

Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

**Applicazione del metodo Bootstrap
nei mercati finanziari prima e dopo la
crisi del 2007**

RELATORE

Prof. Carlo Domenico Mottura

CANDIDATO

Giuseppina Rennis

Matricola 185921

ANNO ACCADEMICO 2015-2016

INDICE

INTRODUZIONE	1
CAPITOLO I : TITOLI DERIVATI E LA YIELD CURVE	3
1. UNO SGUARDO GENERALE AI TITOLI DERIVATI	3
1.1 <i>Forwards</i>	5
1.2 <i>Futures</i>	5
1.3 <i>Contratti di Opzione</i>	7
1.4 <i>Swaps</i>	7
2. I TASSI D'INTERESSE NELLA COSTRUZIONE DELLA CURVA DEI RENDIMENTI	9
2.1 <i>I tassi d'interesse</i>	9
2.2 <i>La curva dei rendimenti</i>	10
3. ZERO-COUPON BONDS E COUPON-BONDS NEL MERCATO ITALIANO	13
CAPITOLO II : IL METODO DEL BOOTSTRAP	15
1. IL METODO TRADIZIONALE	15
1.2 <i>Descrizione e applicazione</i>	16
1.2 <i>Interpolazione Lineare</i>	20
1.2.1 <i>Applicata ai tassi swap</i>	20
1.3 <i>Interpolazione cubica: natural cubic spline</i>	22
2. METODO APPLICATO AI TASSI SWAP	25
2.1 <i>Titoli di stato versus Libor/Euribor</i>	25
2.2 <i>Curva swap</i>	26
2.2.1 <i>IRS Plain Vanilla</i>	27
2.3 <i>Derivazione della curva spot dai tassi swap</i>	32
CAPITOLO III : IL METODO BOOTSTRAP RIVISITATO	35
1. CRISI FINANZIARIA E CONSEGUENZE SUL TASSO BENCHMARK	35
1.1 <i>Liquidity risk</i>	36
1.1.1 <i>Tasso Euribor versus Eonia</i>	36
1.1.2 <i>Tasso Libor versus OIS</i>	38
1.1.3 <i>Tassi FRA e tassi Forward</i>	39
1.1.4 <i>Basis-swap</i>	39
1.2 <i>Default risk e collateralizzazione</i>	41
2. MODELLO A CURVE MULTIPLE	44
2.1 <i>Discounting curve</i>	44
2.2 <i>Forwarding curve</i>	45

3.	IL METODO DEL BOOTSTRAP NEL SINGLE-CURVE MODEL E MULTI-CURVE MODEL	45
	CONCLUSIONE	47
	BIBLIOGRAFIA	49
	PRINCIPALI SITI CONSULTATI	50

INTRODUZIONE

La struttura per scadenza dei tassi d'interesse (curva dei rendimenti o *yield curve*) descrive una delle relazioni fondamentali in ambito finanziario. Essa mette in relazione i tassi d'interesse con le rispettive *maturity*, consentendo una conoscenza del mercato per l'attività di *pricing* e di valutazione dei titoli. Nella teoria classica, che si basa sull'ipotesi dell'esistenza del mercato perfetto dove non esistono opportunità di arbitraggio, la determinazione della *yield curve* non incontra alcuna difficoltà. La teoria classica però è applicabile solamente in un mercato completamente regolamentato. Con l'introduzione dei *derivatives*, titoli negoziati soprattutto nel mercato *over-the-counter*, la valutazione dei titoli quotati è diventata sempre più difficile perché sono emerse le asimmetrie e le imperfezioni del mercato. Particolare importanza è assunta dai contratti IRS Plain Vanilla, titoli *coupon swap* indicizzati al tasso Libor o Euribor, considerati ottimi tassi benchmark in quanto *risk-free*. Essendo difficile valutare i titoli, anche la determinazione della *yield curve* incontra difficoltà. I parametri utili alla costruzione della curva sono difficili da osservare nel mercato: è per questo motivo che si ricorre al metodo del Bootstrap, il quale permette di effettuare una stima della *yield curve*. Il metodo del Bootstrap, introdotto in ambito statistico ed esteso grazie a Nelson e Siegel nel mondo finanziario, non è esaustivo perché non permette il calcolo del tasso di titoli con *tenor*¹ differenti. Per risolvere questo problema vengono utilizzati metodi di interpolazione tra cui i più usati sono l'interpolazione lineare e la costruzione della funzione *cubic spline*. La *cubic spline* è una equazione parametrica di terzo grado che consente di effettuare una stima alquanto precisa della *yield curve*. Nonostante la precisione dei risultati ottenuti nelle equazioni parametriche aumenta all'aumentare del grado della equazione, la scarsità di dati da utilizzare per l'interpolazione limita gli analisti finanziari all'uso della interpolazione cubica. Dall'utilizzo congiunto del metodo del Bootstrap e dell'interpolazione la stima della *yield curve* riflette la realtà nel mercato finanziario. La crisi finanziaria iniziata ad Agosto del 2007 provocò un aumento del *liquidity risk* e del *default risk*. Il *liquidity risk* è il rischio che un titolo non possa essere venduto a un prezzo equo con bassi costi di transazione e in breve tempo; il *default risk* è il rischio che il debitore non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi di pagamento di interessi e di rimborso del capitale. Lo *spread* tra i tassi aumentò creando divergenze nei prezzi ed aumentò il grado di illiquidità nei mercati

¹ Il *tenor* è la *maturity* di un contratto finanziario derivato atipico, negoziato sul mercato *over-the-counter*.

finanziari. Prima della crisi i valori del *liquidity risk* e del *default risk* erano bassi e trascurabili nell'attività di *pricing* dei titoli. Per ridurre il *liquidity risk* le banche centrali attuarono *open market operations* espansive, mentre, per ridurre il *default risk*, venne introdotto l'uso del *collateral* come mezzo di garanzia per i contratti finanziari. Nonostante tali interventi la situazione finanziaria non si è ristabilita: è stato quindi necessario abbandonare l'approccio teorico tradizionale per tenere conto delle caratteristiche del nuovo mercato. Il modello mono-curva non ha più valore nel nuovo scenario perché genera una stima distorta della realtà. Da qui l'esigenza di introdurre un modello a curve multiple per le cui determinazioni è stato necessario l'uso di diverse tecniche di Bootstrap e di interpolazione. Il modello a curve multiple prevede la creazione di due curve: *discounting curve* e *forwarding curve*, e dal loro uso la stima della situazione del mercato risulta correttamente interpretata.

Nel primo capitolo si analizzerà l'introduzione dei derivati nel mercato finanziario, con una breve descrizione dei principali contratti negoziabili. Si tratterà a seguito la descrizione della curva dei rendimenti, la sua importanza nel mondo finanziario e quali sono i problemi legati alla sua determinazione. Il secondo capitolo tratterà il metodo del Bootstrap tradizionale usato in un approccio a curva singola, e sarà costruita la *yield curve* utilizzando tale metodo. Si tratterà poi l'analisi delle diverse metodologie di interpolazione e come l'uso combinato dei due metodi possa fornire una stima non distorta della curva dei rendimenti. Il terzo capitolo infine analizzerà l'evoluzione del mercato e le conseguenze prodotte dalla crisi finanziaria del 2007 sulla valutazione dei tassi per la determinazione della *yield curve*. Si analizzerà il nuovo approccio a curve multiple e le nuove tecniche di Bootstrap per il calcolo dei tassi utilizzabili nella costruzione delle diverse curve dei rendimenti in base ai diversi *tenor*.

CAPITOLO I

TITOLI DERIVATI E LA YIELD CURVE

1. Uno sguardo generale ai titoli derivati

Gli strumenti finanziari derivati o *derivatives* sono contratti il cui valore dipende dall'andamento di un'attività sottostante, nota come *underlying asset*. I titoli derivati sono i *futures*, i *forward*, le opzioni e gli *swap*. L'attività sottostante è rappresentata dai tassi d'interesse o dai prezzi di attività negoziabili, da azioni o indici azionari, da tassi di cambio e da merci. A partire dal 1989-1992 alcuni fattori economico-storici hanno determinato la diffusione di tali titoli, che hanno assunto un'importanza primaria nel mercato finanziario. I principali avvenimenti economici da cui è derivata la loro diffusione sono:

- Il crollo degli accordi di Bretton Woods² nel 1971 con il conseguente emergere del rischio di cambio;
- Gli shock petroliferi del 1973 e del 1979, i quali causarono un aumento vertiginoso del rischio di mercato a causa di ampie fluttuazioni e di un aumento dei prezzi, che generarono conseguentemente la crescita dell'inflazione.

In questo contesto storico i titoli derivati vennero utilizzati al fine di copertura dai rischi o a fini speculativi. I titoli derivati hanno ricoperto un ruolo fondamentale durante la crisi finanziaria del 2007, essendo stati considerati una delle cause principali della bolla speculativa scoppiata dopo il fallimento della Lehman Brothers³. I titoli derivati sono stati utilizzati per coprire il rischio derivante dalla mancanza di garanzie nell'emissione dei mutui *subprime*; in effetti la probabilità che i debitori di mutui *subprime* non riuscissero a restituire l'ammontare del mutuo era molto alta: per ridurre il rischio di credito gli istituti finanziari elaborarono strumenti di cartolarizzazione del debito molto complessi. I due mezzi maggiormente usati sono stati i *collateralized debt obligations (CDO)*⁴ e dagli *structured*

² Gli accordi di Bretton Woods garantirono stabilità nelle relazioni commerciali e finanziarie tra i principali paesi europei perché stabilirono l'obbligo per ogni paese di stabilizzare il tasso di cambio ad un valore fisso rispetto al dollaro. Gli accordi inoltre istituirono il Fondo Monetario Internazionale FMI per la ricostruzione e lo sviluppo economico e finanziario.

³ La Lehman Brothers era una delle più grandi società statunitensi. Era attiva nei servizi finanziari a livello globale ed è fallita il 15 Settembre del 2008 a seguito della crisi finanziaria che ebbe inizio ad Agosto 2007.

⁴ I CDO sono prestiti obbligazionari creati usando la tecnica della cartolarizzazione. Essi sono pacchetti di bond o di derivati emessi da speciali società-veicolo. Il loro rimborso e le loro cedole sono garantite dal portafoglio sottostante di obbligazioni o di prestiti o di derivati. I CDO possono avere strutture molto complesse, che creano anche un effetto leva.

investment vehicles (SIV)⁵, che ebbero come unico obiettivo quello di attrarre gli investitori con rendimenti molto elevati con corrispondenti elevati livelli di rischio di *default* del credito, in modo da distribuire la rischiosità su tutto il mercato finanziario. Dopo il fallimento della Lehman Brothers si creò il cosiddetto ‘effetto domino’ su tutti gli istituti finanziari, essendo stati tali crediti aleatori negoziati e diffusi a livello internazionale.

I principali mercati dove vengono negoziati i *derivatives* sono:

- I Mercati Di Borsa, dove vengono negoziati contratti standard definiti dalle stesse borse. Il primo mercato di borsa è il Chicago Board of Trade (CBOT), istituito nel 1848 per riunire mercanti ed agricoltori con l’obiettivo di standardizzare la quantità e qualità del grano scambiato. Col passare degli anni lo sviluppo dei mercati ha favorito la nascita di nuove borse. Oggi esistono il Chicago Mercantile Exchange Group (CME Group)⁶, il Chicago Board Options Exchange (CBOE) ed altri mercati di borsa, dove sono negoziati un’ampia varietà di titoli, indici azionari, *futures* e valute. I mercati di borsa possono essere *open-outcry system*, dove vi è l’incontro fisico tra gli operatori, oppure *electronic trading*, dove l’incontro tra i *traders* avviene sul sistema online. Con lo sviluppo dell’informatica i secondi hanno assunto un ruolo predominante rispetto ai primi.
- Mercati Fuori Borsa noti come *over-the-counter markets* (OTC), caratterizzati da una rete telematica di mediatori dove avviene l’incontro tra domanda e offerta. Essi sono molto più ampi dei mercati di borsa perché forniscono autonomia contrattuale⁷. Lo svantaggio principale di questi mercati è rappresentato da un alto rischio creditizio a causa della mancanza di regolamentazione e di controllo. Esempio emblematico dell’entità del rischio creditizio è rappresentato dal fallimento della Lehman Brothers, banca attiva nella negoziazione di titoli derivati *over-the-counter*. Dopo il suo fallimento è stato difficile ristabilire le basi nel mercato.

Una generica classificazione dei *derivatives* è la seguente:

⁵ Il SIV è stato inventato da Citigroup nel 1988. È una tipologia di società finanziaria creata per guadagnare un differenziale tra le attività e le passività, come una banca tradizionale. La strategia di una SIV è di prendere in prestito denaro mediante l’emissione di titoli a breve termine a bassi tassi di interesse e di prestare il denaro con l’acquisto di titoli a lungo termine a tassi di interesse più elevati: la differenza tra i tassi è usata per remunerare gli investitori.

⁶ Il Chicago Mercantile Exchange Group è nato dalla fusione tra Chicago Board of Trade, Chicago Mercantile Exchange e New York Mercantile Exchange.

⁷ Le condizioni contrattuali devono essere sempre vantaggiose per entrambe le parti che stipulano il contratto finanziario.

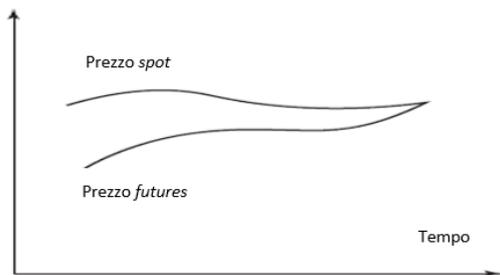
1.1 Forwards

I contratti a termine o *forwards* sono contratti in cui una parte, assumendosi la posizione lunga chiamata *long position*, si impegna⁸ a comprare l'attività sottostante entro un termine e ad un prezzo stabilito al momento della negoziazione; in modo speculare, l'altra parte assume la posizione corta chiamata *short position* e si impegna a vendere la stessa attività alla stessa scadenza e allo stesso prezzo. Tra essi molto importanti sono i *Forward Rate Agreements* (FRAs) in cui le parti si mettono d'accordo sul tasso di interesse da applicare ad un certo capitale e per un dato periodo di tempo futuro ed in cui il sottostante è valutato in base al tasso Libor. In tutti i contratti forwards le condizioni contrattuali sono stabilite a discrezione delle parti e quindi, essendo titoli atipici, sono negoziati nei mercati OTC.

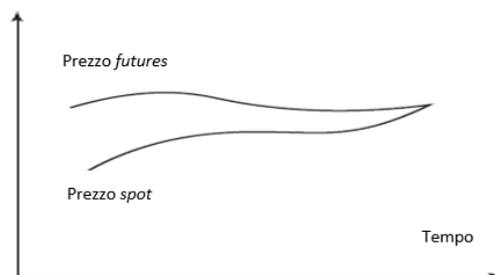
1.2 Futures

I *futures* sono, come i *forwards*, contratti in cui le parti si impegnano a concludere una transazione entro una data scadenza e ad un dato prezzo stabiliti durante la negoziazione. Solitamente le parti concludono il contratto prima della scadenza prestabilita, e ciò determina la non consegna del sottostante. I *futures* sono negoziati nei mercati di borsa la quale stabilisce l'oggetto, la dimensione, il luogo e la data di estinzione del contratto. La più grande borsa in cui essi vengono quotati e negoziati è il CME Group. Per la determinazione dei prezzi si utilizza la legge fondamentale dell'incontro tra domanda ed offerta e spesso si stabilisce un intervallo entro cui il prezzo può variare, per evitare che alte speculazioni temporanee creino variazioni eccessive dei prezzi. Infatti un arbitraggio eccessivo può causare problemi al mercato finanziario qualora esso si rifletti sui prezzi di tutti gli strumenti finanziari. All'avvicinarsi della data di scadenza, il prezzo *future* converge verso il prezzo a pronti o prezzo *spot*: infatti i meccanismi interni del mercato generano l'aggiustamento dei prezzi in base alla domanda e offerta dei titoli per evitare opportunità di arbitraggio. Tale meccanismo è uno dei pilastri su cui regge tutta la teoria sui mercati finanziari.

