come la funzione di densità sopra esposta sia una semplice espansione rispetto alla sua analoga in una normale. Semplicemente si assume che la *skewness* e la *excess kurtosis* siano diverse da zero. In questo modo la valutazione considererà la possibilità della non normalità della distribuzione e di possedere quelle

caratteristiche di non simmetria e diversità nelle code che caratterizzano le distribuzioni delle variabili finanziarie.

Ora, riprendendo la (7) e integrando l'analisi appena vista, la nuova formula sarà:

$$c_{G-C} \approx S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) + S_t \phi(d_1) \sqrt{T} \sigma \left[ \frac{\xi T}{3!} (2\sqrt{T} \sigma - d_1) - \frac{\kappa T}{4!} (1 - d_1^2 + 3d_1 \sqrt{T} \sigma - 3T \sigma^2) \right]$$

Ossia:

$$c_{G-C} \approx S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) + S_t \phi(d_2) \sigma \left[ \frac{\xi}{3!} (2\sqrt{T} \sigma - d_1) - \frac{\kappa}{4! \sqrt{T}} (1 - d_1^2 + 3d_1 \sqrt{T} \sigma - 3T \sigma^2) \right]^{33} \quad (13)$$

La (13) è un'approssimazione, poiché i termini  $\sigma^3$  e  $\sigma^4$  sono stati posti arbitrariamente uguale a 0 per il calcolo di  $d_1$  e  $d_2$ <sup>34</sup>.

Il modello appena presentato considera la maggior parte delle ipotesi alla base di quello di Black-Scholes-Merton e ha il vantaggio di essere meno restrittivo per quanto riguarda le ipotesi relative alla distribuzione delle variazioni del sottostante.

### 1.5. Garch Con Simulazioni Monte Carlo

Il modello di Black-Scholes-Merton ed anche quello di Gram-Charlier soffrono di un consistente *bias*: la volatilità risulta essere costante per tutta la durata dell'opzione. Riassumendo, con il modello basato sull'espansione di Gram-Charlier è possibile “modellizzare” più accuratamente<sup>35</sup> l'andamento dello *stock price*, ma non si riesce ad ovviare al problema relativo alla staticità della volatilità. Nella Figura 7 è

<sup>33</sup> Quando è presente il tasso di dividendo atteso  $q$  la (13) si trasforma in:  $S_t e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) + S_t e^{-qT} \phi(d_2) \sigma \left[ \frac{\xi}{3!} (2\sqrt{T} \sigma - d_1) - \frac{\kappa}{4! \sqrt{T}} (1 - d_1^2 + 3d_1 \sqrt{T} \sigma - 3T \sigma^2) \right]$ .

<sup>34</sup> In questo modo  $d_1$  e  $d_2$  risultano gli stessi del modello di Black-Scholes-Merton.

<sup>35</sup> Rispetto al modello di Black-Scholes-Merton.

possibile vedere le variazioni settimanali del valore dell'indice S&P's 500 calcolate in regime di capitalizzazione in tempo continuo dall'11/01/2006 al 17/06/2013. È noto che una volatilità costante non corrisponde alla realtà, come è possibile vedere nella Figura 7.

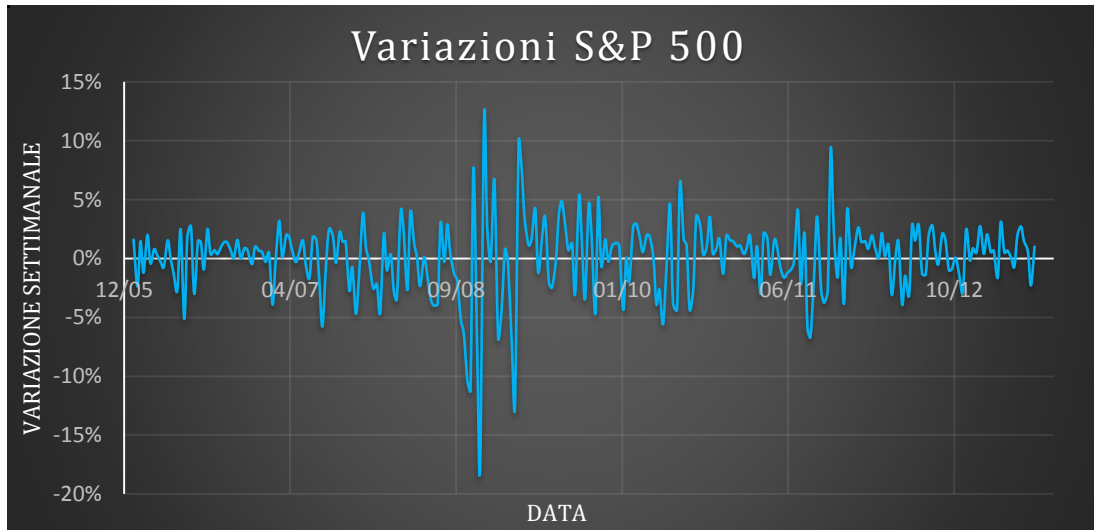


Figura 7

Semberebbe opportuno utilizzare un modello che dia la possibilità alle variazioni del livello del sottostante di avere scostamenti più o meno importanti dei suoi precedenti valori. Un metodo che incorpora tutto ciò è rappresentato dal modello GARCH<sup>36</sup>. Esso si basa su una semplice ma importante considerazione, la presenza, nelle serie storiche finanziarie, dei *volatility cluster*. Quindi periodi a bassa o alta volatilità tendono ad essere seguiti da periodi con simile volatilità. Il modello GARCH va oltre la semplice proporzionalità tra varianza ed orizzonte temporale  $T$ , infatti la varianza di oggi andrà a dipendere da quella di ieri e così via. Il modello base è:

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma\sigma^2 + \alpha(\sigma_t z_t^* - \lambda_t)^2 + \beta\sigma_t^2$$

Con:

- $\alpha + \beta < 1$ ;
- $\gamma$  è il peso assegnato alla varianza di lungo periodo (o deviazione standard);
- $\sigma$  è deviazione standard di lungo periodo;
- $\lambda$  rappresenta il premio per il rischio;

<sup>36</sup> Bollerslev, *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (1986). Il lavoro di Bollerslev generalizza il precedente articolo del premio Nobel per l'economia 2003 Engle: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, (1982).

- L'operatore \* rappresenta il contesto di *risk-neutrality*;
- $z_t$  è un'estrazione casuale da una normale standard.

È possibile dimostrare che la varianza non condizionata, o varianza di lungo periodo risulta essere pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\gamma}{(1 - \alpha - \beta)}$$

Ora è chiaro perché  $\alpha + \beta$  non può essere uguale a 1. Sostituendo il termine  $\gamma\sigma^2$  con  $\omega$ , il modello diventa:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(\sigma_t z_t^* - \lambda_t)^2 + \beta\sigma_t^2$$

Che può essere riscritto come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\sigma_{t-1} z_{t-1}^* - \lambda_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$
<sup>37</sup>

Avendo quindi osservato la varianza fino ad oggi, cioè in  $t$ , è possibile stimare i parametri  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , e ottenere successivamente la varianza di lungo periodo. Il modello GARCH ha due parametri  $p$  e  $q$ , i quali indicano il punto entro cui si considerano utili i rendimenti e la varianza del passato per l'analisi. Nel presente lavoro si considererà il caso più semplice, ossia il GARCH (1,1). Una volta ottenuti i parametri del GARCH con la metodologia che sfrutta la *maximum likelihood*<sup>38</sup> è possibile arrivare al prezzo finale dell'opzione tramite le simulazioni Monte Carlo, dato che il modello così presentato non dà la possibilità di raggiungere una formulazione chiusa. Uno dei primi ad introdurle per il *pricing* delle opzioni è stato Phelim P. Boyle<sup>39</sup> il quale suggerisce che tale approccio è preferibile poiché “*Arbitrage arguments lead a second-order linear partial differential equation governing the value of the option*”.<sup>40</sup> Data l'impossibilità di risoluzione di tale equazione, l'approccio delle simulazioni offre un buon compromesso tra facilità e accuratezza dei risultati. In generale ci si avvale di simulazioni di numeri tra loro non correlati per ottenere, sulla base della conoscenza della distribuzione di probabilità del parametro dell'equazione, un dato valore. Le simulazioni offrono possibili

<sup>37</sup>  $t - 1$  consiste nel giorno precedente rispetto a quello di osservazione.

<sup>38</sup> I cui calcoli saranno spiegati nel Capitolo 2.

<sup>39</sup> *Options: A Monte Carlo approach*, Phelim P. Boyle, (1976).

<sup>40</sup> *Options: A Monte Carlo approach*, Phelim P. Boyle, (1976) *Journal of Financial Economics* 4 (1977) p.324.

risultati dell'equazione considerata, da inserire nel campione, il quale, quando sarà abbastanza ampio, restituirà il valore cercato in termini della sua media. È utile partire in questo modo:

$$\int g(y)f(y)dy = \bar{g} \quad (14)$$

Dove:

- $g(y)$  è una funzione arbitraria<sup>42</sup>;
- $f(y)$  è la funzione nota di densità di probabilità di  $g(y)$ ;
- $\bar{g}$  è il valore noto, dato dalla conoscenza, a priori, della distribuzione di probabilità.

Dato che risulta difficile, o impossibile, per ipotesi, come nel caso del modello GARCH, risolvere la (14), si calcola una stima di  $\hat{g}$  prendendo  $n$  valori casuali  $y_i$  dalla funzione di densità di probabilità  $f(y)$ . Una volta ottenuto il campione la sua media rappresenta  $\hat{g}$  con varianza pari ad  $\hat{s}^2$ . È possibile vedere che la distribuzione

$$\frac{\hat{g} - \bar{g}}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{n}}} \quad (14)$$

tende ad una normale standard.

Il concetto sopraesposto risulta importante per capire come sfruttare le simulazioni e ottenere una stima del prezzo delle opzioni. Sulla base del principio già visto della *risk neutral valuation*, formulando una ipotesi sulla distribuzione delle variazioni del sottostante,  $f(y)$ , tramite il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo è possibile proiettare nel futuro il valore dell'indice di riferimento fino alla scadenza dell'opzione, una volta fatto è necessario calcolare il *pay-off* atteso dell'opzione, come descritto nella (1), e attualizzarlo al giorno di analisi al tasso di interesse *risk free*. Il procedimento viene effettuato per il numero desiderato di volte per poi prendere la media dei risultati che rappresenterà la stima finale del prezzo. Nel capitolo successivo sarà descritta nel dettaglio tutta la procedura appena presentata.

<sup>41</sup> L'intervallo di integrazione è possibile ometterlo.

<sup>42</sup> Nel caso in analisi rappresenta l'equazione che restituisce il prezzo della *call*.

<sup>43</sup> Per  $n$  elevato è possibile omettere  $n - 1$ , il quale risulta più corretto.

## 1.6. Modified Implied Volatility Function

L'ultimo approccio presentato è l'*implied volatility function*. I precedenti metodi hanno una solida base teorica o almeno, nascono con il fine di superare determinati *bias*. Il presente metodo invece è creato ad hoc, con poche motivazioni teoriche, ma che dà buoni risultati in termini di scarto dal valore reale. Il modello è tratto dalle intuizioni di Derman e Kani (1994), Rubinstein (1994) e Dupire (1994) i quali ipotizzano che la volatilità relativa alla variazione del sottostante sia una funzione deterministica del suo prezzo. Il ragionamento si fonda quindi sui già visti *volatility smile* e sull'*implied volatility*. I dati suggeriscono che la volatilità implicita tende ad avere variazioni contenute in piccoli-medi intervalli di tempo, quindi è possibile sfruttare questa informazione per il *pricing*. Il primo passaggio da effettuare è il calcolo della volatilità implicita; successivamente si sfrutta la metodologia OLS<sup>44</sup> per stimare i coefficienti dei regressori. Quindi si effettua una regressione con variabile dipendente la volatilità implicita del giorno precedente a quello di analisi e variabili dipendenti specifici coefficienti, ottenendone una stima come mostrato nell'equazione (15):

$$\begin{aligned} \sigma_{t-1}^{IV} = & \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right) + \beta_2 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right)^2 + \beta_3 \left( \frac{T_i}{252} \right) + \beta_4 \left( \frac{T_i}{252} \right)^2 \\ & + \beta_5 \left( \frac{S_{t-1}}{K_i} \right) \left( \frac{T_i}{252} \right) + \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Dove:

-  $\varepsilon$  è il termine di errore.

In questo modo si ottiene la volatilità in funzione del *moneyness* e del *time-to-maturity*. Infine, è possibile calcolare la volatilità con la seguente formula:

$$\hat{\sigma}^{IV} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left( \frac{S_t}{K_i} \right) + \hat{\beta}_2 \left( \frac{S_t}{K_i} \right)^2 + \hat{\beta}_3 \left( \frac{T_i}{252} \right) + \hat{\beta}_4 \left( \frac{T_i}{252} \right)^2 + \hat{\beta}_5 \left( \frac{S_t}{K_i} \right) \left( \frac{T_i}{252} \right)$$

ed inserirla nel modello di Black-Scholes-Merton, derivando così la stima della *call*. In questo modo si è arrivato al modello definito dell'*Implied Volatility Function*, ma per questo lavoro si utilizza una sua versione modificata che tiene conto dei valori di mercato, infatti esso consiste nello stimare i parametri dei regressori in modo tale che

---

<sup>44</sup> *Ordinary Least Squares*.

lo scarto quadratico medio tra prezzo di mercato e prezzo teorico dell'opzione sia minimo. Questa tecnica è definita come *Modified Implied Volatility Function*.



## 2. DALLA TEORIA ALLA PRATICA

### 2.1. Generali

Il capitolo precedente ha fornito un *framework* necessario a capire come siano nati i modelli analizzati e quali siano le assunzioni alla loro base. Un passaggio altrettanto delicato è la loro implementazione, pertanto in questo capitolo si vedrà come possono essere costruiti in pratica i modelli e soprattutto le assunzioni che si trovano alla base della scelta dei parametri.

- Lo *strike price* o prezzo di esercizio ( $K$ ) rappresenta la soglia di copertura oltre la quale, ci si vuole proteggere<sup>45</sup>;
- Il valore del sottostante ( $S_t$ ) è un valore di mercato che si osserva al momento dell'analisi;
- Per quanto riguarda il tempo che manca alla scadenza (*time-to-maturity* o  $T$ ) è sufficiente calcolare il numero di giorni lavorativi che mancano alla scadenza. I trader solitamente utilizzano l'anno di 252 giorni, e questo è il valore che si utilizzerà per riportare i dati a giornalieri o viceversa ad annuali;
- Il tasso di interesse ( $r_f$ ) definito *risk-free*, ossia il tasso al quale vengono scontati i valori finanziari futuri. I riferimenti sul mercato sono molteplici. Un primo approccio consiste nell'utilizzare i rendimenti dei titoli di stato con *maturity* simile all'opzione da valutare. Già a questo punto si presenta un primo problema, poiché i titoli con queste caratteristiche possono essere diversi e la scelta di uno anziché di un altro potrebbe portare ad una distorsione del valore effettivo del derivato. Un secondo tipo di approccio invece considera i tassi che applica l'autorità monetaria centrale, nel nostro caso la Federal Reserve, sui depositi presso di essa, i *Fed Funds Rate*. Queste modalità però nella pratica non sono utilizzate, poiché i trader preferiscono la *swap curve*. Il tasso *swap* rappresenta il tasso fisso che si riceve in un'operazione di *interest rate swap* in cambio del tasso variabile. La scelta deriva dal fatto che questa curva è molto più completa di quella dei titoli governativi, e dà la possibilità di analizzare periodi anche molto brevi, come può essere il caso delle opzioni<sup>46</sup>. In generale quindi sulla base del

---

<sup>45</sup> Ad esempio se si ha una posizione corta sul sottostante.

<sup>46</sup> Se si vuole essere ancora più precisi subito dopo la crisi finanziaria iniziata verso la fine del 2008 i premi per le opzioni sono stati pagati a scadenza, per evitare problemi di tassi di attualizzazione

periodo di riferimento e della durata dell'opzione si è considerato il tasso *swap* con *maturity* annuale su base giornaliera per tutti i modelli.

