Dipartimento di: Impresa e Management *Cattedra:* Statistica

ASSET ALLOCATION E OTTIMIZZAZIONE DI PORTAFOGLIO: TRA TEORIA E APPLICAZIONE

RELATORE

Prof. Livia De Giovanni

CANDIDATO
Matr. 180581

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

INDICE

CAPITOLO 3: Applicazione dei modelli teorici

INTRODUZIONE

Come si evince dal titolo, l'elaborato verterà sulle teorie di selezione e costruzione di un portafoglio ottimale, partendo dalla primissima teoria, la "*Portfolio Selection"* di Markowitz, passando per il modello *CAPM* e *APT*, fino ad arrivare all'ultimo modello, quello di *Black&Litterman.*

Questo argomento non è stato scelto a caso; nel mese di marzo 2016, la Banca Popolare di Vicenza entrò in crisi e il suo deprezzamento delle azioni (quasi del 90%) ha portato sull'orlo del lastrico più di 200 famiglie, che si sono trovate in uno stato di grandissima emergenza. E così, anche la mia città natale ha fatto esperienza di quel che viene definito "*Bank Run"*, alla lettera *corsa alla banca,* con migliaia di investitori e risparmiatori accorsi agli sportelli per cercare di recuperare il poco rimasto. E con totale incredulità i soci appresero le ragioni del crollo della banca vicentina, imputabili ad anomalie relative alle operazioni di acquisto e sottoscrizione delle azioni, nonché anomalie relative ai sistemi di controllo interni e alla normativa Mifid degli ultimi aumenti di capitale. Ci si domanda dunque quale sia la soluzione ad un problema che affligge le menti di ogni investitore: dati titoli rischiosi e non rischiosi, qual è la combinazione ottimale che permette di guadagnare di più, mantenendo un livello di rischiosità in sintonia con il nostro grado di avversione al rischio?

Individuazione di alternative, selezione di criteri e allocazione finale sono alla base delle decisioni di coloro che operano nei mercati finanziari; e queste scelte finali dipendono dall'uso di specifici modelli teorici. Le strategie di investimento di titoli (*asset allocation)* trattano il processo attraverso il quale un individuo decide di investire le proprie risorse tra diversi investimenti, che siano azioni, obbligazioni, immobili o altro. Difatti, lo scopo dell' asset allocation non è altro che l'ottimizzazione di un portafoglio di investimenti.

L'elaborato, dunque, sarà così strutturato: un primo capitolo affronterà da un punto di vista matematico-statistico una delle teorie più importanti della finanza, la Portfolio Selection introdotta nel 1952, come punto di partenza per la costruzione di un portafoglio efficiente di titoli; ne trarrà gli elementi e concetti essenziali, come valore atteso, varianza, covarianza e l'effetto di diversificazione, per poi arrivare alla costruzione della frontiera efficiente, contenente tutti i portafogli fattibili, e al portafoglio ottimale. Un secondo capitolo trarrà diverse teorie alternative al modello di Markowitz, quali il modello di Capital Asset Pricing Theory, il modello di Arbitrage Pricing Theory, ed infine il modello di Black and Litterman, quale miglioramento e approfondimento della Portfolio Selection. Infine, un terzo capitolo applicherà il due modelli principalmente trattati, quelli di Markowitz e Black&Litterman, per l'elaborazione di un portafoglio di titoli ottimale ed efficiente, utilizzando come fonte di dati alcuni titoli compresi nell'indice FTSE MIB. Concluderemo, dunque, mettendo in pratica ciò che i migliori autori teorizzarono nel '900, arrivando a rispondere alla domanda posta all'inizio, ovvero come si sceglie la composizione di un portafoglio in modo efficiente ed ottimale.

CAPITOLO 1: La "Portfolio Selection" di Markowitz

1.1 Premessa

Le decisioni finanziarie, in particolar modo le scelte di investimento, sono molto comuni per i singoli individui; è alquanto frequente riscontrare come gli individui tendino a non concentrare i loro investimenti in un solo titolo, prediligendo portafogli formati da diversi titoli.

La scelta di diversificare i propri investimenti deriva dal fatto che questo consente di ridurre il rischio complessivo; questo dipende dal comportamento delle azioni: i prezzi di azioni diverse non hanno un andamento concorde, in altre parole non sono correlati. Il rischio che può essere ridotto/eliminato con la diversificazione è denominato *rischio specifico*; il rischio specifico deriva dal fatto che molte minacce che un'impresa si può trovare ad affrontare sono caratteristiche della stessa. Tuttavia, vi è un secondo tipo di rischio, il *rischio sistematico*, che permane nonostante la diversificazione.

La costruzione di un portafoglio efficiente è stata oggetto di diverse ricerche e teorie; il problema sulle quali si focalizzano riguarda la combinazione ideale di investimenti che permette ai diversi investitori di minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo.
La prima teoria di particolare rilevanza è il modello di selezione di portafoglio di Harry Markowitz, introdotto e descritto nell'articolo *Porfolio Selection* (1952). Questo elaborato partirà e si concentrerà dapprima sulla teoria di Markowitz, per poi proseguire analizzando le teorie successive, in particolare il modello CAPM*,* *ATP* e il modello *Black&Litterman.*

1.2 Fondamenti del modello *Media-Varianza*

Qual è il portafoglio ottimale? Molti investitori si pongono questa semplicissima domanda, probabilmente sin dalla nascita del mercato azionario; tuttavia, solamente quando nel 1952 Henry Markowitz pubblicò uno scritto sulla selezione di portafoglio, questa domanda ricevette una risposta.
La ricerca di Harry Markowitz pone il processo di costruzione di un portafoglio d'investimenti come un problema matematico e parte da un assunto fondamentale: se si investe in titoli diversi tra loro non correlati, se sussiste una riduzione del valore di un titolo, questo sarà compensato dall'aumento del valore di un altro titolo, e si avrà un livello di diversificazione maggiore. Di conseguenza, si potrà avere un portafoglio che presenta una rischiosità inferiore.
L'analisi di Markowitz parte dall'osservazione delle performance storiche dei titoli per poter poi introdurre delle aspettative su quelle future; in questo elaborato, tratteremo solamente la parte successiva dell'analisi, che parte dalle performance future dei tioli e termina con la scelta di portafoglio.
Le ipotesi fondamentali sulle quali fu costruita la teoria di Markowitz sono le seguenti:

- Gli investitori sono avversi al rischio e intendono massimizzare l'utilità attesa;
- I costi di transazione e le imposte sono nulli;
- Il mercato è perfettamente concorrenziale;
- L'orizzonte temporale è mono-periodale, da *t* a *t+1* e siamo in presenza di N titoli diversi;
- Gli investitori selezionano i portafogli sulla base dei seguenti indici statistici riferiti alla variabile casuale R (rendimento): il valore atteso $E(R_p)$ e la varianza σ_p^2(o alternativamente la deviazione standard σ, come radice quadrata della varianza), che indica il rischio.

Dalle precedenti ipotesi fu ricava il principio *Media-Varianza,* il quale afferma che, tra diverse scelte di investimento, è preferibile quella che garantisce maggior rendimento atteso e minor varianza/deviazione standard. Da questo principio si ricava che, se un portafoglio A presenta un maggior rendimento atteso rispetto al portafoglio B, questo *domina* il portafoglio B.

1.3 Elementi del modello: rendimento, valore atteso, varianza e covarianza di un titolo.

In questo paragrafo esamineremo gli elementi fondanti il modello di *Media-Varianza,* quali il rendimento atteso, varianza, covarianza e indice di correlazione.
Definiamo rendimento di un'attività finanziaria (R) il rapporto tra capitale investito e utili prodotti da un investimento. Dato un titolo *i,* il suo tasso di rendimento in *t,* ex-ante o ex-post, è:

$$r_{t,i} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

dove:
$P_{i,t}$ è il prezzo di acquisto
$P_{i,t-1}$ è il prezzo di vendita effettivo
$D_{i,t}$ è il dividendo all'epoca t

La differenza tra tasso di rendimento ex-post ed ex-ante sta nel fatto che il primo è un valore certo, mentre il secondo è un valore stimato nel periodo di investimento t-1, basato su previsioni future di $P_{i,t}$ e $D_{i,t}$; ricordiamo che è l'incertezza è una caratteristica essenziale di un investimento.
L'incertezza appena nominata viene considerata come aleatorietà, facendo del rischio parte fondante di un investimento; e proprio questa imprevedibilità fa si che il rendimento possa essere rappresentato da una variabile casuale discreta R, descritta da una funzione di probabilità che associa ad ogni suo valore la rispettiva probabilità.
Relativamente alla variabile casuale Rendimento, Markowitz utilizza due indici statistici, il *valore atteso* e la *varianza*.
Ipotizziamo che la variabile R_i, relativamente all' i-esimo titolo, assuma un numero *k* di valori: $r_{i,1}, r_{i,2}, \ldots r_{i,k}$ e che le probabilità (o pesi) dei rendimenti siano p_{1} $_{,}$ $p_{i,2}, \ldots p_{i,k}$. Il valore atteso del rendimento di un titolo sarà:

$$\mu_i = E(R_i) = \sum_{j=1}^{k} r_{i,j} p_{i,j}$$

Il rendimento atteso E(R_i) rappresenta la media ponderata dei rendimenti di un titolo; sono dunque utilizzate le probabilità relative ai singoli rendimenti come pesi. Poiché questo implicherebbe calcoli notevoli, nell'ultimo capitolo assumeremo che i rendimenti futuri dei titoli possano essere descritti dai rispettivi rendimenti storici. E(R_i) rappresenterà dunque la media aritmetica dei rendimenti passati. Si precisa che, affinché quest'ipotesi sia valida, bisogna operare in regime di *regime dell'interesse composto,* secondo la quale gli interessi maturati periodicamente vengano capitalizzati, ossia sommati al capitale investito inizialmente e reinvestiti per far maturare interessi maggiori nel periodo successivo.

Il secondo indice utilizzato nel modello *media-varianza* è quest'ultima, la quale permette di identificare lo scostamento tra il rendimento effettivo di un titolo e il suo rendimento atteso; essa misura quindi il rischio, il grado di incertezza di un'attività. La varianza è calcolata nel modo seguente:

$$\sigma_i^2 = Var(Ri) = \sum_{j=1}^{k} (r_{i,j} - E(R_i))^2 \; p_{i,j}$$

Come vediamo dalla formula appena introdotta, la varianza fornisce una misurazione della sensibilità dei valori assunti da una certa variabile, specificatamente, di quanto questi valori si discostano quadraticamente rispettivamente dalla media, in questo caso dal valore atteso.
La varianza Var(R_i), dunque, non solo misura il rischio finanziario di un'attività aleatoria, ma al tempo stesso rappresenta un indice di variabilità intorno alla media. Nel corso di questo elaborato, spesso faremo riferimento alla rischiosità di un titolo/portafoglio utilizzando lo *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* σ_i, quale radice quadrata della varianza, poiché è quest'ultima, piuttosto che la varianza, ad essere direttamente paragonabile ai rendimenti passati o al set di probabilità.
Inoltre, si deve tenere a mente che rendimento e rischio sono due facce della stessa moneta: più l'investimento è rischioso, più è alto il rendimento potenziale.

E' importante sottolineare che sia i rendimenti attesi sia le varianze dei singoli titoli sono considerate variabili casuali, con una distribuzione di probabilità che

tiene conto del legame tra un titolo e la parte rimanente del mercato; quindi è essenziale considerare un'ultima variabile, la *covarianza* fra due titoli *i,j*.
La covarianza misura il grado in cui due variabili, in questo caso due titoli, si muovono insieme ed è calcolata su singole coppie di titoli (i, j) e i loro rendimenti, come valore atteso del prodotto degli scarti dalla media dei due titoli
$r_i - E(R_j)\ \ e\ \ r_j - E(R_j)$:

$$Cov_{i,j} = E\{((r_i - E(R_i))(r_i - E(R_i))\}$$

Alternativamente, una seconda formulazione della stessa è la seguente:

$$Cov_{i,j} = E[R_i R_j] - E[R_i]E\ [R_j]$$

Introduciamo un ultimo elemento, *l'indice o coefficiente di correlazione*, che esprime una relazione di linearità tra due titoli e consente di osservare come varia il rendimento di un titolo al variare del rendimento di un altro. Esso si esprime nel seguente modo:

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$

dove:
σ_i è la deviazione standard (o scarto quadratico medio), come radice quadrata della varianza del titolo *i*;
σ_j è la deviazione standard (o scarto quadratico medio) del titolo *j*.

Da questo si evince una seconda formulazione della covarianza che utilizza questo coefficiente:

$$Cov_{i,j} = \ \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$$

L'indice di correlazione presenta le seguenti proprietà:

- Se ρ = +1 le variabili sono correlate positivamente e non vi è alcuna riduzione del rischio;
- Se ρ < 1 il beneficio in termini di riduzione del rischio cresce al decrescere dell'indice di correlazione;
- Se ρ = -1 il beneficio di riduzione del rischio è massimo;
- Nel caso di variabili indipendenti, ρ=0.

Dopo aver descritto gli elementi caratterizzanti il modello di Markowitz, passiamo alla costruzione di un portafoglio d'investimento.

1.4 Rendimento atteso e varianza di portafoglio come combinazione lineare di variabili casuali

Dopo aver delineato lo scheletro del modello di Markowitz, analizzandone i principali elementi, dobbiamo fare una precisazione su questi ultimi, in particolare rendimento e varianza.
Matematicamente, sappiamo che si definisce *combinazione lineare* una qualsiasi espressione del tipo:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

dove v_i rappresentano elementi dello spazio vettoriale moltiplicati per uno scalare a_i arbitrario. Prendiamo *n* variabili casuali $X_1, X_{2,\dots}, X_n$; allora una combinazione lineare è una nuova variabile *Y,* tale che:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

Ecco allora che, essendo un portafoglio formato da *n* titoli per i relativi pesi, il rendimento di portafoglio R_p è combinazione lineare dei singoli rendimenti come variabili casuali.
Ipotizziamo un numero *n* di titoli, con rendimento R_i*;* sia R_p la variabile casuale data dalla sommatoria pesata dei rendimenti dei titoli:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \cdots + x_n R_n \qquad (1.1)$$

dove:

- x_i indica la percentuale di ricchezza investita nell' i-esimo titolo;
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (ipotesi di assenza di indebitamento);
- $x_i \geq 0$ per *i=1,2,…,n* (ipotesi assenza vendite allo scoperto).

In base alle proprietà delle combinazioni lineari di variabili casuali, il valore atteso di una combinazione lineare è pari alla combinazione lineare dei valori attesi:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ E(R_i) \tag{1.2}$$

La varianza di una combinazione lineare, a differenza del valore atteso, non è pari alla somma delle singole varianze; dati 2 titoli, la varianza della combinazione lineare è data dalla seguente formula:

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = E[R_p - E(R_p)]^2 \tag{1.3}$$

oppure:

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{1,2}$$

Al fine di costruire un portafoglio formato da *n* titoli, dobbiamo ricordare che:

- le varianze e i relativi pesi sono tanti quanti i titoli (*n*);
- la varianza di qualunque titolo è pari alla covarianza rispetto a se stesso: $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$;
- le covarianze sono pari a n^2, poiché rappresenta la combinazione di *n* coppie di titoli; il numero effettivo di covarianze, non tenendo in considerazione le ripetizioni, è il seguente:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m} \tag{1.4}$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra varianza, dati *n* titoli, nel seguente modo:

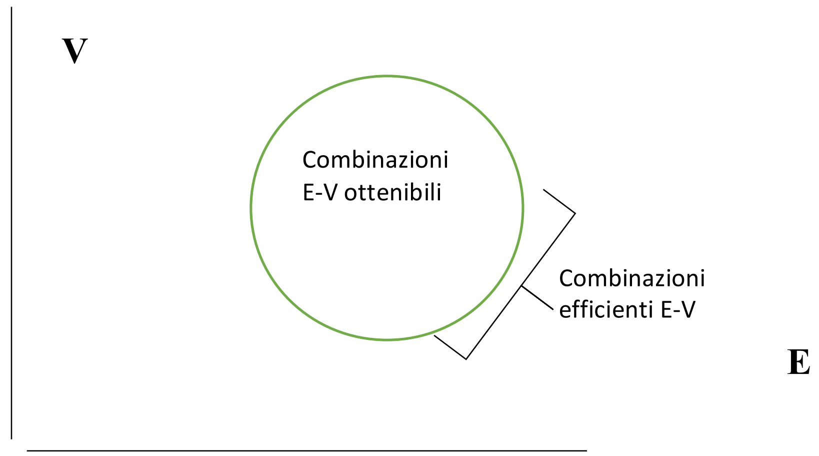
$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov_{i,j} \tag{1.5}$$

1.5 Processo di ottimizzazione vincolata e frontiera efficiente

Dopo aver delineato gli indici fondamentali come combinazione lineare di variabili casuali, procediamo con la nostra *asset allocation*. Questa, come si evince dal testo di Markowitz, "*Portfolio Selection*" (1952), è scissa in 4 parti:

1. Determinazione il criterio di efficienza (principio *media-varianza*);
2. Identificazione, in base al criterio scelto, delle alternative possibili di investimento, separando i portafogli efficienti da quelli non efficienti;
3. Controllo di coerenza tra combinazioni di rendimenti attesi e rischiosità con le richieste dell'investitore, dato il criterio scelto;
4. Scelta della combinazione ottimale per l'investitore.

L'investitore può scegliere una tra diverse combinazioni di E e σ^2 in base al criterio scelto, alla quale corrisponderanno un particolare set di pesi x_i per ogni titoli, rappresentanti le incognite del nostri procedimento:



La regola media-varianza afferma che l'investitore selezionerà il portafoglio che darà la più alta combinazione E-V tra quelle efficienti, ovvero la combinazione con varianza minima, dato il valore atteso, oppure massimo valore atteso, data la varianza. Dati due portafogli A e B, l'investitore sceglierà il portafoglio A, che si dirà dominante e appartenente alla frontiera efficiente, se vengono rispettate le seguenti condizioni:

1. $\mathrm{E}(R_A) \geq E(R_B)$;
2. $\sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$;
3. almeno una delle due disuguaglianze è forte.

Da un punto di vista analitico, questo principio può essere visto come un problema di massimizzazione vincolata per la determinazione degli x_i ottimali; ecco che l'investitore sceglierà la combinazione ottimale con minimo rischio, dato un

determinato livello di rendimento, oppure con rendimento massimo, dato un certo livello di rischiosità.
Prima di procedere con l'ottimizzazione vincolata e la costruzione della nostra frontiera efficiente, dobbiamo impostare la *funzione obiettivo.* In pratica, dati alcuni vincoli, il problema consiste nel trovare la funzione da minimizzare o massimizzare per osservare i valori della variabile indipendente in corrispondenza dei quali la funzione obiettivo raggiunge il suo minimo o massimo valore. Per poter risolvere il problema viene utilizzato il *moltiplicatore di Lagrange* :

max/min *f(x,y)* (*funzione obiettivo*)

sotto il vincolo *g(x,y) = c*

Ricaviamo la *funzione lagrangiana* nel seguente modo:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - c] \tag{1.6}$$

In questa nuova funzione obiettivo, compare una nuova variabile, λ, denominata *moltiplicatore di Lagrange*. Come possiamo vedere da tale funzione, sono presenti più variabili indipendenti; di conseguenza, per attuare il processo di minimizzazione o massimizzazione, dovranno essere calcolate le derivate parziali prime rispetto ad ogni variabile per poi uguagliarle allo zero e metterle a sistema.