⁸ Si usa il verbo 'impegnare' a causa dell'esistenza del rischio di credito, che è sinonimo di incertezza sull'esito della negoziazione finanziaria.



Prezzo futures sotto il prezzo spot



Prezzo spot sotto il prezzo futures

Grazie all'introduzione di strumenti atti a ridurre il rischio di *default* dei *futures*, il problema del rischio è stato parzialmente risolto. Tra gli strumenti è importante citarne due:

- La Costruzione di Garanzie⁹, che consiste nella costituzione di un *collateral* come garanzia di una obbligazione creditizia. Qualora il debitore non adempia il proprio compito, il *collateral* sarà venduto e il creditore, al posto della prestazione che il debitore avrebbe dovuto adempiere, otterrà il corrispettivo derivante da tale vendita. Il Long Term Capital Management¹⁰ (LTCM) utilizzò la collateralizzazione nel corso degli anni '90. Tale metodo gli consentì di acquistare sul mercato secondario un grande ammontare di *derivatives*, anche se contemporaneamente generò l'aumento del proprio *leverage ratio*¹¹, che raggiunse livelli altissimi.
- L'uso delle 'Stanze di Compensazione' o *clearinghouses*, che sono uffici che hanno il fine di regolamentare i rapporti di credito e debito fra banche. Una maggiore regolamentazione riduce il rischio. Vengono originati dall'emissione di assegni bancari, che sono messi in circolazione dai titolari dei depositi in conto corrente. In Italia le loro sedi si trovano nelle città in cui esiste una filiale della Banca d'Italia e sono regolate da convenzioni stipulate dalla banca con le camere di commercio. Possono associarsi alla stanza di compensazione tutte le banche operanti in una determinata zona. Grazie ad esse avviene, per elevate quote di denaro, una circolazione di assegni bancari al posto di moneta, rendendo il

⁹ Collateralizzazione.

¹⁰ Il Long Term Capital Management è stato istituito nel 1994 da John Meriwether. Era un fondo speculativo al quale partecipavano i maggiori personaggi impegnati in finanza. Ha smesso di svolgere la sua attività nel 2000, a seguito di una grande crisi che colpì Russia e Asia. Il fondo aveva investito in titoli russi e asiatici e, a seguito del crollo dei tassi d'interesse, essi si rivelarono titoli 'spazzatura'. Tale situazione fu aggravata dal fatto che gli investitori preferirono investire in Buoni Ordinari del tesoro tedeschi e statunitensi piuttosto che nei fondi speculativi. A causa delle ingenti perdite, fu costretta a chiudere.

¹¹ Il *leverage ratio* o leva finanziaria è il rapporto tra il capitale netto dell'istituto bancario ed il totale delle attività. Maggiore è tale *ratio*, minore sarà l'uso di capitale proprio, maggiore sarà il profilo di rischio.

mercato più sicuro e trasparente. I motivi per cui vengono create le camere di compensazioni sono:

- Costruzione automatica dei depositi di garanzia;
- Riduzione del rischio di credito se il numero delle operazioni finanziarie regolate tramite i *clearinghouses* è alto;
- Regolamentazione e trasparenza nelle transazioni OTC.

Il rischio di *default*, seppur è stato parzialmente ridotto, resta un problema per i *futures* e per gli altri *derivatives*.

1.3 Contratti di Opzione

I contratti di opzione o *options* attribuiscono la facoltà di esercitare un diritto ad una determinata scadenza. Esistono due tipi di *options*:

- *Call options* che attribuiscono al proprietario la facoltà di acquistare una attività finanziaria ad una data prestabilita (*expiration date* o *maturity*) e pagando un predeterminato prezzo (*exercise price* o *strike price*);
- *Put options* che attribuiscono al proprietario la facoltà di vendere una attività ad una data prestabilita, ricevendo un predeterminato prezzo;

Le opzioni vengono negoziate nel mercato di borsa e nel mercato OTC; vi sono inoltre differenze tra le opzioni europee e quelle americane perché, mentre le opzioni europee possono essere esercitate solo alla data di scadenza, le opzioni americane sono sempre esercitabili anche prima della *expiration date* prestabilita.

1.4 Swaps

Gli *swaps* sono contratti con cui due parti si impegnano a scambiarsi periodicamente, a date prestabilite, delle somme di denaro calcolate applicando allo stesso capitale, noto come capitale nozionale, due parametri derivanti da due diverse variabili di mercato. Il capitale nozionale rappresenta l'oggetto dello scambio solo in alcune tipologie di *swaps*. Gli *swaps* sono classificati in base al tipo di variabile del mercato oggetto della contrattazione, oppure in base alla modalità di calcolo della somma da corrispondere.

In base al tipo di parametro o variabile di mercato si possono distinguere:

- *swap* su tassi di interesse (*interest rate swap*);
- *swap* su valute (*currency swap*);
- *swap* su merci (*commodity swap*);
- *swap* sul rischio di credito.

In base alla metodologia di calcolo delle somme che le parti si impegnano a scambiare si possono distinguere:

- *fixed to fixed swap*;
- *fixed to floating swap*;
- *floating to floating swap*;
- *Plain Vanilla swap*;
- *total rate of return swap*.

Gli *interest rate swap* (IRS) sono usati per calcolare gli *zero rates* attraverso l'applicazione del metodo del bootstrap. Con la sottoscrizione di questo contratto finanziario, le controparti si scambiano periodicamente quote di interessi relativi ad un capitale nozionale di riferimento, per un determinato periodo di tempo, pari alla durata del contratto. Le due controparti assumono posizione opposte:

- Un soggetto assume la *long position* percependo interessi attivi su una attività;
- L'altro soggetto assume la *short position* pagando interessi passivi su una passività.

Gli *interest rate swap* si suddividono in *coupon swap*, *basis swap* e *cross currency interest rate swap*. Ai fini dell'analisi del metodo del bootstrap è importante focalizzarsi sull'analisi del IRS Plain Vanilla, il più comune tipo di *coupon swap*. Nel *coupon swap* una parte assume due posizioni contemporaneamente:

- effettua pagamenti di quote di interessi calcolate applicando un tasso fisso (variabile) su un capitale nozionale in date prestabilite e per un periodo prestabilito.
- riceve pagamenti di quote di interessi calcolate applicando un tasso variabile (fisso) sullo stesso capitale nozionale e nelle medesime date di quando effettua i pagamenti.

Il sottoscrittore del *coupon swap* che si impegna a corrispondere il tasso variabile e a ricevere tasso fisso è denominato *floating rate payer* e si attende un ribasso nei tassi di interesse.

Il sottoscrittore del *coupon swap* che si impegna a corrispondere il tasso fisso ed a ricevere il tasso variabile è denominato *fixed rate payer* e si attende un rialzo dei tassi di interesse.

Gli interessi di entrambi i sottoscrittori si calcolano in corrispondenza di ogni data di liquidazione, data in cui si effettua la liquidazione della differenza tra i due flussi. Se il tasso variabile supera il tasso fisso, il *floating rate payer* deve versare l'importo differenziale al *fixed rate payer* e viceversa quando il tasso fisso supera il tasso variabile.

Essendo gli *swaps* contratti bilaterali molto vari, basati su diverse condizioni contrattuali scelte in base alle aspettative di guadagno e al rischio che le controparti decidono di assumersi, essi sono negoziati nei *over-the-counter markets* e non in quelli regolamentati.

Questi strumenti derivati vengono usati con finalità di speculazione, di copertura del rischio o di trasformazione della natura di una passività o attività. In generale, il tasso d'interesse dei titoli derivati, così come quello dei titoli non derivati, sono di fondamentale importanza per l'analisi del mercato finanziario. Nel prossimo paragrafo si procederà all'analisi dei tassi d'interesse, input per la costruzione della *yield curve*.

2. I tassi d'interesse nella costruzione della curva dei rendimenti

2.1 I tassi d'interesse

I tassi d'interesse sono le variabili maggiormente monitorate nell'economia. Il loro movimento è rilevato giornalmente e viene riportato nei quotidiani finanziari. Il che influenza direttamente e indirettamente la ricchezza dei cittadini. Il tasso d'interesse serve a calcolare la quota interessi che chi ha preso in prestito denaro (*borrower*) deve pagare ai prestatori di fondi (*lenders*). Esso è particolarmente importante perché serve a calcolare il prezzo dei titoli finanziari, e nel nostro campo di analisi, dei titoli derivati, tenendo in considerazione il fattore rischio e la *maturity* del titolo.

Per misurare il tasso d'interesse esistono molti metodi. Il più utilizzato è quello del calcolo dello *yield to maturity* che permette di calcolare il tasso di un titolo in base al suo prezzo di mercato. Il valore dello *yield to maturity* è diverso dai tassi d'interesse uniperiodali perché la valutazione è legata alla *maturity* del titolo, e non al singolo periodo preso in considerazione. Lo *yield to maturity* o TRES¹² dei titoli a cedola nulla viene anche definito *spot rate* o *zero rate* e rappresenta il tasso d'interesse attuale relativo ad un periodo corrispondente alla *maturity* del *bond*. Da un punto di vista algebrico esso corrisponde al tasso interno di rendimento (TIR), ovvero al tasso s che rende il contratto finanziario equo. In corrispondenza di $i = TIR$ il valore attuale netto dei flussi di cassa è pari a 0. La relazione per il calcolo dello *yield to maturity* è:

$$P = \frac{CF_1}{(1+i)} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

Ovvero

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

¹² TRES è l'acronimo di tasso di rendimento effettivo a scadenza.

Dove:

P è il prezzo di mercato del titolo;

t rappresenta le scadenze temporali;

CF_t è il flusso finanziario delle cedole e del rimborso del capitale al tempo t .

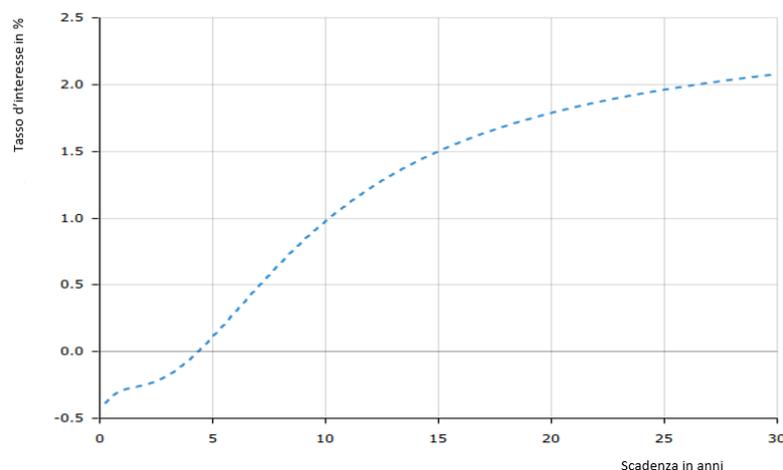
Lo *yield to maturity* così calcolato è utilizzato per la costruzione della curva dei rendimenti, fondamentale per misurare il rendimento dei diversi titoli presenti sul mercato finanziario.

2.2 La curva dei rendimenti

La curva dei rendimenti (*yield curve* o struttura per scadenza dei tassi d'interesse) è un grafico che evidenzia la relazione esistente tra lo *yield to maturity* di un titolo a cedola nulla e la *maturity* del titolo. La curva dei rendimenti è rilevante dal punto di vista economico finanziario perché:

- Descrive la relazione esistente tra il rendimento di un titolo e la sua scadenza: è fondamentale nel processo di determinazione dei prezzi di titoli a reddito fisso e del tasso d'interesse di titoli derivati;
- Riflette la politica monetaria di un paese e serve nella fissazione dell'inflazione attesa;
- Rappresenta l'indicatore monitorato dalle istituzioni finanziarie per la gestione del rischio nel mercato finanziario e per le decisioni d'investimento nell'acquisto dei titoli.

La curva dei rendimenti viene rappresentata su un asse cartesiano ponendo sull'asse delle ascisse le scadenze e sull'asse delle ordinate i rendimenti.



La curva dei rendimenti tendenzialmente ha una struttura ascendente. Tuttavia l'andamento ascendente può non verificarsi durante i periodi di crisi: durante la crisi del debito pubblico

che ha colpito recentemente paesi europei come la Grecia, la Spagna e l'Italia si è verificato un generale aumento del rendimento richiesto sui titoli obbligazionari di breve e medio termine che ha causato un appiattimento della curva dei rendimenti. L'andamento dopo la crisi della *yield curve* dei titoli di stato italiani a breve termine tende al ribasso e presenta, in alcuni momenti, tassi talmente bassi da essere negativi.

Quindi la forma della curva dei rendimenti può essere:

- Piatta quando il rendimento dei titoli a breve termine è simile a quello di lungo termine. Questa forma è il segnale di un rallentamento dell'attività economica;
- Negativa quando il rendimento dei titoli a lungo termine è più basso di quelli a breve termine. Questo andamento è il simbolo di una anomalia nel mercato determinata da una fase economica recessiva.

È compito della Banca Centrale intervenire nel mercato per ristabilire un andamento normale e ascendente della *yield curve*.

Il livello della curva riflette il comportamento della Banca Centrale nelle operazioni di politica monetaria, tramite cui essa determina la quantità di moneta offerta con *Open Market Operations*¹³ (OMO) espansive o restrittive, con conseguenze sul valore dei tassi d'interesse.

La curva dei rendimenti tende ad avere inizialmente una inclinazione maggiore e si appiattisce all'aumentare dei valori per le scadenze più lunghe. La funzione che lega la scadenza ai tassi d'interesse ha una struttura logaritmica. L'inclinazione dipende dai premi per il rischio, dalla segmentazione dei mercati e dalle aspettative.

I premi per il rischio sono richiesti dagli investitori quando decidono di investire nelle obbligazioni. Il premio delle obbligazioni a lungo termine sarà maggiore di quelle a breve termine per il valore positivo del tempo. Perciò il costo opportunità di investire il denaro nell'acquisto di obbligazioni piuttosto che detenerlo materialmente o investirlo in altre attività, oltre ad essere positivo, aumenta all'aumentare della scadenza¹⁴. Gli investitori decideranno di intraprendere un dato investimento se e solo se il profitto atteso è maggiore di quello ottenibile investendo il denaro in altre attività.

Le aspettative degli investitori sui tassi d'interesse futuri dipendono dalle caratteristiche economiche del mercato. Gli investitori creano aspettative sulla futura tendenza dei prezzi, sull'andamento dell'economia e sul comportamento della banca centrale.

¹³ Le operazioni di mercato aperto sono l'unico strumento utilizzabile dalle banche per l'intervento sulla politica monetaria del paese.

¹⁴ In caso di grave fase recessiva, quando i tassi d'interesse sono negativi, il costo opportunità di investire il denaro è negativo.

L'inclinazione della curva dei rendimenti è data dallo spread esistente tra un tasso a lungo termine e uno a breve termine ed ha un potere anticipatorio del ciclo economico.

Le curve dei rendimenti ricoprono quindi una posizione primaria nell'analisi dell'andamento dell'economia dei paesi.

