

DIPARTIMENTO DI IMPRESA E MANAGEMENT

Cattedra di Matematica Finanziaria

L'EVOLUZIONE DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA:

DALLA DEFINIZIONE CLASSICA

ALLE TEORIE SEMI-DETERMINISTICHE

RELATORE

Chiar.ma Prof.ssa Gabriella Foschini

CANDIDATA

Raffaella Tramontano

Matr. 179611

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Indice

Introduzione	3
Capitolo 1 – Teoria dell’immunizzazione finanziaria	6
1.1. L’evoluzione della teoria dell’immunizzazione finanziaria: cenni storici..	6
1.2. Strumenti finanziari: le obbligazioni.....	9
1.3. Valore dello strumento finanziario: calcolo del prezzo di un titolo.....	11
1.4. Indici di rendimento: TIR e struttura per scadenza dei tassi d’interesse ..	13
1.5. Un indice temporale: la Duration.....	15
1.6. Indice di Rischio: la Volatility	19
1.7. La Convexity.....	21
Capitolo 2 – L’immunizzazione semi-deterministica: «shift additivi»	23
2.1. La definizione classica	23
2.2. Il teorema di Fisher e Weil: copertura di uscita singola	25
2.3. Le implicazioni del teorema di Fisher e Weil	29
2.4. Il teorema di Redington : copertura di uscite multiple.....	32
2.5. L’indice di dispersione: variabile strategica	36
Capitolo 3 – Le Teorie semi-deterministiche: «shift convessi»	38
3.1. Teorema generale di immunizzazione per « <i>shift</i> additivi»	38
3.2. L’immunizzazione semi-deterministica: l’ipotesi di « <i>shift</i> qualsiasi» ..	44
3.3. Teorema di immunizzazione a minimo rischio: Fong e Vasicek.....	46
Capitolo 4 – Un caso pratico di immunizzazione.....	55
4.1 Costruzione del portafoglio.....	55
4.2 Costruzione del portafoglio: copertura di uscite multiple.....	63
4.3 Teorema di Redington.....	65
4.4 Teorema di Fong e Vasicek.....	66
Conclusioni	71
Bibliografia.....	76

Introduzione

L'evoluzione della letteratura finanziaria nel XX secolo è stata principalmente indirizzata a creare una relazione tra la matematica finanziaria e il calcolo delle probabilità.

Già nel 1900, infatti, Luis Bachelier nella sua tesi di dottorato “*La théorie de la spéculation*”¹ discussa all'Università Sorbona, aveva come obiettivo quello di studiare il mercato dei titoli per stabilire la legge di probabilità della variazione di prezzo nell'istante da egli analizzato, partendo da un'importante ipotesi, ovvero che i prezzi dei titoli seguissero un moto browniano².

L'intuizione di Bachelier, seppur valida, non fu compresa dai suoi contemporanei e venne accantonata.

La stessa sorte fu comune a tanti altri uomini, professori o illustri pensatori come: Frederick R. Macaulay, ideatore della Duration; Harry M. Markowitz, con i suoi studi sulla diversificazione di un portafoglio; William F. Sharpe, con gli indicatori di performance del portafoglio; Fisher Black, Robert C. Merton e Myron S. Scholes, noti per la *Option Pricing Theory*.

E ancora: Redington che ha avviato l'impostazione classica di immunizzazione, fino a Fisher e Weil che definirono l'immunizzazione finanziaria come l'insieme di tecniche studiate per consentire l'equilibrio tra le poste dell'attivo e del passivo di un portafoglio.

¹ Bachelier L., “Théorie de la spéculation. Théorie mathématique du jeu”. Parigi: Edition Jacques Gabay, 1995.

² La locuzione “moto browniano” indica il moto disordinato e del tutto casuale delle particelle in un fluido. Deriva la sua denominazione dal botanico scozzese Robert Brown che per primo osservò tale fenomeno nel 1827.

Queste intuizioni vengono, ancor oggi, utilizzate come base per la costruzione di una teoria «ad hoc» dei contratti *interest rate sensitive*, definiti come beni derivati dai titoli di base, il cui valore dipende dalle caratteristiche contrattuali e dalle proprietà finanziarie dei titoli.

Inoltre, tutte queste teorie partono dalla fondamentale condizione per la quale le variazioni che influiscono sulla struttura per scadenza dei tassi d'interesse si ripercuotono sul valore delle poste sia attive che passive di un ipotetico portafoglio di un investitore; sono, quindi, considerate come diverse tecniche utili alla risoluzione di svariate problematiche di immunizzazione finanziaria.

In questo elaborato cercheremo di racchiudere in una formulazione unitaria tutta la Teoria dell'immunizzazione finanziaria.

Nella prima parte dell'elaborato andremo a sintetizzare l'evoluzione storica dell'immunizzazione finanziaria e a spiegare tutti gli strumenti finanziari che sono utili alla comprensione dell'elaborato; nella seconda parte andremo a prendere in considerazione perturbazioni della struttura dei tassi che dipendono da una variabile «non nota» e determineremo le condizioni generali e i principali teoremi che ci consentono di verificare in che modo è possibile immunizzare un portafoglio esposto a due classi di perturbazioni.

Il primo caso che studieremo sarà quello in cui si ipotizza che la variabile sia un numero reale, ovvero studieremo, servendoci del Teorema di Fisher e Weil, le perturbazioni semideterministiche univariate; il secondo caso che analizzeremo sarà quello in cui si ipotizza che la variabile sia un vettore di dimensione finita maggiore di uno o infinita, quindi, attraverso il teorema di Redington e il lavoro di Fong-Vasicek, studieremo le perturbazioni semideterministiche multivariate.

In conclusione sarà effettuato un confronto tra le diverse tipologie di immunizzazione analizzate e tra i diversi risultati a cui si perviene con l'utilizzo dei teoremi dimostrati.

Capitolo 1 – Teoria dell’immunizzazione finanziaria

1.1. L’evoluzione della teoria dell’immunizzazione finanziaria: cenni storici

L’immunizzazione finanziaria è intesa come un metodo con il quale rendere, il più possibile «simili», le distribuzioni temporali dell’attivo e del passivo rispetto alla distribuzione aleatoria della struttura dei tassi d’interesse. In tal modo i flussi di attivo e passivo risulteranno ugualmente esposti alla variazione della struttura a termine considerata per il calcolo dei valori attuali dei flussi; dunque, il valore netto del portafoglio risulterà invariato e l’investitore sarà considerato solvibile in ogni istante, indipendentemente dalle perturbazioni possibili.

Come accennato nella parte introduttiva di questo elaborato, precursore della Teoria dell’immunizzazione finanziaria fu Luis Bachelier (1900) che con il suo lavoro ci conduce a numerosi matematici ed economisti come Wiener (1923), Kolmogorov (1931), Ito (1950), Black e Scholes e Merton (1973).

Norbert Wiener (Columbia, 26 novembre 1894- Stoccolma, 18 marzo 1964) matematico e statistico conosciuto principalmente per lo studio effettuato sul calcolo delle probabilità e le importanti innovazioni introdotte nell’ambito della teoria dell’informazione, viene definito il padre della cibernetica moderna. Wiener diede vita ad un processo stocastico gaussiano in un tempo continuo con incrementi indipendenti utilizzato per modellizzare il moto browniano e diversi altri fenomeni nell’ambito della matematica, della fisica e della finanza.

Anche Andrej Nikolaevic Kolmogorov fu influenzato da Bachelier. Il matematico russo è, infatti, l’ideatore del processo stocastico markoviano, in cui la probabilità di transizione che determina il passaggio ad uno stato

di sistema dipende unicamente dallo stato di sistema immediatamente precedente (proprietà di Markov) e non da come si è giunti a tale stato (questo aspetto infatti non è descritto dal processo markoviano).

Francis Sowerby Macaulay (1862-1937), matematico inglese al quale si attribuisce la definizione di Duration, ha dato un importantissimo contributo allo sviluppo della matematica finanziaria con il suo lavoro “*The Algebraic Theory of Modular System*”, pubblicato nel 1916.

Se invece facciamo riferimento al periodo storico a ridosso della seconda guerra mondiale, dobbiamo sicuramente parlare di Kiyoshi Ito, un giapponese che in numerosi articoli ha sviluppato le sue idee sull’analisi stocastica. Ito viene definito il fondatore della moderna Teoria delle equazioni differenziali stocastiche. L’oggetto principale dei suoi lavori è l’integrale di Ito e tra i risultati derivanti dalle sue analisi è da ricordare il Lemma di Ito, che facilita la comprensione di eventi casuali e per questo ampiamente utilizzato in matematica finanziaria.

“ In strutture matematiche perfettamente costruite, i matematici trovano lo stesso tipo di bellezza che altri trovano in brani musicali incantevoli o in architetture magnifiche³”.

Harry Markowitz, economista statunitense vincitore, insieme a Merton Miller e William Sharpe, del premio Nobel per l’economia nel 1990, sviluppò nel 1952 la *Portfolio Theory*. La teoria, basata sul concetto di diversificazione e compensazione, indica in che modo misurare il rischio legato a diversi strumenti finanziari e come poterli combinare in un portafoglio per ottenere il rendimento massimo. Si basa sulla compensazione dei rischi stessi: il rischio legato all’aleatorietà del valore dei titoli sul mercato può essere tenuto sotto controllo selezionando un

³ K.Ito, (1998) My Sixty Years in Studies of Probability Theory: discorso di accettazione del Kyoto Prize in Basic Sciences.

numero «sufficientemente grande» di titoli con rendimento non correlato tra loro.

“The lower correlation among security return, the greater impact of diversification⁴”.

I limiti della teoria appena descritta sono legati alla eventuale presenza di portafogli composti da contratti *interest rate sensitive*, poiché, il valore dei flussi che lo compongono dipende dal tasso di interesse e dalle sue variazioni e, quindi, i rischi sono altamente correlati. Proprio in riferimento a questa tipologia di portafoglio che viene utilizzato per la prima volta il termine “immunizzazione” da Frank Redington, attuario inglese conosciuto per la Teoria della *interest rate immunization*.

Il teorema sviluppato da Redington (1952) aveva come principale obiettivo quello di fornire una tecnica adeguata per allineare il valore di attivo e passivo; negli anni ‘70, in seguito a forti oscillazioni dei tassi d’interesse la Teoria dell’immunizzazione ebbe larga diffusione ed iniziò ad essere applicata anche ad altri casi, come fondi pensione, banche d’affari, società d’investimento.

Un’analisi in quest’ottica fu effettuata anche da R.A. Fisher, statistico e matematico inglese (1890-1962), e da A. Weil, matematico francese (1906-1998), che introdussero un’importante ipotesi nello sviluppo del loro teorema⁵, ovvero il verificarsi di *shift* additivi. Il teorema da loro proposto ha come obiettivo il superamento del principio di selezione dei titoli la cui *maturity* coincide con l’orizzonte temporale considerato (*maturity matching*).

⁴ Modigliani F., Pogue G. A., (1974) *“An Introduction to Risk and Return, Financial Analyst journal”*.

⁵ Il teorema è sviluppato nel lavoro di Fisher L., Weil R. W., *“Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategie”*, Journal of Business, Vol.44, the University of Chicago Press.

Altri lavori presenti in letteratura analizzano l'immunizzazione da un punto di vista più generale, andando a soffermarsi sulla presenza di perturbazioni multivariate, ovvero dipendenti da un numero finito o infinito di parametri. Esemplare in questo ambito è il modello proposto da H. Fong e O. Vasicek⁶ che avremo modo di descrivere successivamente nell'elaborato.

Alla luce di quanto appena detto, le principali variabili da descrivere ai fini di questo elaborato sono il flusso di cassa generato dalle operazioni attive, il flusso del passivo e la struttura per scadenza dei rendimenti.

Il metodo da utilizzare per giungere ad immunizzare può essere strutturato solo se si specifica il modello evolutivo della struttura a termine dei tassi, che ci fornisce importanti indicazioni sul tipo di atteggiamento che l'investitore assume rispetto all'incertezza sul futuro.

Proseguiremo, poi, con l'analisi di tutti gli strumenti, gli indici e le grandezze necessarie alla comprensione di quanto verrà esposto.

1.2. Strumenti finanziari: le obbligazioni

Le obbligazioni sono titoli, generalmente emessi dalle imprese e dallo Stato, rappresentativi di un rapporto tra un emittente, che si definisce debitore, e un investitore, detto creditore.

A fronte del pagamento del prezzo d'acquisto, l'emittente si impegna a:

- remunerare il capitale tramite il versamento di cedole, ovvero flussi di cassa periodici di importo prestabilito;
- rimborsare a scadenza il valore nominale del titolo.

Tali strumenti finanziari possono essere classificati in base a diversi criteri:

⁶ Fong H. G., Vasicek O. A., "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization, Journal of Finance, 1984; Vol.39, n.5.

- in funzione dell'ente emittente, a seconda che vengano emessi da Stato, Enti Pubblici, imprese, etc.;
- in base alla durata:
 - obbligazioni a breve termine (scadenza < 12 mesi);
 - obbligazioni a medio termine (scadenza da 1 a 5 anni);
 - obbligazioni a lungo termine (scadenza > 5 anni);
- in funzione della presenza e della tipologia di cedole, distinguendo tra obbligazioni *zero coupon* (prive di cedole) e obbligazioni con cedola fissa o indicizzata.

Ai fini di questo elaborato andremo a tenere in particolare considerazione:

- Buoni del Tesoro Poliennali (BTP), cioè titoli di debito a lungo termine (di durata 3, 5, 10, 15 o 30 anni) garantiti dallo stato, che offrono una cedola semestrale fissa e vengono emessi con meccanismo ad asta marginale con scadenza quindicinale;
- Certificati del Tesoro Zero Coupon, titoli di debito a tasso fisso con durata generica di 24 mesi, emessi sotto la pari e che non garantiscono il versamento di cedole, il cui rendimento è calcolato come differenza tra il prezzo di emissione e di acquisto.

Con l'accentuarsi del carattere speculativo del mercato obbligazionario si è sentita la necessità di determinare e valutare le variazioni nei prezzi dei titoli a seguito delle oscillazioni dei tassi per far fronte al cosiddetto rischio d'interesse che scaturisce da tale fenomeno.

Il rischio d'interesse è l'esposizione a variazioni sfavorevoli dei tassi che modificano il valore dei contratti finanziari in essere⁷.

Tale rischio, poiché legato all'aleatorietà del valore dei flussi che compongono il portafoglio, può essere controllato attraverso il principio di

⁷ Principi per la gestione del rischio di tasso d'interesse, Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, Basilea 1997.

compensazione, ovvero costruendo un portafoglio che mantenga costantemente bilanciate le attività e le passività, con operazioni non correlate.

Per la teoria dell'immunizzazione si prendono in esame contratti *interest rate sensitive*, i quali flussi dipendono dal tasso d'interesse; i rischi, al contrario di quanto la teoria ipotizza, sono altamente correlati. Infatti, non esiste un unico comportamento da tenere di fronte all'incertezza, ma si può decidere di procedere in modo "adeguato e corretto", considerando, cioè, tutte le possibilità e, in base alla probabilità connessa ad ogni singola fattispecie, esaminando i pro e i contro di ogni decisione possibile. In alternativa, si potrebbe utilizzare una metodologia "semplicistica e distorta", scegliendo *ex ante* un solo scenario e assumendo questo come certo. In ogni caso si sta facendo riferimento alle teorie semi-deterministiche, basate sul concetto di Duration.