Ora che sono chiari i due pilastri del modello *media-varianza*, possiamo impostare il problema di ottimizzazione vincolata in due modi distinti:

1. massimizzazione del rendimento data una certa varianza;
2. minimizzazione del rischio dato un certo livello di rendimento.

Qualunque sia il procedimento selezionato, vi è un vincolo ulteriore, ovvero $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, che significa che la somma dei pesi dei singoli titoli deve essere pari all'unità, non potendo ricorrere all'indebitamento. Si attua, inoltre, una seconda distinzione tra il caso in cui sono ammesse le *vendite allo scoperto* e il caso in cui non lo sono. Nel primo caso, è presente un ultimo vincolo, $x_i \geq 0 \; per \; i = 1,2, \dots, n$. Sono qui necessarie delle precisazioni; quest'ultimo vincolo sia valido, devono essere rispettate le condizioni di *Kuhn-Tucker.* Generalizzazione del *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, sono delle condizioni necessarie relative

a problemi di programmazione non lineare dove entrano i gioco vincoli di disuguaglianza. Kuhn e Tucker affermano che, affinché le condizioni necessarie permettano di individuare un punto di minimo o massimo locale, deve essere rispettata l'ipotesi di regolarità dei vincoli o dell'insieme ammissibile.
Matematicamente, possiamo esprimere i quattro percorsi di ottimizzazione vincolata nel seguente modo:

$$\begin{cases} min_{x_i}\ \sigma_p^2 = min_{x_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j} \\ E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ E(R_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} max_{x_i} E(R_p) = max_{x_i} \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) \\ \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j} \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} min_{x_i}\ \sigma_p^2 = min_{x_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j} \\ E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ E(R_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} max_{x_i} E(R_p) = max_{x_i} \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) \\ \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j} \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Ora, proviamo a ragionare da un punto di vista geometrico; Markowitz si accorse che, dato un insieme delle possibili combinazioni rendimento-varianza, le combinazioni *fattibili* formano una regione chiusa dello spazio; in questa regione è delimitata da una frontiera, dalla quale possiamo distinguere la *frontiera efficiente*, formata da tutte le combinazioni *dominanti*, ovvero che presentano una combinazione rischio-rendimento efficiente.

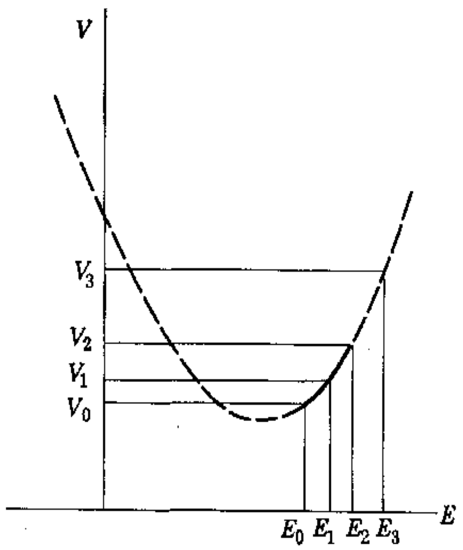


Figure 16. V and E along a critical line.

Il presente grafico rappresenta un portafoglio composto da tre titoli; per la costruzione dello stesso sono stati utilizzati alcuni concetti: le *iso-mean lines,* luogo dei punti del piano caratterizzati dallo stesso rendimento atteso per diversi valori di x_i, rappresentate da linee parallele; le *iso-variance curves,* luogo dei punti del piano con la stessa varianza per diverse combinazioni di x_i, di forma concentrica; la *critical line*, luogo dei punti di tangenza tra le prime, che rappresenta l'insieme dei punti con varianza minima dato un livello di rendimento.
Lungo la *critical line*, troviamo la *frontiera* dei portafogli fattibili, di forma parabolica; in questa si distinguono i portafogli *inefficienti* da quelli *efficienti,* rappresentati nella parte continua della parabola.
A questo punto, per la costruzione della frontiera efficiente, partiamo dal caso più semplice, ovvero un portafoglio formato da due titoli.

1.6 Costruzione della frontiera efficiente

1.6.1 Caso con *n=2* titoli rischiosi

Per la costruzione della frontiera efficiente, presenteremo due casi, il primo prendendo in considerazione due titoli, e il secondo con *n* titoli.
Presentiamo ora il caso più semplice, ovvero la costruzione di una frontiera efficiente con due titoli. Sia P un portafoglio composto da due titoli arbitrari A e

B , caratterizzati da rendimenti R_Ae R_B , e sia X_i, con i=A,B i pesi corrispondenti ai due titoli. Al fine di ricavare una relazione lineare tra rendimento e varianza, possiamo esprimere X_A in funzione di E(R_A) e inserirlo nella formula della varianza; in questo modo saremo poi in grado di costruire la frontiera efficiente. Consideriamo un portafoglio generico P, caratterizzato da rendimento R, espresso dalla seguente formula:

$$R = x_A R_A + (1 - x_A) R_B \tag{1.7}$$

con x_A come quota del titolo A e $(1 - x_A)$ come quota del titolo B.
Come sappiamo, il rendimento di portafoglio è combinazione lineare dei singoli rendimenti dei titoli A e B; di conseguenza possiamo esprimerlo attraverso la formula:

$$E(R_P) = x_A E(R_A) + (1 - x_A) E(R_B) \tag{1.8}$$

La seconda variabile caratterizzante il nostro portafoglio P sarà la varianza σ_P^2, espressa dalla seguente formula:

$$\sigma_P^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_A^2 + 2 x_A (1 - x_A) \sigma_{A,B} \tag{1.9}$$

con $\sigma_{A,B}$ covarianza tra il titolo A e il titolo B.
Se, invece, vogliamo esprimere la rischiosità attraverso la deviazione standard, o SQM, questa sarà pari a:

$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_A^2 + 2 x_A (1 - x_A) \sigma_{A,B}} \tag{1.10}$$

Entrambe varianza e deviazione standard possono essere utilizzate come parametri di misurazione della rischiosità dell'investimento; tuttavia, sappiamo quanto sia importante il ruolo giocato dalla covarianza. Questa rappresenta la tendenza dei titoli a muoversi insieme; il grado di rischiosità di un portafoglio, quindi, aumenterà o diminuirà in base alla tendenza dei titoli a muoversi o meno nella stessa direzione. Di conseguenza, un individuo avverso al rischio, sceglierà un portafoglio formato da titoli correlati positivamente, che quindi si muoveranno congiuntamente, mentre un individuo più propenso al rischio sceglierà un portafoglio composto da titoli correlati negativamente. Sappiamo che un altro indice che esprime il concetto è l'indice di correlazione, che ricordiamo essere espresso dalla formula:

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{1.11}$$

Di conseguenza, possiamo esprimere varianza e deviazione standard di portafoglio utilizzando il coefficiente di correlazione come segue:

$$\sigma_P^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_A^2 + 2x_A(1 - x_A)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \tag{1.12}$$

e

$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_A^2 + 2x_A(1 - x_A)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B} \tag{1.13}$$

Il coefficiente di correlazione appare dunque come determinante per la diversificazione di portafoglio: ribadiamo che la rischiosità di un portafoglio generico dipenderà dalla correlazione positiva o negativa dei titoli, ovvero dal loro movimento congiunto o meno degli stessi. Ricordiamo che l'indice di correlazione spazia nell'intervallo [-1,1], e che l'unico valore che rende il suo effetto nullo in termini di diversificazione è +1.

Applichiamo ora quanto detto al nostro portafoglio generico P per verificare come cambia la frontiera efficiente a seconda che il coefficiente di correlazione assuma come valore -1, +1 e compreso tra i due.

1) $\boldsymbol{\rho_{A,B} = +1}$

Come detto in precedenza, questo è l'unico caso in cui la diversificazione di portafoglio non è affetta dall'indice; i titoli, infatti, sono perfettamente correlati positivamente, ovvero si muovono in modo perfettamente congiunto.
Inserendo $\rho_{A,B} = +1$ nella formula della varianza, otteniamo:

$$\sigma_P^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_A^2 + 2x_A(1 - x_A)\sigma_A\sigma_B \tag{1.14}$$

Di conseguenza, la deviazione standard sarà il quadrato di un binomio:

$$\sigma_P = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + (1-x_A)^2\sigma_A^2 + 2x_A(1-x_A)\sigma_A\sigma_B} = \qquad (1.15)$$

$$= \sqrt{(x_A\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B{}^2} = x_A\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B$$

Come possiamo notare, in questo caso la varianza di portafoglio è data dalla combinazione lineare convessa dei singoli rendimenti dei titoli; l'effetto diversificazione è dunque nullo, non riuscendo a ridurre il rischio complessivo di portafoglio.

Per poter rappresentare il portafoglio sul piano cartesiano, esprimendolo come combinazione di rendimento-varianza, dobbiamo trovare la relazione tra le due variabili.

Dalla (1.08) ricaviamo

$$x_A(E\left(R_A - E(R_B)\right) = E\left(R_p\right) - E(R_B) \qquad (1.16a)$$

$$x_A = \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)} \qquad (1.16b)$$

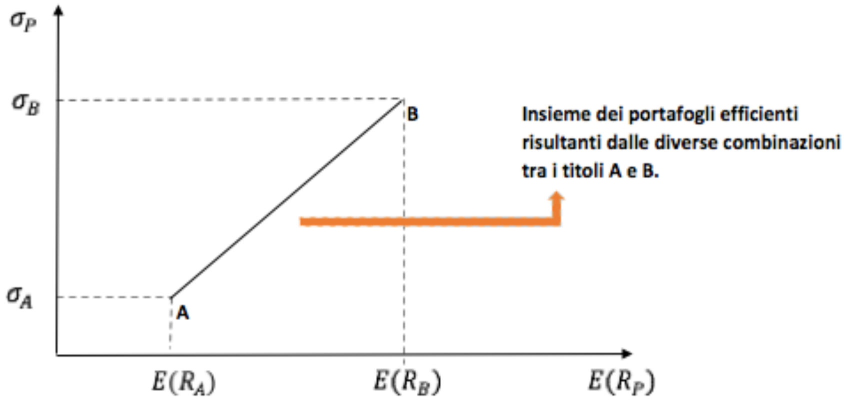
Inserendo la formula nella (1.15), troviamo:

$$\sigma_P = \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)}\sigma_A + (1 - \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)})\sigma_B \qquad (1.17a)$$

da cui si ricava:

$$\sigma_P = \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)}\ (\sigma_A - \sigma_B) + \sigma_B \qquad (1.17b)$$

Da queste relazioni si evince che la deviazione standard, rappresentante il rischio, è funzione lineare del rischio dei due titoli e dei loro rendimenti; inoltre, notiamo che al crescere di x_A, aumenta il rendimento atteso di portafoglio e la variabilità; si deduce che se un individuo predilige un investimento a bassa rischiosità, anche il rendimento sarà alquanto basso.



Come emerge dalle relazioni precedenti, tutte le possibili combinazioni rendimento-varianza si trovano sul segmento AB; poiché sappiamo che un portafoglio è efficiente se non esiste un altro portafoglio che abbia minor rischio a parità di rendimento, possiamo affermare con certezza che tutti i portafogli situati sul segmento AB sono efficienti.

2) $\boldsymbol{\rho_{A,B} = -1}$

Consideriamo ora l'altro caso estremo, ovvero il caso in cui i due titoli siano perfettamente correlati negativamente; qui, i titoli si muovono in direzioni opposte, ovvero all'aumentare del rendimento del titolo A l'altro diminuisce e viceversa. Al contrario del caso precedente, qui l'effetto di diversificazione è massimo.
Inserendo $\rho_{A,B} = -1$ nella (1.15), otteniamo:

$$\sigma_P^2 = x_A^2\sigma_A^2 + (1 - x_A)^2\sigma_A^2 - 2x_A(1 - x_A)\sigma_A\sigma_B =$$

$$= \sqrt{(x_A\sigma_A - (1 - x_A)\sigma_B)^2} = |x_A\sigma_A - (1 - x_A)\sigma_B| \qquad (1.18)$$

Troviamo qui il binomio in valore assoluto in quanto sappiamo che un binomio al quadrato fuori da una radice può assumere sia valori positivi che valori negativi.

Se $x_A\sigma_A > (1 - x_A)\sigma_B$, la deviazione standard sarà la seguente:

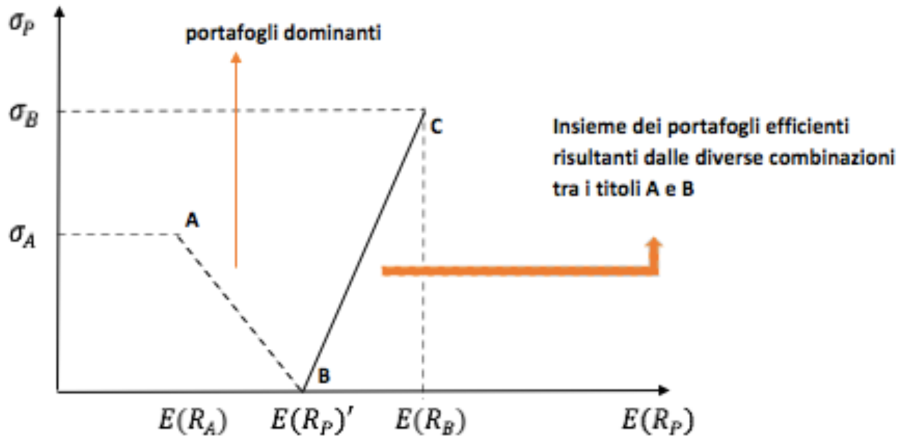
$$\sigma_P = x_A(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B$$

inserendola nella (1.16b) sarà:

$$\sigma_P = \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)}\,(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B \tag{1.19}$$

Al contrario, se $x_A\sigma_A < (1-x_A)\sigma_B$, la deviazione standard sarà:

$$\sigma_P = \sigma_B - \frac{E(R_P)-E(R_B)}{E(R_A)-E(R_P)}\,(\sigma_A + \sigma_B) \tag{1.20}$$



In questo caso, le nostre combinazioni rendimento-varianza sono così rappresentate. Anche in questo secondo caso, come in precedenza, il rendimento di portafoglio è espresso come combinazione lineare dei rischi dei singoli titoli; in particolare, in questo secondo caso abbiamo due segmenti: BC inclinato positivamente (1.19) e AB inclinato negativamente (1.20). Quest'ultimo rappresenta tutti i portafogli non efficienti mentre BC rappresenta è l'insieme dei portafogli efficienti, portafogli che hanno rendimenti maggiori di quelli collocati nel segmento AB. L'area in questione (ABC) raggruppa tutte le possibili combinazioni rendimento-varianza tra cui l'investitore può scegliere di investire.

Come possiamo notare in figura, il portafoglio B presenta rendimento certo e rischiosità nulla; questo perché, quando il coefficiente di correlazione è pari a -1, la diversificazione di portafoglio è massima. Ponendo la deviazione standard del portafoglio pari a zero, possiamo trovare il valore dei pesi x_A e x_B che permettono di ottenere il portafoglio B:

$$|x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B| = 0$$
$$|x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B| = x_A\sigma_A - \sigma_B + x_A\sigma_B$$

da cui si ricava:

$$x_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

e

$$(1-x_A) = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$$

Ecco che ora siamo in grado di ricavare il rendimento certo del portafoglio B nel modo seguente:

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} = \frac{E(R_P) - E(R_B)}{E(R_A) - E(R_P)}$$

$$E(R_P) = \frac{E(R_P)\sigma_B - E(R_B)\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$$

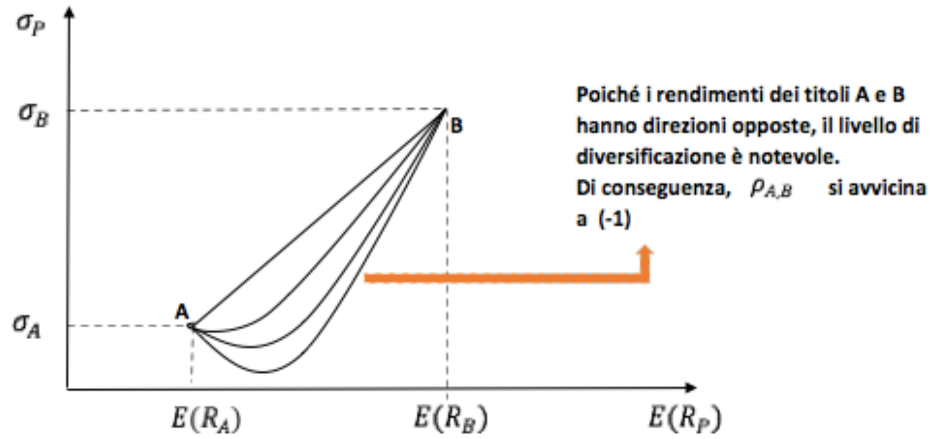
3) $-1 < \rho_{A,B} < +1$

Al differenza dei due casi precedenti, in questo la relazione tra rendimento e varianza e di conseguenza la frontiera efficiente non è più lineare ma è una funzione curvilinea. Osserviamo le due variabili:

$$E(R_P) = x_A E(R_A) + (1-x_A)E(R_B)$$

$$\sigma_P = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + (1-x_A)^2\sigma_A^2 + 2x_A(1-x_A)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}$$

Essendo $\rho_{A,B}$ compreso tra -1 e +1, non si può ricavare una funzione lineare tra le due variabili; infatti, l'insieme delle combinazioni rendimento-varianza cambierà a seconda del valore assunto da $\rho_{A,B}$: quanto più quest'ultimo si avvicinerà al caso precedente (-1), quindi quanto più i titoli tenderanno a muoversi in direzioni opposte, tanto più il portafoglio sarà diversificato. Avremo, dunque, un portafoglio caratterizzato da un livello di rischiosità minore.



Il segmento AB corrisponde al caso limite di $\rho_{A,B} = +1$; man mano che il coefficiente assume altri valori compresi nell'intervallo [-1;+1], tutte le possibili combinazioni di portafogli saranno rappresentate da una curva, che rappresenta la nuova frontiera; ricordiamo che, al diminuire del coefficiente di correlazione, la relazione tra rendimento e varianza sarà data da una funzione curvilinea.
Inoltre, si sottolinea il fatto che ogni combinazione rendimento-varianza fattibile si troverà esclusivamente al di sopra della curva di riferimento; al di sotto ogni altra combinazione risulterà impossibile.

