LUISS Guido Carli

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI

Dipartimento di **Impresa e Management**

Cattedra **Matematica Finanziaria**

Analisi ed applicazione pratica della Teoria di Selezione del Portafoglio

RELATORE
Prof.ssa Gabriella Foschini

CANDIDATO
Matr. 178471

ANNO ACCADEMICO

2014/2015

Indice

Introduzione

La *Finanza* è quella scienza economica che studia le strategie adottate dalle Istituzioni, dalle imprese e dalle famiglie al fine di conseguire un determinato obiettivo in uno specifico settore. Tali studi hanno permesso la realizzazione di alcuni modelli matematici-statistici che favoriscono l'approccio con questa disciplina. In particolare è possibile inquadrare la finanza mediante due punti di vista. Il primo di essi è dato dall'analisi effettuata dal punto di vista delle aziende la quale comprende lo studio della gestione degli investimenti. La seconda classificazione è invece data dallo studio delle dinamiche di corretto funzionamento ed equilibrio dei mercati.

La finanza aziendale studia le decisioni finanziarie, ossia l'assunzione di una determinata posizione di investimento e/o di finanziamento, che le imprese perseguono per ottenere un incremento del valore aziendale. Per valore aziendale si intende il maggior valore che le imprese ottengono operando come tali rispetto a ciò che i singoli azionisti siano in grado di ottenere ricorrendo ai soli investimenti personali. È quindi necessario utilizzare uno strumento in grado di valutare la convenienza degli investimenti: il WACC (*Weighted Average Cost of Capital)*. Esso rappresenta il tasso di attualizzazione dei flussi di cassa disponibili in una azienda. Il WACC è calcolabile come media ponderata tra il costo del capitale azionario (r_E) e il costo del debito (r_D) rispettivamente ponderati per il valore del capitale azionario e del debito. Il costo del capitale azionario rappresenta il costo opportunità del capitale azionario, ossia il rendimento atteso di un titolo derivato dal rendimento che offrono altri titoli con lo stesso rischio.

La finanza dei mercati studia le condizioni che garantiscono l'equilibrio ed il funzionamento dei mercati. Gli operatori di mercato ricorrono a modelli matematico-statistici per selezionare le strategie di investimento più consone per i loro obiettivi. Generalmente, le scelte di allocazione dei propri investimenti viene alienata a soggetti professionali e specializzati in *asset allocation*.

Concluse le necessarie premesse, il presente elaborato si pone l'obiettivo di fornire una approfondita descrizione delle teorie fondamentali che costituiscono la base dei mercati finanziari. Il primo modello descritto è tratto dalla *Portfolio Selection* di

H.Markowitz, pioniere della moderna teoria di portafoglio. Esso descrive il processo di costruzione di un portafoglio di titoli rischiosi. Inoltre, le ipotesi formulate da tale studio, permettono lo sviluppo di un ulteriore modello, quello del CAPM realizzato dalla collaborazione tra Sharpe, Lintner e Mossin.

Nonostante i modelli proposti presentino dei limiti evidenti (i quali saranno esposti nel presente elaborato), essi costituiscono le fondamenta teoriche per la la costruzione di un portafoglio di investimento.

Il primo capitolo proposto si pone l'obiettivo di introdurre gli elementi teorici riguardanti la gestione dei portafogli di investimento. In particolare si presentano i servizi di investimento proposti dagli intermediari e i criteri con i quali vengono selezionate le opportunità più consone al profilo dei singoli investitori.

Il secondo capitolo descrive la Teoria di Portafoglio moderna introdotta dall'economista H.Markowitz analizzandone nel dettaglio le ipotesi di partenza, gli strumenti di natura matematico-statistica del valore atteso, della varianza, della covarianza e del coefficiente di correlazione di un portafoglio di titoli. Si presenta un percorso per la realizzazione di una frontiera di portafogli e di scelta efficiente. Infine si affrontano i limiti evidenziati dallo studio della teoria di portafoglio al fine di introdurre il modello del CAPM. Introducendo i concetti di investimento privi di rischio e di portafoglio di mercato ed evidenziando la relazione di dipendenza lineare tra le variabili di rischio e di rendimento dei titoli, tale modello si pone come obiettivo quello di superare i limiti della Teoria di Portafoglio.

Il terzo capitolo offre una applicazione pratica del processo di costruzione di una frontiera efficiente attraverso l'utilizzo dell'applicativo di Excel. Per far ciò saranno utilizzati dei dati finanziari disponibili sul celebre sito di *Yahoo Finance*, integrando, ove necessario, concetti teorici necessari per una completa comprensione del modello.

Capitolo 1 – Introduzione ai Mercati Finanziari

Un mercato finanziario è il luogo ideale in cui risparmiatori ed operatori si accordano e scambiano strumenti finanziari. Essi rappresentano dei mezzi di investimento tramite i quali i risparmiatori cedono temporaneamente il loro surplus di liquidità mentre gli operatori attivi si occupano di impiegarla al fine di permettere lo svolgimento di determinate attività che genereranno un lucro.

1.1 Come sceglie l'investitore

Solitamente un individuo gestisce le proprie economie dividendo i suoi guadagni in due categorie ben distinte: *Consumi* e *Risparmi*. I primi rappresentano quel valore che l'individuo prevede di utilizzare per far fronte alle esigenze del presente mentre i risparmi rappresentano quella parte che verrà utilizzata per far fronte alle future esigenze. Solitamente la parte dedicata al risparmio viene destinata ad investimenti che possono incrementarne il valore nel futuro. Per un risparmiatore è però difficile intraprendere una attività di investimento in prima persona poiché non ha a sua disposizione tutte le informazioni necessarie e il loro ottenimento comporterebbe un esborso notevole. Per questo motivo si serve di un tramite, un intermediario. Esso rappresenta un soggetto autorizzato che svolge attività di raccolta e di allocazione delle risorse finanziarie. Tale autorizzazione è fornita dalla CONSOB[1], organo di controllo e di tutela del mercato mobiliare e dei suoi operatori.

Poiché le attività svolte dagli intermediari sono soggette ad elevati rischi, è stato necessario il ricorso alla giurisprudenza per regolarne la funzionalità. Nello specifico con il D.Lgs n.58 del 24/02/98[2] ha avuto origine il Testo Unico di Finanza (TUF) il quale contiene le principali norme in merito alla finanza e ai suoi operatori.

Il TUF si pone i seguenti macro-obiettivi[3]:

---

[1] Per dettagli in merito alle funzioni della CONSOB si veda: "http://www.consob.it/main/trasversale/risparmiatori/investor/servizi/servizi_consob/servizi1.html"

[2] Per visualizzare la norma si veda: "http://www.normattiva.it/uri-res/N2Ls?urn:nir:stato:decreto.legislativo:1998;058"

[3] Per maggiori dettagli si veda: "http://www.consob.it/web/investor-education/la-vigilanza-su-intermediari-finanziari"

- la salvaguardia della fiducia nel sistema finanziario
- la tutela degli investitori
- la stabilità e il buon funzionamento del sistema finanziario
- la competitività del sistema finanziario
- l'osservanza delle disposizioni in materia finanziaria

Gli intermediari finanziari hanno l'arduo compito di far conciliare le opportunità di investimento con il profilo di ciascun risparmiatore, il quale ha diverse preferenze in base alla propria propensione al rischio, al rendimento che si aspetta di ottenere e all'orizzonte temporale che vuole considerare. Raccogliendo tali informazioni è possibile ricostruire un *profilo finanziario* di natura soggettiva per il singolo risparmiatore. Da esso sarà poi possibile estrapolare un profilo *rischio-rendimento*, ossia un profilo basato su elementi oggettivi. Come si analizzerà nel dettaglio nel corso del presente lavoro, tali parametri rappresentano la base della "Teoria di Selezione di Portafoglio". Partendo dalla scelta di strumenti finanziari tra loro diversificati e considerandone i relativi rischi, è possibile ottenere un portafoglio il cui rendimento risulta massimizzato per il livello di rischio considerato. Tale teoria trova origine nel lavoro svolto da H.Markowitz, un economista statunitense il cui operato è un fermo pilastro delle moderne teorie.

1.2 La tutela per chi investe: MiFID

Al fine di tutelare gli interessi degli investitori è stata emanata la direttiva comunitaria *MiFID* (Market in Financial Instruments Directive). Tale direttiva, approvata dal Parlamento e dal Consiglio Europeo con direttiva 2004/39/CE ed in seguito integrata in Italia tramite D.Lgs n.164 del 17/09/2007[4], ha avuto il fine di favorire lo sviluppo e la stabilità dei mercati finanziari all'interno della C.E. e di proteggere gli investimenti degli operatori.

I punti salienti della direttiva sono così sintetizzabili:

[4] Per visualizzare la norma si veda: "http://www.normattiva.it/uri-res/N2Ls?urn:nir:stato:decreto.legislativo:2007;164"

- Eliminazione dell'obbligo di concentrazione sui mercati regolamentati così da favorire lo sviluppo e la crescita di mercati secondari;
- Obbligo di comunicazione alla autorità competenti delle operazioni svolte così da permettere al mercato l'ottenimento di un adeguato livello di informazione;
- Obbligo di classificare i propri investitori in base ad un dato elenco (retail o professional);
- Obbligo nell'eseguire una prestazione nel miglior modo possibile.

In particolare, La MiFID stabilisce tre principi fondamentali[5] che si applicano alle imprese che svolgono attività di investimento:

1) Agire in modo onesto, equo e professionale, per servire al meglio gli interessi dei Clienti;
2) Fornire informazioni appropriate e complete che siano corrette, chiare e non fuorvianti. Questo al fine di consentire di capire i prodotti e i servizi permettendo al cliente di prendere decisioni informate e consapevoli;
3) Offrire dei servizi che tengano conto della situazione individuale dell'investitore. Questo garantisce che gli investimenti corrispondano al profilo de alle esigenze specifiche di ciascun investitore

1.3 Associazione Cliente-Portafoglio

Come già anticipato, un cliente può essere classificato in base a dei criteri oggettivi a cui l'intermediario dovrà far riferimento per associare ad esso il portafoglio azionario più coerente con le richieste poste. Tali criteri sono costituiti da raccolte di informazioni (solitamente questionari) che permettono la comprensione della conoscenza e dell'esperienza dell'investitore, della sua situazione finanziaria e dei suoi obiettivi di investimento. In caso di mancata o incompleta informazione, gli intermediari devono astenersi dal prestare loro il proprio lavoro.

Un cliente sarà definito *retail* se risulterà avere una bassa conoscenza ed esperienza in materia di investimenti. Questa categoria di investitori è soggetta ad una forte tutela

[5] Per dettagli sulla normativa MiFID: "http://www.myunipolbanca.it/info-utili/Pagine/mifid.aspx"

da parte della normativa MiFID. Nel caso in cui il cliente risulti avere una notevole conoscenza ed esperienza nell'ambito degli investimenti, sarà incluso tra i clienti *professional*.

Come passo successivo, si sottopone il cliente ad un *Test di Appropriatezza*. Esso rappresenta un valido criterio per verificare che l'investitore abbia conoscenze sufficienti per comprendere i rischi dell'operazione. Tale test può avere due esiti:

- Il cliente ha compreso i rischi associati all'attività di investimento. Pertanto sarà possibile procedere all'esecuzione della proposta mostrata
- Il cliente non ha compreso a pieno i rischi della suddetta attività. In tal caso l'intermediario dovrà informare il cliente di tale esito. Se quest'ultimo vorrà procedere nella sua attività, dovrà liberare l'intermediario da ogni rischio ad esso non direttamente imputabile.

Capitolo 2 – Teoria della selezione di Portafoglio

Al fine di ottenere un portafoglio azionario costituito dalla miglior distribuzione possibile dei titoli considerati è necessario introdurre e descrivere lo studio effettuato da H. Markowitz sintetizzato nel suo articolo "*Portfolio Selection*[6]" pubblicato nel 1952. Punto di partenza di tale lavoro è dato dal concetto di diversificazione, ossia si propone di scegliere dei titoli tra loro non correlati. Ciò implica che se uno di essi dovesse riscontrare un rendimento inferiore di quanto era ragionevole aspettarsi, si compenserà con un rendimento superiore rispetto alle previsioni di un altro titolo. Tale analisi è poi conclusa mettendo in relazione i rendimenti degli investimenti considerati con il relativo rischio affermando che per ogni valore di rischio considerato esiste un valore massimo possibile di rendimento.

È possibile suddividere il processo di selezione di portafoglio in due macro-fasi: la prima di esse si basa sull'analisi dei rendimenti storici dei titoli i cui dati saranno utilizzati per ottenere stime delle performance future degli stessi; la seconda macro-fase considera l'analisi appena descritta per scegliere la miglior combinazione di portafoglio possibile.

Prima di procedere con l'effettiva descrizione del modello di Markowitz è necessario esporre le ipotesi di base da cui muovono i suoi studi:

- L'intervallo di tempo considerato è uniperiodale, ossia è dato da invervalli che vanno da *t* a *t+1*;
- Gli operatori sono razionali e condizionati solo da una variabile casuale (nel nostro caso, il Rendimento);
- Gli operatori sono avversi al rischio e massimizzano l'utilità attesa.

[6]Si veda: Markowitz H. M., "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*

2.1 Calcolo del Rendimento Atteso e della Varianza di un Titolo

Si definisce rendimento di una attività finanziaria ($r_{i,t}$) il valore ottenuto dal rapporto della variazione di prezzo nell'intervallo t;t+1 e il prezzo di acquisto:

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}} \qquad (2.1)$$

Dove:

- $P_{i,t}$ rappresenta il prezzo effettivo di vendita
- $P_{i,t-1}$ rappresenta il prezzo di acquisto
- $D_{i,t}$rappresenta il dividendo staccato nel periodo t

Il tasso di riferimento è definito ex-post se si è effettivamente realizzato, ossia se è un valore storico. È invece definito ex-ante quando ci si trova nell'epoca t-1 e si sta effettuando una previsione. In quest'ultimo caso non è possibile conoscere con esattezza il valore di $P_{i,t}$ e di $D_{i,t}$. Tale dettaglio dà all'investimento natura aleatoria, ossia è condizionato da una variabile casuale R[7]. Per semplicità di calcolo si assume che la variabile R sia discreta (che assume un numero finito di valori) e che essa sia descritta con una funzione di probabilità la quale associa ad ogni valore di R_i una certa probabilità p_i.

Poiché R_i è definito con un numero finito *n* di valori, è rappresentabile con una distribuzione $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}$ a cui si associa una rispettiva probabilità $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}$, il suo valore atteso è calcolabile come:

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_{ij} \qquad (2.2)$$

Pertanto il valore atteso di un titolo è definito come valore medio dei rendimenti del titolo ponderati per il rischio.