1.3. Valore dello strumento finanziario: calcolo del prezzo di un titolo

Partendo dalla fondamentale Teoria del Valore Temporale del denaro, secondo la quale "*un euro oggi vale più di un euro domani*" per l'immediata possibilità di investire l'euro nel momento attuale, ricavandone in futuro un rendimento, giustifichiamo l'esistenza del tasso d'interesse, che coincide proprio con il compenso per il differimento del consumo; ciò giustifica anche perché nella realtà gli indici finanziari siano espressi in termini di valore attuale.

Dato un importo x disponibile in epoca s , il suo valore attuale $W(t, x_s)$, calcolato in data t , si ottiene semplicemente moltiplicando x per un fattore di attualizzazione $v(t, s)$ compreso tra 0 e 1:

$$W(t, x_s) = x_s v(t, s) \quad (1.1)$$

Il fattore di attualizzazione $v(t,s)$, ipotizzando di lavorare con il regime della capitalizzazione composta, è il reciproco di 1 più un tasso d'interesse, $i(t,s)$, e rappresenta il valore attuale in t di un euro esigibile all'epoca s :

$$v(t,s) = \frac{1}{[1 + i(t,s)]^{(s-t)}} \quad (1.2)$$

In questo caso abbiamo utilizzato l'esempio più semplice che rappresenta un solo importo disponibile in un'epoca futura. Se vogliamo, invece, calcolare il valore attuale di un insieme di importi esigibili in date diverse, possiamo avvalerci di un'importante proprietà del valore attuale: la proprietà dell'additività. Ovvero, gli importi futuri, dato che sono espressi al valore corrente, sono omogenei e sommabili tra loro:

$$W(t,x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{1}{(1+i)^{(t_k-t)}} \quad (1.3)$$

Per una maggiore nitidezza possiamo scomporre i flussi, andando così ad individuare tutte le componenti che incidono sul valore dell'obbligazione:

- CEDOLE (assimilabile a rendita di n rate, calcolabile con la (2));
- FLUSSO FINALE (rimborso a scadenza, calcolabile con la (1)).

Sommando le due parti otteniamo quello che viene comunemente definito «prezzo Tel-quel», ovvero il valore a cui un titolo viene negoziato sul mercato. Le quotazioni vengono, invece, espresse a corso secco, ottenuto sottraendo al prezzo Tel-quel un rateo, che identifica la parte di cedola maturata dal momento del versamento dell'ultima rata e la data in cui il titolo viene valutato. Quindi, abbiamo:

Corso secco = prezzo Tel-quel – rateo.

1.4. Indici di rendimento: TIR e struttura per scadenza dei tassi d'interesse

Uno strumento particolarmente importante ai fini della valutazione di un'obbligazione è il rendimento individuato da quel tasso che misura l'incremento di capitale investito in un'operazione finanziaria rispetto alla sua durata, cioè il Tasso Interno di Rendimento (TIR), anche detto *Internal Rate of Return* (IRR).

Il tasso interno di rendimento è quel tasso che eguaglia il valore attuale di una rendita alla somma dei valori attuali delle singole rate; spesso viene anche utilizzato come modo alternativo per esprimere i prezzi dei titoli obbligazionari ed è un importante strumento per la valutazione di un progetto d'investimento.

Il TIR ci consente di individuare le variazioni avute sui rendimenti dei titoli, che possono essere indotte da tre fattori:

- MATURITY, ossia il periodo in cui l'investitore può godere dei flussi di cassa generati dall'investimento;
- RISCHIO di DEFAULT dell'emittente, cioè la possibilità che l'emittente sia inadempiente;
- TASSO “*RISK FREE*”, il quale identifica l'andamento del mercato.

Si nota che, per alcuni titoli, principalmente quelli emessi dallo Stato o da altre istituzioni, il rischio di *default* legato all'investimento è molto basso o addirittura nullo⁸; in questo caso possiamo esprimere il rendimento solo in funzione della *maturity*. Otterremo una curva che relaziona ad ogni scadenza un rendimento atteso che prende in considerazione la parte “*risk free*”.

⁸ Oggi tutte le considerazioni riguardo le strutture dei rendimenti dei titoli, in particolare quelli governativi, seguono la logica dello *spread*. Per spiegare quanto appena detto, ad esempio, possiamo dire che la curva dei rendimenti italiani è al di sopra di quella tedesca e ciò è indicativo del maggior rischio legato ai titoli rappresentativi del debito italiano, quindi del maggior rischio supportato dai detentori di tali titoli. Infatti lo *spread* è lo scarto tra le due curve prese in considerazione. Nadotti L., Porzio C., Previati D., *Economia degli intermediari finanziari*. Milano: MacGraw-Hill, 2014.

Tale curva è definita «struttura per scadenza dei tassi d'interesse» e può essere:

- CRESCENTE, se i tassi a lungo termine sono maggiori di quelli a breve termine;
- DECRESCENTE, se i tassi a breve termine sono maggiori di quelli a lungo termine;
- PIATTA (o *flat*), se i tassi di diverse epoche temporali coincidono.

Esistono eccezioni in cui la struttura non assume nessuna delle forme descritte perché avrà tratti con pendenze diverse.

Per spiegare in che modo si muove la curva e, quindi, come è possibile formulare teorie sulle aspettative razionali rispetto ai rendimenti degli investimenti, evidenziamo alcune regolarità utili:

- tassi su titoli con *maturity* diversa tendono a muoversi nella stessa direzione;
- la curva dei rendimenti è tendenzialmente inclinata positivamente;
- quando i tassi a breve termine sono bassi la curva tende ad essere inclinata positivamente e viceversa, quando i tassi a breve sono alti la curva è inclinata negativamente.

Le regolarità suddette sembrano essere spiegate dalla Teoria delle aspettative non distorte⁹, secondo la quale in un dato istante temporale la curva dei rendimenti riflette le aspettative del mercato sui tassi a breve termine. In altre parole, alla base di tale teoria c'è l'intuizione per cui il rendimento di un titolo a lungo termine è uguale alla media dei rendimenti di titoli a breve termine, considerando lo stesso arco temporale.

L'equazione matematica che spiega questa teoria è:

$$[1 + i(t, n)]^{n-t} = [1 + i(t, s)]^{s-t} [1 + i(s, n)]^{n-s} \quad (1.4)$$

⁹ Nadotti L., Porzio C., Previati D., *economia degli intermediari finanziari*. Milano: MacGraw-Hill, 2014.

Con questa equazione possiamo spiegare perché i tassi, anche se con scadenze diverse, muovono nella stessa direzione e perché, se i tassi a breve sono bassi, la curva è inclinata positivamente. Ultimo punto che ci rimane da chiarire è perché la curva sia generalmente inclinata positivamente. La spiegazione ci viene fornita dalla Teoria del premio per la liquidità¹⁰, secondo la quale gli investitori sono disposti ad investire in titoli a lungo termine se ad essi viene offerto un rendimento più elevato, come premio per l'incertezza del valore futuro di un titolo.

1.5. Un indice temporale: la Duration

Gli indicatori temporali consentono di valutare un titolo in relazione alla sua durata e alla vita residua. Finora abbiamo tenuto in considerazione esclusivamente la *maturity*, ma da questo momento in poi ci serviremo della *duration*.

Il concetto di *duration* viene per la prima introdotto da F.R. Macaulay nel suo lavoro "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices In the United States since 1856*", nel quale analizzava i movimenti dei tassi e i prezzi delle azioni dal 1856 in USA. L'economista statunitense sosteneva, infatti, che per esaminare le relazioni tra tassi a lungo o breve termine bisognerebbe avere una adeguata misura della "*longness*"; la Duration verrà, appunto, da lui utilizzata per rappresentare l'essenza del tempo in un contratto finanziario.

E' importante ricordare che la *maturity*, come lo stesso Macaulay sostiene nel succitato lavoro, non è altro che la data dell'ultimo e finale pagamento e non ci fornisce nessuna indicazione sull'entità degli altri pagamenti o sulla

¹⁰ Nadotti L., Porzio C., Previati D., *Economia degli intermediari finanziari*. Milano: MacGraw-Hill, 2010.

data in cui vengono effettuati; dunque, è chiaro come la *maturity* sia solo uno dei fattori della *duration*. Quest'ultima, infatti, è la media ponderata delle scadenze di un titolo, che utilizza come pesi il valore attuale dei flussi di cassa; cioè misura il tempo necessario a recuperare l'investimento iniziale, perciò finanziariamente si definisce l'epoca ottima di smobilizzo. Oltre a costituire una misura temporale, essa ha anche un significato strettamente economico, cioè rappresenta l'elasticità del valore di attivo e passivo a variazioni dei tassi d'interesse.

Macaulay stesso definisce la *duration* in questo modo:

*“Duration of a bond is an average of the Durations of the separate single payment loans into which the bond may be broken up. To calculate this average the Duration of each individual single payment loan must be weighted in proportion to the size of the individual loan”*¹¹.

Indicando con:

F = valore facciale del titolo

I = cedola semestrale

P = prezzo del titolo

n = numero di semestri fino alla scadenza

R = fattore semestrale di attualizzazione

e ipotizzando che i flussi siano periodici di periodo 1, la *duration* viene così formulata :

$$D = \frac{\frac{I}{R} + \frac{2I}{R^2} + \frac{3I}{R^3} + \dots + \frac{nI}{R^n} + \frac{nF}{R^n}}{\frac{I}{R} + \frac{I}{R^2} + \frac{I}{R^3} + \dots + \frac{I}{R^n} + \frac{F}{R^n}} \quad (1.5)$$

¹¹ Le citazioni e le formule utilizzate in questo paragrafo sono tratte dal lavoro di Macaulay F., *“Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856”*. Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research, 1938.

Per poter capire a pieno l'importanza e l'utilità della *duration* dobbiamo analizzare le sue numerose caratteristiche:

- 1) la *duration* è compresa tra t_1 , epoca in cui abbiamo il primo flusso, ed n , cioè la *maturity* del titolo; ne consegue che la media delle scadenze non può mai risultare al di fuori dei limiti nei quali viene calcolata;
- 2) relazionando la *duration* con il tasso d'interesse, Macaulay riscontrò “*insuperabile difficulties connected with any attempt to discover the real rates of discount for each half-yearly period in the future*”¹².

Per risolvere queste difficoltà viene utilizzata una forma semplificata della *duration*:

$$D(t, x) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t)x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)} \quad (1.6)$$

dove:

x_k = flussi di cassa con diverse scadenze t_k

$k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$v(t, t_k)$ = fattore di attualizzazione.

Esplicitando la formula della struttura per scadenza dei tassi a pronti nel periodo considerato, avremo:

$$D(t, x) = \frac{\sum_{k=1}^n kx_k [1 + i(t, t_k)]^{-k}}{\sum_{k=1}^n x_k [1 + i(t, t_k)]^{-k}} \quad (1.7)$$

Ipotizzando che la struttura dei tassi sia piatta, ovvero utilizzando il tasso interno di rendimento nel calcolo del fattore di attualizzazione, otteniamo la *flat yield curve Duration*, con la quale si mette in luce un'altra importante

¹² Macaulay F., “*Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*”. Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research, 1938.

caratteristica del nostro indicatore temporale, ovvero la relazione tra *duration* e tasso d'interesse nominale.

Data un'obbligazione che presenta un flusso di n cedole, di importo I e rimborso del capitale pari C , la *yield curve Duration* in epoca 0, risulterà:

$$D(0, x) = \frac{I \sum_{k=1}^n k(1+i)^{-k} + nC(1+i)^{-n}}{I \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k} + C(1+i)^{-n}} \quad (1.8)$$

Il rapporto tra i due dimostra che quanto più è elevata la cedola, quindi il tasso cedolare, tanto minore sarà la *duration*.

Inoltre quando il tasso nominale è minore del tasso di valutazione, ovvero il titolo è quotato sotto la pari, al crescere della vita a scadenza, la *duration* raggiunge il suo picco massimo, per poi tendere asintoticamente a $(1+i)/i$.

Nel caso opposto, la curva è, invece, monotona crescente verso lo stesso asintoto, come possiamo osservare nel grafico seguente (cfr. figura 1.1).

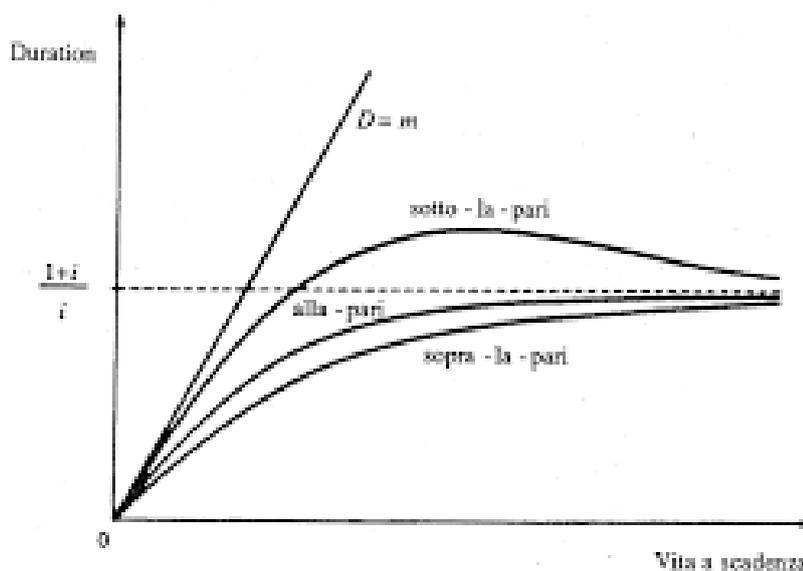


Figura 1.1 Il grafico descrive l'andamento della Duration in relazione al tasso di valutazione.
 Fonte: De Felice M., Moriconi F., "La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie". Bologna: Il Mulino, 1991

1.6. Indice di Rischio: la Volatility

Nonostante l'intuizione di Macaulay per cui la *duration* metteva in relazione i tassi d'interesse e i prezzi dei titoli, rimaneva ancora il problema di dover esprimere la sensibilità dei prezzi alla variazione dei tassi.

Fu Fisher il primo che giunse alla risoluzione di questa problematica. Egli, infatti, dimostrò che¹³:

$$\frac{dV}{V} = -D \frac{dr}{1+r} \quad (1.8)$$

Punto di partenza è il valore attuale di una rendita posticipata di rata R , calcolato all'epoca 0:

$$V_0(i) = \sum_{s=0}^n R_s (1+r)^{-s} \quad (1.9)$$

Si deriva tale funzione rispetto ad $(1+i)$, come segue:

$$\begin{aligned} \frac{dV(i)}{d(1+i)} &= \sum_{s=0}^n -s R_s (1+i)^{-s-1} = \\ &= -(1+i)^{-1} \sum_{s=0}^n s R_s (1+i)^{-s} \end{aligned} \quad (1.10)$$

e si dividono ambo i lati per V_0 :

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} \frac{1}{V_0(i)} = - \frac{1}{1+i} \frac{\sum_{s=0}^n s R_s (1+i)^{-s}}{V_0} \quad (1.11)$$

¹³ Fisher L., "An Algorithm for Finding Exact Rates of Return", The Journal of Business, Vol.39, No.1, Part 2: Supplement on Security prices, 1966.