Ricapitolando, alla base della *Teoria di Selezione di Portafoglio* di *Markowitz,* c'è un semplice assunto: per ogni investitore ci sono numerose combinazioni possibili di portafogli di investimento tra cui poter investire, chiamate appunto fattibili; tra queste, soltanto alcune risultano essere efficienti, che ricordiamo formare la frontiera efficiente

1.6.2 Caso con *n* >2 titoli rischiosi

In questo paragrafo generalizzeremo quanto discusso nel paragrafo precedente, trattando il caso di un portafoglio d'investimento costituito da più di due titoli (*n*).

Sia R_i il rendimento di ciascun titolo, con *i=A,B,.....,n;* ipotizziamo nuovamente l'assenza di vendite allo scoperto e l'assenza di possibilità di indebitamento.
Il primo passo è comprendere come arrivare al calcolo del valore atteso e della varianza del rendimento di un portafoglio composto da *n* titoli.
Il rendimento di portafoglio è una combinazione lineare dei rendimenti singoli moltiplicati per i rispettivi pesi; inoltre, come ricordiamo dal precedente caso, il valore atteso di una combinazione lineare è pari alla combinazione lineare dei valori attesi; di conseguenza, il rendimento atteso $E(R_P)$ sarà:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)$$

La varianza, invece, ricordiamo non essere pari alla combinazione lineare delle varianze singole, ma sappiamo essere pari a:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov_{i,j}$$

Nel caso precedente, a questo punto avremmo dovuto calcolare la covarianza tra i due titoli componenti il portafoglio; ora, se facciamo attenzione alla formula appena citata, notiamo che per calcolare la varianza di portafoglio è necessario calcolare la covarianza per ciascuna coppia di titoli. Come affermato in precedenza, per semplificare i calcoli, avremmo fatto ricorso alla notazione matriciale; costruiamo, dunque, una matrice varianza-covarianza nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Della matrice varianza-covarianza, chiamata anche matrice delle covarianze, sappiamo che:

- È quadrata e simmetrica, poiché il numero di righe e colonne è il medesimo;
- Presenta lungo la diagonale gli n valori delle varianza, essendo $\sigma_{nn} = \sigma_n^2$;
- I termini di correlazione sono $\frac{n^2-n}{2}$.

Possiamo utilizzare la matrice per semplificarci il calcolo della varianza di *n* titoli facendo il prodotto tra vettori e matrici. Siano:

- *w* il vettore colonna *(n x 1)* composto dai pesi x_i degli *n* titoli;
- *w'* il vettore trasporto *(1 x n),* che ricordiamo essere un vettore ottenuto scambiando righe e colonne del precedente;
- S la matrice simmetrica varianze-covarianze (*n* x *n*);

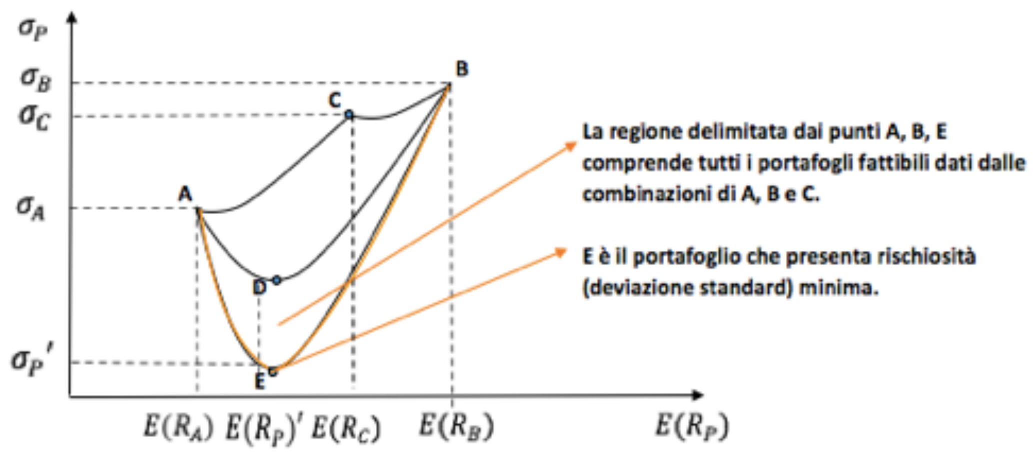
Facendo il prodotto tra i suddetti elementi, troveremo la deviazione standard:

$$\sigma_P = \sqrt{w'_{1n} S_{nn} w_{n1}}$$

A questo punto possiamo passare alla costruzione della frontiera efficiente, per individuare le combinazioni dei portafogli efficienti. In primo luogo, possiamo immaginare che, essendo il numero di titoli maggiore, sul piano cartesiano non troveremo combinazioni di portafogli descritte da rette o tratti curvilinei; si avrà uno spazio più vasto comprendente i portafogli efficienti. Ipotizziamo la presenza di tre titoli sul piano cartesiano per ricavare la frontiera efficiente.

Siano A, B, C tre titoli casuali, con deviazione standard rispettivamente $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ e rendimento atteso $E(R_A), E(R_B), E(R_C)$.

Il nuovo grafico delle possibili combinazioni sarà il seguente:

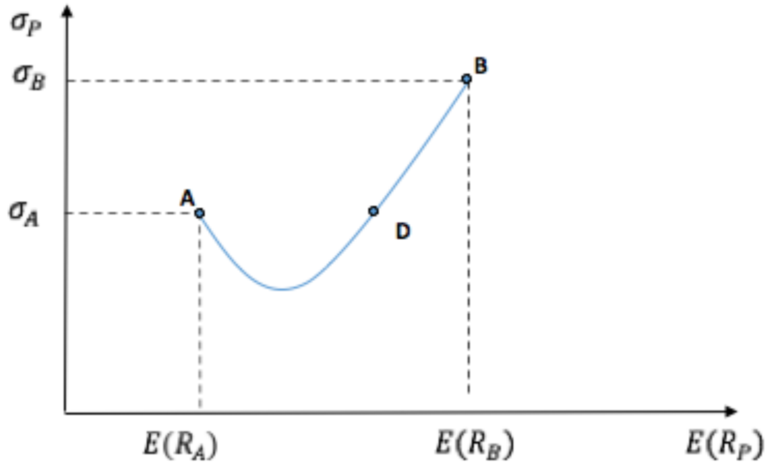


Nel piano cartesiano, troviamo:

- *Il tratto AC*, costituito dalle combinazioni ottenute investendo nei titoli A e C;
- *Il tratto CB*, costituito dalle combinazioni ottenute investendo nei titoli C e B;
- *Il tratto AB*, costituito dalle combinazioni ottenute investendo nei titoli A e B; al di sopra di esso, troveremo i portafogli fattibili ottenuti dalla combinazione dei due titoli. Questo tratto, dunque, rappresenterà il limite inferiore dei suddetti portafogli.
- *La curva AEB*, che rappresenta la frontiera efficiente data dalle combinazioni di A, B e C; al di sotto, troviamo le combinazioni impossibili. Lo spazio che ha come limite superiore la curva AB e come limite inferiore la curva AEB comprende tutte le combinazioni aggiuntive investendo i A, B e C.
- *il tratto EB,* rappresenta la frontiera efficiente descritta dal modello media-varianza; il punto E, infatti, rappresenta il portafoglio caratterizzato da varianza minima ottenuto attraverso un problema di minimizzazione vincolata, che procederemo a descrivere nel paragrafo 1.8.

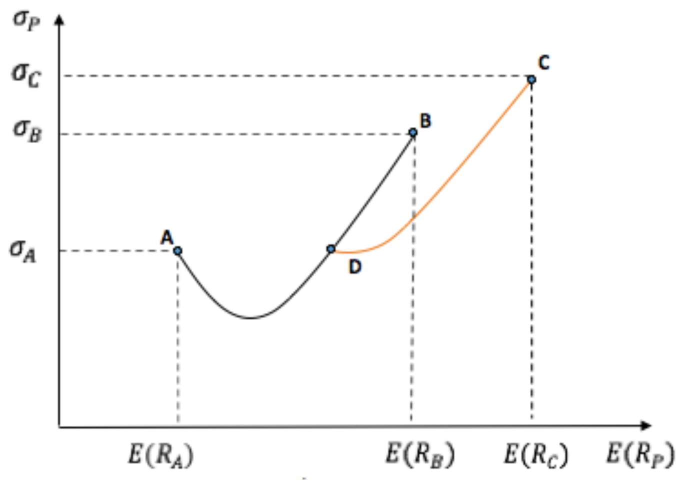
Poiché il processo di costruzione di un portafoglio dati tre titoli risulta essere più complicato rispetto al caso precedente riguardante solamente due titoli, possiamo inizialmente costruire un portafoglio prendendo in considerazione i titoli A e B, per poi combinare quest'ultimo con il terzo titoli C.
Consideriamo, dunque, A e B con deviazione standard e rendimento atteso rispettivamente σ_A, σ_B e $E(R_A),\ E(R_B)$; sia $-1 < \rho_{A,B} < +1$ e q_A, q_B $(con\ q_A + q_B = 1)$ i pesi rispettivamente di A e B.

Come abbiamo visto in precedenza, dati diversi valori assunti dai pesi q_A, q_B, possiamo ottenere la frontiera efficiente come segue:



Il tratto AB rappresenta la frontiera efficiente costituita da tutte le combinazioni efficienti tra i titoli A e B; il punto D rappresenta un generico portafoglio ottenibile dalla combinazione dei due titoli A e B. Quest'ultimo, come ogni altro portafoglio collocato sul segmento AB, è caratterizzato da un suo rendimento atteso e deviazione standard, rispettivamente $E(R_P) e\ \sigma_P$.

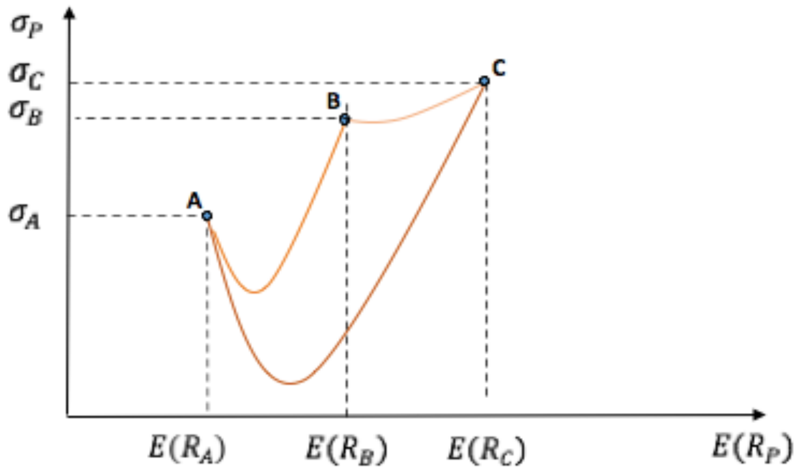
Ora dobbiamo introdurre un titolo rischioso C, caratterizzato da rendimento atteso e deviazione standard pari a $E(R_C)$ e σ_C.
Come di può vedere dalla figura seguente, il portafoglio D può essere considerato come un qualsiasi titolo per essere poi combinato con il titolo C, ottenendo in questo modo l'arco DC, rappresentante le combinazioni di portafogli fattibili tra il portafoglio P e il titolo C.



Anche qui, poiché per semplicità abbiamo diviso la costruzione della frontiera efficiente in due parti, prima combinando A e B, e poi il portafoglio risultante con C, possiamo calcolare il rendimento di portafoglio e la relativa deviazione standard con la stessa modalità utilizzata per il caso precedente. Utilizzando le relazioni precedentemente discusse tra covarianza e scarto quadratico medio, avremo:

$$\sigma_z = \sqrt{x_A^2\sigma_P^2 + (1 - x_A)^2\sigma_B^2 + 2x_A(1 - x_A)Cov_{P,C}}$$

Non ci resta che trovare la covarianza tra il portafoglio P e il titolo C.
Si necessita una precisazione, però; poiché abbiamo spezzato il procedimento in modo da assimilarlo al caso con due soli titoli, le combinazioni ottenute investendo nel portafoglio P e nel titolo C sono solamente una parte dell'insieme totale dei portafogli ottenibili investendo contemporaneamente in A, B e C. Se si vuole individuare l'intero insieme delle possibili combinazioni, è necessario modificare il precedente procedimento, estendendolo considerando non solo il portafoglio D sulla frontiera AB, ma tutti i portafogli che giacciono sulla frontiera. In questo modo otterremo la seguente rappresentazione:



Nella figura appena presentata, sono descritti tutti i possibili portafogli dati dalle combinazioni tra A, B e C; gli archi AB e BC, rappresentano il limite superiore al di sopra del quale i portafogli non sono fattibili, mentre l'arco AC rappresenta la la frontiera efficiente nonché limite inferiore. Quindi, l'insieme di tutte le combinazioni se si investe contemporaneamente in A, B e C sono contenute nella regione dello spazio compresa tra gli archi AB, BC e AC.

Se ragioniamo in merito alla frontiera efficiente, dati i casi qui analizzati, si osserva una funzione crescente e convessa. L'investitore sarà dunque chiamato a fare una scelta a seconda della sua personale propensione o avversione al rischio; infatti, quando aumenta il rendimento atteso di portafoglio, la deviazione standard aumenta più che proporzionalmente. Di conseguenza, se si desiderano avere rendimenti alti, si è consci del fatto che ad alti rendimenti corrisponde un livello di rischio più che proporzionalmente alto.

1.7 Costruzione frontiera efficiente con titoli rischiosi e non rischiosi

Approfondiamo la nostra analisi inserendo un titolo non rischioso nella costruzione della frontiera efficiente, considerando il caso con due soli titoli; avremo quindi un titolo rischioso, come nei casi precedenti, caratterizzato da rendimento atteso $E(R_A)$ e deviazione standard σ_A, e un titolo privo di rischio, come per esempio un Bond tedesco, caratterizzato da rendimento atteso $E(R_F)$ e deviazione standard pari a zero.
Indichiamo con $x_A\ e\ (1 - x_A)$ le quote di ricchezza investite nei due titoli; il portafoglio P sarà dato dalla combinazione dei due titoli e sarà caratterizzato dalle seguenti variabili:

$$E(R_P) = x_A E(R_A) + (1 - x_A) E(R_F)$$

$$\sigma_P = x_A \sigma_A$$

Come possiamo notare, nel caso in cui sono considerati un portafoglio rischioso e un privo di rischio, la deviazione standard di tale portafoglio sarà pari alla deviazione standard del titolo rischioso moltiplicato per la sua quota. Di conseguenza, la rischiosità del portafoglio dipenderà dalla rischiosità del primo titolo. Anche in questo caso la relazione tra rendimento atteso e deviazione standard sarà di tipo lineare; questa sarà descritta nel seguente modo:

$$E(R_P) = R_F + \frac{E(R_F) - E(R_A)}{\sigma_A} \sigma_P$$

In presenza di un titolo privo di rischio e uno rischioso, la relazione tra rendimento e deviazione standard non sarà più rappresentata da una funzione curvilinea ma sarà rappresentata da una retta. L'intercetta corrisponde al rendimento del titolo non rischioso mentre l'inclinazione è data dal rapporto tra eccesso di rendimento del titolo rischioso rispetto a quello privo di rischio e la deviazione standard del titolo rischioso.

1.8 Ottimizzazione di un portafoglio d'investimenti

Dopo aver costruito la frontiera efficiente nei tre casi presi in considerazione, possiamo concludere la nostra analisi individuando il portafoglio ottimale tra tutte le combinazioni di titoli rischiosi e non rischiosi. Per l'individuazione di questo portafoglio ottimale, il principio media-varianza risulta, da solo, incompleto, non consentendoci di mettere i portafogli in ordine di efficienza.

Dobbiamo introdurre, a questo punto, una variabile in grado di spiegare in che modo l'investitore sceglie un portafoglio di titoli tra tutte le combinazioni rendimento-varianza trovate: la *propensione al rischio*, permettendoci, così, di distinguere investitori propensi al rischio, che quindi preferiranno portafogli con alta rischiosità e di conseguenza alto rendimento, dagli investitori avversi al rischio, che preferiranno portafogli con bassa rischiosità accontentandosi di un rendimento minore.

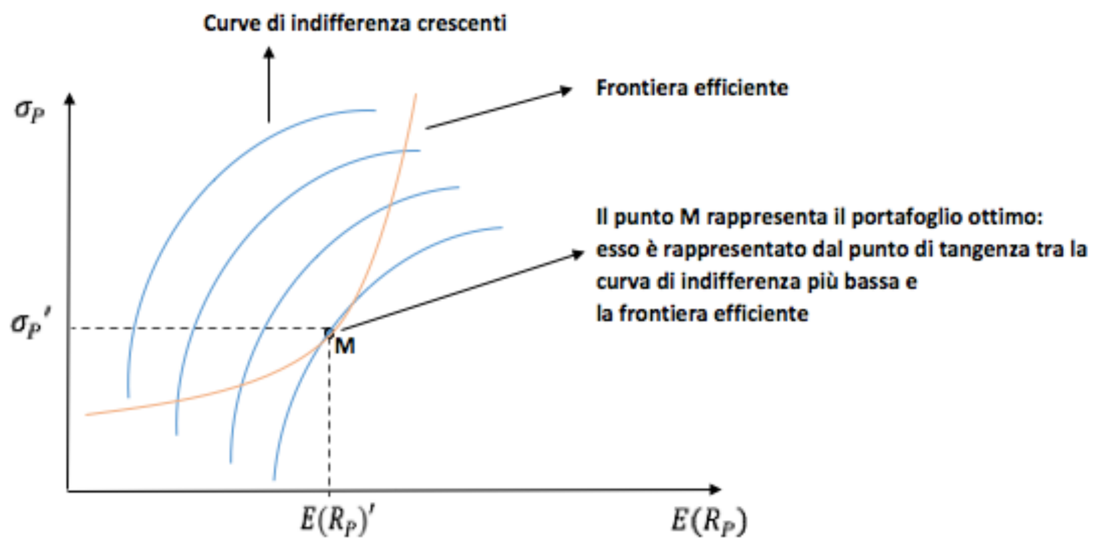
Le preferenze dell'investitore possono essere rappresentate da *curve di indifferenza.* Ricordiamo che una curva di indifferenza è l'insieme delle combinazioni (x,y) che garantiscono al consumatore, in questo caso un investitore, lo stesso livello di utilità.
Nel grafico a seguire, troveremo una serie di curve di indifferenza, ognuna delle quali rappresenterà un diverso livello di utilità per l'investitore: la curva di indifferenza situata più in basso rappresenterà le combinazioni di titoli con maggiore utilità, mentre la curva situata più in alto rappresenterà quella di minore utilità per l'investitore. L'insieme delle curve di indifferenza è dato dalla *funzione di utilità attesa;* nel nostro caso, quest'ultima viene considerata una funzione di utilità "quadratica":

- Le preferenze dell'investitore sono espresse da due variabili, rendimento e varianza di portafoglio;
- Il rendimento è visto come un bene, mentre la rischiosità come un male.

La funzione di utilità attesa è la seguente:

$$E[(U(x)] = E(R_p) - \frac{1}{2}\lambda\sigma_p^2$$

con λ che rappresenta l'avversione/propensione al rischio dell'investitore.
Di conseguenza, l'investitore sceglierà il portafoglio massimizzerà la funzione di utilità attesa, ovvero il grado di soddisfazione, in base alla sua propensione al rischio.