- Per il *dividend yield* ( $q$ ) è sufficiente consultare una qualsiasi banca dati<sup>47</sup> relativa la periodo di interesse;
- Un discorso a parte deve essere affrontato per la volatilità ( $\sigma$ ) poiché è la causa principale delle distorsioni dei modelli presentati. Si è detto che la volatilità dei mercati non è costante, soprattutto durante periodi di turbolenze finanziarie. Questo aspetto rappresenta il maggiore limite dei modelli che utilizzano volatilità costante e che ha portato allo sviluppo di modelli che ne permettono un percorso dinamico. Essa rappresenta la discriminante fondamentale per i modelli e per i periodi presi in esame.

I periodi considerati sono 3 e, come già introdotto la loro scelta è basata sulla volatilità del sottostante. Il giorno di analisi del primo periodo è il 23/12/2008 poco dopo il crollo di Lehman Brothers<sup>48</sup> e quindi poco dopo l'inizio delle turbolenze finanziarie che hanno scosso l'economia mondiale. Le variazioni dell'indice S&P's 500 dalla fine di settembre in poi sono state molto più ampie che in passato, con il conseguente aumento della volatilità. Per il secondo periodo, il ragionamento sottostante è esattamente opposto, ossia si è voluto cercare un periodo di riferimento che presentasse una volatilità storica molto elevata, quindi con variazioni estreme, contro una situazione di mercato attuale più "tranquilla", il giorno scelto è il 28/10/2011. Infine, per l'ultimo giorno, la scelta si è orientata verso un periodo con volatilità piuttosto bassa, e soprattutto stabile sia passata che presente, quindi si è considerato il 03/10/2012.

L'obiettivo finale consiste nell'effettuare un'analisi di *backtesting* dei diversi sistemi di *option pricing* in questi, particolari, periodi storici, al fine di dare una motivazione agli eventuali diversi risultati. Per fare ciò, per ogni prezzo teorico si calcolerà lo scarto quadratico da quello di mercato, e per ogni modello e per ogni periodo si otterrà la media come indicatore della sua buona o cattiva *performance*.

---

utilizzati. In generale in questa analisi si mantiene la modalità classica, quella pre-crisi, ossia il tasso *swap*.

<sup>47</sup> Ad esempio il database del Federal Reserve System, la banca dati Bloomberg oppure Thomson Reuters Eikon.

<sup>48</sup> 15/09/2008.

## 2.2. Black-Scholes-Merton

Il modello di Black-Scholes-Merton si basa sull'ipotesi semplificatrice che i rendimenti giornalieri del sottostante seguano una distribuzione log-normale con varianza costante in intervalli di tempo medio-brevi. Per questo motivo risulta di semplice implementazione, nonostante possa sembrare particolarmente complicata la sua teoria. Infatti, dopo aver scelto i primi cinque parametri<sup>49</sup>, l'ultimo, e l'unico, che resta da stimare è la volatilità. Essa è stata calcolata come semplice deviazione standard delle variazioni del sottostante in un arco temporale di sei mesi, per tutte le opzioni, a prescindere dalla loro *maturity*.

Una volta ottenuti tutti i parametri è sufficiente inserirli nelle seguenti equazioni:

$$N \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]$$

$$N \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]$$

E infine in:

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r_f T} N(d_2)$$

Per ottenere il valore finale della *call*.

## 2.3. BSM con Implied Volatility

Quanto appena descritto nel paragrafo precedente però non è consistente con quello che il mercato mostra. Infatti nel capitolo precedente è stato mostrato il particolare andamento della volatilità implicita all'aumentare del *moneyness* di una opzione *call*. Inoltre, come ulteriore prova, si è anche visto che la distribuzione dei rendimenti del sottostante si discosta dalla log-normale presentando curtosi ed asimmetria. Ciò suggerisce che basare il modello di *pricing* sull'assunzione di normalità porta una distorsione del prezzo finale ottenuto. Questa evidenza è stata infatti studiata da

---

<sup>49</sup> *Strike price, Stock Price, tasso di interesse, days to maturity, dividend yield.*

Christoffersen in diversi suoi lavori<sup>50</sup>, mostrando come la distribuzione delle variazioni del sottostante si comporti in maniera diversa da quella ipotizzata. Egli suggerisce che per provare ad ovviare a questa problematica è possibile estrapolare la volatilità che implicitamente è contenuta nelle opzioni passate. Per procedere si stima il prezzo teorico dell'opzione del giorno precedente a quello di analisi con il modello di Black-Scholes-Merton, utilizzando la volatilità estrapolata dal passato<sup>51</sup>, e questo procedimento si effettua per tutte le opzioni da apprezzare. Successivamente si calcolano i rispettivi scarti quadratici con gli effettivi prezzi di chiusura, per poi prenderne la media. Infine quest'ultima è l'obiettivo della minimizzazione al variare proprio della volatilità inizialmente estrapolata dai dati storici. Il valore così ottenuto rappresenta la volatilità implicita nei prezzi delle opzioni del giorno precedente da usare come input, sempre nel modello di Black-Scholes-Merton per il *pricing* durante il periodo di riferimento. Si ricorda che:

$$\sigma^{IV} = c_{BSM}^{-1}(S_t, K, T, r, q, c^{mkt})$$

In questo modo ci si attende un miglioramento dei risultati rispetto al più semplice e irrealistico modello visto nel paragrafo precedente.

## 2.4. BSM con Gram-Charlier

Le ipotesi di base relative agli input sono le stesse utilizzate nel modello di Black-Scholes-Merton, in più si considerano l'asimmetria e la curtosi. Il ragionamento qui è analogo a quello fatto per l'*Implied volatility*. L'espansione di Gram-Charlier suggerisce che la distribuzione dei rendimenti del sottostante si discosta da una normale, e quindi considerare anche i momenti successivi dovrebbe migliorare le prestazioni del modello di Black-Scholes-Merton. Un modo per calcolare asimmetria e curtosi è utilizzando le loro formule (11) e (12) sfruttando i dati storici delle variazioni dell'S&P's 500, oppure un metodo migliore consiste nell'estrapolarli dal passato, con la tecnica già utilizzata per la volatilità implicita. È necessario calcolare il prezzo della *call* del giorno precedente a quello di analisi con la formula seguente

---

<sup>50</sup> CHRISTOFFERSEN, P. 2012: "Elements of Financial Risk Management," second ed. The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5, 1GB, UK.

CHRISTOFFERSEN, P., DORION, C., JACOBS, K., WANG, Y., 2010a: "Volatility components: Affine restrictions and non-normal innovations," J. Bus. Econ. Stat., 28, 483-502.

CHRISTOFFERSEN, P., ELKAMHI, R., FEUNOU, B., JACOBS, K., 2010b: "Option valuation with conditional heteroskedasticity and non-normality," Rev. Financ. Stud. 23, 2139-2183.

<sup>51</sup> Come visto nel paragrafo precedente.

$$c_{G-C} \approx S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) + S_t \phi(d_2) \sigma \left[ \frac{\xi}{3!} (2\sqrt{T}\sigma - d_1) - \frac{\kappa}{4!} (1 - d_1^2 + 3d_1\sqrt{T}\sigma - 3T\sigma^2) \right]^{52}$$

Il valore restituito si confronta con il prezzo di mercato per ogni opzione considerata e si ottiene il valore medio degli scarti al quadrato. Anche in questo caso ci si avvale di un risolutore per minimizzarlo al variare della curtosi ed asimmetria. Infine basta inserire i suddetti valori nell'equazione (13) per ottenere il prezzo con Gram-Charlier.

## 2.5. GARCH con simulazioni Monte Carlo

Nel capitolo precedente è stato introdotto il modello GARCH, ipotizzando che si adatti bene ai dati. I parametri con cui effettuare i calcoli però, sono ignoti e devono essere stimati avendo a disposizione la serie storica delle variazioni dell'indice. Il ragionamento parte dal presupposto che la varianza condizionata  $\sigma_{t+1}^2$  non è possibile osservarla ma la si può ottenere sfruttando la metodologia della massima verosimiglianza. L'ipotesi di distribuzione normale standard implica che la funzione di verosimiglianza (*likelihood*) in un dato momento  $t$  è:

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Con:

$$- R_t = \sigma_t Z_t.$$

La verosimiglianza dell'intero campione altro non è che il prodotto di tutte le funzioni di verosimiglianza:

$$L = \prod_{t=1}^T l_t$$

Per scegliere i parametri basta massimizzare la funzione  $L$ . Prendendo i logaritmi equivale a massimizzare la sommatoria dei logaritmi delle singole funzioni di verosimiglianza, scegliendo specifici  $\alpha$  e  $\beta$  e  $\lambda$  che risolvono la seguente funzione:

<sup>52</sup> La volatilità è quella implicita estrapolata con il metodo visto nel paragrafo 2.3.

$$\text{Max} \sum_{t+1}^T \left[ -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

Che equivale ad ottimizzare la seguente espressione:

$$\text{Max} \left[ -\frac{1}{2} \left( \sum_{t+1}^T \ln(\sigma_t^2) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right]$$

Il vantaggio di questo modello è che, al crescere del campione da analizzare, i parametri da stimare convergono ai loro veri valori. Per l'analisi sono stati utilizzati 700 giorni lavorativi antecedenti al periodo di riferimento, poiché una *window* troppo ampia vanificherebbe la scelta dei periodi, mentre una troppo piccola, potrebbe causare una distorsione nei risultati.

Ottenuti i parametri dal GARCH model è possibile passare alle simulazioni Monte Carlo. La varianza condizionata in  $t + 1$  può essere così definita:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

Con  $\sigma_{t+1}^2$  è possibile ottenere una serie di simulazioni relative al primo giorno di analisi, infatti

$$\check{R}_{i,t+1}^* = r_f - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} \check{z}_{i,1}^*$$

Con:

- $i$  indica la simulazione  $i$ -esima;
- $\check{R}_{i,t+1}^*$  che rappresenta l' $i$ -esimo rendimento relativo a domani.

Archiviati gli  $i$  valori della prima serie di simulazioni si passa al giorno successivo ottenendo una nuova varianza condizionata simulata:

$$\sigma_{i,t+2}^2 = \omega + \alpha(\sigma_{t+1} \check{z}_{i,1}^* - \lambda \sigma_{t+1})^2 + \beta \sigma_{t+1}^2$$

Generalizzando si calcola il rendimento atteso per le  $i$  volte per ogni periodo fino alla scadenza dell'opzione:

$$\check{R}_{i,t+j}^* = r_f - \frac{1}{2} \check{\sigma}_{i,t+j}^2 + \check{\sigma}_{i,t+j} \check{z}_{i,j}^*$$

Dove:

- $\check{\sigma}_{i,t+j}^2$  è:

$$\check{\sigma}_{i,t+j}^2 = \omega + \alpha (\check{\sigma}_{i,t+j-1} \check{z}_{i,j-1}^* - \lambda \check{\sigma}_{i,t+j-1})^2 + \beta \check{\sigma}_{i,t+j-1}^2$$

Fino a qui si sono create le  $i$  simulazioni per ogni giorno dell'opzione fino alla sua scadenza. Ogni percorso sarà caratterizzato da un determinato valore finale del sottostante, che rappresenta  $S_T$ . Una volta calcolati i *pay-off* delle *call* e attualizzati al giorno di valutazione, la media degli  $i$  valori ne rappresenta la stima finale:

$$c_{GARCH} \approx \exp(-r_f T) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}\{S_{i,t+T}^* - K, 0\}^{53}$$

Con:

- $n$  che rappresenta il numero scelto di simulazioni.

## 2.6. Modified Implied Volatility Function

Il modello che si basa sulla *Modified Implied Volatility Function* parte da una semplice idea: l'*implied volatility smile* di una opzione cambia lentamente con il passare del tempo, quindi è possibile utilizzarlo come stima per il futuro prossimo.

Per procedere con i calcoli si parte con l'estrapolazione delle volatilità implicite dalle opzioni del giorno precedente a quello di riferimento; successivamente si effettua una regressione lineare che ha come variabile dipendente la volatilità implicita appena estrapolata e variabili indipendenti i seguenti parametri:

- $\frac{S_t}{K_i}$ ;
- $\left(\frac{S_t}{K_i}\right)^2$ ;
- $\frac{T_i}{252}$ ;

<sup>53</sup> È stato utilizzato il simbolo "≈" e non "=" poiché risulta più corretto inserire l'operatore valore atteso invece che la media aritmetica.

- $\left(\frac{T_i}{252}\right)^2$ ;
- $\left(\frac{S_t}{K_i}\right)\left(\frac{T_i}{252}\right)$ .

Formalmente si ha:

$$\sigma_{t-1}^{IV} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{S_{t-1}}{K_i}\right) + \beta_2 \left(\frac{S_{t-1}}{K_i}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{T_i}{252}\right) + \beta_4 \left(\frac{T_i}{252}\right)^2 + \beta_5 \left(\frac{S_{t-1}}{K_i}\right)\left(\frac{T_i}{252}\right) + \varepsilon$$

In questo modo si stimano i coefficienti ( $\beta$ ) della regressione, a questo punto è necessario calcolare il prezzo delle *call* utilizzate per la stima dei parametri, sfruttando proprio i “beta” appena calcolati, e quantificarne lo scarto quadratico medio con i prezzi di mercato. Con un qualsiasi risolutore si cerca il minimo errore al variare dei coefficienti stimati:

$$SQM_{MIVF}^{54} = \min_{\hat{\beta}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( c_i^{mkt} - c \left( S_{t-1}, r_f, K_i, T_i; \text{Max} \left( \sigma^{IV} \left( \frac{S_{t-1}}{K_i}, \frac{T_i}{252}; \beta \right), 0,0001 \right) \right) \right)^2 \right\}$$

I beta così ottenuti saranno poi utilizzati per il calcolo della volatilità attuale da inserire nella formula di Black-Scholes-Merton, controllando per la stretta positività. Formalmente si ha

$$c_{MIVF} = c \left( S_t, r_f, K_i, T_i, \text{Max} \left( \hat{\sigma}^{IV} \left( \frac{S_t}{K}, \frac{T_i}{252}; \hat{\beta} \right), 0,0001 \right) \right)$$

---

<sup>54</sup> Scarto Quadratico Medio.



### 3. RISULTATI NUMERICI

#### 3.1. Generali

Analizzata la teoria e il suo sviluppo pratico, non resta che presentare i risultati ottenuti. Il paragrafo successivo spiega come sono stati ricercati i dati, alcune loro caratteristiche e le fonti, mentre i tre paragrafi seguenti mostrano i risultati di tutte le metodologie, ciascuno per ogni periodo considerato, in particolare al 23 dicembre 2008, 28 ottobre 2011 e, in ultimo, al 03 ottobre 2012. Il *pricing error* è stato calcolato come differenza tra il prezzo di mercato effettivamente riscontrato e il prezzo teorico del modello relativo. Quindi un *pricing error* positivo indica che il prezzo di mercato dell'opzione risulta maggiore di quello teorico e il modello in questione tende a sotto-prezzare il derivato, quando invece è negativo il modello lo sovra-prezza. Nelle tabelle di fine paragrafo sono presentati i valori della *call* per ogni modello confrontati con il *market price* per ogni scadenza e differente *moneyness*, oltre a mostrare gli la radice degli scarti quadratici medi e le relative radici per ogni modello.

#### 3.2. Dati e fonti

Per iniziare risulta opportuno descrivere alcune caratteristiche delle opzioni scelte, per dare un'idea sui valori con i quali si è lavorato. La fonte è rappresentata dal *database* Thomson Reuters Eikon<sup>55</sup>, attraverso il quale sono state estratte le serie storiche dei prezzi delle *call*. I *ticker* di riferimento utilizzati per la ricerca sono strutturati nel seguente modo:

SPX0109400C(MP)

Dove:

- SPX rappresenta l'indice di riferimento, in questo caso l'S&P's 500;
- 01 e 09 mese ed anno della scadenza;
- 400 lo *strike*;
- C la tipologia (*call*);

---

<sup>55</sup> <http://financial.thomsonreuters.com/en/products/tools-applications/trading-investment-tools/eikon-trading-software.html>.