È possibile suddividere la curva dei rendimenti in tre segmenti differenti:

- La curva dei rendimenti monetari: è il segmento che va dai tassi *overnight* a quelli con *maturity* pari a 1 anno. Il tasso di rendimento in questo segmento è determinato dalla politica monetaria della banca centrale nel mercato monetario. Questi rendimenti sono quelli generati dai BOT, depositi interbancari e certificati di deposito;
- La curva dei rendimenti a breve termine: è il segmento formato dai rendimenti di titoli con *maturity* minima di 1 anno e massima di 3 anni. In Italia i titoli negoziati con tale *maturity* sono i BTP e i CTZ;
- La curva dei rendimenti di medio-lungo termine: è determinato dal rendimento dei titoli con *maturity* compresa tra i 3 e i 10 anni. A tal fine, nel mercato italiano sono utilizzati i BTP con scadenza 5 e 10 anni;
- La curva dei rendimenti a lungo termine: è determinata dal rendimento dei titoli con *maturity* dai 10 ai 30 anni. Nel mercato italiano sono utilizzati BTP con scadenza 15 e 30 anni.

Il problema fondamentale della *yield curve* è il suo calcolo, che non sempre risulta facile, in quanto il mercato è frizionato ed incompleto e non fornisce tutti i dati per la sua determinazione.

Secondo Zangari(1977) e Lin (2002) i metodi per la stima della struttura per scadenza possono essere classificati in due gruppi:

- I metodi teorici per la stima della *yield curve*, i quali presentano una struttura esplicita per determinare le variabili conosciute nel mercato tramite l'osservazione dei dati nel mercato. Gli utilizzatori di modelli teorici sono Vasicek (1977), Cox(1985) e Kan(1996);

- I modelli empirici che sono invece basati sulla descrizione statistica dell'andamento della curva dei rendimenti. Non utilizzano alcuna conoscenza teorica per la stima della *yield curve* e cercano di costruire un insieme di punti tramite l'osservazione dei dati di mercato. Questo metodo è stato usato per la prima volta da Nelson e Siegel ma molti altri statistici hanno utilizzato questo approccio, tra cui Hull e White (1990), Svensson (1994) e Diebold e Li(2006).

Anche se utilizzando metodi statistici è possibile attuare una stima della curva non distorta, non è possibile stabilire un metodo standard per la sua determinazione a causa delle imperfezioni e incompletezze nel mercato finanziario. Nel prossimo paragrafo ci sarà la

descrizione del mercato dei titoli italiani, per spiegare il motivo per cui il metodo del bootstrap è un mezzo utile per risolvere il problema della determinazione della *yield curve*.

3. Zero-coupon bonds e Coupon-bonds nel mercato italiano

La prima distinzione da fare è tra gli *zero rates* dei titoli di Stato, che sono i tassi di riferimento a cui si finanziano gli Stati nella loro valuta locale ed il tasso Libor¹⁵, che è invece il tasso al quale una banca è disposta a prestare denaro ad un'altra banca. Le maggiori banche effettuano prestiti in denaro a livello internazionale solo nel breve periodo, e i prestiti sono denominati nelle principali valute del mondo. Per il calcolo dei tassi da utilizzare per determinare la curva dei rendimenti è necessario conoscere gli *zero rates*. In un mercato perfetto dove sia rispettato il principio di arbitraggio, nell'istante di valutazione t sono rappresentati i tassi d'interesse degli *zero-coupon bond* di tutte le scadenze.

Per determinare la struttura per scadenza a pronti dei tassi di interesse, rappresentata da una successione di tassi a pronti $i(0, t)$ con $1 \leq t \leq n$, il metodo utilizzato è la 'capitalizzazione semplice' o 'capitalizzazione composta'.

Come precedentemente descritto, il prezzo di un titolo a cedola nulla unitario con scadenza pari ad s con $s \geq t$ nell'istante di valutazione t è pari a:

$$v(t; s) = \frac{1}{(1+i(t,s))^{s-t}}$$

La struttura dei prezzi a pronti nell'istante di valutazione t è:

$$\{v(t, s), \quad t \leq s\}$$

Da questa formula è possibile ricavare la struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti, data dal:

$$\left\{ i(t, s) = \left[\frac{1}{v(t, s)} \right]^{-(s-t)} - 1, \quad t \leq s \right\}$$

Il modello appena analizzato si basa sull'ipotesi di esistenza di *zero-coupon bond* su ogni scadenza. Nella realtà non sono quotati nel mercato italiano *zero-coupon bond* con una

¹⁵ Libor è l'acronimo di London Interbank Offered Rates.

maturity superiore a 2 anni, avendo solo i *coupon bond* una *maturity* pari ad un massimo di 30 anni.

Nel mercato italiano sono presenti cinque differenti Titoli di Stato:

- BOT – Buoni Ordinari del Tesoro;
- CTZ – Certificati del Tesoro Zero Coupon;
- CCT – Certificati di Credito del Tesoro;
- BTP – Buoni del Tesoro Poliennali;
- BTP€i – Buoni del Tesoro Poliennali indicizzati all’inflazione Europea.

I BOT e CTZ sono gli unici titoli in cui il guadagno è rappresentato solamente dallo scarto di emissione essendo *zero-coupon bond*. Ambedue sono titoli emessi sotto la pari: lo scarto di emissione è una differenza positiva. I BOT sono titoli di stato di breve scadenza con una durata di 3, 6 o 12 mesi mentre i CTZ sono titoli di stato con scadenza pari a 2 anni.

I CCT, BTP e BTP€i sono *coupon bond*. Il guadagno è composto da due parti: scarto di emissione e quota interessi. Nei CCT la durata è pari a 7 anni e le cedole sono variabili e semestrali. I BTP hanno una durata che può essere pari a 3, 5, 10, 15 e 30 anni e pagano semestralmente cedole fisse. Infine i BTP€i hanno durata pari a 5, 10 e 30 anni e, oltre a pagare cedole semestrali reali¹⁶, sono sottoposte alla rivalutazione del capitale¹⁷.

I tassi interni di rendimento calcolati per i titoli *zero-coupon* non possono essere confrontati con i tassi dei *coupon bond* perché i secondi prevedono il reinvestimento dell’interesse maturato in ogni periodo. Uno *coupon bond* corrisponde ad un portafoglio di *zero-coupon bond* unitari con diversa *maturity*. Utilizzando il metodo del bootstrap, metodo ricorsivo, partendo dal tasso a pronti dei *coupon bond* si calcolano i tassi degli *zero-coupon bond* su ogni *maturity*, utili alla costruzione e rappresentazione della *yield curve*.

¹⁶ Indicizzate all’inflazione.

¹⁷ La rivalutazione del capitale si ottiene moltiplicando il capitale iniziale per un coefficiente di indicizzazione. Serve ad ottenere un valore reale del capitale.

CAPITOLO II

IL METODO DEL BOOTSTRAP

Il metodo del bootstrap è stato introdotto nel 1979 da Bradley Efron. Esso serve a stimare le caratteristiche della distribuzione di uno stimatore o di una qualsiasi statistica d'interesse attraverso il ricampionamento dei propri dati o di un modello stimato. È usato quando la stima della distribuzione asintotica di uno stimatore o test statistico è difficile da calcolare usando i normali calcoli matematici. È di fondamentale importanza in ambito statistico e finanziario perché, prima della sua introduzione, non era possibile la stima della distribuzione di alcuni test statistici qualora i metodi tradizionali non funzionassero.

Dopo la sua introduzione nel 1979, è stato ampiamente trattato da Davison e Hinkley (1997), Shao e Tu (1995), Efron e Tibshirani (1993) e Hall (1992) solamente in alcuni dei molteplici aspetti in cui tale metodo può essere analizzato e trattato.

Il metodo Bootstrap ha avuto successo grazie alla sua semplicità di applicazione. Sostituisce i tradizionali metodi matematici e analitici con il ricampionamento dei dati di una variabile statistica che presenta le stesse caratteristiche della variabile da stimare e la cui distribuzione di probabilità è conosciuta.

La tecnica del Bootstrap può essere ricondotta a due idee di base:

- *Plug-in-rule* o *substitution principle* secondo cui l'inferenza frequentista permette di conoscere la distribuzione di una variabile Y sconosciuta attraverso la stima della distribuzione di una variabile conosciuta $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n)$;
- *Simulation method* che si basa sulla sostituzione dei calcoli analitici che derivano dalle proprietà di uno stimatore Θ di un parametro sconosciuto $\Theta = \Theta(Y)$ attraverso la simulazione del parametro \bar{Y} .

La combinazione di queste due idee ha reso la tecnica *bootstrapping* un metodo di inferenza molto flessibile che può essere applicato in ambito statistico e finanziario.

1. Il metodo tradizionale

Il metodo del bootstrap è stato utilizzato da Bliss e Fama e da Nelson e Siegel nel 1987 per la stima della *yield curve*. Prima della sua introduzione il problema era rappresentato dalla non diretta osservabilità della relazione esistente tra gli *spot rates* e le relative *maturity*: in particolare non era possibile osservare lo *zero rate* con una *maturity* elevata. Alla base

dell'applicazione del metodo del bootstrap vi è l'esistenza di tassi d'interesse apposti per ogni specifica *maturity*, ovvero il superamento dell'approccio tradizionale che, nel calcolare il valore attuale di un flusso di cassa futuro, utilizzava un tasso di sconto uniforme. L'introduzione dello *strips market*¹⁸ ha inoltre permesso l'applicazione di tale metodo.

1.2 Descrizione e applicazione

Il metodo del bootstrap consente di effettuare una stima degli *zero rates*. È una tecnica ricorsiva in quanto permette di calcolare gli *zero rates* in modo sequenziale e permette di estrarre i *tassi spot* sequenzialmente da un insieme di prezzi di *coupon bond*. Per descrivere tale meccanismo, si consideri un mercato nell'istante di valutazione $t=0$ in cui vengono quotati uno ZCB con scadenza pari ad un anno e uno ZCB con scadenza pari a 2 anni ed il cui prezzo è rispettivamente $P(0,1)$ e $P(0,2)$. Entrambi hanno valore unitario. I relativi tassi spot sono direttamente derivabili dalla relazione che lega prezzo e tasso d'interesse nel tempo discreto:

$$v(t; s) = \frac{1}{(1+i(t,s))^{s-t}}$$

e di conseguenza il tasso d'interesse $i(t, s)$ è:

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{v(t,s)} \right]^{1/(s-t)} - 1$$

Nel tempo continuo il fattore di sconto è:

$$v(t; s) = e^{-r(s-t)}$$

ed il tasso r è pari a:

$$r = -\frac{\ln[v(t,s)]}{(s-t)}$$

Ipotizzando l'analisi dei titoli nel tempo discreto, i tassi dei titoli considerati saranno:

$$i(0,1) = \left[\frac{1}{P(0,1)} \right] - 1 \quad \text{e} \quad i(0,2) = \left[\frac{1}{P(0,2)} \right]^{1/2} - 1.$$

Si ipotizzi che in questo mercato sia quotato un titolo $\bar{P}(0,3)$ con *maturity* pari a 3 anni e con cedola fissa annuale pari a C . Il prezzo $\bar{P}(0,3)$, per il teorema di linearità del prezzo, dev'essere pari a:

$$\bar{P}(0,3) = C \times [1 + i(0,1)]^{-1} + C \times [1 + i(0,2)]^{-2} + (1 + C) \times [1 + i(0,3)]^{-3}$$

¹⁸ Lo *strips market* è il mercato in cui ogni *coupon bond* è considerato un portafoglio di *zero coupon bond* ed in cui è possibile alienare separatamente gli *zero coupon bond* che compongono il *coupon bond*.

L'unico tasso non noto è $i(0,3)$, che sarà pari a:

$$i(0,3) = \left\{ \frac{1 + C}{\bar{P}(0,3) - C \times [1 + i(0,1)]^{-1} - C \times [1 + i(0,2)]^{-2}} \right\}^{\frac{1}{3}} - 1$$

In modo analogo è possibile calcolare il tasso $i(0,4)$ e successivamente $i(0,5)$ e così via.

La formula per calcolare in generale il k -esimo tasso *spot* con una discretizzazione τ ed in base ad una *maturity* è:

$$i(0, k\tau) = \left\{ \frac{1 + c_k}{\bar{P}(0, k\tau) - c_k \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} [1 + i(0, j\tau)]^{-j\tau} \right\}} \right\}^{\frac{1}{k\tau}} - 1$$

La formula sopra indicata è il metodo del bootstrap. Per descrivere la sua applicazione verrà trattato un esempio.

Esempio 1

Si consideri un mercato¹⁹ in cui sono quotati i seguenti titoli, che pagano cedole semestrali e il cui valore nominale è pari a 100:

Titolo	<i>Maturity</i> (anni)	<i>Coupon</i> annuali	Prezzo
1	0.50	0	96.00
2	1.00	0	92.10
3	1.50	6	98.50
4	2.00	10	105.90

I primi due titoli sono *zero-coupon bond* non unitari. La formula per calcolare $i(t,s)$, in base al teorema di indipendenza dall'importo è:

$$i(t, s) = \left[\frac{C}{P(t, s)} \right]^{\frac{1}{(s-t)}} - 1$$

Dove:

$i(t,s)$ è il tasso spot;

$P(t,s)$ è il valore di mercato o prezzo del titolo;

C è la cedola che, in caso di ZCB corrisponde al valore nominale del capitale;

$(s - t)$ è la differenza tra la *maturity* e l'istante di valutazione.

¹⁹ Questo non è il mercato italiano perché sono presenti *coupon bond* con *maturity* pari a 1,5 e 2 anni. Nel mercato italiano i *coupon bond* sono disponibili con *maturity* minima di 3 anni.

Per il primo ZBC il calcolo del tasso spot sarà:

$$i(0,0.5) = \left[\frac{100}{96} \right]^{0.5-0} - 1$$

Da cui $i(0,0.5) = 0,085069$.

In modo analogo è possibile calcolare $i(0,1) = 0,085776$.

Applicando ora il metodo standard del bootstrap è possibile calcolare il tasso *spot* dei restanti *coupon bond*. La formula utilizzata è l'equazione del *pricing* in base alla *term structure* dei titoli con cedola:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 + i(0, t_i)} + \frac{c_n + C}{1 + i(0, t_n)}$$

Dove:

V_0 è il valore di mercato o prezzo del titolo;

c_i è la cedola;

0 è l'istante di valutazione;

$i(0, t_i)$ è il tasso di rendimento a scadenza riferito ad ogni singola *maturity*;

C è il valore nominale del titolo.

Il metodo del bootstrap è un metodo iterativo; è necessario calcolare i tassi *spot* dei titoli rispetto alle rispettive *maturity*, considerate in ordine crescente. Dalla formula principale è possibile calcolare r_n tramite la formula inversa, che sarà:

$$i(0, k\tau) = \left\{ \frac{1 + c_k}{\bar{P}(0, k\tau) - c_k \left\{ \sum_{j=1}^{K-1} [1 + i(0, j\tau)]^{-j\tau} \right\}} \right\}^{\frac{1}{k\tau}} - 1$$

La formula del pricing nel tempo continuo è la seguente:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \times e^{-r_i \times (t_i - t_0)} + (c_n + C) \times e^{-r_n \times (t_n - t_0)}$$

Da cui è possibile calcolare i tassi d'interesse con la formula inversa:

$$r_n = \frac{1}{t_n - t_0} \times \ln \frac{c_n + C}{V_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{e^{r_i \times (t_i - t_0)}}$$

Nell'esempio considerato si utilizza il metodo di capitalizzazione nel tempo discreto e verrà calcolato il valore di $i(0,1.5)$ che è pari a:

$$98.50 = \frac{3}{(1 + i(0,0.5))^{0.5}} + \frac{3}{(1 + i(0,1))^{1}} + \frac{3 + 100}{(1 + i(0,1.5))^{1.5}}$$

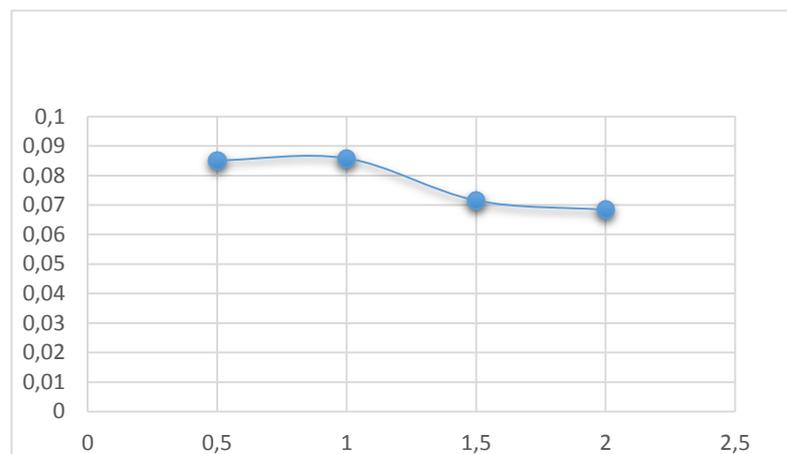
Da cui $i(0,1.5) = 0.085069$.