Dalla figura qui sopra riportata, possiamo notare che le curve di indifferenza sono crescenti, poiché a rendimento maggiore corrisponde rischiosità maggiore, concave, poiché tanto più alto è il rischio, minore sarà la propensione dell'investitore ad accrescerlo ulteriormente; infine, specifichiamo che, quanto più le curve sono concave, tanto più l'investitore preferirà portafogli più sicuri.
Il punto M rappresenta il portafoglio ottimale per l'investitore, mentre le curve di indifferenza che si susseguono rappresentano combinazioni di minore utilità. Il portafoglio ottimale è dato dall'intersezione tra la curva di indifferenza con maggiore utilità (quella più bassa) e la frontiera efficiente.

Il ruolo della propensione al rischio, nel processo di individuazione del portafoglio ottimo, è centrale; tuttavia, perché questa sia applicabile, un investitore deve essere in grado di individuare λ, e non sempre questa è dallo stesso quantificabile. Nonostante questa precisazione, la formulazione originariamente proposta da Markowitz, poi riformulata con l'approccio lagrangiano, si presenta come un approccio tradizionale e largamente utilizzato.

1.9 Limiti della *Portfolio Selection* di Markowitz

Nei paragrafi precedenti, per la nostra analisi di portafoglio, abbiamo sfruttato la *Portfoglio Selection* di Markowitz, teoria molto rispettata e ritenuta la teoria base per l'asset allocation; seppur sviluppata prettamente su piano teorico, viene largamente utilizzata anche su piano pratico (come si vedrà nel capitolo finale). La teoria in questione, infatti, è posta alla base di numerose successive teorie di investimento nonché alla base della finanza moderna; qui abbiamo presentato un caso con due soli titoli, ma, nella realtà dei mercati finanziari, il numero di titoli e classi di attività differenti tra loro è molto grande, per questo vengono realizzate combinazioni tra classi finanziarie, definite *asset class,* anziché di singoli titoli.
Nonostante la validità della presente teoria, la *Portfolio Selection* di Markowitz presenta anche molti limiti ed elementi di debolezza che ne diminuiscono il valore.
Dal punto di vista teorico, si riscontrano le seguenti perplessità:

- L'analisi appare molto limitata dall'utilizzo di un orizzonte temporale monoperiodale;
- Nell'analisi appaiono centrali solamente due variabili, il rendimento e la varianza, tralasciando altri possibili indici statistici;
- La deviazione standard appare non essere un'ottima rappresentazione del rischio, in quanto molto semplicistico, riducendo la rischiosità di un titolo alla mera volatilità dei rendimenti.

Vengono individuate problematiche anche nel processo di ottimizzazione:

- I dati utilizzati per effettuare il processo di ottimizzazione non coprono un orizzonte temporale sufficientemente ampio, che garantirebbe una buona stabilità dei risultati, soprattutto se si tratta di effettuare calcoli riguardanti attività finanziarie dello stesso tipo, come diversi titoli azionari;

- i calcoli che vengono effettuati utilizzano delle medie, cioè degli indicatori che sappiamo rappresentare i risultati migliori all'interno di un orizzonte temporale sui cui sono impostati, e non necessariamente queste in possono dare risultati qualitativamente alti anche su periodi più brevi o più lunghi;
- I portafogli efficienti individuati tramite il principio media-varianza sono poco stabili, in quanto, se riscontrassimo una minima variazione del rendimento atteso o della varianza, si creerebbero non poche modifiche nella composizione del portafoglio.

Negli anni successivi, molti economisti, tra i quali *Sharpe* e *Black & Litterman,* hanno ripreso e riformulato la *Portfolio Selection Theory,* cercando di apportarvi modifiche e soluzioni alle diverse debolezze interne in modo da avvicinare il modello alla realtà dei mercati finanziari.

CAPITOLO 2: Modelli alternativi, CAPM e ATP e Black&Litterman

2.1 Il Capital Asset Pricing Model e sua applicazione

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM) è un modello sviluppato da William Sharpe (1964) sull'equilibrio dei mercati finanziari, che nel 1990 gli permise di ricevere il premio Nobel per l'economia, insieme a Markowitz e Miller. Il modello in questione è la prima rielaborazione del modello *media-varianza* e cerca di fornire delle risposte ad alcune domande derivanti dal contributo di Markowitz varianza riguardanti la costruzione di un portafoglio ottimale seguendo la regola del massimo rendimento dato un certo livello di rischio (varianza) o del rischio minimo dato un certo livello di rendimento.

Il CAPM studia la relazione tra rishiosità e rendimento di titoli sotto l'ipoteso di equilibrio tra domanda e offerta aggregate; il parametro β esprime il rischio *sistematico,* ovvero quel rischio che non può essere modificato attraverso il processo di diversificazione.

Le ipotesi su cui fa affidamento Sharpe sono le stesse su cui si basa il modello media-varianza, ovvero:

- gli individui sono avversi al rischio e hanno come obbiettivo ultimo la massimizzazione della ricchezza;
- il rendimento atteso e la varianza sono gli elementi fondanti la scelta;
- non esistono costi di transazione e tasse sul reddito individuale;
- non esistono barriere alla possibilità di investire.

Inoltre:

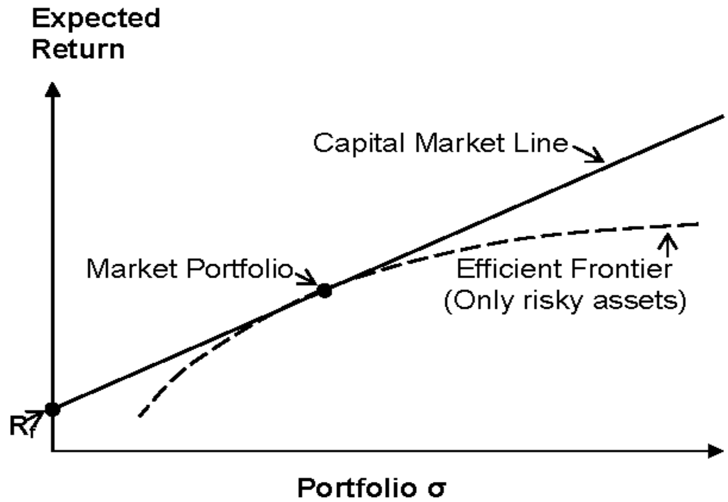
- tutti gli investitori sono price-takers;
- tutte le attività sono negoziabili sul mercato;
- siamo di fronte ad un mercato perfetto, dove non ci sono asimmetrie d'informazione;
- le aspettative circa i rendimenti attesi, le varianze e le covarianze sono le stesse per ogni investitore;

- esiste la possibilità di ottenere prestiti ad un tasso di interesse privo di rischio e di vendita allo scoperto su tutti i titoli rischiosi.

In base alle ipotesi sopra elencate, la frontiera comprendente i portafogli efficienti è unica e valida per tutti gli investitori, in base all'omogeneità delle aspettative degli investitori; conseguentemente, tutti gli investitori faranno la medesima scelta di portafoglio efficiente. Siano σ_M e $E(R_M)$ la deviazione standard e il rendimento atteso del portafoglio di mercato; tutti i possibili portafogli tra i quali un investitore può scegliere giacciono sulla cosiddetta *Capital Market Line,* data dalla formula:

$$E(r_M) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}$$

La *CML* rappresenta la frontiera efficiente di investimenti e ci permette di verificare i rendimenti attesi di ogni portafoglio sulla stessa, in termini di deviazione standard. Un elemento interessante della *CML* è il suo coefficiente angolare: esso infatti indica di quanto deve aumentare il rendimento affinché l'investitore possa assumersi un rischio maggiore. Esso è denominato *market price of risk.*



Il rendimento atteso E(R_i) è ottenibile con la seguente formula:

$$E(R_i)=r_f + \beta_{im}(E(r_m - r_f)$$

o

$$r_i=r_f + \beta_{im}(r_m - r_f)$$

dove:

- r_f rappresenta il tasso di interesse privo di rischio;
- r_m rappresenta il rendimento di mercato;
- beta è pari a $\frac{cov(R_i R_m)}{var(R_m)}$.

Possiamo fare una precisazione su β: se non è vero che ad un alto *beta* corrisponde una rishiosità elevata, è tuttavia vero che un alto *beta* implica un alto tasso di rendimento atteso; un investitore, infatti, è premiato se investe in titoli con elevata rischiosità sistematica (beta). Al giorno d'oggi, i titoli maggiormente caratterizzati da un alto beta sono titoli legati alle maggiori compagnie nel mercato, tra i quali titoli in GE, Coca-Cola e IBM.

Un concetto importante in questo modello è il concetto noto in finanza come *Teorema di separazione,* secondo il quale un investitore costruisce il proprio portafoglio d'investimento in due fasi distinte: in una *prima fase*, raccoglie informazioni legate ai diversi titoli, facendo particolare attenzione ai parametri fondamentali, quali varianza e rendimento, costruisce la frontiera efficiente e individua il portafoglio di mercato; nella *seconda fase,* determina i pesi relativi al portafoglio di mercato e al titolo risk-free, seguendo la propria avversione/propensione al rischio.

Prendiamo un portafoglio di titoli *i* e il portafoglio di mercato M;
siano α e $(1-\alpha)$ i pesi di *i* e *M*. Di conseguenza, il tasso di rendimento sarà:

$$
\begin{aligned}
r &= \alpha\, r_i + (1-\alpha) r\, r_M \\
&= \alpha(r_i - r_M) + r_M
\end{aligned}
$$

E la deviazione standard:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)\text{^}2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{M,i}} \\
&= \sqrt{\alpha^2(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\alpha_{M,i} + 2\alpha\left(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2\right) + \sigma_M^2}
\end{aligned}
$$

Quando α=0, σ e *r* sono pari a σ_M, r_M; quando α=1, σ e *r* sono pari a σ_i, r_i.
Di conseguenza, la curva è tangente alla *CML* nel punto (σ_M, r_M) ma al di fuori della regione comprendente i portafogli fattibili.
Possiamo concludere che quando α=0:

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr/d\alpha}{d\sigma/d\sigma}$$

$$\frac{dr/d\alpha}{d\sigma/d\sigma} = \frac{r_i - r_M}{(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2)/\sigma_M}$$

infine

$$\frac{r_i - r_M}{(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2)/\sigma_M} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

Risolvendo per r_i, allora la formula CAPM sarà $r_i - r_f = \beta_i(r_M - r_f)$. In generale, la formula per un generico portafoglio sarà:

$$r_i - r_f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

Si noti che quando $\beta_i = 1$, allora $r_p = r_M$; il rendimento di portafoglio è lo stesso del portafoglio di mercato. Inoltre, quando $\beta_i > 1$, allora $r_p > r_M$; quando $\beta_i < 1$, allora $r_p < r_M$.
È qui necessaria una precisazione; nel reale mercato aperto, l'operazione di costruzione di un portafoglio ottimale sarebbe irrealistico per qualunque analista. Per questo motivo sono stati create i cosiddetti *index funds* o *mutual funds* al fine di ricreare il portafoglio di mercato (es. S&P).

Per capire meglio la funzionalità del modello CAPM, facciamo un esempio semplicistico di una sua applicazione. Un potenziale investitore X vuole costruire un portafoglio di titoli nel quale investire; la ricchezza complessiva è pari a 1000$ e viene investita sia in titoli rischiosi che privi di rischio. L'investitore decide di spartire la sua ricchezza nel seguente modo: 30% in titoli rischiosi e 70% in titoli privi di rischio. Quale sarà il rendimento dell'investitore? Sia 5% il tasso *risk-free* e 10% il rendimento atteso dei titoli rischiosi, ci si aspetta il seguente rendimento atteso di portafoglio:

$$r_p = 0,3x0,05 + 0,7x0,1 = 8,5\%$$

Sia 15% la deviazione standard delle attività rischiose, mentre quella delle attività prive di rischio sappiamo essere nulla; la varianza di portafoglio sarà:

$$\sigma_p^2 = 0,7^2 x\ 0,15^2 = 0,0110$$

Se l'investitore X avesse scelto il portafoglio di mercato, l'investimento si collocherebbe sul segmento della *CML* compreso tra il tasso risk-free e il punto di tangenza alla frontiera efficiente.
Ci chiediamo se l'investitore avrebbe potuto raggiungere un profilo rischio-rendimento più alto; poiché sappiamo che si può sia indebitarsi che prestare denaro al tasso risk-free, significa che se l'investitore si fosse indebitato per una somma *m,* il suo rendimento di portafoglio sarebbe di certo aumentato, come tuttavia sarebbe aumentata la rischiosità di portafoglio.

La *CML* rappresenta in equilibrio la miglior combinazione ottenibile tra rischio e rendimento; consente di individuare il livello di rendimento ottenibile con un determinato livello di rischiosità. Tuttavia, non ci consente di rappresentare portafogli che differiscono da quello di mercato, ovvero singoli titoli; per superare questo problema è necessario inserire in qualche modo un'espressione del rischio sistematico. Tale espressione è data da:

$$\sigma_{sist,i} = \rho_{i,m} x\ \sigma_i$$

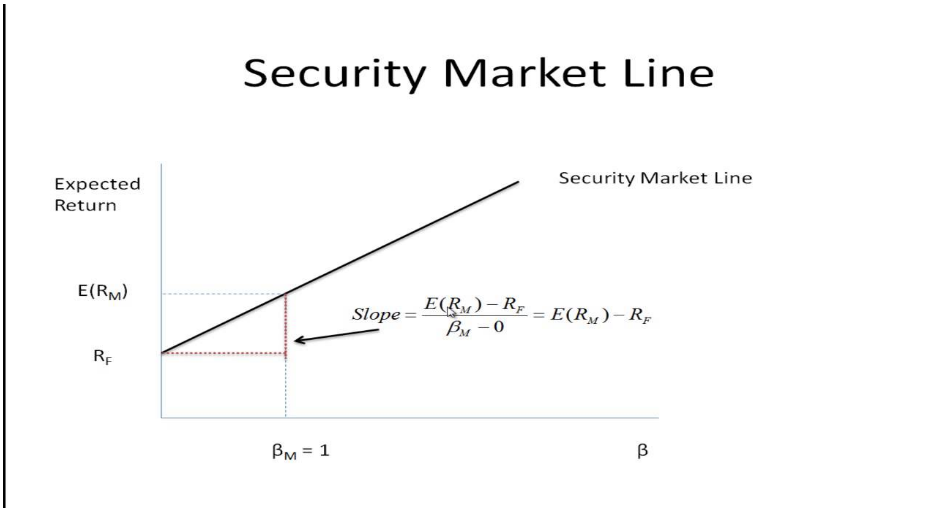
Essendo $\rho_{i,m}$ l'indice di correlazione tra il portafoglio di mercato e il titolo *i-esimo*, andiamo a sostituire l'espressione nella formula della *Capital Market Line*:

$$E(r_i) = r_f + \left(E(R_M) - r_f\right)\rho_{i,m}\frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

Ponendo $\rho_{i,m}\frac{\sigma_i}{\sigma_m}$ = β, ottengo:

$$E(r_i) = r_f + \left(E(R_M) - r_f\right) \beta.$$

che rappresenta la cosiddetta *Security Market Line.* La *SML* esprime la relazione lineare tra rendimento e rischio valida per portafogli non efficienti e quindi per i singoli titoli.



Da una soluzione del problema di allocazione di ricchezza, siamo passati ad un problema di valutazione di attività rischiose.

Essa è dotata delle seguenti caratteristiche:

- determina il tasso di rendimento di progetti aventi uno specifico profilo di rischio sistematico;
- individua le attività finanziarie il cui valore non è in linea con i livelli di rendimento atteso corretti per il rischio sistematico.

Secondo il modello del CAPM, i titoli sono equamente prezzati solo se il loro rendimento si colloca sulla SML; se il titolo si colloca sopra o sotto la linea, il titolo sarà sotto o sovrapprezzato.

2.2 L'Arbitrage Pricing Theory

Il modello CAPM rappresenta una valida teoria per la valutazione del premio al rischio; tuttavia, le ipotesi su cui si fonda sono alquanto limitative e irrealistiche (ricordiamo l'ipotesi secondo la quale gli investitori hanno le stesse preferenze e le stesse informazioni), e il fatto che dipenda totalmente dal portafoglio di mercato spinse allo sviluppo di teorie alternative.

Fra queste, ricordiamo l'*Arbitrage Pricing Theory,* o *APT,* sviluppata da Stephen Ross nel 1976. L'*APT* è una naturale estensione del modello CAPM, in cui alcune ipotesi vengono rese più flessibili mentre altre più ristrette. È un modello mono-periodale nel quale ogni investitore è convinto del fatto che i rendimenti dei titoli siano compatibili con una struttura multifattoriale; in assenza opportunità di arbitraggio, i rendimenti attesi hanno una relazione pressoché lineare con i beta.

Anche questo modello, come il precedente, distingue tra rischio diversificabile e rischio sistematico, ma si differenzia nel fatto che quest'ultimo sia rappresentato da molteplici fonti (fattori) e non più dal portafoglio di mercato; queste numerose fonti rappresentano variazioni inattese di variabili macroeconomiche. Di conseguenza, questo modello mostra come cambia un investimento ad ogni variazione con uno specifico coefficiente *beta*. In termini matematici:

$$r = a + \beta f + \varepsilon$$

dove

- ε rappresenta il rischio diversificabile;
- $\beta f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta n f n$ con β che rappresenta la sensibilità dell'investimento a variazioni del fattore f;
- $E(\varepsilon) = 0$;
- $E(\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon^2$.

Una volta identificati i fattori che contribuiscono alla variabilità di un portafoglio di titoli, possiamo passare a calcolare l'effettiva rischiosità di portafoglio, rappresentata dalla varianza o deviazione standard.
Consideriamo un modello con due fattori f_1 e f_2; la varianza sarà:

$$\sigma_i^2 = var(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \varepsilon)$$
$$= \beta_1^2 var(f_1) + \beta_2^2 var(f_2) + 2\beta_1\beta_2 cov(f_1 f_2) + \sigma_\varepsilon^2$$
$$= \beta_1^2 var(f_1) + \beta_2^2 var(f_2) + \sigma_\varepsilon^2$$

La formula generale con *n* fattori sarà:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,j}\beta_{i,k}\sigma_{j,k}\sigma_\varepsilon^2$$

dove $\sigma_{j,k}$ rappresenta la covarianza tra due titoli, tale che

$$\sigma_{j,k} = cov\big(\beta_{k,1}f_1 + \beta_{k,2}f_2 + \varepsilon_k\beta_{j,1}f_1 + \beta_{j,2}f_2 + \varepsilon_j\big)$$
$$=\beta_{k,1}\beta_{j,1}var(f_1) + \beta_{k,2}\beta_{j,2}var(f_2) + (\beta_{k,1}\beta_{j,2} + \beta_{j,1}\beta_{k,2})cov(f_1 f_2)$$
$$=\beta_{k,1}\beta_{j,1}var(f_1) + \beta_{k,2}\beta_{j,2}var(f_2)$$

I modelli CAPM e APT presentano numerose dissomiglianze. Innanzitutto l'APT deriva da un modello statistico, mentre il CAPM è un modello di *asset pricing* di equilibrio; il primo, difatti, non presuppone che ogni investitore stia ottimizzando, e questo rende l'APT una teoria molto più ragionevole.
Al contrario di quanto necessario per ricavare il modello CAPM, per l'APT sono necessarie poche supposizioni, quali:

- tutti i titoli possiedono rendimenti attesi e varianze finite;
- *alcuni* esperti possono formare portafogli molto diversificati;
- non ci sono tasse;
- non ci sono costi di transazione;
- si opera in assenza di arbitraggio.