- (MP) il *market price*<sup>56</sup>.

Le tabelle che seguono riportano le scadenze, i *days-to-maturity* e le statistiche descrittive più importanti delle opzioni rispettivamente per il primo, secondo e terzo periodo.

Scadenza	DTM	Oss.	Media	Strike Min	Strike Max	Δ Strike	Dev. Std.
15/01/2009	15	19	128,89	400	1300	50	154,86
19/02/2009	38	19	134,61	400	1300	50	152,23
16/04/2009	79	19	143,87	400	1300	50	150,04

Tabella 1<sup>57</sup>

Scadenza	DTM	Oss.	Media	Strike Min	Strike Max	Δ Strike	Dev. Std.
18/11/2011	14	17	154,49	800	1600	50	166,55
16/12/2011	34	17	158,14	800	1600	50	164,45
20/01/2012	57	17	160,77	800	1600	50	163,31
17/02/2012	76	17	165,60	800	1600	50	161,22

Tabella 2

Scadenza	DTM	Oss.	Media	Strike Min	Strike Max	Δ Strike	Dev. Std.
19/10/2012	11	20	228,28	800	1750	50	223,82
16/11/2012	31	20	228,59	800	1750	50	221,47
21/12/2012	55	20	229,79	800	1750	50	218,93
18/01/2013	73	20	231,16	800	1750	50	217,08

Tabella 3

### 3.1. Primo Periodo: 23 dicembre 2008

Il primo periodo di analisi presenta, rispetto al punto di riferimento<sup>58</sup>, un passato con variazioni del sottostante piuttosto contenute e un presente con i mercati dominati dall'incertezza e dall'alta volatilità. Il grafico in Figura 8 mostra l'andamento del *pricing error* al variare del *moneyness* per le tre diverse scadenze considerate, nel modello di Black-Scholes-Merton. Come è possibile vedere il *pricing* migliore avviene quando l'opzione è già *in-the-money*, e l'andamento riflette ciò che è stato detto nel paragrafo 1.3. Infatti per le opzioni *out-of-the-money* questo modello restituisce valori più elevati rispetto a quelli di mercato, mentre si comporta esattamente al contrario per quelle *in-the-money*.

<sup>56</sup> Nell'esempio l'opzione cercata è la serie storica dei prezzi di mercato della *call* scritta sullo Standard & Poor's 500 con scadenza gennaio 2009.

<sup>57</sup> La media e la deviazione standard sono riferite ai prezzi delle *call* con *strike* che aumenta di 50, a partire da un valore di 400 fino a 1300.

<sup>58</sup> 23 dicembre 2008.

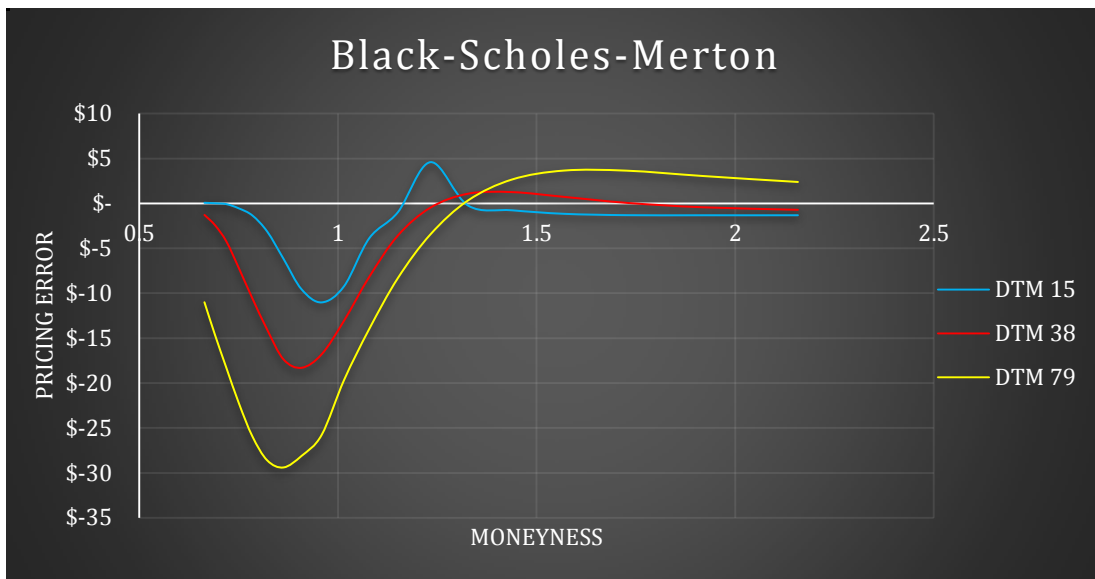


Figura 8

Il problema relativo alla staticità della volatilità può essere, in parte, risolto estrapolando la volatilità implicita passata. Per capire perché basta osservare la figura 9.

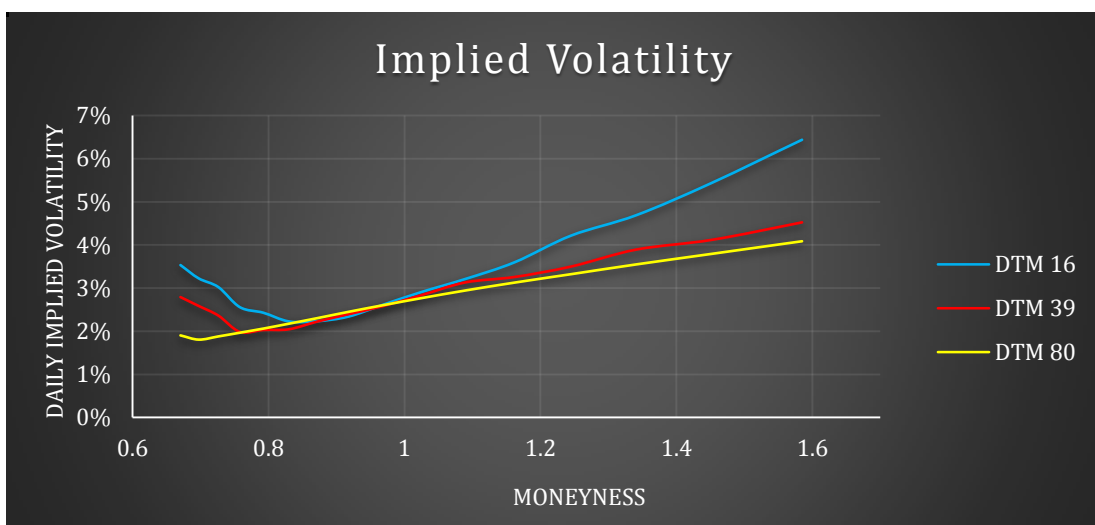


Figura 9

In questo grafico si mostra l'andamento della volatilità implicita all'aumentare del *moneyness* per le tre diverse scadenze<sup>59</sup>. Essa è inizialmente decrescente e poi crescente, quindi l'ipotesi di volatilità costante e distribuzione normale dei rendimenti, alla base di Black-Scholes-Merton, non è supportata dalla realtà. Infatti guardando i risultati del modello che utilizza invece la volatilità implicita, figura 10, è possibile vedere un netto miglioramento, con uno scarto quadratico medio pari a 26,19, con un andamento simile a quello mostrato in figura 8, ma in un intervallo più

<sup>59</sup> È considerato il giorno precedente a quello di analisi.

contenuto. Tutto ciò rispecchia quanto è stato detto precedentemente. Un ulteriore metodo per considerare la particolare distribuzione delle variazioni dell'indice sottostante è rappresentato, come spiegato in precedenza, dall'utilizzo dell'espansione di Gram-Charlier. Graficamente la situazione risulta essere quella in figura 11.

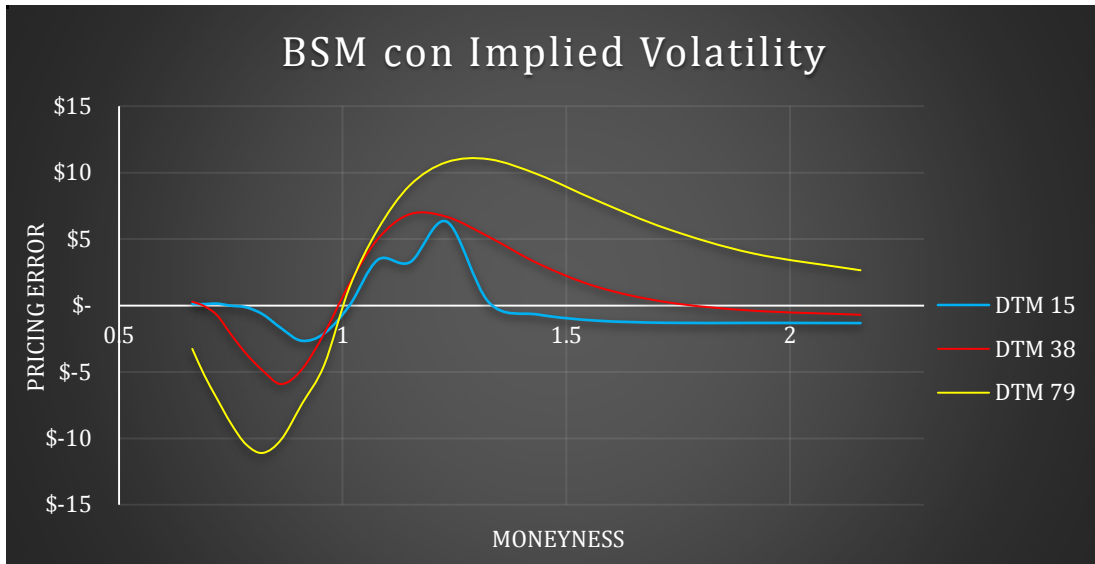


Figura 10

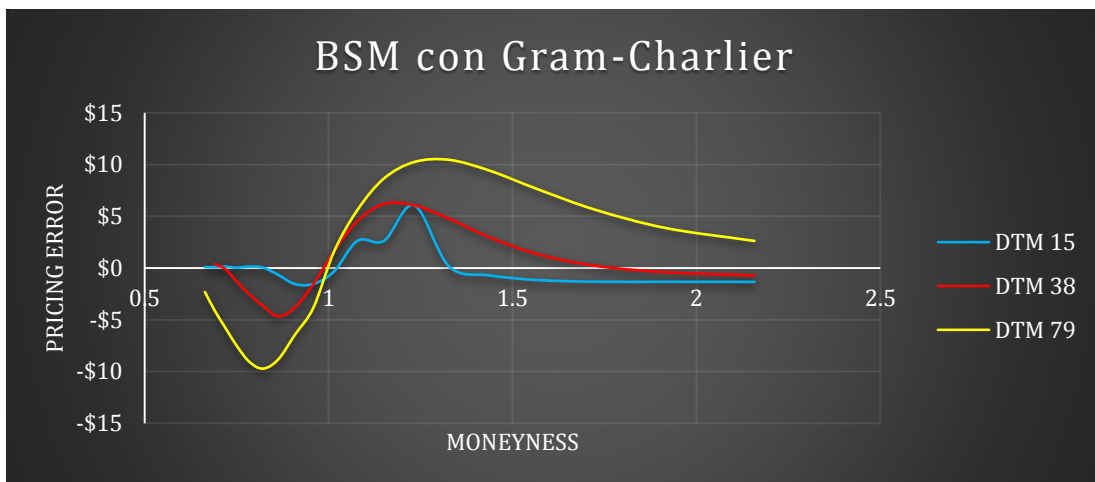


Figura 11

Come è possibile notare il comportamento è sempre simile a quello già visto per il modello di Black-Scholes-Merton sia base che con l'IV, con un'unica differenza, una minore distanza tra gli errori massimi. Tutto ciò conferma quanto detto in sede di analisi teorica, quindi la distribuzione dei rendimenti del sottostante effettivamente si discosta da una normale, e si caratterizza per avere sia asimmetria che curtosi. Lo scarto quadratico medio per questo modello è pari a 20,84, inferiore sia al modello base, che quello che utilizza l'*implied volatility*.

Per le simulazioni Monte Carlo che sfruttano il modello GARCH per la modellizzazione della varianza, il risultato è interessante, poiché presenta un errore decisamente contenuto, pari appunto a 16,15 e l'andamento del *pricing error* lo si può vedere graficamente nella figura 12. In questo periodo quindi le simulazioni il modello GARCH, con le simulazioni, riesce a replicare l'andamento del sottostante molto bene.

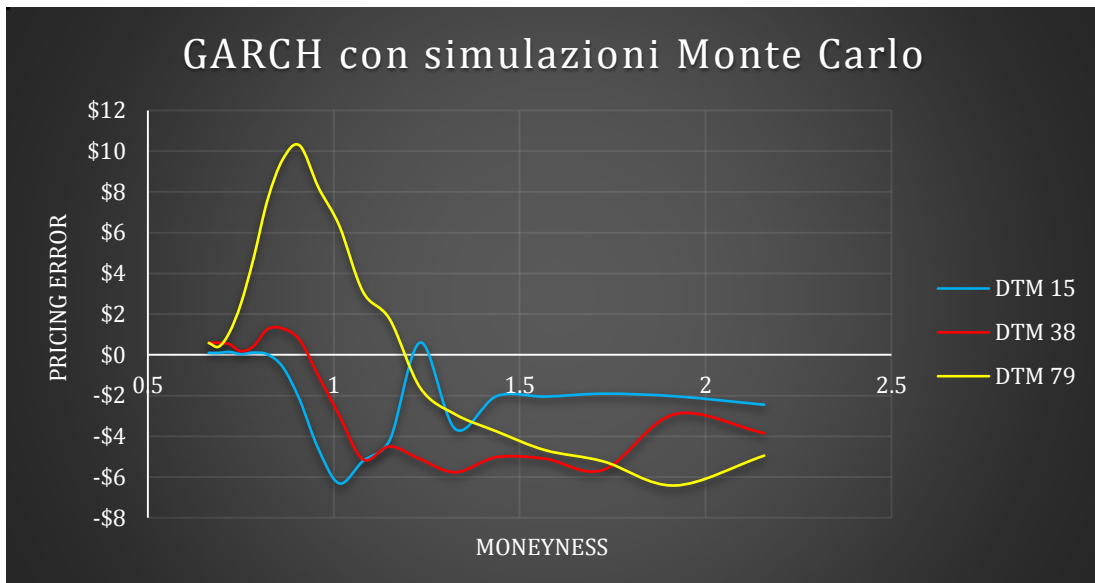


Figura 12

Si osserva che per le scadenze più vicine il *pricing error* tende ad essere negativo o vicino allo 0, quindi questo modello tende a sovra-prezzare l'opzione. Per la scadenza più lontana l'andamento mostra inizialmente una crescita per poi decrescere in linea con le altre due.

Per quanto riguarda la *Modified Implied Volatility Function*, essa presenta la migliore *performance* in questo arco temporale con uno scarto quadratico medio pari a 3,740, migliore anche di quello dell'*Implied Volatility*. Graficamente è possibile vedere nella figura 13 l'andamento del *pricing error* rispetto al *moneyness* per le tre scadenze.