In modo analogo è possibile calcolare $i(0,2)$ risolvendo la seguente formula:

$$105.90 = \frac{5}{(1 + i(0,0.5))^{0.5}} + \frac{5}{(1 + i(0,1))^{1}} + \frac{5}{(1 + i(0,1.5))^{1.5}} + \frac{100 + 5}{(1 + i(0,2))^{2}}$$

Da cui: $i(0,2) = 0,068392$.

Graficamente la curva dei rendimenti sarà:



Il metodo del bootstrap presenta limiti nella sua applicazione.

Il primo limite è rappresentato dalla non applicabilità del metodo quando i titoli a disposizione di cui si deve calcolare il tasso di rendimento hanno uno scadenziario diverso.

Il metodo si basa sull'esistenza di un vasto insieme di dati, che spesso non sono disponibili sul mercato. Non avendo a disposizione dati relativi ad ogni scadenziario non è possibile ottenere una curva dei rendimenti ben approssimata. I valori non sono ottenuti nel tempo continuo e la struttura della curva così generata è definita solamente in alcuni punti. Nel nostro esempio qualora siano presenti titoli che abbiano uno scadenziario che non sia multiplo di 0.5 anni e che paghino cedole con un intervallo di tempo diverso, non sarà possibile applicare la formula sopra indicata in tali punti. Vi sarà l'impossibilità di conoscere il valore di $r_{0.75}$ oppure di $r_{2.25}$. Essi sono infatti riferiti ad uno scadenziario diverso;

Il secondo limite è l'illiquidità del mercato in cui esso viene usato, che genera una divergenza dei prezzi a causa dello *spread* dei titoli presi come benchmark. Il problema della illiquidità

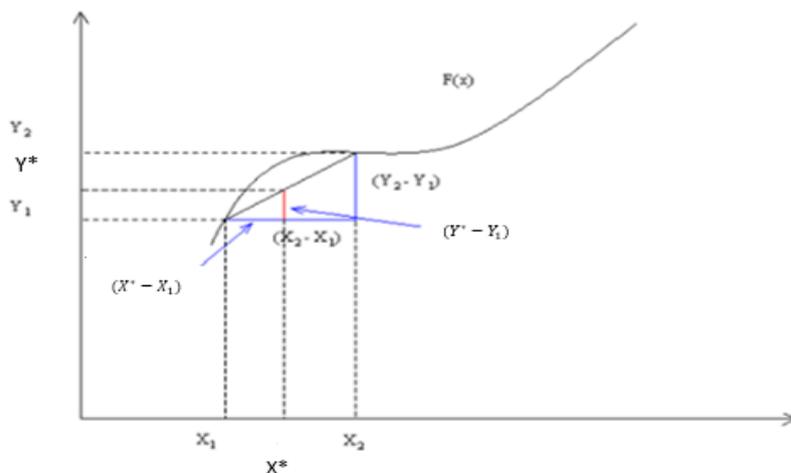
del mercato è emerso con la crisi finanziaria del 2007 ed ha determinato alcuni cambiamenti nella applicazione del metodo.

Il primo limite si risolve con l'utilizzo della interpolazione lineare o di altri modelli algoritmici di interpolazione. La risoluzione del problema dell'illiquidità del mercato verrà trattata nel prossimo capitolo, con l'analisi del nuovo approccio a curve multiple.

1.2 Interpolazione Lineare

1.2.1 Applicata ai tassi swap

L'interpolazione lineare di Lagrange in matematica è un metodo per individuare nuovi punti del piano cartesiano a partire da un insieme finito di punti dati, nella ipotesi che tutti i punti si possano riferire ad una funzione $f(x)$ di una data famiglia di funzioni di una variabile reale. Essa deriva da una linearizzazione della funzione e si calcola il valore di un dato punto conoscendo il valore degli estremi.



Dalla proporzione dei triangoli simili dovrà verificarsi la relazione:

$$Y^* - Y_1 : X^* - X_1 = Y_2 - Y_1 : X_2 - X_1$$

Da cui:

$$(X^* - X_1) \times (Y_2 - Y_1) = (Y^* - Y_1) \times (X_2 - X_1)$$

$$\frac{y^* - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x^* - x_1}{x_2 - x_1} \text{ con } x_1 < x^* < x_2 \text{ e } y_1 < y^* < y_2.$$

Nel nostro caso la variabile x rappresenta la *maturity* mentre la y rappresenta il tasso r . Per il calcolo del tasso r^* si applica la formula seguente:

$$r^* = \frac{t^* - t_1}{t_2 - t_1} \times (r_2 - r_1) + r_1$$

Dove r è il *yield to maturity* e t è la *maturity*.

Calcolando la derivata prima della funzione rispetto al tasso r si ottiene:

$$\delta^I(r) = \frac{2t^* - t_1}{t_2 - t_1} r_2 + \frac{t_2 - 2t^*}{t_2 - t_1}$$

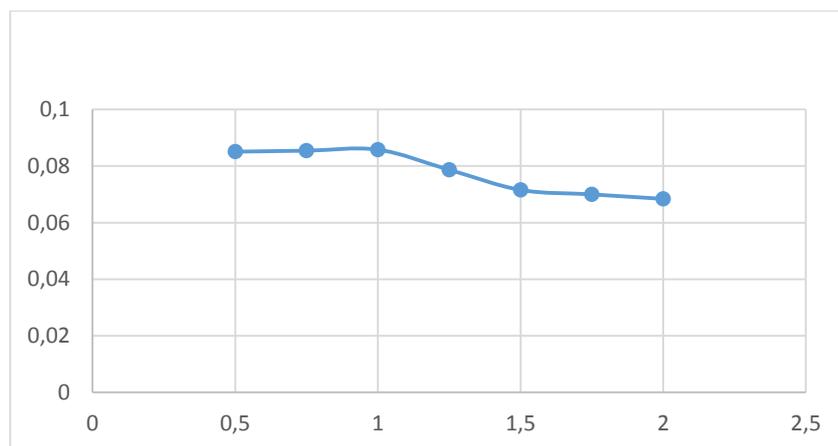
La funzione non è continua²⁰.

Riprendendo l'esempio precedente per il calcolo del tasso $i(0,0.75)$ devono essere utilizzati i tassi conosciuti $i(0,0.5)$ e $i(0,1)$. Esso sarà calcolato come:

$$i(0,0.75) = \frac{t_{0.75} - t_{0.5}}{t_1 - t_{0.5}} \times [i(0,1) - i(0,0.5)] + i(0,0.5)$$

e svolgendo i calcoli $i(0,0.75) = 0,085423$.

In modo analogo possono essere calcolati i tassi relativi a $i(0,1.25)$ e $i(0,1.75)$ che saranno rispettivamente pari a $0,078666$ e $0,068391$.



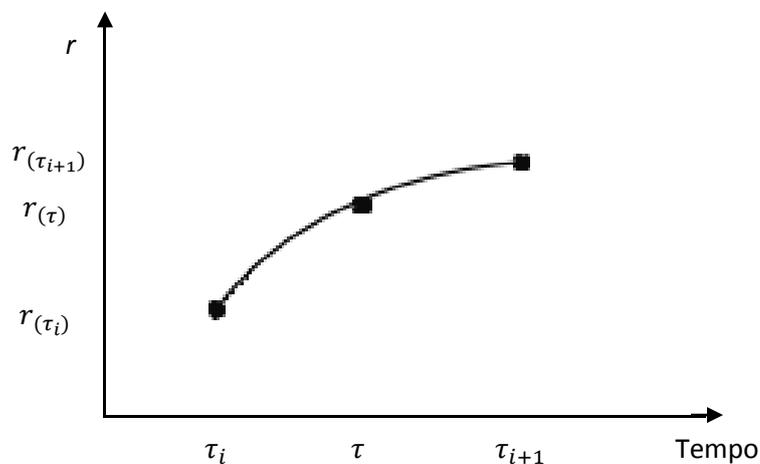
²⁰ Per essere continua la funzione derivata deve essere definita nello stesso dominio della funzione stessa.

Il metodo di interpolazione lineare non è tuttavia totalmente esaustivo. Infatti il Teorema di Weierstress²¹ afferma che all'aumentare del gradi del polinomio aumenta l'accuratezza dei valori ottenuti. Seppur polinomi di gradi alti forniscano valori maggiormente precisi, quando il numero dei tassi disponibili da utilizzare per applicare il metodo è scarso, un polinomio di alto grado, generando valori più precisi, può generare valori fluttuanti all'interno dell'intervallo e si verifica il Fenomeno di Gibbs²². La curva che ne deriverebbe sarebbe, così, altamente oscillante all'interno dell'intervallo.

Per eliminare questo problema McCulloch utilizzo i *piecewise polynomials* o polinomi a tratti, che funzionano in modo simile alla interpolazione lineare, e la *cubic spline*.

1.3 Interpolazione cubica: natural cubic spline

Un modello di interpolazione molto usato per calcolare i tassi da cui estrapolare, tramite il metodo del bootstrap, i tassi *spot* è l'interpolazione *cubic spline*. Questo tipo di interpolazione presenta vantaggi rispetto agli altri tipi di interpolazione perché la funzione *spline* s_m di grado m^{23} e le sue derivate fino al grado $m-1$ sono continue nell'intervallo $[a; b]$ in cui la funzione è definita.



La *cubic spline* è un polinomio che consente di costruire una funzione *spline* usando i valori conosciuti della funzione considerata. Si supponga di conoscere l'insieme delle *maturity*

²¹ Il Teorema afferma che, considerato un dato intervallo si può approssimare ogni funzione continuamente differenziabile attraverso una funzione di tipo polinomiale.

²² Il fenomeno di Gibbs si verifica quando, data una funzione periodica che presenta una discontinuità di prima specie, essa può essere ricostituita in un insieme infinito di termini. Qualora questa serie infinita venga troncata si ottengono delle sovraelongazioni del valore della funzione ricostruita nell'intorno del punto di discontinuità

²³ Nel caso considerato, trattandosi di una *cubic spline*, il grado $m=3$.

$T = (\tau_1; \tau_2; \dots; \tau_n)$ e l'insieme dei tassi $R = (r_1; r_2; \dots; r_n)$. Si procede alla costruzione di una *cubic spline* per interpolare tutti i punti a cui corrispondono i diversi valori dei tassi r . Per completare la funzione *spline* di terzo grado è necessario determinare i coefficienti (a_i, b_i, c_i, d_i)

con $1 \leq i \leq n - 1$ in modo che sia verificato:

$$r(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2 + d_i(\tau - \tau_i)^3 \text{ per } \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

Le derivate di primo, secondo e terzo grado saranno:

$$r^I(\tau) = b_i + 2c_i(\tau - \tau_i) + 3d_i(\tau - \tau_i)^2 \text{ con } \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

$$r^{II}(\tau) = 2c_i + 6d_i(\tau - \tau_i) \text{ con } \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

$$r^{III}(\tau) = 6d_i \text{ con } \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$$

Le caratteristiche generali di tutti i metodi di interpolazione che usano la *cubic spline* sono:

- La funzione interpola i dati presenti in modo completo nell'intervallo $1 \leq i \leq n - 1$:

$$a_i = r_i$$

e

$$r(\tau_n) = a_{n-1} + b_{n-1}(\tau_n - \tau_{n-1}) + c_{n-1}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 + d_{n-1}(\tau_n - \tau_{n-1})^3$$

- La funzione interpolata è continua nell'intervallo $1 \leq i \leq n - 2$:

$$a_{i+1} = a_i + b_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + c_i(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 + d_i(\tau_{i+1} - \tau_i)^3$$

- La funzione è differenziabile nell'intervallo $1 \leq i \leq n - 2$:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + 3d_i(\tau_{i+1} - \tau_i)^2$$

Essendo differenziabile, la funzione ottenuta sarà continua nell'intervallo.

Queste caratteristiche, che rappresentano anche dei vincoli di esistenza a cui la *cubic spline* deve sottostare, permettono di ottenere i valori dei coefficienti della funzione di interpolazione.

Esso è un sistema di 4 equazioni con 4 variabili non note e il grado del polinomio è pari a 3.

Il tipo di interpolazione cubica maggiormente usato è il *natural cubic spline method*, che introduce nuovi vincoli per la costruzione della curva che derivano dalla condizione che pone la derivata seconda per $i=1$ e per $i=n$ uguale a zero. I vincoli che ne derivano sono:

$$\begin{cases} c_i + 3d_i(\tau_{i+1} - \tau_i) = c_{i+1} & \text{se } 1 \leq i \leq n - 2 \\ c_i = 0 \\ c_{n-1} + 3d_{n-1}(\tau_n - \tau_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema definito precedentemente tenendo conto di questi nuovi vincoli si riesce a calcolare il valore dei parametri della funzione di interpolazione.

L'interpolazione è fondamentale per ottenere una buona approssimazione della *yield curve*. In una situazione di mercato dove sono disponibili ZCB, è possibile calcolare gli *spot rates* dal cui utilizzo è possibile ottenere dati utili per la costruzione della funzione interpolante. Le due tipologie di interpolazione maggiormente utilizzate sono la lineare e la cubica, ma una buona approssimazione della curva viene anche definita utilizzando l'interpolazione a tratti. L'obiettivo generale usando le interpolazioni è quella di definire una funzione continua dei punti che definiscono la *yield curve*. Questo obiettivo viene raggiunto utilizzando la *cubic spline*, mentre, attraverso l'utilizzo dell'interpolazione lineare, la funzione definita non è continua ma è una funzione a punti nel tempo discreto. L'interpolazione a tratti è una via di mezzo tra la lineare e la *cubic spline* perché, seppur generando una funzione continua in un intervallo, in corrispondenza del cambio dell'intervallo considerato la funzione presenta una discontinuità.

Solitamente per ottenere una stima della curva dei rendimenti devono essere create diverse funzioni *spline* che vengono confrontate e per la cui valutazione si applica il cosiddetto test di aderenza²⁴. Il procedimento da seguire quindi per ottenere una buona approssimazione della curva sono:

- costruzione di diverse funzioni *spline*, considerando nodi diversi;
- confronto tra le varie curve ottenute effettuando il test di aderenza;
- scelta della curva che ha un andamento più regolare tra tutte le curve considerate.

²⁴ Il test di aderenza è un test statistico atto a verificare se un dato è in accordo con una teoria e si articola nelle seguenti fasi: formulazione dell'ipotesi da verificare, detta ipotesi nulla; calcolo della probabilità p di ottenere un risultato estremo, nell'ipotesi che l'ipotesi nulla sia vera; valutazione di p con accettazione dell'ipotesi nulla in base ai valori di p .

