Valutazione titoli a tasso variabile. Caso applicativo di un CCT.

Sommario

0 Introduzione 3

1 Struttura per scadenza dei tassi 7

1.1 Il mercato dei titoli obbligazionari 7

1.2 Titoli di stato Italiani 13

1.2.1 BOT 14

1.2.2 CTZ 15

1.2.3 BTP 15

1.2.4 CCT 18

1.3 Le obbligazioni senior e subordinate 19

1.4 TCN a pronti e tassi a pronti 19

1.5 I tassi a termine o forward 21

2 Misurazione della struttura dei tassi 25

2.1 I Coupon Bond e il problema del tir come misura dei tassi d'interesse 25

2.2 La struttura di tassi ricavata da TCN e TCF 29

2.3 La struttura dei tassi ricavata dai tassi swap 32

2.4 Tassi swap e tassi swap zero coupon 35

3 Valutazione titoli indicizzati a tassi di interesse 38

3.1 Generalità 38

3.2 Titoli a cedola nulla indicizzati 39

3.3 Titoli a tasso variabile 41

3.3.1 Primo Caso 42

3.3.2 Secondo Caso 43

3.3.3 Terzo Caso 44

3.3.4 Scostamenti dall'indicizzazione perfetta 45

4 Caso applicativo di valutazione titolo indicizzato a tassi di interesse 47

4.1 Euribor 47

4.2 Eurirs 48

4.3 La curva zero-coupon ricavata dalle quotazione del 07/12/15 49

4.4 Valutazione di un CCT con spread 55

5 Conclusioni 58

0 Introduzione

I primi due capitoli di questo lavoro presentano gli strumenti e le criticità relativi alla costruzione della struttura dei tassi per scadenze (term structure). La struttura dei tassi per scadenze è uno strumento di analisi del mercato monetario e finanziario finalizzato allo studio delle relazioni tra rendimenti (tassi) e scadenze (tempi). Essa è solitamente rappresentata da una curva (curva dei rendimenti) ed è costituita da tassi riferiti a strumenti omogenei (es. rendimenti su titoli di Stato, tassi swap, ecc.).

La curva dei rendimenti può assumere forme diverse: inclinata positivamente (tassi a breve termine più bassi dei tassi a lungo termine), inclinata negativamente, piatta o anche "a gobba" se i tassi prima crescono (decrescono) e poi decrescono (crescono) all'aumentare della scadenza.

La struttura per scadenza dei tassi viene utilizzata dagli operatori per valutare la correttezza dei prezzi dei titoli obbligazionari espressi dal mercato, al fine di individuare i titoli che possono considerarsi sovra/sottostimati in base al confronto tra il rendimento a scadenza che li caratterizza e quello di titoli simili per durata; altresì viene usata nell'analisi rischio/rendimento, mediante simulazioni dei possibili risultati connessi all'assunzione di posizioni in titoli per un determinato orizzonte temporale. Infine, si utilizza per la valutazione dei derivati.

Poiché esistono diverse nozioni di rendimento in relazione alla tipologia dei tassi presi in considerazione come ad esempio: rendimento, spot, swap e forward; è opportuno fare qualche precisazione in merito.

Il rendimento effettivo a scadenza (yield to maturity) è quel tasso che eguaglia la somma dei valori attuali delle prestazioni attese del titolo al suo prezzo tel quel. Disponendo di tale tasso per un campione di titoli obbligazionari è possibile costruire la relazione tra rendimenti a scadenza e durata residua espressa in un dato momento dal mercato, che fornisce una visione d'insieme della struttura dei prezzi.

Tuttavia, le informazioni che possono trarsi dalle yield to maturity curve possono essere forvianti per le limitazioni insite nella costruzione stessa di tale curva, che è specifica

dei titoli scelti per le varie scadenze (ogni punto della curva dipende da caratteristiche proprie del titolo) e non consente confronti tra strumenti finanziari disomogenei (per durata, cedola, etc.). In particolare, la curva dei tassi a scadenza risente di un'incoerenza di fondo, nel senso che, poiché ogni flusso finanziario viene attualizzato a un tasso pari al tasso interno di rendimento del titolo cui è associato, è possibile che flussi uguali che maturino a una stessa data vengano valutati in modo diverso perché associati a titoli diversi.

Per questo, ai fini di pricing, il mercato talvolta correla rendimenti a scadenze facendo riferimento ad una curva diversa: la curva dei tassi spot. I tassi spot sono i rendimenti effettivi a scadenza dei titoli di puro sconto (zero coupon bond), ossia titoli senza cedola che pagano gli interessi in un'unica soluzione unitamente alla restituzione del capitale, e che pertanto non danno alcun flusso intermedio tra l'emissione e l'estinzione. Il loro valore si ricava a partire dai prezzi a pronti, secondo la relazione:

$$i(0,k) = \left(\frac{VN_k}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \qquad 0.1$$

Dove VNk è il valore di rimborso del titolo, i(0,k) il tasso spot relativo alla k-esima scadenza e P il prezzo.
Il vantaggio di costruire la curva dei rendimenti per scadenza utilizzando i tassi spot anziché gli yield risiede nel fatto che gli zero-coupon non dipendono dalla cedola e permettono così di individuare in modo univoco la relazione tra rendimenti e scadenze.
Il tasso di interesse a pronti (o spot) a k anni è dunque il rendimento in genere calcolato su base annua di un investimento che è fissato oggi e dura per k anni; rappresenta quindi quel tasso di interesse che il mercato finanziario adotta a una determinata epoca t per

valutare una prestazione finanziaria certa esigibile alla scadenza futura T (quindi di durata T-t).

I tassi di interesse forward (o a termine o impliciti) sono tassi relativi a futuri periodi di tempo, utilizzati per calcolare il valore di un flusso di cassa che inizia e scade in date future.

Sul mercato però non sono disponibili titoli zero coupon su un ampio spettro di scadenze dai quali ricavare tassi spot. E' possibile trovare tassi spot con scadenza fino ad un anno, quali ad esempio i tassi sui depositi (es. Euribor) o i tassi future sui tassi a breve.

Per ovviare a questo problema si mostrerà come utilizzare i tassi swap. I tassi swap indicano il tasso fisso che si è disposti a pagare o incassare contro Euribor flat. Tale tasso costituisce il tasso cedolare di un titolo obbligazionario non governativo risk-free quotato alla pari, il cui tasso interno di rendimento alla scadenza è pari al tasso swap.

Tuttavia non è corretto utilizzare i tassi swap per attualizzare flussi di cassa futuri.

Per fare ciò si deve ricorrere appunto ai tassi zero coupon, i quali, a loro volta, vengono determinati tramite un procedimento di bootstrapping, dalla curva dei tassi swap.

La procedura in esame parte dalla determinazione del c.d. tasso di bootstrap, cioè il primo tasso iswl quotato nella curva dei tassi swap:

$$izc(0,1)=iswl$$

Pertanto il primo tasso swap è per costruzione un tasso zero coupon: infatti, esprime il pagamento/incasso annuale del tasso fisso contro il variabile per scadenza annuale.

I tassi swap sono espressi per convenzione come tassi interni di rendimento: ciò indica che il tasso swap a k anni rappresenta la serie dei flussi cedolari che, attualizzati ai rispettivi fattori di sconto unitamente al valore di rimborso a scadenza, rendono il valore di questo titolo sintetico pari a 100. Dopo aver fissato il primo tasso zero coupon, si imposta un procedimento ricorsivo per calcolare i tassi successivi. Tale metodo di soluzione sarà mostrato nel secondo capitolo.

Nel terzo capitolo è stata esposta la teoria che porta alla valutazione di titoli a tasso variabile indicizzati ai tassi di interesse. Si considererà un'indicizzazione puntuale (l'istante di inizio del periodo di indicizzazione coincide con la lettura del tasso di interesse) e sincrona (il pagamento dell'importo avviene alla fine del periodo di indicizzazione). Si sono considerati anche titoli che prevedono uno spread in forma percentuale rispetto al capitale nominale.
La valutazione è stata fatta esplicitando i seguenti tre casi:

- data di valutazione antecedente alla data di emissione;
- data di valutazione coincidente con la data di emissione;
- data di valutazione successiva alla data emissione.

In generale la logica di valutazione è quella di individuare una strategia che replichi i flussi di cassa del titolo indicizzato.

Nel quarto capitolo è stato presentato un esempio applicativo, relativo alla valutazione di un CCT con spread 1,2% su Euribor a sei mesi e scadenza novembre 2019. Attraverso l'utilizzazione di quotazioni, sia dell'Euribor, caratterizzato da scadenze ad un anno, che dell'Euris con scadenze fino a trent'anni, sarà studiata una struttura di tassi Zero Coupon a pronti e a termine uniperiodale. Questo processo servirà a presentare una valutazione del CCT.

Struttura per scadenza dei tassi

La struttura dei tassi d'interesse secondo la scadenza è una funzione che lega il tasso d'interesse ottenibile da un certo strumento finanziario alla scadenza dello strumento stesso. A questo scopo vengono generalmente utilizzati titoli del debito pubblico, poiché caratterizzati da un basso rischio d'insolvenza, possono evidenziare essenzialmente la relazione esistente tra i rendimenti a diverse scadenze. Inoltre è frequente l'utilizzo di tassi d'interesse interbancari per comporre curve dei rendimenti di breve periodo, generalmente fino a 12 mesi.
La prima parte di questo lavoro mostra le caratteristiche dei titoli del debito pubblico per la costruzione di una struttura dei tassi e il modo in cui si possono ricavare tassi a pronti e a termine da questi titoli.

0.1 Il mercato dei titoli obbligazionari

In questo lavoro s'ipotizza la presenza del mercato perfetto come cornice entro la quale vengono delineate le metodologie operative per misurare la struttura dei tassi per poi cercare metodologie che rimangano valide anche rinunciando ad alcune caratteristiche del mercato perfetto che non sono confermate dalla realtà dei mercati.

Un mercato di capitali si definisce perfetto se presenta le seguenti caratteristiche:

- tutti gli operatori usufruiscono (gratuitamente) delle stesse informazioni relative al mercato,
- ciascun operatore non è in condizione di quantificare le conseguenze di una sua propria azione sul mercato,
- nel mercato non si pagano imposte su trasferimenti di titoli, commissioni di intermediazione e costi di transazione,
- le operazioni finanziarie sono infinitamente divisibili ed effettuabili in ogni istante,
- ogni operatore finanziario è un massimizzatore di profitti, ossia ogni sua operazione è tesa a raggiungere il massimo risultato economico con il minimo costo, nel senso che tra due importi disponibili (da incassare) alla stessa epoca l'operatore preferisce quello di ammontare maggiore e tra due importi di uguale ammontare disponibili (da incassare) ad epoche diverse preferisce quello con disponibilità anteriore (ovvero, tra due importi da pagare alla stessa epoca l'operatore preferisce quello di ammontare minore e tra due importi di uguale ammontare da pagare ad epoche diverse preferisce quello con scadenza posteriore).

Il mercato dei titoli obbligazionari è invece il contesto di riferimento reale (e che quindi si distanzia per diversi aspetti da quello perfetto) a cui si farà riferimento in questo lavoro. Si ritiene quindi essenziale fare una breve disamina di quali sono i titoli obbligazionari che sono sul mercato e delle loro caratteristiche.

Sul mercato dei titoli obbligazionari sono presenti:

- Titoli a tasso fisso

Si tratta di titoli con flusso cedolare costante o step-up/down erogato a certe date predeterminate (solitamente le frequenze cedolari più ricorrenti sono annuali o semestrali).

- Titoli a tasso variabile

Si tratta di obbligazioni nelle quali il flusso cedolare non è fisso, ma è indicizzato all'andamento di un determinato parametro di riferimento monetario.
Nei titoli a tasso variabile, perciò, la cedola cambia ad ogni scadenza cedolare, a meno che il parametro di indicizzazione non sia nel frattempo rimasto invariato.

I titoli obbligazionari si distinguono in relazione alla periodicità di corresponsione degli interessi:
- titoli con interessi solo alla scadenza: si parla di titoli zero-coupn e di titoli one-coupon;
- titoli con cedola periodica: essa può essere a tasso fisso o a tasso variabile;
- titoli misti in cui gli interessi vengono corrisposti in parte sotto forma di cedola ed in parte alla scadenza (solitamente si tratta di titoli strutturati).