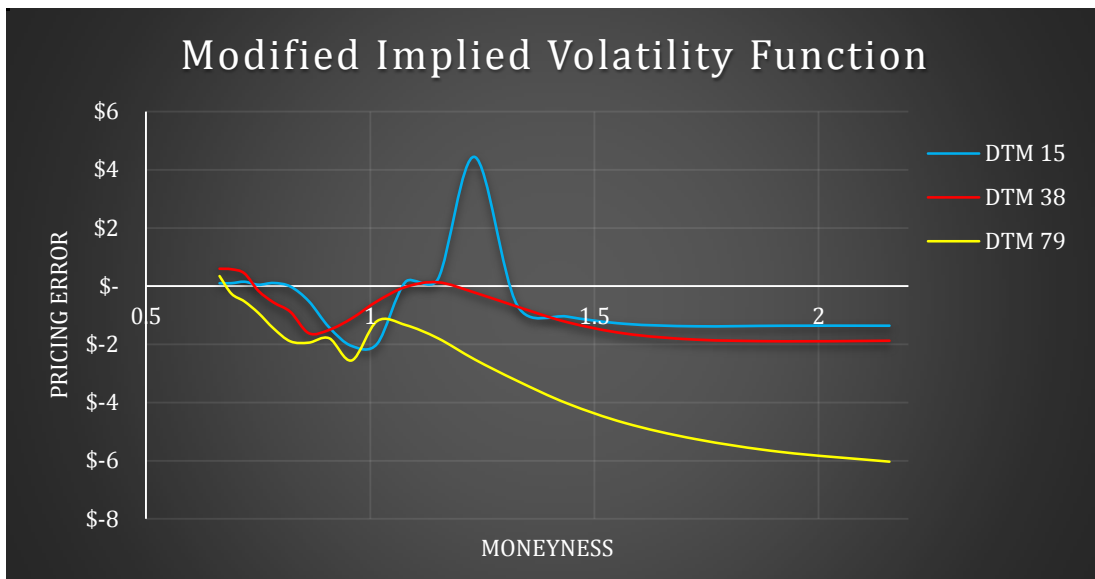


Figura 13

Una particolarità che vale la pena mostrare è come l'andamento del *pricing error* per la seconda scadenza sia molto vicino allo 0 per tutte le opzioni considerate, ciò suggerisce che la volatilità implicita sia molto simile a quella ottenuta tramite il modello, ed è possibile vederlo dalla figura 14.

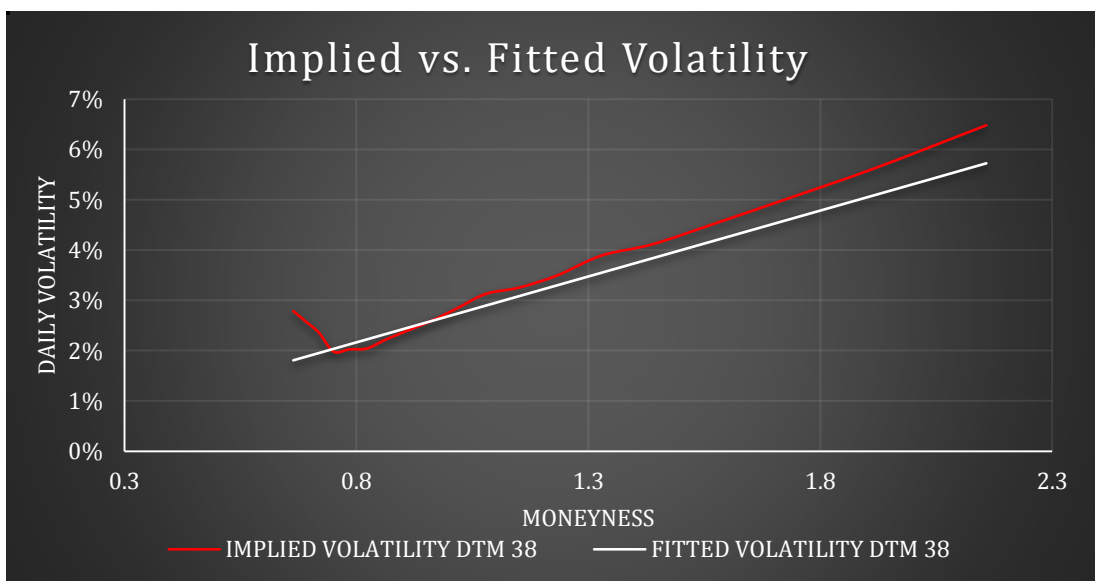


Figura 14

Mentre per quanto riguarda la scadenza più vicina, che presenta oscillazioni maggiori, la situazione è visibile nel grafico in figura 15.

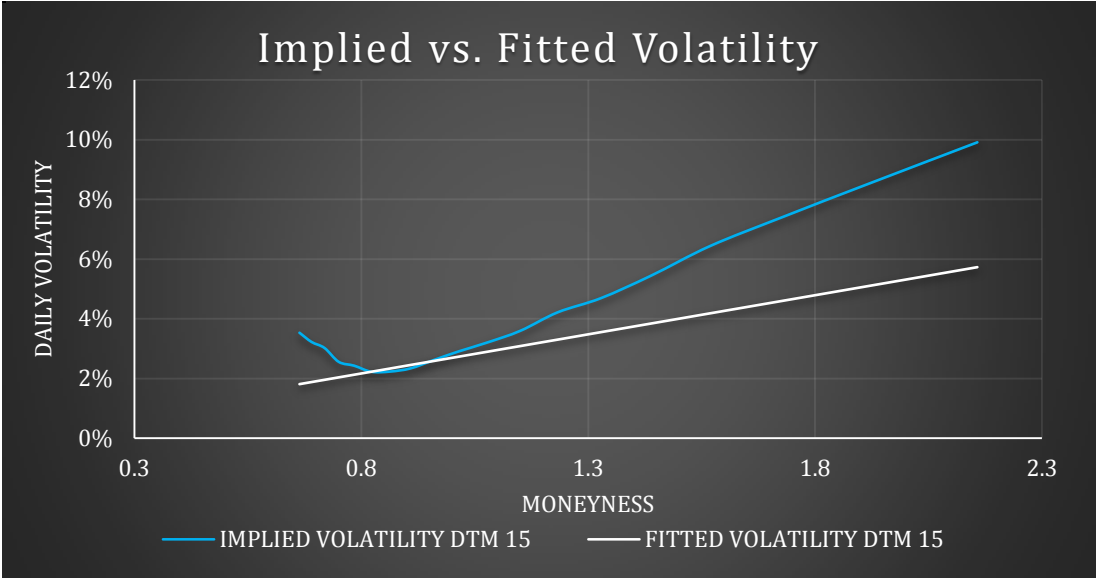


Figura 15

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Impl. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
15	2,16	460,50	461,83	-1,33	461,83	-1,33	461,83	-1,33	462,94	-2,44	461,84	-1,34
15	1,92	410,55	411,87	-1,32	411,87	-1,32	411,87	-1,32	412,58	-2,03	411,89	-1,34
15	1,73	360,60	361,91	-1,31	361,91	-1,31	361,91	-1,31	362,50	-1,90	361,95	-1,35
15	1,57	310,80	311,96	-1,16	311,95	-1,15	311,95	-1,15	312,85	-2,05	312,05	-1,25
15	1,44	261,30	262,07	-0,77	262,00	-0,70	262,01	-0,71	263,32	-2,02	262,25	-0,95
15	1,33	212,30	212,55	-0,25	212,11	0,19	212,23	0,07	215,95	-3,65	212,79	-0,49
15	1,23	169,00	164,41	4,59	162,71	6,29	163,28	5,72	168,39	0,61	164,22	4,78
15	1,15	118,70	119,68	-0,98	115,45	3,25	116,75	1,95	122,87	-4,17	117,87	0,83
15	1,08	77,20	81,07	-3,87	73,77	3,43	75,16	2,04	82,40	-5,20	76,20	1,00
15	1,02	41,50	50,72	-9,22	41,51	-0,01	41,71	-0,21	47,81	-6,31	42,50	-1,00
15	0,96	18,20	29,22	-11,02	20,31	-2,11	18,86	-0,66	22,82	-4,62	19,41	-1,21
15	0,91	5,95	15,53	-9,58	8,62	-2,67	6,37	-0,42	8,16	-2,21	6,85	-0,90
15	0,86	1,45	7,64	-6,19	3,18	-1,73	1,21	0,24	2,05	-0,60	1,76	-0,31
15	0,82	0,35	3,50	-3,15	1,03	-0,68	0,00	0,35	0,33	0,02	0,31	0,04
15	0,78	0,15	1,50	-1,35	0,30	-0,15	0,00	0,15	0,04	0,11	0,04	0,11
15	0,75	0,05	0,61	-0,56	0,08	-0,03	0,00	0,05	0,01	0,04	0,00	0,05
15	0,72	0,15	0,23	-0,08	0,02	0,13	0,00	0,15	0,00	0,15	0,00	0,15
15	0,69	0,10	0,08	0,02	0,00	0,10	0,00	0,10	0,00	0,10	0,00	0,10
15	0,66	0,10	0,03	0,07	0,00	0,10	0,00	0,10	0,00	0,10	0,00	0,10

Tabella 4<sup>60</sup>

<sup>60</sup> La tabella, e quelle successive di fine paragrafo, mostrano i prezzi di mercato e teorici dei diversi modelli della *call* per ogni *maturity* e *moneyness*, oltre a mostrare il *pricing error*.



Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Impl. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
38	2.16	459.10	459.80	-0.70	459.80	-0.70	459.80	-0.70	462.94	-3.84	460.88	-1.78
38	1.92	409.50	409.93	-0.43	409.90	-0.40	409.90	-0.40	412.41	-2.91	411.28	-1.78
38	1.73	360.25	360.19	0.06	360.02	0.23	360.03	0.22	365.89	-5.64	361.94	-1.69
38	1.57	311.60	310.88	0.72	310.21	1.39	310.26	1.34	316.70	-5.10	313.04	-1.44
38	1.44	263.90	262.64	1.26	260.78	3.12	260.94	2.96	268.92	-5.02	264.89	-0.99
38	1.33	217.60	216.52	1.08	212.46	5.14	212.83	4.77	223.36	-5.76	217.98	-0.38
38	1.23	173.30	173.76	-0.46	166.64	6.66	167.23	6.07	178.42	-5.12	173.11	0.19
38	1.15	132.00	135.58	-3.58	125.13	6.87	125.79	6.21	136.49	-4.49	131.37	0.63
38	1.08	94.65	102.82	-8.17	89.64	5.01	90.08	4.57	99.78	-5.13	94.12	0.53
38	1.02	62.80	75.85	-13.05	61.18	1.62	61.15	1.65	65.79	-2.99	62.76	0.04
38	0.96	37.70	54.50	-16.80	39.80	-2.10	39.22	-1.52	38.73	-1.03	38.30	-0.60
38	0.91	19.90	38.20	-18.30	24.73	-4.83	23.71	-3.81	19.17	0.73	21.02	-1.12
38	0.86	8.80	26.18	-17.38	14.73	-5.93	13.47	-4.67	7.51	1.29	10.17	-1.37
38	0.82	3.50	17.58	-14.08	8.43	-4.93	7.16	-3.66	2.24	1.26	4.25	-0.75
38	0.78	1.00	11.58	-10.58	4.65	-3.65	3.54	-2.54	0.57	0.43	1.51	-0.51
38	0.75	0.30	7.51	-7.21	2.49	-2.19	1.60	-1.30	0.12	0.18	0.44	-0.14
38	0.72	0.55	4.80	-4.25	1.29	-0.74	0.64	-0.09	0.02	0.53	0.11	0.44
38	0.69	0.60	3.03	-2.43	0.65	-0.05	0.21	0.39	0.01	0.59	0.02	0.58
38	0.66	0.60	1.89	-1.29	0.32	0.28	0.03	0.57	0.00	0.60	0.00	0.60

Tabella 5

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Impl. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
79	2.16	458.85	456.48	2.37	456.21	2.64	456.22	2.63	463.79	-4.94	464.68	-5.83
79	1.92	410.45	407.40	3.05	406.54	3.91	406.59	3.86	416.86	-6.41	415.94	-5.49
79	1.73	362.95	359.30	3.65	357.20	5.75	357.32	5.63	368.18	-5.23	367.99	-5.04
79	1.57	316.55	312.89	3.66	308.67	7.88	308.94	7.61	321.23	-4.68	321.02	-4.47
79	1.44	271.60	268.93	2.67	261.77	9.83	262.19	9.41	275.36	-3.76	275.36	-3.76
79	1.33	228.50	228.16	0.34	217.50	11.00	218.04	10.46	231.43	-2.93	231.47	-2.97
79	1.23	187.70	191.14	-3.44	176.91	10.79	177.45	10.25	189.33	-1.63	189.91	-2.21
79	1.15	149.90	158.22	-8.32	140.85	9.05	141.23	8.67	148.15	1.75	151.37	-1.47
79	1.08	115.55	129.52	-13.97	109.82	5.73	109.91	5.64	112.46	3.09	116.57	-1.02
79	1.02	85.30	104.96	-19.66	83.94	1.36	83.65	1.65	78.98	6.32	86.20	-0.90
79	0.96	58.50	84.27	-25.77	62.97	-4.47	62.30	-3.80	50.29	8.21	60.79	-2.29
79	0.91	39.00	67.11	-28.11	46.45	-7.45	45.44	-6.44	28.72	10.28	40.58	-1.58
79	0.86	23.65	53.05	-29.40	33.73	-10.08	32.47	-8.82	14.04	9.61	25.44	-1.79
79	0.82	13.05	41.67	-28.62	24.15	-11.10	22.76	-9.71	5.44	7.61	14.85	-1.80
79	0.78	6.60	32.55	-25.95	17.08	-10.48	15.65	-9.05	1.84	4.76	8.01	-1.41
79	0.75	3.05	25.30	-22.25	11.95	-8.90	10.57	-7.52	0.52	2.53	3.95	-0.90
79	0.72	1.25	19.58	-18.33	8.28	-7.03	7.00	-5.75	0.15	1.10	1.77	-0.52
79	0.69	0.45	15.10	-14.65	5.69	-5.24	4.55	-4.10	0.05	0.40	0.71	-0.26
79	0.66	0.60	11.61	-11.01	3.88	-3.28	2.90	-2.30	0.01	0.59	0.26	0.34

Tabella 6

	<b>DTM</b>	<b>BSM</b>	<b>BSM con IV</b>	<b>BSM con G-C</b>	<b>GARCH con MC</b>	<b>MIVF</b>
<b>Primo Periodo</b>	15	20.67	4.43	2.56	7.72	1.90
	38	82.16	13.90	10.19	11.95	0.96
	79	299.46	60.26	49.79	28.79	8.36
	<b>SQM di periodo</b>	<b>134.10</b>	<b>26.19</b>	<b>20.84</b>	<b>16.15</b>	<b>3.74</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>11.58</b>	<b>5.12</b>	<b>4.57</b>	<b>4.02</b>	<b>1.93</b>

Tabella 7<sup>61</sup>

<sup>61</sup> Per ogni *maturity* è indicato lo scarto quadratico medio, SQM rappresenta lo scarto quadratico medio per l'intero periodo del relativo modello, mentre RSQM la radice dello scarto quadratico medio.

### 3.2. Secondo Periodo: 28 ottobre 2011

Il secondo periodo si presenta con una prima parte caratterizzata da elevate variazioni dell'indice S&P's 500, mentre nella seconda da deboli cambiamenti che restano comunque costanti nel tempo. La figura 16 rappresenta, come già visto, lo scostamento del prezzo teorico da quello di mercato all'aumentare del *moneyness* per il modello di Black-Scholes-Merton per le diverse *maturity*.