L'ultimo fondamento comporta che due titoli cha hanno gli stessi profitti abbiano gli stessi prezzi e che non possa esistere alcun titolo che abbia costo zero e profitto positivo. Se non c'è possibilità di arbitraggio, allora possiamo prezzare attività relative le une alle altre in base alla loro sensibilità ai fattori in questione. Questa è la base del modello ATP.
Il modello APT, rispetto al precedente, è sicuramente più idoneo alla costruzione di portafogli *tailor-made*, ovvero personalizzati in base alle richieste dell'investitore; esso consente, inoltre, la gestione di qualsiasi strumento finanziario, mentre il CAPM tende ad avere applicazione solamente nell'ambito del mercato azionario.

2.3 Intuizioni del modello Black and Litterman

Una delle maggiori problematiche in ambito di gestione finanziaria riguarda l'integrazione della gestione quantitativa e tradizionale in un unico contesto operativo; il modello *Black&Litterman,* introdotto da Fisher Black e Robert Litterman nel 1990 presso la Goldman Sachs, fornisce la possibilità di combinare equilibrio di mercato con ulteriori *opinioni sul mercato* degli investitori.
Basato su una metodologia Bayesiana, il modello *B&L* inizia con l'ipotesi che il processo di allocazione di titoli dovrebbe essere proporzionale ai valori di mercato dei suddetti titoli per poi essere modificato tenendo in considerazione le personali opinioni dell'investitore, le cosiddette *views*, riguardo i rendimenti attesi dei titoli fatte dall'investitore in questione per giungere alla costruzione di un portafoglio d'investimento.
Il principale motivo che spinse Black e Litterman alla costruzione di un nuovo modello per l'allocazione di investimenti è che, utilizzando il modello media-varianza di Markowitz, mentre è possibile stimare adeguatamente la covarianza di titoli, non è altrettanto vero per i rendimenti attesi; inoltre, il processo di *assets allocation* è molto sensibile alle aspettative sui rendimenti attesi espresse dall'investitore. Black e Litterman furono in grado di superare questo limite per due motivi principali: innanzitutto in questo modello il premio al rischio ha rappresenta un punto di riferimento neutrale per i rendimenti attesi; in secondo luogo non viene imposta l'immissione di stime dei rendimenti attesi come input ma questi verranno inseriti in modo tale che l'allocazione di equilibrio delle attività potesse rispecchiare ciò che si osservava sul mercato. Successivamente, l'investitore deve semplicemente affermare come le sue opinioni circa i rendimenti attesi differiscono da quelle del mercato e il grado di sicurezza riguardo le sue opinioni; per concludere, il modello calcola l'allocazione desiderata.

Secondo il modello B&L, non si è sempre in presenza di un equilibrio CAPM ma, al contrario, quando i livelli di rendimenti attesi si discostano dal livello di equilibrio, gli squilibri provocati sul mercato riporteranno i valori al loro equilibrio. Ecco perché Black e Litterman sostengono che un investitore dovrebbe combinare le proprie *views* riguardanti i rendimenti attesi con le informazioni contenute nei pressi e rendimenti di equilibrio.

È importante specificare che, per determinare i rendimenti impliciti di equilibrio, sono percorribili molteplici strade: si possono utilizzare i rendimenti medi storici, si può utilizzare il CAPM o infine si può prendere come situazione di equilibrio o benchmark un indice di mercato.

Riassumendo, il nuovo modello si fonda sulle seguenti intuizioni:

- esistono due fonti di informazioni riguardanti i rendimenti attesi: l'equilibrio di mercato e le *views* dell'investitore;
- tali fonti appena descritte sono considerate aleatorie e quindi descrivibili tramite una distribuzione probabilistica;
- i rendimenti selezionati sono coerenti con le fonti.

2.4 Applicazione del modello B&L

Dalle ipotesi sopra menzionate, si deduce che, seppur alcune *views* riguardino solamente alcuni *asset,* le conseguenze coinvolgeranno tutti i titoli componenti di un portafoglio. Vogliamo ora verificare quanto appena affermato. Per farlo, ipotizziamo di essere a conoscenza della struttura esatta di un mercato composto solamente da tre titoli A, B e C, dei quali sappiamo:

$$R_A = \pi_A + \gamma_A f + \upsilon_A$$
$$R_B = \pi_B + \gamma_B f + \upsilon_B$$
$$R_C = \pi_C + \gamma_C f + \upsilon_C$$

dove:

- R_i rendimenti *i-esimo* del titolo;
- π_i premio al rischio *i-esimo* del titolo;
- γ_i impatto del fattore *f* sull' *i-esimo* titolo;
- f fattore comune;
- υ_i errore *i-esimo* del titolo.

Idealmente, la covarianza sarà determinata dall'impatto del fattore f e dell'errore ε sui titoli. Come possiamo notare dalle formule sopra riportate, i rendimenti attesi dipendono dal premio al rischio di mercato, dal valore atteso del fattore e dall'errore di ogni titoli. Possiamo esprimere il rendimento atteso nel seguente modo:

$$E(R_A) = \pi_A + \gamma_A E(f) + E(\upsilon_A)$$

$E(R_A)$ è considerato una variabile casuale la cui distribuzione dipende dal premio al rischio di mercato e la cui incertezza dipende dunque dall'aleatorietà sia dell'errore sia del fattore comune.
Oltre alle informazioni dettate dal mercato in equilibrio, l'investitore, come affermato più volte in precedenza, darà delle opinioni personali denominate *views,* come per esempio "credo che il titolo A darà risultati migliori del titolo B di una quantità Q", con Q chiaramente nota. Si avranno quindi un'informazione oggettiva (equilibrio mercato) e una seconda soggettiva (views). Come ormai sappiamo, però, successivamente l'investitore deve misurare il suo grado di sicurezza in merito alle sue previsioni; un metodo per misurare tale livello di sicurezza è utilizzare il numero di osservazioni dalla distribuzione dei rendimenti attesi, oppure prendere la deviazione standard della distribuzione di probabilità.

Proseguendo con l'esempio introdotto, ipotizziamo che l'investitore sia sicuro delle sue previsioni (caso limite); di conseguenza $R_A - R_B = Q$. La *view* dell'investitore può dunque essere espressa da:

$$E(R_A) - E(R_B) = Q$$

Determiniamo ora la distribuzione della media dei rendimenti:

$$E(R) = [\, E(R_A), E(R_B), E(R_C)]$$

che dipenderà dalle informazioni dell'investitore e dall'equilibrio di mercato. Il rendimento atteso di equilibrio avrà distribuzione:

$$E(R) \sim N(\Pi, \tau\Sigma) \quad \text{con } \Pi = \{\pi_A, \pi_B, \pi_C\}$$

dato $\tau\Sigma$ come matrice di varianza covarianza dei rendimenti attesi e Π come vettore degli extra-rendimenti di equilibrio. La matrice di varianza covarianza viene definita nel seguente modo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} cov(R_A, R_B) & \cdots & cov(R_A, R_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(R_k, R_A) & \cdots & cov(R_k, R_n) \end{bmatrix}$$

Questa verrà poi moltiplicata per lo scalare τ. Per calcolare gli extra-rendimenti del portafoglio di equilibrio di mercato, Black e Litterman utilizzano il processo di ottimizzazione inversa, derivata direttamente dal CAPM. Il vettore dei ritorni in eccesso (o extra-rendimenti) può essere espresso nel seguente modo:

$$E(R) - R_f = \Pi = \delta\Sigma w$$

con:

- Π come vettore degli extra-rendimenti di equilibrio;
- δ come coefficiente di avversione al rischio;
- Σ come matrice di varianza covarianza dei rendimenti;
- w come pesi dei titoli coinvolti.

Come si intuisce dallo stesso nome, l'ottimizzazione inversa procede al contrario; l'insieme dei pesi dei titoli è posto come ottimo, e viene utilizzato per risolvere l'equazione per ricavare il vettore degli extra-rendimenti impliciti d'equilibrio. Come per il CAPM, si ipotizza anche qui l'aggiustamento dei prezzi fino al raggiungimento dell'equilibrio di mercato. Si tratta di un problema di massimizzazione di una funzione di utilità rispetto a *w*:

$$U(w) = w\,\Pi - \frac{\delta}{2} w\Sigma w$$

$$U'(w) = 0$$

$$0 = \Pi - \delta\Sigma w$$

$$\rightarrow \; \Pi = \delta\Sigma w$$

Ora possiamo passare al calcolo del coefficiente di avversione al rischio; il calcolo consiste nel moltiplicare il lato sinistro e destro dell'ultima equazione riportata per *w* e trasformando i vettori in scalari:

$$w\,\Pi = \delta w\Sigma w$$

($\delta w\Sigma w$ raffigura l'extra-rendimento del portafoglio di mercato)

$$E(R) - R = \delta\sigma_M^2$$

$$\rightarrow \delta = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2}$$

con:

- $E(R_m)$ è il rendimento de portafoglio di mercato;
- R_f è il tasso risk-free;
- σ_m^2 è la varianza del portafoglio di mercato.

Il coefficiente di avversione al rischio corrisponde all'indice di Sharpe; in base al rischio corso dall'investitore, quest'ultimo indica quanto verrà remunerato sotto forma di rendimento.

Passiamo ora a specificare lo scalare τ. Seppur, tra gli studiosi, ci siano pareri opposti per quanto concerne la definizione di τ, se questa debba tendere allo 0 oppure ad 1, Black e Litterman sono del parere che molto spesso sia posto vicino allo zero. Questo per il semplice motivo che l'incertezza riguardo la media della distribuzione è minore dell'incertezza dei rendimenti attesi. τ quindi indica il grado di certezza sulla vicinanza di Π rispetto al valore di equilibrio; ecco spiegato il motivo per cui lo scalare è posto molto vicino allo zero.
Esistono diversi metodi per il calcolo di tau; il primo è più che altro una convenzione, inserendo tau nell'intervallo [0,01 e 0,05]. Alternativamente, un secondo metodo ricava il valore di tau dalla statistica di base; poiché quando una media di una distribuzione viene stimata l'incertezza della stima è inversamente proporzionale al numero delle osservazioni, maggiore è il numero di quest'ultime, minore è l'apporto degli errori; conseguentemente, la stima di Π è maggiore, mentre tau decresce:

$$\tau = \frac{1}{T} \text{ stimatore di massima verosomiglianza}$$

$$\tau = \frac{1}{T-k} \text{ miglior stimatore quadratico}$$

con:

- T numero di osservazioni;
- K numero di titoli coinvolti.

Si consiglia di tenere in considerazione anche il livello di certezza che l'investitore possiede nei confronti delle sue views.

Possiamo, ora, riscrivere la condizione $E(R_A) - E(R_B) = X$ nel seguente modo:

$$P * E(R) = X \quad dove\ P = [1 \ -1 \quad 0]$$

con P che indica quali titoli sono coinvolti nella view; se l'investitore ha più di una view, P non sarà più un indice ma una matrice.
La distribuzione, data la condizione in precedenza, avrà media:

$$\Pi + \tau\Sigma'[\mathrm{P}\,\tau\Sigma\mathrm{P}']^{-1}[Q - P\Pi]$$

che risolve il problema di minimizzazione:

$$[E(R) - \pi)\tau\Sigma^{-1}[E(R) - \pi]'$$

sotto il vincolo $P * E(R) = Q$

Abbiamo visto, dunque, che in caso di massima certezza nelle views, si userà la media vincolata come vettore dei rendimenti attesi.
Tuttavia, come si può facilmente immaginare, questo caso rappresenta raramente la realtà; di norma, dunque, ovvero quando non c'è certezza assoluta nelle views, queste ultime rappresenteranno un numero fissato di osservazioni evinto dalla distribuzione dei rendimenti attesi. In questo caso avremo:

$$P * E(R)' = Q + \varepsilon$$

con ε variabile casuale con distribuzione $N(0, \Omega)$

La matrice di varianza covarianza Ω indica il livello di incertezza riguardante le views; nel caso in cui Ω=0, si avrà l'esempio descritto in precedenza. La variabile ε è descritta da una distribuzione $N(0, \Omega)$ tale da descrivere l'indipendenza delle views dalle distribuzioni dei rendimenti attesi, vale a dire che gli scostamenti (*shocks)* dei rendimenti attesi dalle medie della distribuzione che rappresenta le views siano indipendenti.

In generale, non conosciamo l'impatto dei fattori (γ_i) sui nostri titoli, nell' esempio precedente il valore di $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$;supponiamo però che essi siano [3 1 2].
Supponiamo che la matrice delle covarianze sia la seguente:

$$\begin{bmatrix} 9.1 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 1.1 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 4.1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo infine che i premi al rischio di mercato siano uguali, per semplicità [1 1 1].
Prendiamo come esempio la seguente views "il titolo A supererà la perfomance del titolo B dell'1,5%"; in questo caso i rendimenti attesi di A supereranno quelli di B in modo maggiore rispetto alla situazione di equilibrio di mercato. Da qui, si deduce innanzitutto che uno shock dal fattore comune è la ragione per la quale A avrà prestazioni migliori di B, e secondariamente che C darà anch'esso prestazioni migliori della situazione di equilibrio. La media condizionata qui sarà allora [3.9 1.9 2.9]
Ipotizziamo ora, invece, che gli shocks abbiano maggiore impatto sul fattore comune; la covarianza sarà:

$$\begin{bmatrix} 9.0 & 3.0 & 16.0 \\ 3.0 & 11.0 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 14.0 \end{bmatrix}$$

In questo secondo scenario, la maggior parte della volatilità di A è collegata ai propri shocks; inoltre, l'impatto su C sarà minore che nel caso precedente.
La media condizionata sarà [2.3 0.3 1.3]. Possiamo affermare che il fatto che A superi in performance B sia dovuto agli shock indipendenti.
Ma cosa succederebbe se l'investitore fosse più incerto della sua previsione? In questo caso, un minor livello di certezza comporta una differenza tra i rendimenti attesi di A e B minore, da 2.0 a 1.6, e un impatto minore su C del fattore comune.

Il fondamento del modello Black&Litterman è dunque la seguente formula:

$$E(R) = \left[\, \tau\Sigma^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{(-1)}P\right]^{-1}\left[\tau\Sigma^{-1}\,\Pi + P'\Omega^{(-1)}\mathrm{Q}\right]$$

dove:

- $E(R)$ è il vettore dei rendimenti attesi post views *(n x 1);*
- τ è una costante, definita weight-on-views, che misura l'incertezza della distribuzione dei rendimenti ed è data dal rapporto tra covarianza del valore atteso dei rendimenti e la covarianza dei rendimenti stessi;

- P è la matrice dei titoli riguardanti le views di dimensione *(k x n),* con k come numero di views prese in considerazione;
- Π è il vettore dei rendimenti in equilibrio di mercato di dimensione (*n x 1);*
- Q è il vettore delle views di dimensione *(k x n).*

2.5 Portafogli *bilanciati* e *benchmark*

Uno degli aspetti più innovativi del modello Black&Litterman è il concetto di portafoglio *bilanciato.* Modifiche nel livello di sicurezza nelle views, come vedremo, possono controllare il *bilanciamento* del portafoglio ottimale. Si tiene a precisare che il concetto di "*bilanciato"* viene usato come un metodo di misurazione del livello di somiglianza al portafoglio di mercato in equilibrio.

Partiamo considerando un livello di sicurezza pari al 100% nelle views; questo caso darà vita ad un portafoglio alquanto estremo. Esistono dei metodi per perfezionare il problema. Alcuni impongono limiti sui pesi dei titoli; altri specificano un portafoglio di riferimento (detto *benchmark)* e limitano il rischio finché non si ottiene un portafoglio bilanciato. Un metodo alternativo, invece, considera la riduzione del livello di sicurezza espressa in alcune o tutte le views. Riponendo meno sicurezza in alcune considerazioni, si genererebbero un insieme di extra-rendimenti che riflettono meglio la situazione di equilibrio. Questo spingerebbe i pesi del portafoglio ottimale verso una posizione più bilanciata.
Tanto più basso è il livello di sicurezza nelle views, tanto più simile il portafoglio è a quello di mercato, di conseguenza tanto più bilanciato.
Se per esempio un investitore è più sicuro di alcune views che di altre, il risultato sarà ancora migliore; il modello si allontanerà più velocemente dai titoli legati alle views più deboli che da quelli legati alle views più certe.

Abbiamo nominato brevemente, qualche riga prima, il concetto *benchmark*, ovvero di portafoglio di riferimento; una delle influenze più importanti sulle decisioni di *asset allocation,* infatti, è rappresentata dalla scelta del portafoglio di riferimento dal quale misurare il rischio. Nel modello *media-varianza* di Markowitz, l'obiettivo era quello di massimizzare i rendimenti attesi per ogni titolo che compone un portafoglio e il benchmark rappresentava il punto di

partenza dal quale misurare il rischio al fine di minimizzarlo. Il rischio, nella maggior parte dei problemi di investimenti, rappresenta la sensibilità/volatilità dei rendimenti di discostarsi dal rispettivo valor atteso; questo equivale a non avere un benchmark.
Quando non viene dato un portafoglio di riferimento, ci sono due alternative; la prima è rappresentata dall'uso della volatilità degli extra-rendimenti come misura del rischio, la seconda specifica un portafoglio "*normale*", ovvero uno che rappresenti l'allocazione ideale di titoli in assenza di views.
In molto casi, tuttavia, i manager danno un portafoglio di riferimento esplicito, come per esempio il portafoglio di mercato; in presenza di un benchmark, la misurazione del rischio più appropriata è la volatilità dell'errore di portafoglio di fronte a quello di riferimento.

2.6 Le *views* degli investitori

Abbiamo visto come parte fondante del modello B&L siano le views fatte dagli investitori; queste possono riferirsi a singoli titoli, a una coppia o più titoli a confronto oppure a gruppi/settori di titoli. Troviamo, dunque, le seguenti tipologie di views:

- Il titolo A avrà un rendimento assoluto del x%, il cui livello di sicurezza sarà del k% (*view assoluta*);
- Il titolo A supererà il titolo B in performance del x%, con un livello di sicurezza del k% (*view relativa*);
- Il settore S supererà in performance il settore R del x%, con un livello sicurezza del k% (*view relativa*)

dove view *relativa* può riferirsi a coppie di titoli oppure a settori di titoli. In particolare, quest'ultima tipologia di view rappresenterà un'ulteriore complicazione del modello, in quanto si dovranno confrontare tutti i titoli presenti all'interno del dato settore o gruppo, chiamati *mini-portafogli.*
Se ipotizziamo un numero k di views su un totale di n titoli, le views possono essere rappresentate dalla seguente combinazione lineare:

$$P\ x\ \mu = Q + \varepsilon$$

dove:

- P è la matrice che contiene il peso di ogni views, in cui ogni riga ne rappresenta una. Se la view è relativa alla somma dei pesi sarà pari a zero, altrimenti se è assoluta sarà pari a uno;
- μ è il vettore della media dei rendimenti attesi;
- Q è il vettore dei rendimenti attesi per ogni views;
- ε è il vettore degli errori commessi nelle views.