[7] Definizione tratta da "Introduzione alla Statistica", A.Monti, pag.126

Il rendimento di un titolo può però discostarsi dal suo valore atteso. Tale probabilità è catturata dal concetto di Varianza. Essa si definisce come somma dei quadrati degli scarti dalla media ponderati per le relative probabilità:

$$\sigma^2{}_i = E[R_i - E(R_i)]^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,(r_{ij} - E(R_i))^2$$

La varianza è però difficilmente interpretabile poiché, essendo la media dei quadrati dagli scarti, è espressa in una unità di misura diversa da quella utilizzata per il rendimento. Dunque sarà necessario ricorrere ad un indice più rappresentativo, la *Deviazione Standard*. Essa è calcolabile come radice quadrata della varianza:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2{}_i}$$

Al fine di semplificare i calcoli, nel presente lavoro verrà effettuata una ulteriore ipotesi: si assumerà che le successioni dei rendimenti storici di un titolo rispecchino l'andamento futuro dei rendimenti poiché non è possibile individuarne la distribuzione delle probabilità. Ciò implica che il rendimento atteso coincida con il rendimento storico del titolo. Tale asserzione è plausibile solo considerando un contesto di capitalizzazione continua degli interessi, ossia che gli interessi ottenuti in ciascun intervallo temporale siano reinvestiti infinite volte. In questo modo, in un orizzonte temporale di lungo periodo ad intervalli unitari, il tasso di rendimento è uguale al tasso istantaneo $\delta_i(t)$:

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln\left(1 + r_{i,t}\right) = \delta_i(t) \qquad (2.3)$$

Sfruttando la proprietà del logaritmo che permette di trasformare il logaritmo di un rapporto in una differenza tra due logaritmi e procedendo con il calcolo della media aritmetica in ogni istante di tempo in un intervallo delimitato tra *t* e *t-1*, è possibile effettuare il seguente ragionamento:

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(\,P_{t-1})$$

Se ne calcola la media in ogni istante di tempo *t* come segue:

$$Media = \frac{(\ln(P_2) - \ln(P_1)) + \cdots + (\ln(P_t) - ln(P_{t-1}))}{t}$$
$$= \frac{\ln(P_t) - \ln(P_1)}{t}$$

È possibile seguire anche un percorso alternativo sfruttando il rapporto incrementale del prezzo:

$$\frac{\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})}{P_t - P_{t-1}} = \frac{1}{P_{t-1}}$$

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Dove $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ rappresenta la variazione percentuale del prezzo nell'intervallo di tempo considerato.

È possibile riscrivere la formula appena ottenuta come segue:

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

È così giustificato l'utilizzo della formula 2.3 in un contesto di capitalizzazione continua degli interessi.

2.2 Composizione di un Portafoglio Azionario

Un portafoglio azionario è costituito dalla combinazione lineare di variabili casuali. Come già descritto nel contesto dei singoli titoli, anche per il portafoglio la variabile casuale sarà il suo rendimento (R_{ptf}).

Supponendo di avere a disposizione un certo numero *n* di titoli, ciascuno dei quali avrà un dato rendimento R_i, è possibile calcolare R_{ptf} come somma dei singoli rendimenti che compongono il portafoglio pesandoli per la relativa percentuale che è stata investita in ciascuno di essi (x_i):

$$R_{ptf} = x_1R_1 + x_2R_2 + \ldots + x_nR_n = \sum_{i=1}^{n} x_iR_i$$

Inoltre si impone che $\sum_{i=1}^{n} x_i$ sia uguale ad 1 poiché si vuole investire tutto il capitale disponibile e non si vuole ricorrere ad operazioni di indebitamento. Allo stesso modo si considerino possibili solo valori positivi per x_i così da evitare vendite allo scoperto[8].

Come già svolto nel caso dei singoli titoli, anche per un portafoglio le informazioni principali sono contenute nel suo valore atteso e nella sua varianza.

Il valore atteso di un portafoglio è dato dalla combinazione lineare dei titoli che lo compongono, infatti:

$$E(R_{ptf}) = \sum_{i=1}^{n} x_iE(R_i) \qquad (2.4)$$

Discorso analogo non può valere nel caso della varianza poiché in tal caso non sarà solo la variabilità dei rendimenti dei singoli titoli a definirne il valore bensì anche il modo in cui l'oscillazione del valore di un singolo titolo possa incidere sul valore degli altri titoli che compongono il portafoglio. Sarà dunque necessario introdurre uno strumento di statistica in grado di catturare tali relazioni in tutte le singole coppie che compongono il portafoglio di riferimento: la *Covarianza* (σ_{ij}). Essa è calcolabile come:

[8] Per definizione si veda: "http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2011-07-10/cosa-sono-vendite-scoperto-150532.shtml?uuid=AaiRi1mD"

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)]\,[R_j - E(R_j)]\} \tag{2.5}$$

Di particolare importanza è lo studio del segno della covarianza. Nel caso in cui il suo valore risulti positivo, la coppia di titoli considerata avrà una certa concordanza, ossia una variazione positiva del primo titolo causa una variazione positiva anche per il secondo titolo. Se invece il segno della covarianza risulti negativo, allora la coppia presa in analisi avrà una discordanza, ossia una variazione positiva del primo titolo causerà una variazione negativa nel secondo. Tuttavia il valore assunto è condizionato dall'unità di misura presa in considerazione. Pertanto sarà necessario ricorrere ad un ulteriore indice che possa effettivamente dare una informazione più corretta: il *coefficiente di correlazione* (ρ_{ij}). La formula per il suo ottenimento è la seguente:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} E\{[R_i - E(R_i)]\,[R_j - E(R_j)]\} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{2.6}$$

Il coefficiente di correlazione può assumere valori compresi nell'intervallo [-1;1] ed avranno la seguente interpretazione:

- se il suo valore è prossimo alle estremità allora i due titoli hanno una forte correlazione (positiva o negativa);
- se il suo valore è prossimo allo 0 allora i due titoli sono debolmente correlati;
- se il suo valore è uguale a 0 allora i due titoli sono tra loro indipendenti.

Fatte tali premesse è possibile procedere con il calcolo della varianza di un portafoglio. Per semplificarne l'esposizione sarà presentato prima un caso di portafoglio costituito da 2 titoli per poi generalizzare con un caso avente *n* titoli.

La varianza di un portafoglio è calcolabile come prodotto di tre matrici:

- Vettore riga dei relativi pesi;
- Matrice delle covarianze dei titoli che lo compongono;

- Vettore colonna dei relativi pesi.

Dunque:

$$\sigma^2{}_{ptf} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2{}_1 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma^2{}_n \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ (\cdots) \\ x_n \end{matrix}$$

Si noti come la diagonale maggiore della matrice delle covarianze sia costituita dalle varianze dei singoli titoli.

Nel caso in cui si abbia a disposizione un portafoglio costituito da soli 2 titoli, la varianza sarà calcolata come segue:

$$\begin{aligned} \sigma^2{}_{ptf} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2{}_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1\sigma^2{}_1 + x_2\sigma_{21} & x_1\sigma_{12} + x_2\sigma^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^2\sigma^2{}_1 + x_1x_2\sigma_{21} + x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\sigma^2{}_2 = \\ &= x_1^2\sigma^2{}_1 + x_2^2\sigma^2{}_2 + 2x_1x_2\sigma_{12} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aggiungendo al portafoglio un ulteriore titolo si può applicare il medesimo ragionamento, seppure con un calcolo più complesso:

$$\begin{aligned} \sigma^2{}_{ptf} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2{}_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma^2{}_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma^2{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^2\sigma^2{}_1 + x_2^2\sigma^2{}_2 + x_3^2\sigma^2{}_3 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dunque è possibile generalizzare la formula della varianza come segue:

$$\sigma^2{}_{ptf} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{2.9}$$

2.3 Ottimizzare un Portafoglio: Principio di Dominanza

Dato un portafoglio azionario è possibile ottenere diverse combinazioni di valore atteso e di varianza a seconda delle scelte effettuate in merito al collocamento dei propri investimenti. Dunque è necessario trovare quella combinazione che permette di ottenere la miglior strategia possibile (ad esempio il massimo rendimento possibile per un dato livello di rischio). A tal proposito si introduce il principio di Dominanza. Supponendo di avere a disposizione due portafogli A e B, si può definire A efficiente e dominante su B se rispetta le seguenti proprietà:

- $E(R_A) \geq E(R_B)$
- $\sigma^2{}_A \leq \sigma^2{}_B$
- Una delle due disuguaglianze deve essere forte[9] (deve valere col maggior o col minore stretto)

In termini matematici, per individuare il portafoglio dominante è necessario impostare una funzione imponendo un vincolo. Indicando con *f(x,y)* la funzione obiettivo e con *g(x,y)=c* il vincolo imposto, si procede seguendo il metodo suggerito dal matematico Lagrange:

max/min *f(x,y)*

con vincolo *g(x,y)=c*

A questo punto si costruisce la funzione Lagrangiana:

[9] Per definizione di "forte" si veda: "https://sites.google.com/site/aconsonnididattica/word-of-the-week/%C2%ABforte%C2%BBe%C2%ABdebole%C2%BB"

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c) \tag{2.10}$$

Dove λ rappresenta il moltiplicatore di Lagrange. Per risolvere tale equazione è necessario impostare un sistema costituito dalle tre derivate parziali e ponendole uguali a 0.

In alternativa è possibile seguire una diversa metodologia di risoluzione suggerita dallo stesso Markowitz. È infatti possibile impostare un analogo problema sviluppando due analoghe alternative:

- Impostare un sistema che massimizzi il valore del rendimento per un dato livello di varianza;
- Impostare un sistema che minimizzi la varianza per un dato rendimento

In entrambi i casi verrà poi imposta una ulteriore condizione: il totale impiego delle risorse disponibili (senza ricorrere ad indebitamento). Quanto detto è sintetizzabile con l'espressione $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Inoltre, si considera un contesto in cui non possono essere effettuate vendite allo scoperto, ossia vendere azioni di cui non se ne vanta la proprietà sperando di acquistarle ad un prezzo inferiore al valore di cessione pattuito al momento della consegna all'acquirente.

Quanto detto è sintetizzabile impostando i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \min\limits_{x_i} \sigma^2{}_p = \min\limits_{X_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ E^*(R_{ptf}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(R_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \max\limits_{x_i} E^*(R_p) = \max\limits_{X_i} \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(R_i) \\ \sigma^{2*}{}_{ptf} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Quanto detto ha una notevole applicazione in ambito geometrico: tutti i possibili portafogli ottenibili mediante una razionale scelta del rendimento e della varianza generano un’area. Tale sezione è delimitata da un insieme di combinazioni che costituiscono la *frontiera efficiente*. Tutti i punti appartenenti a tale frontiera rappresentano i portafogli dominanti.

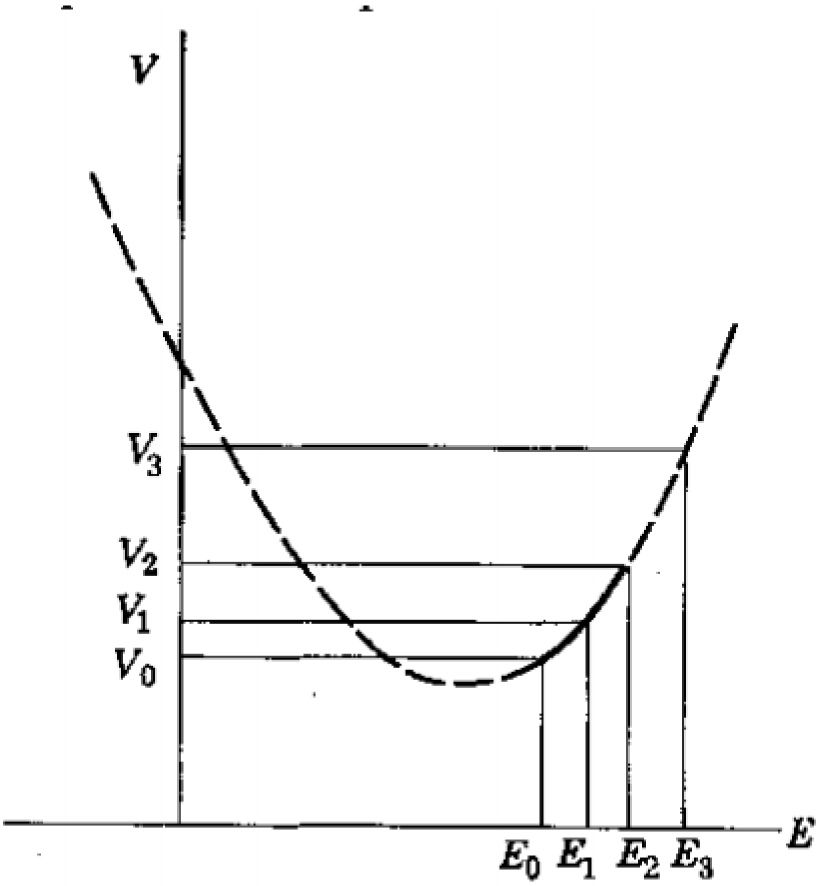


Figura 2.1: Monograph 16 (Portfolio Selection) pag.152

Definita come *iso-mean line* l’insieme di tutti i punti ottenuti facendo variare i pesi dei singoli titoli e mantenuto costante il rendimento ed *iso-variance curve* l’insieme di punti ottenuti facendo variare i pesi dei singoli titoli e mantenuta costante la varianza, è possibile individuare una *critical line* nei loro punti di tangenza. Muovendosi lungo la *critical line* è possibile individuare il limite inferiore dei portafogli selezionabili dall’investitore.

A questo punto è necessario comprendere come costruire una frontiera efficiente e selezionare la combinazione di portafoglio che ottimizza le scelte dell’investitore. Per semplificarne l’esposizione sarà presentato prima un caso di portafoglio costituito da soli 2 titoli per poi estendere il ragionamento ad un generico caso valido per portafogli costituiti da *n* titoli.

2.4 Costruzione della Frontiera Efficiete nel caso di 2 titoli

Si supponga di avere a disposizione un portafoglio azionario costituito da 2 soli titoli e di investire in esso tutte le risorse disponibili ($x_B = 1 - x_A$). Conoscere il rendimento dei due titoli permette calcolare il rendimento del portafoglio dato impostando una equazione che contiene una sola incognita:

$$R_{ptf} = x_A R_A + (1 - x_A) R_B \tag{2.12}$$

Poiché si è imposto che il totale dei pesi relativi ai titoli sia pari ad uno e la formula appena presentata rappresenta una funzione convessa, si può affermare che il valore ottenuto relativo al rischio di portafoglio è compreso tra il rischio del titolo A ed il rischio del titolo B.