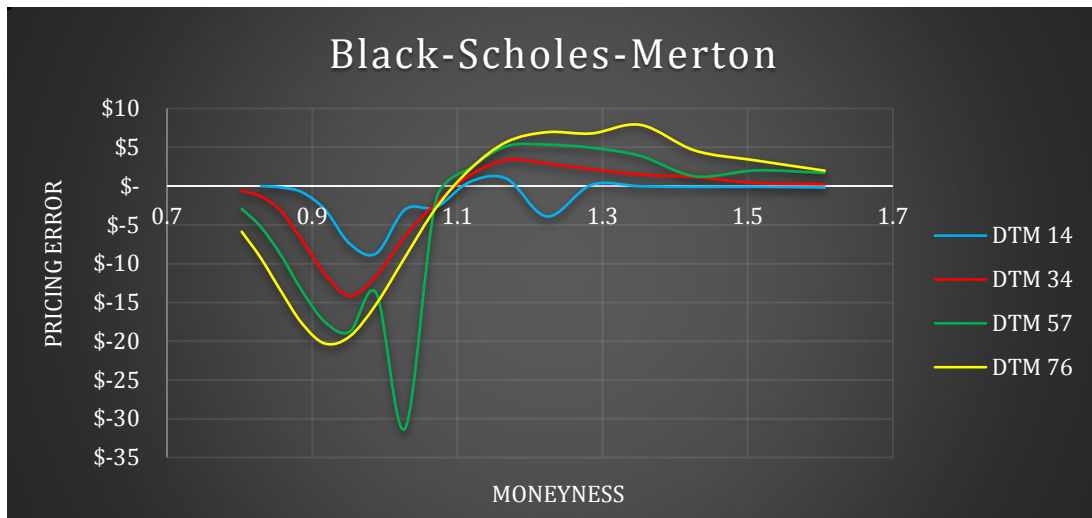


Figura 16

Come è possibile notare, anche qui l'andamento è simile a quello già visto per il periodo antecedente, tralasciando l'anomalia<sup>62</sup> che si verifica per la *call* con scadenza a 57 giorni, e il *pricing* "perfetto" avviene con *moneyness* pari a 1,1. Anche qui, per le *call out-of-the-money* il modello mostra una differenza tra il prezzo reale e prezzo teorico, in generale, negativa, mentre esattamente l'opposto per quelle *in-the-money*, confermando ancora una volta ciò che è stato detto nel terzo paragrafo del primo capitolo. Lo scarto quadratico medio in questo caso è pari a 73,12, quindi di gran lunga inferiore rispetto al suo simile già visto. Come già detto, l'ipotesi di volatilità costante non risulta supportata dalla realtà dei dati, ed infatti anche qui si nota un importante miglioramento, che implica uno scarto quadratico medio, molto vicino allo zero, pari infatti a 31,44 dollari al quadrato, in figura 17 è possibile vedere l'andamento del *pricing error*. Questo periodo è caratterizzato dall'aver un passato con elevata volatilità. Dalla figura 17 si nota che rispetto a Black-Scholes-Merton le linee sono traslate verso l'alto, mostrando quindi prezzi più bassi a parità di altre

<sup>62</sup> Un'ipotesi è che dato il particolare periodo storico, si possa essere presentata sul mercato un'opportunità di arbitraggio, causando una variazione anomala nel prezzo.

condizioni<sup>63</sup>, giustificati da una volatilità implicita minore di quella storica. Tutto ciò sta a suggerire come, considerando in modo semplicistico la volatilità storica, si commette un errore nel *pricing*.

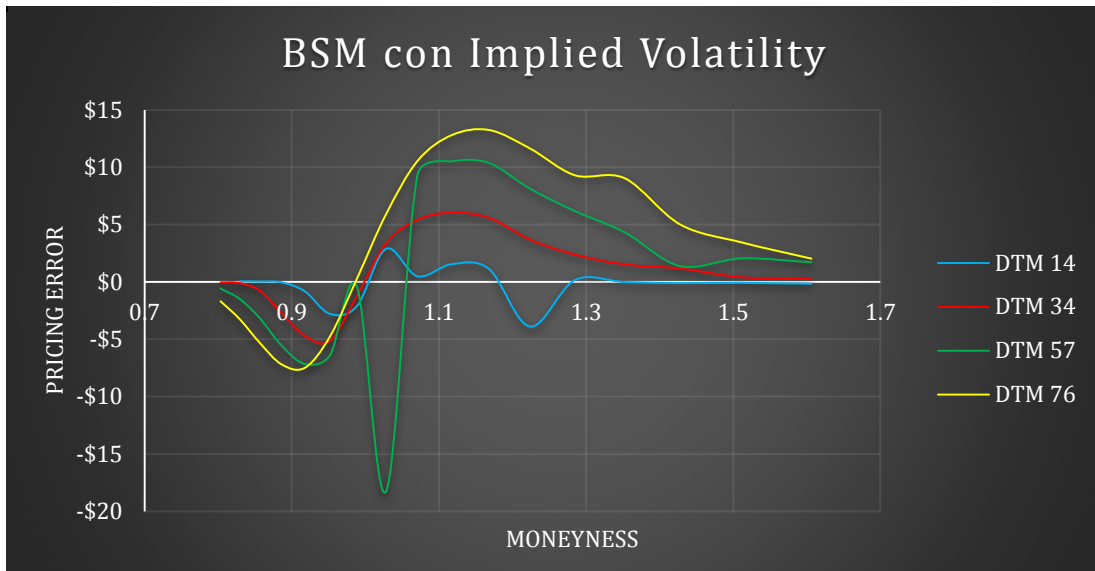


Figura 17

I risultati derivanti dal modello che integra l'espansione di Gram-Charlier è possibile vederli graficamente nella Figura 18.

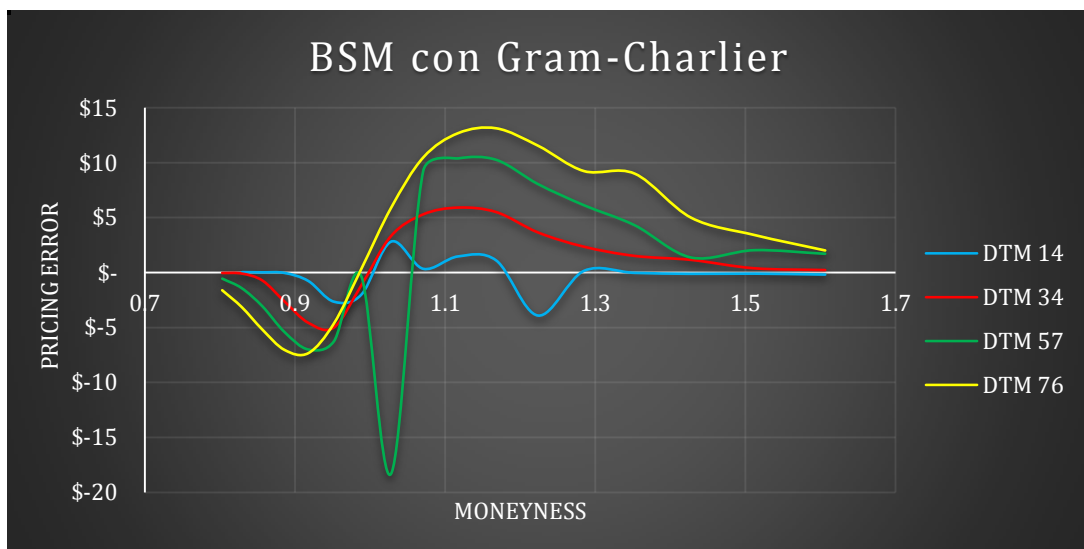


Figura 18

Si nota che l'andamento per tutte le scadenze è praticamente lo stesso visto per il modello di Black-Scholes-Merton, anche in questo caso la presenza di asimmetria e curtosi è confermata dal miglioramento, anche se minimo rispetto al modello che utilizza l'IV e in termini di errore quadratico medio si osserva: 30,82. La Figura 19

<sup>63</sup> Dato che il tasso di interesse privo di rischio e il *dividend yield* variano di pochissimo e i giorni a scadenza incidono molto poco.

mostra che in questo particolare contesto, la diversa volatilità attuale, rispetto a quella storica, causa la maggior parte della distorsione

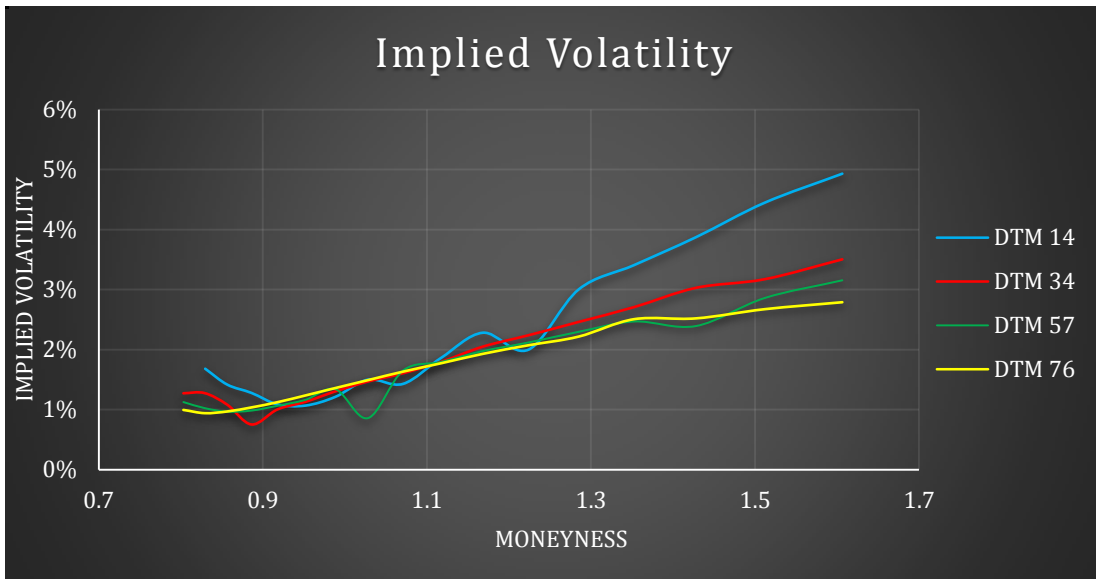


Figura 19

Questo ragionamento è supportato anche dal risultato del modello che sfrutta l'*Implied Volatility Function* Modificata. Infatti osservando la figura 20 è possibile notare come l'errore si aggiri intorno allo zero (scarto quadratico medio pari a 9,26). In particolare si può vedere come il *pricing error* relativo alla scadenza di 34 giorni sia molto vicino allo zero per tutti i livelli di *moneyness*.

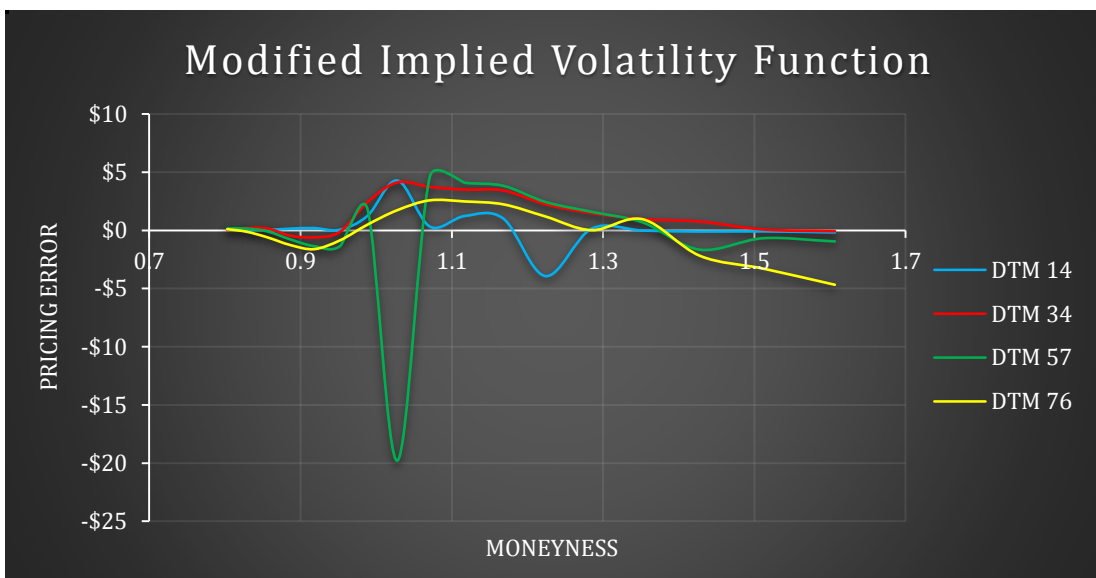


Figura 20

Ci si aspetta quindi che l'andamento della volatilità calcolata con il modello in questione replichi molto bene quello della volatilità implicita.

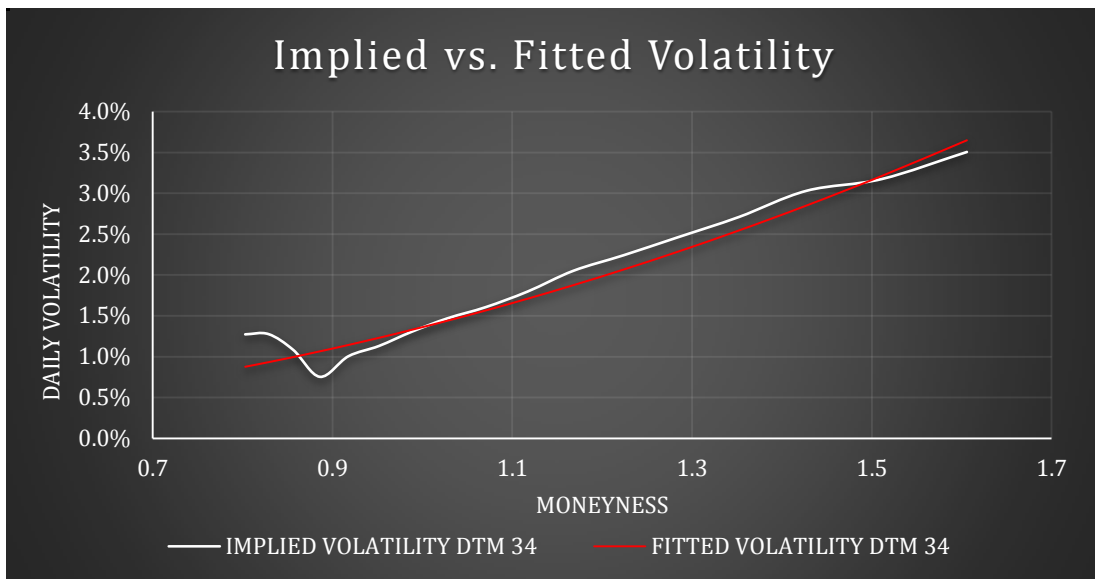


Figura 21

La figura 21 conferma quanto appena detto, e per una ulteriore riprova può essere utile vedere questo confronto per un'altra scadenza, ad esempio a 14 giorni. il grafico si presenta in questo modo figura 22:

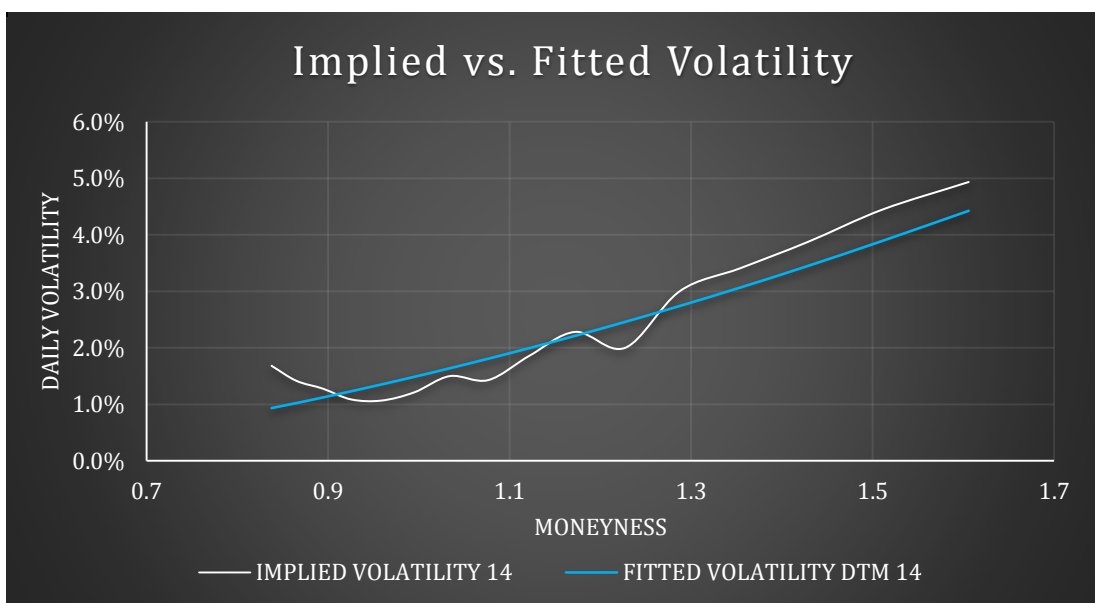


Figura 22

Gli ultimi risultati da analizzare sono quelli relativi al modello che sfrutta il GARCH e si avvale delle simulazioni Monte Carlo. I risultati presentano valori molto elevati, infatti lo scarto quadratico medio che si presenta è pari a 502,27 e in particolare l'andamento del *pricing error* è il seguente, figura 23.