Flussi cedolari

1) Profilo dei cash flows per un titolo a cedola fissa

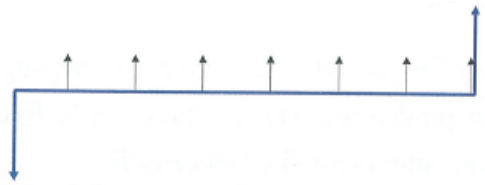

Figura 1

La prima freccia rivolta verso il basso mostra l'esborso iniziale che permette di acquistare la rendita del titolo con cedola rappresentata con le frecce rivolte verso l'alto. Fino a scadenza le frecce della rendita sono le cedole costanti e certe, a scadenza alla freccia della cedola si aggiunge quella del valore di rimborso.

2) Profilo dei cash flows per un titolo a cedola variabile

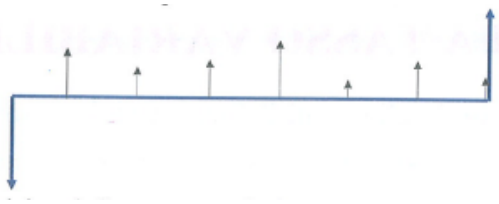

Figura 2

La prima freccia rivolta verso il basso mostra l'esborso iniziale che permette di acquistare la rendita del titolo con cedola rappresentata con le frecce rivolte verso l'alto. Fino a scadenza le frecce della rendita sono le cedole variabili il cui valore è aleatorio al momento dell'acquisto, a scadenza alla freccia della cedola si aggiunge quella del valore di rimborso.

3) Profilo dei cash flows per un titolo zero coupon

Figura 3

La prima freccia rivolta verso il basso mostra l'esborso iniziale che dà diritto a ricevere a scadenza un certo valore di rimborso che è rappresentato dalla freccia verso l'alto.

Con riguardo al prezzo di acquisto, in termini generali, se l'obbligazione è negoziata sotto la pari, l'investitore otterrà un rendimento superiore al quoted margin nel caso in cui il titolo sia detenuto fino a scadenza, quando verrà rimborsato a 100. Per contro,

acquistando un titolo sopra la pari, il rendimento dello stesso risulterà inferiore al *quoted margin*.

Il valore della cedola in corso influenza il rendimento del titolo in quanto, essendo fissata ad una data precedente (in genere, due giorni lavorativi antecedenti quello di inizio di maturazione della cedola) può non riflettere l'andamento corrente dei tassi di interesse al momento della negoziazione del titolo. Infine, meno importante degli altri elementi, risulta il rateo di interesse maturato (interesse maturato tra la data di inizio di godimento della cedola e la data corrente).

I titoli obbligazionari si distinguono:

in relazione all'emittente:

- titoli pubblici: sono obbligazioni emesse o garantite da governi;
- titoli sovranazionali: l'emittente è un ente sovranazionale (es. Bei, World Bank, etc.);
- titoli corporate: l'emittente è una società privata;
- titoli bancari/finanziari: l'emittente è un'azienda di credito o una società finanziaria.

in relazione alla durata:

- titoli a breve: hanno durata inferiore a 12 mesi;
- titoli a medio/breve: durata compresa tra 1 e 3 anni;
- titoli a medio/lungo: durata compresa tra 3 e 7 anni;
- titoli a lungo: hanno durata superiore ai 7 anni;
- titoli perpetui e redimibili: nel primo caso non è previsto il rimborso, nel secondo è discrezionale.

in relazione alle modalità di rimborso:

- titoli con rimborso in un'unica soluzione: il capitale viene rimborsato alla scadenza a tutti gli obbligazionisti (è la stragrande maggioranza delle obbligazioni attualmente in circolazione). Generalmente tutte le nuove emissioni prevedono il rimborso in unica soluzione, salvo alcuni prestiti obbligazionari rinegoziati in caso di default;

- titoli con rimborso a rate costanti: si tratta di obbligazioni in cui il capitale viene progressivamente rimborsato a tutti gli obbligazionisti, come in un mutuo;
- titoli a estrazione: in questo caso il rimborso avviene mediante estrazione periodica di un certo numero di obbligazioni.

Elementi fondamentali di un'obbligazione sono:

- Natura Emittente: (rischio creditizio, rating);
- Profilo finanziario: flussi periodici;
- Tasso di interesse nominale: c=iC dove c=cedola, i=tasso nominale, C=valore nominale dell'investimento;
- Calcolo interessi: (act, 30, 365);
- Valuta di denominazione rischio di cambio;
- Date di godimento;
- Modalità di rimborso (ammortamento, call option, put option);
- Scadenza (determinata, indeterminata: rimborso a estrazione, perpetui);
- Negoziabilità sul mercato secondario: quotazione Borse ufficiali, ammontare emesso, liquidabilità denaro/lettera e ammontari emessi;
- Trattamento fiscale (differente da Paese a Paese).

Per consuetudine il valore nominale di un'obbligazione viene posto pari ad un'ipotetica quotazione di 100. La quotazione di mercato avviene al cosidetto corso secco, senza cioè tenere conto dell'eventuale rateo di interessi maturato, che viene corrispoto a parte.
Il prezzo tel quel è invece il prezzo a cui due controparti si scambiano un titolo ed è comprensivo del rateo lordo di interessi maturato fino alla data di regolamento (data di negoziazione più giorni valuta es. 2 o 3).

0.2 Titoli di stato Italiani

Attualmente il Tesoro Italiano emette in maniera regolare cinque tipologie di titoli obbligazionari sul mercato interno:

1) B.O.T. (Buoni Ordinari del Tesoro);

2) C.T.Z. (Certificati del Tesoro Zero Coupon);

3) B.T.P. (Buoni del Tesoro Poliennali);

4) B.T.P. Ei (Buoni del Tesoro Poliennali indicizzati all'inflazione europea);

5) C.C.T. (Certificati di Credito del Tesoro).

Le loro caratteristiche sono riassunte nel seguente schema:

Titolo	Durata	Remunerazione	Taglio minimo	Meccanismo d'asta	Aliquota fiscale	Rimborso
BOT	3, 6 e 12 mesi (o fless. da 1 a 12 mesi)	Scarto d'emissione	E 1000	Asta competitiva	12, 50 %	In unica soluzione alla scadenza
CTZ	24 mesi	Scarto d'emissione	E 1000	Asta marginale	12, 50 %	In unica soluzione alla scadenza
BTP	3, 5, 10, 15 e 30 anni	Cedole fisse semestrali, scarto d'emissione	E 1000	Asta marginale	12, 50 %	In unica soluzione alla scadenza
BTPEi	5, 10, 15 e 30 anni	Cedole reali semestrali, scarto d'emissione e rivalutazione del capitale a scadenza	E 1000	Asta marginale o tramite sindacato di collocamento	12, 50 %	In unica soluzione alla scadenza
CCT	7 anni	Cedole variabili semestrali, scarto d'emissione	E 1000	Asta marginale	12, 50 %	In unica soluzione alla scadenza

0.2.1 BOT

- I Bot sono titoli a breve termine con scadenza non superiore ad un anno. La remunerazione, interamente determinata dallo scarto di emissione (dato dalla differenza tra il valore nominale ed il prezzo pagato), è considerata anticipata, in quanto la ritenuta fiscale per gli investitori individuali si applica al momento della sottoscrizione.
- La partecipazione alle aste dei Buoni Ordinari del Tesoro è riservata agli intermediare istituzionali autorizzati nei relativi decreti di Emissione del Ministero dell'Economia e delle Finanze.
- A partire da aprile 2009, nelle aste dei BOT le offerte degli operatori sono espresse in termini di rendimento anziché di prezzo, secondo la prassi prevalente sul mercato monetario dell'area euro.

Caratteristiche dei BOT

Valuta:	Euro
Scadenza:	3/6/12 mesi o qualsiasi altra durata compresa entro l'anno (BOT flessibili)
Remunerazione:	scarto d'emissione
Meccanismo d'asta:	asta competitiva sul rendimento
Periodicità emissione:	mensile (a metà mese per i BOT annuali e a fine mese per i semestrali); i BOT trimestrali e flessibili sono emessi in base alle esigenze di gestione della liquidità
Date di regolamento:	tre giorni di valuta sul mercato primario, due giorni sul secondario
Convenzioni di mercato:	per il calcolo dei giorni, *giorni effettivi/360*
Modalità di rimborso:	alla pari, in un'unica soluzione a scadenza

0.2.2 CTZ

- I CTZ sono titoli con durata all'emissione di 24 mesi, soggetti a riaperture che possono ridurne la durata originaria. La remunerazione è interamente determinata dallo scarto di emissione, pari alla differenza tra il valore nominale ed il prezzo corrisposto.
- L'asta dei CTZ è riservata agli intermediari istituzionali autorizzati.

Caratteristiche dei CTZ

Valuta:	Euro
Scadenza all'emissione:	24 mesi circa, in modo che la data di scadenza coincida con un giorno lavorativo
Remunerazione:	scarto d'emissione
Meccanismo d'asta:	asta marginale riferita al prezzo
Periodicità d'aste:	una volta al mese in coincidenza con l'asta BOT semestrale
Date di regolamento:	tre giorni di valuta, sia sul mercato primario sia sul secondario
Convenzioni di mercato:	per il calcolo dei giorni, giorni effettivi/365
Modalità di rimborso:	alla pari, in un'unica soluzione a scadenza

0.2.3 BTP

- I BTP, Buoni del Tesoro Poliennali, sono titoli a medio-lungo termine, con una cedola fissa pagata semestralmente.
- Gli intermediari finanziari che soddisfano le condizioni stabilite dalla legislazione italiana possono partecipare direttamente alle aste e vengono, pertanto, definiti Operatori abilitati.
- Per acquistare i BTP, gli investitori che non possono partecipare alle aste possono rivolgersi ai suddetti intermediari o a tutti gli operatori che intervengono sul mercato secondario.

Caratteristiche dei BTP

Valuta:	Euro
Scadenze:	3, 5, 10, 15 e 30 anni, la cedola annuale è pagata semestralmente
Rendimento (lordo):	tasso cedolare ed eventuale premio o sconto all'emissione (per conoscere il rendimento delle aste, si veda "Risultati ultima asta BTP")
Aste:	due volte al mese, attraverso asta marginale con determinazione discrezionale del prezzo di aggiudicazione e della quantità emessa
Data di Regolamento:	due giorni lavorativi dopo l'asta; tre giorni lavorativi successivi per il mercato secondario
Convenzioni di Mercato:	per il calcolo dei dietimi in occasione di emissione di tranche successive e di negoziazione sul mercato secondario: giorni effettivi/giorni effettivi
Rimborso:	unico pagamento alla scadenza

BTP Ei

- Il BTP indicizzato all'inflazione europea, BTPEi, è un titolo di Stato che fornisce all'investitore una protezione contro l'aumento del livello dei prezzi; sia il capitale rimborsato a scadenza sia le cedole pagate semestralmente sono, infatti, rivalutati sulla base dell'inflazione dell'area Euro, misurata dall'Indice Armonizzato dei prezzi al Consumo (IAPC) con esclusione del Tabacco.

- I valori mensili dell'indice Eurostat sono pubblicati sul sito internet dell'Ufficio Statistico Europeo.

Grazie al meccanismo di indicizzazione utilizzato, alla scadenza è riconosciuto al detentore il recupero della perdita del potere di acquisto realizzatasi nel corso della vita del titolo. In ogni caso il BTPEi garantisce la restituzione del valore nominale sottoscritto: anche nel caso in cui si verifichi, nel periodo di vita del titolo, una

riduzione del prezzi, l'ammontare rimborsato a scadenza non sarà mai inferiore al valore nominale (100).

- Le cedole pagate al sottoscrittore sono di importo variabile, ma garantiscono un rendimento costante in termini reali, ovvero in termini di potere di acquisto. L'ammontare di ciascuna cedola, infatti, è calcolato moltiplicando il tasso di interesse fisso, stabilito all'emissione, per il capitale sottoscritto rivalutato sulla base dell'inflazione verificatasi tra la data di godimento e la data di pagamento della cedola.

Caratteristiche dei BTPEi

Valuta:	Euro
Scadenza:	5, 10, 15 e 30 anni
Remunerazione:	cedole variabili posticipate, semestrali, indicizzate all'Indice Eurostat (escluso il tabacco); scarto d'emissione; rivalutazione del capitale a scadenza.
Data di Regolamento:	due giorni lavorativi dopo l'asta; tre giorni lavorativi successivi, per le negoziazioni sul mercato secondario.
Convenzioni di Mercato:	per il calcolo dei dietimi in occasione della negoziazione sul mercato secondario: - giorni effettivi/giorni effettivi - su base di calcolo di 100 euro, l'importo è arrotondato alla quinta cifra decimale.
Modalità di Rimborso:	il capitale viene corrisposto in un'unica soluzione a scadenza, ed è determinato moltiplicando il valore nominale del titolo per il Coefficiente d'Indicizzazione – di seguito definito – relativo al giorno di scadenza. In ogni caso, il rimborso del capitale non può essere inferiore al valore nominale del titolo.