Quanto detto è applicabile anche al valore atteso e alla varianza del portafoglio:

$$E(R_{ptf}) = x_\mathrm{A} E(R_\mathrm{A}) + (1 - x_\mathrm{A}) E(R_\mathrm{B}) \tag{2.13}$$

$$\sigma^2{}_{ptf} = x_\mathrm{A}{}^2 \sigma_\mathrm{A}{}^2 + (1 - x_\mathrm{A})^2 \sigma_\mathrm{B}{}^2 + 2 x_\mathrm{A} (1 - x_\mathrm{A}) \sigma_{AB} \tag{2.14}$$

Dunque la deviazione deviazione standard risulterà:

$$\sigma_{ptf} = \sqrt{x_\mathrm{A}{}^2 \sigma_\mathrm{A}{}^2 + (1 - x_\mathrm{A})^2 \sigma_\mathrm{B}{}^2 + 2 x_\mathrm{A} (1 - x_\mathrm{A}) \sigma_{\mathrm{A}B}} \tag{2.15}$$

Tuttavia, come esposto nel paragrafo 2.2, la deviazione standard fornisce un’idea della rischiosità di un portafoglio ma non tiene conto della relazione con cui i titoli che lo compongono interagiscono tra di loro. Tale informazione rappresenta la chiave di una operazione di diversificazione. Dunque, anche in questo caso, è opportuno far riferimento al coefficiente di correlazione (formula 2.5).

Riprendendo la formula (2.6) ed isolando la covarianza σ_{AB}, è possibile includere ρ_{ij} all'interno della formula 2.15. Pertanto si otterrà la seguente formula per σ_{ptf}:

$$\sigma_{ptf} = \sqrt{x_A{}^2\sigma_A{}^2 + (1 - x_A)^2\sigma_B{}^2 + 2x_A(1 - x_A)\rho_{AB}\,\sigma_A\sigma_B} \tag{2.16}$$

Riprendendo quanto già descritto nel precedente paragrafo, il coefficiente di correlazione può assumere valori limitatamente appartenenti all'intervallo [-1;1]. Per comprendere a pieno come il coefficiente di correlazione influisca sulla costruzione di una frontiera efficiente è necessario esporre tre distinti casi in cui ρ_{ij} assumerà diversi valori:

- $\boldsymbol{\rho_{ij}}$ **= 1**

In tale contesto i due titoli risultano perfettamente correlati (positivamente) e non è possibile diversificare ulteriormente il proprio portafoglio azionario. Sostituendo il valore dato all'interno della formula (2.16) si otterrà la seguente espressione:

$$\sigma_{ptf} = \sqrt{x_A{}^2\sigma_A{}^2 + (1 - x_A)^2\sigma_B{}^2 + 2x_A(1 - x_A)\,\sigma_A\sigma_B} \tag{2.17}$$

Come è facilmente intuibile, essendo venuto meno ρ_{ij}, tale espressione rappresenta una semplice radice quadrata del quadrato di un binomio. Pertanto è semplificabile come segue:

$$\sigma_{ptf} = \sqrt{(x_A\sigma_A + (1 - x_A)\sigma_B)^2} = x_A\sigma_A + (1 - x_A)\sigma_B \tag{2.18}$$

In termini geometrici, per ricavare una rappresentazione di quanto detto è necessario trovare la relazione che intercorre tra deviazione standard e rendimento atteso. Per far ciò si riprende la formula (2.13) e si isola la variabile comune x_{A}:

$$E(R_{ptf}) = x_{\mathrm{A}}E(R_{\mathrm{A}}) + E(R_{\mathrm{B}}) - x_{\mathrm{A}}E(R_{\mathrm{B}}) = x_{\mathrm{A}}E(R_{\mathrm{A}}) + (1 - x_{\mathrm{A}})E(R_{\mathrm{B}}) \tag{2.19}$$

Dunque:

$$x_{\mathrm{A}}\big(E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})\big) = E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})$$
$$x_{\mathrm{A}} = \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})} \tag{2.20}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella formula della deviazione standard (2.18), si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{ptf} &= \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}} - \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}\sigma_{\mathrm{B}} = \\ &= \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}\sigma_{\mathrm{A}} + \left(1 - \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}\right)\sigma_{\mathrm{B}} = \\ &= \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}(\sigma_{\mathrm{A}} - \sigma_{\mathrm{B}}) + \sigma_{\mathrm{B}}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Come si può notare dalla formula (2.21), un aumento del rendimento atteso del portafoglio causa un aumento della deviazione standard e, di conseguenza, un aumento del rischio. Inoltre, come evidenziato dalla seconda rappresentazione di tale formula, la deviazione standard è esprimibile come combinazione convessa delle deviazioni standard dei titoli che lo compongono. Infatti il peso della deviazione standard del titolo B è descritta come differenza del peso complessivo con il peso associato al titolo A.

Tracciando il grafico utilizzando le espressioni appena ottenute si ottiene il seguente risultato:

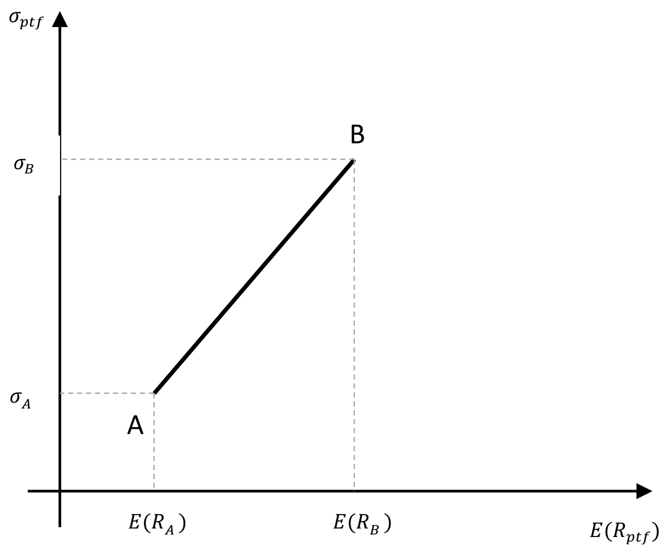


Figura 2.2: Propria realizzazione

Il segmento $\overline{AB}$ così ottenuto rappresenta l'insieme di tutte le combinazioni efficienti di portafoglio. Dunque non è possibile individuare una combinazione che garantisca un miglior rendimento senza aumentare ulteriormente il rischio.

- $\boldsymbol{\rho_{ij}}$ **= -1**

Ciò intende che la variazione positiva del rendimento di un titolo causa una variazione negativa al rendimento del secondo titolo. In questo contesto si ha il massimo effetto di diversificazione.

Procedendo come già illustrato per il primo caso, si sostituisce nella formula (2.16) il valore -1 della correlazione, ottenendo il seguente risultato:

$$\sigma_{ptf} = \sqrt{x_A{}^2\sigma_A{}^2 + (1-x_A)^2\sigma_B{}^2 - 2x_A(1-x_A)\,\sigma_A\,\sigma_B} = \qquad (2.22)$$
$$= \sqrt{(x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B)^2} = |x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B|$$

Poiché le variabili possono assumere sia valore positivo che negativo, è necessario considerare il risultato in valore assoluto.

A questo punto possono essere ottenuti due distinti risultati:

- Se $x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B > 0$, quindi se:

$$x_{\mathrm{A}} > \frac{\sigma_{\mathrm{B}}}{\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}}$$

Allora la formula (2.22) risulterà come segue:

$$\sigma_{ptf} = x_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{A}} - (1 - x_{\mathrm{A}})\sigma_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}}(\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}) - \sigma_{\mathrm{B}} \tag{2.23}$$

- Se $x_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{A}} - (1 - x_{\mathrm{A}})\sigma_{\mathrm{B}} < 0$, quindi se:

$$x_{\mathrm{A}} < \frac{\sigma_{\mathrm{B}}}{\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}}$$

Allora la formula (2.22) risulterà come segue:

$$\sigma_{ptf} = \sigma_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{A}} = \sigma_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}(\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}) \tag{2.24}$$

Per rappresentare geometricamente quanto detto si riscrivono le formule (2.23) e (2.24) includendo al loro interno il valore atteso del rendimento ricorrendo alla formula (2.20):

$$\sigma_{ptf} = \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}(\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}) - \sigma_{\mathrm{B}} \tag{2.25}$$

$$\sigma_{ptf} = \sigma_{\mathrm{B}} - \frac{E(R_{ptf}) - E(R_{\mathrm{B}})}{E(R_{\mathrm{A}}) - E(R_{\mathrm{B}})}(\sigma_{\mathrm{A}} + \sigma_{\mathrm{B}}) \tag{2.26}$$

A questo punto è possibile tracciarne una rappresentazione:

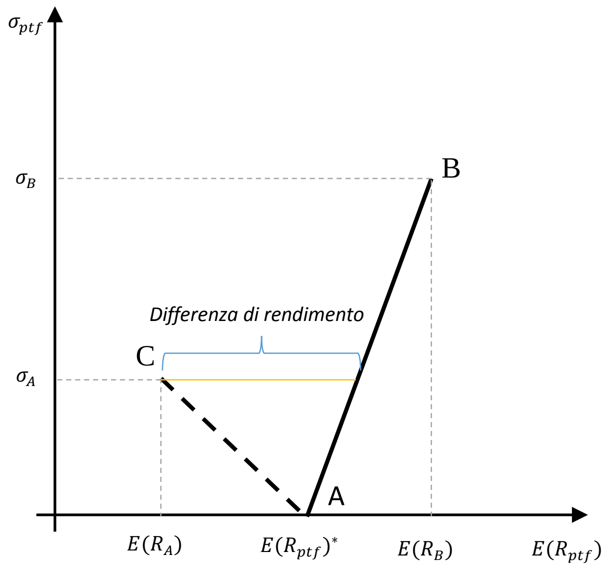


Figura 2.3: Propria realizzazione

Il segmento $\overline{AB}$ rappresenta l'insieme dei portafogli efficienti che possono essere ottenuti facendo variare i pesi dei due titoli. Il segmento $\overline{AC}$ rappresenta invece l'insieme dei portafogli non efficienti poiché, come si nota dal grafico, a parità di rischio è possibile ottenere rendimenti maggiori.

Si noti come la condizione di perfetta correlazione negativa si riveli un caso difficilmente riscontrabile nella realtà. Infatti il portafoglio azionario costituito in corrispondenza del punto A implicherebbe la possibilità di investire in una combinazione che garantisca un rendimento rilevante a discapito di un rischio nullo.

Al fine di individuare quale sia quella combinazione che permette di ottenere un portafoglio a rischio nullo, si pone la deviazione standard pari a 0. Partendo dalla formula (2.22), si avrà:

$$|x_A\sigma_A - (1 - x_A)\sigma_B| = 0$$
$$x_A\sigma_A - (1 - x_A)\sigma_B = 0$$
$$x_A\sigma_A - \sigma_B + x_A\sigma_B = 0$$
$$x_A(\sigma_A + \sigma_B) = \sigma_B$$

Dunque la proporzione sarà calcolabile come:

$$x_A = \frac{\sigma_B}{(\sigma_A+\sigma_B)} \qquad \text{e} \qquad (1 - x_A) = \frac{\sigma_A}{(\sigma_A+\sigma_B)}$$

- **-1 < ρ_{ij} < 1**

La particolarità di questo contesto è che, contrariamente ai casi di perfetta correlazione (positiva o negativa), la relazione varianza-valore atteso non genera una funzione lineare, bensì curvilinea. Questo fenomeno è dovuto al fatto che man mano che il valore del coefficiente di correlazione diminuisce, la possibilità di diversificazione aumenta:

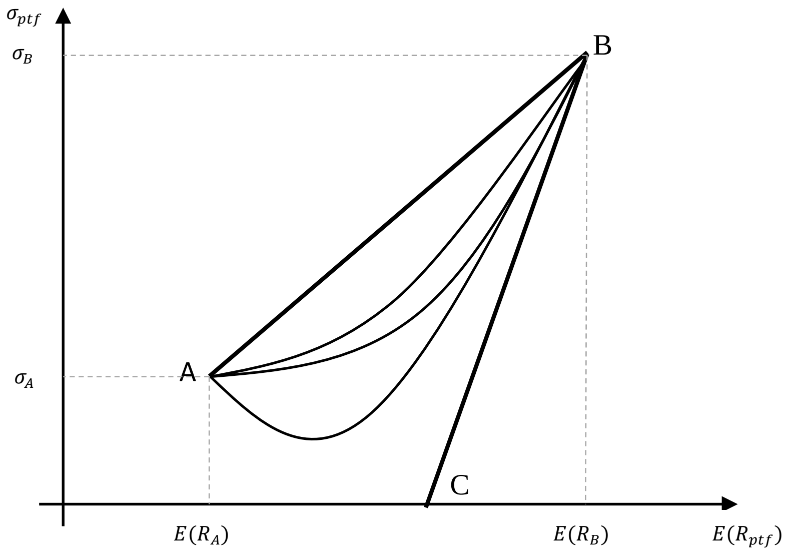


Figura 2.4: Propria realizzazione

Mano a mano che il coefficiente di correlazione scende, la curvilinea si sposta dal segmento $\overline{AB}$al segmento $\overline{BC}$. L'area delimitata dai punti A, B e C rappresenta l'insieme di tutte le combinazioni che possono essere ottenute utilizzando i titoli costituenti il portafoglio azionario.

2.5 Costruzione della Frontiera Efficiete nel caso di n>2 titoli

Solitamente un portafoglio azionario è costituito da un elevato numero di titoli. Ferme restando le ipotesi di individuazione di combinazioni efficienti esposte nel paragrafo 2.3, è necessario tener conto di un ulteriore fattore: la relazione che intercorre tra i titoli. Un efficace metodo di risoluzione di questo problema è fornito dalla matrice delle *varianze-covarianze*, ossia una matrice che possiede le seguenti caratteristiche:

- È una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne (Matrice Quadrata)
- La sua diagonale principale è costituita dalla varianza dei titoli che compongono il portafoglio.

La matrice varianze-covarianze (S) è calcolabile con la seguente formula:

$$S = \frac{A^T * A}{M} \tag{2.27}$$

Dove:

A rappresenta la matrice degli scarti dei rendimenti dalla media[10];

A^T rappresenta la matrice trasposta di A[11];

M rappresenta il numero dei rendimenti considerati.

Come analizzato nel precedente paragrafo, è possibile rappresentare graficamente la realizzazione di una frontiera efficiente mettendo in relazione deviazione standard e valore atteso. Contrariamente a quanto osservato nel caso di un portafoglio costituito da soli 2 titoli, nel caso di un numero di titoli maggiore non è possibile ottenere un'area limitata che racchiude le possibili combinazioni di portafoglio. Supponendo di avere

[10] La matrice A è ottenibile sottraendo ad ogni elemento della matrice dei rendimenti il relativo rendimento medio.