L'equazione può essere riscritta in questo modo:

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} \frac{1}{V_0(i)} = -\frac{1}{1+i} D \quad (1.12)$$

Riordinando i termini, si giunge all'equazione di Fisher:

$$\frac{dV_0(i)}{V_0(i)} = -D \frac{d(1+i)}{1+i} \quad (1.13)$$

In questo modo abbiamo ottenuto un indice che ci consente di quantificare la sensibilità del prezzo del titolo alla variazione della struttura per scadenza dei tassi. Tale indice viene definito *volatility*:

$$Volatility = -\frac{D}{(1+i)} \quad (1.14)$$

Come si può notare, la relazione è negativa ad indicare che ad un aumento dei tassi corrisponde una variazione di segno opposto dei prezzi.

Essendo l'uguaglianza non perfetta tra *duration* e *volatility*, è importante capire che tipo di approssimazione venga utilizzata, poiché :

$$\frac{dV_0(i)}{d(1+i)} = -D \frac{V_0(i)}{1+i} \quad (1.15)$$

La *duration* è la derivata prima rispetto al tasso d'interesse della funzione valore attuale, cioè matematicamente rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione. Essa ci permette di approssimare la funzione valore nell'intorno di un generico i_0 , ma significa anche che si sta misurando la variazione sulla retta tangente e non sulla funzione stessa.

Ciò vuol dire che più ci si allontana dal punto di tangenza, più i valori stimati si allontanano dal loro effettivo valore. Quindi, per elevati Δi non

basterà più la sola *duration*, ma bisogna considerare la convessità della curva.

Da ciò deriva un altro limite della *duration*, per cui a riduzioni dei tassi di Δi corrisponde un aumento dei prezzi dello stesso ammontare.

Tale situazione, nei mercati reali è alquanto impossibile che si verifichi, ragion per cui è necessario introdurre un altro strumento.

1.7. La Convexity

Giungeremo a stimare questo indice partendo da un importante strumento matematico, il Polinomio di Taylor.

Data una funzione $f(x)$, il Polinomio di Taylor di grado n per $f(x_0)$, è il polinomio che approssima nel migliore dei modi il grafico di f in un intorno $[x_0, f(x_0)]$ e si esprime come:

$$P_n(x, x_0) \cong \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1.16)$$

Sviluppando il polinomio fino al secondo termine, otteniamo:

$$P_n(x, x_0) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 \quad (1.17)$$

Calcoliamo derivata prima e seconda della funzione valore:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad V'(i) &= -D \frac{V(i)}{1+i} \\ \text{II)} \quad V''(i) &= \sum_{k=0}^n k(k+1)R_k (1+i)^{-(k+2)} \end{aligned}$$

Procediamo ora dividendo la derivata seconda per la funzione valore, per ottenere la *convexity*:

$$Convexity = \frac{\sum_{k=0}^n k(k+1)R_k(1+i)}{(1+i)^2 V(i)}, \quad (1.18)$$

La *convexity* è, dunque, la derivata seconda della funzione valore ed esprime il cambiamento della derivata prima (cioè la *duration*) per un dato movimento dei tassi, consentendo di studiare la curvatura della funzione valore.

Come possiamo osservare nel grafico seguente (cfr. figura 1.2), più ci si allontana dal punto di tangenza e più i valori stimati sulla retta tangente si allontanano dal loro effettivo valore. Si dimostra come sia necessario l'utilizzo della *convexity* per tenere in considerazione la convessità della curva.

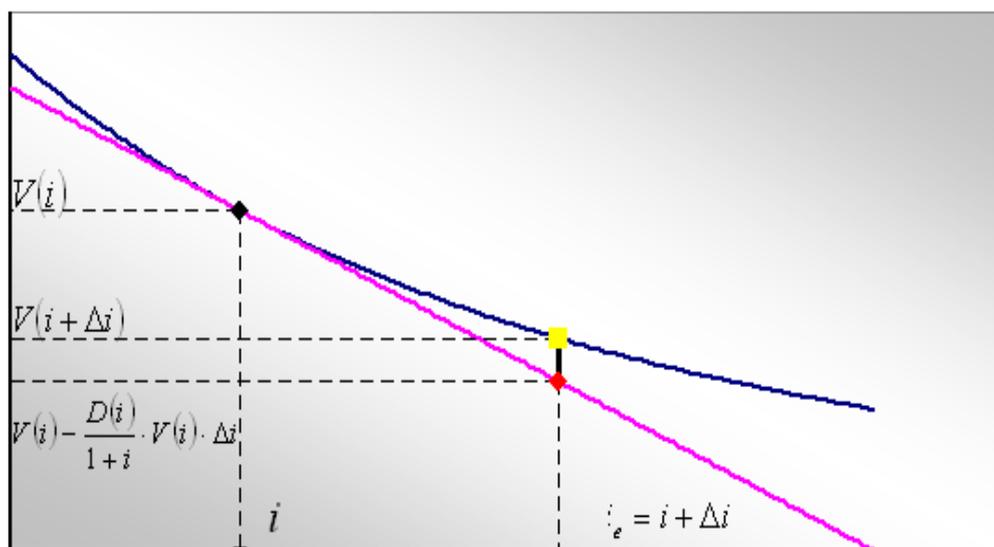


Figura 1.2 La funzione valore $V(i)$ e la retta tangente. Fonte: Foschini G., materiale didattico del corso di Matematica Finanziaria. Roma: Università Luiss Guido Carli, 2011.

In conclusione, possiamo affermare che all'aumentare della *convexity*, aumenta la variazione positiva del valore di un titolo, al diminuire del tasso, e si attenua quella negativa, al crescere del tasso.

Capitolo 2 – L’immunizzazione semi-deterministica: «shift additivi»

2.1. La definizione classica

L’approccio classico all’Immunizzazione Finanziaria pone l’attenzione alla problematica della ricerca dell’equilibrio finanziario di un portafoglio d’investimento.

Un portafoglio è considerato in equilibrio, quindi il generico investitore è ritenuto «solubile», se nell’istante di valutazione t il valore attuale dell’attivo eguaglia il valore attuale del passivo.

Le variabili fondamentali sono quindi i flussi di cassa attivi e passivi, nonché la struttura per scadenza dei tassi. Infatti, la valutazione dei flussi di cassa, come dimostrato in precedenza, può essere influenzata dalla struttura dei rendimenti utilizzata, condizionando quindi l’equilibrio del portafoglio.

La Teoria classica definisce l’Immunizzazione Finanziaria come il metodo con il quale si rende la distribuzione temporale delle poste dell’attivo quanto più simile alla distribuzione temporale delle poste del passivo. Si dice, infatti, che debbano essere in condizione di «*perfect matching*»; in tal modo si può mantenere la condizione di solvibilità in ogni istante indipendentemente da un’eventuale perturbazione aleatoria dei tassi.

I flussi, sia attivi che passivi, nello specifico caso di *perfect matching*, risultano ugualmente esposti alle variazioni della struttura dei rendimenti, cioè reagiscono con un analogo disavanzo di valore che lascia invariato il valore netto del portafoglio.

Studiamo un portafoglio costituito all’attivo da flussi di cassa positivi x di importo $(x_1, x_2 \dots, x_n)$ e al passivo da flussi di cassa negativi y di importo $(y_1, y_2 \dots, y_n)$.

Entrambi gli insiemi di flussi sono riferiti allo scadenziario $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ dove t è l'istante di valutazione, con $t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

Utilizziamo $\delta(t, s)$ per indicare l'intensità istantanea d'interesse che descrive la struttura per scadenza dei tassi da noi utilizzata.

Secondo quanto esposto nella Teoria classica d'Immunizzazione si deve ricercare l'equilibrio di questo portafoglio a seguito di *shift additivi* sulla struttura dei rendimenti in un tempo t^+ successivo a t .

Nelle ipotesi classiche lo *shift* è definito «parallelo», cioè la nuova curva prodotta sarà perfettamente parallela alla curva dei rendimenti originaria.

L'evoluzione della struttura può essere così formalizzata:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Z(t, t^+) \quad (2.1)$$

dove $Z(t, t^+)$ rappresenta l'ampiezza dello *shift* indipendentemente da s .

All'istante t il valore dei flussi attivi $W(t, x)$ e il valore di quelli passivi $W(t, y)$ saranno in equilibrio se:

$$W(t, x) = W(t, y) \quad (2.2)$$

Il portafoglio risulterà «immunizzato», nonostante lo *shift* manifestatosi al tempo t^+ , se:

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y) \quad (2.3)$$

Se questa condizione risulta verificata, quindi, il generico investitore sarà considerato solvibile in t^+ e il valore netto del portafoglio sarà ancora positivo e pari a:

$$W_n(t^+) = W(t^+, x) - W(t^+, y) \geq 0 \quad (2.4)$$

2.2. Il teorema di Fisher e Weil: copertura di uscita singola

Lawrence Fisher e Roman L. Weil propongono per la prima volta la loro strategia di immunizzazione nel celebre lavoro *“Coping with the risk of interest – rate fluctuations: returns to bondholders from naïve and optimal strategies”*, del 1971, evoluzione o meglio superamento delle cosiddette «strategie naive» fondate sulla strategia di selezione di titoli che hanno vita a scadenza coincidente con l’orizzonte temporale considerato.

In questo paper gli autori affermano:

*“A portfolio of investments in bonds is immunized for a holding period if its value at the end of the holding period, regardless of the course of interest rates during the holding period, must be at least as large as it would have been had the interest-rate function been constant throughout the holding period”*¹⁴.

Un portafoglio obbligazionario, nell’ipotesi del verificarsi di *shift* additivo, risulta immunizzato se e solo se il reddito a fine periodo risulta non minore del reddito che sarebbe stato prodotto in assenza di *shift*.

Leggendo il lavoro, si possono trovare importanti riferimenti a quanto già trattato in questo elaborato, ad esempio:

“one obvious strategy is to buy a bond which matures at the horizon, say, ten years hence. This strategy is the naïve one of our title”, riferimento alla strategia di *perfect matching*.

Gli autori affrontano anche il tema della possibilità di insolvenza di un investitore che, però, non viene indicata come una variabile in grado di influenzare l’andamento dei tassi, infatti affermano:

¹⁴ Tutte le citazioni riportate sono tratte dal lavoro originale di Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, pp.415.

“the investor is concerned about the effect of default risk on his strategy, but we do not analyze this effect”.

Infine, si trova il riferimento chiaro all'elemento che gli autori stessi definiscono il perno dell'intero elaborato, ovvero la *duration*:

“the concept of Duration is the corner stone of the strategy for immunizations”¹⁵.

Fisher e Weil propongono, poi, l'enunciazione dell'ipotesi di *shift* paralleli alla base della loro teoria:

“Assumption- if the function $i(t)$ shifts, say form $i_{(a)}$ to $i_{(b)}$, than:

$$i_b(t) = i_a(t) + \Delta \quad (2.5)$$

where Δ may be positive or negative but is the same for all t ”.

La tesi viene così esposta:

“Immunization Theorem- if the assumption holds, then a portfolio of non negative payments (or rent) is immunized at time t_0 if the duration D_{t_0} , at time t_0 of its promised payments is equal to the length of the destre holding period, $T-t_0$ ”¹⁶.

Proseguiamo con la dimostrazione del Teorema di Fisher e Weil¹⁷.

Siano: $L > 0$ l'importo del capitale esigibile in data $H > t$, x un flusso di importi positivi con scadenziario t_1, t_2, \dots, t_n (con $t < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$), il cui valore attuale in t è uguale al valore attuale di L in t , cioè:

$$W(t, x) = W(t, L)$$

¹⁵Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, pp.415.

¹⁶ L'enunciazione dell'ipotesi e della tesi del teorema e le citazioni presenti nel paragrafo sono estratte dal lavoro di Fisher e Weil “*Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bond holders from Naive and Optimal Strategies*”.Chicago: The Journal of Business, Vol.44.

¹⁷ La dimostrazione del Teorema di Fisher e Weil è svolta seguendo l'impostazione proposta da De Felice e Moriconi ne “*La Teoria dell'Immunizzazione finanziaria: modelli e strategie*”.

Nell'ipotesi di uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria sulla struttura per scadenza dei tassi, il valore del flusso x , successivamente allo *shift*, è non minore del valore post *shift* del capitale L

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, L)$$

se e solo se la *duration* di x in t è uguale alla *maturity* di L nello stesso istante di valutazione:

$$D(t, x) = H - t \quad (2.6).$$

Indichiamo con $Q(t, x, L)$ il rapporto tra i valori attuali dei flussi di cassa x e i valori attuali di L :

$$Q(t, x, L) = \frac{W(t, x)}{W(t, L)} = 1 \quad (2.7)$$

Per il vincolo di bilancio introdotto nell'ipotesi del teorema, abbiamo imposto che questo rapporto si uguale a 1.

Per analizzare la variazione delle grandezze considerate, in ogni istante, possiamo esprimerle come valore attuale calcolato in regime di capitalizzazione continua, ovvero:

$$Q(t, x, L) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, u) du}}{L e^{\int_t^H \delta(t, u) du}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_t^H \delta(t, u) du} \quad (2.8)$$

Al tempo $t^+ \leq s$, supponiamo intervenga lo *shift* preannunciato di ampiezza aleatoria Y che modifica la struttura dei tassi in questo modo:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y$$

Quindi, il valore del rapporto al tempo t^+ deve essere anche in funzione di Y , infatti:

$$\begin{aligned}
 Q(t^+, x, L, Y) &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_{t_k}^H (t,u) du} \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_{t_k}^H (t,u) du} e^{Y(H-t_k)} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Ricordando che qualsiasi numero elevato a 0 ha come risultato 1, siamo in grado di verificare che il rapporto si mantiene uguale a 0 se, come ipotizzato, lo *shift* è nullo, ovvero se $Y=0$.

Infatti, studiando la funzione in relazione ad Y , calcolando derivata prima e seconda:

$$Q'(Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H (t,u) du} e^{Y(H-t_k)} \quad (2.10)$$

$$Q''(Y) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k)^2 x_k e^{\int_{t_k}^H (t,u) du} e^{Y(H-t_k)} \quad (2.11)$$

si può vedere che la derivata seconda rispetto a Y della funzione sarà sempre maggiore di 0; ciò significa che la curva ha concavità rivolta verso l'alto.

Inoltre, come abbiamo già detto, per $Y=0$ la funzione ha valore 1.

Verifichiamo, quindi, che anche la derivata prima della funzione $Q(Y)$ sia nulla per $Y=0$, per dimostrare che il rapporto tra le grandezze $W(t, x)$ e $W(t, L)$ è sempre maggiore di 1.

Imponiamo quindi:

$$Q'(0) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{\int_{t_k}^H (t,u) du} = 0 \quad (2.12)$$

Ciò equivale a scrivere:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k e^{-\int_t^H \delta(t,u) du}}{L e^{-\int_t^H \delta(t,u) du}} = \frac{\sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k)}{Lv(t, h)} = 0 \quad (2.13)$$

Se riscriviamo l'equazione tenendo in considerazione il vincolo di bilancio $W(t, x) = W(t, L)$, otteniamo:

$$\frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k v(t, t_k)}{Lv(t, h)} = H \quad (2.14)$$

Oppure:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{Lv(t, H)} = H - t \quad (2.15)$$

Come precedentemente assunto per ipotesi, il valore attuale del capitale esigibile è uguale al valore attuale dei flussi x .

Si è dimostrato, quindi, che il rapporto tra i valori attuali è maggiore o uguale a 1 se e solo se vale la relazione tra la *duration* dell'attivo e la *maturity* del passivo espressa nella formula (2.6).