Un aspetto da non tralasciare è sicuramente quello della modalità in cui le views contribuiscono nel determinare il vettore dei rendimenti. Innanzitutto, il numero delle views non deve essere pari al numero di titoli, ma non deve mai superare quest'ultimo; inoltre, ad ogni view deve essere associato un errore casuale con media 0, descritto dalla formula seguente:

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q1 \\ M \\ Qk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon 1 \\ M \\ \varepsilon k \end{bmatrix}$$

dove $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$.

Gli errori, nel caso ci siano più views, non rientrano nella formula di B&L, ma saranno implicitamente rappresentati dalla loro varianza (ω), intese come il reciproco del livello di sicurezza (LC) moltiplicato per un fattore di correzione (CF). La matrice Ω è a matrice di varianza covarianza delle views; la varianza di ogni errore (ω) formerà la suddetta matrice.

La matrice P sarà costruita nel seguente modo:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \Lambda & p_{1,n} \\ M & 0 & M \\ p_{k,1} & \Lambda & p_{k,n} \end{bmatrix}$$

Al fine di chiarire l'utilizzo delle matrici P, Q e Ω, portiamo il seguente esempio; ipotizziamo di avere quattro titoli e due views:

- una view secondo la quale il titolo 1 supererà in performance il titolo 3 del 2% con un livello di sicurezza ω_1;

- una seconda view assoluta secondo la quale il titolo 2 renderà il 3% in più rispetto al periodo precedente con un livello di sicurezza ω_2.

Le matrici saranno:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}03 \end{bmatrix}; \Omega = \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} \end{bmatrix}$$

2.7 Il teorema di Bayes nel modello *B&L*

Nel primo paragrafo si è accennato al fatto che il modello in questione fosse basato su una metodologia Bayesiana; vediamo ora di darne spiegazione.
Il teorema di Bayes definisce la probabilità della realizzazione dell'evento A dato l'avvenimento dell'evento B secondo la formula conosciuta:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

dove:

- $P(A|B)$ è la probabilità condizionata dell'evento A dato B, chiamata alternativamente distribuzione a posteriori;
- $P(B|A)$ è la probabilità condizionata dell'evento B dato A;
- $P(A)$ è la probabilità che si verifichi l'evento A, chiamata anche alternativamente distribuzione a priori;
- $P(B)$ è la probabilità che si verifichi l'evento B.

Nel modello B&L, il teorema di Bayes viene utilizzato per unire le due fonti di informazioni, quali le views, che rappresentano la distribuzione a priori, e i rendimenti di equilibrio, permettendo di ottenere un nuovo insieme di rendimenti attesi dei titoli di un portafoglio.
Come abbiamo affermato in precedenza, nel modello B&L i rendimenti dei titoli sono rappresentati da una distribuzione normale, quindi anche la distribuzione a priori (views) e la probabilità condizionata sono distribuite secondo una normale, e di conseguenza lo è anche la distribuzione a posteriori.

Dato Q come vettore delle views e *"data"* come i rendimenti impliciti di equilibrio, allora secondo il teorema di Bayes:

$$P(Q|data) = \frac{P(data|Q)\, P(Q)}{P(data)}$$

dove:

- P(Q) è la probabilità che si verifichi la views dell'investitore, o distribuzione a priori (come sappiamo la views è data da P x μ= Q+ε);
- P(*data)* è la probabilità che si verifichino i rendimenti impliciti di equilibrio;
- P(*data|Q)* è la probabilità condizionata che si verifichi l'evento *data* dato l'evento *Q*;

Imponiamo $data|\mu \sim N(Q, \tau\Sigma)$, con il significato che i rendimenti impliciti di equilibrio condizionati alle views sono uguali alle views in media, E(*data*) = Q.
Di conseguenza, possiamo esprimere i rendimenti attesi dei titoli nel seguente modo:

$$\mu_{post} \sim N(M_{BL}, V_{BL})$$

$$\text{dove } M_{BL} = \left[\,\tau\Sigma^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{(-1)}P\right]^{-1}[\tau\Sigma^{-1}\,\Pi + P'\Omega^{(-1)}\mathrm{Q}]$$

$$\text{e } V_{BL} = \left[\,\tau\Sigma^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{(-1)}P\right]^{-1}$$

M_{BL} *e* V_{BL} sono i risultati a cui giungono Black e Litterman e rappresentano il vettore dei rendimenti attesi e la matrice della varianza dei titoli considerati.
È intuibile che maggiore sarà il livello di confidenza nelle views, maggiore sarà il peso posto su di esse, e di conseguenza la distribuzione a posteriori si avvicinerà a Q; il portafoglio, dunque, rifletterà maggiormente le views. Viceversa, minore sarà il livello di confidenza nelle views, più ci si avvicinerà al portafoglio di mercato.

Trattiamo ora brevemente due casi limite, il primo in cui si abbiano solamente views certe, con un livello di confidenza pari al 100%, il secondo in cui non vi siano alcune views.

Sotto la prima ipotesi, la matrice delle covarianze contiene solo zeri e la distribuzione a posteriori sarà condizionata in larga parte dalle views. Il questo caso quindi:

$$\mu_{post} \sim N(M^{\Omega=0}, V^{\Omega=0})$$

$$dove \;\; M^{\Omega=0} = \Pi + \Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}(Q - P\Pi)$$

$$e \;\; V^{\Omega=0} = (1-\tau)\Sigma - \tau\Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}P\Sigma$$

Nel secondo caso, l'investitore non formula views e la distribuzione a posteriori sarà pari alla distribuzione del portafoglio di mercato. In questo caso quindi:

$$E(r) \sim N(\Pi, (1-\tau)\Sigma)$$

In assenza di views, quindi, la distribuzione di E(r) ha la stessa media del vettore dei rendimenti in equilibrio e varianza pari a $(1-\tau)\Sigma$. Nell'insieme, la varianza è maggiore della varianza della distribuzione dei rendimenti in equilibrio.

Riassumendo, il procedimento per l'attuazione del modello di Black&Litterman è il seguente:

1) L'investitore calcola due distribuzioni distinte, $N \sim (\Pi, \tau\Sigma)$ di equilibrio e $N \sim (Q, \Omega)$ relativa alle views;
2) Le due distribuzioni vengono unite attraverso il teorema di Bayes per ottenere la nuova distribuzione;
3) Si ottiene il portafoglio finale tramite il processo di ottimizzazione di Markowitz, calcolandone la frontiera efficiente.

2.8 Limiti del modello Black&Litterman

Come abbiamo visto nel corso del presente capitolo, il modello B&L presenta molteplici vantaggi; ricordiamo che permette di ottenere portafogli finanziariamente più ragionevoli ed equilibrati rispetto al modello media-varianza. Consente, inoltre, di adattare le decisioni di investimento alle proprie aspettative permette all'investitore di esprimere i propri pareri (views) in maniera

relativa al portafoglio di mercato, non obbligandolo ad esprimere opinioni su tutti gli asset e si adatta alle esigenze e caratteristiche dell'investitore.
Tuttavia, anche questo modello di allocazione degli investimenti presenta dei limiti. Innanzitutto, quando si esprime una view, solamente i pesi dei titoli relativi alle views vengono modificati. Secondariamente, nel modello sono coinvolti variabili difficili da calcolare, quali per esempio τ,che misura quanto i rendimenti attesi delle views si discostano da quelli impliciti di equilibrio, e Ω, come matrice delle covarianze. Infine, una delle ipotesi su cui è costruito il modello è che i rendimenti sono descritti da una distribuzione normale, non considerando nessun altro tipo di distribuzione, e l'uso delle covarianze storiche porta ad informazioni distorte sugli asset.
L'utilizzo del modello non è adatto in un'ottica di lungo periodo; non è pensabile, infatti, che un investitore, seppur altamente informato, possa esprimere opinioni corrette e valide per il lungo termine.

Il modello di Black e Litterman è stato oggetto di ulteriori modifiche e miglioramenti da parte di autori ed economisti che hanno risolto quegli elementi considerati appunto limiti. Primo fra tutti, ricordiamo l'estensione proposta da Yanou, che descrive il portafoglio ottimale ottenuto da un investitore quando le views sono errate o parzialmente errate e una seconda implementazione di Meucci.

CAPITOLO 3: Applicazione del modello *media-varianza* e Black&Litterman

3.1 Premessa

Per l'applicazione del modello B&L, prendiamo in considerazione i titoli appartenenti all'indice FTSE MIB. Nato in seguito alla fusione tra Borsa Italiana e il London Stock Exchange Group e operativo dal 1°giugno 2009, il FTSE MIB, alla lettera Financial Times Stock Exchange Milano Indice Borsa, è il principale *benchmark* azionario della Borsa Italiana; è composto da società di grandissima importanza e raggruppa circa l'80% della capitalizzazione del mercato interno.

Al suo interno sono compresi 40 titoli italiani legati ai settori bancario, assicurativo, industriale, di lusso, delle telecomunicazioni ed energetico, dei quali considereremo solamente quelli di Banco Popolare (BP.MI), Campari (CPR), Enel (ENEL), Eni (ENI), Salvatore Ferragamo (SFER), Intesa Sanpaolo (ISP), Luxottica (LUX) e Mediaset.

Il peso di ciascuna azione è ponderato in base alla capitalizzazione di mercato e viene periodicamente rivisto per essere aggiornato sulla base delle vicende societarie.

Dal sito di *Yahoo Finanza* sono stati presi i prezzi mensili dei titoli al netto dei dividendi nel periodo compreso tra Gennaio 2012 a Gennaio 2016. Procederemo dunque a calcolare i rendimenti medi storici, la deviazione standard e indice di Sharpe. Successivamente, passeremo alla costruzione della frontiera efficiente e all'ottimizzazione di portafoglio utilizzando il modello di Markowitz.

3.2 I rendimenti dei titoli appartenenti al FTSE MIB

Come sappiamo, il rendimento di un titolo è una variabile fondamentale per la costruzione di un portafoglio efficiente; per essere calcolata dobbiamo disporre dei prezzi storici mensili dei singoli titoli, corretti per dividendi e frazionamenti, come segue:

DATA	BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
02/01/12	6,27	4,80	2,48	12,47	11,77	1,21	23,27	2,08
01/02/12	7,50	5,28	2,39	12,77	12,85	1,11	25,05	2,05
01/03/12	7,73	4,80	2,15	12,97	14,25	0,95	25,09	1,90
02/04/12	6,10	5,03	1,97	12,37	16,94	0,83	24,99	1,65
01/05/12	4,88	4,92	1,83	11,90	15,44	0,97	24,62	1,24
01/06/12	5,75	5,24	2,16	12,79	15,30	0,90	26,01	1,37
02/07/12	5,17	5,35	1,97	12,84	14,75	1,09	26,41	1,41
01/08/12	6,31	5,21	2,22	13,44	15,33	1,03	27,31	1,58
03/09/12	6,33	5,84	2,34	13,37	15,10	1,08	25,92	1,45
01/10/12	6,69	5,97	2,46	13,91	14,62	1,12	27,64	1,34
01/11/12	6,16	5,48	2,47	14,28	16,06	1,13	29,71	0,26
03/12/12	6,84	5,53	2,66	14,40	15,52	1,31	29,26	1,54
01/01/13	8,34	5,48	2,73	14,52	17,57	1,08	31,91	1,92
01/02/13	7,02	5,81	2,35	13,71	20,01	0,99	33,49	1,68
01/03/13	5,35	5,79	2,16	13,77	20,13	1,20	36,83	1,58
01/04/13	5,95	5,88	2,49	14,26	21,15	1,31	37,22	1,94
01/05/13	6,26	5,53	2,48	14,15	22,96	1,10	38,26	2,41
03/06/13	4,92	5,37	2,17	12,76	22,63	1,28	37,09	2,87
01/07/13	5,20	5,61	2,26	13,43	24,30	1,34	38,32	3,25
01/08/13	5,85	5,79	2,26	13,97	23,54	1,37	37,68	3,07
02/09/13	5,98	6,19	2,55	14,13	24,11	1,65	37,55	2,97
01/10/13	7,97	6,20	2,93	15,55	23,86	1,60	38,20	3,66
01/11/13	7,59	5,72	3,02	14,77	27,66	1,61	40,09	3,32
02/12/13	7,58	5,87	2,86	14,59	26,14	2,02	39,42	3,41
01/01/14	6,92	5,71	3,05	14,05	21,73	2,21	40,55	3,74
03/02/14	8,67	5,97	3,35	14,58	21,89	2,21	41,01	4,12
03/03/14	1,13	5,74	3,70	15,19	20,21	2,26	40,11	4,02
01/04/14	1,07	6,04	3,67	15,60	21,57	2,07	39,44	3,93
01/05/14	1,02	6,14	3,74	16,06	21,46	2,05	39,99	3,59
02/06/14	8,64	6,18	3,95	17,17	20,96	2,08	39,42	3,53

Per ogni titolo abbiamo 49 rilevazioni, che presumiamo rappresentare l'intera popolazione.
È qui necessario introdurre il modello di Black-Scholes-Merton, in quanto essenziale per la comprensione del calcolo dei rendimenti dei titoli. Oggi considerato come il modello di *pricing* più conosciuto, fu elaborato intorno agli anni settanta da Fisher Black e Myron Scholes; originariamente sviluppato con lo scopo di prezzare le opzioni finanziarie europee, con il contributo di Black, poté essere utilizzato per creare un portafoglio equivalente alle *options.* L'innovazione principale del modello, però, fu quella di ipotizzare che i rendimenti fossero distribuiti secondo una legge statistica normale; l'andamento dei prezzi di un'attività può essere dunque approssimato da un processo log-normale.

Il calcolo dei rendimenti medi storici, per ciascuna delle rilevazioni, è ottenuto tramite il logaritmo naturale della differenza di prezzo:

$$R_t = Ln(P_{i,t}) - Ln(P_{i,t-1}) = Ln(1 + r_{i,t})$$

con:

- R_t rendimento al tempo t;
- $P_{i,t}$ prezzo al tempo t;

- $P_{i,t-1}$ prezzo al tempo t-1;
- $r_{i,t}$ log-rendimento, consiste nel rendimento composto continuo dell'azione che differisce dal rendimento discreto, tale che $r_{i,t} = \frac{P_{i,t}-P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$.

Si necessitano due precisazioni: in primo luogo, il dividendo non è incluso nel calcolo, poiché i prezzi sono già aggiustati per i dividendi e split; in secondo luogo, si ricorda un'ipotesi molto forte fatta all'inizio dell'elaborato: abbiamo ipotizzato che i rendimenti storici potessero essere una descrizione alquanto valida dei rendimenti futuri. Ecco perché abbiamo calcolato il valore atteso dei rendimenti futuri come media aritmetica dei rendimenti storici; tuttavia, perché ciò sia valido, dobbiamo ipotizzare di operare in *regime dell'interesse composto.* Ciò rende possibile l'utilizzo del log-rendimento; il rendimento, infatti, è approssimabile ad una variazione logaritmica dei prezzi.

BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
0,17926266	0,09718117	-0,03714974	0,02401732	0,08797414	-0,08344631	0,07370885	-0,0145281
0,02998188	-0,09522068	-0,10491885	0,01600531	0,10370909	-0,16235613	0,00159553	-0,07598591
-0,23695181	0,04500552	-0,0894292	-0,04775401	0,17272141	-0,13081687	-0,00399362	-0,1410786
-0,22325588	-0,02192514	-0,07447793	-0,0390752	-0,09272188	0,15741557	-0,01491662	-0,28566391
0,16452404	0,06296217	0,16564219	0,07285817	-0,00910931	-0,07911673	0,05492196	0,09969936
-0,1071495	0,02162188	-0,0888009	0,00358899	-0,03661218	0,19071611	0,01526165	0,02877896
0,19918854	-0,02618709	0,11902447	0,04529794	0,0384407	-0,05516748	0,03351021	0,11383514
0,00429988	0,11319753	0,04915394	-0,00514907	-0,01472258	0,04629004	-0,05223806	-0,08586129
0,05429327	0,02261835	0,05238341	0,03975005	-0,03263975	0,0434861	0,06424913	-0,07889394
-0,0821443	-0,08584954	0,0048152	0,02618564	0,09376668	0,00462268	0,07221969	-1,63974326
0,10465408	0,00952843	0,07405887	0,00878667	-0,03369753	0,14443958	-0,01526229	1,77885606
0,19900718	-0,00865828	0,02330658	0,00815936	0,12364242	-0,18927488	0,08669804	0,22054277
-0,17233863	0,05826846	-0,14732466	-0,05732452	0,13026693	-0,08474066	0,04832745	-0,13353139
-0,27282907	-0,0041094	-0,08504683	0,00400306	0,00602877	0,18712675	0,09506584	-0,06136895
0,10739181	0,01633894	0,14252682	0,03532423	0,04928442	0,09227573	0,01053352	0,20526313
0,05074601	-0,06294121	-0,00615099	-0,00816676	0,082034	-0,17470726	0,02755871	0,21693877
-0,24187181	-0,02834498	-0,13093895	-0,10350855	-0,01452385	0,15182991	-0,03105757	0,17468528
0,05642003	0,04308433	0,03826287	0,05126977	0,07137971	0,0405447	0,03262456	0,12434297
0,11720102	0,03217725	-0,00079772	0,03957587	-0,03164914	0,02658195	-0,0168425	-0,05697743
0,0220593	0,06610065	0,12389251	0,01181424	0,02384063	0,18284149	-0,00345607	-0,03311561
0,28722872	0,00155851	0,13767135	0,09560601	-0,01025564	-0,02822432	0,01716214	0,20890119
-0,04821036	-0,07939364	0,0297096	-0,05172657	0,1474355	0,00783322	0,04829141	-0,09749836
-0,00215022	0,02498029	-0,05337094	-0,01246907	-0,05622508	0,2247041	-0,01685362	0,02674751
-0,09001534	-0,02666769	0,06524446	-0,03730004	-0,18502574	0,09100772	0,02826248	0,09237332
0,22471174	0,04379055	0,09348601	0,03668277	0,00738281	0	0,01128016	0,09676755
-2,03509564	-0,03873686	0,09921079	0,04093176	-0,08000844	0,02150207	-0,02219026	-0,02457126
-0,06141459	0,05078994	-0,00831084	0,02709101	0,0651879	-0,0857583	-0,01684515	-0,02264248
-0,04761727	0,01558413	0,01896594	0,0289326	-0,00497386	-0,01159052	0,01384889	-0,09048722
2,14027681	0,00714555	0,05401336	0,06671548	-0,02357599	0,01513146	-0,01435612	-0,01685433
-0,03467708	-0,07984468	0,00234872	-0,04710822	-0,05617939	0,0608328	0,05670733	-0,1794927

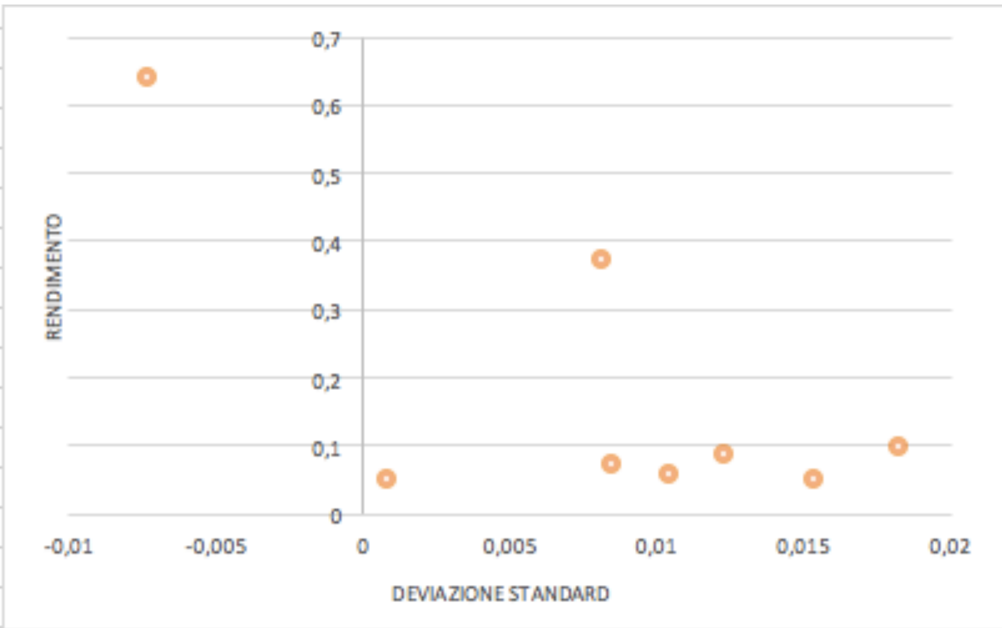
A questo punto, poiché disponiamo dei rendimenti storici dei titoli, possiamo calcolare la media come indicatore dei valore atteso di ogni titolo, che sappiamo indicare la redditività o profittabilità delle nostre attività.