I test di aderenza applicati per verificare se vi sia un discostamento della curva sono test statistici.

Il *test chi-quadro* è uno dei test di verifica delle ipotesi e utilizza la distribuzione della variabile casuale *Chi Quadrato* per decidere se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla. In base agli assunti di partenza, il test può essere parametrico o non-parametrico. Questo test non fornisce risultati molto soddisfacenti in quanto, una volta suddiviso l'intervallo della curva su cui effettuare il test, non considera eventuali oscillazioni all'interno dell'intervallo perché considera solamente il valore medio. Pertanto, anche se alcune curve possono presentare all'interno di un dato intervallo un livello medio che rientra nella regione di accettazione del test, non tenendo conto di eventuali valori anomali che contribuiscono al calcolo di questa media, creano oscillazioni e una struttura non regolare della stessa curva.

Per questi motivi vengono utilizzati altri test che permettono di risolvere questi problemi emergenti con il *test chi-quadro*.

2. Metodo applicato ai tassi swap

2.1 Titoli di stato versus Libor/Euribor

Per la costruzione della *yield curve* i titoli usati come benchmark sono privi di rischio. In linea teorica i Titoli di Stato italiano a brevissimo termine, i BOT, sono *risk-free* perché il rischio del governo di non adempiere alla obbligazione pecuniaria è altamente improbabile. Ma, nonostante il rischio di credito è nullo, vi sono fattori come l'illiquidità, la tassazione e la regolazione che possono influenzare il tasso del titolo. Per esempio, nel mercato monetario americano i tassi dei *US Treasury bond* tendono ad essere inferiori ai tassi di altri strumenti finanziari che hanno un rischio di credito pari a zero. Uno dei motivi di questa discrepanza nel tasso è che i *Treasury bond* sono utilizzati dalle istituzioni finanziarie per svolgere le attività di regolamentazione richieste. Un altro motivo è che l'ammontare di capitale che una istituzione finanziaria deve possedere prima di effettuare un investimento nell'acquisto di *Treasury bond* è sostanzialmente inferiore di quello che essa deve possedere per effettuare lo stesso investimento nei *corporate bond*. Un altro motivo è che l'interesse dei *Treasury bond* non viene tassato a livello statale, essendo gli stessi titoli emessi dallo stato, mentre l'interesse di altri titoli d'investimento sono tassati a livello statale. Questi sono i motivi per cui il tasso d'interesse dei titoli di stato è inferiore del tasso di altri titoli con rischio di credito pari a zero o molto basso. L'utilizzo dei titoli di stato come benchmark su cui costruire le aspettative e su

cui stimare una curva dei rendimenti può generare valori distorti che conseguentemente hanno conseguenze negative nei mercati finanziari. Prima della crisi finanziaria del 2007, nella derivazione della *yield curve* applicando il metodo del bootstrap venivano utilizzati il tasso Libor e il tasso Euribor²⁵, considerati tassi *risk-free*.

Il problema è che essi sono riferiti a periodi inferiori a 12 mesi: per risolverlo gli analisti finanziari applicano il metodo del bootstrap ai titoli *swap* che sono indicizzati al tasso Libor o al tasso Euribor, ma sono definiti su uno scadenziario ampio, superiore ai 12 mesi.

2.2 Curva swap

Lo *swap*, come descritto nel primo capitolo, è un contratto bilaterale in cui entrambe le parti si impegnano di effettuare pagamenti ad intervalli di tempo la cui data è prestabilita.

Per la costituzione della curva *swap* vengono usati titoli *swap* con diverse *maturity*; infatti gli operatori finanziari, per derivare la *swap curve*, la suddividono in tre segmenti in base alla *maturity*:

- Il segmento a breve termine della curva *swap* si basa su tassi di deposito *overnight* e su tassi di deposito con *maturity* pari a 1 mese, 2 mesi e 3 mesi. I tassi di deposito con breve scadenza sono *zero-coupon bond* e devono essere convertiti in regime di capitalizzazione composta continua. Per il calcolo degli interessi maturati si utilizza il metodo del Calcolo Giorni, che verrà descritto più avanti.

Il tasso di rendimento per i tassi a breve termine si ottiene alla formula:

$$r = \frac{t_1}{t_m} \ln\left(1 + r_m \frac{t_m}{t_1}\right)$$

Dove:

t_1 rappresenta il numero dei giorni dell'anno²⁶;

t_m rappresenta la *maturity* espressa in giorni del titolo;

r_m rappresenta il tasso del titolo osservato sul mercato.

- L'area centrale della curva *swap* su una *maturity* non superiore ai 2 anni è derivata utilizzando i *futures* e i FRAs. L'uso dei FRAs è preferito, ma per la maggior parte delle valute essi non sono osservabili o soffrono di un'elevata illiquidità. I *futures* invece sono più

²⁵ Euribor è l'acronimo di EURO Inter Bank Offered Rate. Esso è un tasso di riferimento che viene calcolato in base giornaliera e indica il tasso d'interesse medio delle transazioni finanziarie in Euro tra le banche facenti parte dell'UE.

²⁶ Pari a 360 oppure 365, in base alla convenzione scelta per il conteggio dei giorni.

liquidi essendo negoziati nei mercati di Borsa. Quando si estrapolano i tassi *forward* dai *futures*, i tassi *forward* devono essere aggiustati nella valutazione per tenere conto delle differenze nella *convexity*²⁷.

I *future rate* trimestrali da cui si calcola lo *zero rate* devono essere convertiti usando due passaggi consecutivi:

- 1) Per la conversione del tasso futuro trimestrale in un *future rate* composto si utilizza il regime di capitalizzazione composta usando la seguente formula:

$$r = \frac{t_1}{t_m} \ln\left(1 + r_m \frac{t_m}{t_1}\right)$$

Dove:

t_1 rappresenta il numero dei giorni dell'anno;

t_m rappresenta la *maturity* espressa in giorni del titolo;

r_m rappresenta il tasso del titolo osservato sul mercato.

- 2) Per la conversione del *future rate* composto in uno *zero rate* composto si utilizza la capitalizzazione continua:

$$r_2 = \frac{r(t_2 - t_1) + r_1 t_1}{t_2}$$

Dove r_1 e r_2 sono gli *zero rates* composti in regime di capitalizzazione continua rispettivamente rispetto a t_1 e t_2 mentre r è il *future rate* composto in regime di capitalizzazione continua rispetto all'intervallo t_1 e t_2 .

- Il segmento a lungo termine della *swap curve* viene derivato dai tassi cedolari degli *swap* osservabili sul mercato. Questo segmento della curva è derivato con l'applicazione del metodo del bootstrap.

2.2.1 IRS Plain Vanilla

Per l'applicazione del metodo, i contratti *swap* utilizzati sono gli *interest rate swap*, ed in particolare l'IRS Plain Vanilla che rappresenta il più comune *coupon swap*.

²⁷ La *convexity* rappresenta il grado di curvatura della funzione ed esprime graficamente la relazione tra prezzo e rendimento di un'obbligazione. Si calcola come il rapporto tra la derivata seconda della funzione calcolata rispetto al tasso d'interesse e la funzione stessa. Serve ad approssimare la funzione ad una parabola. La *convexity* descrive la sensibilità del prezzo alle variazioni del tasso d'interesse: è quindi un indicatore del rischio di un titolo.

L'IRS Plain Vanilla è un contratto in cui una controparte²⁸ promette ad un'altra di pagare, per un predeterminato numero di anni ed in base ad un dato capitale di riferimento chiamato capitale nozionale²⁹, un importo a tasso fisso. Tale controparte è il *fixed rate payer*. Nello stesso tempo l'altra controparte, denominata *floating rate payer* si impegna a corrispondere un importo a tasso variabile sullo stesso capitale nozionale per il medesimo numero di anni. Il tasso variabile utilizzato è il Libor o l'Euribor.

Il tasso Libor viene utilizzato perché rappresenta il tasso a cui un prestatore di fondi che riflette un alto grado di solvibilità può ottenere un finanziamento sul mercato finanziario.

Mentre la maggior parte delle controparti hanno un alto grado di solvibilità, differenze significative possono esistere riguardo alla loro qualità del credito. Tuttavia per considerare la qualità del credito non è il prezzo ad essere aggiustato ma vengono utilizzati nella contrattazione i cosiddetti *master agreements* che sono condizioni, sottoscritte con la sottoscrizione dello *swap*, che servono a mitigare il rischio di credito.

Il tasso Euribor è anch'esso un tasso utilizzato nel calcolo dell'interesse variabile di un IRS. Esso è un tasso interbancario molto attendibile perché è il tasso di interesse medio al quale una selezione di banche si concede reciprocamente prestiti a breve termine in euro. Esistono tassi Euribor per otto diversi periodi che vanno da 1 settimana a 12 mesi. Il tasso Euribor per il periodo pari a 1 giorno è denominato Eonia³⁰. L'Eonia può essere considerato quindi il tasso Euribor *overnight*. Il tasso Euribor è usato dalle banche per stabilire i propri tassi d'interesse, perciò la loro variazione può generare conseguenze su prodotti bancari di ogni genere, come conti di risparmio, ipoteche e prestiti.

L'importanza del Libor e dell'Euribor è fondamentale. Mentre il Libor è il tasso benchmark per i prestiti interbancari³¹, l'Euribor riguarda i prestiti in euro nel mercato monetario europeo.

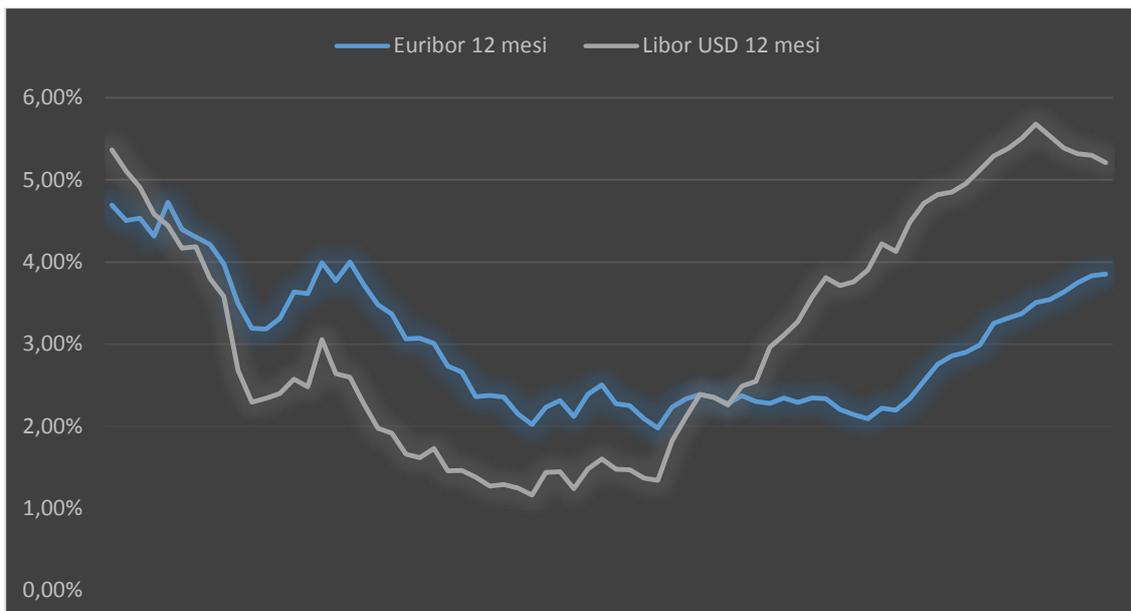
I tassi Libor ed Euribor, prima della crisi del 2007, erano ottimi benchmark.

²⁸ La controparte può essere una società, un intermediario finanziario o qualsiasi soggetto capace ad adempiere tale obbligazione.

²⁹ Il capitale nozionale è così denominato perché si tratta di un capitale fittizio, che non viene scambiato. Nel caso dell'IRS infatti ad ogni scadenza viene fatta la liquidazione degli interessi maturati, senza lo scambio del capitale nozionale, essendo lo stesso per entrambi.

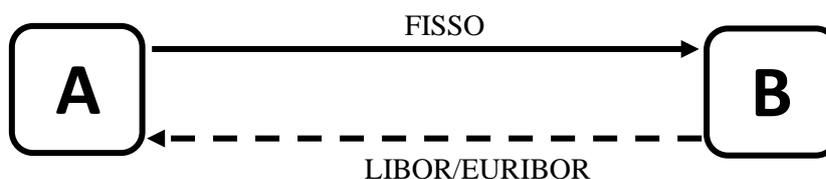
³⁰ Eonia è l'acronimo di Euro OverNight Index Average.

³¹ Le valute che vengono scambiate sono diverse. Ad esempio un prestito interbancario nel mercato monetario londinese espresso in dollari americani o in sterline britanniche.



Serie storica di Libor USD 12 mesi e di Euribor 12 mesi dal 2001 al 2006³²

Il flusso originato da un IRS Plain Vanilla è rappresentato nel grafico sottostante:



Il tasso fisso viene conosciuto alla data di sottoscrizione del contratto finanziario mentre il tasso variabile viene conosciuto immediatamente dopo l'inizio del contratto, ovvero alla data di inizio di maturazione degli interessi. Alla data di sottoscrizione di un contratto, presupponendo che il contratto finanziario abbia una durata maggiore di un anno e paghi cedole annuali, è conosciuto solamente il tasso relativo al primo anno. Il tasso relativo al secondo periodo verrà conosciuto un istante dopo lo stacco della prima cedola, e così via.

I valori corrisposti dal *fixed rate payer* V_{fixed} e dal *floating rate payer* $V_{floating}$, sotto l'ipotesi che il contratto IRS Plain Vanilla sia valutato nell'istante di valutazione $t=0$, sono così calcolati:

³² Dati disponibili su <http://it.global-rates.com/>.

$$V_{fixed} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{c}}{(1+r_i)^{t_i}} + \frac{C}{(1+r_n)^n}$$

$$V_{floating} = C$$

Dove:

\bar{c} è la cedola fissa pagata dal *fixed rate payer*;

C è il Capitale nozionale;

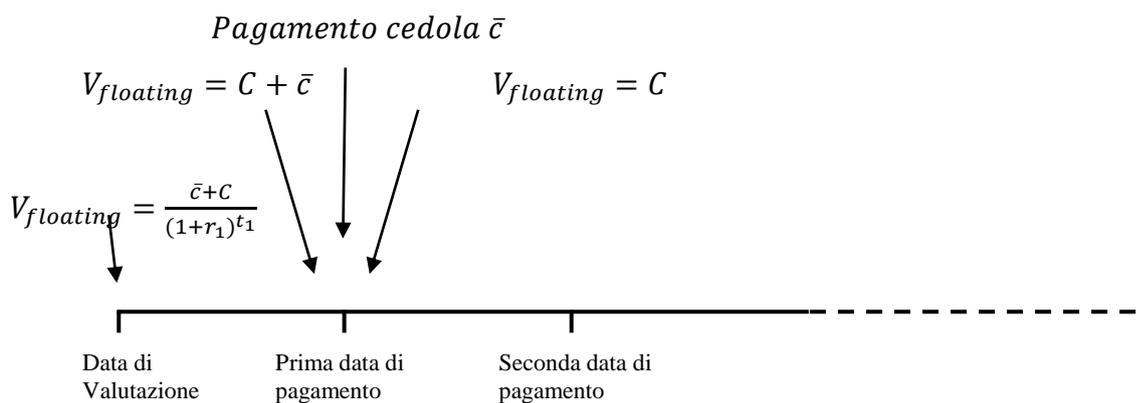
r_i è il tasso di rendimento relativo al periodo considerato;

n è la *maturity* del titolo.