[11] La matrice A^T è ricavabile invertendo le righe con le colonne della matrice A

un portafoglio azionario costituito da tre titoli (A,B,C) e noto il loro rendimento atteso e la loro deviazione standard, è possibile ottenere la seguente rappresentazione:

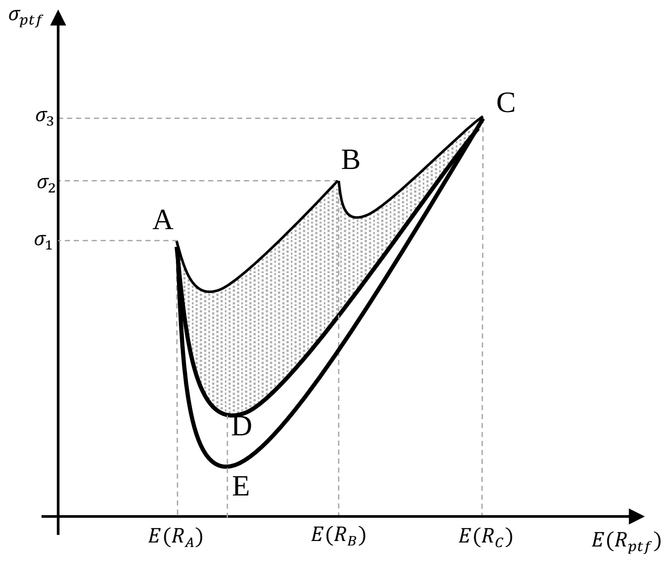


Figura 2.5: Propria realizzazione

Apparentemente la curva definita dal tratto ADC sembrerebbe rappresentare l'insieme dei portafogli efficienti, tuttavia non è così poiché non si tiene conto delle combinazioni offerte dal punto B. Pertanto la costruzione più consona è quella dettata dal tratto AEC. Tutti i punti contenuti in questa curva delineano l'insieme dei portafogli possibili, mentre al di sotto di questo settore sono collocate tutte le combinazioni impossibili dei titoli. Ricordando le caratteristiche del principio di dominanza precedentemente esposto, si può affermare che la frontiera efficiente è data dalla porzione di curva definita dai punti E e C. Il punto E rappresenta anche la combinazione dei titoli che compongono il portafoglio a varianza minima (di cui si discuterà nel corso del capitolo 3).

Al fine di ottenere un portafoglio costituito da tre titoli, è possibile distinguere l'operazione in due distinte fasi. La prima di esse prevede l'ottenimento di un portafoglio azionario costituito da due soli titoli ripercorrendo i passaggi illustrati nel precedente paragrafo. La seconda fase è costituita da una combinazione convessa dal portafoglio appena ottenuto ed il terzo titolo preso in esame.

Ipotizzando di essere in un contesto in cui la correlazione sia $-1 < \rho_{A,B} < 1$. Si indichi con A e B due titoli aventi deviazione standard σ_1 e σ_2 di valore atteso del rendimento pari ad $E(R_1)$, $E(R_2)$. Ricordando che la somma dei pesi dei due titoli è pari ad 1 è possibile ottenere la frontiera efficiente rappresentata dal seguente grafico:

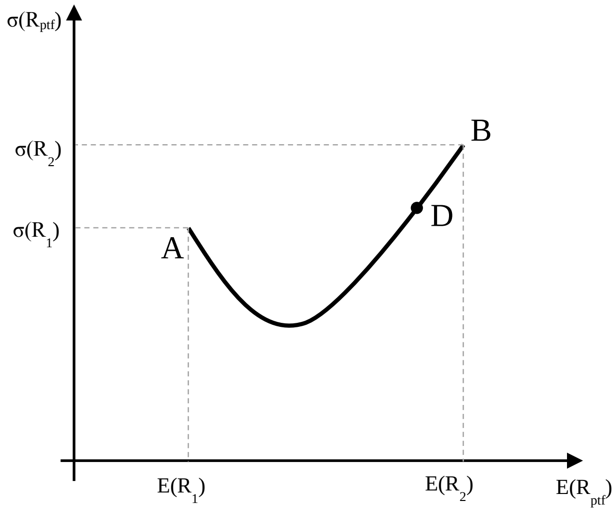


Figura 2.6: Propria realizzazione

Il punto D rappresentato in figura rappresenta uno dei possibili portafogli di frontiera. Esso avrà deviazione standard pari a σ_{ptf} e rendimento atteso pari a $E(R_{ptf})$.

Ora è possibile includere un terzo titolo C avente deviazione standard pari a σ_c e rendimento atteso pari a $E(R_c)$. L'introduzione di questo titolo nel portafoglio azionario deve in ogni caso garantire che il totale dei pesi dei titoli risulti ugualmente pari ad 1:

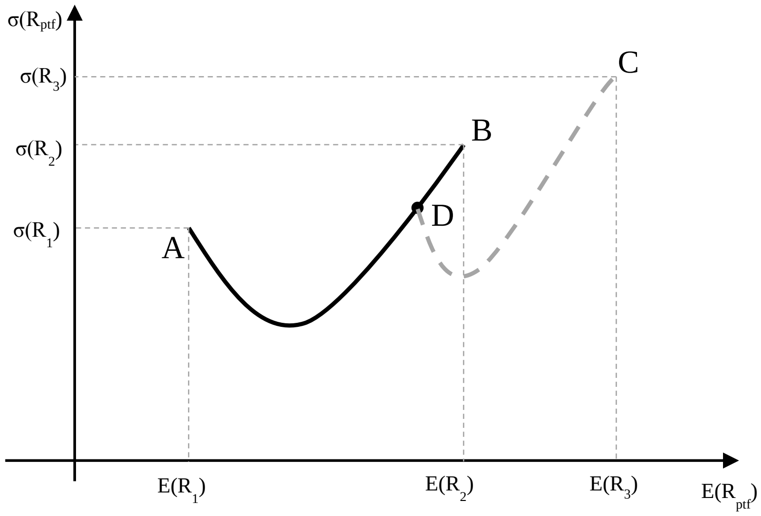


Figura 2.7: Propria realizzazione

Lungo la curva ottenuta mediante i punti D e C è possibile individuare tutte le possibili combinazioni di portafoglio ottenibili includendo il titolo C all'interno del portafoglio precedentemente ottenuto mediante una combinazione convessa dei titoli A e B. Indicando con *z* un generico portafoglio ottenibile dalla frontiera $\widehat{DC}$, è possibile ottenerne la deviazione standard ricorrendo alla formula (2.17):

$$\sigma_z = \sqrt{x_1{}^2\sigma_{ptf}{}^2 + (1 - x_1)^2\sigma_c{}^2 + 2x_1(1 - x_1)\,\sigma_{ptf,c}}$$

$\sigma_{ptf,c}$ rappresenta l'unica incognita dell'equazione presentata. Tuttavia è possibile ricavarla analizzando la relazione che intercorre tra i rendimenti del portafoglio costituito da due titoli e il titolo C.

Il punto D rappresenta solo uno dei possibili portafogli ottenibili mediante una combinazione tra i titoli A e B. Pertanto, se si vuole individuare ogni possibile portafoglio ottenibile dalla combinazione dei tre titoli, è necessario prendere in considerazione ogni singolo punto appartenente alla frontiera costituita dai titoli A e B:

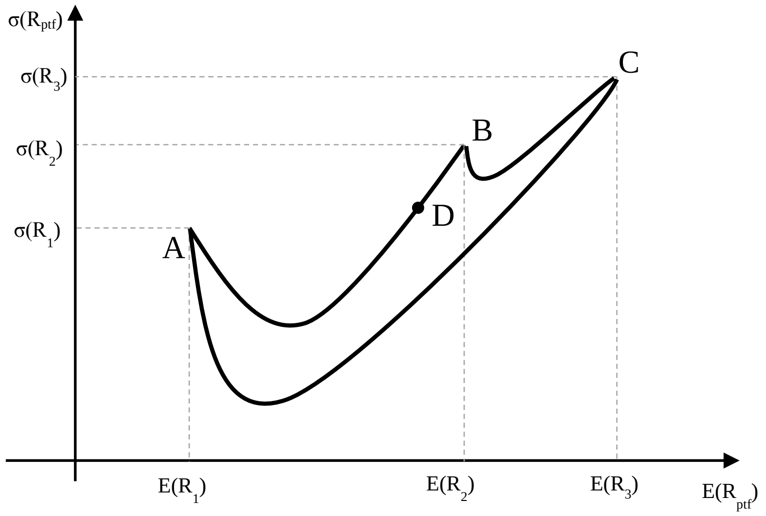


Figura 2.8: Propria realizzazione

L'area ottenuta in figura 2.8 rappresenta tutte le possibili combinazioni di portafoglio ottenibili utilizzando i tre titoli A, B e C.

Come si evince dal grafico, la funzione ricavabile dalla combinazione dei tre titoli è crescente e convessa. Ciò implica che ad un aumento del valore atteso del rendimento, è corrisposto un incremento più che proporzionale della deviazione standard e, quindi, del rischio.

2.6 Selezione del portafoglio ottimale

Chiarita la procedura con la quale si realizza una frontiera efficiente è necessario effettuare un'ultima precisazione. Le metodologie analizzate nei precedenti paragrafi permettono all'investitore di avere un quadro di tutte le possibili combinazioni che massimizzano il proprio investimento. Tuttavia esse non permettono di selezionare quella combinazione che tiene conto delle preferenze dell'individuo e che quindi permette di ottenere il rapporto rischio-rendimento più consono per le sue caratteristiche. Per tenere conto di ciò è dunque necessario ricorrere ad una variabile soggettiva che catturi tali elementi: la curva di indifferenza.

La curva di indifferenza [12]è la rappresentazione cartesiana delle scelte di investimento che forniscono all'individuo la stessa utilità e che quindi lo rendono indifferente alle alternative ottenute. Utilizzando una mappatura di curve di indifferenza, ossia un insieme di curve che sintetizzano per ogni livello di utilità un insieme di scelte indifferenti, è possibile ricavare una *funzione di utilità attesa* utilizzando il rendimento atteso come variabile. Nello specifico, il lavoro proposto da H.Markowitz ricorre ad una funzione di utilità attesa *quadratica*, ossia una funzione che sintetizza le preferenze dell'individuo utilizzando due variabili (rischio e rendimento atteso di portafoglio) e che tiene conto della sua avversione al rischio. Quest'ultimo rendimento dà alle curve di indifferenza una natura concava poiché, per compensare un incremento del rischio, l'individuo richiede un certo incremento del rendimento.

La funzione dell'utilità attesa è rappresentabile come segue:

$$E[U(x)] = E\left(R_{ptf}\right) - \frac{1}{2}\lambda\,\sigma^2{}_{ptf} \tag{2.28}$$

Dove λ sintetizza il grado di avversione al rischio dell'indiviuo.

Graficamente è possibile rappresentare la funzione di utiltà attesa riportando la mappatura delle curve di indifferenza e la frontiera efficiente (FE_{ptf}) ottenuta come descritto nei precedenti paragrafi:

[12] La definizione è tratta dal sito: "http://www.okpedia.it/curva_di_indifferenza"

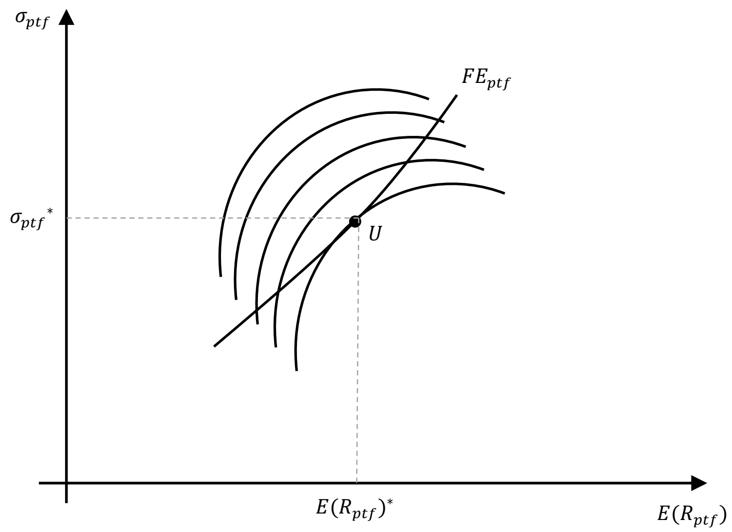


Figura 2.9: Propria realizzazione

Il punto U, ottenuto come punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di indifferenza, rappresenta la scelta ottimale dell'investitore. Tale combinazione tiene infatti conto sia di fattori oggettivi (ottenimento delle combinazioni efficienti mediante il principio di dominanza) sia di fattori soggettivi (ricorso alle curve di indifferenza per selezionare il portafoglio più consono alle caratteristiche dell'individuo).

Per applicare il procedimento appena presentato è necessario attribuire un valore numerico al grado di avversione al rischio λ. È quindi necessario che l'investitore sia in grado di tradurre in termini analitici le sue preferenze. Anche se ciò non è sempre di facile realizzazione, il metodo fornito dalla funzione di utilità attesa è sicuramente il più utilizzato nella finanza moderna.

2.7 Limiti della Teoria di Portafoglio

La Teoria di Portafoglio proposta da H.Markowitz rappresenta il primo step di approccio allo studio della finanza. Tuttavia sono presenti diversi limiti che rendono la teoria proposta di difficile applicazione in un contesto reale.

Al fine di individuare le combinazioni efficienti dei titoli, si tiene conto solo di due variabili (rendimento atteso e deviazione standard) precludendo altri possibili riferimenti. Inoltre l'utilizzo della deviazione standard come strumento di stima del rischio limita la reale previsione della perdita analizzando solo le variazioni dei rendimenti e non fornisce un quadro della massima perdita possibile.

Durante la fase di selezione di un portafoglio, si prendono in considerazione solo titoli rischiosi rendendo poco effettiva l'operazione di diversificazione, poiché vengono trascurate tutte le altre attività di investimento. Inoltre una variazione nella stima di uno dei due parametri (rendimento atteso e deviazione standard) può causare un notevole alteramento sulla distribuzione dei titoli che compongono il portafoglio azionario.

Partendo da questi fattori, si sono sviluppate diverse teorie che, seppur mantenendo le ipotesi di partenza, cercano di porre rimedio ai limiti evidenziati nel lavoro di H.Markowitz. Alcune di esse saranno proposte nel paragrafo successivo.

2.8 Superamento dei limiti della Teoria di Portafoglio: il CAPM

Come sottolineato nel paragrafo 2.7, la Teoria di Portafoglio proposta da H.Markowitz, sebbene risulti di notevole rilevanza e di grande impatto durante le analisi di mercato, presenta dei limiti rilevanti. Al fine di superare tali limiti, sono stati condotti un considerevole numero di ricerche e di studi. Tra questi, spiccano per importanza ed efficacia le teorie presentate da tre economisti: W.Sharpe, J.Lintner e J.Mossin.

W.Sharpe collaborò con gli studi di Markowitz condividendo con lui e con M.Miller il premio Nobel del 1990. Egli formulò due ipotesi[13] supplementari a quelle già proposte dal mentore della sua teoria. Affermò infatti che tutti gli investitori hanno le medesime aspettative sui rendimenti attesi e sui rischi di un titolo e che esista sempre un titolo a rendimento certo e privo di rischio negoziabile senza essere soggetti a limiti.

[13] Si veda: W.Sharpe, "A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", The Journal of Finance

J.Mossin perfezionò lo studio di W.Sharpe supponendo un contesto in cui il contesto uniperiodale proposto da Markowitz fosse applicabile a tutti gli investitori e che il mercato fosse perfetto e in grado di recepire tutte le informazioni relative ai suoi strumenti finanziari.

Il primo passo da compiere è quello di includere nel portafoglio azionario un titolo privo di rischio. Per semplicità di calcolo si utilizza un BOT (Buono ordinario del Tesoro) poiché è un titolo privo di cedole e ha cadenza annuale. Avendo una durata breve ed essendo garantito dallo Stato (perciò privo di rischio), è ragionevole aspettarsi un rendimento molto basso.