0.2.4 CCT

- I CCT sono titoli a tasso variabile con la durata di 7 anni.
- Gli interessi vengono corrisposti con cedole posticipate semestrali indicizzate al rendimento dei Buoni Ordinari del Tesoro semestrali; sulla remunerazione incide anche lo scarto d'emissione, dato dalla differenza tra il valore nominale ed il prezzo pagato.
- Le cedole dei CCT sono indicizzate al rendimento effettivo dei BOT semestrali collocati nell'ultima asta prima della formazione della cedola. La cedola dei CCT non è però completamente variabile, perché al rendimento dei BOT viene aggiunta una maggiorazione (spread), pari allo 0,30% su base annua. Sono stati altresì emessi CCT indicizzati all'Euribor 6 mesi + spread (es. 0,80%).

Caratteristiche dei CCT

Valuta:	Euro
Scadenza:	7 anni
Remunerazione:	cedole variabili posticipate, semestrali, indicizzate ai BOT semestrali più margine (detto spread); scarto d'emissione
Meccanismo d'asta:	asta marginale con determinazione discrezionale del prezzo di aggiudicazione e della quantità emessa
Date di Regolamento:	due giorni di valuta sul mercato primario, tre giorni sul secondario
Convenzioni di Mercato:	nel calcolo dei giorni: giorni effettivi/giorni effettivi per il pagamento della cedola; giorni effettivi/giorni effettivi per il calcolo del rateo sulle negoziazioni di mercato secondario e per il pagamento dei dietimi in occasione delle emissioni di tranche successive
Modalità di Rimborso:	alla pari, in unica soluzione a scadenza

0.3 Le obbligazioni senior e subordinate

Con la definizione di obbligazioni subordinate ci si riferisce ai titoli il cui rimborso nel caso di liquidazione o fallimento dell'emittente avviene successivamente a quello dei creditori ordinari, comprese le normali obbligazioni definite senior.

Le obbligazioni subordinate si distinguono, infatti, dalle altre obbligazioni non in base al tipo di tasso, ma per la tipologia di rischio.

Si tratta di titoli con rischio più elevato rispetto a quello delle obbligazioni ordinarie e pertanto sono caratterizzate da un maggior rendimento.

Il motivo principale va ricercato nel fatto che questi bond non sono considerati strumenti di debito tradizionali ma vengono trattati alla stregua del capitale e rappresentano spesso un'alternativa al più costoso collocamento di azioni.

Nel caso delle banche esistono diverse tipologie di obbligazioni subordinate ad ognuna delle quali si accompagnano diverse caratteristiche finanziarie.

0.4 TCN a pronti e tassi a pronti

Gli Zero Coupon Bond sono titoli a cedola nulla (TCN) o titoli privi di cedole o a capitalizzazione integrale o di puro sconto. Sono titoli obbligazionari emessi sotto la pari e rimborsati alla pari.

Il rendimento dell'obbligazione è quindi assicurato semplicemente dalla differenza tra prezzo d'acquisto e prezzo di rimborso.

Consideriamo uno TCN unitario (con valore facciale unitario) che paga un euro all'istante s . Affinché non ci siano opportunità d'arbitraggio si può dimostrare che, date le ipotesi del mercato perfetto, il suo valore all'epoca $t \leq s$ deve essere v(t.s)>0 e v(s,s)=1. Inoltre si postula (e non si dimostra) che

$$v(t,s) < 1 \quad \text{con } t < s$$

1.1

Quest'ultima proprietà, nota come postulato di impazienza, non può essere ricavata come conseguenza necessaria delle ipotesi sul mercato perfetto. Il postulato è detto di "impazienza" in quanto implicitamente afferma che si preferisce disporre di un importo immediatamente piuttosto che in un'epoca futura sopportando un costo pari a 1 –v(t,s).

TCN non unitari, che garantiscono alla scadenza s il pagamento di un importo monetario X_s possono essere valutati conoscendo il valore dei TCN unitari. Vale infatti il *teorema di indipendenza dall'importo* per cui, per evitare arbitraggi non rischiosi (ipotesi di coerenza del mercato), deve valere:

$$V(t,X_s) = X_s\, v(t,s) \qquad 1.2$$

dove $V(t, X_s)$ è il prezzo dello TCN all'epoca t .

Si dice arbitraggio non rischioso una transazione che garantisce ad una delle parti un flusso di pagamenti non negativi con almeno un pagamento certamente positivo: si incassa almeno una volta con certezza senza pagare mai.

Affinché non ci siano opportunità di arbitraggi privi di rischio un portafoglio di titoli o un titolo complesso che paga x_1 in t_1 , x_2 in t_2 , ...,x_m in t_m deve equivalere ad un portafoglio di m TCN di importo x_k (k = 1,2,...,m) (cioè un portafoglio di titoli o un titolo complesso è replicabile mediante un opportuno portafoglio di TCN unitari).

La conoscenza dei prezzi $v(t,s)$ dei TCN unitari relativi a tutte le scadenze consente di valutare tutti i titoli di cui sono noti con certezza gli importi che verranno pagati alle varie epoche.

Sia t = 0 l'epoca corrente e si supponga che le operazioni di scambio di importi monetari possano avvenire solo in corrispondenza delle epoche $t_0 = 0, t_1 = 1, ..., t_m = m$.

Si supponga inoltre che in corrispondenza di ogni epoca t_k esista un TCN che paga l'importo x_k e che ne sia noto il prezzo "a pronti" in $t = 0$: $V(0,x_k)$. Si dice allora che il mercato è completo.

E' infatti possibile ricavare il prezzo "a pronti" di tutti i TCN unitari:

$$v(0,t_k) = \frac{V(0,x_k)}{x_k}$$

1.3

L'insieme di tali prezzi $\{v(0,t_k) : k = 1,2,...,m\}$ rappresenta la struttura per scadenza dei prezzi a pronti o struttura a termine dei prezzi a pronti e caratterizza completamente il mercato al tempo 0 .
Dai prezzi a pronti si ricava anche la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, rappresentata dai tassi di interesse annui (in regime composto) per un'operazione di investimento che ha inizio all'epoca corrente $t = 0$ e scadenza al tempo $t_k = k$

$$i(0,t_k) = \left(\frac{x_k}{V(0,x_k)}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 = \left(\frac{1}{v(0,t_k)}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \; con \; k = 1,2,\dots,m$$

1.4

0.5 I tassi a termine o forward

Un contratto a termine o forward è una compravendita differita in cui due parti convengono, al tempo $t = 0$, di scambiarsi ad una prefissata data futura T e ad un prezzo determinato una determinata quantità di un bene. L'istante T è la data di consegna del bene e di pagamento del prezzo.

Sia $v(0,T,s)$ il prezzo forward fatto al tempo 0 per consegna in T di uno TCN unitario con scadenza al tempo $s \geq T$.

Per il Teorema dei prezzi impliciti, per evitare arbitraggi non rischiosi, i prezzi a pronti e a termine degli TCN unitari devono soddisfare l'uguaglianza:

$$v(0,T,s) = \frac{v(0,s)}{v(0,T)} \quad 0 \leq T \leq s$$

1.5

Questa uguaglianza può essere espressa in termini dei tassi di interesse a pronti e a termine. Il tasso annuo di interesse dell'operazione a termine regolata dal prezzo unitario $v(0,T,s)$ è definito come :

$$i(0,T,s) = \left(\frac{1}{v(0,T,s)}\right)^{\frac{1}{s-T}} - 1$$

1.6

ed è implicito nei tassi a pronti $i(0,T)$ e $i(0,s)$ in quanto dall' uguaglianza

$$v(0,T,s) = \frac{v(0,s)}{v(0,T)} \quad 0 \leq T \leq s$$

1.7

si ricava

$$\big(1 + i(0,T,s)\big)^{-(s-T)} = \frac{\big(1 + i(0,s)\big)^{-s}}{\big(1 + i(0,T)\big)^{-T}}$$

1.8

Sia la struttura per scadenza dei tassi a pronti che di quella a termine danno luogo ad una curva che è detta curva dei rendimenti.

Se i(0,s)>i(0,T) allora si dimostra che i(0,T,s)>i(0,s), cioè il tasso a termine domina quello a pronti.

Infatti la 1.8 può essere riscritta come:

$$\big(1+i(0,T,s)\big)^{-(s-T)} = \frac{\big(1+i(0,s)\big)^{-(s-T+T)}}{\big(1+i(0,T)\big)^{-T}}$$

1.9

Da cui:

$$\begin{aligned}\big(1+i(0,T,s)\big) &= \left[\frac{\big(1+i(0,s)\big)^{-(s-T+T)}}{\big(1+i(0,T)\big)^{-T}}\right]^{-\left(\frac{1}{s-T}\right)} \\ &= \left[\frac{\big(1+i(0,s)\big)^{-(s-T)}(1+i(0,s))^{-T}}{\big(1+i(0,T)\big)^{-T}}\right]^{-\left(\frac{1}{s-T}\right)} \\ &= \big(1+i(0,s)\big)\left[\frac{1+i(0,s)}{1+i(0,T)}\right]^{\left(\frac{T}{s-T}\right)}\end{aligned}$$

1.10

Se i(0,s)>i(0,T) allora

$$\left[\frac{1+i(0,s)}{1+i(0,T)}\right]^{\left(\frac{T}{s-T}\right)} > 1$$

E quindi 1+i(0,T,s)>1+i(0,s) cioè i(0,T,s)>i(0,s).

1 Misurazione della struttura dei tassi

Nella rilevazione empirica delle strutture per scadenza s'incorre in diversi problemi, generati da incompletezze e imperfezioni di vario genere presenti sui mercati reali.
L'ostacolo più rilevante a una diretta misurazione della struttura per scadenza è costituito dalla non disponibilità di titoli senza cedola su un ampio spettro di maturity. In particolare, sul mercato italiano non esistono, almeno per quantità significative, titoli a cedola nulla con vita a scadenza superiore a due anni (la maturity del più "lungo" dei BOT emessi dal Ministero del Tesoro è un anno e i CTZ sono emessi con maturity di due anni), mentre lo spettro delle scadenze che caratterizzano i titoli con cedola fissa (i BTP) si estende fino a 30 anni.
Si potrebbe quindi pensare di completare la struttura attraverso la rilevazione dei tassi di rendimento di titoli con cedola. Il che però presenta delle criticità.

1.1 I Coupon Bond e il problema del tir come misura dei tassi d'interesse

Un coupon bond è un titolo che acquistato dà diritto a ricevere una rendita rappresentata da un importo periodico costante chiamato cedola (consideriamo titoli a cedola costante) e da un importo a scadenza che si aggiunge alla cedola chiamato valore di rimborso. Se il valore di rimborso coincide con il valore nominale del titolo si dice che il titolo è rimborsato alla pari. Quindi nel coupon bond sono importanti i seguenti elementi: il prezzo d'acquisto, il tasso nominale cedolare, il valore nominale e il valore di rimborso.
Indichiamo con V(0,**x)** il prezzo al tempo 0, con VN il valore nominale e con j(m) il tasso nominale cedolare. La cedola rappresenta gli interessi sul valore nominale ed è calcolata come:

$$cedola = \frac{j(m)}{m} VN$$

2.1

In termini di flussi il titolo (che consideriamo rimborsato alla pari) è schematizzabile nel seguente modo:

t	Flusso
0	- V(0,**x)**
1	Cedola
2	Cedola
…	…
k	Cedola
…	
m	Cedola+VN

In un mercato perfetto è sempre ipotizzabile la presenza di TCN con le stesse scadenze del titolo con cedola appena rappresentato e prezzi unitari v(0,k) con k=1,2,…m.
Se acquistiamo questi TCN con valore nominale pari agli importi del flusso del TCF (il che è possibile in quanto in un mercato perfetto sono presenti TCN con qualunque valore nominale) allora siamo in presenza di un portafoglio di TCN con il seguente flusso di cassa:

t	
0	- (cedola*v(0,1)+…+(cedola+VN)*v(0,m))
1	Cedola
2	Cedola
…	…
k	Cedola
…	
m	Cedola+VN

E' evidente che, affinché non ci siano opportunità di arbitraggio tra il TCF e il portafoglio di TCN, il prezzo V(0;x) del TCF debba essere uguale all'esborso iniziale con cui acquistiamo il portafoglio di titoli TCN:

$$V(0,x) = cedola \cdot v(0,1) + \cdots + (cedola + VN) \cdot v(0,m)$$

2.2

In pratica i prezzi unitari degli TCN si presentano come fattori di sconto. Questo risultato, come vedremo, è importante anche per la costruzione della struttura per scadenza dei tassi a pronti.