Il valore totale del titolo, essendo esso uno *swap* in cui chi lo sottoscrive paga un importo in base ad un tasso fisso e riceve un importo in base al tasso variabile è pari a:

$$V_{IRS} = V_{floated} - V_{fixed}$$

È opportuno fare una osservazione: il $V_{floated}$ quota sempre alla pari all'emissione e ad ogni stacco della cedola, perciò il suo valore in questi istanti è sempre uguale al capitale nozionale C. Infatti il debitore si impegna a pagare il Libor o l'Euribor per ogni periodo di godimento successivo. L'interesse non è ancora maturato, quindi il suo valore sarà esattamente pari al capitale nozionale.



Trattandosi di un contratto equo, il valore in 0 di un IRS può essere riscritto come:

$$V_{IRS} = V_{floated} - V_{fixed} = 0$$

Supponendo il valore del capitale nozionale pari a 1 euro, nell'istante $t=0$ il valore del IRS Plain Vanilla sarà:

$$V_{IRS} = \underbrace{1}_{V_{floated}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{c}}{(1+r_i)^{t_i}} + \frac{1}{(1+r_n)^n}}_{V_{fixed}} = 0$$

Ovvero:

$$\bar{c} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r_i)^{t_i}} + \frac{1}{(1+r_n)^n} = 1$$

È importante notare che, essendo il valore *floating* uguale al capitale nozionale, ed essendo verificata l'uguaglianza tra il valore *floating* e il valore *fixed*, anche il valore *fixed* sarà pari al capitale nozionale dello *swap*. Il tasso *swap* è quindi un *par yield*.

Nella valutazione dei *coupon bond* gli interessi maturati in un determinato periodo sono calcolati applicando la regola di Calcolo Giorni.

Questa regola definisce il modo in cui gli interessi maturano nel tempo. Vengono espresse come X/Y: quando si calcola l'interesse relativo all'intervallo tra due date, X definisce il modo in cui si calcola il numero di giorni tra le due date e Y definisce il modo in cui si calcola il numero complessivo di giorni nel periodo di riferimento.

La regola generale per il calcolo dell'interesse relativo al periodo compreso tra le due date è:

$$I = \frac{\text{numero di giorni tra le due date}}{\text{numero di giorni nel periodo di riferimento}} \times i$$

Per il calcolo dell'interesse maturato, nel caso di contratto *swap*, il tasso Libor è relativo ad un periodo pari a 360 giorni, e non a 365 come nel caso di un tasso d'interesse generico e fisso.

Il calcolo dell'interesse è quindi pari a:

$$I = \frac{\text{numero di giorni trascorsi dall'ultimo pagamento}}{360} \times \text{Capitale Nozionale} \times \text{Tasso Libor}$$

È possibile utilizzare gli *swap rates* per calcolare la *zero rates* utilizzando il metodo del bootstrap. Per descrivere l'applicazione si utilizza un esempio.

2.3 Derivazione della curva spot dai tassi swap

In data 30 Dicembre 2014 venivano quotati sul mercato i seguenti tassi *swap* relativi a *maturity* da 1 a 30 anni³³.

INTEREST RATES - SWAPS										
	Euro-€		£ Stig.		SwFr		US \$		Yen	
Dec 30	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1 year	0.15	0.19	0.63	0.66	-0.14	-0.08	0.42	0.45	0.11	0.17
2 year	0.16	0.20	0.92	0.96	-0.18	-0.10	0.86	0.89	0.11	0.17
3 year	0.21	0.25	1.14	1.18	-0.14	-0.06	1.25	1.28	0.13	0.19
4 year	0.27	0.31	1.31	1.36	-0.07	0.01	1.54	1.57	0.15	0.21
5 year	0.34	0.38	1.45	1.50	0.02	0.10	1.74	1.77	0.19	0.25
6 year	0.42	0.46	1.56	1.61	0.11	0.19	1.90	1.93	0.24	0.30
7 year	0.51	0.55	1.65	1.70	0.21	0.29	2.01	2.04	0.30	0.36
8 year	0.61	0.65	1.73	1.78	0.30	0.38	2.11	2.14	0.36	0.42
9 year	0.70	0.74	1.79	1.84	0.39	0.47	2.18	2.21	0.42	0.48
10 year	0.79	0.83	1.85	1.90	0.47	0.55	2.25	2.28	0.49	0.55
12 year	0.95	0.99	1.95	2.02	0.59	0.69	2.36	2.39	0.61	0.69
15 year	1.12	1.16	2.06	2.15	0.75	0.85	2.47	2.50	0.82	0.90
20 year	1.30	1.34	2.16	2.29	0.95	1.05	2.58	2.61	1.09	1.17
25 year	1.39	1.43	2.19	2.32	1.06	1.16	2.64	2.67	1.22	1.30
30 year	1.44	1.48	2.21	2.34	1.11	1.21	2.66	2.69	1.29	1.37

Bid and Ask rates as of close of London business. £ and Yen quoted on a semi-annual actual/365 basis against 6 month Libor with the exception of the 1Year GBP rate which is quoted annual actual against 3M Libor. Euro/Swiss Franc quoted on an annual bond 30/360 basis against 6 month Euribor/Libor.
Source: ICAP plc.

Dalla quotazione si osservano i tassi *Bid/Ask* o tassi Denaro/Lettera praticato da un *dealer*:

- Il tasso *Bid* o tasso denaro corrisponde al tasso o prezzo più conveniente al quale il *dealer* è disposto ad acquistare uno strumento finanziario;

- Il tasso *Ask* o tasso lettera corrisponde al tasso o prezzo più conveniente al quale il *dealer* è disposto a vendere uno strumento finanziario.

Ovviamente il tasso *Bid* è sempre inferiore del tasso *Ask*. Lo *spread* denaro/lettera è stato molto basso fino allo scoppio della crisi finanziaria. È un indice del grado di liquidità del mercato: quando il mercato è molto liquido lo *spread* denaro/lettera è basso, e viceversa. È possibile calcolare il *Mid swap*, dato dalla media tra il tasso denaro e il tasso lettera relativi ad una data scadenza. Esso è il tasso utilizzato per l'applicazione del metodo del bootstrap. Nell'esempio che verrà illustrato si tratteranno gli *interest rate swap* con *maturity* fino a 10 anni relativo alla valuta euro.

³³ Dati del Financial Times relativi al 30 Dicembre 2014.

<i>Maturity</i>	Denaro	Lettera	Mid Swap
1	0,15%	0,19%	0,17%
2	0,16%	0,20%	0,18%
3	0,21%	0,25%	0,23%
4	0,27%	0,31%	0,29%
5	0,34%	0,38%	0,36%
6	0,42%	0,46%	0,44%
7	0,51%	0,55%	0,53%
8	0,61%	0,65%	0,63%
9	0,70%	0,74%	0,72%
10	0,79%	0,83%	0,81%

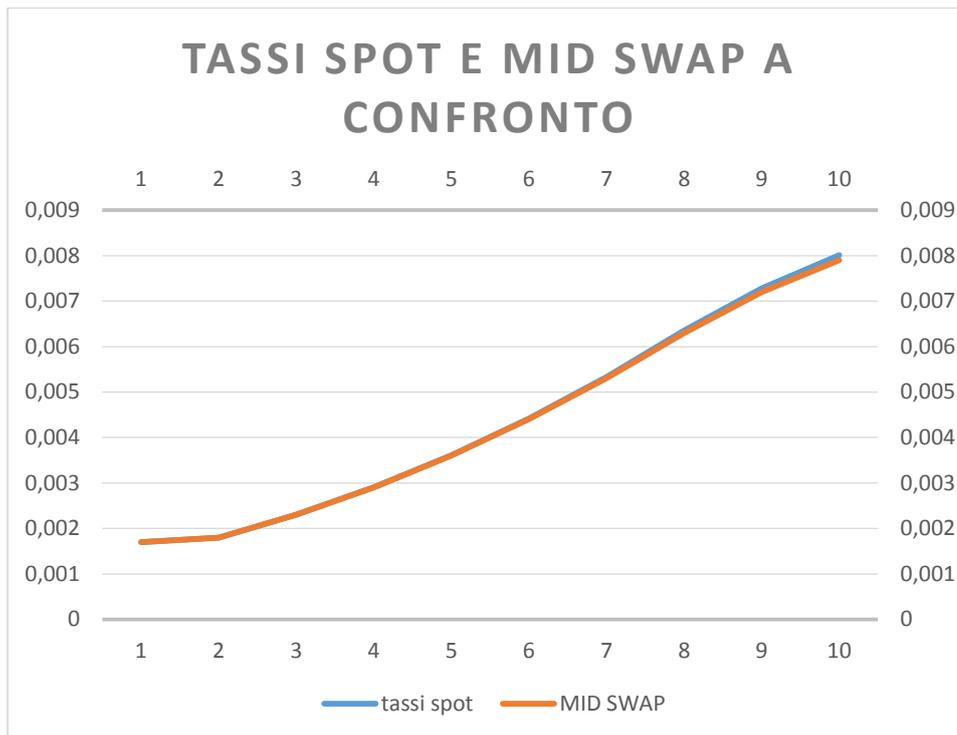
La formula applicata per il calcolo dei tassi *spot* usando il metodo del bootstrap è³⁴:

$$i(0, k\tau) = \left\{ \frac{1 + c_k}{\bar{P}(0, k\tau) - c_k \left\{ \sum_{j=1}^{K-1} [1 + i(0, j\tau)]^{-j\tau} \right\}} \right\}^{\frac{1}{k\tau}} - 1$$

Si ottiene la seguente sequenza dei tassi *spot*:

<i>Maturity</i>	tassi spot
1	0,0017000
2	0,0018001
3	0,0023012
4	0,0029038
5	0,0036088
6	0,0044180
7	0,0053332
8	0,0063574
9	0,0072856
10	0,0080113

³⁴ Il tasso *spot* relativo ad 1 anno è pari al tasso *Mid Swap*.



In questo caso lo *spread* tra i tassi *swap* e i tassi *spot* non è alto, infatti risulta difficile distinguere a livello grafico le due curve; ma non sempre questo *spread* è così basso.

Se si vuole calcolare una stima più precisa dei punti della curva *spot* costruita si utilizzano i metodi della interpolazione lineare o della interpolazione mediante la costruzione della *cubic spline*. La modalità di applicazione di questi due metodi è stata descritta nel precedente paragrafo.

L'uso della stima della *yield curve* usando i tassi *swap* ha avuto vantaggi in quanto, tramite il loro uso, la curva dei rendimenti ottenuta risultava essere molto simile a quella che poi veniva visualizzata nella realtà. Ma con l'incremento della volatilità dello *spread*, che viene riflesso nel *pricing* dei tassi *swap*, l'uso di questi titoli come benchmark può creare problemi al sistema finanziario.

CAPITOLO III

IL METODO BOOTSTRAP RIVISITATO

Il metodo del bootstrap tradizionale non fornisce sempre risultati completi. I limiti che si riscontrano durante la sua applicazione sono stati precedentemente esposti. Il limite della non possibilità di calcolare il tasso *spot* di titoli in cui la *maturity* è diversa rispetto a quella relativa ai titoli quotati sul mercato è stato risolto grazie all'utilizzo della interpolazione lineare e della *cubic spline interpolation*. L'altro limite è l'illiquidità dei mercati, che si è tradotta in un aumento degli *spread* tra i tassi. Esistono inoltre nel mercato titoli derivati con caratteristiche intrinseche molto varie che, se confrontati con titoli differenti, generano una approssimazione della *yield curve* non attendibile.

A causa di questi problemi, emersi dopo la crisi dei mercati finanziari del 2007, il metodo del bootstrap è stato modificato. E' stato creato un modello capace di considerare tutte le caratteristiche del mercato per ottenere così una *yield curve* che riflette le caratteristiche reali dei tassi nel mercato.

1. Crisi finanziaria e conseguenze sul tasso benchmark

La crisi globale dei mercati finanziari, che iniziò ad Agosto 2007 e che raggiunse il suo picco con il fallimento della Lehman Brothers a Settembre 2008, causò un cambiamento nell'andamento dei tassi d'interesse nel mercato, soprattutto nel mercato OTC.

Prima della crisi finanziaria una singola *yield curve* era utilizzata sia per la capitalizzazione dei *cash flow* futuri, sia per le attività di *pricing* dei titoli. Come precedentemente descritto, nella costruzione della *yield curve* venivano utilizzati i tassi Libor e Euribor, considerati titoli *risk-free*. Attraverso la combinazione del metodo del bootstrap e dei metodi di interpolazione era possibile costruire una corretta approssimazione della *yield curve*.

Dopo la crisi finanziaria è stato necessario introdurre l'uso di un modello a curve multiple per la valutazione dei tassi d'interesse dei titoli presenti sul mercato. Le caratteristiche di ogni titolo derivato devono essere riflesse sull'andamento della propria curva dei tassi d'interesse. Con la crisi sono emersi due fattori di rischio che influenzano i tassi d'interesse e i prezzi dei titoli derivati: *liquidity risk* e *default risk*. Essi appartengono ad ogni titolo, e la loro entità dipende dalla *maturity* e, in generale, agli elementi caratterizzanti il titolo.

1.1 Liquidity risk

Il *liquidity risk* si riflette sullo *spread* tra i tassi d'interesse dei titoli. La divergenza tra i tassi è indice di un alto grado di sfiducia nei mercati finanziari e le conseguenze sono altamente negative per lo stesso mercato. Nel mercato l'indicizzazione dei titoli a tasso variabile è fatta con riferimento al tasso Libor oppure Euribor. Lo *spread* tra i tassi con *tenor* diverso che appartengono ad una delle due categorie è sempre stata di pochi *basis points*. Erano considerati titoli privi di rischio da utilizzare come benchmark nei contratti IRS. Con la crisi finanziaria il rischio di questi titoli aumentò riflettendosi nell'incremento dello *spread*. Il divario tra i tassi si riflesse su:

- Tasso Euribor versus Eonia;
- Tasso Libor versus OIS;
- Tasso Fra versus *Forward*;
- *Basis swap*.

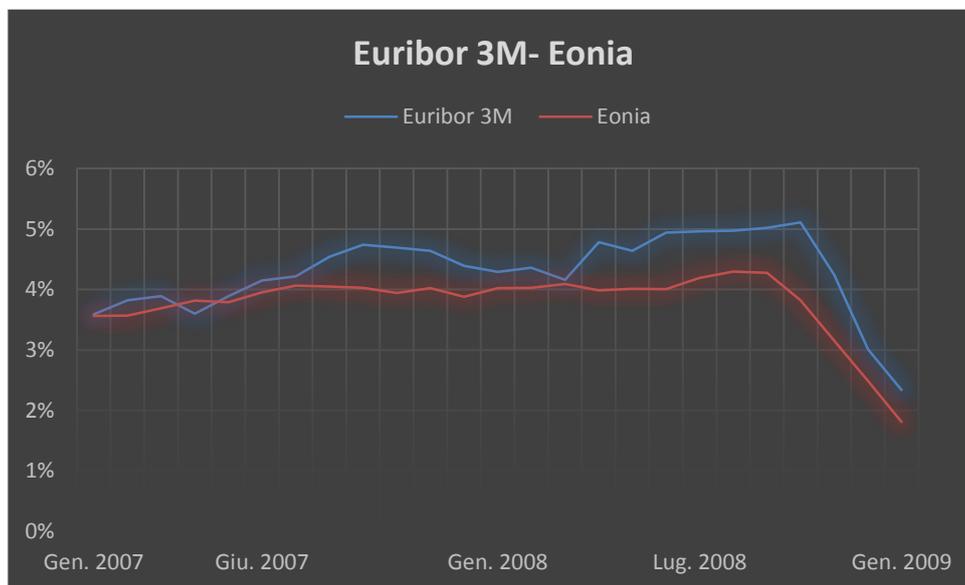
1.1.1 Tasso Euribor versus Eonia

Uno *swap* Eonia è un contratto *swap* che scambia un importo a tasso fisso contro uno a tasso variabile, indicizzato al tasso *overnight*. Essendo un tasso *overnight*, la *maturity* è molto breve perciò in genere il rischio dovrebbe essere nullo.