2.3. Le implicazioni del teorema di Fisher e Weil

Il Teorema di Fisher e Weil, oltre ad essere un valido esempio di come poter giungere ad una situazione di immunizzazione finanziaria, è anche considerato una vera e propria tecnica per la costituzione di portafogli di titoli obbligazionari. Sfruttando il teorema, infatti, si è in grado di selezionare flussi positivi a copertura di un determinato capitale esigibile affinché il suddetto portafoglio risulti in qualsiasi momento coperto da eventuali *shift* additivi che possono modificare la struttura dei rendimenti.

Oltre a quanto in precedenza detto, il Teorema può essere anche utilizzato per ricercare l'epoca ottima di smobilizzo dell'investimento.

Sappiamo che il valore di un portafoglio che garantisce un flusso di importo \mathbf{x} (x_1, x_2, \dots, x_n) nelle scadenze (t_1, t_2, \dots, t_n) in un dato istante H , può essere scritto come somma del reddito proveniente dal reinvestimento, direttamente correlato al tasso d'interesse considerato, e del valore di realizzo, inversamente correlato con il tasso, cioè:

$$R(H, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{v(t_k, H)} + \sum_{k=1}^n x_k v(H, t_k) \quad (2.16)$$

Se lo *shift* non si verifica nell'intervallo temporale da t a H , quindi la struttura per scadenza dei tassi non subisce variazioni, allora il reddito di portafoglio al tempo H può essere calcolato come:

$$R(H, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t,u) du} + \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,u) du} = \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t,u) du} \quad (2.17)$$

Questa equazione ci permette di dimostrare che, in assenza di *shift*, il reddito prodotto dal flusso \mathbf{x} al tempo H è uguale al valore attuale di \mathbf{x} al tempo t e in seguito capitalizzato fino all'epoca H .

Cosa succede se lo *shift* si verifica? In questo caso il reddito prodotto dal flusso \mathbf{x} dipenderà dai valori assunti dai tassi nell'intervallo di tempo da t a H .

Supponiamo ancora una volta che si manifesti uno *shift* additivo di ampiezza Y al tempo $t+s$. In questo caso la struttura dei tassi assume la forma già descritta dalla formula dell'intensità istantanea d'interesse.

Come primo passo esprimiamo il reddito prodotto da x in funzione di Y :

$$\begin{aligned} R(Y, H, x) &= \sum_{k=1}^H x_k e^{\int_{t_k}^H \delta(t^+, u) du} + \sum_{k=H}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t^+, u) du} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t^+, u) du} = \sum_{k=1}^n x_k e^{-\int_H^{t_k} \delta(t, u) du} e^{-Y(t_k - H)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se moltiplichiamo e dividiamo tutto per $e^{-\int_t^H \delta(t, u) du}$, otteniamo:

$$R(Y, H, x) = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k) e^{-Y(t_k - H)} \quad (2.19)$$

Studiando la derivata prima e seconda di questa funzione si può capire l'andamento della curva che descrive la funzione stessa. Come già notato nella dimostrazione del precedente paragrafo, anche in questo caso la derivata seconda in funzione di Y sarà sempre positiva.

Per verificare, però, che la *duration* di tale funzione è l'epoca ottima di smobilizzo, dobbiamo dimostrare che la derivata prima della funzione è nulla per $Y=0$.

$$\frac{\partial}{\partial Y} R(Y, H, x) = \frac{1}{v(t, H)} \sum_{k=1}^n (H - t_k) x_k v(t, t_k) = 0 \quad (2.20)$$

Da questa si ottiene:

$$H = \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k v(t, t_k)} \quad (2.21)$$

Possiamo immediatamente individuare nel membro destro dell'equazione la *duration* dei flussi di cassa x ¹⁸. Ciò significa che, come volevasi dimostrare, l'epoca ottima di smobilizzo coincide proprio con la *duration*;

¹⁸ Le formule utilizzate in questo paragrafo e in quello precedente sono tratte dal libro di De Felice M., Moriconi.F., *La Teoria dell'Immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*, Bologna, Il Mulino, 1991.

quindi possiamo dire che, se si disinveste in questa epoca, si riesce ad ottenere un reddito pari al reddito che si sarebbe ottenuto in assenza di *shift*.

2.4. Il teorema di Redington : copertura di uscite multiple

Redington, come precedentemente detto, è il padre dell'immunizzazione finanziaria, che ha dato il via allo sviluppo di questa tematica grazie alla sua opera dal titolo: “*Review of the Principles of Life-Office Valuations*”, risalente al 1952 e pubblicata su The Journal of the Institute of Actuaries. Il lavoro era volto ad analizzare la parte pratica e i principi utili per la valutazione del «*life-office*».

Il titolo del capitolo a cui si farà riferimento in questo elaborato è “*Matching of investment-Immunization*”, capitolo in cui l'autore definisce il termine «*matching*» in questo modo:

*“ The word «matching» implies the distribution of assets to make them, as far as possible, equally as vulnerable as the liabilities to those influences which affect both. In its widest sense this principle includes such important aspects as the matching of assets and liabilities in currencies ”*¹⁹.

L'accezione rilevante del termine *matching* comporta una relazione tra la distribuzione delle scadenze delle attività e degli esborsi in modo tale da andare a ridurre l'eventualità di perdite derivanti da perturbazioni sui tassi d'interesse.

Il teorema di Redington può essere così formulato.

Indichiamo con $\delta(t, s)$ l'intensità istantanea d'interesse della struttura a termine considerata al tempo t . Siano x e y flussi non negativi con scadenario $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e valga la seguente relazione:

¹⁹ Redington F. M.,(1952), *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Journal of the Institute of Actuaries.

$$W(t, x) = W(t, y) \quad (2.22)$$

Se nell'istante t^+ , successivo a t , la curva dei rendimenti è soggetta ad uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria infinitesima, allora il valore post-*shift* di x , dovrà essere non minore del valore post-*shift* di y :

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y) \quad (2.23)$$

Se la *duration* di x equivale alla *duration* di y :

$$D(t, x) = D(t, y) \quad (2.24)$$

e se il momento di second'ordine di x è maggiore o uguale al momento di second'ordine di y :

$$D^{(2)}(t, x) \geq D^{(2)}(t, y) \quad (2.25)$$

allora possiamo dimostrare il teorema come segue.

Indichiamo con $W_N(t)$ il valore netto dei flussi x e y ottenuto con $\delta(t, s)$, abbiamo quindi:

$$W_N(t) = W(t, x) - W(t, y) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t, u) du} \quad (2.26)$$

Se al tempo t^+ interviene uno *shift* di ampiezza aleatoria Y , risulterà:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y \quad (2.27)$$

Quindi il valore netto post-*shift* sarà:

$$\begin{aligned}
W_N(t^+, Y) &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t^+, u) du} = \\
&= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) e^{-\int_t^{t_k} \delta(t^+, u) du} e^{-Y(t_k - t)} = \\
&= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Le derivate prima e seconda di W_N rispetto a Y sono:

$$\begin{aligned}
W'_N(Y) &= - \sum_{k=1}^n (t_k - t) (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)} \\
W''_N(Y) &= \sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)}
\end{aligned}$$

Se consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $W_N(Y)$ nell'intorno di $Y=0$, arrestandosi al second'ordine, otteniamo:

$$W_N(Y) = W_N(0) + YW'_N(0) + \left(\frac{1}{2}\right) Y^2 W''_N(0) \quad (2.29)$$

Il vincolo di bilancio assicura che $W_N = 0$; inoltre, la condizione di *duration* $D(t, \mathbf{x}) - D(t, \mathbf{y}) = 0$, con il vincolo di bilancio, garantisce che $W'_N(Y) = 0$. Quindi, l'immunizzazione sarà garantita se $\left(\frac{1}{2}\right) Y^2 W''_N(0)$ risulterà non negativo, cioè si ha:

$$\sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^n (t_k - t)^2 y_k v(t, t_k) \quad (2.30)$$

che per il vincolo di bilancio corrisponde alla condizione (2.25).

Redington nella parte conclusiva del capitolo, cercando di spiegare l'essenza del teorema sull'immunizzazione, afferma:

“two definitions, two rules and a rider:

- *«liability-outgo»: the expected net outgo of the existing business in calendar year t, viz. claims and expenses less premium;*
- *«asset-proceeds»: the expected proceeds from the existing assets in year t, viz. interest plus maturing investments.*

Rule 1. *The mean term of the value of the asset-proceeds must equal the mean term of the value of the liability-outgo.*

Rule 2. *The spread about the mean of the value of the asset-proceeds should be greater than the spread of the value of the liability-outgo.*

Rider. *The mean term of the asset-maturity dates is considerably greater than that of the value of the asset-proceeds”²⁰.*

Nel 1957, David Durand nel suo paper *“Growth Stocks and the Petersburg Paradox”* (The Journal of Finance, Vol.12, N°3), riprese le tematiche svolte da Redington per effettuare alcune precisazioni. Egli infatti affermò che le uniche attività finanziarie che hanno una durata abbastanza lunga da poter essere uguagliata alla *duration* di una passività, sono le *Growth Stocks*, ovvero titoli ad alto potenziale di crescita come ad esempio possono essere definiti i titoli emessi da società che operano nel segmento dell'alta tecnologia. Duran infatti sostiene che nel caso di titoli obbligazionari è difficile che si possa creare un portafoglio in cui la durata dell'attivo e del passivo coincidano.

²⁰ Frank. M. Redington, 1952, *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Institute of Actuaries.

2.5. L'indice di dispersione: variabile strategica

Quanto appena dimostrato con il Teorema di Redington ci spinge a considerare l'indice di dispersione come una variabile particolarmente importante nelle teorie dell'immunizzazione.

Infatti, dalla (2.29) si evince che il valore netto del flusso post-*shift* dipende da diversi fattori, quali il valore attuale, la *duration* e il momento di second'ordine calcolato all'istante t e che l'immunizzazione viene garantita se, nel rispetto della condizione di *duration* e del vincolo di bilancio, la dispersione netta $M_N^{(2)}(t)$ è non negativa.

Ne consegue che la differenza tra il valore netto post-*shift* di x e y risulterà nullo in ipotesi di *perfect matching*, ma tenderà ad essere tanto maggiore quanto più è marcata la dispersione temporale dei due flussi. Quindi la soluzione più immediata sembrerebbe quella di scegliere la condizione che massimizza il valore netto post-*shift*.

Secondo l'impostazione data da Redington, attraverso le strategie di immunizzazione si perviene ad un'approssimazione del *perfect matching*, ovvero quanto più possibile vicino ad un valore attuale netto nullo, scegliere quel portafoglio che massimizzi il valore netto, sembra essere una soluzione contraddittoria dal momento che questa condizione si verifica solo in presenza di un *mismatching*.

Se però si assume una struttura a termine piatta, allora l'indice di dispersione può essere calcolato in riferimento alla derivata seconda della funzione valore rispetto all'intensità istantanea d'interesse, quindi sarà espressione della convessità della curva, ovvero della *convexity*.

Possiamo formalizzare quanto appena detto come segue.

Si consideri nell'istante di valutazione $t=0$, la curva dei rendimenti espressa da $\delta(s) \equiv \delta_0$ con $s \geq 0$. Per l'ipotesi di traslazione uniforme della curva dei rendimenti, l'intensità istantanea di interesse sarà ancora indipendente

da s per qualsiasi istante successivo a t , dunque consideriamo i flussi come funzioni decrescenti e convesse:

$$W(x, \delta) = \sum_{k=1}^n x_k e^{-\delta t_k}$$

$$W(y, \delta) = \sum_{k=1}^n y_k e^{-\delta t_k}$$

Il vincolo di bilancio e la condizione di *duration* in $t=0$ saranno:

$$W(x, \delta_0) = W(y, \delta_0) \quad (2.31)$$

$$W'(x, \delta_0) = W'(y, \delta_0) \quad (2.32)$$

La condizione di second'ordine può essere scritta in funzione della (2.31) e della (2.32) in questo modo:

$$\sum_{k=1}^n t_k^2 x_k e^{-\delta_0 t_k} \geq \sum_{k=1}^n t_k^2 y_k e^{-\delta_0 t_k}$$

ovvero

$$W''(x, \delta_0) \geq W''(y, \delta_0) \quad (2.33)$$

La (2.33) impone che nel punto di tangenza, la *convexity* di $W(x)$ sia non minore di quella di $W(y)$.

Partendo da queste ipotesi e svolgendo due problemi di selezione di portafoglio, il primo, α , a costo minimo e il secondo, β , con dispersione massima, si perviene a risultati logicamente molto diversi.

Il portafoglio α avrà una dispersione quasi nulla e un costo molto più contenuto rispetto al portafoglio β , che, invece, presenterà una dispersione non nulla, ragion per cui è molto più spesso preferito quel metodo che seleziona portafogli immunizzati a minimo costo.

Capitolo 3 – Le Teorie semi-deterministiche:

«*shift* convessi»

3.1. Teorema generale di immunizzazione per «*shift* additivi»

L'impostazione data da Redington ci fornisce un insieme di condizioni necessarie all'immunizzazione del valore di un portafoglio caratterizzato da un flusso di uscite (multiple) a seguito del verificarsi di *shift* additivi infinitesimi sulla struttura per scadenza dei tassi.

Nonostante ciò il teorema di Redington non può essere interpretato come un'applicazione del teorema di Fisher e Weil al caso di uscite multiple, che invece può risultare utile nel caso di una singola uscita e per *shift* finiti.

Si potrebbe, però, generalizzare il teorema se si considerasse che la copertura di un flusso passivo y corrisponde ad un insieme di flussi singoli, ovvero scomponendo il flusso y in tante operazioni di copertura, ognuna riferita ad una sola posta di y . In questo ambito, possiamo quindi dire che condizione necessaria e sufficiente è che il portafoglio di copertura x sia effettivamente scomponibile in m portafogli, ognuno dei quali immunizzi uno degli m flussi di y .

Deve, pertanto, esistere una matrice C di elementi c_{kj} , $k = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, m$, di valori non negativi, con le seguenti proprietà:

$$\sum_{j=1}^m c_{kj} = x_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^m c_{kj} v(t, t_k) = y_j v(t, t_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^m t_k c_{kj} v(t, t_k)}{y_j v(t, t_j)} = t_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

La (3.1) garantisce che x sia scomponibile, ovvero che x_k si ottenga come sommatoria delle componenti $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{km}$; la (3.2) è rappresentativa degli m vincoli di bilancio, mentre la (3.3) fornisce le m condizioni di *duration*.

Per essere più rigorosi nella trattazione di questo argomento, è preferibile far riferimento ad una classe di *shift* più ampia, in cui gli *shift* additivi sono solo una componente e sono definiti *shift* convessi, ovvero *shift* $Y(s)$ tali che:

$$f(s) = e^{-\int_t^s Y(u)du}, \quad s \geq t,$$

abbia derivata seconda non negativa²¹.

La scomponibilità è condizione importante affinché esista un portafoglio immunizzato da *shift* convessi (quindi anche additivi) a copertura di uscite multiple, ma non costituisce un metodo operativo di selezione. A tal proposito possiamo, però, enunciare il criterio di scomponibilità in una forma equivalente, che viene definita come Teorema Generale di Immunizzazione per *shift* additivi²², che possiamo dimostrare come di seguito.

Sia $\delta(t, s)$ l'intensità istantanea d'interesse che individua la struttura a termine dei tassi al tempo t , e siano x e y due flussi di importi non negativi con scadenziario t_1, t_2, \dots, t_m ($t < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$). Se all'istante t^+ la struttura dei tassi subisce uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria, il valore post-*shift* del flusso x sarà non minore del valore post-*shift* del flusso y :

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y) \quad (3.4)$$

²¹ Gli *shift* convessi sono caratterizzati da $Y^2(s) \geq Y'(s)$, per ogni $s \geq t$.