Siccome il TCF può essere acquistato sopra o sotto la pari il tasso effettivo cedolare non è una misura sempre adeguata del rendimento del titolo in quanto non contempla la differenza positiva o negativa tra prezzo d'acquisto e valore nominale. Una misura del rendimento del titolo più adeguata è data dal tasso interno di rendimento che è quel tasso che in regime composto rende equa l'operazione di acquisto del titolo. Detto in altro modo è quel tasso che ad un certo tempo h (compreso tra la data di emissione e la data di scadenza del titolo), eguaglia il valore capitale della rendita del titolo in h con il prezzo capitalizzato in h. Se come tempo h si sceglie il tempo 0 possiamo dire che il tasso interno di rendimento è il tasso che eguaglia il valore attuale della rendita del titolo con il prezzo.

$$V(0,x) = \sum_{k=1}^{m} cedola \cdot (1+tir)^{-k} + VN \cdot (1+tir)^{-m}$$

2.3

Ponendo $v = (1 + tir)^{-1}$ e portando V(0,x) a destra l'equazione diventa polinomiale di grado m. Per il teorema di Cartesio sappiamo che la soluzione esiste ed è unica se i coefficienti presentano un solo cambio di segno proprio come nel nostro caso in cui i coefficienti sono tutti positivi fatta eccezione per il prezzo che sarebbe negativo.
Di conseguenza si potrebbe pensare di utilizzare il tir dei TCF come misura dei tassi sulle scadenze per le quali non sono presenti sul mercato degli TCN.
Si supponga per esempio che in t siano osservabili i prezzi Vj, j=1, 2, …, n, di n titoli a cedola fissa, considerati caratteristici del mercato. Per ciascuno di questi coupon bond, è sempre possibile ricavare (unico) il tasso interno di rendimento tir rispetto al prezzo Vj, j=1, 2, …, n. Poiché l'orizzonte di scambio che caratterizza l'operazione di acquisto di un titolo con cedola è rappresentato dalla vita a scadenza del titolo, si può ottenere una rappresentazione approssimata della curva dei tassi facendo corrispondere il tasso interno j-esimo titolo con la sua vita a scadenza Tj e interpolando gli n punti rappresentativi così ottenuti nel piano (T, tir) con una curva "di raccordo" opportunamente scelta. In certi casi può essere sufficientemente espressiva un'interpolazione lineare, ottenuta semplicemente congiungendo i punti rappresentativi con dei tratti rettilinei. La curva può essere eventualmente arricchita aggiungendo i tassi di rendimento osservati di titoli a capitalizzazione integrale (gli TCN).
Come abbiamo riportato sopra, il tasso interno di rendimento tir di un titolo j con cedola periodica lo ricaviamo dall'equazione:

$$V_j = \sum_{k=1}^{m_j} c_j \cdot \left(1 + i*_j\right)^{-k} + VR \cdot \left(1 + i*_j\right)^{-m_j}$$

2.4

Ponendo $v_j = \left(1 + i*_j\right)^{-1}$ l'equazione diventa di tipo polinomiale. Per le soluzioni si può ricorrere a formule risolutive nel caso di equazioni di secondo grado altrimenti bisogna ricorrere a metodi iterativi (il più noto è quello di Newton) che sfruttano la proprietà di proporzionalità inversa tra valore attuale e tasso i. Inoltre il teorema di

Cartesio ci garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione in quanto nell'equazione polinomiale (posta = 0) i coefficienti cambiano di segno una sola volta. [1]

Il metodo appena illustrato fornisce una approssimazione molto grossolana della struttura dei tassi perché potrebbe accadere che su una stessa scadenza si ottengano tir diversi ed inoltre trascura il cosiddetto "effetto cedola": semplifica cioè la struttura cedolare dei titoli assimilando ogni coupon bond a uno TCN con stesso rendimento e stessa vita a scadenza.

Un modo per compensare parzialmente questa distorsione consiste nell'utilizzare come vera "longness" di ciascun titolo la duration di Macaulay, calcolata in base al corrispondente tasso interno di rendimento. Naturalmente, esprimendo i tassi in funzione della duration, invece che della vita residua. Ma anche questa si rivela un'approssimazione.[2] Il problema è che se consideriamo valida l'ipotesi che i TCF possano ricavarsi come portafogli di TCN sia effettivamente quotati sul mercato che ipotetici (lì dove non esistono TCN quotati) allora dalle quotazioni di TCN e TCF presenti sul mercato (come vedremo nel prossimo capitolo), si desumono tassi spot di ipotetici zero-coupon che risultano diversi dai tir ricavati dai TCF a prescindere dalla scadenza a cui riferiamo i tir (maturity o duration).

1.2 La struttura di tassi ricavata da TCN e TCF

Dato che, nelle ipotesi adottate di mercato perfetto, un titolo con cedola può essere considerato come un portafoglio di TCN unitari con diversa maturity, per ricavare una determinazione della struttura per scadenza che sia abbastanza estesa e significativa per l'utilizzazione pratica, si tratta di estrarre informazioni sui prezzi (non osservati) di questi TCN elementari dai prezzi osservati dei coupon bond.

[1] Teorema di Cartesio: Sia N il numero delle variazioni nella successione dei segni dei coefficienti di un polinomio di grado m $p_m(x)$, e sia h il numero delle radici positive di $p_m(x) = 0$, allora N-h è un numero positivo o nullo. Quindi se N=1 consegue che h=1 dato che deve essere N-h=0

[2] Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Manuale di finanza, vol I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni, Società editrice il Mulino, Bologna 2005, pp. 280-284

Facciamo un esempio di due TCN quotati a sei mesi e 1 anno e di un TCF con cedola semestrale c quotato ad un anno e mezzo. Esprimiamo i tempi in semestri quindi k=0,1,2,3. Si avrà il seguente si sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} V(0;x_1) = x_1 \cdot v(0,1) \\ V(0;x_2) = x_2 \cdot v(0,2) \\ V_{Cb} = c \cdot v(0,1) + c \cdot v(0,2) + (c + VR) \cdot v(0,3) \end{cases} \qquad 2.5$$

Dalle prime due equazioni è possibile ricavare v(0,1) e v(0,2) che inseriti nella terza equazione permettono di ricavare v(0,3).

$$v(0,3) = \frac{V_{Cb} - c \cdot v(0,1) - c \cdot v(0,2)}{c + VR} \qquad 2.6$$

Il che è come dire che se sul mercato fosse quotato uno TCN con scadenza ad un anno e mezzo, il suo prezzo unitario sarebbe esattamente v(0,3) appena ottenuto. A queste tre equazioni si potrebbero aggiungere ulteriori equazioni relative a titoli con cedola con scadenza successiva ad un anno e mezzo e ricavare in modo ricorsivo i successivi v(0,k).

Consideriamo ad esempio la presenza sul mercato di tre TCN con scadenze rispettivamente a sei mesi, un anno e un anno e mezzo ed un TCF con cedole semestrali e scadenza ad un anno e mezzo. Otteniamo la seguente matrice A con 4 righe e 3 colonne di rango pari a 3 in quanto le prime tre righe e colonne rappresentano una matrice diagonale.

$$\begin{bmatrix} x_{0,5} & & \\ & x_1 & \\ & & x_{1,5} \\ c & c & c+VN \end{bmatrix}$$

E' evidente che in un mercato perfetto (in cui si può ipotizzare che esistano tra gli TCN considerati quelli con valore nominale pari rispettivamente a c, c, c+VN), la rendita del TCF è ottenibile come portafoglio dei primi 3 TCN e si dice che il TCF è ridondante. Se il prezzo del TCF è diverso da quello che si otterrebbe come portafoglio dei 3 TCN allora il sistema è incompatibile (da un punto di vista finanziario sono possibili operazioni di arbitraggio che permettono di ottenere profitti privi di rischio). Infatti per il teorema di Rouché-Capelli avremmo la matrice completa di rango 4 e la matrice A di rango 3. Se invece il prezzo del TCF è uguale a quello che otterremmo dal portafoglio dei 3 TCN allora il TCF è "ben prezzato" ma non entra nemmeno nella determinazione della soluzione. Dall'esempio si evince che abbiamo 1 titolo ridondante (cioè ottenibile come combinazione lineare degli altri titoli), che equivale alla differenza tra 4 (numero titoli) e 3 (rango della matrice). Abbiamo rappresentato una situazione con n titoli> m scadenze, ma il discorso si può estendere anche al caso di n<m.

In generale dati n titoli si tratta di ricavare gli m v(0,k) con k=0,1,…,m . Siamo in presenza di un sistema di n equazioni lineari (una per ciascun titolo) in m incognite v(0,k) (una per ogni scadenza). I coefficienti dati dai valori nominali di rimborso degli TCN e dalle cedole e dai valori di rimborso dei titoli con cedola e i termini noti dati dai prezzi dei titoli , che descrivono la situazione osservata sul mercato, rappresentano i dati del problema.

Il problema può essere quindi posto in modo matriciale:

$$\boldsymbol{Av = V}$$

in cui V è il vettore colonna degli n prezzi, v è il vettore colonna degli m fattori di sconto v(0,k) con k=1,…,m ed **A** è la matrice delle poste, con n righe e m colonne. Il rango della matrice A indica il massimo di flussi di pagamenti linearmente indipendenti.

Di conseguenza *n-rango* indica il numero di titoli ridondanti cioè ottenibili come portafogli dei titoli indipendenti.

Nel caso di $n > m$ possiamo ottenere al massimo n-m titoli ridondanti (in quanto il rango della matrice A può essere al massimo m).

Nel caso di $n \leq m$, che è poi il caso che rispecchia maggiormente il mercato reale in cui n è di gran lunga inferiore ad m, non si hanno problemi di compatibilità se il rango della matrice A è uguale ad n in quanto anche il rango della matrice completa non può che essere n. Per far sì che ciò accada dobbiamo tralasciare i titoli ridondanti. Rimane a questo punto il problema dell'unicità della soluzione che si ha solo se anche m=n. Purtroppo però, come abbiamo già detto, nella realtà dei mercati si ha il problema di avere sistemi indeterminati in quanto il numero di titoli quotati risulta molto minore del numero di scadenze. Ad esempio in Italia la maturity dei BTP quotati sul mercato secondario varia da qualche mese a circa 30 anni; quindi, dato che i titoli hanno periodicità semestrale, lo scadenzario specifico di ciascun BTP è composto da 1 fino a 60 scadenze. Mentre il numero dei titoli è dell'ordine di qualche decina, solitamente il numero di scadenze comuni supera qualche centinaia. Una situazione tipica è n=50 e m=300.

Quindi sul mercato il problema della determinazione della struttura dei tassi attraverso TCN e TCF dà origine a sistemi di equazioni lineari con soluzioni indeterminate.

E' evidente che se riuscissimo a costruire un sistema di equazioni con una matrice triangolare allora risolveremmo il problema della soluzione unica. Per fare ciò bisogna introdurre un nuovo tipo di tasso, il tasso swap.

1.3 La struttura dei tassi ricavata dai tassi swap

Consideriamo n titoli con cedola che sono quotati alla pari sulle scadenze k=1,…,n. Definiamo come tasso di parità p_k il tasso cedolare effettivo $\frac{j_k(m)}{m}$ per cui il valore del

titolo che scade al tempo k, calcolato in base alla struttura per scadenza in vigore al tempo t=0, coincide con il valore nominale. Si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} VN = (c_1 + VN) \cdot v(0,1) \\ VN = c_2 \cdot v(0,1) + (c_2 + VN) \cdot v(0,2) \\ \dots . \\ VN = c_k \cdot v(0,1) + c_k \cdot v(0,2) \dots + (c_k + VN) \cdot v(0,k) \\ \dots \\ VN = c_n \cdot v(0,1) + c_n \cdot v(0,2) \dots + (c_n + VN) \cdot v(0,n) \end{cases}$$

2.7

Sostituendo $c_k = p_k \cdot VN$ in entrambi i membri delle equazioni apparirebbe VN che può essere quindi eliminato e mettendo le equazioni in forma matriciale otteniamo un sistema

A*v*=V in cui V è il vettore colonna unitario, v è dato dal vettore v(0,k) con k=1,…,n e **A** è la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1+p_1 & & & & & \\ p_2 & 1+p_2 & & & & \\ .. & .. & .. & & & \\ p_k & p_k & .. & 1+p_k & & \\ & & & & .. & \\ p_n & p_n & .. & p_n & p_n & 1+p_n \end{bmatrix}$$

Essendo triangolare la matrice A ha rango massimo = n ed anche la matrice completa A/V continua ad avere rango n, quindi il problema ammette soluzione unica.