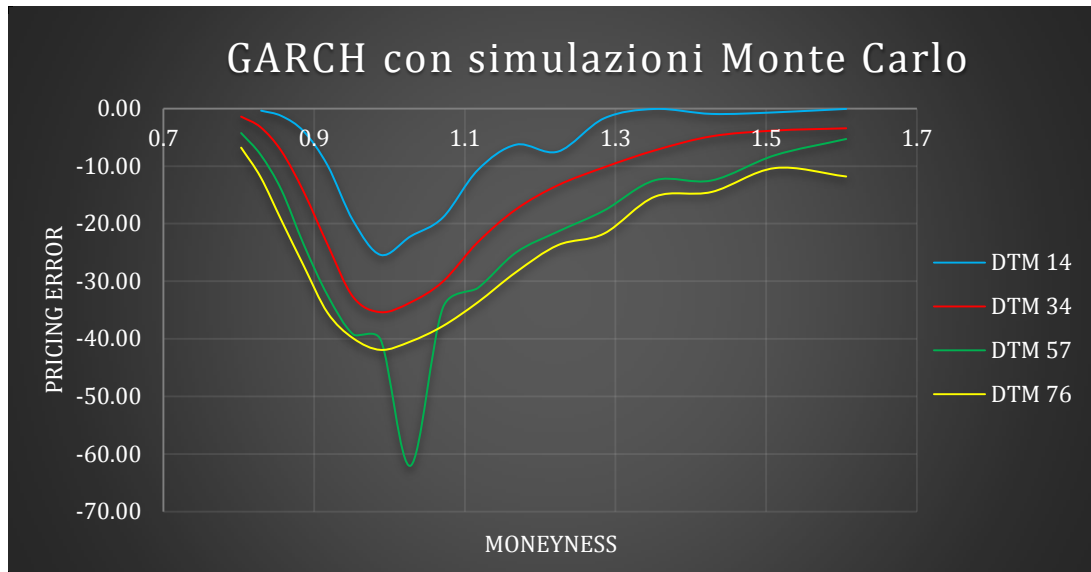


Figura 23

In generale le simulazioni Monte Carlo con il GARCH *model* sembra che vadano a sovrastimare il prezzo delle *call option* e ad avere un errore crescente con la scadenza delle opzioni con un massimo quando il *moneyness* dell'opzione risulta essere vicino ad 1, esattamente opposto al comportamento del modello di Black-Scholes-Merton.



Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
14	1.61	483.65	483.82	-0.17	483.82	-0.17	483.82	-0.17	483.70	-0.05	483.82	-0.17
14	1.51	433.75	433.84	-0.09	433.84	-0.09	433.84	-0.09	434.43	-0.68	433.84	-0.09
14	1.43	383.75	383.85	-0.10	383.85	-0.10	383.85	-0.10	384.69	-0.94	383.85	-0.10
14	1.35	333.85	333.87	-0.02	333.87	-0.02	333.87	-0.02	333.93	-0.08	333.87	-0.02
14	1.29	284.05	283.88	0.17	283.88	0.17	283.88	0.17	285.75	-1.70	283.89	0.16
14	1.22	230.00	233.91	-3.91	233.90	-3.90	233.90	-3.90	237.48	-7.48	233.93	-3.93
14	1.17	185.05	184.11	0.94	183.93	1.12	183.94	1.11	191.33	-6.28	184.07	0.98
14	1.12	135.80	135.26	0.54	134.26	1.54	134.32	1.48	146.46	-10.66	134.65	1.15
14	1.07	87.10	89.82	-2.72	86.62	0.48	86.75	0.35	106.05	-18.95	87.05	0.05
14	1.03	49.00	52.02	-3.02	46.12	2.88	46.18	2.82	71.20	-22.20	45.29	3.71
14	0.99	16.80	25.48	-8.68	18.91	-2.11	18.79	-1.99	42.23	-25.43	16.22	0.58
14	0.95	2.90	10.34	-7.44	5.69	-2.79	5.54	-2.64	22.40	-19.50	3.20	-0.30
14	0.92	0.40	3.45	-3.05	1.23	-0.83	1.16	-0.76	10.29	-9.89	0.26	0.14
14	0.89	0.15	0.95	-0.80	0.19	-0.04	0.17	-0.02	4.14	-3.99	0.01	0.14
14	0.86	0.05	0.22	-0.17	0.02	0.03	0.02	0.03	1.35	-1.30	0.00	0.05
14	0.83	0.05	0.04	0.01	0.00	0.05	0.00	0.05	0.43	-0.38	0.00	0.05
14	0.80	0.05	0.01	0.04	0.00	0.05	0.00	0.05	0.06	-0.01	0.00	0.05

Tabella 8

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
34	1.61	482.25	482.01	0.24	482.01	0.24	482.01	0.24	485.69	-3.44	482.30	-0.05
34	1.51	432.45	432.05	0.40	432.05	0.40	432.05	0.40	436.28	-3.83	432.37	0.08
34	1.43	383.25	382.09	1.16	382.09	1.16	382.09	1.16	388.08	-4.83	382.49	0.76
34	1.35	333.65	332.16	1.49	332.13	1.52	332.13	1.52	340.92	-7.27	332.70	0.95
34	1.29	284.55	282.39	2.16	282.18	2.37	282.19	2.36	294.77	-10.22	283.09	1.46
34	1.22	236.05	233.15	2.90	232.37	3.68	232.39	3.66	249.37	-13.32	233.87	2.18
34	1.17	188.75	185.36	3.39	183.17	5.58	183.24	5.51	206.24	-17.49	185.46	3.29
34	1.12	142.00	140.61	1.39	135.96	6.04	136.08	5.92	165.20	-23.20	138.74	3.26
34	1.07	98.70	100.88	-2.18	93.29	5.41	93.39	5.31	128.76	-30.06	95.38	3.32
34	1.03	61.50	67.98	-6.48	58.14	3.36	58.16	3.34	95.18	-33.68	57.97	3.53
34	0.99	31.25	42.82	-11.57	32.48	-1.23	32.39	-1.14	66.63	-35.38	29.50	1.75
34	0.95	11.00	25.16	-14.16	16.14	-5.14	15.98	-4.98	43.75	-32.75	11.69	-0.69
34	0.92	2.40	13.78	-11.38	7.12	-4.72	6.96	-4.56	26.03	-23.63	3.29	-0.89
34	0.89	0.20	7.05	-6.85	2.79	-2.59	2.68	-2.48	14.54	-14.34	0.59	-0.39
34	0.86	0.20	3.38	-3.18	0.97	-0.77	0.92	-0.72	7.62	-7.42	0.06	0.14
34	0.83	0.05	1.52	-1.47	0.31	-0.26	0.28	-0.23	3.47	-3.42	0.00	0.05
34	0.80	0.05	0.64	-0.59	0.09	-0.04	0.08	-0.03	1.46	-1.41	0.00	0.05

Tabella 9

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
57	1.61	481.65	479.94	1.71	479.94	1.71	479.94	1.71	486.95	-5.30	482.40	-0.75
57	1.51	432.05	430.03	2.02	430.00	2.05	430.00	2.05	440.17	-8.12	432.55	-0.50
57	1.43	381.45	380.19	1.26	380.07	1.38	380.07	1.38	393.95	-12.50	382.96	-1.51
57	1.35	334.50	330.61	3.89	330.18	4.32	330.19	4.31	346.95	-12.45	333.70	0.80
57	1.29	286.65	281.70	4.95	280.49	6.16	280.51	6.14	304.36	-17.71	284.95	1.70
57	1.22	239.55	234.20	5.35	231.43	8.12	231.49	8.06	260.92	-21.37	237.03	2.52
57	1.17	194.35	189.20	5.15	183.99	10.36	184.08	10.27	219.34	-24.99	190.50	3.85
57	1.12	150.25	147.95	2.30	139.74	10.51	139.85	10.40	181.41	-31.16	146.21	4.04
57	1.07	109.95	111.68	-1.73	100.61	9.34	100.69	9.26	144.56	-34.61	105.49	4.46
57	1.03	49.95	81.21	-31.26	68.24	-18.29	68.24	-18.29	111.99	-62.04	70.01	-20.06
57	0.99	43.00	56.84	-13.84	43.43	-0.43	43.35	-0.35	83.20	-40.20	41.55	1.45
57	0.95	19.50	38.29	-18.79	25.89	-6.39	25.74	-6.24	58.73	-39.23	21.25	-1.75
57	0.92	7.30	24.84	-17.54	14.46	-7.16	14.29	-6.99	39.74	-32.44	8.96	-1.66
57	0.89	2.01	15.54	-13.53	7.57	-5.56	7.42	-5.41	25.63	-23.62	2.96	-0.95
57	0.86	0.55	9.39	-8.84	3.73	-3.18	3.61	-3.06	14.73	-14.18	0.72	-0.17
57	0.83	0.25	5.49	-5.24	1.73	-1.48	1.66	-1.41	8.30	-8.05	0.12	0.13
57	0.80	0.18	3.11	-2.94	0.76	-0.59	0.72	-0.54	4.45	-4.28	0.01	0.16

Tabella 10

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
76	1.61	480.25	478.26	1.99	478.23	2.02	478.23	2.02	492.07	-11.82	484.35	-4.10
76	1.51	431.75	428.45	3.30	428.32	3.43	428.32	3.43	442.10	-10.35	434.53	-2.78
76	1.43	383.45	378.87	4.58	378.44	5.01	378.45	5.00	397.95	-14.50	385.17	-1.72
76	1.35	337.75	329.85	7.90	328.72	9.03	328.74	9.01	353.05	-15.30	336.37	1.38
76	1.29	288.75	281.96	6.79	279.46	9.29	279.51	9.24	310.46	-21.71	288.32	0.43
76	1.22	242.95	235.99	6.96	231.32	11.63	231.40	11.55	266.68	-23.72	241.38	1.58
76	1.17	198.65	192.94	5.71	185.41	13.24	185.51	13.14	227.05	-28.40	196.07	2.58
76	1.12	155.95	153.79	2.16	143.15	12.80	143.25	12.70	189.60	-33.65	153.17	2.78
76	1.07	116.55	119.35	-2.80	106.00	10.55	106.07	10.48	154.34	-37.79	113.76	2.79
76	1.03	80.95	90.12	-9.17	75.06	5.89	75.05	5.90	121.42	-40.47	79.11	1.84
76	0.99	51.00	66.21	-15.21	50.73	0.27	50.64	0.36	92.93	-41.93	50.52	0.48
76	0.95	27.95	47.34	-19.39	32.71	-4.76	32.57	-4.62	67.87	-39.92	28.92	-0.97
76	0.92	12.65	32.97	-20.32	20.14	-7.49	19.97	-7.32	48.14	-35.49	14.41	-1.76
76	0.89	4.65	22.39	-17.74	11.85	-7.20	11.68	-7.03	31.98	-27.33	6.04	-1.39
76	0.86	1.35	14.84	-13.49	6.68	-5.33	6.53	-5.18	20.81	-19.46	2.04	-0.69
76	0.83	0.38	9.62	-9.24	3.61	-3.24	3.50	-3.13	12.32	-11.94	0.53	-0.16
76	0.80	0.20	6.10	-5.90	1.88	-1.68	1.80	-1.60	7.00	-6.80	0.10	0.10

Tabella 11

	<b>DTM</b>	<b>BSM</b>	<b>BSM con IV</b>	<b>BSM con G-C</b>	<b>GARCH con MC</b>	<b>MIVF</b>
<b>Secondo Periodo</b>	14	10.22	2.38	2.25	129.90	1.89
	34	35.33	11.11	10.67	377.87	3.40
	57	131.70	53.38	52.53	756.90	27.97
	76	115.24	58.92	57.82	744.42	3.79
	<b>SQM di periodo</b>	<b>73.12</b>	<b>31.44</b>	<b>30.82</b>	<b>502.27</b>	<b>9.26</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>8.55</b>	<b>5.61</b>	<b>5.55</b>	<b>22.41</b>	<b>3.04</b>

Tabella 12

### 3.3. Terzo Periodo: 03 ottobre 2012

Il terzo e ultimo periodo considerato invece è caratterizzato dall'aver un passato, rispetto al giorno di analisi, con un tasso di variazione dell'indice sottostante costante, in linea con il presente. Sulla base di ciò che si è visto finora è ragionevole attendersi uno scarto quadratico medio minore rispetto agli altri due periodi. Osservando la figura 24 si nota che l'andamento, per quanto riguarda il modello di Black-Scholes-Merton è quello usuale, già visto precedentemente, con due importanti differenze, ossia che l'intervallo del *pricing error* è più contenuto rispetto agli altri due periodi, infatti lo squarto quadratico medio dal valore di mercato è pari a: 9,04 ed inoltre un errore pari a zero lo si osserva grosso modo quando l'opzione è *at-the-money*. Effettivamente il modello in analisi ha una *performance* migliore quando la volatilità è costante nel tempo e quello che era visto come un limite, in questi contesti non risulta dare particolari problemi.

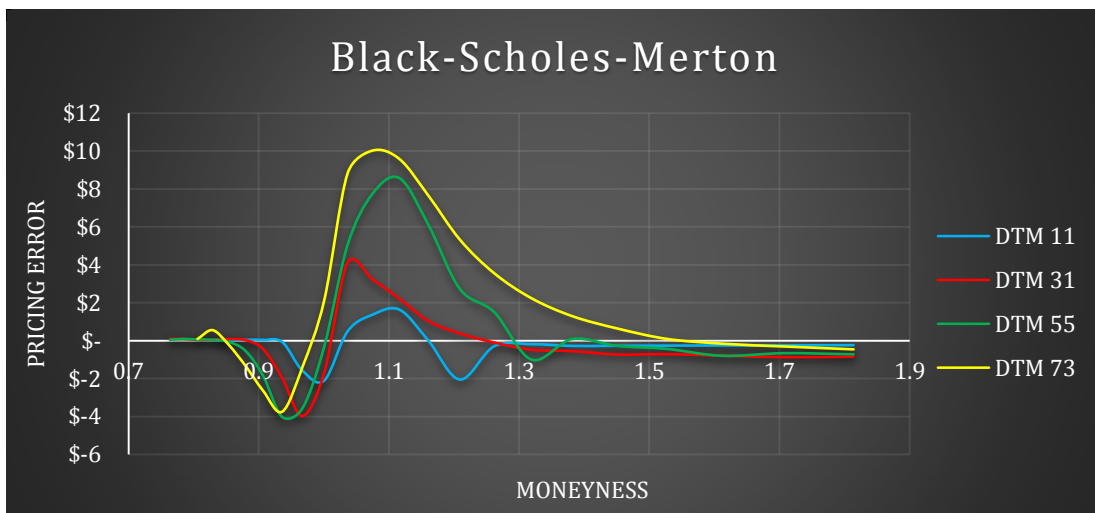


Figura 24

In questo caso l'utilizzo della volatilità implicita causa solamente un leggero miglioramento della *performance* del modello di Black-Scholes-Merton, mostrando uno scarto quadratico medio di 8,73 dollari al quadrato. Nella figura 25 è possibile vederne l'andamento del *pricing error*.