TITOLI	REND. MEDIO	DEV. STAND
BP.MI	-0,052%	64,067%
CPR.MI	1,044%	5,634%
ENEL.MI	0,852%	7,333%
ENI.MI	0,086%	5,216%
SFER.MI	1,231%	8,800%
ISP.MI	1,823%	9,675%
LUX.MI	1,538%	5,001%
MS.MI	0,811%	37,212%

Tabella: rendimento medio, deviazione standard.

Si precisa che il rendimento medio e la deviazione standard sono in percentuale e sono stati trovati utilizzando le formule "MEDIA" e "DEV.ST" di excel.

Ora rappresentiamo i nostri titoli in un piano rendimento-deviazione standard per confrontare graficamente i loro rendimenti:



Per spiegare l'andamento dei titoli in esame e per costruire un portafoglio che minimizzi il rischio a parità di rendimento o viceversa, dobbiamo innanzitutto individuare le incognite principali del nostro esercizio, i pesi di ogni titolo.
A tal fine, dobbiamo trovare la varianza e il rendimento di portafoglio, partendo dalla costruzione della matrice di varianza-covarianza e degli indici di correlazione.
Nel seguire la procedura studieremo due casi distinti: il primo senza il vincolo di assenza di vendite allo scoperto, e il secondo in presenza del suddetto vincolo.

Poiché stiamo lavorando sul programma Excel, per semplicità utilizzeremo le formule di varianza e rendimento attraverso la notazione matriciale. Innanzitutto, le quote dei nostri titoli e i rispettivi rendimenti medi vengono impostati come vettore colonna il primo, e vettore riga il secondo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \; tale\ che \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$e\ E(R) = E(R_1), E(R_2), \dots E(R_n)$$

Di conseguenza, il rendimento atteso viene calcolato come prodotto tra vettore colonna x e vettore riga *E(R).* La nostra varianza di portafoglio verrà calcolata facendo ricorso alla matrice delle covarianze, denominata con Σ. Questa sarà tale che $\sigma_p^2 = x^T \Sigma x$, con x^T come matrice trasposta del vettore colonna *x,* matrice ottenuta scambiando fra loro le righe con le colonne.
Avremo dunque una matrice delle covarianza impostata nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \dots \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \dots \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} \dots \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Chiameremo un portafoglio "fattibile" se:
- la somma delle quote dei titoli che lo compongono è pari a 1;
- è situato sulla cosiddetta *envelope,* ovvero sulla frontiera efficiente;
- massimizza il rendimento dato un certo livello di rischiosità.

Gli indici di correlazione sono stati trovati utilizzando la formula Excel "=CORRELAZIONE(dati relativi al titolo X; dati relativi al titolo Y)" mentre la matrice di varianza covarianza è stata trovata calcolando le singole covarianze delle coppie di titoli con la seguente formula "=COVARIANZA(dati titolo X; dati titolo Y)". Un metodo alternativo per la costruzione della matrice Σ si serve della costruzione di una tabella degli scarti dalla media di ogni singola osservazione dei titoli per poi fare il prodotto matriciale tra la matrice trasposta degli scarti dalla media e la matrice stessa, il tutto diviso per il numero delle osservazioni. I dati sono riportati nelle seguenti tabelle:

	BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
BP.MI	1							
CPR.MI	0,0924	1						
ENEL.MI	0,0636	0,2595	1					
ENI.MI	0,1845	0,3689	0,6106	1				
SFER.MI	-0,0178	0,2540	-0,0080	0,1621	1			
ISP.MI	-0,1210	0,0277	-0,0064	-0,2139	-0,3516	1		
LUX.MI	-0,2100	-0,1755	0,0341	-0,0760	0,3491	-0,0435	1	
MS.MI	0,0516	0,1928	0,2138	0,0585	-0,0509	0,1224	-0,1467	1

Tabella: Indici di correlazione tra i titoli.

	BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
BP.MI	0,4019	0,0032	0,0029	0,0060	-0,0010	-0,0073	-0,0066	0,0121
CPR.MI	0,0033	0,0031	0,0010	0,0011	0,0012	0,0001	-0,0005	0,0040
ENEL.MI	0,0029	0,0010	0,0053	0,0023	-0,0001	0,0000	0,0001	0,0057
ENI.MI	0,0060	0,0011	0,0023	0,0027	0,0007	-0,0011	-0,0002	0,0011
SFER.MI	-0,0010	0,0012	-0,0001	0,0007	0,0076	-0,0029	0,0015	-0,0016
ISP.MI	-0,0073	0,0001	0,0000	-0,0011	-0,0029	0,0092	-0,0002	0,0043
LUX.MI	-0,0066	-0,0005	0,0001	-0,0002	0,0015	-0,0002	0,0024	-0,0027
MS.MI	0,0121	0,0040	0,0057	0,0011	-0,0016	0,0043	-0,0027	0,1356

Tabella: matrice di varianza covarianza (Σ).

3.3 Teorema di Black e portafogli efficienti

Dopo aver calcolato i rendimenti medi e la matrice di varianza covarianza possiamo passare alla costruzione della frontiera efficiente che sappiamo riflettere la combinazione ottimale di titoli contenuti all'interno di un portafoglio corrispondente alla combinazione di rendimento massimo e rischio (o deviazione standard) minimo.
Per poter arrivare alla sua costruzione, dobbiamo individuare i pesi relativi ai singoli titoli (x_i); questo perché ci permetteranno di costruire una coppia di portafogli efficienti. Qui, si necessita l'introduzione di due teoremi: il primo afferma che l'insieme dei portafogli fattibili sia convesso; il secondo teorema, enunciato per la prima volta da Black nel 1972, afferma che una qualsiasi coppia di portafogli situati sulla *envelope* è sufficiente per individuare l'intera frontiera efficiente. Per qualsiasi coppia di portafogli efficienti $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ e $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, che chiameremo p_1 e p_2, tutti i portafogli situati sulla frontiera efficiente saranno una combinazione convessa.

Sia *a* una costante, *x e y* i nostri due portafogli, allora il portafoglio *z,* tale che $z = ax + (1 - a)y$, sarà pure efficiente.

Il nostro lavoro sarà suddiviso in due parti:

1. Individuazione della coppia di portafogli p_1 e p_2 e i relativi pesi x_i e y_i;
2. Applicazione del teorema di Black che ci permetterà di arrivare al metaportafoglio z dal quale ricaveremo, prima, diverse altre combinazioni di portafogli efficienti, ed infine la frontiera efficiente.

3.4 L'operatore "*Risolutore*" e ottimizzazione vincolata

Partiamo dal primo caso d'analisi, ovvero il caso in cui non è imposto il vincolo di assenza di vendite allo scoperto. Possiamo scrivere formalmente il problema di minimizzazione nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{x_i} \sigma_p^2 = \min\limits_{x_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i\,j} \\ E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_p) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{array} \right\}$$

Il primo passo è quello di riportare il rendimento medio per ogni titolo e incolonnarlo; abbiamo scelto poi una costante arbitraria *c,* che rappresenta il vincolo del rendimento, pari a 0,01. Ora, andiamo a impostare il rendimento e la varianza del portafoglio p_1 e p_2 con le rispettive formule:

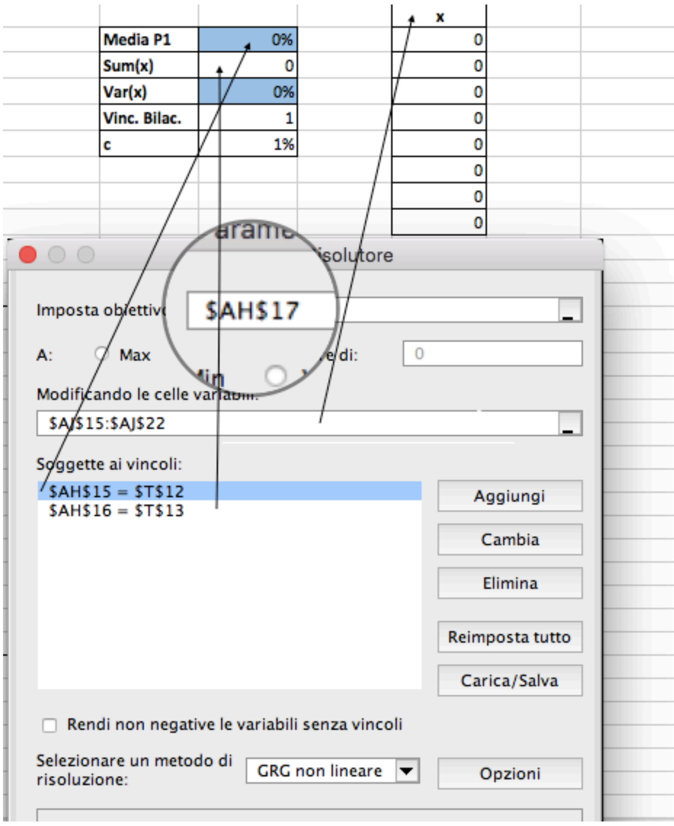
fx {=MATR.PRODOTTO(AC29:AJ29;AL2:AL9)} (Rendimento medio)

fx {=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(AL2:AL9);MATR.PRODOTTO(Z3:AG10;AL2:AL9))} (Var.);

poi impostiamo il vincolo del rendimento (la nostra costante *c*) e il vincolo di bilancio (sum(x)), che rappresenta l'assenza di indebitamento, per poter risolvere il problema di minimizzazione vincolata.

		x
Media P1	0%	0
Sum(x)	0	0
Var(x)	0%	0
Vinc. Bilac.	1	0
c	1%	0
		0
		0
		0

Come possiamo notare, il rendimento e la varianza di portafoglio sono nulli perché ancora non è stato impostato il problema di minimizzazione vincolata della varianza affinché si possano individuare le quote dei titoli.
Il problema è risolvibile utilizzando l'operatore di analisi dati "*Risolutore*" di Excel. Imponiamo il nostro problema nel seguente modo:



Come vediamo dalla foto, i dati impostati nel risolutore sono i seguenti:

- *Funzione obiettivo:* Varianza di portafoglio;
- *Celle da modificare:* quote (x) dei titoli;
- *Problema di minimizzazione;*
- *Primo vincolo:* Rendimento di portafoglio;
- *Secondo vincolo:* Vincolo di bilancio.

Non abbiamo segnato la casella “rendi non negative le variabili senza vincoli” perché in questo caso ammettiamo la possibilità di vendite allo scoperto.

Una volta impostati i sopraelencati input, otterremo il risultato seguente:

			x
Media P1	1,00%		-0,00537
Sum(x)	0		0,10778
Var (x)	0,170%		0,08795
Vinc. Bilac.	1		0,00888
c	1%		0,12708
			0,18819
			0,15877
			0,08372

Successivamente, ripetiamo il procedimento impostando un valore diverso della costante c, per esempio 2,5%, e impostiamo nuovamente il “*Risolutore*”.

			y
Media P2	2,50%		-0,01342
Sum(y)	0		0,26942
Var(y)	1,06%		0,21987
Vinc. Bilac.	1		0,02219
c	2,50%		0,31768
			0,47046
			0,39691
			0,20929

Abbiamo così trovato una coppia qualsiasi di portafogli, p_1 e p_2, che ci permetterà in seguito di trovare la frontiera efficiente.

Ora, consideriamo un secondo caso, identico al precedente con la differenza che qui imponiamo il divieto di vendite allo scoperto (vincolo di non negatività); il procedimento sarà dunque identico al precedente, spuntando però nell’operatore *Risolutore* la casella “rendi non negative le variabili senza vincoli”.
Otteniamo in questo modo i seguenti risultati:

			x
Media P1	1,00%		0,00000
Sum(x)	0		0,10778
Var (x)	0,168%		0,08796
Vinc. Bilac.	1		0,00888
c	1%		0,12710
			0,18825
			0,15880
			0,08373

			y
Media P2	2,50%		0,00000
Sum(y)	0		0,26945
Var(y)	1,05%		0,21989
Vinc. Bilac.	1		0,02219
c	2,50%		0,31773
			0,47063
			0,39701
			0,20931

Come possiamo notare dalle immagini qui sopra, i due portafogli efficienti, a parità di vincoli, sono caratterizzati da diversi gradi di rendimento e rischiosità: il portafoglio che presenta un grado di rendimento maggiore è caratterizzato da una rischiosità più elevata (p_2); al contrario, il portafoglio con rendimento minore avrà anche rischiosità minore (p_1).

3.5 La frontiera efficiente

A questo punto, dopo aver individuato e calcolato tutti gli elementi necessari, possiamo procedere alla costruzione della frontiera efficiente. Prendiamo ad esempio il primo caso, ovvero quello in presenza di vendite allo scoperto, poiché il procedimento è identico in entrambi i casi.

Applicando il teorema di Black, abbiamo individuato una coppia di portafogli efficienti nel caso di possibilità di vendita allo scoperto e divieto della stessa; ora procediamo con:

1. La creazione di un *metaportafoglio z,* come combinazione convessa della nostra coppia di portafogli;
2. La costruzione della frontiera efficiente ricavando altre combinazioni dei due portafogli a partire dal metaportafoglio z.

Prendiamo, dunque, i nostri portafogli $p_1 \ e \ p_2$ nel caso di possibilità di vendite allo scoperto; definiamo il metaportafoglio z come combinazione convessa dei due portafogli tali che $z = a\,p_1 + (1-a)p_2$. Come sappiamo, a rappresenta la quota investita in p_1 mentre $(1-a)$ la quota investita in p_2. Il metaportafoglio, essendo combinazione convessa dei primi due, può essere trattato come combinazione lineare dei suddetti, quindi si avrà:

$$E(Rz) = aE\left(R_{p1}\right) + (1-a)E(R_{p2})$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_{p1}^2 + (1-a)^2\sigma_{p2}^2 + 2a(1-a)cov_{p1p2}}$$

quali rendimento atteso e deviazione standard del metaportafoglio z.

Fissiamo la costante *a* arbitrariamente, imponendola pari a 0,3; ora dobbiamo solamente calcolare la covarianza tra i due portafogli. Tuttavia, come facilmente si intuisce, la covarianza tra i portafogli p_1 *e* p_2 non è uguale al calcolo di una covarianza tra due titoli; in questo caso avremo dunque:

$$\sigma_{p1\,p2} = x^T S y = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} x_i y_j \sigma_{ij}$$

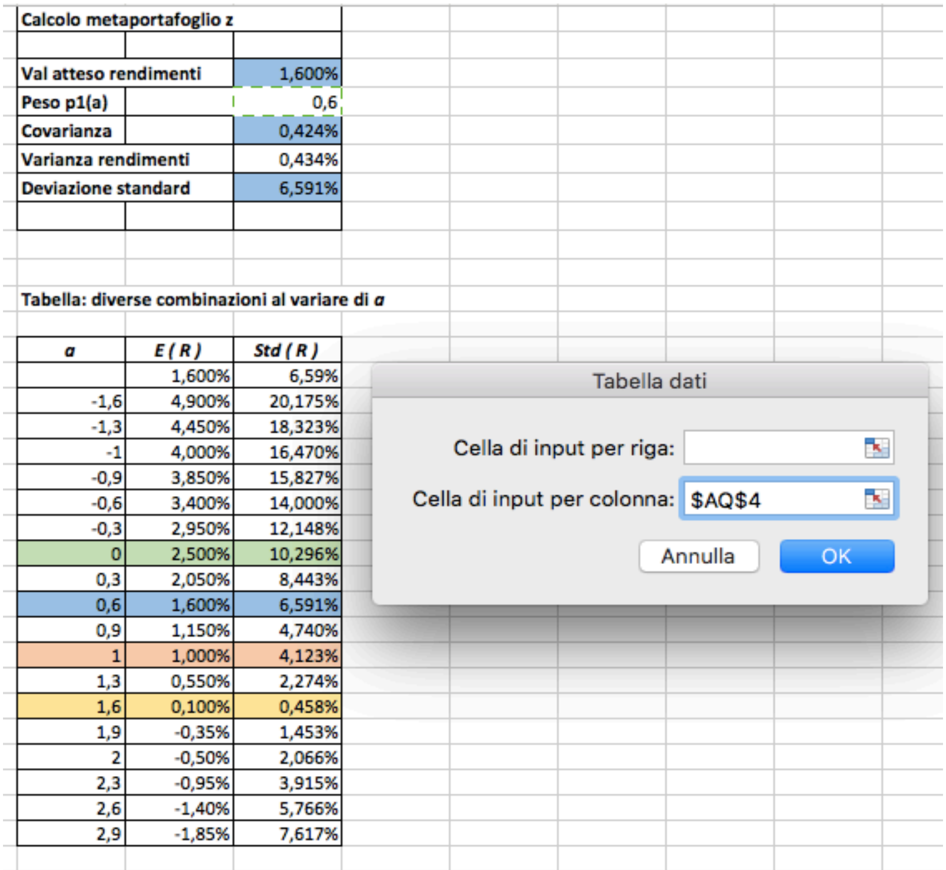
che su Excel andrà calcolata nel seguente modo:

Calcolo metaportafoglio z		
Val atteso rendimenti		2,050%
Peso p1(a)		0,3
Covarianza		-0,270%
Varianza rendimenti		0,512%
Deviazione standard		7,152%

fx {=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(L67:S74);MATR.PRODOTTO(Z3:AG10;AM2:AM9))}

La covarianza, come possiamo osservare sopra, è stata calcolata facendo il prodotto matriciale tra la matrice trasposta dei pesi x e la matrice prodotto tra matrice delle covarianze e pesi y. Dopo aver calcolato la covarianza, abbiamo potuto passare all'individuazione del valore atteso e della deviazione standard del portafoglio z utilizzando le formule ai noi già note.