Se sul mercato esistessero titoli con cedola quotati alla pari potremmo quindi pensare di costruire una struttura per scadenza dei tassi utilizzando tali titoli, imponendo il sistema di equazioni appena discusso. Sul mercato non esistono tali titoli però attraverso le

quotazioni di un altro strumento finanziario, l'interest rate swap, possiamo ricavare i tassi di parità da utilizzare nella matrice A.

L'importanza dell'approccio alla stima della struttura per scadenza basato sui tassi di parità (par yield) è legata al fatto che nei mercati finanziari sono largamente diffuse operazioni dette di interest rate swap che forniscono indicazioni dirette sui tassi di parità. Un'operazione di interest rate swap a k anni è un'operazione di scambio in cui un flusso cedolare a tasso variabile su k anni, riferito a un fissato valore facciale – la "gamba variabile" (floating leg) del contratto swap – viene scambiato a prezzo nullo con un corrispondente flusso cedolare a tasso fisso, con stesso scadenzario e stesso valore facciale – la "gamba fissa" (fixed leg) del contratto. Il tasso swap a k anni è il tasso cedolare della gamba fissa che viene utilizzato nello scambio, e che viene pertanto considerato equivalente al flusso di cedole variabili. Si può dimostrare che in condizioni di mercato ideale il principio di arbitraggio richiede che la gamba variabile quoti alla pari in ogni scadenza cedolare. Perciò il tasso swap a k anni fissato al tempo t dovrà coincidere col tasso di parità a k anni $\overline{p_k}$. Quindi l'osservazione dei tassi swap di diverse scadenze equivale all'osservazione dei tassi di parità correnti. Poiché è possibile aggiungere il capitale nominale alla scadenza, sia alla parte fissa che alla parte variabile dello swap, senza alterare il bilancio complessivo, esso può essere visto come lo scambio di un titolo a tasso variabile contro un titolo a tasso fisso, ovvero, dal punto di vista della parte che paga il tasso fisso, come un portafoglio composto da una quota del titolo a tasso variabile e da meno una quota del titolo a tasso fisso. Ne consegue che la valutazione del contratto può essere effettuata per linearità, applicando le metodologie di valutazione dei titoli a tasso variabile e dei titoli a tasso fisso. L'eventuale presenza di spread sul tasso variabile non altera questo schema logico.

Sul mercato sono effettivamente quotati i tassi swap di contratti indicizzati al tasso Euribor (Euro InterBank Offer Rate) per scadenze annuali da 1 a 10 anni e per le scadenze 12, 15, 20, 25 e 30 anni. Se si vuole ricavare la struttura per scadenza dei tassi a pronti – la cosiddetta struttura zero-coupon – su tutte le scadenze annuali fino a 30

anni, è necessario completare la serie nelle scadenze annuali mancanti. In molti casi ciò viene fatto effettuando semplicemente una interpolazione lineare.

1.4 Tassi swap e tassi swap zero coupon

Indicando $i_{sw}(0,k)$ il tasso swap relativo ad un contratto di interesse swap con scadenza k, possiamo riscrivere la matrice **A** dei tassi di parità con i tassi swap.

$$\begin{bmatrix} 1+i_{sw}(0,1) & & & & & \\ i_{sw}(0,2) & 1+i_{sw}(0,2) & & & & \\ .. & .. & .. & & & \\ i_{sw}(0,k) & i_{sw}(0,k) & .. & 1+i_{sw}(0,k) & & \\ & & & & .. & \\ i_{sw}(0,n) & i_{sw}(0,n) & .. & i_{sw}(0,n) & i_{sw}(0,n) & 1+i_{sw}(0,n) \end{bmatrix}$$

La matrice **A** dei coefficienti del sistema è triangolare bassa, quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi della diagonale principale e vale

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} [1 + i_{sw}(0,k)] > 0$$

2.8

Pertanto vi è un'unica soluzione, che può essere ricavata ricorsivamente risolvendo il sistema per sostituzione:

Se m=1

$$v(0,m) = \frac{1}{1 + i_{sw}(0,1)}$$

2.9

Se m>1

$$v(0,m) = \frac{1 - i_{sw}(0,m) \cdot \sum_{k=1}^{m-1} v(0,k)}{1 + i_{sw}(0,m)}$$

2.10

La struttura per scadenza dei tassi di interesse ricavabile dai fattori di sconto *v(0,m)* su scadenze da *1* a *n* così ottenuti, viene spesso chiamata struttura per scadenza dei *tassi swap zero-coupon*, per indicare che sono tassi a pronti ricavati dai tassi swap e si ricava attraverso la formula:

$$i(0,m) = \left(\frac{1}{v(0,m)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \; con \; m = 1,2,\dots,n$$

2.11

La 2.11 può essere riscritta mettendo in diretta relazione i tassi a pronti con quelli swap. Il primo step è

$$i(0,1) = i_{sw}(0,1) \tag{2.12}$$

Quindi

$$i(0,m) = \left[\frac{1 + i_{sw}(0,m)}{1 - i_{sw}(0,m) \cdot \sum_{k=1}^{m-1} v(0,k)}\right]^{\frac{1}{m}} - 1 \tag{2.13}$$

2 Valutazione titoli indicizzati a tassi di interesse

2.1 Generalità

I contratti indicizzati sono caratterizzati da un flusso di importi che sono aleatori alla data di stipula del contratto e che diverranno noti a date future; il metodo di indicizzazione, cioè la regola che determinerà l'entità del pagamento, è tuttavia stabilito contrattualmente. Tra questi sono diffusi contratti obbligazionari che pagano degli importi che dipendono dall'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Il parametro di indicizzazione è un tasso di interesse. I principali esempi di contratti indicizzati a tassi di interesse sono:

- i titoli a tasso variabile (TTV), di cui i Certificati di Credito del Tesoro (CCT) sono l'esempio più importante;
- i mutui a tasso variabile di varie tipologie;
- gli interest rate swap.

I titoli a tasso variabile (TTV) si possono pensare come dei titoli a tasso fisso nel quale le cedole fisse (e quindi note) sono sostituite da cedole indicizzate (e quindi variabili).
Un mutuo a tasso variabile è un mutuo nel quale le quote interesse di ogni rata sono cedole indicizzate riferite ad un capitale pari al debito residuo dopo il pagamento della rata. Gli interest rate swap prevedono che una delle due controparti corrisponda all'altra delle cedole fisse, calcolate rispetto ad un certo capitale e secondo un tasso cedolare contrattualmente stabilito (tasso swap), mentre l'altra corrisponda in cambio delle cedole indicizzate al tasso di mercato e relative allo stesso capitale.
Nel presente lavoro ci occupiamo di contratti con indicizzazione a tassi di interesse ed in modo particolare dei titoli a tasso variabile (TTV). Si considererà un'indicizzazione puntuale (l'istante di inizio del periodo di indicizzazione coincide con la lettura del tasso di interesse) e sincrona (il pagamento dell'importo avviene alla fine del periodo di indicizzazione) ma esistono anche meccanismi di indicizzazione più complessa, non puntuale (il tasso variabile è costruito partendo da tassi di mercato rilevati in più giornate o in più istanti della stessa giornata) o non sincrona (quando vi `e un differimento o un anticipo temporale del pagamento dell'importo)

2.2 Titoli a cedola nulla indicizzati

Il titolo a cedola nulla unitario (TCN) è l'oggetto fondamentale per valutare i titoli obbligazionari a tasso fisso, in quanto ogni titolo obbligazionario può essere considerato come combinazione lineare di TCN affinché sul mercato non ci siano opportunità di arbitraggio. Di conseguenza dai TCN ricaviamo la struttura dei prezzi a pronti unitari che svolgono il ruolo di fattori di attualizzazione nella formula di calcolo del valore attuale del flusso di importi di un titolo obbligazionario.

Analogamente per la costruzione della logica di valutazione dei titoli indicizzati a tassi d'interesse si utilizza il titolo a cedola nulla indicizzato unitario (TCNi). Dati tre istanti di tempo, t < T < s, il TCNi è un contratto che prevede il pagamento in s dell'importo monetario $X_{T,s} = \frac{1}{v(T,s)}$ aleatorio in t e che sarà noto solo in T.

In pratica $X_{T,s}$ rappresenta il montante al tempo s di 1 euro investito in T al tasso periodale $j(T,s)$, cioè $X_{T,s} = \frac{1}{v(T,s)} = 1 + j(T,s)$.

Il tasso periodale $j(T,s)$ è un tasso di mercato. Di conseguenza all'atto della stipulazione del contratto bisogna indicare il mercato dove tale quotazione o tale tasso sarà rilevato e la fonte della rilevazione. In questa trattazione teorica tuttavia tali precisazioni sono irrilevanti in quanto per l'ipotesi di assenza di arbitraggio un dato tasso dipende solo dall'istante di quotazione e non da altri fattori.

Il periodo (T,s) rappresenta quindi il periodo di indicizzazione. Il tasso di mercato $j(T,s)$può anche essere espresso su base annua quale rendimento annuo di un TCN emesso in T e con scadenza in s.

Se in T consideriamo un capitale pari a *C* in s otteniamo un capitale:

$$CX_{T,s} = C \cdot \frac{1}{v(T,s)} = C[1 + j(T,s)]$$

La quota interesse prodotta dall'indicizzazione rispetto al capitale unitario è detta cedola indicizzata unitaria e può essere espressa come:

$$c_{T,s} = X_{T,s} - 1 = \frac{1}{v(T,s)} - 1 = j(T,s) \tag{3.1}$$

Utilizzando i risultati trovati riguardo i TCN possiamo scrivere:

$$V(t, c_{T,s}) = V(t, X_{T,s} - 1) = V(t, X_{T,s}) - V(t, 1_s) = V(t, X_{T,s}) - v(t, s) \tag{3.2}$$

Bisogna quindi stabilire il valore al tempo t di $X_{T,s}$.

Il problema è risolto dal teorema del titolo di reinvestimento secondo il quale: il valore in t del TCNi con scadenza in s e che paga l'importo indicizzato riferito al periodo (T,s) pari a $X_{T,s}$ relativo all'unità monetaria in T, è uguale al valore in t di un TCN che ha come valore nominale di rimborso in T l'unità monetaria.

Non proponiamo la dimostrazione formale che procede per assurdo. Ci limitiamo ad osservare che qualora al tempo t investissimo in un TCN che scade al tempo T con valore nominale pari ad 1 euro è evidente che reinvestendo l'importo unitario ottenuto in T fino ad s, al tempo s otteniamo un capitale che è proprio pari a $X_{T,s}$. Di conseguenza tale strategia di reinvestimento permette di replicare il flusso di cassa del TCNi e quindi il valore al tempo t del TCNi non può che essere uguale al valore al tempo t del TCN che scade in T. In formule:

$$V(t, X_{T,s}) = v(t, T) \tag{3.3}$$

E quindi:

$$V(t, c_{T,s}) = V(t, X_{T,s}) - v(t, s) = v(t, T) - v(t, s) \tag{3.4}$$

All'importo della cedola indicizzata può essere aggiunta una quantità σ che rappresenta lo spread (aggiunto per problemi di liquidità, di reputazione o altro legati all'emittente). Tale quantità è costante e nota alla data di valutazione t. Lo spread viene in genere calcolato in una quota percentuale rispetto al capitale di riferimento. Consideriamo nuovamente la cedola indicizzata unitaria che prevede la scadenza in s e la rilevazione del tasso in T ($t<T<s$) e spread σ , risulta:

$$V\left(t, c_{(T,s)} + \sigma\right) = v(t,T) - v(t,s) + \sigma v(t,s)$$

(3.5)

2.3 Titoli a tasso variabile

Un titolo a tasso variabile (TTV) può essere concepito come un titolo a cedola fissa nel quale le cedole fisse e note in t sono sostituite da cedole indicizzate con o senza spread. Consideriamo dapprima il caso di spread nullo. Le cedole sono indicizzate in modo puntuale e sincrono. Il titolo è emesso in 0 e ad ogni data k=1,2, …,m (il periodo è unitario) è previsto il pagamento di una cedola indicizzata calcolata sul capitale di riferimento C. La data di rilevazione del tasso variabile di una cedola pagata in k è coincidente con la data di pagamento della cedola precedente k-1, cioè il tasso è j(k-1,k).