Si suppone di avere a disposizione un portafoglio costituito da 2 soli titoli di cui uno privo di rischi (BOT) ed uno rischioso.

Richiamando le formule (2.13) e (2.15), è possibile calcolare il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio considerato ricordando che il BOT presenta deviazione standard nulla essendo privo di rischi (di conseguenza anche la covarianza sarà pari a 0):

$$E\left(R_{ptf}\right) = x_{\mathrm{A}}E(R_{\mathrm{A}}) + (1 - x_{\mathrm{A}})E(R_{\mathrm{f}}) \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ptf} &= \sqrt{x_{\mathrm{A}}{}^2\sigma_{\mathrm{A}}{}^2 + (1 - x_{\mathrm{A}})^2\sigma_{\mathrm{f}}^2 + 2x_{\mathrm{A}}(1 - x_{\mathrm{A}})\sigma_{\mathrm{A}f}} \\ &= \sqrt{x_{\mathrm{A}}{}^2\sigma_{\mathrm{A}}{}^2} = x_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{A}} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Seguendo il medesimo percorso presentato nel paragrafo 2.3, si evidenzia la relazione che intercorre tra rendimento atteso e deviazione standard. Includendo la formula (2.20) all'interno della (2.30) si ottiene il seguente risultato:

$$\sigma_{ptf} = \frac{\sigma_{\mathrm{A}}}{E(R_{\mathrm{A}}) - R_f}E(R_{ptf}) - \frac{\sigma_{\mathrm{A}}}{E(R_{\mathrm{A}}) - R_f}R_f \tag{2.31}$$

In termini geometrici, tale funzione è rappresentabile mediante una semi-retta:

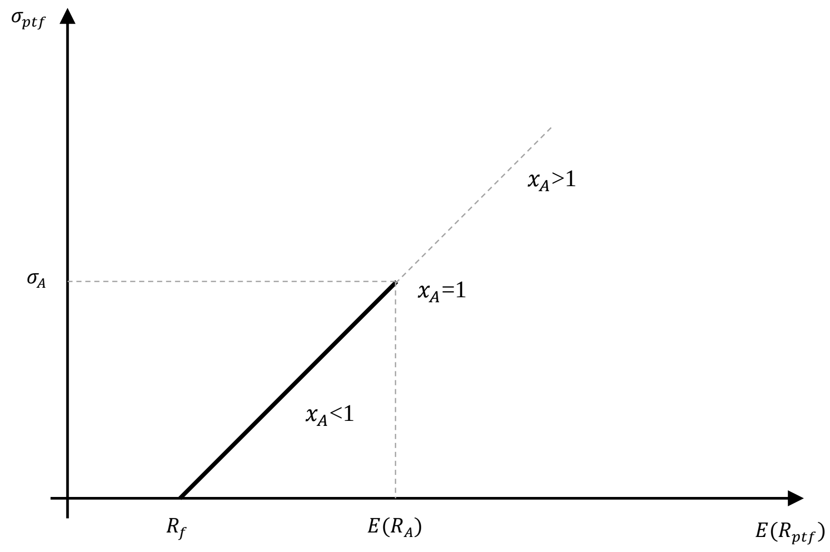


Figura 2.10: Propria realizzazione

Come si nota, in tale rappresentazione x_{A} può assumere anche valori maggiori di 1 poiché si è ipotizzato in contesto in cui è possibile finanziarsi illimitatamente al tasso R_{f}. La relazione che intercorre tra deviazione standard e il rendimento atteso rappresenta il coefficiente angolare della retta rappresentata. Pertanto assumerà il valore $\frac{\sigma_{\mathrm{A}}}{E(R_{\mathrm{A}})-R_f}$.

Di grande rilievo è il reciproco dell'espressione appena ottenuta:

$$\theta = \frac{E(R_{\mathrm{A}}) - R_f}{\sigma_{\mathrm{A}}} \tag{2.32}$$

θ rappresenta l'*Indice di Sharpe*[14], ossia l'extra-rendimento ottenibile da un titolo rischioso (rispetto a rendimento certo) rapportato al suo rischio.

[14] La definizione è tratta dal sito: "http://www.borsaitaliana.it/bitApp/glossary.bit?target=GlossaryDetail&word=Indice%20di%20Sharpe"

Riprendendo la formula (2.31) è possibile esprimere il rendimento atteso del portafoglio in funzione della deviazione standard:

$$E(R_{ptf}) = R_f + \frac{E(R_{\mathrm{A}}) - R_f}{\sigma_{\mathrm{A}}}\sigma_{ptf} \tag{2.33}$$

Da ciò è possibile affermare che il rendimento atteso è definibile come combinazione tra il rendimento del titolo privo di rischi e di un portafoglio costituito da attività di rischio.

A questo punto è necessario individuare quali combinazioni rendono efficiente il portafoglio preso in analisi. Tuttavia, non è possibile procedere come illustrato da H.Markowitz poiché in tale contesto non vengono considerati titoli privi di rischio.

Pertanto è necessario individuare la relazione che intercorre tra il titolo privo di rischi e la frontiera efficiente ottenuta dalla combinazione dei titoli rischiosi:

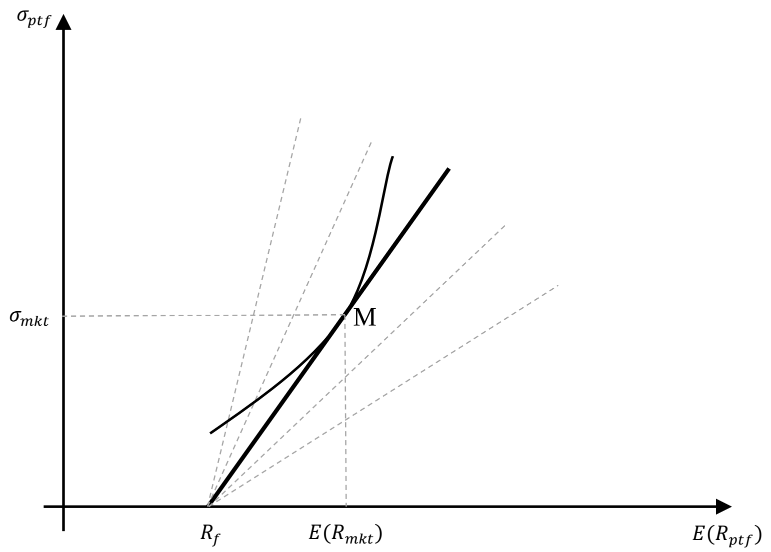


Figura 2.11: Propria realizzazione

Il punto M rappresenta il portafoglio di mercato. Esso è definibile come il miglior portafoglio possibile costituito da titoli rischiosi relazionati al titolo privo di rischi.

La curva tracciata rappresenta la frontiera efficiente ottenuta dalla combinazione dei titoli rischiosi secondo il modello proposto da Markowitz.

La semiretta tracciata rappresenta la *Capital Market Line* ossia tutte le possibili combinazioni efficienti tra l'attività priva di rischi e il portafoglio di mercato. In termini analitici è calcolabile includendo nella formula (2.33) il rendimento atteso di mercato $E(R_{mkt})$ e la sua deviazione standard σ_{mkt}:

$$E(R_{ptf}) = R_f + \frac{E(R_{mkt}) - R_f}{\sigma_m}\sigma_p \tag{2.34}$$

Infine, per individuare il portafoglio ottimale per l'investitore è necessario calcolare il punto di tangenza tra la CML e la più alta curva di indifferenza.

Capitolo 3 - Applicazione della Teoria di Portafoglio

Al fine di rendere le teorie esposte più reali e concrete, si associano i concetti esposti utilizzando dati riferibili alla contemporaneità. Ricorrendo all'applicativo Excel è possibile schematizzare un portafoglio azionario, inoltre, mediante le formule preimpostate presenti nell'applicativo, è possibile effettuare agevolmente calcoli complessi. I dati mostrati sono ottenibili mediante l'archivio dei dati storici del sito *yahoo.finance*, un'area virtuale che racchiude tutte le informazioni storiche e contemporanee in merito ai rendimenti degli strumenti finanziari.

3.1 Calcolo dei rendimenti dei titoli azionari

Come illustrato nel corso del paragrafo (2.1), il calcolo del rendimento dei titoli rappresenta il punto di partenza per l'ottenimento di un portafoglio efficiente. Per facilitare l'esposizione, si prende in analisi il rendimento ex-post dei titoli scelti così da poter considerare i dati ricavati coerenti per il calcolo del rendimento atteso.

Prendendo in esame un orizzonte temporale di 4 anni con cadenza mensile così da includere un sufficiente numero di dati per rendere più rilevante il valore risultante del rendimento atteso.

Al fine di rendere coerenti tra loro i rendimenti dei vari titoli, è necessario che abbiano in comune un medesimo indice azionario. Nel presente lavoro si scelgono titoli riferibili all'indice azionario FTSE MIB poiché rappresenta l'indice di benchmark[15] dei mercati italiani.

Supponendo di avere a disposizione un portafoglio costituito da 15 titoli azionari, impostando l'intervallo temporale appena descritto e prendendo in considerazione quei titoli valutati in base all'indice FSTE MIB, si ottiene il seguente prospetto dei prezzi storici:

[15] Per definizione di benchmark si veda: "http://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/benchmark.htm"

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	***Data***	**ENEL.MI**	**ENI.MI**	**FCA.MI**	**FNC.MI**	**ISP.MI**	**LUX.MI**	**MED.MI**	**MS.MI**	**PC.MI**	**TIT.MI**	**UCG.MI**	**BMPS.MI**	**EGPW.MI**	**G.MI**	**MB.MI**
2	*03-gen-11*	3,17	12,66	6,99	9,43	1,91	20,42	3,04	4,01	4,84	0,89	11,42	19,95	1,48	14,02	6,72
3	*01-feb-11*	3,32	12,93	6,63	8,67	1,92	20,76	3,06	3,95	5,06	0,97	11,76	20,73	1,57	14,42	6,98
4	*01-mar-11*	3,42	12,68	6,3	8,49	1,64	21,25	3,1	3,8	5,37	0,93	11,01	18,9	1,8	13,45	6,57
5	*01-apr-11*	3,7	13,2	7,21	8,72	1,77	20,56	3,24	3,81	6,09	0,92	10,97	19,64	1,84	14,24	7
6	*02-mag-11*	3,67	12,56	7,39	8,65	1,59	20,88	3,04	3,36	6,15	0,89	9,99	18,86	1,81	13,78	7,03
7	*01-giu-11*	3,61	12,29	7,57	8,35	1,62	20,81	2,65	3	6,62	0,87	9,24	13,29	1,77	13,18	6,36
8	*01-lug-11*	3,22	11,44	6,91	5,36	1,42	20,79	2,41	2,77	6,43	0,8	7,91	13,31	1,62	12,02	5,85
9	*01-ago-11*	2,72	10,55	4,33	5,18	1	19,54	2,18	2,49	5,18	0,77	5,96	10,91	1,5	11,4	5,85
43	*02-giu-14*	4,11	18,24	7,21	6,95	2,21	41,75	5,24	3,54	11,44	0,93	6	5,76	2,03	15,47	6,93
44	*01-lug-14*	4,12	17,4	7,25	6,91	2,18	40,84	5,31	2,97	10,91	0,87	5,75	5,49	2,03	15,11	6,31
45	*01-ago-14*	3,89	17,33	7,44	7,12	2,22	40,15	5,27	3,12	11,35	0,88	5,78	4,63	2,06	15,04	6,33
46	*01-set-14*	4,06	17,74	7,64	7,71	2,36	40,72	5,23	3,03	10,7	0,91	6,14	4,25	1,99	16,1	6,49
47	*01-ott-14*	3,94	15,99	8,9	7,19	2,29	40,13	5	2,65	10,43	0,9	5,65	2,47	1,92	15,79	6,69
48	*03-nov-14*	3,75	15,11	10,03	7,8	2,43	42,48	5,34	3,24	11,14	0,91	5,83	2,64	1,9	16,81	7
49	*01-dic-14*	3,57	13,64	9,6	7,74	2,37	44,94	5,07	3,42	10,94	0,88	5,23	1,91	1,7	16,43	6,59
50	*01-gen-15*	3,57	13,64	9,6	7,74	2,37	44,94	5,07	3,42	10,94	0,88	5,23	1,91	1,7	16,43	6,59

Figura 3.1: Dati estratti da "*yahoo.finance*", prezzi storici dei 15 titoli azionari

Si noti come i valori riportati appartengano alla valutazione degli "*adjusted price*". Tale prezzo include al suo interno l'informazione relativa ad eventuali distribuzioni degli utili, pertanto può essere considerato più adatto per una corretta stima dei rendimenti. Per tale motivo, riprendendo la formula (2.1), si attribuisce al dividendo un valore pari a 0.