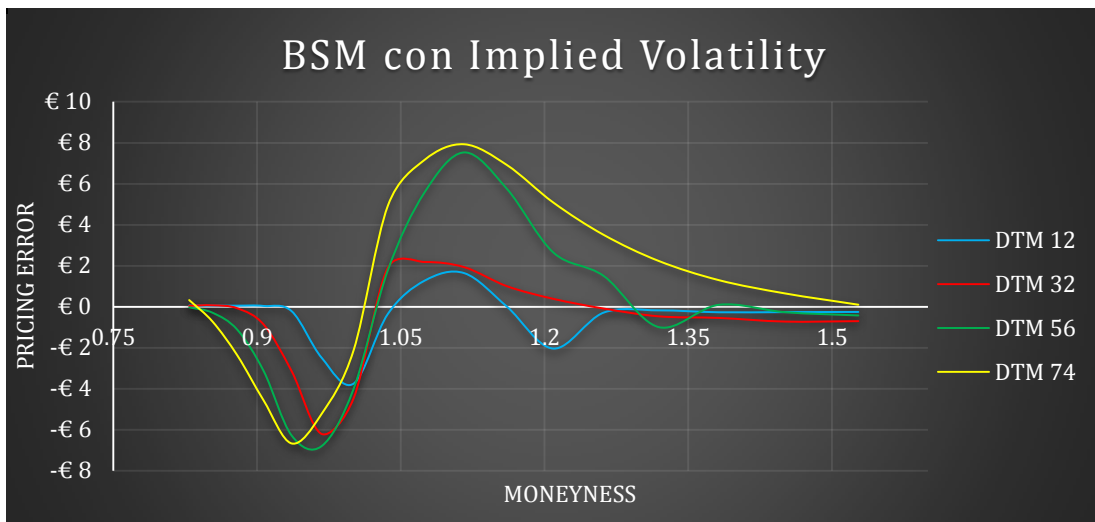


Figura 25

Questo risultato non sorprende, dato che in un contesto di stabilità la volatilità storica si avvicina molto a quella implicita (rispettivamente 0,87897% e 0,96556%) e soprattutto tende ad essere costante, figura 27. Per quanto riguarda l'espansione di Gram-Charlier, essa dovrebbe risultare più efficace, graficamente è possibile vederlo nella Figura 26. Gli andamenti questa volta sono diversi dai precedenti, e soprattutto il *pricing error* tende ad essere lo stesso per tutte le scadenze. In questo caso si nota un errore quadratico medio pari a: 3,40 rispetto ai 9,04 di BSM e 8,79 di BSM con IV.

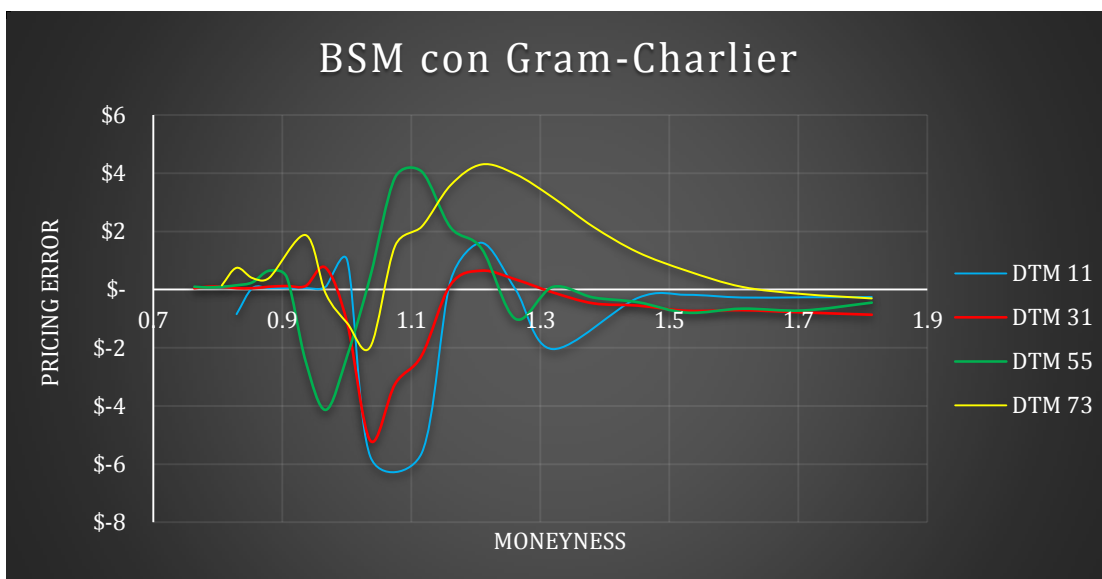


Figura 26

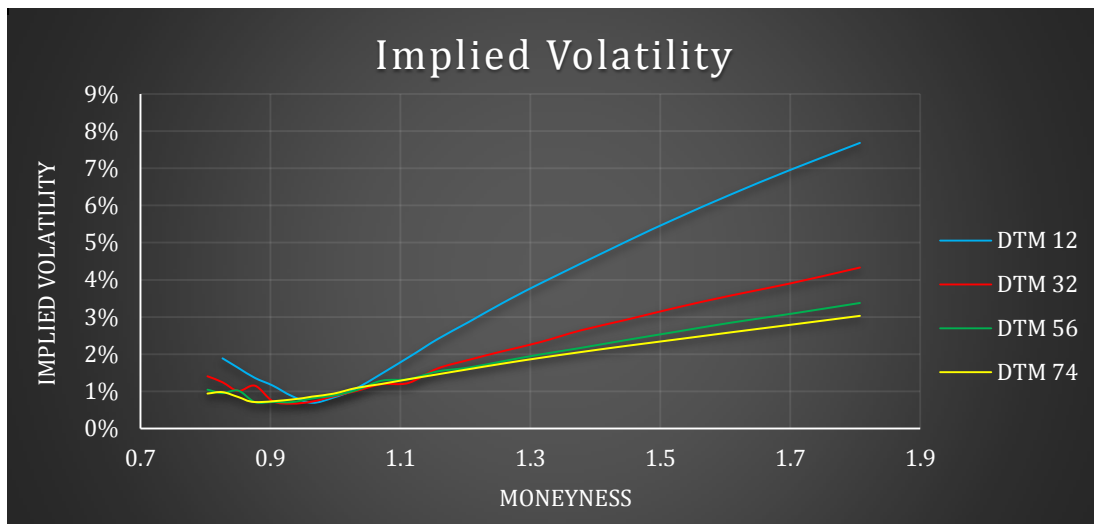


Figura 27

Il modello che sfrutta la versione modificata dell'*Implied Volatility Function* mostra uno scarto quadratico medio pari a 3,00, in inferiore a quanto mostrato dal metodo dell'*Implied Volatility* e graficamente si ottiene un risultato simile all'andamento visto per il modello di Black-Scholes-Merton, confermando che questo modello riesce ad avere ottime *performance* nonostante le scarse assunzioni teoriche, figura 28.

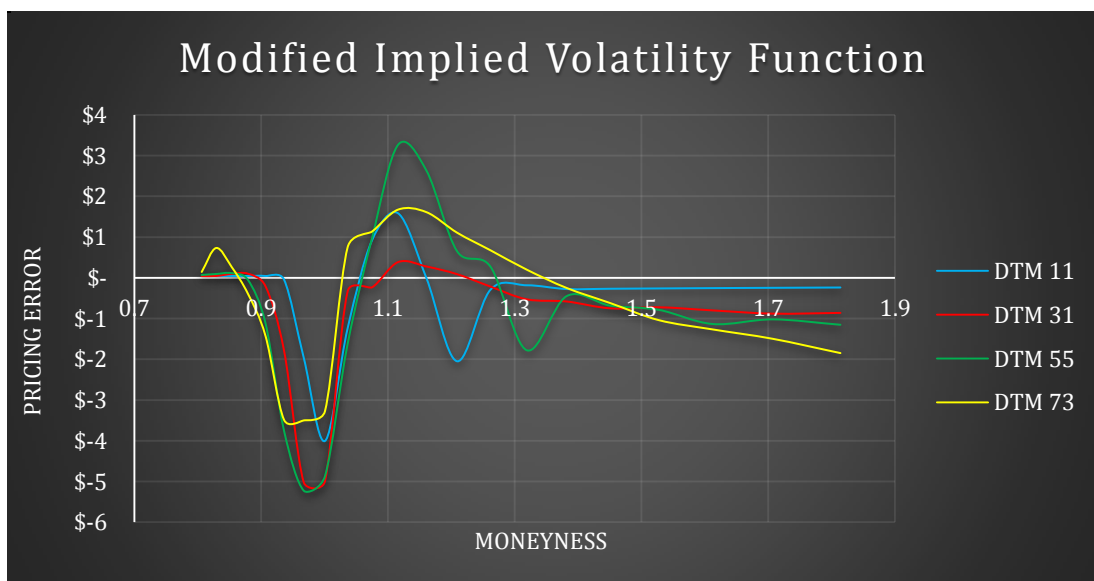


Figura 28

L'ultimo da analizzare è il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo. Esso mostra uno scarto quadratico medio uguale a 76,89, quindi di gran lunga inferiore al precedente periodo ma superiore al primo. L'andamento grafico del *pricing error* è praticamente uguale a quello visto per il periodo precedente, con il modello che tende a sovrastimare il prezzo della *call*, in particolare quando è *at-the-money*,



esattamente il contrario del modello di Black-Scholes-Merton. In figura 29 è possibile notare il tutto.

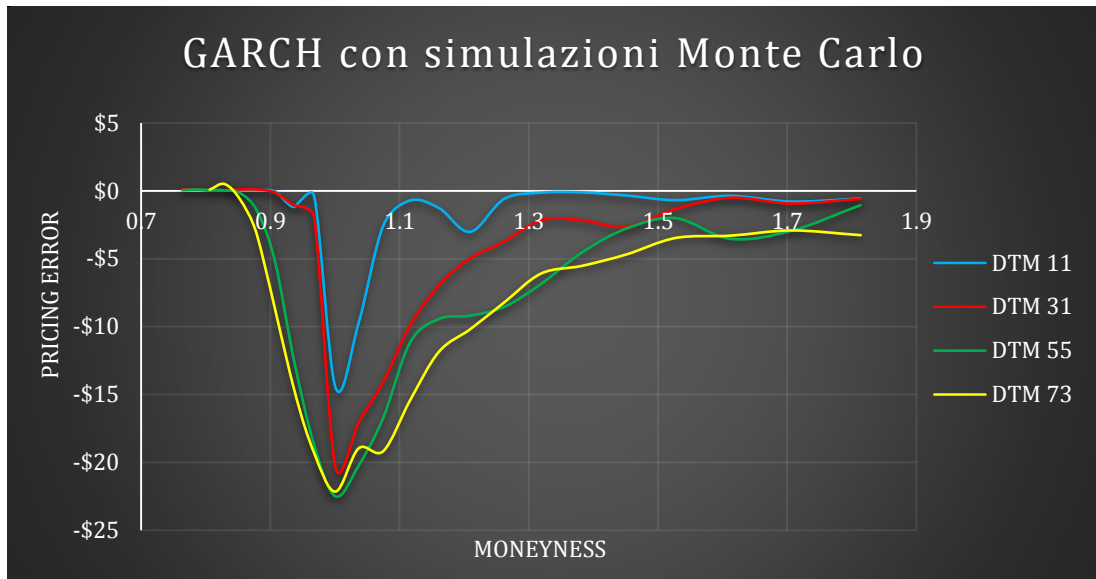


Figura 29

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
11	1.81	649.55	649.78	-0.23	649.78	-0.23	649.78	-0.23	650.11	-0.56	649.78	-0.23
11	1.71	599.55	599.79	-0.24	599.79	-0.24	599.79	-0.24	600.34	-0.79	599.79	-0.24
11	1.61	549.55	549.80	-0.25	549.80	-0.25	549.80	-0.25	549.91	-0.36	549.80	-0.25
11	1.53	499.55	499.81	-0.26	499.81	-0.26	499.81	-0.26	500.23	-0.68	499.81	-0.26
11	1.45	449.55	449.81	-0.26	449.81	-0.26	449.81	-0.26	449.89	-0.34	449.81	-0.26
11	1.38	399.55	399.82	-0.27	399.82	-0.27	399.82	-0.27	399.66	-0.11	399.82	-0.27
11	1.32	349.65	349.83	-0.18	349.83	-0.18	349.83	-0.18	349.78	-0.13	349.83	-0.18
11	1.26	299.55	299.84	-0.29	299.84	-0.29	299.84	-0.29	300.15	-0.60	299.84	-0.29
11	1.21	247.80	249.84	-2.04	249.84	-2.04	249.84	-2.04	250.82	-3.02	249.84	-2.04
11	1.16	199.85	199.85	0.00	199.85	0.00	199.85	0.00	201.11	-1.26	199.86	-0.01
11	1.12	151.50	149.86	1.64	149.86	1.64	149.89	1.61	152.21	-0.71	149.91	1.59
11	1.07	101.34	99.96	1.38	100.07	1.27	101.04	0.30	103.88	-2.54	100.42	0.92
11	1.04	52.69	52.20	0.49	53.04	-0.35	58.30	-5.61	62.43	-9.74	53.94	-1.25
11	1.00	14.70	16.79	-2.09	18.45	-3.75	20.44	-5.74	29.18	-14.48	18.73	-4.03
11	0.97	1.00	2.58	-1.58	3.49	-2.49	0.00	1.00	1.34	-0.34	2.98	-1.98
11	0.94	0.10	0.16	-0.06	0.32	-0.22	0.00	0.10	1.29	-1.19	0.14	-0.04
11	0.91	0.05	0.00	0.05	0.01	0.04	0.00	0.05	0.09	-0.04	0.00	0.05
11	0.88	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05
11	0.85	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05
11	0.83	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05

Tabella 13

Maturity	Moneyess	Market Price	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
31	1.81	646.75	647.59	-0.84	647.59	-0.84	647.59	-0.84	647.34	-0.59	647.61	-0.86
31	1.71	596.75	597.61	-0.86	597.61	-0.86	597.61	-0.86	597.68	-0.93	597.63	-0.88
31	1.61	546.85	547.63	-0.78	547.63	-0.78	547.63	-0.78	547.36	-0.51	547.65	-0.80
31	1.53	496.95	497.66	-0.71	497.66	-0.71	497.66	-0.71	498.28	-1.33	497.67	-0.72
31	1.45	446.95	447.68	-0.73	447.68	-0.73	447.68	-0.73	449.60	-2.65	447.69	-0.74
31	1.38	397.15	397.70	-0.55	397.70	-0.55	397.70	-0.55	399.31	-2.16	397.73	-0.58
31	1.32	347.25	347.72	-0.47	347.72	-0.47	347.72	-0.47	349.42	-2.17	347.77	-0.52
31	1.26	297.65	297.74	-0.09	297.74	-0.09	297.74	-0.09	301.40	-3.75	297.86	-0.21
31	1.21	248.15	247.76	0.39	247.77	0.38	247.80	0.35	253.13	-4.98	248.06	0.09
31	1.16	198.85	197.81	1.04	197.85	1.00	198.20	0.65	205.83	-6.98	198.57	0.28
31	1.12	150.35	148.13	2.22	148.42	1.93	150.18	0.17	160.27	-9.92	149.97	0.38
31	1.07	103.40	100.16	3.24	101.22	2.18	105.66	-2.26	117.44	-14.04	103.65	-0.25
31	1.04	62.10	57.99	4.11	60.20	1.90	65.34	-3.24	79.17	-17.07	62.46	-0.36
31	1.00	25.50	27.18	-1.68	29.97	-4.47	30.69	-5.19	45.86	-20.36	30.53	-5.03
31	0.97	5.90	9.88	-3.98	12.11	-6.21	7.06	-1.16	7.81	-1.91	10.95	-5.05
31	0.94	0.75	2.71	-1.96	3.90	-3.15	0.00	0.75	1.82	-1.07	2.54	-1.79
31	0.91	0.13	0.56	-0.43	1.00	-0.87	0.00	0.13	0.25	-0.13	0.33	-0.21
31	0.88	0.13	0.09	0.04	0.20	-0.08	0.00	0.13	0.02	0.10	0.02	0.10
31	0.85	0.10	0.01	0.09	0.03	0.07	0.00	0.10	0.00	0.10	0.00	0.10
31	0.83	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05