²² De Felice M., Moriconi F., (1991), *La Teoria dell'Immunizzazione Finanziaria: Modelli e Strategie*, Il Mulino.

Se valgono le relazioni:

$$W(t, x) = W(t, y) \quad (3.5)$$

$$D(t, x) = D(t, y) \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| y_k v(t, t_k), \text{ con } j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Allora si ha che:

$$\begin{aligned} W_N(t^+) &= W(t^+, x) - W(t^+, y) \\ &= \sum_{k=1}^m (x_k - y_k) v(t, t_k) e^{-Y(t_k - t)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Y è l'ampiezza aleatoria dello *shift* additivo che si è verificato in t^+ , quindi indichiamo i flussi netti scontanti con:

$$g_k = (x_k - y_k) v(t, t_k), \text{ con } k = 1, 2, \dots, m$$

e il fattore di *shift* con:

$$f(s) = e^{-Y(s-t)}, \text{ con } s \geq t$$

La condizione di immunizzazione della (3.4) può essere così espressa:

$$W_N(t^+) = \sum_{k=1}^m g_k f(t_k) \geq 0, \text{ per ogni } Y \in R.$$

Scelto un intervallo (a, b) , contenente t_1 e t_m , si consideri la misura:

$$\mu(a, s) = \sum_{t_k \leq s} g_k \text{ con } s \in [a, b).$$

Se poniamo $a=t$ e $b=+\infty$, la condizione di immunizzazione si può alternativamente scrivere (in termini dell'integrale di Stieltjes) in questo modo:

$$\int_t^{+\infty} f(s) d\mu(s) \geq 0 \quad (3.9)$$

Dato che la funzione $f(s) = e^{-Y(s-t)}$ è una funzione di *shift* convessa di s , secondo il teorema di Karamata²³, la condizione (3.9) è garantita se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\int_t^{+\infty} d\mu(s) = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_t^{+\infty} s d\mu(s) = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_t^u \mu(t, s] ds \geq 0, \quad \text{con } u \geq t \quad (3.12)$$

La condizione (3.10) si può esprimere in questo modo:

$$\sum_{k=1}^m g_k = 0$$

e rappresenta il vincolo di bilancio.

La (3.11) può scriversi come:

$$\sum_{k=1}^m t_k g_k = 0$$

²³ Teorema di Karamata (1932), "Sur une inégalité relative aux fonctions convexes, Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 145-148.

Sia $\mu(a, x]$ una misura con segno su (a, b) . Assegnata una funzione $f(x)$ tale che $f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$, condizione necessaria e sufficiente affinché sia:

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) \geq 0 \quad \text{è che sia: } \int_a^b d\mu = 0,$$

$$\int_a^b x d\mu(x) = 0,$$

$$\int_a^u \mu(a, x] dx \geq 0, \quad \forall u.$$

che coincide con la condizione di *duration*.

La relazione (3.12) è espressa dalla:

$$\int_t^u \left[\sum_{t_k \leq s} g_k \right] ds \geq 0, \quad u \geq t$$

Per il teorema di equivalenza, possono essere eguagliate alle condizioni:

$$\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| g_k \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

ovvero alla (3.4)²⁴.

Il teorema appena dimostrato, è strutturato sull'impostazione dei teoremi di immunizzazione classica, infatti richiede che il flusso di copertura \mathbf{x} e di passivo \mathbf{y} rispettino il vincolo di bilancio e le condizioni sulla dispersione temporale dei valori attuali delle singole poste.

Infatti se riscriviamo la condizione (3.4) utilizzando la (3.2), otteniamo:

$$\frac{\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k)} \geq \frac{\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| y_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^m y_k v(t, t_k)} \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

L'equazione appena scritta definisce i vincoli MAD (*mean absolute deviation*). Essi impongono che il flusso di copertura \mathbf{x} sia più disperso nel tempo rispetto al flusso \mathbf{y} , visto che la dispersione è in questo caso misurata in termini di dispersione media assoluta, cioè del momento assoluto di second'ordine riferito a ogni punto di ascissa t_j (scadenze), con pesi i valori attuali di ogni singolo pagamento.

Abbiamo anche utilizzato il teorema di equivalenza per dimostrare che il teorema di Redington è compreso in quello che stiamo definendo il Teorema generale d'immunizzazione; ora quindi passeremo a dimostrare

²⁴ Per la dimostrazione del teorema si è fatto riferimento alla *Teoria dell'immunizzazione Finanziaria: Modelli e Strategie*, De Felice M., Moriconi F..

come anche il teorema di Fisher e Weil è incluso nel suddetto Teorema generale.

Se ipotizziamo un flusso y di passività, rappresentato da un'unica uscita L nell'istante H , che coinciderà con una delle scadenze t_k , allora il secondo membro della relazione (3.7) può essere espresso in funzione di j :

$$\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| y_k v(t, t_k) = |t_j - H| L v(t, H) = |t_j - H| \sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k),$$

essendo

$$H = \frac{\sum_{k=1}^m t_k x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k)}$$

Allora, per la condizione di *duration*, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| y_k v(t, t_k) &= \left| t_j \sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k) - \sum_{k=1}^m t_k x_k v(t, t_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m (t_j - t_k) x_k v(t, t_k) \right| \end{aligned}$$

Quindi la (3.7) diventerà:

$$\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \geq \left| \sum_{k=1}^m (t_j - t_k) x_k v(t, t_k) \right| \quad \forall j.$$

Si può subito vedere che il vincolo di bilancio e la condizione di *duration* assicurano l'immunizzazione anche per *shift* additivi in caso di singola uscita; ne consegue che anche i vincoli di bilancio di tipo MAD sono soddisfatti.

3.2. L'immunizzazione semi-deterministica:

l'ipotesi di «shift qualsiasi»

Abbiamo fin qui fornito diversi strumenti e tecniche utili per la cosiddetta immunizzazione da *shift* additivi, che, se pur è una condizione semplificativa rispetto al problema reale, è comunque utile ad illustrare diversi punti di vista, nonostante risulti inadeguata alle implicazioni teoriche.

Infatti dal Teorema di immunizzazione da «*shift* additivo» non è esclusa la possibilità del verificarsi di profitti da arbitraggio e questa è soltanto una delle variabili su cui è nato il dibattito critico sull'ipotesi di *shift* additivo, sulla quale sono state proposte diverse evoluzioni dei modelli originali con l'obiettivo di raggiungere l'immunizzazione per *shift* moltiplicativo, *maturity-dependent*, etc.. Sono state date nuove definizioni di variabili strategiche, in particolar modo per la durata media finanziaria, che però se si eguagliano all'orizzonte temporale di valutazione sono analoghe alla condizione di *duration*, come formulata ad esempio nel teorema di Fisher e Weil.

Il motivo principale per cui le teorie classiche non sono sempre adeguate, è che in quest'approccio il portafoglio risulta immunizzato solo per una particolare categoria di *shift*.

Si evince, quindi, che nel corso del tempo si è modificata l'ipotesi sull'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi, ma non l'abitudine di costruire dati *ad hoc*, ragion per cui non si può dire che il teorema dimostrato nel paragrafo precedente sia un'estensione e/o un'evoluzione dell'immunizzazione classica, ma solamente una rappresentazione più articolata della stessa.

Infatti, la succitata questione sulla possibilità di arbitraggio, è verificabile anche nei mercati che evolvono in altre ipotesi di *shift*, per questo motivo le

teorie classiche di immunizzazione si definiscono non compatibili con l'equilibrio.

Resta il problema che, nei mercati reali, le ipotesi possibili da sviluppare sono innumerevoli rispetto a quelle categorie considerate nei teoremi classici; pertanto, con l'obiettivo di estendere lo schema classico di immunizzazione, si prenderà in considerazione da questo momento in poi l'ipotesi di «*shift* qualsiasi»²⁵, ossia la condizione in cui la struttura dei rendimenti considerata non privilegia nessun andamento in modo prestabilito e che può essere così definita:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t', s) \quad \text{per ogni } t' \geq t, s \geq t' \quad (3.13)$$

in cui Z è rappresentabile come:

$$Z(t, t', s) = \sum_{j=1}^{N(t, t')} Y_j(s)$$

e dove:

$N(t, t')$ = numero aleatoria di *shift* tra t e t'

$Y_j(s)$ = ampiezza aleatoria del j -esimo *shift*.

Nell'ipotesi appena formulata si può osservare la variazione della struttura dei tassi utilizzata da Redington nelle condizioni generali del suo lavoro, che però condizionò il lavoro per “*certain convenient simplifications*”²⁶ all'applicazione per la sola ipotesi di *shift* additivo.

In questo caso, al contrario, ci stiamo riferendo ad uno «*shift* qualsiasi» di ampiezza $Y(s)$, che si verifica nell'istante t^+ successivo a t , quindi la (3.13) si può riscrivere come:

$$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y(s)$$

²⁵ Citazione estratta da “*La Teoria dell'Immunizzazione Finanziaria: Modelli e Strategie*”, di De Felice M., Moriconi F., Il Mulino, 1991.

²⁶ Redington, F.M., (1952), *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, Journal of the Institute of Actuaries.

Se consideriamo la funzione di *shift* in questo modo:

$$f(s) = e^{-\int_t^s Y(u)du}$$

e supponiamo che $Y(s)$ sia derivabile in funzione di s , avremo:

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) = \frac{d^2}{ds^2} e^{-\int_t^s Y(u)du} = [Y^2(s) - Y'(s)]e^{-\int_t^s Y(u)du}$$

La quantità appena derivata, rappresenta il «*twist*» della curva dei rendimenti, che, sotto l'ipotesi di *shift* qualsiasi, ha segno qualsiasi, mentre, in ipotesi di *shift* convessi, avrà sicuramente segno positivo, poiché $f(s)$ ha, per definizione, la derivata seconda non negativa per ogni $s \geq t$.

3.3. Teorema di immunizzazione a minimo rischio: Fong e Vasicek

Il Teorema di immunizzazione a minimo rischio viene attribuito a Fong H. G., e Vasicek O. A., i quali lo dimostrarono in riferimento solo al caso semplificato di uscita singola.

Nel loro lavoro²⁷, Fong e Vasicek propongono un approccio differente rispetto ai lavori presenti in letteratura, ovvero analizzano l'esposizione di un portafoglio ad un «*arbitrary type*» di variazione dei tassi, verificando che l'esposizione è determinata da particolari caratteristiche del portafoglio considerato e che per la minimizzazione del rischio dello stesso bisogna strutturarli in modo che esso sia il meno vulnerabile possibile rispetto ad ogni tipologia di movimento dei tassi.

²⁷Fong H. G., Vasicek O. A., *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, Journal of Finance, 1984.

Come possiamo leggere nel loro paper, Fong e Vasicek affermano:

*“There is a lower limit on the change in the end of horizon value of an immunized portfolio for an arbitrary interest rate change”*²⁸.

Esiste, cioè, un limite inferiore alla variazione della struttura dei tassi, che è definito come il prodotto di due fattori: il primo, dipende esclusivamente dalla tipologia e dall'entità della variazione dei tassi; il secondo, dipende solo dalla struttura del portafoglio e fornisce una misura dell'esposizione al rischio della variazione della curva dei rendimenti.

Ai fini della dimostrazione del teorema di Fong e Vasicek, andremo a considerare, come fatto per Fisher e Weil, le variazioni dei tassi di entità finita e non le variazioni infinitesime che richiedono un continuo ribilanciamento del portafoglio, poiché tale approccio risulta più utile all'applicazione pratica.

Consideriamo un portafoglio al tempo $s=0$, immunizzato rispetto ad un orizzonte di riferimento H . Indichiamo con C_1, C_2, \dots, C_M i pagamenti con scadenzario $s = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, e con I_0 il valore iniziale del portafoglio, che possiamo così esprimere:

$$I_0 = \sum_{j=1}^m C_j P_0(s_j) \quad (3.14)$$

In questo caso $P_0(t)$ è il valore della funzione di sconto al tempo t ; se indichiamo con $i(t)$ il tasso corrente al tempo t , con $t \geq 0$, la funzione di sconto può essere così riscritta:

$$P_0(t) = \exp\left(-\int_0^t i(r)dr\right) \quad (3.15)$$

²⁸Tutte le citazioni riportate in questo paragrafo sono tratte dal lavoro di Fong H. G., Vasicek O. A., "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization, Journal of Finance, 1984.

Sia D la *duration* di portafoglio, che può essere così formulata:

$$D = \sum_{j=1}^m s_j C_j P_0(s_j) / I_0, \quad (3.16)$$

Definiamo il valore target I_H del portafoglio, alla fine dell'orizzonte di valutazione, se non si verifica alcuna variazione dei tassi, come:

$$I_H = I_0 / P_0(H) \quad (3.17)$$

Come abbiamo visto in precedenza, se la *duration* del portafoglio è uguale alla lunghezza dell'orizzonte considerato, I_H può essere considerato il limite inferiore del valore finale del portafoglio per ogni *shift* parallelo che interviene sulla curva dei rendimenti. Se siamo, invece, in presenza di una serie di rate di diversa *maturity* e di diverso ammontare, I_H non può essere così definito. Per stabilire, quindi, una misura alternativa del rischio d'immunizzazione, è stata analizzata la variazione del valore finale di un portafoglio in seguito alla variazione della struttura dei tassi per *shift* non paralleli.

L'ammontare del valore finale del portafoglio, può risultare minore del target definito, a seguito della variazione dei tassi, se dipende dalla tipologia e dall'entità della variazione, oltre che della struttura del portafoglio.

Se consideriamo *shift* paralleli, l'immunizzazione del portafoglio è garantita da un bilanciamento tra la variazione del valore dei pagamenti, a seguito della variazione dei tassi, e la variazione del valore della parte di portafoglio ancora in essere alla fine dell'orizzonte di valutazione, ovvero, come gli stessi autori scrivono:

“The immunity of a portfolio to parallel rate changes is attained as a consequence of balancing the effect of change in reinvestment rates on

payments received during the horizon against the change in capital value of the portion of the portfolio still outstanding at the end of the horizon”²⁹.

Se consideriamo invece *shift* non paralleli, allora il bilanciamento non può avere i suoi effetti, infatti Fong e Vasicek affermano:

*“For a nonparallel change in interest rate such balancing may not take place”*³⁰.

Infatti se la variazione dei tassi a breve termine è minore della variazione dei tassi a lungo termine, saremo in uno scenario caratterizzato da un aumento della pendenza della curva dei rendimenti che causerà una diminuzione del valore finale del portafoglio rispetto al valore target; maggiore è l'ampiezza della variazione, maggiore sarà la diminuzione del valore terminale.

Al fine di dimostrare quanto appena detto, ipotizziamo che si verifichi una variazione istantanea dei tassi da $\mathbf{i}(t)$ a $\mathbf{i}'(t)$, tale che $\mathbf{i}'(t) = \mathbf{i}(t) + \Delta\mathbf{i}(t)$, dove $\Delta\mathbf{i}(t)$ è una funzione arbitraria di t , e consideriamo un portafoglio con *duration* uguale all'orizzonte temporale considerato, allora la funzione di sconto diventerà:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= \exp\left(-\int_0^t i'(\tau) d\tau\right) \\ &= P_0(t) \exp\left(-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right). \end{aligned}$$

²⁹Fong H. G., Vasicek O. A., *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, Journal of Finance, 1984; Vol.39, n.5, pp. 1543.