Utilizzando tali dati è possibile procedere con il calcolo dei rendimenti mensili dei titoli considerati, ossia i rendimenti percentuali che l'investitore otterrebbe qualora acquistasse il titolo nel periodo *t-1* e lo rivendesse nel periodo successivo *t*. Ricorrendo alla formula (2.3), il rendimento mensile può essere calcolato come rapporto tra il prezzo in *t* e il prezzo in *t-1*:

B3 fx =LN(Prezzi!B3/Prezzi!B2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	***Data***	**ENEL.MI**	**ENI.MI**	**FCA.MI**	**FNC.MI**	**ISP.MI**	**LUX.MI**	**MED.MI**	**MS.MI**	**PC.MI**	**TIT.MI**	**UCG.MI**	**BMPS.MI**	**EGPW.MI**	**G.MI**	**MB.MI**
3	*01-feb-11*	4,62%	2,11%	-5,29%	-8,40%	0,52%	1,65%	0,66%	-1,51%	4,45%	8,61%	2,93%	3,84%	5,90%	2,81%	3,80%
4	*01-mar-11*	2,97%	-1,95%	-5,11%	-2,10%	-15,76%	2,33%	1,30%	-3,87%	5,95%	-4,21%	-6,59%	-9,24%	13,67%	-6,96%	-6,05%
5	*01-apr-11*	7,87%	4,02%	13,49%	2,67%	7,63%	-3,30%	4,42%	0,26%	12,58%	-1,08%	-0,36%	3,84%	2,20%	5,71%	6,34%
6	*02-mag-11*	-0,81%	-4,97%	2,47%	-0,81%	-10,72%	1,54%	-6,37%	-12,57%	0,98%	-3,32%	-9,36%	-4,05%	-1,64%	-3,28%	0,43%
7	*01-giu-11*	-1,65%	-2,17%	2,41%	-3,53%	1,87%	-0,34%	-13,73%	-11,33%	7,36%	-2,27%	-7,80%	-35,00%	-2,23%	-4,45%	-10,02%
8	*01-lug-11*	-11,43%	-7,17%	-9,12%	-44,33%	-13,18%	-0,10%	-9,49%	-7,98%	-2,91%	-8,39%	-15,54%	0,15%	-8,86%	-9,21%	-8,36%
9	*01-ago-11*	-16,87%	-8,10%	-46,74%	-3,42%	-35,07%	-6,20%	-10,03%	-10,66%	-21,62%	-3,82%	-28,31%	-19,88%	-7,70%	-5,30%	0,00%
10	*01-set-11*	-2,23%	-1,82%	-5,70%	0,96%	4,88%	-8,10%	4,92%	-12,84%	-8,25%	-3,97%	-15,98%	-2,32%	6,45%	-5,22%	-8,38%
42	*01-mag-14*	2,07%	2,85%	-12,37%	-10,10%	2,10%	3,09%	-0,17%	-9,00%	2,41%	-1,09%	-0,79%	3,54%	1,50%	1,44%	-8,22%
43	*02-giu-14*	5,24%	6,69%	-6,18%	14,37%	-8,66%	0,87%	-11,18%	-1,96%	-2,84%	2,17%	-4,40%	-9,28%	0,49%	-3,68%	-1,01%
44	*01-lug-14*	0,24%	-4,71%	0,55%	-0,58%	-1,37%	-2,20%	1,33%	-17,56%	-4,74%	-6,67%	-4,26%	-4,80%	0,00%	-2,35%	-9,37%
45	*01-ago-14*	-5,74%	-0,40%	2,59%	2,99%	1,82%	-1,70%	-0,76%	4,93%	3,95%	1,14%	0,52%	-17,04%	1,47%	-0,46%	0,32%
46	*01-set-14*	4,28%	2,34%	2,65%	7,96%	6,12%	1,41%	-0,76%	-2,93%	-5,90%	3,35%	6,04%	-8,56%	-3,46%	6,81%	2,50%
47	*01-ott-14*	-3,00%	-10,39%	15,27%	-6,98%	-3,01%	-1,46%	-4,50%	-13,40%	-2,56%	-1,10%	-8,32%	-54,27%	-3,58%	-1,94%	3,04%
48	*03-nov-14*	-4,94%	-5,66%	11,95%	8,14%	5,93%	5,69%	6,58%	20,10%	6,59%	1,10%	3,14%	6,66%	-1,05%	6,26%	4,53%
49	*01-dic-14*	-4,92%	-10,24%	-4,38%	-0,77%	-2,50%	5,63%	-5,19%	5,41%	-1,81%	-3,35%	-10,86%	-32,37%	-11,12%	-2,29%	-6,04%

Figura 3.2: Rendimenti mensili dei 15 titoli azionari

L’utilizzo della formula del rendimento composto continuo è giustificato dall’assunzione che i prezzi si distribuiscano con una variabile log-normale. Inoltre si è ipotizzato un contesto di capitalizzazione continua degli interessi in cui i rendimenti storici siano proiettabili al futuro.

L’ultima ipotesi è di fondamentale importanza poiché permette di utilizzare dei dati storici (rendimenti mensili) per la stima del valore atteso dei rendimenti. In tale contesto, esso è ottenibile come rendimento medio della serie riportata in figura 3.2. Dunque, applicando la formula MEDIA di Excel si ricavano i seguenti risultati:

B51 =MEDIA(B3:B49)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	*Data*	ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
3	*01-feb-11*	4,62%	2,11%	-5,29%	-8,40%	0,52%	1,65%	0,66%	-1,51%	4,45%	8,61%	2,93%	3,84%	5,90%	2,81%	3,80%
4	*01-mar-11*	2,97%	-1,95%	-5,11%	-2,10%	-15,76%	2,33%	1,30%	-3,87%	5,95%	-4,21%	-6,59%	-9,24%	13,67%	-6,96%	-6,05%
5	*01-apr-11*	7,87%	4,02%	13,49%	2,67%	7,63%	-3,30%	4,42%	0,26%	12,58%	-1,08%	-0,36%	3,84%	2,20%	5,71%	6,34%
44	*01-lug-14*	0,24%	-4,71%	0,55%	-0,58%	-1,37%	-2,20%	1,33%	-17,56%	-4,74%	-6,67%	-4,26%	-4,80%	0,00%	-2,35%	-9,37%
45	*01-ago-14*	-5,74%	-0,40%	2,59%	2,99%	1,82%	-1,70%	-0,76%	4,93%	3,95%	1,14%	0,52%	-17,04%	1,47%	-0,46%	0,32%
46	*01-set-14*	4,28%	2,34%	2,65%	7,96%	6,12%	1,41%	-0,76%	-2,93%	-5,90%	3,35%	6,04%	-8,56%	-3,46%	6,81%	2,50%
47	*01-ott-14*	-3,00%	-10,39%	15,27%	-6,98%	-3,01%	-1,46%	-4,50%	-13,40%	-2,56%	-1,10%	-8,32%	-54,27%	-3,58%	-1,94%	3,04%
48	*03-nov-14*	-4,94%	-5,66%	11,95%	8,14%	5,93%	5,69%	6,58%	20,10%	6,59%	1,10%	3,14%	6,66%	-1,05%	6,26%	4,53%
49	*01-dic-14*	-4,92%	-10,24%	-4,38%	-0,77%	-2,50%	5,63%	-5,19%	5,41%	-1,81%	-3,35%	-10,86%	-32,37%	-11,12%	-2,29%	-6,04%
50																
51	E(Ri)=	*0,25%*	*0,16%*	*0,68%*	*-0,42%*	*0,46%*	*1,68%*	*1,09%*	*-0,34%*	*1,74%*	*-0,02%*	*-1,66%*	*-4,99%*	*0,29%*	*0,34%*	*-0,04%*

Figura 3.3: Calcolo del valore atteso del Rendimento dei titoli

3.2 Calcolo della Varianza di Portafoglio

Il passo successivo al calcolo del valore atteso dei rendimenti dei titoli che compongono il portafoglio, è rappresentato dal calcolo della sua varianza.

Riprendendo la dimostrazione effettuata nel paragrafo 2.3 relativa alla varianza del portafoglio azionario, si procede risolvendo la formula 2.8 utilizzando i 15 titoli e le 49 misure ottenute per ognuno di essi:

$$\sigma^2{}_{ptf} = \sum_{i=1}^{49} \sum_{j=1}^{49} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Utilizzando un foglio di calcolo Excel è possibile seguire un percorso alternativo così da facilitarne i calcoli. Ciò è possibile ricorrendo alla notazione matriciale.

Come già analizzato in precedenza, la varianza di portafoglio è calcolabile tramite prodotto di tre matrici:

$$\sigma^2{}_{ptf} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \begin{bmatrix} \sigma^2{}_1 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma^2{}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Per il calcolo della varianza di portafoglio, è necessario conoscere il valore della covarianza derivante da ogni possibile coppia di titoli. Dunque si procede costruendo una matrice delle varianze-covarianze utilizzando la formula:

$$S = \frac{A^T * A}{M} \tag{2.36}$$

Per ottenere A, ossia la matrice degli scarti dalla media dei rendimenti, si riprendono i dati presentati nella figura 3.3 e si sottrae ad ogni rendimento mensile, il relativo rendimento medio:

B3 =Rendimenti!B3-Rendimenti!B51

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	*Data*	ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
3	01-feb-11	4,37%	1,95%	-5,96%	-7,98%	0,06%	-0,03%	-0,43%	-1,17%	2,71%	8,63%	4,60%	8,83%	5,61%	2,48%	3,84%
4	01-mar-11	2,71%	-2,11%	-5,78%	-1,68%	-16,22%	0,65%	0,21%	-3,53%	4,21%	-4,19%	-4,93%	-4,25%	13,38%	-7,30%	-6,01%
5	01-apr-11	7,62%	3,86%	12,82%	3,09%	7,17%	-4,98%	3,33%	0,60%	10,85%	-1,06%	1,30%	8,83%	1,90%	5,37%	6,38%
6	02-mag-11	-1,07%	-5,13%	1,79%	-0,39%	-11,18%	-0,13%	-7,46%	-12,23%	-0,75%	-3,29%	-7,70%	0,94%	-1,94%	-3,62%	0,47%
7	01-giu-11	-1,90%	-2,33%	1,73%	-3,11%	1,41%	-2,01%	-14,82%	-10,99%	5,63%	-2,25%	-6,14%	-30,01%	-2,53%	-4,79%	-9,97%
8	01-lug-11	-11,69%	-7,33%	-9,80%	-43,91%	-13,64%	-1,77%	-10,58%	-7,64%	-4,65%	-8,36%	-13,88%	5,14%	-9,15%	-9,55%	-8,32%
43	02-giu-14	4,99%	6,53%	-6,86%	14,79%	-9,12%	-0,81%	-12,27%	-1,62%	-4,58%	2,20%	-2,74%	-4,29%	0,20%	-4,02%	-0,96%
44	01-lug-14	-0,01%	-4,87%	-0,12%	-0,16%	-1,83%	-3,88%	0,24%	-17,22%	-6,48%	-6,65%	-2,59%	0,19%	-0,29%	-2,69%	-9,33%
45	01-ago-14	-6,00%	-0,56%	1,91%	3,41%	1,36%	-3,38%	-1,84%	5,27%	2,22%	1,17%	2,18%	-12,05%	1,17%	-0,80%	0,36%
46	01-set-14	4,02%	2,18%	1,98%	8,38%	5,66%	-0,27%	-1,85%	-2,59%	-7,63%	3,38%	7,70%	-3,57%	-3,75%	6,47%	2,54%
47	01-ott-14	-3,25%	-10,54%	14,59%	-6,56%	-3,47%	-3,14%	-5,59%	-13,06%	-4,29%	-1,08%	-6,66%	-49,28%	-3,88%	-2,28%	3,08%
48	03-nov-14	-5,20%	-5,82%	11,28%	8,56%	5,47%	4,01%	5,49%	20,44%	4,85%	1,13%	4,80%	11,65%	-1,34%	5,92%	4,57%
49	01-dic-14	-5,17%	-10,39%	-5,06%	-0,35%	-2,96%	3,95%	-6,28%	5,75%	-3,55%	-3,33%	-9,20%	-27,38%	-11,42%	-2,62%	-5,99%
50	01-gen-15	-0,25%	-0,16%	-0,68%	0,42%	-0,46%	-1,68%	-1,09%	0,34%	-1,74%	0,02%	1,66%	4,99%	-0,29%	-0,34%	0,04%

Figura 3.4: Matrice degli scarti dalla media dei rendimenti

A questo punto è possibile procedere con il calcolo della matrice delle varianze-covarianze applicando la formula appena presentata, indicando con A^T la matrice trasposta di A:

B55 {=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(B3:P50);B3:P50)/49}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
54		ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
55	ENEL.MI	0,5826%	0,2454%	0,3959%	0,5934%	0,6343%	0,0447%	0,4272%	0,3555%	0,1259%	0,4618%	0,6903%	0,6215%	0,3460%	0,4134%	0,7027%
56	ENI.MI	0,2454%	0,2871%	0,1695%	0,2908%	0,3527%	0,0974%	0,2347%	0,2141%	0,1555%	0,2344%	0,3629%	0,4007%	0,1458%	0,2526%	0,2953%
57	FCA.MI	0,3959%	0,1695%	1,4509%	0,7400%	0,8906%	0,1929%	0,3886%	0,6677%	0,3860%	0,2593%	0,7741%	0,5368%	0,2379%	0,3100%	0,5388%
58	FNC.MI	0,5934%	0,2908%	0,7400%	1,7702%	0,8213%	0,1414%	0,6412%	0,8574%	0,1678%	0,6718%	0,9291%	0,9430%	0,4282%	0,6095%	1,0542%
59	ISP.MI	0,6343%	0,3527%	0,8906%	0,8213%	1,1876%	0,1762%	0,7224%	0,7490%	0,3261%	0,5640%	1,0222%	0,9550%	0,4036%	0,6130%	0,9129%
60	LUX.MI	0,0447%	0,0974%	0,1929%	0,1414%	0,1762%	0,1857%	0,1391%	0,1707%	0,1107%	0,0378%	0,1474%	0,1994%	0,0127%	0,1081%	0,0925%
61	MED.MI	0,4272%	0,2347%	0,3886%	0,6412%	0,7224%	0,1391%	0,8094%	0,6318%	0,2251%	0,4222%	0,7277%	0,8532%	0,4009%	0,5322%	0,7909%
62	MS.MI	0,3555%	0,2141%	0,6677%	0,8574%	0,7490%	0,1707%	0,6318%	1,4241%	0,3077%	0,4547%	0,8369%	0,9326%	0,3713%	0,5700%	0,8117%
63	PC.MI	0,1259%	0,1555%	0,3860%	0,1678%	0,3261%	0,1107%	0,2251%	0,3077%	0,5931%	0,1273%	0,3547%	0,0825%	0,1199%	0,2292%	0,1752%
64	TIT.MI	0,4618%	0,2344%	0,2593%	0,6718%	0,5640%	0,0378%	0,4222%	0,4547%	0,1273%	0,7664%	0,6903%	0,5370%	0,2921%	0,4291%	0,7763%
65	UCG.MI	0,6903%	0,3629%	0,7741%	0,9291%	1,0222%	0,1474%	0,7277%	0,8369%	0,3547%	0,6903%	1,3551%	1,0632%	0,4892%	0,6943%	1,1281%
66	BMPS.MI	0,6215%	0,4007%	0,5368%	0,9430%	0,9550%	0,1994%	0,8532%	0,9326%	0,0825%	0,5370%	1,0632%	2,8089%	0,4590%	0,5484%	1,2171%
67	EGPW.MI	0,3460%	0,1458%	0,2379%	0,4282%	0,4036%	0,0127%	0,4009%	0,3713%	0,1199%	0,2921%	0,4892%	0,4590%	0,4089%	0,3205%	0,4979%
68	G.MI	0,4134%	0,2526%	0,3100%	0,6095%	0,6130%	0,1081%	0,5322%	0,5700%	0,2292%	0,4291%	0,6943%	0,5484%	0,3205%	0,5974%	0,7220%
69	MB.MI	0,7027%	0,2953%	0,5388%	1,0542%	0,9129%	0,0925%	0,7909%	0,8117%	0,1752%	0,7763%	1,1281%	1,2171%	0,4979%	0,7220%	1,4441%

Figura 3.5: Matrice delle varianze-covarianze

Si noti che la diagonale principale della matrice delle varianze-covarianze, contenga i valori delle varianze dei singoli titoli.

3.3 Teorema di Black

Al fine di ottenere la combinazione di portafoglio che rispetta il principio di Dominanza, si ricorre alla costruzione della frontiera efficiente. Essa è ricavabile da una qualsiasi coppia di portafogli appartenenti ad essa. Tale asserzione fu dimostrata da Black, un economista che nel 1972 dimostrò come una qualsiasi coppia di portafogli di frontiera sia sufficiente per costruire l'intera frontiera.