Prima della crisi lo *spread* tra i due titoli non fu mai superiore a 6 *basis points*, ma ad Agosto 2007 un incremento del tasso Euribor ed un decremento del tasso Eonia fecero esplodere lo *spread* tra i due tassi. I motivi dell'incremento dello *spread* derivano dalla percezione del rischio di credito e rischio di liquidità e dalle politiche monetarie adottate dalle banche centrali per rispondere alla crisi.

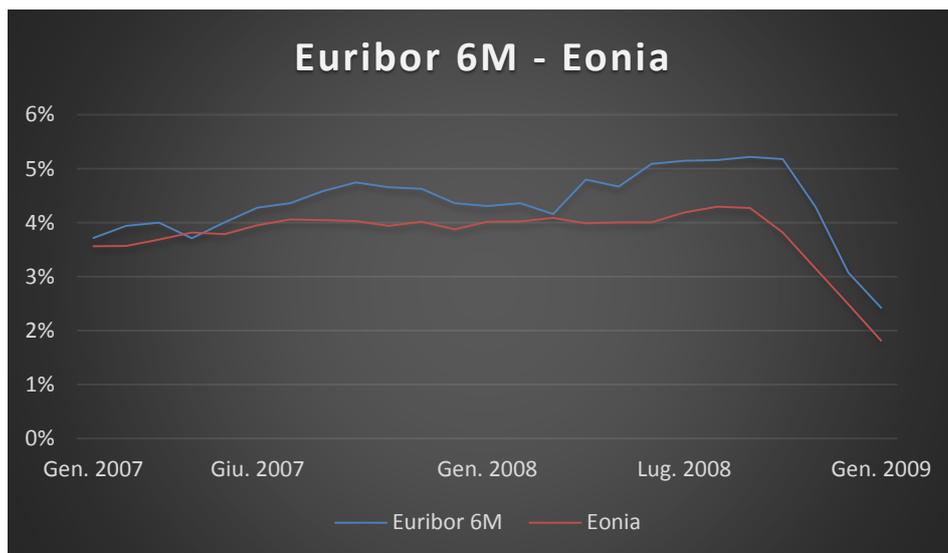
Il tasso Euribor è il tasso di riferimento per le transazioni nell'*over-the-counter market* nella zona Euro. I tassi vengono fissati su 15 scadenze, definiti su *maturity* che vanno da un giorno a un anno e sono costruiti come media dei tassi fissati da un gruppo di banche, senza includere il tasso minimo e quello massimo nel calcolo del valore medio. A questo gruppo di banche appartengono 42 banche europee con un elevato *rating* finanziario e alcune banche internazionali non europee che svolgono importanti operazioni monetarie nell'area Euro. I tassi Euribor riflettono il costo medio di finanziamento delle banche europee nel mercato interbancario europeo ad ogni data di scadenza.

Il tasso Eonia è il tasso di riferimento per le transazioni *overnight* nella zona Euro. E' costruito come il tasso medio delle operazioni durante la notte effettuate nel corso di una data giornata lavorativa da un gruppo di banche sul mercato monetario interbancario, ponderata per i volumi delle transazioni corrispondenti. Le banche che fanno parte di questo gruppo sono le stesse che fissano il tasso Euribor. Così il tasso Eonia include informazioni sulle aspettative di liquidità delle banche nel mercato monetario europeo a breve termine. È monitorato dalla Banca Centrale Europea (BCE) che registra gli effetti dei suoi interventi in politica monetaria. Inoltre, il *tenor* giornaliero del tasso Eonia rende trascurabili i rischi di credito e di liquidità: per questo motivo i tassi OIS³⁵ sono considerati i migliori proxy disponibili sul mercato per il tasso privo di rischio.



Serie storica dei tassi Euribor 3M ed Eonia nel periodo da Gennaio del 2007 a Gennaio del 2009. (Fonte: www.global-rates.com)

³⁵ OIS è l'acronimo di *Overnight Index Swap*. L'overnight Indexed Swap è un accordo tra due controparti a scambiarsi per un periodo predefinito finanziamenti giornalieri al tasso variabile Eonia, in contropartita di un tasso fisso. Questo tasso riflette quello atteso sul mercato interbancario overnight per la durata dello swap ed è un valido indice del grado di fiducia nel mercato interbancario.



Serie storica dei tassi Euribor 6M ed Eonia nel periodo da Gennaio del 2007 a Gennaio del 2009. (Fonte: www.global-rates.com)

Dal grafico si osserva che a partire da Agosto 2007 lo *spread* tra il Euribor 3M- Eonia e tra Euribor 6M- Eonia aumentò. Ad Ottobre 2008, a seguito del fallimento della Lehman Brothers, lo *spread* Euribor 3M-Eonia raggiunse i 129 *bps*, mentre quello Euribor 6M-Eonia ad Ottobre del 2008 raggiunse i 136 *bps*.

1.1.2 Tasso Libor versus OIS

In modo analogo anche la divergenza tra i tassi Libor e il tasso Overnight Indexed Swap aumentò: ad Agosto del 2007 lo *spread* iniziò a crescere. Storicamente lo *spread* tra i due tassi è stato di circa 10 *bps*. A Settembre 2008, a seguito del fallimento della Lehman Brothers, esso salì a 364 *bps*, simbolo del *credit crunch*³⁶ che aveva colpito il mercato finanziario. Essendo il tasso OIS un tasso *overnight*, il suo rischio è molto basso, a differenza del tasso Libor il cui aumento causò principalmente l'aumento dello *spread*. La quotazione dei *derivatives* rispecchia l'aumento dello *spread*, quindi l'uso del tasso Libor come benchmark non è più attendibile per la determinazione della *yield curve*. I contratti finanziari che meglio descrivono lo *spread* emerso sono i *Basis Swap*, che verranno successivamente descritti.

³⁶ Il *credit crunch* è una limitazione dell'offerta di credito da parte degli intermediari finanziari in presenza di una potenziale domanda di finanziamenti insoddisfatta. Le banche (o gli altri intermediari finanziari) rifiutano la concessione del credito tramite l'aumento dei tassi d'interesse oppure introducendo condizioni che i debitori devono soddisfare per poter usufruire del credito

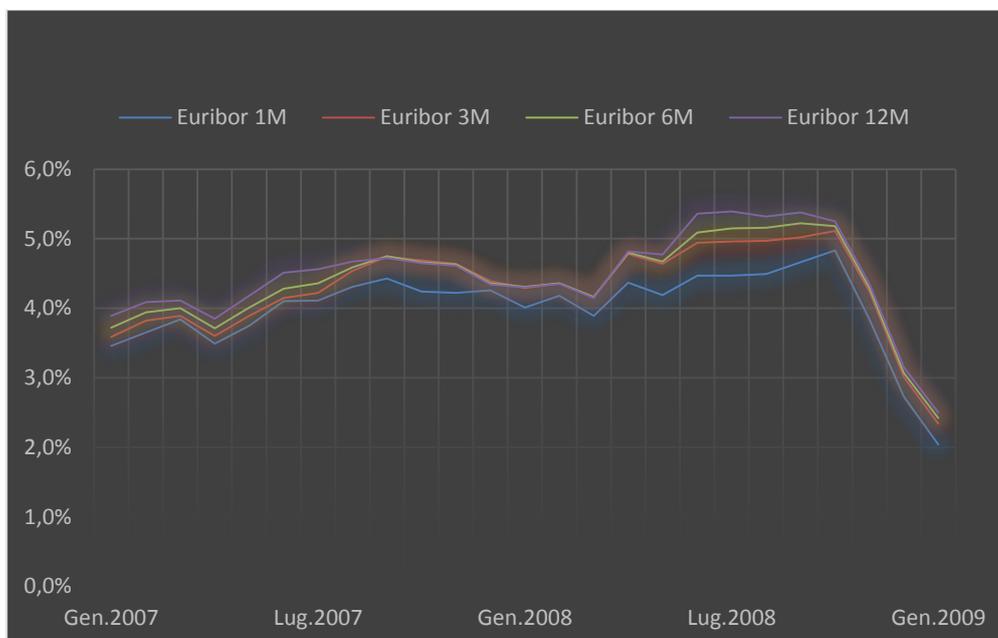
1.1.3 Tassi FRA e tassi Forward

La divergenza tra i tassi d'interesse interessò anche il tasso Euribor FRA contro il tasso *forward* calcolato in base ai tassi EONIA.

Il FRA3x6 è un contratto che ha inizio in data *spot*, ha una *maturity* pari a 6 mesi e una gamba variabile indicizzata al tasso *forward* tra 3 e 6 mesi contro una gamba fissa. Attualizzando il contratto finanziario usando il tasso FRA3X6, tale contratto risulta equo. Dall'analisi dell'andamento dei tassi FRA3X6 e dei tassi *forward* calcolati utilizzando i tassi Eonia emerge che a partire da Agosto 2007 la divergenza tra i tassi aumentò notevolmente, simbolo della crisi nei mercati finanziari. Lo *spread* tra i due tassi rimase alto senza stabilizzarsi a livelli normali. Tale divergenza dei tassi è, come nel caso dello *spread* Euribor-Eonia, una conseguenza dell'emergere del rischio di liquidità.

1.1.4 Basis-swap

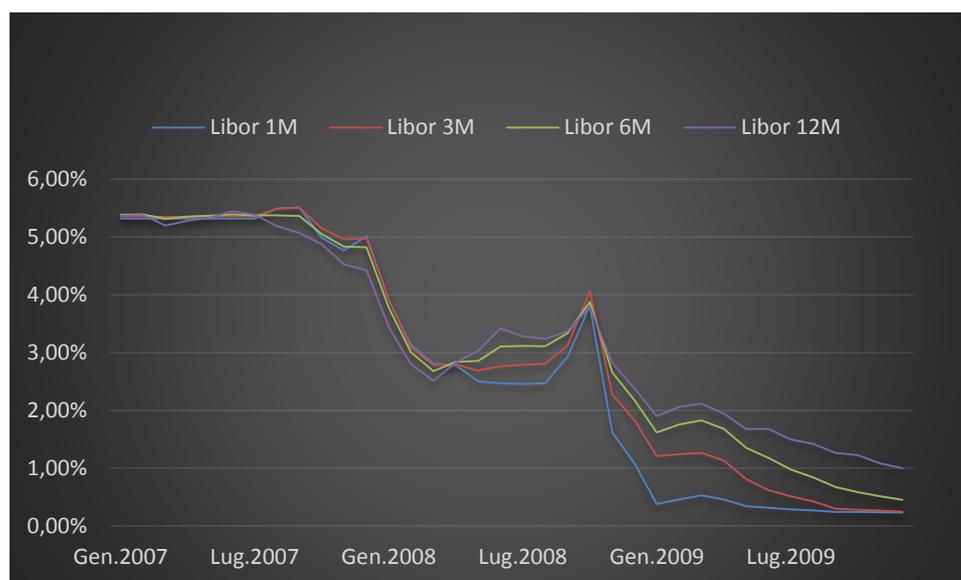
I *Basis Swap* sono *interest rate swap* che prevedono lo scambio di due tassi variabili. I tassi variabili scambiati, e.g. Libor, hanno diversi *tenor*, e.g. 3M e 6M. In base alla teoria classica che descrive un mercato perfetto, lo *spread* tra i due tassi dev'essere pari a zero per rispettare il principio di arbitraggio. Prima della crisi finanziaria lo *spread* era molto basso e non creava ampie opportunità di arbitraggio. Seppur non pari a zero, il suo valore rappresentava in parte i costi di transazione obbligatori per chi volesse sfruttare differenze di prezzo ed effettuare arbitraggio. L'uso di opportunità di arbitraggio non generava guadagni molto elevati. Con la crisi lo *spread* aumentò notevolmente e, generalmente, a *tenor* più elevati corrispondeva uno *spread* più alto. Infatti, più il *tenor* è elevato, maggiore è il rischio di credito e di liquidità del titolo e maggiore è il tasso d'interesse.



Serie storica dei tassi Euribor 1M, Euribor 3M, Euribor 6M, Euribor 12M nel periodo da Gennaio del 2007 a Gennaio del 2009. (Fonte: www.global-rates.com)

Dal grafico si osserva che prima della crisi lo *spread* tra i tassi con *tenor* diversi era di pochi *bps*, ma nel periodo compreso tra Maggio e Ottobre tale *spread* aumentò vertiginosamente raggiungendo alti valori *bps*. Nel mese di Luglio 2008 lo *spread* Euribor 12M- Euribor 1M raggiunse i 96 *bps*.

In modo analogo, considerando lo *spread* tra i tassi Libor con *tenor* differenti, anche essi aumentarono.



Serie storica dei tassi Libor 1M, Libor 3M, Libor 6M, Libor 12M nel periodo da Gennaio del 2007 a Dicembre del 2009. (Fonte: www.global-rates.com)

Lo spread Libor 12M- Libor 1M, nel periodo considerato nel grafico, raggiunse un valore massimo di 160 *bps* a Febbraio del 2009.

Oltre a conseguenze nella creazione di opportunità di arbitraggio, le anomalie dei tassi ebbero conseguenze sul metodo del *pricing* degli strumenti finanziari derivati e, conseguentemente, sull'andamento della *yield curve*.

Per ridurre lo *spread* e risolvere le divergenze tra i tassi e tra i prezzi nel mercato, la Banca Centrale Statunitense Federal Reserve³⁷ ha avviato una OMO espansiva denominata *Quantitative Easing* (QE) mentre la Banca Centrale Europea BCE ha avviato la OMO espansiva denominata *Credit Easing*. Immettendo liquidità nel mercato, l'obiettivo era di ridurre i tassi d'interesse per ridurre lo *spread*. Ma nonostante questi programmi, che certamente hanno impedito una situazione peggiore nei mercati finanziari, lo *spread* tra i tassi è ancora molto alto.

1.2 *Default risk e collateralizzazione*

Il *default risk* è il rischio che in un contratto finanziario la controparte non adempia l'obbligazione pecuniaria. La collateralizzazione è la tecnica per mitigare il rischio di credito di una obbligazione tramite la costituzione di un *collateral* da parte della controparte debitrice. Qualora il debitore sarà insolvente, il creditore può utilizzare questo *collateral*, che rappresenta quindi una garanzia fornita dal debitore al creditore. Nell'accordo di Basilea II³⁸ vi è una sezione dedicata al *Collateral* e la Banca d'Italia, nel recepire la disciplina dell'accordo, ha posto grande attenzione su questa sezione. Le istituzioni di vigilanza prevedono una organica disciplina dedicata alle tecniche di attenuazione del rischio di credito (*Credit Risk Mitigation*, CRM). Tra le tecniche ricorre la costituzione del *collateral*, garanzia reale finanziaria rappresentata da contante, determinati strumenti finanziari e oro, e l'uso di

³⁷ La Federal Reserve è più correttamente definita 'Federal Reserve System' in quanto incorpora 12 distretti distribuiti su tutto il territorio degli Stati Uniti.

³⁸ Il testo dell'accordo di Basilea è entrato in vigore nel 2007. È un accordo internazionale studiato e redatto Dal Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. Esso predispone un sistema di regole che hanno lo scopo di assicurare la stabilità patrimoniale delle banche principalmente a garanzia dei depositi ma anche a garanzia della sicurezza ed efficienza del sistema bancario.

altre garanzie rappresentate da immobili o crediti, concesse solamente alle banche che applicano i metodi IRB³⁹.