Per passare dalla cedola indicizzata unitaria ad una con capitale di riferimento C è sufficiente moltiplicare per C. Quindi indicando con I_k la cedola pagata in k possiamo scrivere:

$$I_k = C \cdot c_{k-1,k} = C\left[\frac{1}{v(k-1,k)} - 1\right] = C \cdot j(k-1,k)$$

(3.6)

A scadenza m viene rimborsato il capitale nominale C oltre il pagamento della cedola.

Si indichi con **x** il flusso di pagamenti previsti dal TTV. Per valutare il contratto occorre distinguere i vari casi di posizione relativa dell'istante di valutazione t rispetto alle date dello scadenzario.

2.3.1 Primo Caso

Se t < 0 la data di valutazione precede la data di emissione, che è la prima delle date di rilevazione, nessuna delle cedole è ancora divenuta nota. Una rappresentazione grafica della situazione è la seguente:

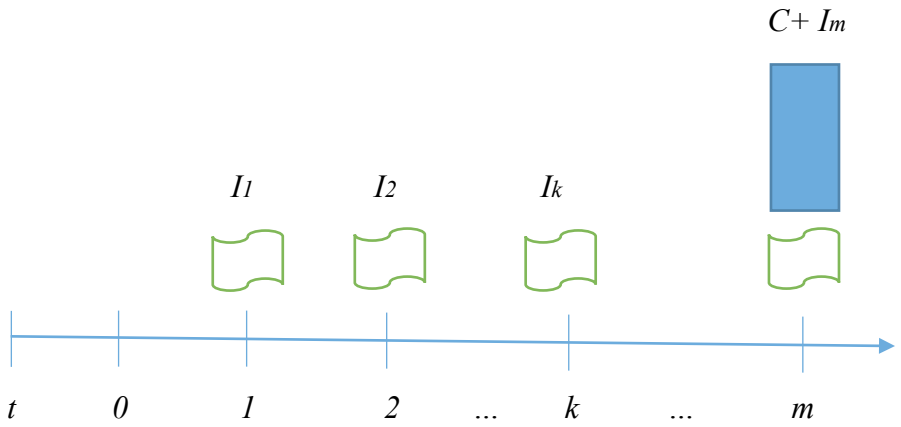

Figura 4

Il valore del TTV perfetto si ricava in base alle formule di valutazione sviluppate precedentemente e alla proprietà di linearità del prezzo. Si ha che:

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{m} V(t,I_k) + Cv(t,m) = \sum_{k=1}^{m} V\left(t, Cc_{k-1,k}\right) + Cv(t,m) =$$

$$= C\sum_{k=1}^{m}[v(t,k-1) - v(t,k)] + Cv(t,m)$$

3.7

Sviluppando i calcoli si dimostra che nella somma che compare dopo l'ultima uguaglianza tutti i fattori di sconto relativi a scadenze intermedie si semplificano e quindi:

$$V(t,x) = C[v(t,0) - v(t,m)] + Cv(t,m) = Cv(t,0)$$

3.8

Pertanto il TTV perfettamente indicizzato, valutato prima dell'emissione, è equivalente ad un TCN che paga il capitale nominale C alla data di emissione del TTV.

2.3.2 Secondo Caso

Nel caso in cui la data di valutazione t coincide con la data di emissione 0, che è anche la data di rilevazione della prima cedola, che è quindi nota in t e vale $I_1 = Cj(0,1)$, si può ripetere il ragionamento fatto per il caso t < 0, con l'accortezza di distinguere la prima cedola, che è già nota, dalle restanti m – 1 cedole aleatorie. Una rappresentazione grafica della situazione è la seguente:

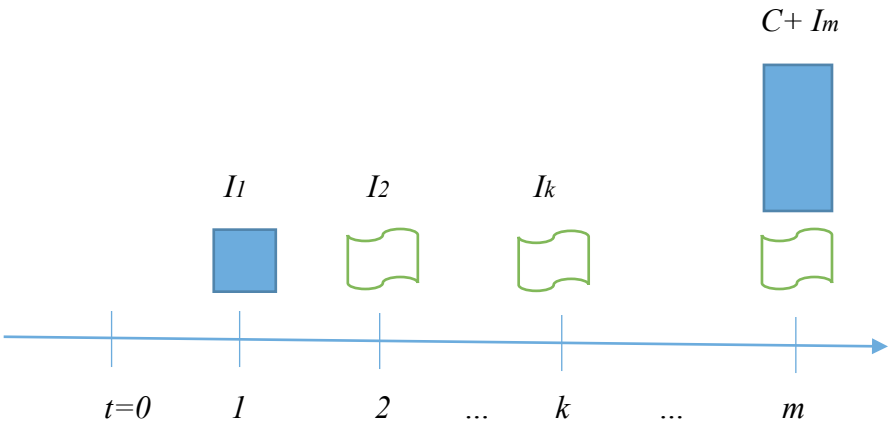

Figura 5

Si può ripetere il ragionamento fatto per il caso t < 0, con l'accortezza di distinguere la prima cedola, che è già nota, dalle restanti m – 1 cedole, che non sono ancora determinate e sono pagabili alle date 2, 3, …, m. Si ottiene che:

$$V(t,x) = I_1 v(t,1) + \sum_{k=2}^{m} V(t,I_k) + Cv(t,m) = I_1 v(t,1) + C[v(t,1) - v(t,m)] + Cv(t,m) =$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$(C + I_1)v(t,1) = C$$

Questo risultato descrive un'importante caratteristica: il TTV perfettamente indicizzato quota alla pari all'emissione.

2.3.3 Terzo Caso

Nel caso in cui la data di valutazione t è successiva alla data di emissione 0 (che è anche la data di rilevazione della prima cedola) e precedente a quella dello stacco della prima cedola, che è quindi nota in t e vale $I_1 = Cj(0,1)$, si può ripetere il ragionamento fatto per il caso t = 0. Una rappresentazione grafica della situazione è la seguente:

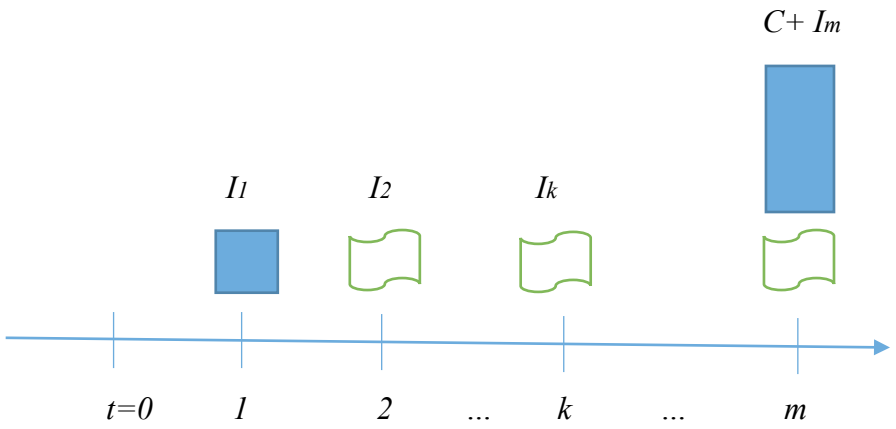

Figura 6

Ripetendo il ragionamento fatto per il caso t <=0, otteniamo:

$$V(t,x) = I_1 v(t,1) + \sum_{k=2}^{m} V(t,I_k) + Cv(t,m) = I_1 v(t,1) + C[v(t,1) - v(t,m)] + Cv(t,m) =$$

Sviluppando i calcoli avremo:

$$V(t,x) = (C + I_1)v(t,1)$$

Nei casi in cui sono staccate k cedole e la data di valutazione è compresa tra la data di stacco della cedola k e la data di stacco della cedola successiva la logica di valutazione rimane la stessa e si perviene a:

$$V(t,x) = (C + I_{k+1})v(t,k+1)$$

In generale la logica di valutazione è quella di individuare una strategia che replichi i flussi di cassa del titolo indicizzato. Ad esempio, considerando il secondo caso,

investendo alla data di emissione in un TCN un capitale C pari al capitale nominale del TTV e come scadenza la data di stacco della prima cedola del TTV, otteniamo come rimborso C più gli interessi che sono pari alla prima cedola del TTV . Reinvestendo il capitale C in un TCN con scadenza lo stacco della cedola successiva si ottiene come rimborso C più gli interessi pari alla seconda cedola del TTV. E' evidente quindi che ripetendo quest'operazione di roll-over fino alla scadenza m questa strategia replica il flusso di cassa del TTV. Di conseguenza il titolo indicizzato all'emissione deve valere C (cioè deve quotare alla pari). Quindi come punto di riferimento per la valutazione del TTV assumiamo il TCN che scade alla data di stacco della prima cedola che ha come valore di rimborso C più la prima cedola. E' facile applicare tale strategia di roll-over anche nel primo e terzo caso analizzati.

Qualora si considerasse anche uno spread, questo sarebbe noto e quindi si comporta come una rendita costante nota

Considerando lo spread, la valutazione al tempo t del TTV diviene, nei tre casi di posizione relativa dell'istante di valutazione rispetto alle date dello scadenzario, rispettivamente:

- $V(t,x) = Cv(t,0) + C\sigma \sum_{k=1}^{m} v(t,k)$

(3.7)

- $V(t,x) = C + C\sigma \sum_{k=1}^{m} v(t,k)$

(3.8)

- $V(t,x) = (C + I_1)v(t,1) + C\sigma \sum_{k=1}^{m} v(t,k)$

(3.9)

2.3.4 Scostamenti dall'indicizzazione perfetta

Rispetto al caso di indicizzazione perfetta possono esserci diversi tipi di scostamento. Nel mercato possiamo trovare contratti caratterizzati da:

- asincronie nel meccanismo di indicizzazione:
  - sfasamenti tra il periodo cui si riferisce il tasso indice e il periodo di godimento dell'interesse
  - tasso indice calcolato su una base temporale diversa rispetto al periodo di maturazione della cedola
- inefficienza del tasso indice in quanto il tasso utilizzato per l'indicizzazione è riferito a un mercato diverso da quello che determina l'attualizzazione;
- presenza dello spread.

Tra tutti questi fattori che generano degli scostamenti rispetto al caso ideale quelli che hanno maggiore influenza sono le asimmetrie e l'inefficienza del tasso indice.

3 *Caso applicativo di valutazione titolo indicizzato a tassi di interesse*

In questo capitolo, viene presentato un esempio applicativo. Attraverso le quotazioni dell'Euribor su scadenze fino ad un anno e dell'Eurirs fino a trent'anni verrà costruita una struttura di tassi zero coupon a pronti e a termine (uniperiodale). Infine attraverso questa struttura verrà presentata la valutazione di un CCT con spread con scadenza novembre 2019.

3.1 Euribor

EURIBOR è l'acronimo di Euro Interbank Offered Rate, definito come il tasso medio di offerta di un panel di istituti bancari primari dell'area euro su depositi domestici in euro. L'Euribor è calcolato come media semplice delle rilevazioni di ogni istituto, esclusi i valori rientranti nel 15% più basso e nel 15% più alto. Ha sostituito gli indici nazionali (per l'Italia il Ribor) dal 1° gennaio 1999. L'ora della quotazione del tasso Euribor, sulle scadenze a una settimana e da uno a dodici mesi, è fissata alle ore 11 in Europa centrale (le 10 di Londra).

Il grafico seguente mostra l'andamento dell'ultimo anno degli Euribor a 1 anno. [3]

Fig. 7

[3] Fonte: www.teleborsa.it

3.2 Eurirs

L'Eurirs (acronimo di Euro Interest Rate Swap, tasso per gli swap su interessi) è il tasso di riferimento, calcolato giornalmente dalla European Banking Federation, che indica il tasso di interesse medio al quale i principali istituti di credito europei stipulano swap a copertura del rischio di interesse.

L'Eurirs è spesso usato come tasso base per calcolare interessi fissi, come quello dei mutui. I tassi di riferimento sono stabiliti giornalmente. L'Eurirs dipende dalla durata del prestito, non dall'ammontare del capitale. Come gli altri tassi di interesse, in generale, maggiore è la durata del prestito, e maggiore sarà l'Eurirs da applicare.