Siano $x = [x_1, \ \dots, \ x_n]$ e $y = [y_1, \ \dots, \ y_n]$ una coppia di portafogli di frontiera, tutti i portafogli appartenenti ad essa rappresentano combinazioni convesse di *x* ed *y*. Indicando con a una costante ed indicando con *z* un portafoglio di frontiera (metaportafoglio), si ottiene:

$$z = ax + (1-a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1-a)y_1 \\ ax_2 + (1-a)y_2 \\ \vdots \\ ax_N + (1-a)y_N \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Dunque, conoscendo i due portafogli *x* e *y* è possibile individuare l'intera frontiera ricorrendo al portafoglio *z*. Essi possono essere individuati impostando un sistema di minimizzazione del rischio come illustrato nel paragrafo 2.3. È però necessario distinguere due distinti casi: il primo ipotizza un contesto privo di vincoli; il secondo invece introduce nel sistema alcuni vincoli (ad esempio l'impossibilità di vendite allo scoperto).

3.4 Costruzione di un portafoglio efficiente in un mercato privo di vincoli

In un contesto privo di vincoli, ossia in cui sono consentite vendite allo scoperto, i parametri x_i e y_i possono assumere sia valori positivi sia valori negativi. In questo caso, è possibile individuare la scelta efficiente impostando il seguente sistema:

$$\begin{cases} \min\limits_{X_i} \sigma^2{}_{ptf} = \min\limits_{X_i} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ E^*(R_{ptf}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, E(R_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

Utilizzando un foglio di calcolo excel è possibile risolvere tale sistema ricorrendo allo strumento del *Risolutore*, ossia una funzione che modifica un'area determinata per ottenere il risultato desiderato rispettando delle condizioni imposte.

Si utilizzino i valori attesi dei rendimenti presentati in figura 3.3 come punto di partenza.

Ricordando che il valore atteso del rendimento di portafoglio è calcolabile come prodotto matriciale tra il vettore riga dei rendimenti medi e il vettore colonna dei relativi pesi; inoltre che la varianza di portafoglio è ottenibile mediante la seguente formula:

$$\sigma^2_{ptf} = x^T S x \tag{2.38}$$

Si impostano nel Risolutore le seguenti condizioni:

- Il valore atteso del rendimento del portafoglio sia pari al valore arbitrariamente scelto (nel presente caso avrà valore 1%)
- Ci sia pieno investimento delle proprie risorse. Dunque la somma delle quote dei titoli dovrà necessariamente essere pari ad 1

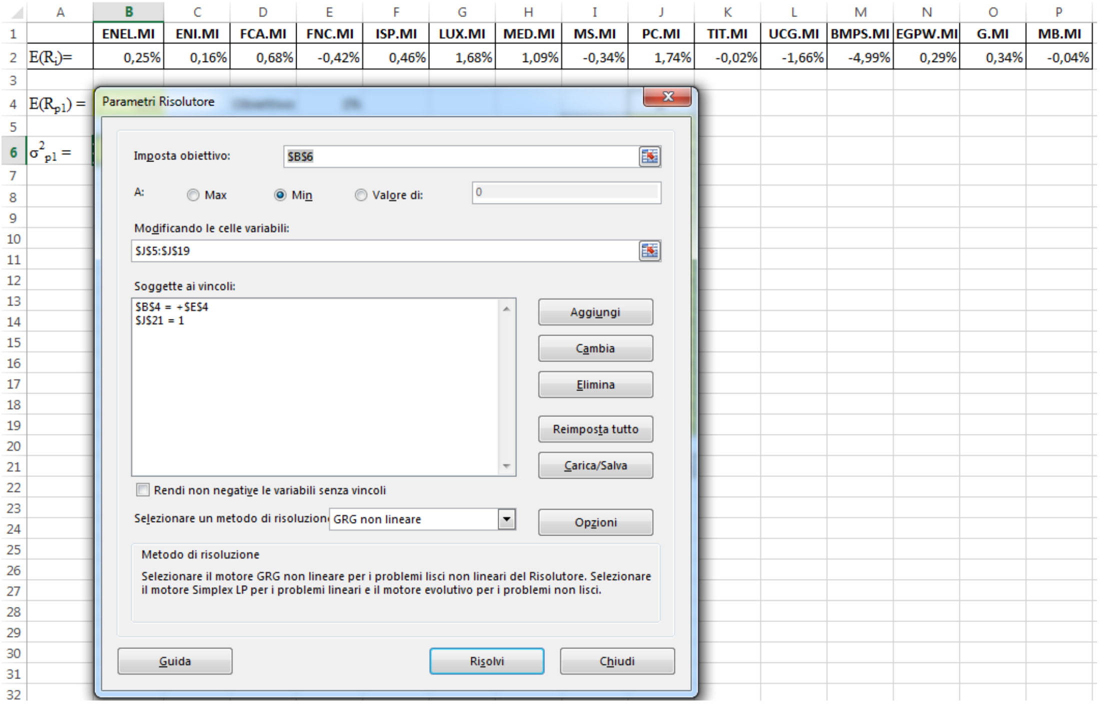


Figura 3.6: Dati inseriti nel risolutore

Si noti che in figura 3.6 è stato imposto come obiettivo la minimizzazione della varianza di portafoglio. La cella contenente il valore della varianza contiene la formula (2.38).

Risolvendo tali condizioni, si ricavano i seguenti risultati:

B6 {=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(J5:J19);MATR.PRODOTTO('Mat Var-Cov'!B55:P69;J5:J19))}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
2	$E(R_i)$=	0,25%	0,16%	0,68%	-0,42%	0,46%	1,68%	1,09%	-0,34%	1,74%	-0,02%	-1,66%	-4,99%	0,29%	0,34%	-0,04%
3																
4	$E(R_{p1})$ =	1,00%		Obiettivo	1%					*x*						
5									ENEL.MI	0,1121						
6	σ^2_{p1} =	0,09%							ENI.MI	0,1639						
7									FCA.MI	0,0770						
8									FNC.MI	-0,0528						
9									ISP.MI	-0,1935						
10									LUX.MI	0,5170						
11									MED.MI	-0,1119						
12									MS.MI	-0,0044						
13									PC.MI	0,0311						
14									TIT.MI	0,1519						
15									UCG.MI	-0,1140						
16									BMPS.MI	0,0318						
17									EGPW.MI	0,3532						
18									G.MI	0,0784						
19									MB.MI	-0,0396						
20																
21									*Somma*	1						

Figura 3.7: Risultati ottenuti mediante il risolutore.

Poiché il teorema di Black necessita di due portafogli per ricavare la frontiera efficiente, si ripetono gli stessi passaggi impostando come valore atteso per il rendimento di portafoglio il valore 3%:

B6 {=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(J5:J19);MATR.PRODOTTO('Mat Var-Cov'!B55:P69;PtfSenzaVin2!J5:J19))}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
2	$E(R_i)$=	0,25%	0,16%	0,68%	-0,42%	0,46%	1,68%	1,09%	-0,34%	1,74%	-0,02%	-1,66%	-4,99%	0,29%	0,34%	-0,04%
3																
4	$E(R_{p1})$ =	3,00%		Obiettivo	3%					*x*						
5									ENEL.MI	0,2408						
6	σ^2_{p1} =	0,14%							ENI.MI	0,0064						
7									FCA.MI	-0,0079						
8									FNC.MI	-0,0547						
9									ISP.MI	-0,0001						
10									LUX.MI	0,7725						
11									MED.MI	0,0508						
12									MS.MI	0,0110						
13									PC.MI	0,1340						
14									TIT.MI	0,0460						
15									UCG.MI	-0,3562						
16									BMPS.MI	-0,1483						
17									EGPW.MI	0,2600						
18									G.MI	-0,1734						
19									MB.MI	0,2191						
20																
21									*Somma*	1,0000						

Figura 3.8: Risultati ottenuti con rendimenti al 3%

Si noti come un aumento del rendimento atteso, comporti necessariamente un aumento della varianza e, quindi, del rischio.

3.5 Applicazione del Teorema di Black in un mercato privo di vincoli

Il Teorema di Black esposto nel paragrafo 3.3 permette di costruire una frontiera efficiente utilizzando i due portafogli ottenuti nel precedente paragrafo.

Al fine di ottenere il metaportafoglio z si richiama la seguente formula:

$$z = ap_1 + (1 - a)p_2 \qquad (2.40)$$

Dove:

- a: rappresenta la quota investita nel portafoglio p_1
- p_1 rappresenta il portafoglio avente l'1% di rendimento
- p_2 rappresenta il portafoglio avente il 3% di rendimento

Poiché il metaportafoglio z è costituito con una combinazione convessa dei due portafogli, è possibile calcolarne il rendimento atteso come segue:

$$E(R_z) = aE\left(R_{p1}\right) + (1 - a)E\left(R_{p2}\right) \qquad (2.41)$$

La sua varianza risulta invece:

$$\sigma_z^2 = \ a\sigma_{p1}{}^2 + (1 - a)^2\sigma_{p2}{}^2 + 2a(1 - a)\sigma_{p1\,p2} \qquad (2.42)$$

Calcolando la radice quadrata è possibile ottenere la deviazione standard del metaportafoglio z:

$$\sigma_z = \ \sqrt{a^2\sigma_{p1}{}^2 + (1 - a)^2\sigma_{p2}{}^2 + 2a(1 - a)\sigma_{p1\,p2}} \qquad (2.43)$$

Per applicare tale formula è necessario ricavare il valore della covarianza. Essa è calcolabile utilizzando la seguente espressione:

$$\sigma_{p1\,p2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \sigma_{ij} \tag{2.44}$$

Dove:

- x rappresenta il vettore colonna delle quote investite nel portafoglio p_1
- y rappresenta il vettore colonna delle quote investite nel portafoglio p_2

Assegnando ad a un valore arbitrario di 0.7, è possibile applicare le formule appena esposte ottenendo il seguente prospetto:

Peso di x	0,7
$E(R_z)$ =	1,60%
$Cov(p_1,p_2)$ =	0,0676%
$Var(R_z)$ =	0,0852%
σ_z =	2,92%

Peso di x	$E(R_z)$	σ_z
	1,60%	*2,92%*
-2	7,00%	9,23%
-1,8	6,60%	8,63%
-1,6	6,20%	8,04%
-1,4	5,80%	7,46%
-1,2	5,40%	6,88%
-1	5,00%	6,32%
-0,8	4,60%	5,76%
-0,6	4,20%	5,23%
-0,4	3,80%	4,72%
-0,2	3,40%	4,24%
0	3,00%	3,81%
0,2	2,60%	3,43%
0,4	2,20%	3,15%
0,6	1,80%	2,96%
0,8	1,40%	2,91%
1	1,00%	2,99%
1,2	0,60%	3,19%
1,4	0,20%	3,50%
1,6	-0,20%	3,89%
1,8	-0,60%	4,33%
2	-1,00%	4,82%

	$E(R_z)$	σ_z
Ptf Var Min	1,40%	2,91%

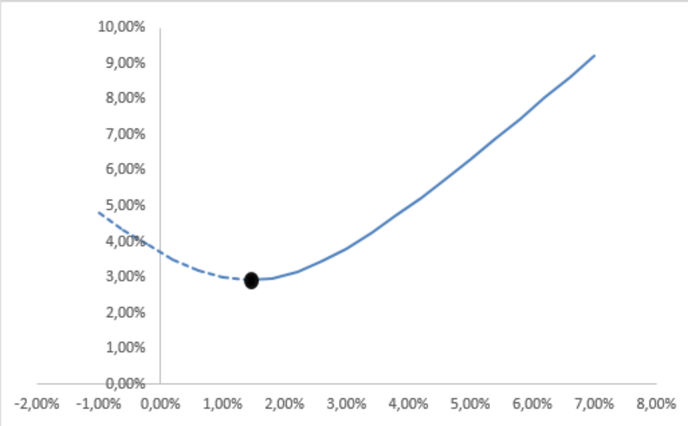


Figura 3.9: Frontiera del portafoglio z in un contesto privo di vincoli

I dati evidenziati rappresentano uno dei portafogli possibili appartenenti alla frontiera. Da esso è possibile calcolare tutte le combinazioni dei portafogli di frontiera ricorrendo alla analisi di simulazione *Tabella* dati. Tramite questa funzione è possibile ottenere diversi valori di possibili combinazioni appartenenti ad un intervallo arbitrariamente scelto.

Impostando tale intervallo compreso tra i valori [-2;2] Si procede nel seguente modo:

- Si utilizzano i valori del rendimento atteso e dello scarto quadratico medio come intestazioni di tabella.
- Si seleziona l'area A9:C30 e, utilizzando la funzione tabella dati, si sceglie il valore attribuito al peso di x come cella di input per colonna.

In tal modo si ottengono i risultati esposti, ossia la coppia Rendimento Atteso-Deviazione Standard per ogni livello di x.

In termini geometrici, quanto è esposto, è rappresentabile mediante un grafico a dispersione scegliendo i valori di rendimento atteso come punti riferibili all'asse delle ascisse e le deviazioni standard come i punti riferibili all'asse delle ordinate.

Il punto evidenziato in nero nella figura 3.9 rappresenta la combinazione di portafoglio a varianza minima.

3.6 Costruzione di un portafoglio efficiente in un mercato soggetto a divieti di vendita allo scoperto

Riprendendo i concetti illustrati nel paragrafo 3.4, nel caso di mercati in cui siano vietate le operazioni di vendita allo scoperto, è necessario apportare alcune modifiche alla funzione del Risolutore.

Analiticamente, il divieto di vendita allo scoperto è traducibile con la seguente espressione:

$$x_i \geq 0$$

Per quanto riguarda lo strumento del Risolutore, è opportuno integrare la funzione che vieta al modificatore dei parametri (delle quote dei titoli) di assumere valori negativi.

Si impone che il rendimento atteso di portafoglio abbia un valore pari all’1%.