³⁰ Fong H. G., Vasicek O. A., *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, Journal of Finance, 1984; Vol.39, n.5, pp. 1543.

La variazione del valore target ΔI_H dovuta alla variazione $\Delta i(t)$ della struttura dei tassi è esprimibile nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\Delta I_H &= \sum_{j=1}^m \frac{C_j P'_0(s_j)}{P'_0(H)} - \sum_{j=1}^m \frac{C_j P_0(s_j)}{P_0(H)} = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{C_j \exp\left(\int_{s_j}^H \Delta i(\tau) d\tau\right) P_0(s_j)}{P_0(H)} - \sum_{j=1}^m \frac{C_j P_0(s_j)}{P_0(H)}\end{aligned}$$

che può essere riscritta come:

$$\Delta I_H = \sum_{j=1}^m \frac{f(s_j) C_j P_0(s_j)}{P_0(H)} - \frac{I_0}{P_0(H)}, \quad (3.18)$$

dove:

$$f(t) = \exp\left(\int_t^H \Delta i(\tau) d\tau\right).$$

Se si verifica che:

$$g(t) = \frac{d}{dt} \Delta i(t)$$

Allora si ha che:

$$\Delta i(H) - \Delta i(\tau) = \int_{\tau}^H g(u) du$$

e che:

$$\begin{aligned}\int_t^H \Delta i(\tau) d\tau &= \Delta i(H)(H-t) - \int_t^H d\tau \int_{\tau}^H g(u) du = \\ &= \Delta i(H)(H-t) - \int_t^H (u-t) g(u) du.\end{aligned}$$

Assumendo che $g(t) \leq K$ per ogni $t \geq 0$. Se $t \leq H$, allora si verifica che:

$$\int_t^H (u-t)g(u)du \leq K \int_t^H (u-t)du = \frac{1}{2}K(H-t)^2$$

Se $t > H$, invece, si ha che:

$$\int_t^H (u-t)g(u)du = \int_H^t (t-u)g(u)du \leq K \int_H^t (t-u)du = \frac{1}{2}K(H-t)^2$$

Dunque:

$$\int_t^H (u-t)g(u)du \leq \frac{1}{2}K(H-t)^2$$

Per ogni $t \geq 0$ e di conseguenza:

$$\int_t^H \Delta i(\tau)d\tau \geq \Delta i(H)(H-t) - \frac{1}{2}K(H-t)^2$$

Quindi, per $e^x \geq 1 + x$, avremo:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left(\int_t^H \Delta i(\tau)d\tau\right) \\ &\geq 1 + \int_t^H \Delta i(\tau)d\tau \\ &\geq 1 + \Delta i(H)(H-t) - \frac{1}{2}K(H-t)^2 \end{aligned}$$

Dalla (3.18), abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \Delta I_H &\geq \sum_{j=1}^m \frac{\left[1 + \Delta i(H)(H-s_j) - \frac{1}{2}K(H-s_j)^2\right] C_j P_0(s_j)}{P_0(H)} - \frac{I_0}{P_0(H)} = \\ &= -\frac{1}{2}K \sum_{j=1}^m (H-s_j)^2 C_j P_0(s_j) / P_0(H) = \\ &= \frac{1}{2}KM^2 I_H. \end{aligned}$$

Avendo indicato con ΔI_H la variazione del valore terminale del portafoglio, e con K una costante arbitraria, possiamo dire che se $\frac{d\Delta i(t)}{dt} \leq K$, per ogni $t \geq 0$, allora:

$$\Delta I_H / I_H \geq -\frac{1}{2} K M^2, \quad (3.19)$$

dove:

$$M^2 = \sum_{j=1}^M (s_j - H)^2 C_j P_0(s_j) / I_0 \quad {}^{31} (3.20)$$

La disuguaglianza (3.19) è proprio il limite inferiore alla variazione del valore finale del portafoglio. Questo è il prodotto di due fattori: il primo, $-\frac{1}{2}K$, è funzione solo della variazione dei tassi d'interesse; il secondo, M^2 , dipende solo dalla struttura del portafoglio d'investimento.

K viene invece definito da Fong e Vasicek nel loro paper come:

*“an upper bound, over maturity, on the change in the slope of the term structure”*³², cioè come il limite superiore alla variazione della pendenza della curva dei rendimenti, infatti K non è altro che la rappresentazione del «*twist*» della curva.

Avendo precedentemente ipotizzato uno *shift* non necessariamente convesso, K può assumere segno qualsiasi; visto che la variazione dei tassi è arbitraria, l'ipotetico investitore non può controllare la variazione massima della curva dei rendimenti, ma solo determinare la struttura del portafoglio e, quindi, la quantità M^2 .

³¹ Per la dimostrazione del Teorema si è fatto riferimento al paper di Fong H.G., Vasicek O.A., *A risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, Journal of Finance, 1984.

³² Fong H. G., Vasicek O. A., *“A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, Journal of Finance, 1984; Vol.39, n.5, pp. 1543.

Questo termine viene definito:

“*a multiplier of the unknown rate change, is a measure of risk for an immunized portfolio*”, determina cioè l’esposizione del portafoglio alla variazione dei tassi.

Per meglio capire il significato economico della variabile M^2 , possiamo notare la somiglianza tra la forma di questa variabile nell’equazione (3.20) e la *duration* indicata dall’equazione (3.16).

Mentre la *duration* è la media ponderata delle scadenze che usa come pesi i valori attuali dei singoli pagamenti, M^2 è la varianza ponderata dei tempi di pagamento intorno all’orizzonte di valutazione. Se i pagamenti vengono effettuati in date prossime alla scadenza finale, la varianza risulterà bassa; se i pagamenti sono meglio dilazionati nel tempo, essa risulterà alta.

Alla luce di quanto il teorema enuncia, un portafoglio con un basso valore di varianza sarà meno esposto a qualsiasi cambiamento della struttura dei tassi, rispetto ad uno con varianza più elevata. Parleremo, perciò, di portafoglio «*optimally immunized*», ossia di un portafoglio a cui corrisponde la minima esposizione alla variazione della struttura dei tassi, ottenuto minimizzando la misura di rischio M^2 , nel rispetto, ovviamente, della condizione di *duration* e del vincolo di bilancio.

La varianza ponderata, assume sempre valori non negativi. Se raggiunge il valore più basso, $M^2 = 0$, allora il portafoglio è composto da una sola obbligazione con *maturity* pari alla lunghezza dell’orizzonte temporale considerato e in questo specifico caso, il portafoglio viene definito «*perfectly immunized*», dal momento che nessuna variazione dei tassi ha influenza sul valore finale.

Il teorema qui dimostrato contiene, quindi, in questo particolare caso, il principale risultato delle Teorie classiche di immunizzazione.

Infatti, per *shift* paralleli abbiamo che:

$$\frac{d}{dt}\Delta(i)t = 0,$$

per ogni $t \geq 0$. Questo implica che $\Delta I_H \geq 0$, ovvero che la variazione del valore finale è sempre non negativa per tutti i portafogli che hanno una duration uguale all'orizzonte temporale.

Capitolo 4 – Un caso pratico di immunizzazione

Procederemo in questo capitolo allo studio di un caso pratico improntato sull'applicazione del Teorema di Fisher e Weil, successivamente del Teorema di Redington e infine di Fong-Vasicek , andando poi a sottolineare la differenza dei risultati a cui questi teoremi ci condurranno.

Per iniziare, ipotizziamo di finanziarci con l'emissione di uno *Zero Coupon Bond* e di investire il ricavato della nostra operazione finanziaria in un portafoglio obbligazionario, composto da tre Buoni Poliennali del Tesoro.

4.1. Costruzione del portafoglio

In data 30 Ottobre 2015 decidiamo di finanziarci per un importo di € 100.000,00 con l'emissione di uno *Zero Coupon Bond* con scadenza a 8 anni.

A fronte della liquidità ricevuta, dovremo, alla scadenza del contratto, restituire l'importo maggiorato degli interessi maturati, nel periodo preso in considerazione. Per calcolare il compenso ci serviremo del tasso d'interesse desumibile dalla sottostante tabella, che indica la curva dei rendimenti OIS EONIA ³³ al 30 Ottobre.

³³ I tassi OIS, Overnight Index Swap, rappresentano il valore medio atteso del tasso overnight EONIA, che è l'indice di riferimento per le operazioni interbancarie di finanziamento. Si fa riferimento agli swap sui tassi EONIA per indicare un accordo tra le parti finalizzato allo scambio di due diversi flussi di pagamenti giornalieri, in un periodo di tempo determinato; il primo flusso calcola l'interesse sull'EONIA (tasso variabile), il secondo flusso su un tasso fisso stabilito al momento della stipulazione del contratto (OIS).

Anni	S133 EUR OIS (EONIA) CU	S133 EUR OIS (EONIA) CURVA 10/30/15 Rend
1D	EONIA Index	-0,129
1W	EUSWE1Z Curncy	-0,14
2W	EUSWE2Z Curncy	-0,14
1M	EUSWEA Curncy	-0,142
2M	EUSWEB Curncy	-0,171
3M	EUSWEC Curncy	-0,189
4M	EUSWED Curncy	-0,2
5M	EUSWEE Curncy	-0,209
6M	EUSWEF Curncy	-0,216
7M	EUSWEG Curncy	-0,221
8M	EUSWEH Curncy	-0,222
9M	EUSWEI Curncy	-0,231
10M	EUSWEJ Curncy	-0,236
11M	EUSWEK Curncy	-0,239
1Y	EUSWE1 Curncy	-0,243
18M	EUSWE1F Curncy	-0,25
2Y	EUSWE2 Curncy	-0,243
30M	EUSWE2F Curncy	-0,214
3Y	EUSWE3 Curncy	-0,19
4Y	EUSWE4 Curncy	-0,097
5Y	EUSWE5 Curncy	0,018
6Y	EUSWE6 Curncy	0,149
7Y	EUSWE7 Curncy	0,288
8Y	EUSWE8 Curncy	0,423
9Y	EUSWE9 Curncy	0,548
10Y	EUSWE10 Curncy	0,659

Tabella 1. Tassi OIS EONIA al 30/10/15

Come possiamo osservare il tasso d'interesse per operazioni con scadenza a 8 anni è pari allo 0,423%. Per calcolare il capitale alla scadenza, utilizziamo il regime di capitalizzazione composta:

Capitale alla scadenza=

Importo finanziato x fattore di capitalizzazione=

$$= €100.000,00 \times (1 + 0,00423)^8 = €103.436,92$$

Il nostro passivo sarà quindi il seguente:

Importo finanziato	€ 100.000,00
Data di decorrenza	30/10/2015
Data di scadenza	30/10/2023
Tasso di valutazione	0,4230%
Capitale da rimborsare	€ 103.436,92
Maturity	8,005479452
Duration	8,005479452

Tabella 2. Dati riassuntivi del nostro passivo.

Possiamo ora investire il ricavato in un portafoglio costituito da tre Buoni Poliennali del Tesoro da noi selezionati; riportiamo le principali caratteristiche dei nostri BTP:

ISIN	IT0001086567
Categoria	Buono Poliennale del Tesoro
Emesso da	Repubblica Italiana
Data di godimento	1 Novembre 1996
Data di stacco della prima cedola	1 Maggio 1997
Frequenza cedole	semestrale
Tasso cedolare	7,25%
Scadenza	1 Novembre 2026
Corso secco al 30 Ottobre 2015	€ 155,84

ISIN	IT0001174611
Categoria	Buono Poliennale del Tesoro
Emesso da	Repubblica Italiana
Data di godimento	1 Novembre 1997
Data di stacco della prima cedola	1 Maggio 1998
Frequenza cedole	semestrale
Tasso cedolare	6,50%
Scadenza	1 Novembre 2027
Corso secco al 30 Ottobre 2015	€ 154,24

ISIN	IT0004513641
Categoria	Buono Poliennale del Tesoro
Emesso da	Repubblica Italiana
Data di godimento	1 Marzo 2009
Data di stacco della prima cedola	1 Settembre 2009
Frequenza cedole	semestrale
Tasso cedolare	5,00%
Scadenza	1 Marzo 2025
Corso secco al 30 Ottobre 2015	€ 130,56

Noto il corso secco di tutti i titoli, è necessario calcolare il Prezzo Tel-quel di ciascun BTP, sommando al prezzo secco un rateo (o *dietim*) che rappresenta la parte di interessi maturati dallo stacco dell'ultima cedola alla data di analisi, dovuta alla controparte che ci vende il suo titolo in quanto rappresentanza degli interessi di sua competenza, ovvero:

$$Rateo = Importo\ cedola \times \frac{\Delta t}{\Delta T}$$

Δt = scarto temporale tra la data di analisi e la data di pagamento dell'ultima cedola

ΔT = periodo che intercorre tra le due cedole.

Il prezzo Tel-quel è il prezzo d'acquisto del titolo che, affinché l'operazione finanziaria sia in linea con i livelli di prezzi e rendimenti sul mercato, deve coincidere con il valore attuale dei futuri flussi di cassa attualizzati al TIR; rappresenta l'esborso necessario per l'acquisto dei titoli ed un utile strumento per calcolare il Tasso Interno di Rendimento (TIR) dei singoli titoli.

Potendo calcolare il valore attuale dei flussi x all'epoca t , con scadenze $t=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ come:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{1}{(1+i)^{(t_k-t)}}$$

Il TIR è proprio l'unica soluzione reale all'incognita i dell'equazione.

Calcoliamo, quindi, il prezzo Tel-quel e il TIR di ciascun titolo:

ISIN	Prezzo Tel-quel	TIR
IT0001086567	€ 159,43	1,679%
IT0001174611	€ 157,45	1,540%
IT0004513641	€ 131,37	1,488%

Tabella 3 Prezzi e TIR per i titoli che compongono l'attivo del nostro portafoglio.

L'ultimo indice necessario per la costruzione del nostro portafoglio è la Duration. Essa come precedentemente detto, esprime la durata media finanziaria dei titoli e ci consente di stimare la variazione dei prezzi dei titoli al variare dei tassi.

Calcoliamo la Duration, applicando la formula:

$$D(t, J) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t_0) x_k (1 + j)^{-(t_k - t_0)}}{\sum_{k=1}^n x_k (1 + J)^{-(t_k - t_0)}}$$

Con $j = \text{TIR}$ dei singoli titoli.

E otteniamo i seguenti risultati:

ISIN	Duration
IT0001086567	8,2954
IT0001174611	9,0889
IT0004513641	7,7885

Tabella 4. Duration dei titoli

Possiamo ora procedere alla costruzione del nostro portafoglio secondo il teorema di Fisher e Weil, ovvero, ricercheremo la quantità di titoli da acquistare che minimizzino il costo del portafoglio e rispettino i due vincoli imposti dal teorema:

1. Il valore attuale del passivo deve coincidere con il valore attuale dell'attivo;
2. La Duration del passivo deve essere uguale alla Duration dell'attivo.

In questo modo, il portafoglio risulterà immunizzato da eventuali shift additivi paralleli che potrebbero intervenire sulla struttura per scadenza dei tassi.

Nella pratica, la ricerca della quantità α di titoli da acquistare è un problema di algebra lineare che risolveremo utilizzando uno strumento di programmazione lineare.

La programmazione lineare è quella branca della programmazione matematica che si occupa di studiare algoritmi di risoluzione per problemi di ottimizzazione sotto determinati vincoli; nel nostro caso il punto di ottimo è la minimizzazione del costo di acquisto del portafoglio, i vincoli sono quelli succitati e le incognite sono le quantità α di titoli.