L'Eurirs è la variante del tasso IRS (di cui abbiamo discusso nel capitolo precedente) calcolata per il mercato europeo, fra le 50 principali banche dell'UE.

Il grafico seguente mostra l'andamento storico riferito all'ultimo anno di un Eurirs a 1 anno. [4]

Figura 8

[4] Fonte: www.teleborsa.it

3.3 La curva zero-coupon ricavata dalle quotazioni del 07/12/15

Dal Sole 24 Ore sono stati estrapolati i dati relativi al tasso Euribor (su base 360 giorni) relativo a scadenze che vanno da 1 settimana fino ad un anno. Tali quotazioni sono riportate nella Tabella 1.

Di seguito è riportato il grafico che mostra l'andamento di queste quotazioni. Si è utilizzata l'interpolazione lineare per rappresentare i punti relativi a quotazioni intermedie non presenti sul mercato.

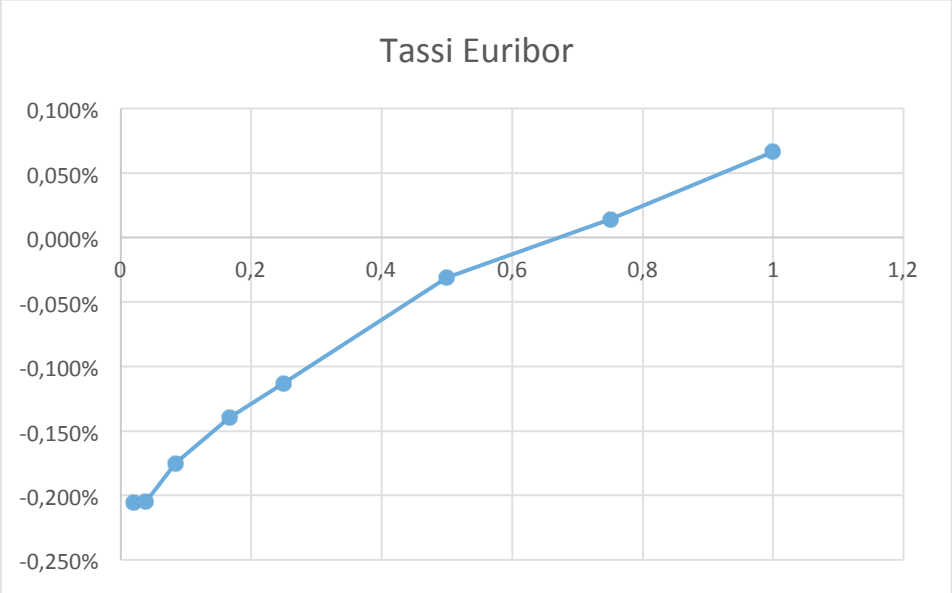

Figura 9

Sul sito www.teleborsa.it sono stati rilevati i dati relativi al tasso Eurirs (su base semestrale) relativi a scadenze da 1 a 30 anni. Tali tassi sono stati riportati su base annua attraverso la relazione dei tassi equivalenti. Le quotazioni sono riportate in Tabella 2.

Di seguito è riportato il grafico che mostra l'andamento di queste quotazioni. Si è utilizzata l'interpolazione lineare per rappresentare i punti relativi a quotazioni intermedie non presenti sul mercato.

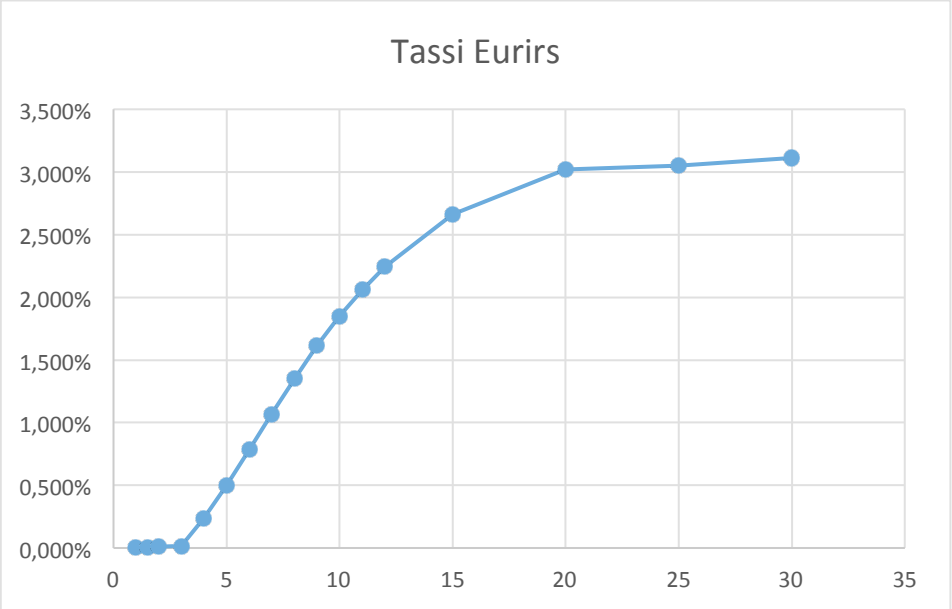

Figura 10

Attraverso la procedura del boot-strapping spiegata nel capitolo due si è pervenuti alla costruzione della struttura dei tassi swap zero-coupon evidenziata in grassetto. La Tabella 3 presenta anche i prezzi unitari utilizzati nella formula ricorsiva del boot-strapping, nonché le somme parziali degli stessi.

Fonte: Il Sole 24 ore quotazioni 07/12/2015

Quotazioni Euribor

Scadenze	Scadenze	Tassi Euribor
1 sett.	0,019	-0,206%
2 sett.	0,038	-0,205%
1m	0,083	-0,175%
2m	0,167	-0,140%
3m	0,25	-0,113%
6m	0,5	-0,031%
9m	0,75	0,014%
1a	1	0,066%

Tabella 1

Eurirs sem
0,002%
0,003%
0,005%
0,007%
0,118%
0,251%
0,391%
0,533%
0,673%
0,804%
0,921%
1,024%
1,116%
1,322%
1,499%
1,513%
1,545%

Quotazioni Eurirs

Scadenze	Tassi Eurirs
1	0,004%
1,5	0,006%
2	0,010%
3	0,014%
4	0,236%
5	0,503%
6	0,784%
7	1,069%
8	1,351%
9	1,614%
10	1,850%
11	2,058%
12	2,244%
15	2,661%
20	3,020%
25	3,049%
30	3,114%

Tabella 2

Calcolo ZC Swap

Scadenze (anni)	Tassi swap quotati	Tassi swap completati	**zc swap i(0,s)**	v(0,s)	*Somme parziali*
0,019			-0,206%		
0,038			-0,205%		
0,083			-0,175%		
0,167			-0,140%		
0,250			-0,113%		
0,500			-0,031%		
0,750			0,014%		
1	0,004%	0,004%	0,004%	1,0000	1,0000
1,5	0,006%	0,006%	0,008%	1	1,9998
2	0,010%	0,010%	0,015%	1	2,9995
3	0,014%	0,014%	0,019%	0,999	3,9990
4	0,236%	0,236%	0,297%	0,988	4,9872
5	0,503%	0,503%	0,610%	0,97	5,9573
6	0,784%	0,784%	0,931%	0,946	6,9032
7	1,069%	1,069%	1,255%	0,916	7,8196
8	1,351%	1,351%	1,575%	0,882	8,7021
9	1,614%	1,614%	1,878%	0,846	9,5479
10	1,850%	1,850%	2,150%	0,808	10,3563
11	2,058%	2,058%	2,393%	0,771	11,1272
12	2,244%	2,244%	2,613%	0,734	11,8610
13		2,383%	2,775%	0,701	12,5616
14		2,522%	2,942%	0,666	13,2279
15	2,661%	2,661%	3,116%	0,631	13,8591
16		2,733%	3,194%	0,605	14,4638
17		2,805%	3,276%	0,578	15,0418
18		2,877%	3,362%	0,551	15,5932
19		2,949%	3,452%	0,525	16,1180
20	3,020%	3,020%	3,546%	0,498	16,6161
21		3,026%	3,531%	0,483	17,0986
22		3,032%	3,517%	0,467	17,5661
23		3,038%	3,506%	0,453	18,0187
24		3,043%	3,496%	0,438	18,4571
25	3,049%	3,049%	3,488%	0,424	18,8814
26		3,062%	3,495%	0,409	19,2907
27		3,075%	3,503%	0,395	19,6854
28		3,088%	3,512%	0,38	20,0658
29		3,101%	3,523%	0,366	20,4322
30	3,114%	3,114%	3,534%	0,353	20,7850

Tabella 3

Di seguito sono riportati i grafici che mostrano l'andamento di queste quotazioni. Si è utilizzata l'interpolazione lineare per rappresentare i punti relativi a quotazioni intermedie non presenti sul mercato.

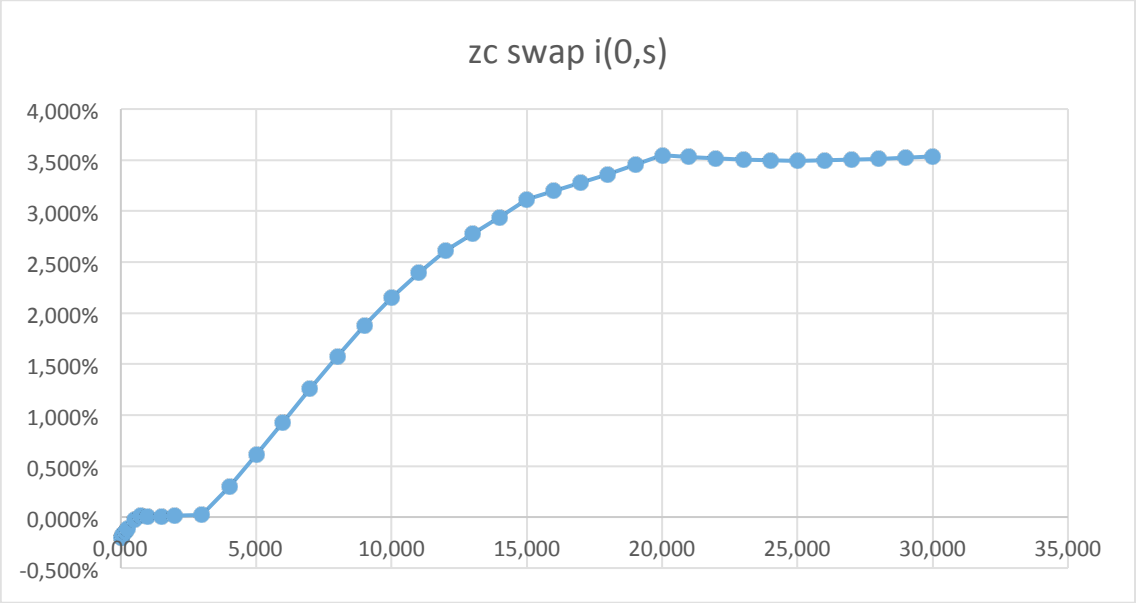

Figura 11

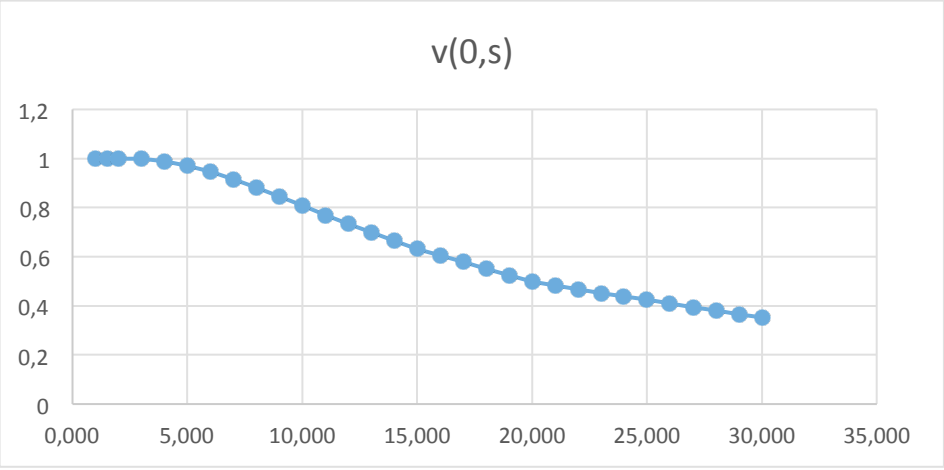

Figura 12

Dai tassi a pronti si sono ricavati anche quelli a termine uniperiodali.