In tal modo, il prospetto del Risolutore apparirà come segue:

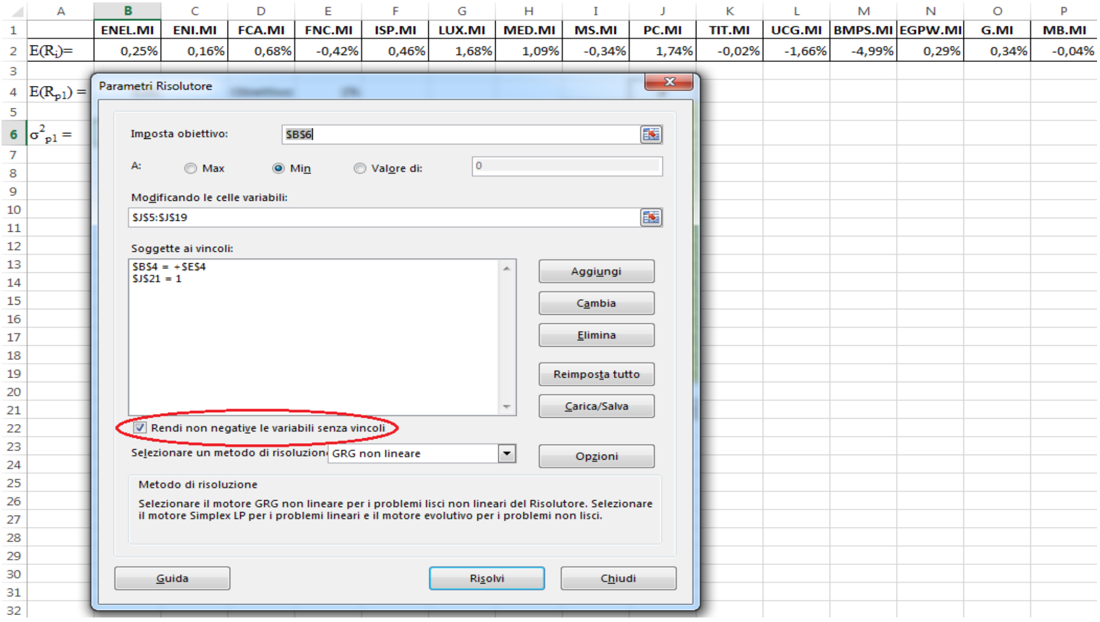
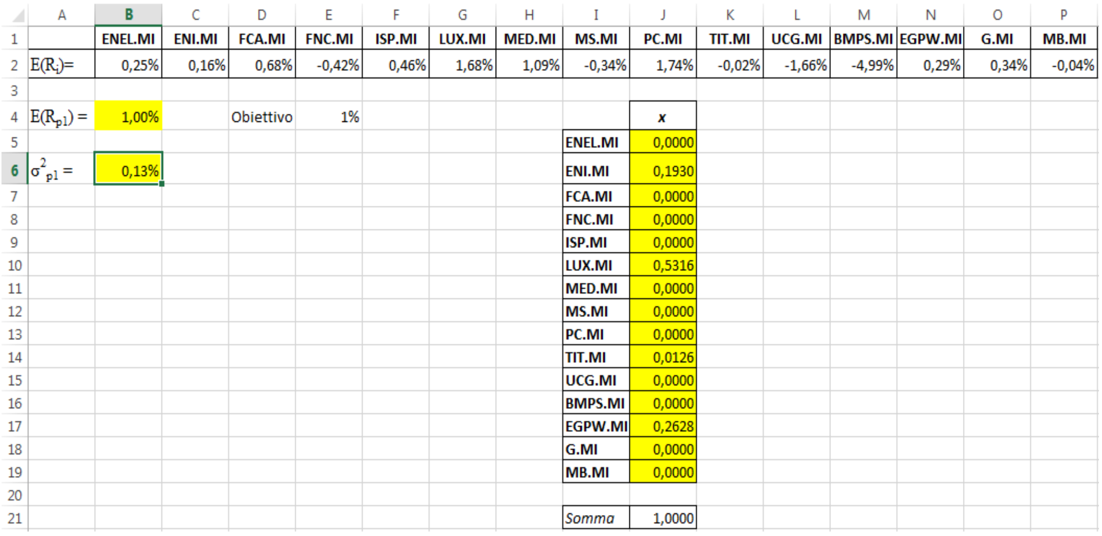


Figura 3.10: Risolutore in un mercato soggetto a divieti di vendita allo scoperto

Risolvendo tale funzione si presentano i seguenti risultati:



	ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
$E(R_i)$=	0,25%	0,16%	0,68%	-0,42%	0,46%	1,68%	1,09%	-0,34%	1,74%	-0,02%	-1,66%	-4,99%	0,29%	0,34%	-0,04%

$E(R_{p1})$ =	1,00%	Obiettivo	1%		*x*
				ENEL.MI	0,0000
σ^2_{p1} =	0,13%			ENI.MI	0,1930
				FCA.MI	0,0000
				FNC.MI	0,0000
				ISP.MI	0,0000
				LUX.MI	0,5316
				MED.MI	0,0000
				MS.MI	0,0000
				PC.MI	0,0000
				TIT.MI	0,0126
				UCG.MI	0,0000
				BMPS.MI	0,0000
				EGPW.MI	0,2628
				G.MI	0,0000
				MB.MI	0,0000
				Somma	1,0000

Figura 3.11: Portafoglio con rendimento pari ad 1% soggetto a vincoli

Come è facilmente intuibile, la combinazione di titoli ottenuta non presenta valori negativi.

Si risolve ora, il medesimo problema impostando un rendimento atteso desiderato pari allo 0,8%, così da ricavare un secondo portafoglio azionario, indispensabile per la costruzione della frontiera efficiente.

	ENEL.MI	ENI.MI	FCA.MI	FNC.MI	ISP.MI	LUX.MI	MED.MI	MS.MI	PC.MI	TIT.MI	UCG.MI	BMPS.MI	EGPW.MI	G.MI	MB.MI
$E(R_i)$=	0,25%	0,16%	0,68%	-0,42%	0,46%	1,68%	1,09%	-0,34%	1,74%	-0,02%	-1,66%	-4,99%	0,29%	0,34%	-0,04%

$E(R_{p1})$ =	0,80%	Obiettivo	0,8%
σ^2_{p1} =	0,14%		

	x
ENEL.MI	0,0000
ENI.MI	0,2800
FCA.MI	0,0000
FNC.MI	0,0000
ISP.MI	0,0000
LUX.MI	0,4318
MED.MI	0,0000
MS.MI	0,0000
PC.MI	0,0000
TIT.MI	0,0128
UCG.MI	0,0000
BMPS.MI	0,0095
EGPW.MI	0,2659
G.MI	0,0000
MB.MI	0,0000
Somma	1,0000

Figura 3.12: Portafoglio con rendimento pari a 0,8% soggetto a vincoli

3.7 Applicazione del Teorema di Black in un mercato soggetto a vincoli

Utilizzando i concetti teorici illustrati nel paragrafo 3.5 è possibile ricavare la frontiera efficiente in un contesto soggetto a divieti di vendita.

Si imposta un intervallo più ampio [-8;8] e si assegna al peso *x* un valore arbitrario di 0,7. In questo modo si ricava il seguente prospetto:

Peso di x	0,7
$E(R_z) =$	0,94%
$Cov(p_1,p_2) =$	0,1377%
$Var(R_z) =$	0,1363%
$\sigma_z =$	3,69%

Peso di x	$E(R_z)$	σ_z
	0,94%	3,69%
-8	-0,80%	6,71%
-7,2	-0,64%	6,35%
-6,4	-0,48%	5,99%
-5,6	-0,32%	5,65%
-4,8	-0,16%	5,32%
-4	0,00%	5,00%
-3,2	0,16%	4,71%
-2,4	0,32%	4,43%
-1,6	0,48%	4,19%
-0,8	0,64%	3,98%
0	0,80%	3,81%
0,8	0,96%	3,68%
1,6	1,12%	3,60%
2,4	1,28%	3,57%
3,2	1,44%	3,59%
4	1,60%	3,67%
4,8	1,76%	3,80%
5,6	1,92%	3,97%
6,4	2,08%	4,18%
7,2	2,24%	4,42%
8	2,40%	4,69%

	$E(R_z)$	σ_z
Ptf Var Min	1,28%	3,57%

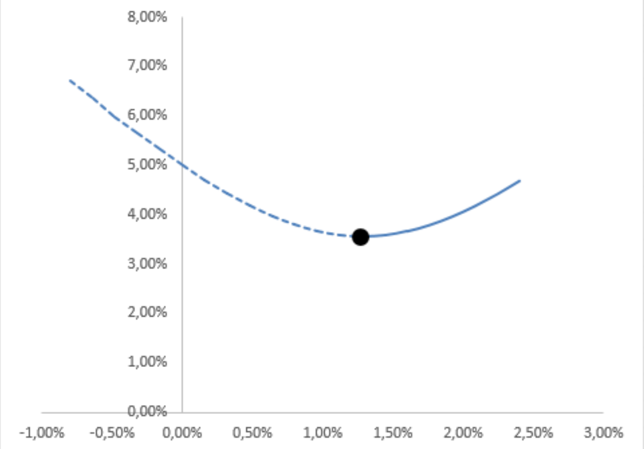


Figura 3.13: Frontiera del portafoglio z in un contesto soggetto a vincoli

Il portafoglio di frontiera evidenziato in nero rappresenta la combinazione efficiente avente il minor rischio possibile.

Nonostante i portafogli ottenuti seguendo il modello di Markowitz risultino efficienti, essi non presentano un adeguato livello di diversificazione. Solo una parte dei titoli possibili è di fatto inclusa nel portafoglio efficiente con la conseguenza che il risultato ottenuto fornisce un portafoglio azionario ad alto rischio.

Conclusione

L'elaborato si è posto l'obiettivo di analizzare la Teoria di Portafoglio di H.Markowitz con un orientamento matematico-statistico. Tale modello ha però mostrato dei limiti che rendono la sua applicazione imperfetta per una corretta costruzione di un portafoglio. Tuttavia, l'analisi degli studi condotti da H.Markowitz si impongono come punto di partenza per tutti i modelli successivamente proposti. In particolare si evidenzia l'importanza del modello del CAPM proposto da Sharpe, Linter, Mossin il quale ha permesso di superare alcuni dei limiti riscontrati nella teoria della *Portfolio Selection*.

Introducendo i servizi di investimento svolti dagli intermediari finanziari, si è in particolar modo descritta la normativa europea MiFID come fonte di tutela degli investitori. Tale normativa guida gli intermediari nel processo di classificazione dei loro clienti al fine di garantirne un servizio consono con le caratteristiche di ciascuno di essi.

Si è successivamente spostata l'attenzione dei lettori sull'analisi degli studi condotti dall'economista H.Markowitz soffermando in un primo momento l'interesse sul singolo titolo per poi arrivare ad una analisi generale di un portafoglio. Quest'ultima è stata a sua volta strutturata in due fasi: la prima di esse prendeva in analisi lo studio di un portafoglio costituito da due soli titoli; la seconda invece ha avuto il fine di generalizzare il processo di costruzione di un portafoglio nel caso di *n* titoli. Utilizzando come indicatori di riferimento il valore atteso di rendimento e la varianza di un titolo e, successivamente, di un portafoglio, si è giunti all'ottenimento delle quote di un portafoglio. Di seguito si è parlato di condizioni di efficienza di un portafoglio e si è descritto il processo di realizzazione di una frontiera.

L'ultima parte dell'elaborato ha sviluppato i concetti teorici presentati in relazione al modello di Markowitz. Utilizzando l'applicativo di Excel e prendendo in analisi i dati di 15 titoli azionari aventi come indice di rifermineto il FTSE MIB, si sono ottenuti due portafogli efficienti impostando e risolvendo dei problemi di ottimizzazione vincolata arrivando a costruire una frontiera efficiente basata sulla teoria di Black. Tuttavia, nel momento in cui è stato preso in analisi un caso che metteva in discussione una ipotesi del modello, si è potuto costatare come l'applicazione pratica della teoria abbia comportato l'ottenimento di risultati non coerenti con il modello.

Seppure con alcune imperfezioni, la Teoria di Portafoglio presentata da Markowitz rappresenta la costante per tutti i successivi studi che presentano l'obiettivo della ottimale collocazione degli investimenti. Grazie al suo contributo in tale materia, nel corso degli anni sono stati introdotti diversi indici di performance degli investimenti. Tra i più importanti è possibile ricordare lo *Sharpe Ratio* e l'*indice di Sortino*. Sicuramente tali indici hanno riscontrato risultati più coerenti con la realtà dei mercati, ma ciascuno di essi fa senza dubbio riferimento a quei concetti introdotti dagli studi di Markowitz.

Bibliografia

Benninga S., *Modelli finanziari – La finanza con Excel*, McGraw-Hill, Milano, 2010, 2ª edizione.

Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F. A., Torrigiani M., *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editoriale, Bologna 1998, 2ª edizione.

Brealey R., Myers S., Allen F., Sandri S., *Principi di Finanza Aziendale*, McGraw-Hill, Milano, 2015, 7ª edizione.

Fabrizi P. L., *Economia del Mercato Mobiliare*, Egea, Milano, 2013, 5ª edizione.

Lintner J., The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *The Review of Economomics and Statistics*, 1965.

Markowitz H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 1952.

Markowitz H., *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York, 1959

Monti A.C., *Introduzione alla Statistica*, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, 2008, 2ª edizione.

Sharpe W., A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, 1964.

Sitografia

CONSOB – *Investimenti: Cosa sono e quali tutele sono previste per i risparmiatori*. Link:
"http://www.consob.it/main/trasversale/risparmiatori/investor/servizi/servizi_consob/servizi1.html"

Normativa – *Decreto Legislativo 24 febbraio 1998, n.85*. Link:
"http://www.normattiva.it/uri-res/N2Ls?urn:nir:stato:decreto.legislativo:1998;058"

CONSOB – *La Vigilanza sugli Intermediari Finanziari.* Link:
"http://www.consob.it/web/investor-education/la-vigilanza-su-intermediari-finanziari"

Normativa – *Decreto Legislativo 17 settembre 2007, n.164.* Link:
"http://www.normattiva.it/uri-res/N2Ls?urn:nir:stato:decreto.legislativo:2007;164"

Unipol – *MiFID: Classificazione della Clientela.* Link:
"http://www.myunipolbanca.it/info-utili/Pagine/mifid.aspx"

Corriere della Sera – *Azioni e Bond: così funziona la normativa del MiFID, il calcolo del rischio e i Paradossi*. Link: “http://www.corriere.it/economia/finanza_e_risparmio/notizie/azioni-poste-misteri-mifid-d65a8808-7893-11e5-95d8-a1e2a86e0e17.shtml”

Il Sole 24 Ore – *Cosa sono le Vendite allo Scoperto.* Link: “http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2011-07-10/cosa-sono-vendite-scoperto-150532.shtml?uuid=AaiRi1mD”

Google Didattica – *“Forte” e “Debole”*. Link: “https://sites.google.com/site/aconsonnididattica/word-of-the-week/%C2%ABforte%C2%BBe%C2%ABdebole%C2%BB”

OkPedia – *Curva di Indifferenza.* Link: “http://www.okpedia.it/curva_di_indifferenza”

Borsa Italiana – *Indice di Sharpe.* Link: “http://www.borsaitaliana.it/bitApp/glossary.bit?target=GlossaryDetail&word=Indice%20di%20Sharpe”

Borsa Italiana – *Sotto la Lente: che cos’è il Benchmark.* Link: “http://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/benchmark.htm”

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento è rivolto alla Prof.ssa Gabriella Foschini, relatore di questa tesi, per la sua costante disponibilità e per tutti i suoi preziosi consigli, fondamentali per la realizzazione del presente lavoro.

Un ringraziamento speciale è dovuto anche alla Prof.ssa Livia De Giovanni per la sua presenza in ogni fase della realizzazione del presente elaborato, andando ben oltre le necessità strettamente accademiche.

Il più importante dei ringraziamenti è riservato alla mia famiglia per il loro incrollabile sostegno, morale ed economico, durante questo percorso di formazione mostrandosi sempre pazienti e disponibili.

Inoltre ringrazio i miei coinquilini Angelo, Angelo, Emanuele, Luigi, Gianmarco per essere stati i miei punti di riferimento di questi tre anni e per aver mantenuto costantemente alto il morale di questo faticoso percorso. Insieme a loro, ringrazio Leandra per essere stata sempre presente nei momenti di lavoro e di svago.

Febbraio 2016