Il problema di programmazione lineare viene così espresso:

$$\min \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$$

s.v.:

$$W(t, x) = W(t, y)$$

$$D(t, x) = D(t, y)$$

α_k = quantità titoli

p_k = prezzo dei titoli

Risolviendo il problema otteniamo:

ISIN	Quantità α	Prezzo Tel-quel	Esborso totale
IT0001086567	0	€ 159,43	€ 0,00
IT0001174611	105,95	€ 157,45	€ 16.682,35
IT0004513641	634,22	€ 131,37	€ 83.317,65

Tabella 5. Quantità di titoli che compongono il portafoglio

Per semplicità ipotizziamo che possono essere acquistate anche quantità α non intere, anche se nella realtà i titoli di Stato hanno lotto minimo pari a €1000.

Rappresentiamo graficamente il nostro portafoglio, per meglio percepire la partecipazione dei singoli titoli al rendimento del portafoglio:

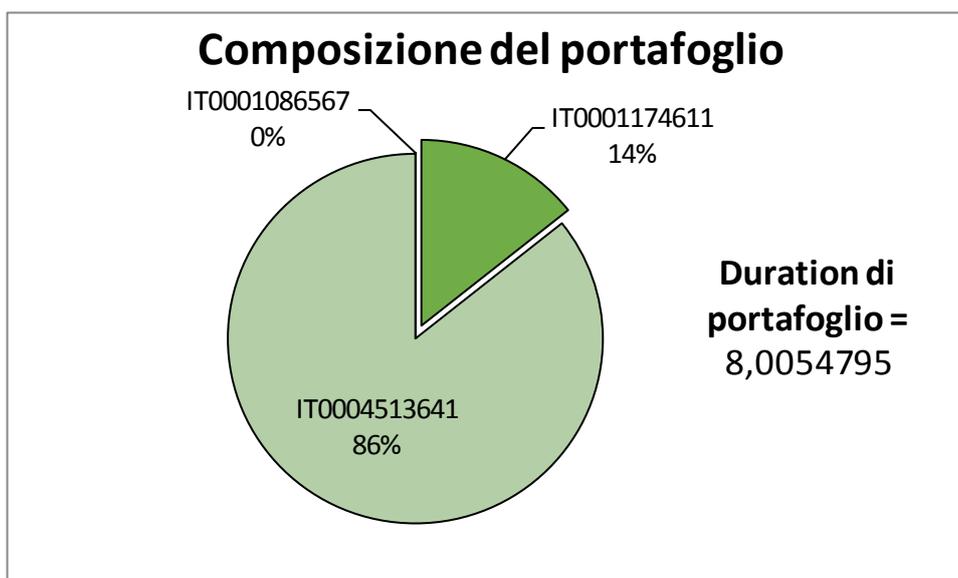


Figura 1 La composizione del portafoglio.
Dal grafico è possibile notare la predominanza del Titolo IT0004513641.

Con tale applicazione pratica del Teorema proposto da Fisher e Weil, si è individuata la quantità α di ogni titolo, da acquistare, tale che il portafoglio obbligazionario risulti coperto da shift additivi.

Se infatti andiamo a calcolare il quoziente di solvibilità del Portafoglio come:

$$QS = \frac{\text{valore totale attivo}}{\text{valore totale passivo}}$$

Otterremo :

$$QS = \frac{100\,000}{100\,000} = 1$$

Il risultato era prevedibile dal momento che abbiamo imposto come vincolo che i due valori si eguagliassero, ma ci dimostra numericamente che il teorema ci abbia portato a formare un portafoglio ottimizzato.

Se però sottoponiamo il nostro portafoglio ad uno *shift non parallelo*, ovvero ipotizziamo che il TIR dei nostri titoli cresca di un punto percentuale, otteniamo:

ISIN	TIR post stress	prezzi post shift
IT0001086567	2,679%	147,0885113
IT0001174611	2,540%	144,1464199
IT0004513641	2,488%	121,754160

Tabella 6 Prezzi e TIR dei titoli post shift.

Possiamo osservare confrontando la tabella 3 e la Tabella 6, che i prezzi dei titoli sono diminuiti e di conseguenza anche il valore dell'attivo del nostro portafoglio, infatti il valore totale dell'attivo risulta ora pari a €92 491,16 ottenuto come prodotto tra i prezzi dei titoli *post shift* e le quantità α dei titoli in tabella 5. Verifichiamo ora come è variato il valore del quoziente di solvibilità:

$$QS = \frac{92\,491,16}{100\,000} = 0,92$$

Questo dimostra che seppur il Teorema in caso di *shift non parallelo* non è del tutto valido, il valore del QS è poco distante da 1, quindi il risultato ottenuto sarebbe comunque utile a ridurre il rischio legato alla variazione dei tassi.

Come precedentemente detto, però, l'ipotesi di *shift additivo* non è l'unica possibile e tanto meno la più plausibile sui mercati reali; inoltre il Teorema di Fisher e Weil nella realtà operativa è utile solo per la risoluzione di problemi di ottimizzazione che siano inerenti uno *Zero Coupon Bond*, ovvero un titolo caratterizzato da un solo flusso di cassa; per questo motivo proseguiremo nella nostra analisi ad applicare Teoremi che ci conducano all'ottimizzazione di portafogli il cui passivo sia rappresentato da una serie di flussi di cassa.

4.2. Costruzione del portafoglio: copertura di uscite multiple

Consideriamo un portafoglio il cui attivo sia caratterizzato dagli stessi titoli considerati per il teorema di Fisher e Weil; per costruire il nostro passivo invece ipotizziamo di finanziarci per un importo di € 86 237,0355 che provvederemo a rimborsare entro due anni ad una rata semestrale di € 850 che cresce in progressione geometrica e che alla fine del decimo anno restituiremo la rata maggiorata di € 20 000 per velocizzare la restituzione del finanziamento.

Partendo dalla Tabella 1 che rappresenta la curva dei tassi EONIA al 30/10/2015 abbiamo calcolato i tassi, non disponibili, per interpolazione lineare e successivamente da questi abbiamo dedotto $i(0,t)$ semestrali e $v(0,t)$ (fattore di attualizzazione) relativi alle diverse scadenze:

t anni	i(0,t) annuo	i(0,t) semestrale	i(t-1,t) semestrale	v(0,t)	Passivo
				1	
0,5	-0,0022	-0,00108	-0,001080584	1,001081753	-€ 850,00
1	-0,0024	-0,00121	-0,001350876	1,002435919	-€ 935,00
1,5	-0,0025	-0,00125	-0,001320865	1,003761753	-€ 1.028,50
2	-0,0024	-0,00122	-0,001110602	1,004877772	-€ 1.131,35
2,5	-0,0021	-0,00107	-0,000489698	1,0053701	-€ 1.244,49
3	-0,0019	-0,00095	-0,000349628	1,005721729	-€ 1.368,93
3,5	-0,0014	-0,00072	0,000679546	1,005038759	-€ 1.505,83
4	-0,0010	-0,00049	0,001144879	1,003889427	-€ 1.656,41
4,5	-0,0004	-0,00020	0,002106247	1,001779432	-€ 1.822,05
5	0,0002	0,00009	0,002681359	0,999100486	-€ 2.004,26
5,5	0,0008	0,00042	0,003697484	0,995419937	-€ 2.204,68
6	0,0015	0,00074	0,004352206	0,991106437	-€ 2.425,15
6,5	0,0022	0,00109	0,005267485	0,985913155	-€ 2.667,66
7	0,0029	0,00144	0,00596172	0,980070251	-€ 2.934,43
7,5	0,0036	0,00178	0,006505262	0,973735844	-€ 3.227,87
8	0,0042	0,00211	0,007179057	0,966795167	-€ 3.550,66
8,5	0,0049	0,00242	0,007426457	0,959668232	-€ 3.905,73
9	0,0055	0,00274	0,008049937	0,952004655	-€ 4.296,30
9,5	0,0060	0,00301	0,008006721	0,944442765	-€ 4.725,93
10	0,0066	0,00329	0,008560046	0,936426907	-€ 25.198,52
10,5	0,0071	0,00354	0,008534739	0,928502382	-€ 4.725,93
11	0,0076	0,00379	0,00903297	0,92019033	-€ 5.198,52
11,5	0,0080	0,00401	0,009012957	0,911970777	-€ 5.718,37
12	0,0085	0,00424	0,009466132	0,903418895	-€ 6.290,21

Tabella 7 I dati riportati in rossi, sono i tassi calcolati per interpolazione

Utilizzando i $v(0,t)$, i flussi di incassi relativi ai singoli titoli e le passività, abbiamo calcolato i valori attuali dei prezzi, il TIR annuo e semestrale, il numeratore della Duration e il numeratore di II ordine della Duration, ottenendo i seguenti risultati:

	Valori attuali	Numeratore D	TIR semestrale	TIR annuo	Numeratore D II ordine
IT0001086567	170,6	1.455,353	0,836%	1,68%	14.424,563
IT0001174611	166,37	1.550,722	0,767%	1,54%	16.773,896
IT0004513641	138,06	1.166,771	0,620%	1,24%	10.925,651
Passività	86.237,035	-731.269,322	0,290%	0,58%	-6.897.026,33

Tabella 8 riassume tutti i dati fondamentali dell'attivo e del passivo del portafoglio

4.3 Teorema di Redington

Possiamo ora procedere con l'applicazione del Teorema di Redington per il quale è necessario rispettare i seguenti 3 vincoli:

1. Il valore attuale dell'attivo deve essere equivalente al valore attuale del passivo

$$W(t^+, x) \geq W(t^+, y)$$

2. La duration dell'attivo deve essere uguale alla duration del passivo

$$D(t, x) = D(t, y)$$

3. Il momento di second'ordine dell'attivo dovrà essere sempre maggiore o uguale al momento di second'ordine del passivo

$$D^{(2)}(t, x) \geq D^{(2)}(t, y)$$

A questo punto possiamo ricercare la quantità α di titoli servendoci, anche in questo caso come nel paragrafo precedente, di uno strumento di programmazione lineare, con il quale abbiamo ottenuto:

Titoli	Quantità α
IT0001086567	28,01624934
IT0001174611	12,02748906
IT0004513641	575,8152545

Tabella 9 Quantità di titoli che compongono il portafoglio

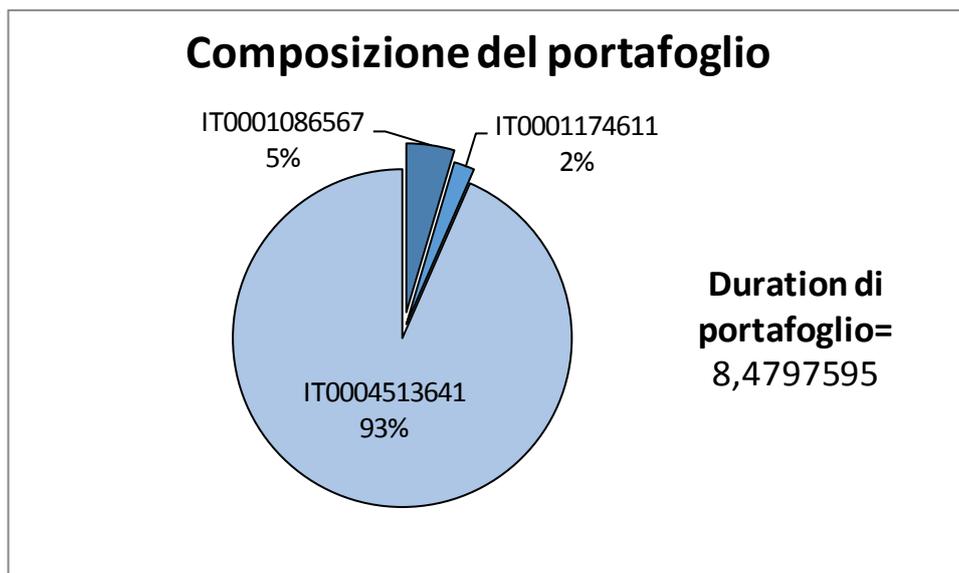


Figura 2 La Composizione del portafoglio secondo il Teorema di Redington.

4.4. Teorema di Fong e Vasicek

A differenza di quanto afferma Redington, Fong e Vasicek all'interno del loro lavoro *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization* analizzano l'esposizione di un portafoglio rispetto ad una variazione dei tassi non additiva; in questo modo sono giunti a verificare che l'esposizione del portafoglio al rischio di tasso è determinata esclusivamente dalla specifica composizione dello stesso, modificando quest'ultima si può individuare un limite inferiore alla variazione dei tassi, esso è il prodotto tra due fattori, il primo dipende dalla tipologia e dalla variazione dei rendimenti, il secondo dalla struttura del portafoglio.

Il secondo fattore succitato non è altro che M^2 cioè quel valore che quantifica il grado di esposizione del portafoglio alla variazione dei rendimenti.

Per calcolare tale indice è necessario innanzitutto calcolare sia all'attivo che al passivo del nostro portafoglio il MAD (*mean absolute deviation*) :

$$MAD \text{ attivo} = \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \quad \forall j.$$

$$MAD \text{ passivo} = \left| \sum_{k=1}^m (t_j - t_k) y_k v(t, t_k) \right| \quad \forall j$$

L'equazione appena scritta non è altro che il vincolo sulla dispersione in valore assoluto; infatti, per ricercare la quantità α di titoli secondo quanto affermato da Fong e Vasicek, è necessario rispettare, oltre al vincolo di bilancio e alla condizione di Duration (come imposto nel Teorema di Redington), anche che il MAD attivo sia maggiore o uguale al MAD passivo.

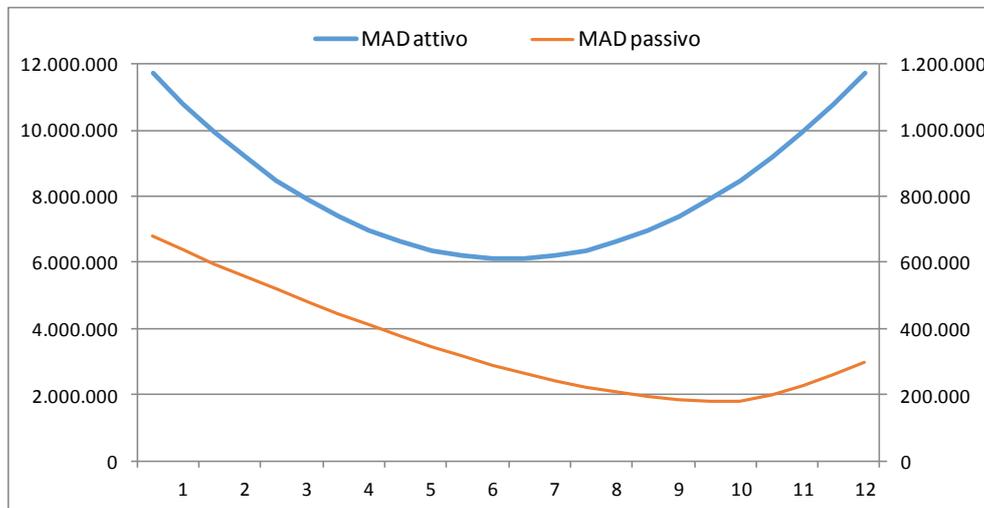


Figura 3 Rappresentazione grafica Mad attivo e Mad passivo.

Il grafico ci consente di provar che effettivamente il MAD attivo (serie 1) è maggiore del MAD passivo (serie 2).