Manca ancora un ultimo passaggio per la costruzione della nostra frontiera efficiente, ed è quello di creare ulteriori combinazioni convesse dei due portafogli p_1 *e* p_2. Questo è reso possibile da una specifica funzione di analisi di simulazione di Excel, chiamata "*Tabella dati*"; questa funzione ci mostra come cambiano due variabili in funzione di diversi valori assunti da una costante, nel nostro caso *a*.
Qui, dunque, individueremo diverse combinazioni convesse rendimento-deviazione standard della coppia di titoli p_1 *e* p_2 al variare di *a*.



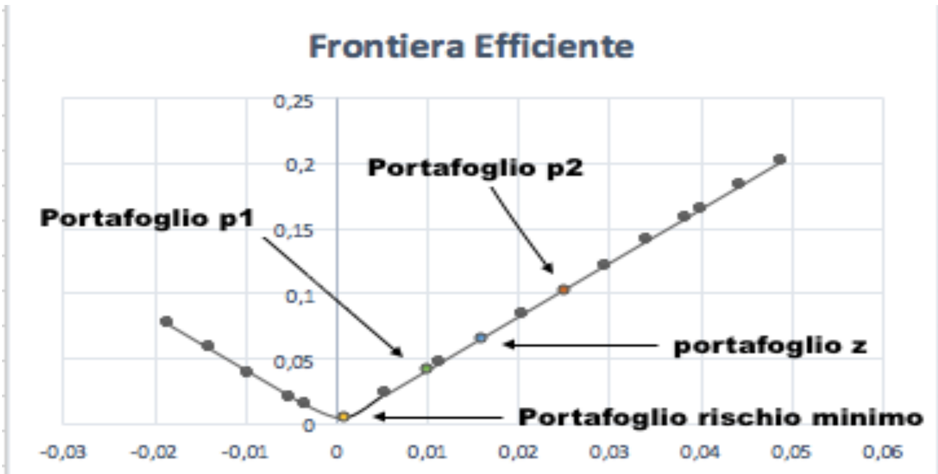
Calcolo metaportafoglio z		
Val atteso rendimenti		1,600%
Peso p1(a)		0,6
Covarianza		0,424%
Varianza rendimenti		0,434%
Deviazione standard		6,591%

Tabella: diverse combinazioni al variare di *a*

a	*E (R)*	*Std (R)*
	1,600%	6,59%
-1,6	4,900%	20,175%
-1,3	4,450%	18,323%
-1	4,000%	16,470%
-0,9	3,850%	15,827%
-0,6	3,400%	14,000%
-0,3	2,950%	12,148%
0	2,500%	10,296%
0,3	2,050%	8,443%
0,6	1,600%	6,591%
0,9	1,150%	4,740%
1	1,000%	4,123%
1,3	0,550%	2,274%
1,6	0,100%	0,458%
1,9	-0,35%	1,453%
2	-0,50%	2,066%
2,3	-0,95%	3,915%
2,6	-1,40%	5,766%
2,9	-1,85%	7,617%

La voce “cella di input per colonna” consente di inserire il valore di riferimento che ci ha permesso di calcolare in precedenza il rendimento atteso e la deviazione standard del metaportafoglio z. Da qui, tramite una simulazione dati, vengono ricavati i valori del rendimento atteso e deviazione standard di varie combinazioni dei portafogli p_1 *e* p_2 per differenti valori di *a,* compresi tra -1,6 e 2,9.

Ora, non dobbiamo far altro che creare un grafico a dispersione prendendo come dati quelli appena ricavati relativi alle diverse combinazioni convesse e otterremo la nostra frontiera efficiente.



La frontiera efficiente è stata trovata utilizzando le combinazioni convesse riportate nel precedente foglio di lavoro. Un portafoglio è definito fattibile se, per un certo livello di rendimento medio, ha una deviazione standard minima. Inoltre, un portafoglio è definito efficiente se non esiste nessun altro portafoglio che, a parità di rendimento, abbia rischio minore.
L'insieme dei portafogli efficienti, rappresentato appunto dalla frontiera efficiente, inizia dal punto corrispondente al portafoglio con rischio minimo verso destra; verso sinistra, invece, troviamo i portafogli fattibili ma non efficienti.
Notiamo che i portafogli precedentemente trovati sono evidenziati in figura.

Consideriamo ora il nostro secondo caso, ovvero quello in assenza di vendite allo scoperto; in questo caso, come nel precedente, partiamo dalla derivazione del portafoglio z. L'unica differenza sta nel fatto che i due portafogli p1 e p2 sono meno diversificati, poiché investiamo soltanto in 7 titoli (e non più in tutti e 8). Il metaportafoglio z sarà diverso solamente in quanto avrà deviazione standard maggiore ma uguale rendimento medio, tenendo sempre impostato 0,6 come costante *a*.

Come abbiamo menzionato alla fine del primo capitolo, l'applicazione della teoria di Markowitz presenta delle problematiche:

- Più è grande un portafoglio, quindi, più titoli sono presi in considerazione, più che proporzionalmente cresce il numero di parametri che devono essere calcolati: se si utilizzano n titoli, le medie considerate sono n, le varianze n e le covarianze $n(n-1)/2$;
- Il modello in questione massimizza gli errori di stima;
- Nulla, o quasi, si può dire circa il futuro del portafoglio ottimo, in quanto, sia di rendimento che il rischio, variano costantemente nel tempo.

3.6 Introduzione delle *views* e dei rendimenti impliciti

Come ampiamente detto nel capitolo precedente, Black e Litterman, per evitare portafogli troppo concentrati in pochi asset, hanno creato un modello che non utilizzi i rendimenti storici come punto di partenza ma i rendimenti impliciti, insieme alle views dell'investitore. In questo modo è possibile ottenere un portafoglio ottimale maggiormente equilibrato. Data la complessità dei calcoli ci limiteremo ad affrontare la costruzione della frontiera efficiente da un punto di vista teorico.

Sappiamo che per il calcolo dei rendimenti impliciti si utilizza la tecnica dell'ottimizzazione inversa, i cui input sono:

- La matrice varianza covarianza dei titoli;
- La capitalizzazione di mercato dei titoli;
- Il coefficiente di avversione al rischio $\delta = \frac{E(R_m)-R_f}{\sigma_m^2}$; il *risk-free* è quello di un Bund tedesco a 2 anni pari a 0,0156% su base mensile. Dopo aver calcolato media dei rendimenti e deviazione standard, otteniamo dunque un coefficiente di avversione al rischio pari a 2,535.

MEDIA RENDIMENTI	DEVIAZIONE STANDARD
1,900%	8,621%

La matrice di varianza covarianza trovata in precedenza viene ora moltiplicata per uno scalare τ, ipotizzato pari a 0,01; si otterrà così una matrice di valori molto inferiori rispetto alla matrice di partenza.

	BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
BP.MI	0,4019%	0,0032%	0,0029%	0,0060%	-0,0010%	-0,0073%	-0,0066%	0,0121%
CPR.MI	0,0033%	0,0031%	0,0010%	0,0011%	0,0012%	0,0001%	-0,0005%	0,0040%
ENEL.MI	0,0029%	0,0010%	0,0053%	0,0023%	-0,0001%	0,0000%	0,0001%	0,0057%
ENI.MI	0,0060%	0,0011%	0,0023%	0,0027%	0,0007%	-0,0011%	-0,0002%	0,0011%
SFER.MI	-0,0010%	0,0012%	-0,0001%	0,0007%	0,0076%	-0,0029%	0,0015%	-0,0016%
ISP.MI	-0,0073%	0,0001%	0,0000%	-0,0011%	-0,0029%	0,0092%	-0,0002%	0,0043%
LUX.MI	-0,0066%	-0,0005%	0,0001%	-0,0002%	0,0015%	-0,0002%	0,0024%	-0,0027%
MS.MI	0,0121%	0,0040%	0,0057%	0,0011%	-0,0016%	0,0043%	-0,0027%	0,1356%

Ora, andiamo a calcolare capitalizzazione e pesi della capitalizzazione dei singoli titoli:

	CAPITALIZZAZIONE (in miliardi di euro)	PESO DELLA CAPITALIZZAZIONE
BP.MI	1,94	1,196%
CPR.MI	5,54	3,416%
ENEL.MI	41,18	25,393%
ENI.MI	49,59	30,579%
SFER.MI	3,67	2,263%
ISP.MI	36,33	22,402%
LUX.MI	20,64	12,727%
MS.MI	3,28	2,023%
TOT.	**162,17**	**100,000%**

Abbiamo calcolato il peso della capitalizzazione dividendo il flottante (o *free float*), ovvero il valore delle azioni effettivamente emesso, per la capitalizzazione dei sette indici.

Per ottenere i rendimenti impliciti andiamo a moltiplicare tra di loro i nostri tre input nel seguente modo:

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

E otterremo i seguenti risultati:

	RENDIMENTI IMPLICITI
BP.MI	0,253%
CPR.MI	0,023%
ENEL.MI	0,224%
ENI.MI	0,198%
SFER.MI	0,006%
ISP.MI	0,024%
LUX.MI	-0,041%
MS.MI	0,165%

Ipotizziamo ora la presenza di alcune *views,* sfruttando il modello di Black&Litterman illustrato nel capitolo precedente. Come cambierebbe il processo di costruzione della frontiera efficiente? Data la grande complessità del calcolo della frontiera efficiente, ci limiteremo ad esplicare il procedimento in via teorica.

Prendiamo in considerazione tre views totalmente arbitrarie legate all'andamento futuro dei nostri titoli:

- *Una views assoluta*: Il titolo ENEL.MI mostrerà un leggero trend positivo nei mesi a venire e avrà un rendimento pari al 0,90%.
- *Due views relative*: Il titolo SFER.MI nei mesi a venire aumenterà del 1,5% rispetto all'indice LUX.MI; Il titolo ISP.MI aumenterà del 0,5% rispetto al titolo BC.MI.

Dalle views è possibile ricavare le matrici Q e P, la prima relativa ai rendimenti di ogni view e la seconda contenente i pesi di ogni view; nella matrice P, la prima riga si riferisce alla view assoluta, le altre due righe riguardano le views relative. La somma orizzontale della prima riga darà come risultato 1, mentre la somma orizzontale delle altre due darà 0.

		BP.MI	CPR.MI	ENEL.MI	ENI.MI	SFER.MI	ISP.MI	LUX.MI	MS.MI
	Q				P				
View 1	0,009	0	0	1	0	0	0	0	0
View 2	0,015	0	0	0	0	1	0	-1	0
View 3	0,005	-1	0	0	0	0	1	0	0

Al fine di poter calcolare rendimento medio e varianza di portafoglio utilizzando il modello B&L, dobbiamo esplicitare la matrice di confidenza delle views, Ω, attraverso la formulazione descritta nel precedente capitolo.

$$\Omega = diag\ (P\ (\tau\Sigma)\ P') = \begin{bmatrix} 0{,}000029 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}000017 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}000053 \end{bmatrix}$$

A questo punto dobbiamo unire views e rendimenti impliciti dei titoli al fine di calcolare rendimenti e deviazione standard applicando il modello B&L. Le formulazioni utilizzate solo quelle già descritte in precedenza:

$$E(R) = \left[\, \tau\Sigma^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{(-1)}P \right]^{-1} [\tau\Sigma^{-1}\ \Pi + P'\Omega^{(-1)}\mathrm{Q}]$$

e

$$\sigma = \left[\, \tau\Sigma^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{(-1)}P \right]^{-1}$$

Dopo aver trovato rendimenti e deviazioni standard derivati applicando il modello B&L, sarà possibile calcolare la frontiera efficiente e il portafoglio ottimale.

CONLCUSIONE

Con questo elaborato si è voluto trattare di teorie che hanno contribuito maggiormente a ciò che conosciamo come *finanza moderna*, coprendo un arco temporale di circa 50 anni.

Il punto di partenza è stata la *Portfolio Selection* di Markowitz (1952), considerato oggi il punto di partenza della finanza moderna; abbiamo analizzato da un punto di vista matematico-statistico la costruzione di un portafoglio ottimale e della relativa frontiera efficiente, prima considerando il caso con due soli titoli, poi il caso con *n* titoli. Abbiamo visto come Markowitz abbia introdotto concetti statistici di elevata importanza, che si trovano alla base del modello *media-varianza,* quali rendimento atteso, varianza, covarianza e indice di correlazione, il cui scopo è quello di ottenere un portafoglio con il minor livello di rischiosità data una combinazione di titoli con bassa correlazione tra rendimenti.
Nonostante i limiti ampiamente esplicati nel primo capitolo, il modello di Markowitz ha dato le basi per lo sviluppo di successive teorie, che cercarono di sopperire alle date mancanze, fornendo delle valide alternative per le decisioni di investimento.

Successivamente, vengono trattate queste teorie alternative, partendo dal modello CAPM, proseguendo con l'APT, e concludendo con il modello B&L.
Il modello del Capital Asset Pricing Theory è stato il primo ad aver implementato il modello *media-varianza,* introducendo i concetti di rischio sistematico, premio al rischio di mercato, Security Market Line e Capital Market Line, riuscendo ad individuare le attività finanziarie il cui valore non è in linea con i livelli di rendimento atteso corretti per il rischio sistematico. Il secondo modello, l'Arbitrage Pricing Theory, è un naturale proseguimento del precedente, il quale ne "ammorbidisce" alcune ipotesi e ne restringe altre. Fu il primo modello che espresse la sensibilità di vari titoli a molteplici fattori, per questo appunto definito modello multi-fattoriale. Vediamo quindi che i rendimenti non dipendono più solamente da β, ma anche da altri fattori economici. Per concludere, si è approfonditamente discusso del modello di Black e Litterman, considerato di grande invenzione sotto molti punti di vista; principalmente, i due economisti hanno cercato un metodo per costruire un portafoglio ottimale che permettesse di unire due tipi di informazioni diverse, quelle derivate dall'equilibrio di mercato dal un lato, e quelle relative alle opinioni (o views) del singolo investitore dall'altro. Ecco che quindi il modello parte da due diversi input per produrre un

portafoglio efficiente; questo, infatti, tenderà all'equilibrio di mercato o alle views tanto più l'investitore ha espresso views estreme o un'estrema fiducia in esse.

Nella terza ed ultima parte, è stata descritta un'applicazione del modello di Markowitz attraverso l'utilizzo del software Excel e dei titoli contenuti nell'indice FTSE MIB. Partendo dai prezzi degli otto titoli selezionati, abbiamo calcolato prima i rendimenti e matrice di varianza covarianza, per poi costruire due portafogli x e y tramite il processo di ottimizzazione vincolata e dedurne frontiera efficiente e portafoglio ottimale. Infine abbiamo proceduto con un'applicazione del modello BL per la costruzione della frontiera efficiente, ipotizzando delle views relative ad alcuni dei nostri titoli. Come il modello di *media-varianza,* anche questo è oggetto di diffidente e precisazioni; tuttavia non si può negagli di aver contribuito ad un miglioramento delle decisioni di finanziamento. Il modello viene utilizzato da parte di importanti istituzioni finanziarie, come la Goldman Sachs, che nel 1998 pubblicò un articolo relativo ai modi in cui questo cambiò i processi in merito alle decisioni di investimento, portando a performance migliori in termini di rischio e rendimento migliori dei benchmark. Ecco che, per un investitore, possedere informazioni e opinioni relative agli andamenti futuri di titoli si rivela alquanto eccezionale e permette così di aggiungere valore al proprio portafoglio.

BIBLIOGRAFIA

Benniga S., *Modelli finanziari – La finanza con Excel,* McGraw-Hill, Milano, 2010, 2° edizione.

Black, Fischer, Litterman, *Global Portfolio Optimization,* Financial Analysts Journal, Sep/Oct 1992.

Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F. A., Tirrigiani M., *Matematica finanziaria,* Monduzzi Editoriale, Bologna 1998, 2° edizione.

Brealey R., Myers S., Allen F., Sandri S., *Principi di finanza aziendale,* McGraw-Hill, Milano, 2015, 7° edizione.

Burton J., *Revisiting the Capital Asset Pricing Model,* Stanford University Research, May/June 1998.

He G., *The intuition behind the Black-Litterman model portoflios,* Goldman Sachs Investment Management Research, 1998.

Huberman G., Zhenyu W., *"Arbitrage Pricing Theory",* Federal Reserve Bank of New York Staff Reports n° 216, August 2005.

Hull J. C., *Options, Futures and other derivatives,* Pearson, New Jersey, 2009, 7° edizione.

Lintner J., *"The Valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets",* The Review of Economics and Statistics, Febbraio 1965.

Markowitz H. M., *"Portfolio Selection",* The Journal of Finance, marzo 1952.

Markowitz H. M., *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments,* John Wiley & Sons, New York, 1959.

Merton R., *Continous-time Finance,* Blackwell, Oxford, 1990.

Monti A. C., *Introduzione alla Statistica,* Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, 2008, 2° edizione.

Palomba G., *Modelli di simulazione per un portafoglio diversificato,* Università Politecnica delle Marche, 2004.

SatchellS., Scowcroft A., *A demystification of the Black and Litterman Model: Managing quantitative and traditional portfolio construction,* Journal of Asset Management vol 1-2, Henry Stewart Publications, 2000.

Sharpe W. F., *"A theory of market equilibrium under conditions of risk",* The Journal of Finance, Settembre 1964.

Sigman K., *Capital Asset Pricing Model (CAPM),* Columbia University Research, 2005.

SITOGRAFIA

Borsa Italiana, 2007. SOTTO LA LENTE. *Che cos è l'asset allocation?*. Online. Link: http://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-a-lente/assetallocation.htm.

Borsa Italiana, 2015. FTSE MIB – *Info Indice.* Online.
Link: http://www.borsaitaliana.it/borsa/indici/indici-in-continua/dettaglio.htm?indexCode=FTSEMIB".

Il Sole 24 Ore, 2011. *Cosa sono le vendite allo scoperto.* Online. Link: http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2011-07-10/cosa-sono-vendite-scoperto-150532.shtml?uuid=AaiRilmD".

Montana P., *Il Capital Asset Pricing Model e l' Arbitrage Pricing Theory.* Link: http://www.web.tiscali.it/pierpaolomontana/Pdfs/CAPM_ATP.pdf .