Tassi a termine uniperiodali

Scadenze (anni)	**zc swap i(0,s)**	**tassi forward uniperiodali**
0,019	-0,206%	-0,206%
0,038	-0,205%	-0,204%
0,083	-0,175%	-0,149%
0,167	-0,140%	-0,105%
0,250	-0,113%	-0,059%
0,500	-0,031%	0,051%
0,750	0,014%	0,104%
1	0,004%	-0,026%
1,5	0,008%	0,016%
2	0,015%	0,036%
3	0,019%	0,026%
4	0,297%	1,135%
5	0,610%	1,873%
6	0,931%	2,553%
7	1,255%	3,218%
8	1,575%	3,847%
9	1,878%	4,330%
10	2,150%	4,638%
11	2,393%	4,853%
12	2,613%	5,065%
13	2,775%	4,737%
14	2,942%	5,143%
15	3,116%	5,575%
16	3,194%	4,379%
17	3,276%	4,602%

18	3,362%	4,835%
19	3,452%	5,082%
20	3,546%	5,344%
21	3,531%	3,222%
22	3,517%	3,240%
23	3,506%	3,258%
24	3,496%	3,277%
25	3,488%	3,296%
26	3,495%	3,661%
27	3,503%	3,710%
28	3,512%	3,760%
29	3,523%	3,813%
30	3,534%	3,867%

Tabella 4

Di seguito viene riportato il grafico che mette in relazione l'andamento dei tassi a pronti con quello dei tassi a termine uniperiodali.

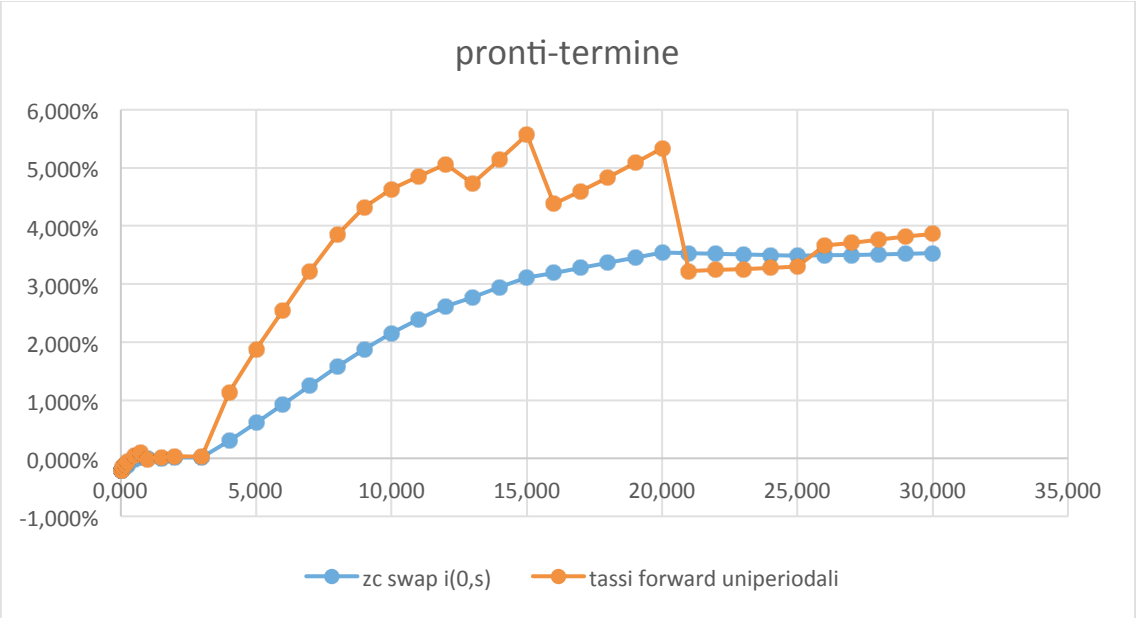

Figura 13

3.4 Valutazione di un CCT con spread

L'ultima parte di questo lavora presenta un'applicazione di come poter valutare un titolo con cedole indicizzate attraverso la curva dei tassi swap zero-coupon sopra determinata. Di seguito è riportata la scheda del titolo considerato.

SCHEDA PRODOTTO

Borsa Italiana

CARATTERISTICHE EMITTENTE		
EMITTENTE		
Repubblica Italiana		
CARATTERISTICHE EMISSIONE		
Codice ISIN	**Tipo Emissione**	**Garante**
IT0005009839	Titoli di Stato	-
Data di Godimento	**Data Stacco Prima Cedola**	**Data di Scadenza**
15/11/2013	15/05/2014	15/11/2019
Periodicità della Cedola	**Ammontare Emesso**	**Operatori a Sostegno della Liquidità**
Semestrale	3.250.000.000	-
Modalità di Rimborso		
In un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale.		
CARATTERISTICHE DEL PRODOTTO		
I titoli fruttano interessi variabili indicizzati al tasso Euribor a 6 mesi, rilevato 2 giorni lavorativi antecedenti l'inizio di ciascun periodo cedolare, maggiorato di uno spread pari allo 1,20%, pagabili semestralmente il 15 maggio e il 15 novembre di ciascun anno.		
CARATTERISTICHE NEGOZIAZIONE		
Denominazione		**Instrument ID**
CCT-EU TV EUR6M+1,20% NV19 EUR		758188
Mercato di Negoziazione	**Orari di Negoziazione**	**Clearing / Settlement**
MOT - DomesticMOT	8:00 - 9:00 asta d'apertura 9:00 - 17:30 negoziazione in continua	CC&G / Monte Titoli
Modalità di Negoziazione	**Base di Calcolo**	**Valuta di Negoziazione / Liquidazione**
Corso Secco	ACT/360	EUR / EUR
Lotto Minimo	**Tipo Struttura**	**Data Inizio Negoziazioni**
1.000	Tasso Variabile	31/03/2014

Figura 14

Per calcolare i prezzi unitari utilizzati come fattori di sconto è stato usato il tasso di interpolazione. Si sarebbero potute usare anche le interpolazioni ricavate dai v(0,s) oppure data una certa scadenza s+t' < s' (riferita ad un tasso swap zero coupon non presente in tabella; s e s' rappresentano le scadenze di prezzi unitari presenti in tabella), si sarebbe potuto calcolare v(0; s+t') come il prodotto tra v(0,s)*v(0,s,s+t') in cui v(0,s,s+t') è calcolato attraverso il tasso a termine i(0,s,s').

Lo spread monetario è stato calcolato moltiplicano il tasso spread per il valore nominale del titolo e dividendo per due in quanto le cedole sono semestrali.

La valutazione è stata fatta considerando le formule ricavate nel capitolo precedente:

$$V(t,x) = (C + I_{k+1})v(t,k+1) + C\sigma \sum_{h=k+1}^{m} v(t,h)$$

Tale valutazione è stata messa a confronto con il prezzo tel-quel che è stato ricavato aggiungendo al prezzo secco il rateo.

Fonte Dati Borsa Italiana quotazioni 7/12/2015

Descrizio	Ultimo	Cedola	Scadenza	Valuta	Rateo	spread	1,20%
Cct-Eu Tv Eur6m+1,2 % Nv19 Eur	103,61	0,601	15/11/2019	EUR	0,072648352		

t	date	i(0,s) per interpolazion	v(0,t)	Flusso Spread
	15/11/2015			
0	07/12/2015			
0,4383562	15/05/2016	-0,051%	1,0002246	0,6
0,9424658	15/11/2016	0,006%	0,9999406	0,6
1,4383562	15/05/2017	0,008%	0,999892	0,6
1,9424658	15/11/2017	0,014%	0,9997243	0,6
2,4383562	15/05/2018	0,017%	0,9995951	0,6
2,9424658	15/11/2018	0,018%	0,9994571	0,6
3,4383562	15/05/2019	0,653%	0,9778788	0,6
3,9424658	15/11/2019	0,314%	0,9877327	0,6

Scadenze (anni)	zc swap i(0,s)
0,019	-0,206%
0,038	-0,205%
0,083	-0,175%
0,167	-0,140%
0,250	-0,113%
0,500	-0,031%
0,750	0,014%
1,000	0,004%
1,500	0,008%
2,000	0,015%
3,000	0,019%
4,000	0,297%

Valore attuale spread	€	4,78
Valore attuale TTV senza spread	€	100,62
Stima valore attuale	€	105,40

> 103,683 corso tel-quel

titolo sottostimato

Ne deriva che il prezzo tel-quel quotato del CCT è sottostimato in quanto inferiore al prezzo stimato con la curva dei tassi swap zero-coupon.

Se i prezzi unitari ricavati dai tassi swap zero-coupon rappresentassero realmente prezzi quotati sul mercato di zero-coupon allora si creerebbero opportunità di arbitraggio. Per ottenere un profitto privo di rischio infatti basterebbe acquistare il CCT e "vendere allo scoperto" la strategia di roll-over che replica il CCT.

Un investitore potrebbe anche pensare di comprare il titolo ipotizzando di poter trarne un profitto dalla sua vendita nel momento in cui il titolo torni ad essere stimato coerentemente con la struttura dei tassi ricavata.

4 Conclusioni

Da diversi anni sono diffusi contratti obbligazionari che pagano degli importi che dipendono dall'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Rientrano nella più vasta categoria dei contratti indicizzati ed il parametro di indicizzazione è un tasso di interesse. I contratti indicizzati pagano degli importi che sono aleatori alla data di stipula del contratto e che diverranno noti a date future; il meccanismo di indicizzazione, cioè la regola che determinerà l'entità del pagamento, è tuttavia stabilito contrattualmente. I principali esempi di contratti indicizzati a tassi di interesse sono i titoli a tasso variabile, di cui i Certificati di Credito del Tesoro (CCT) sono l'esempio più importante.

In questo lavoro abbiamo valutato un CCT considerando un'indicizzazione puntuale (l'istante di inizio del periodo di indicizzazione coincide con la lettura del tasso di interesse) e sincrona (il pagamento dell'importo avviene alla fine del periodo di indicizzazione). La logica di valutazione è stata quella di individuare una strategia che replichi i flussi di cassa del titolo indicizzato e quindi valutarne il valore ad un certo tempo t considerando che sul mercato non si possano creare opportunità di arbitraggio. In particolare il titolo in esame aveva anche uno spread in forma percentuale rispetto al capitale nominale.

Rispetto al caso di indicizzazione perfetta possono esserci diversi tipi di scostamento. Nel mercato possiamo trovare contratti caratterizzati da:

- asincronie nel meccanismo di indicizzazione:
- inefficienza del tasso indice in quanto il tasso utilizzato per l'indicizzazione è riferito a un mercato diverso da quello che determina l'attualizzazione
- presenza dello spread

Tra tutti questi fattori che generano degli scostamenti rispetto al caso ideale quelli che hanno maggiore influenza sono le asimmetrie e l'inefficienza del tasso indice.

Per attualizzare i flussi sono stati considerati dei fattori di sconto ricavati dalla struttura per scadenza dei tassi che, a sua volta, è stata ricavata con la procedura del boot-strapping. In particolare si è presentato un modello per la misurazione della struttura per scadenza dei tassi considerando dapprima un mercato perfetto per poi riferirci ai mercati reali che confermano solo con un certo grado di significatività le ipotesi del mercato perfetto. Si è costruita la struttura dei tassi considerando i rendimenti in regime composto di titoli zero coupon. L'ostacolo più rilevante è rappresentato dalla non disponibilità di titoli zero coupon su un ampio spettro di maturity dai quali ricavare direttamente la struttura dei tassi. Si è pervenuti all'utilizzo dei tassi swap per la determinazione dei tassi zero-coupon dopo aver analizzato le debolezze e le criticità di una misurazione effettuata sulla base dei tassi di rendimento effettivi a scadenza (anche nella versione in cui si considera la duration e non la maturity del titolo come scadenza a cui riferire il tasso di rendimento).

La struttura per scadenza non spiega il perché della forma della curva dei tassi. I tassi a termine impliciti nella curva considerano quello che oggi è l'equilibrio ma possono essere ritenuti solo un'ipotesi su quelle che saranno le quotazioni future dei tassi a pronti. Altri modelli fanno ipotesi sulle quotazioni future sulla base di modelli stocastici nei quali si assume che lo stato del mercato sia completamente determinato da un numero limitato di variabili base, le quali evolvono in modo non prevedibile. Altri modelli ancora, di natura parametrica, cercano di determinare i tassi sulla base dei prezzi effettivamente osservati sul mercato.