Tabella 14

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
55	1.81	644.25	644.97	-0.72	644.97	-0.72	644.97	-0.72	645.29	-1.04	645.40	-1.15
55	1.71	594.35	595.00	-0.65	595.00	-0.65	595.00	-0.65	597.28	-2.93	595.37	-1.02
55	1.61	544.25	545.04	-0.79	545.04	-0.79	545.04	-0.79	547.78	-3.53	545.38	-1.13
55	1.53	494.65	495.08	-0.43	495.08	-0.43	495.08	-0.43	496.66	-2.01	495.44	-0.79
55	1.45	444.85	445.12	-0.27	445.12	-0.27	445.12	-0.27	447.62	-2.77	445.53	-0.68
55	1.38	395.25	395.16	0.09	395.16	0.09	395.16	0.09	399.79	-4.54	395.70	-0.45
55	1.32	344.20	345.20	-1.00	345.20	-1.00	345.21	-1.01	351.05	-6.85	345.98	-1.78
55	1.26	296.75	295.24	1.51	295.25	1.50	295.35	1.40	305.30	-8.55	296.48	0.27
55	1.21	248.05	245.32	2.73	245.41	2.64	245.91	2.14	257.24	-9.19	247.41	0.64
55	1.16	201.80	195.70	6.10	196.06	5.74	197.74	4.06	211.23	-9.43	199.18	2.62
55	1.12	155.85	147.27	8.58	148.32	7.53	151.99	3.86	167.01	-11.16	152.60	3.25
55	1.07	110.00	102.25	7.75	104.41	5.59	109.55	0.45	126.68	-16.68	109.06	0.94
55	1.04	69.00	63.95	5.05	67.22	1.78	71.27	-2.27	89.24	-20.24	70.66	-1.66
55	1.00	35.00	35.30	-0.30	39.00	-4.00	39.13	-4.13	57.50	-22.50	39.90	-4.90
55	0.97	13.40	16.94	-3.54	20.20	-6.80	15.86	-2.46	32.07	-18.67	18.65	-5.25
55	0.94	3.00	7.02	-4.02	9.29	-6.29	2.57	0.43	15.40	-12.40	6.77	-3.77
55	0.91	0.65	2.51	-1.86	3.79	-3.14	0.00	0.65	5.82	-5.17	1.77	-1.12
55	0.88	0.25	0.77	-0.52	1.38	-1.13	0.00	0.25	1.74	-1.49	0.30	-0.05
55	0.85	0.15	0.21	-0.06	0.45	-0.30	0.00	0.15	0.33	-0.18	0.03	0.12
55	0.83	0.10	0.05	0.05	0.13	-0.03	0.00	0.10	0.05	0.05	0.00	0.10

Tabella 15

Maturity	Moneyness	Market Price	Black-Scholes-Merton		BSM con Imp. Vol.		BSM con Gram-Charlier		GARCH con Monte Carlo		MIVF	
			Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error	Price	Pricing Error
73	1.81	642.55	643.00	-0.45	643.00	-0.45	643.00	-0.45	645.81	-3.26	644.41	-1.86
73	1.71	592.75	593.05	-0.30	593.05	-0.30	593.05	-0.30	595.66	-2.91	594.25	-1.50
73	1.61	542.95	543.10	-0.15	543.10	-0.15	543.10	-0.15	546.25	-3.30	544.22	-1.27
73	1.53	493.25	493.15	0.10	493.15	0.10	493.15	0.10	496.72	-3.47	494.29	-1.04
73	1.45	443.85	443.20	0.65	443.20	0.65	443.20	0.65	448.53	-4.68	444.48	-0.63
73	1.38	394.55	393.25	1.30	393.26	1.29	393.26	1.29	400.08	-5.53	394.80	-0.25
73	1.32	345.55	343.31	2.24	343.32	2.23	343.39	2.16	351.64	-6.09	345.36	0.19
73	1.26	296.95	293.39	3.56	293.45	3.50	293.78	3.17	305.17	-8.22	296.28	0.67
73	1.21	248.95	243.62	5.33	243.87	5.08	244.98	3.97	259.14	-10.19	247.85	1.10
73	1.16	202.15	194.50	7.65	195.24	6.91	197.85	4.30	214.00	-11.85	200.55	1.60
73	1.12	156.85	147.26	9.59	148.92	7.93	153.26	3.59	172.27	-15.42	155.19	1.66
73	1.07	114.15	104.12	10.03	106.98	7.17	111.98	2.17	133.31	-19.16	113.04	1.11
73	1.04	76.55	67.73	8.82	71.62	4.93	75.05	1.50	95.52	-18.97	75.82	0.73
73	1.00	42.20	40.05	2.15	44.32	-2.12	44.17	-1.97	64.35	-22.15	45.49	-3.29
73	0.97	20.00	21.37	-1.37	25.23	-5.23	21.15	-1.15	39.27	-19.27	23.52	-3.52
73	0.94	6.50	10.24	-3.74	13.17	-6.67	6.64	-0.14	21.03	-14.53	9.99	-3.49
73	0.91	1.88	4.41	-2.53	6.46	-4.58	0.00	1.88	6.75	-4.88	3.30	-1.43
73	0.88	0.75	1.71	-0.96	2.78	-2.03	0.00	0.75	3.69	-2.94	0.80	-0.05
73	0.85	0.40	0.60	-0.20	1.13	-0.73	0.00	0.40	1.08	-0.68	0.13	0.27
73	0.83	0.40	0.19	0.21	0.42	-0.02	0.00	0.40	0.25	0.15	0.01	0.39

Tabella 16

	<b>DTM</b>	<b>BSM</b>	<b>BSM con IV</b>	<b>BSM con G-C</b>	<b>GARCH con MC</b>	<b>MIVF</b>
<b>Terzo periodo</b>	11	0.82	1.47	3.64	16.28	1.49
	31	2.99	4.31	2.44	55.68	2.92
	55	12.08	12.46	3.50	109.91	4.84
	73	20.26	16.69	4.04	125.71	2.76
	<b>SQM di periodo</b>	<b>9.04</b>	<b>8.73</b>	<b>3.40</b>	<b>76.89</b>	<b>3.00</b>
	<b>RSQM di periodo</b>	<b>3.01</b>	<b>2.96</b>	<b>1.84</b>	<b>8.77</b>	<b>1.73</b>

Tabella 17

## c. Conclusioni

La scelta di condurre tale studio è giustificata dall'estrema importanza del ruolo che la volatilità riveste nel contesto del *pricing* degli strumenti derivati. L'obiettivo è stato quello di calcolare l'impatto, sui prezzi delle opzioni, delle differenti condizioni di volatilità storica e attuale. I periodi di analisi sono tre e nello specifico il primo presenta un passato con un basso livello di volatilità a fronte di una situazione attuale di instabilità dei mercati, il secondo invece presenta caratteristiche esattamente opposte, mentre l'ultimo è stato scelto per il suo passato e presente molto simili, con i mercati senza tensioni. Il confronto è avvenuto tra i prezzi restituiti dai modelli con quelli effettivamente visti sul mercato, sintetizzati dallo scarto quadratico medio. Sulla base di quest'ultimo si sono analizzate le diverse *performance* per provare, infine, a fornirne una motivazione e/o giustificazione tenendo in considerazione le assunzioni teoriche sottostanti ogni modello. Nel primo capitolo è stata presentata una descrizione teorica dei cinque modelli ponendo l'attenzione sulle ipotesi sottostanti, nel secondo invece le modalità di scelta dei dati, periodi e la messa in pratica dei modelli, mentre nel terzo ed ultimo capitolo è possibile vedere i risultati numerici e grafici dopo una breve descrizione delle opzioni e delle fonti. Essi offrono diversi spunti di riflessione. Il primo aspetto da notare è che, come da attese, nel terzo periodo si ha, in media, una migliore *performance* dei modelli. Il valore medio degli scarti quadratici medi risulta essere poco superiore a 20, mentre per il primo si osserva un valore leggermente maggiore di 40 e nel secondo, la media si colloca poco 130<sup>64</sup>, questo risultato non sorprende<sup>65</sup>. Passando ai modelli, si nota come il modello di Black-Scholes-Merton mostri il suo maggior limite, ossia considerare la volatilità costante per tutta la durata di vita dell'opzione e soprattutto uguale per ogni opzione, senza tenere conto della *maturity*, stimandola dai dati passati. Esso riesce a raggiungere risultati migliori in un contesto di stabilità dei mercati, mentre tende a fallire, riportando elevati scarti quadratici, in periodi con volatilità non costante, come lo sono il primo ed il secondo. Il *pricing* migliore avviene quando il rapporto tra *stock* e *strike price* è vicino ad uno, mentre quando si allontana l'andamento è lo stesso che la teoria ha anticipato. Inoltre è possibile dire che gli scarti quadratici sono direttamente proporzionali alla scadenza della *call*. La metodologia che migliora

---

<sup>64</sup> Per questo periodo il modello GARCH con le simulazioni è la causa principale di un valore così alto.

<sup>65</sup> Considerando ciò che è stato detto nel capitolo 1.

decisamente il modello base di Black-Scholes-Merton, è quello che sfrutta la volatilità implicita delle *call* passate. Esso è preferibile alla luce dei risultati visti, ed è supportato anche dal superiore scarto quadratico medio per il primo ed il secondo periodo rispetto al terzo, poiché suggerisce una migliore *performance* di BSM quando la volatilità storica è costante. Per quanto riguarda il modello che impiega la *modified implied volatility function*, c'è da dire che è molto condizionato non solo dal periodo di riferimento, ma anche dalla variazione, rispetto al giorno precedente, dell'indice di riferimento sottostante, così come l'*implied volatility*. Esso è per questo motivo, insieme al sopracitato, quello che ha, in media, la migliore *performance* per tutti i periodi, dato che riesce ad ovviare alla staticità della volatilità storica. Il suo punto di forza infatti consiste nello sfruttare la presenza dei *volatility cluster* nelle serie storiche finanziarie, senza considerare il passato più lontano. Un caso particolare è poi quello già visto nella Figura 28, dato che l'andamento del *pricing error* per il modello della MIVF visto riesce a replicare, quasi perfettamente, quello del modello di Black-Scholes-Merton. Quando invece si considera la presenza di curtosi ed asimmetria diverse da zero, l'utilizzo dell'espansione di Gram-Charlier, porta a miglioramenti superiori al 100%<sup>66</sup> in qualsiasi contesto, confermando la non normalità della distribuzione della variazione del sottostante. Un caso interessante da considerare è quello mostrato nella figura 26. Come è stato già detto infatti il *pricing error* risulta essere costante per tutte le scadenze, a riprova del fatto che riesce a tenere in conto della particolare forma della distribuzione dei rendimenti del sottostante, soprattutto quando i mercati sono stabili. Infine si è utilizzato il modello GARCH con le simulazioni Monte Carlo per permettere di dare alla volatilità un percorso dinamico invece che considerarla statica. Esso mostra un andamento atipico rispetto agli altri. È possibile vedere che il più basso scarto quadratico medio lo si osserva non nel terzo, ma nel primo periodo, mentre nel secondo raggiunge livelli altissimi. Una possibile spiegazione si fonda sulla possibilità che il modello in analisi vada a sovra-prezzare le opzioni rispetto ai valori osservati sul mercato. Un eventuale motivo può risiedere nel fatto che la distribuzione dei rendimenti, alla base del modello GARCH sia una normale standard, ipotesi irrealistica, già provata nel capitolo 1. Infatti nel primo periodo, sulla base di una volatilità storica bassa, restituisce un valore minore o simile a quello visto sul mercato<sup>67</sup>, mentre nel

---

<sup>66</sup> Rispetto al valore restituito dal modello di Black-Scholes-Merton.

<sup>67</sup> Si ricorda la relazione positiva tra volatilità e prezzo dell'opzione.



secondo, a seguito di volatilità passata molto alta, restituisce un valore per la *call* molto più elevato di quello effettivamente riscontrato. In ultimo, per il terzo periodo, ragionando analogamente ci si aspetta un prezzo finale maggiore di quello di mercato ma con uno scarto inferiore al secondo ma maggiore al primo, cosa che si verifica effettivamente. Questo perché il GARCH replica in maniera dinamica<sup>68</sup> il passato nel futuro. Ciò porta ad errori importanti quando vi è elevata differenza tra volatilità passata ed attuale, ma solamente quando la prima è maggiore della seconda.

Il lavoro ha quindi mostrato come la volatilità influenza in misura significativa il *pricing* delle opzioni e soprattutto come i modelli tendono a fallire<sup>69</sup> quando i mercati sono in cambiamento, confermando quindi che la situazione passata non riflette necessariamente, in misura accurata, il presente. Si è comunque potuto vedere che alcune delle assunzioni possono essere superate, e quindi raggiungere miglioramenti, grazie ai quali si riesce a replicare con maggiore fedeltà l'andamento dei mercati.

---

<sup>68</sup> Quindi aiuta a superare il limite del modello di Black-Scholes-Merton.

<sup>69</sup> Alcuni in misura maggiore rispetto ad altri.

## d. Bibliografia

BACKUS, D., FORESI, S., LI, K., WU, L., 1997: "Accounting for Biases in Black-Scholes," Manuscript, The Stern School at New York University.

BAKSHI, G., CAO, C., CHEM, Z., 1997: "Empirical performance of alternative option pricing models," *J. Finance*, 52, 2003-2050.

BLACK, F. e M., SCHOLES (1973): "The valuation of Option and Corporate Liabilities," *J. Political Econ.*, 81, 637-659.

BOLLERSEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *J. Economet.*, 31, 307-327.

BOYLE, P. (1977): "Options: a Monte Carlo Approach," *J. Financial Econ.*, 4, 323-338.

CHRISTOFFERSEN, P. 2012: "Elements of Financial Risk Management," second ed. The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5, 1GB, UK.

CHRISTOFFERSEN, P., DORION, C., JACOBS, K., WANG, Y., 2010a: "Volatility components: Affine restrictions and non-normal innovations," *J. Bus. Econ. Stat.*, 28, 483-502.

CHRISTOFFERSEN, P., ELKAMHI, R., FEUNOU, B., JACOBS, K., 2010b: "Option valuation with conditional heteroskedasticity and non-normality," *Rev. Financ. Stud.* 23, 2139-2183.

CHRISTOFFERSEN, P., HESTON, S., JACOBS, K., 2006: "Option valuation with conditional skewness," *J. Econom.*, 131, 253-284.

CHRISTOFFERSEN, P., JACOBS, K., 2004a: "Which GARCH model for option valuation?" *Manag. Sci.* 50, 1204-1221.

CHRISTOFFERSEN, P., JACOBS, K., ORNTHANALAI, C., 2010: "GARCH option valuation, theory and evidence," In: Duan. J.-C., Gentle. J., Hardle, W.(Eds.), *Handbook of Computational Finance*, forthcoming. Springer, New York, NY.

COX, J.C., S.A. ROSS, 1976: "The valuation of options for alternative stochastic processes," *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.

- DERMAN, E., KANI, (1994): "Riding on a Smile," Risk, 32-9.
- DUAN, J.-C. (1995): "The GARCH Option Pricing Model," Math. Finance 5, No. 1, 13-32.
- DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R., 1998: "Implied volatility functions: Empirical tests," J. Finance 53, 2059-2106.
- DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R., E., (1998): "Implied Volatility Functions: Empirical Tests," The Journal of Finance, 53, 2059-2106.
- DUPIRE, B., (1994): "Pricing with a Smile," Risk Magazine, Incisive Media.
- ENGLE, R. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation," Econometrica, 50, 987-1008.
- ENGLE, R., e C., MUSTAFA (1992): "Implied ARCH Models from Options Prices," J. Economet., 52, 289-311.
- HULL, J. and A., WHITE (1987): "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," J. Finance, 42, 281-300.
- HULL, J., 2013: "Options, Futures and Other Derivatives," eighth ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- MERTON, R. (1973): "The theory of Rational Option Pricing," Bell J. Econ. Management Sci., 4, 141-183.
- NELSON, D. (1990): "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model," Economet. Theory, 6, 318-334.
- RUBINSTEIN, M., (1994): "Implied Binomial Trees," Journal of Finance.
- SHEIKH, A. (1991): "Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing," J. Financial Quant. Analysis, 26, 459-475.

## e. Sitografia

Bloomberg, Database,

<http://www.bloombergsoftware.com>

Federal Reserve System, Database,

<http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>

Social Science Research Network, Pubblicazioni,

<http://www.ssrn.com/en/>

The Journal of Derivatives, Pubblicazioni,

<http://www.ijournals.com/toc/jod/current>

Thomson Reuters Eikon, Database,

<http://financial.thomsonreuters.com/en/products/tools-applications/trading-investment-tools/eikon-trading-software.html>