Nel mercato finanziario, ed in particolare nel mercato OTC, l'uso di derivatives con svariati sottostanti ha causato un aumento del rischio di credito. Le operazioni in derivati a lungo termine, infatti, generano dei flussi di cassa futuri il cui valore attualizzato, denominato Mark-to-Market, viene 'coperto' grazie alla concessione del *collateral*. Riassumendo, i benefici del *collateral* sono:

- La riduzione del rischio controparte;
- La migliore liquidità del mercato;
- L'ottimizzazione della gestione del credito come risorsa scarsa.

L'International Swaps and Derivatives Association (ISDA), associazione che vigila sul *credit default swap*, ha creato due documenti che regolano l'attività di collateralizzazione: Il Credit Support Annex nella versione English Law ed il Credit Support Annex nella versione New York Law, che differiscono solamente nell'approccio legale riguardo alla acquisizione del *collateral*. Per descrivere la differenza si considerino due soggetti, soggetto A e soggetto B, che stipulano un contratto finanziario derivato in cui la controparte A adempie la sua obbligazione immediatamente mentre la controparte B deve adempiere una obbligazione futura.

Nella versione di English Law la proprietà del *collateral* passa al soggetto esposto al rischio, nel nostro esempio al soggetto A, che si obbliga a restituire l'*equivalent collateral* se la controparte B adempie l'obbligazione.

Nella versione di New York Law la proprietà del *collateral* resta al soggetto che si assume l'obbligazione futura, ovvero alla controparte B, che deve depositarlo in un conto vincolato in modo che sia disponibile in futuro in caso di inadempimento. La controparte B non perde quindi la proprietà del *collateral* come avviene nel caso di English Law, e la controparte A può esercitare diritti sul bene solo in caso di insolvenza ed in qualità di possessore. La differenza della normativa di riferimento genera diversi approcci in caso di fallimento della controparte B, che ai fini della nostra analisi non è necessario analizzare.

Il Credit Support Annex non è un requisito obbligatorio per la costituzione di un *Collateral Agreement* ed è un documento con valenza legale. Il CSA si basa sul meccanismo del 'margin'. Considerando un contratto *swap*, le controparti ad ogni scadenza verificano il valore della loro posizione ed usando tale meccanismo regolano i margini aggiornandoli in

³⁹ Internal-rating-based: è un metodo per il calcolo del requisito patrimoniale in cui le ponderazioni di rischio sono funzione delle valutazioni che le banche effettuano internamente sui debitori.

base ai tassi Libor, Euribor e Eonia correnti. Considerando un contratto finanziario swap in cui vi sono due controparti A e B, se la controparte A garantisce il suo debito mediante un collateral CSA nella versione English Law a favore della controparte B, quest'ultima diventa proprietario del *collateral*. Se il *collateral* è rappresentato da una obbligazione, gli interessi maturati della obbligazione sono versati alla controparte A debitrice, che riceve tali interessi in qualità di 'usufruttario'⁴⁰ del *collateral*.

In questo modo il creditore, qualora il debitore risulti inadempiente, può disporre del *collateral* per ottenere il risarcimento del danno cagionato. La collateralizzazione permette quindi di ridurre il rischio di credito, anche se il rischio di *default* del debitore non viene attenuato. Infatti durante la crisi finanziaria l'uso della collateralizzazione nei cosiddetti mutui *subprime* ha avuto conseguenze negative nel mercato finanziario perché permise la creazione di una bolla speculativa al cui scoppio il mercato finanziario subì fallimenti.

Per cui la costituzione di *collateral*, seppur può sembrare positiva, produce conseguenze negative sul mercato. Oltre che alla conseguenza sui prezzi dei *derivatives*, una importante conseguenza è l'impossibilità di utilizzare una curva singola per interpolare i tassi d'interesse sul mercato. Considerando un contratto *swap* collateralizzato si creano due differenti flussi di casa:

- Un *cash flow* derivante dal contratto *swap* in cui vengono scambiati un tasso fisso contro un tasso variabile indicizzato al tasso Libor o Euribor;
- Un *cash flow* derivante dal *Collateral Agreement* come garanzia, che viene indicizzato al tasso OIS o Libor.

Se si indicizzano questi ultimi utilizzando il tasso Libor oppure l'Euribor, i valori derivanti non rispecchierebbero le condizioni reali del contratto, perciò il mercato finanziario subirebbe conseguenze negative.

È necessario, al fine di rappresentare utilizzando la *yield curve* una situazione reale del mercato, usare due differenti curve per la valutazione dei contratti derivati, ed in queste curve bisogna tener conto dello *spread* tra i tassi Libor con diverso *tenor* e tra i tassi Euribor con diverso *tenor*. Se si utilizza una unica *yield curve* per la valutazione dei titoli, la situazione di mercato rappresentata non corrisponde alla realtà.

⁴⁰ L'uso del termine usufruttario non è totalmente corretto in ambito finanziario perché l'usufrutto è un istituto di diritto privato. L'usufrutto consistente nel diritto di un soggetto (usufruttuario) di godere di un bene di proprietà di un altro soggetto (nudo proprietario) e di raccoglierne i frutti, ma con l'obbligo di rispettarne la destinazione economica. Nel nostro ambito l'usufruttario è il debitore che, seppur non proprietario del collateral, può percepirne i frutti, ovvero gli interessi.

È necessario abbandonare la teoria classica del *pricing* e le relazioni d'assenza di opportunità di arbitraggio comunemente utilizzate ed orientarsi verso un quadro teorico che inglobi le varie conseguenze prodotte dalla crisi.

2. Modello a Curve Multiple

Il nuovo modello a curve multiple considera il mercato segmentato in base ai *tenor* dei titoli.

In questo modello vengono considerate due curve distinte:

-*Discounting curve*: la curva dei rendimenti utilizzata per capitalizzare i *cash flow* futuri, che ingloba i cambiamenti nel *pricing* dei titoli;

-*Forwarding curve*: la curva dei rendimenti utilizzata per calcolare i *forward rates*, che considera i vari *tenor* dei tassi dei titoli e il tipo di sottostante da valutare.

2.1 Discounting curve

Nella stima della *discounting curve*, utile ad attualizzare i *cash flow* futuri, bisogna tenere in considerazione i cambiamenti dei prezzi dei titoli dovuti al *liquidity risk* ed al *default risk*. Il tasso Libor ed Euribor non possono essere considerati tassi benchmark perché non sono *risk-free*. Considerando i contratti che prevedono l'esistenza del *collateral*, per il principio di assenza di arbitraggio il *margin interest rate* CSA deve essere uguale al tasso usato per attualizzare i *cash flow* futuri: il tasso di attualizzazione maggiormente usato è il tasso *overnight* Eonia. Per questa motivazione il tasso Eonia ha attualmente sostituito il tasso Libor ed Euribor come tasso *risk-free* e benchmark per il calcolo della *discounting curve*.

Bisogna distinguere più casi nella costruzione della curva:

- In presenza di CSA con margine remunerato in base al tasso Eonia e con *collateral overnight* si utilizza il tasso Eonia;
- In assenza del *collateral* si utilizza il tasso di deposito decisi dalle banche centrali;
- In presenza di CSA diverse da quelle citate, che hanno quindi caratteristiche non standard, bisogna utilizzare curve costruite appositamente in base alle caratteristiche del contratto.

Si è analizzato che con la crisi finanziaria, per ridurre il rischio di *default*, è stato introdotto l'uso del *collateral* come garanzia: tra i tre casi citati il più frequente è il primo. In questo caso quindi, nella costruzione della curva Eonia si definiscono come input i tassi di deposito e gli OIS rates nel breve periodo, mentre per *maturity* superiori ai 12 mesi si utilizzano i tassi swap.

Per l'applicazione del metodo del bootstrap non ha importanza quali siano gli input in quanto il procedimento non cambia. Esistono varie tecniche del bootstrap che, in base ai tassi utilizzati, assumono nomi differenti. Nel caso della costruzione della curva Eonia si utilizza il metodo del *bootstrap linear par swap* utilizzando gli *zero rates* nelle diverse scadenze. La formula da applicare è esattamente identica a quella descritta nell'approccio a curva singola. Il metodo bootstrap è abbinato alla interpolazione lineare, utilizzata per calcolare i tassi relativi a *tenor* differenti di quelli presenti sul mercato.

2.2 Forwarding curve

La procedura da seguire nel caso del modello a curve multiple è il seguente:

- Costruire una curva *discount* seguendo la procedura tradizionale;
- Selezionare diversi insiemi di strumenti IRS Plain Vanilla separati in base alla *maturity*;
- Sono presi in considerazione IRS Plain Vanilla con *tenor* pari a 1M, 3M, 6M e 12M;
- Costruire le curve *forecast* riferite ad ogni *tenor* utilizzando il metodo del bootstrap;
- Valutare i tassi *forward* ed i *cash flow* corrispondenti su ogni curva *forecast* costruita;
- Determinare i fattori di attualizzazione usando i dati della curva *discount*;
- Attuare il processo di stima dei prezzi sommando i *cash flow* attualizzati.

3. Il metodo del bootstrap nel single-curve model e multi-curve model

Il metodo del bootstrap nel modello classico tradizionale permette di costruire una singola *yield curve* che può essere segmentata in base alla *maturity* considerata. Per la costruzione della singola curva dei rendimenti sono usati gli *swap* da cui calcolare gli *zero rates* utili alla costruzione della curva.

Considerando uno scadenziario (t_1, t_2, \dots, t_n) e l'istante di valutazione t_0 , è possibile esprimere le quotazioni dei titoli utilizzando la formula del bootstrap nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= f[P(t_0, t_1)] \\
 P_1 &= f[P(t_0, t_1), P(t_0, t_1)] \\
 P_2 &= f[P(t_0, t_1), P(t_0, t_1), P(t_0, t_2)] \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_n &= f[P(t_0, t_1), P(t_0, t_1), P(t_0, t_2), P(t_0, t_2)]
 \end{aligned}$$

CONCLUSIONE

In questo elaborato ho analizzato il ruolo centrale nei mercati finanziari della curva dei rendimenti. La *yield curve* è un grafico che evidenzia la relazione esistente tra lo *yield to maturity* di un titolo a cedola nulla e la *maturity* del titolo. È rilevante dal punto di vista economico finanziario perché è fondamentale nel processo di determinazione dei prezzi di titoli a reddito fisso e del tasso d'interesse di titoli derivati. Riflette inoltre la politica monetaria di un paese e rappresenta l'indicatore per la gestione del rischio nel mercato finanziario e per le decisioni d'investimento nell'acquisto dei titoli. Il problema affrontato è legato alla sua stima che, a causa dell'imperfezione e delle asimmetrie nel mercato, non è stata semplice da effettuare. Nel mercato italiano, osservando i dati presenti sul mercato, non è possibile conoscere gli *zero rates* di titoli con *maturity* elevate perché non sono disponibili titoli *zero coupon* su una *maturity* superiore di due anni. Per risolvere tale problema è stato utilizzato il metodo del bootstrap, metodo iterativo tramite cui è possibile estrapolare gli *zero rates* partendo dai tassi dei *coupon bonds* negoziati sul mercato. Il metodo del bootstrap, introdotto in ambito finanziario da Nelson e Siegel, è stato applicato ai tassi *swap* per derivare gli *zero rates*. In particolare è stato utilizzato il contratto IRS Plain Vanilla. Esso è un *coupon swap* che ha permesso di ottenere una curva dei rendimenti che approssima la reale condizione nel mercato. Nel IRS *Plain Vanilla* una delle controparti assume la posizione di *Floating rate payer* e corrisponde un importo indicizzato al tasso Libor o Euribor, tassi *risk-free* usati come tassi benchmark. Il tasso dei Titoli di Stato non è usato come benchmark perché, nonostante il rischio di credito sia nullo, vi sono fattori come l'illiquidità, la tassazione e la regolazione che lo influenzano. Il metodo del bootstrap non fornisce una descrizione completa del mercato perché incontra tre limiti principali:

- La segmentazione della *maturity* dei titoli in *tenor* diversi;
- L'illiquidità dei mercati, che si è tradotta in un aumento degli *spread* tra i tassi;
- L'esistenza nel mercato di titoli derivati con caratteristiche intrinseche molto varie che, se confrontati con titoli differenti, generano una approssimazione della *yield curve* non attendibile.

Per risolvere il primo limite e calcolare i tassi *spot* relativi a *tenor* differenti, ho esplicitato la modalità di applicazione dell'interpolazione lineare e della *cubic spline interpolation* che, uniti al metodo del bootstrap, permettono di derivare gli *zero rates* che compongono la curva

dei rendimenti. Gli altri due limiti citati sono emersi con la Crisi Finanziaria del 2007. In particolare sono emersi:

- il *liquidity risk* che ha incrementato lo *spread* esistente tra i tassi Euribor e Libor con diverse *maturity*;
- il *default risk* che è stato parzialmente risolto con l'introduzione dell'uso del *collateral* come garanzia del debito.

I tassi finora utilizzati come benchmark riflettono questi rischi e, per evitare una rappresentazione distorta della curva dei rendimenti, non devono essere utilizzati. Sono oggi utilizzati gli Overnight Indexed Swaps per ottenere una stima corretta della *yield curve*. Dopo la crisi finanziaria è stato introdotto un modello a curve multiple. Il nuovo modello è formato dalla *discounting curve* e dalla *forwarding curve* che, utilizzate insieme, riescono a stimare correttamente l'andamento dei tassi d'interesse sul mercato. Nel terzo capitolo, dopo aver analizzato il nuovo modello a curve multiple, ho esplicitato la modalità di applicazione del metodo bootstrap nella derivazione delle due diverse curve. Ho evidenziato che, nonostante i tassi utilizzati come benchmark ora siano differenti rispetto alla situazione pre-crisi, l'applicazione del metodo non è cambiato totalmente perché non dipende dai tassi considerati ma solamente dalla possibilità di seguire il processo iterativo che lo caratterizza.

Bibliografia

- Angelini, F., Herzel, S. La valutazione dei titoli a tasso variabile.
- Ametrano, F.M., Bianchetti, M. (2009, Marzo). Bootstrapping the illiquidity. Multiple yield curve onstruction for market coherent forward rates estimation.
- Bernhart, G. (2013, Febbraio 18). Interest Rate Bootstrapping Explained.
- Bernini, E., Fantazzini, D. (2011, Settembre). Funzioni spline per la stima di strutture a termine: il caso dei corporate spread finanziari.
- Bianchetti, M., Carlicchi, M. (2012, Dicembre 19). Markets Evolution After the Credit Crunch.
- Chakroun, F., Abid, F. (2014). A Methodology to Estimate the Interest Rate Yield Curve in Illiquid Market: The Tunisian Case.
- Chang, Y., Schlögl, E. (2015, Gennaio 15). A Consistent Framework for Modelling Basis Spreads in Tenor Swaps.
- Deaves, R., Parlar, M. (2000). A generalized bootstrap method to determine the yield curve. *Applied Mathematical Finance* 7, 257-270.
- Hagan, P.S., West, G. (2015, Giugno 6). Interpolation Methods for Curve Construction.
- Hull, J. C. (2015). Options, futures, and other derivatives. Ninth Edition.
- Pallavicini, A., Tarengi, M. (2010, Giugno 25). Interest Rate Modelling with Multiple Yield Curves.
- Piennar, R., Choudhry, M. Fitting the term structure of interest rates: the practical implementation of cubic spline methodology
- Ron, U. (2000 Agosto). A Practical Guide to Swap Curve Construction. Bank of Canada Working Paper 2000-17.

Principali siti consultati

www.borsaitaliana.it

www.global-rates.com

www.ilsole24ore.com

www.ft.com