Nel rispetto di questi vincoli, il problema di programmazione lineare si sintetizza come:

$$\min \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$$

s.v.:

$$W(t, x) = W(t, y)$$

$$D(t, x) = D(t, y)$$

$$\sum_{k=1}^m |t_j - t_k| x_k v(t, t_k) \geq \left| \sum_{k=1}^m (t_j - t_k) y_k v(t, t_k) \right| \quad \forall j.$$

Risolvendo il problema si ottiene:

quantita α titoli
0
15,21368995
606,5261822

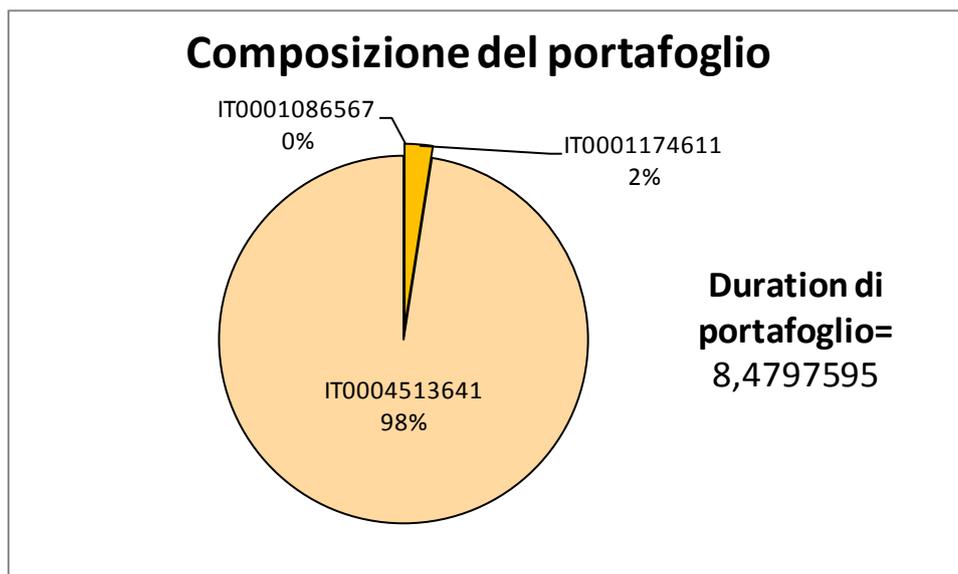


Figura 3 La Composizione del portafoglio secondo il Teorema di Fong e Vasicek

Possiamo ora calcolare la dispersione del portafoglio in questo modo:

$$M^2 = \sum_{j=1}^M (s_j - H)^2 C_j P_0(s_j) / I_0$$

Ottenendo:

$$M^2 = 7,89565722$$

Si è individuata la quantità α di ogni titolo, da acquistare, tale che il portafoglio obbligazionario risulti coperto da shift additivi; se infatti andiamo a calcolare il quoziente di solvibilità del Portafoglio come:

$$QS = \frac{\text{valore totale attivo}}{\text{valore totale passivo}}$$

Otterremo :

$$QS = \frac{86\,237,04}{86\,237,04} = 1$$

Il risultato era prevedibile dal momento che abbiamo imposto come vincolo che i due valori si eguagliassero, ma ci dimostra numericamente che il teorema ci abbia portato a formare un portafoglio ottimizzato.

Se però sottoponiamo il nostro portafoglio ad uno *shift non parallelo*, ovvero ipotizziamo che i tassi EONIA subiscano una maggiorazione di un 1% dei nostri titoli, otteniamo:

ISIN	TIR post stress	Prezzi post shift
IT0001086567	1,68%	€ 168,0398
IT0001174611	1,54%	€ 165,3659
IT0004513641	1,24%	€ 135,6910

Tabella 10 Prezzi e TIR dei titoli post shift.

Possiamo osservare confrontando la Tabella 3 e la Tabella 6, che i prezzi dei titoli sono diminuiti e di conseguenza anche il valore dell'attivo del nostro portafoglio, infatti il valore totale dell'attivo risulta ora pari a €84 815,97 ottenuto come prodotto tra i prezzi dei titoli *post shift* e le quantità α dei titoli in tabella 5. Verifichiamo ora come è variato il valore del quoziente di solvibilità:

$$QS = \frac{84\,815,97}{86\,237,04} = 0,98$$

Abbiamo appena dimostrato che il valore del QS è poco distante da 1, quindi applicare il Teorema di Fong e Vasicek per ricercare portafogli immunizzati da *shift non paralleli* è ancor più efficace che applicare il Teorema di Fisher e Weil in cui il QS risultava pari a 0,92

Conclusioni

Il percorso fin qui tracciato sull'evoluzione della teoria dell'immunizzazione finanziaria, ci ha permesso di analizzare i principali teoremi, da quelli di impostazione classica proposta da Fisher e Weil, a quello di Redington sino alla teoria di Fong Vasicek.

Ora invece proponiamo un confronto tra queste cercando di evidenziare le principali differenze nella formulazione delle ipotesi, nei risultati ottenibili e definiamo, quindi, il passaggio da una concezione più semplicistica e distorta nei confronti dell'incertezza, quale quella classica, ad un metodo caratterizzato da una maggiore correttezza rispetto alla realtà operativa, ovvero la teoria semi-deterministica.

Le teorie classiche sono finalizzate, in primo luogo, a fornire una tecnica per l'immunizzazione di portafogli d'investimento. Questi ultimi verranno considerati immunizzati se, nell'istante di valutazione, il valore attuale di attivo e passivo si eguagliano; i portafogli, cioè, sono in condizione di «*perfect matching*».

In quest'ottica, lo *shift* considerato è quello parallelo, ovvero la nuova curva dei rendimenti prodotta in seguito al verificarsi dello *shift* è una curva perfettamente parallela a quella originaria.

Il Teorema di Fisher e Weil, introdotto e sviluppato nel paragrafo 2.2 di questo elaborato, segue proprio l'impostazione classica d'immunizzazione e si propone come una tecnica utile per superare il principale limite fin a quel momento considerato, ovvero il principio di selezione di titoli la cui vita a scadenza coincida con l'orizzonte temporale considerato.

Fisher e Weil sviluppano un teorema secondo il quale un portafoglio risulta immunizzato, nell'ipotesi classica del verificarsi di uno *shift* parallelo sulla

struttura dei tassi, se la *Duration* dell'attivo e quella del passivo si eguagliano, ovvero attivo e passivo hanno la stessa elasticità rispetto alla variazione dei tassi.

Proseguendo nella successione di queste teorie così come sono state esposte nel presente elaborato, abbiamo analizzato l'impostazione data da Redington alla teoria classica. In particolar modo, Redington propone un'estensione del Teorema di Fisher e Weil al caso di uscite multiple; oggetto centrale del suo lavoro è stata la ricerca della condizione di «*perfect matching*» tra attivo e passivo, sempre nell'ipotesi di *shift* paralleli, nel caso di passivo composto da una sola uscita di cassa futura.

Sviluppando il teorema, l'importante innovazione introdotta rispetto alle tecniche fino a quel momento sviluppate è stata la variabile della dispersione netta che influenza il valore post-*shift* di un portafoglio, insieme al valore attuale dei flussi e alla *duration*. Secondo l'impostazione di Redington, il portafoglio composto da flussi di uscite multiple, nell'ipotesi di *shift* paralleli infinitesimi, risulterà immunizzato se, rispettato il vincolo di bilancio e la condizione di *duration*, la dispersione netta risulterà non negativa.

Entrambi i teoremi appena citate sono di stampo classico e sono considerati esemplificativi, poiché analizzano solo l'ipotesi base di uno *shift* parallelo (o additivo come viene più volte definito), che di per se è una semplificazione degli scenari osservabili. Quindi, il problema di selezione di portafogli risulta concreto, in condizioni di incertezza, solo per questa particolare categoria di *shift*, che viene, per assurdo, considerata certa. In quest'ottica, l'immunizzazione finanziaria viene definita una teoria «*too good*»³⁴, non compatibile con l'assunzione di arbitraggio “*leaves an investor better off than holding a pure discount under some conditions*”

³⁴ Citazione di Ingersoll, Skelton e Weil nella loro emblematica critica alle «duration-matching strategies» di stampo classico.

and no worse off under all conditions”³⁵, né con l’ipotesi di equilibrio del mercato

Già nel 1952 Rich nella sua *discussion* sul lavoro di Redington, definisce la teoria classica come “*una formula magica*”, che “*garantisce profitto per qualunque variazione del tasso d’interesse, verso l’alto o verso il basso*”. Rich denunciava in questi termini, l’inadeguatezza delle procedure classiche sviluppate in condizioni di incertezza, legata principalmente all’ipotesi base di queste teorie che prevede un’evoluzione *ad hoc* della struttura dei tassi. È, difatti, impossibile predire o affermare con certezza quali potranno essere le variazioni della struttura dei rendimenti.

Questa ipotesi, poco realistica, non ha spinto alla revisione dei fondamenti di queste teorie, ma ha solo concentrato l’attenzione sulla scarsa realistica del modello, senza valutare con attenzione l’atteggiamento più idoneo alle condizioni di incertezza.

Come esempio di quanto appena affermato, si è analizzato, nell’ambito delle Teorie semi-deterministiche, il metodo proposto da Fong e Vasicek, definito Teorema di immunizzazione a minimo rischio.

Con questo teorema, gli autori analizzano l’esposizione di un portafoglio ad una variazione dei tassi nell’ipotesi del verificarsi di uno «*shift* qualsiasi» e non più solo nell’ipotesi di *shift* paralleli.

Studiando questo caso, Fong e Vasicek giungono ad osservare che l’esposizione è dovuta a diverse caratteristiche del portafoglio stesso; dunque per minimizzare il rischio che scaturisce dalla variazione della struttura dei tassi, bisogna strutturare i portafogli in modo tale che abbiano la minima dispersione.

³⁵ Citazione di Ingersoll, Skelton e Weil nella loro emblematica critica alle «*duration-matching strategies*» di stampo classico.

Propongono, perciò, un limite inferiore alla variazione della struttura dei tassi, che calcolano come il prodotto di due fattori:

- K , che è il limite superiore alla variazione della pendenza della curva dei rendimenti, ovvero una costante aleatoria che dipende solo dal tipo e dall'ampiezza della variazione;
- M^2 , cioè la varianza ponderata delle scadenze, che rappresenta una misura dell'esposizione e dipende solo dalla struttura del portafoglio e mediante la quale si può giungere a selezionare il portafoglio che minimizza il rischio legato a una variazione qualsiasi della struttura dei tassi.

Fong e Vasicek hanno quindi introdotto le Teorie dell'immunizzazione nell'ambito di un mercato in condizioni di equilibrio, attraverso un atteggiamento più consono all'incertezza.

Alla luce di queste considerazioni possiamo dire che nell'ottica proposta da Fong e Vasicek l'immunizzazione finanziaria non è più considerabile in termini di «non perdita»: con la nuova ipotesi di base del teorema, il valore netto post-*shift* del portafoglio può assumere valenza sia positiva che negativa e/o anche nulla.

Inoltre, avendo introdotto la varianza come misura del rischio legato a portafogli immunizzati da *shift* additivi, si possono considerare diverse strategie di selezione, sia in senso classico che a minimo rischio. Da ciò si evince che la misura del rischio è un aspetto caratterizzante dei flussi di importi e, ricordando che non vengono prese in considerazione le aspettative sulle condizioni di mercato, le strategie appena proposte sono le uniche plausibili.

Per giungere a schemi di analisi e di gestione più sensibili, che tengano in considerazione anzitutto le aspettative degli agenti economici attraverso valutazioni accurate, come quelle probabilistiche, bisognerà attendere i modelli di immunizzazione stocastica che comunque non renderanno meno

valida e ragionevole la logica del *downside risk*, secondo cui viene fissato un rendimento target, al di sotto del quale scatta la cosiddetta percezione del rischio da parte dell'investitore.

Quest'ultima affermazione porta con se, l'obiettivo principale della Teoria dell'immunizzazione finanziaria, ovvero, fornire all'investitore strumenti che siano in grado di monitorare e gestire il rischio legato ad ogni attività posta in essere, poiché è principalmente su questa variabile che si concentra attualmente l'attenzione del mondo finanziario. Infatti la crescita dell'operatività in strumenti derivati e le disposizioni sempre più rigide imposte dalle autorità di vigilanza del settore impongono standard di gestione del rischio sempre più accurati, e i Teoremi dimostrati, risultano un attimo strumento proprio in questo ambito.

Bibliografia

Arcelli M., *L'economia monetaria e la politica monetaria dell'Unione Europea, nona edizione*. Padova: CEDAM, 2007;

Bachelier L., “Théorie de la spéculation. Théorie mathématique de jeu”. Parigi: Edition Jacques Gabay, 1995.

Barone E., Cesari R., *Rischio e rendimento dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile in un modello stocastico univariato*. Contributi alla Ricerca Economica, Banca d'Italia, n.11, 1983.

Borton P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F.A., Torrigiani M., *Matematica Finanziaria. Seconda edizione*. Bologna, Monduzzi Editore, 1998.

Brealey R. A., Myers S. C., Allen F., Sandri S., *Principi di finanza aziendale. Settima edizione*. Milano: MacGraw-Hill, 2015.

Carluccio E., Cucurachi P. A., Zorzoli S., *Economia e gestione della banca*. Milano: EGEA, 2006.

Castellani M., Gozzi F., “*Matematica di base per l'Economia e l'Azienda*”. Bologna: Società Editrice Esculapio, 2011.

De Felice M., Moriconi F., *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*. Bologna: il Mulino, 1991.

Di Giorgio G., *Lezioni di economia monetaria, terza edizione*. Padova: CEDAM, 2007.

Duran D., 1957, *Growth Stocks and the Petersburg Paradox*, The Journal of Finance, Vol. 12, n.3.

Fisher L., *An Algorithm for Finding Exact Rates of Return*. Chicago: The Journal of Business, Vol.39, n.1, Part 2: Supplement on Security prices, 1966.

Fisher L., Weil R. W., (1971), *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies*, Chicago, The Journal of Business, Vol. 44, The University of Chicago Press.

Fong H. G., Vasicek O. A., *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*, The Journal of Finance, Vol. 39, n. 5.

Foschini G., materiale didattico del corso di Matematica Finanziaria. Roma: Univeristà LUISS Guido Carli, 2011.

Gozzi F.,(1996), *Alcune osservazioni sull'immunizzazione deterministica*. Pisa, Report n.104.

Ingersoll J. E., Skelton J., Weil R. L., (1978), *Duration Forty Years Later*, Journal of Finance and Quantitative Analysis, Vol.13, n.4.

Ito K., (1998), *My Sixty Years in Studies of Probability Theory*: discorso di accettazione del Kyoto Prize in Basic Sciences.

Karamata J., (1932), *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*, Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 145-148.

Macaulay F., (1938), *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rate, Bond Yield and Stock Prices in the United States since 1856*. Cambridge (MA): The National Bureau of Economic Research.

Modigliani F., Porgue G. A., (1974), *An introduction to Risk and Return*, Financial Analyst journal.

Nadotti L., Porzio C., Previati D., *Economia degli intermediari finanziari, terza edizione*. Milano: McGraw-Hill, 2014.

Principi per la gestione del rischio di tasso di interesse, Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, Basilea 1997.

Redington F. M., (1952), *Review of the Principles of life-Office Valuations*, Journal of the institute of Actuaries.

Rich C. D., (1952), *Discussion*, in Redington (1952).