

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI
“LUISS - GUIDO CARLI”



FACOLTÀ DI ECONOMIA
Corso di laurea in Economia e Finanza

REPLICA STATICA DELLE OPZIONI

RELATORE:
CHIARISSIMO PROF. EMILIO BARONE.

LAUREANDO:
LUCA SEBASTIANI

ANNO ACCADEMICO 2015-16

Indice

Introduzione...3

Capitolo 1...7

Opzioni: Tecniche di Hedging...7

- 1.1 Strategie Stop-Loss...7
- 1.2 Delta Hedging...13
 - Delta Hedging di Opzioni Esotiche...20*
- 1.3 Delta-Gamma Hedging...23
 - Delta-Gamma Hedging di Opzioni Esotiche...27*

Capitolo 2...31

Replica Statica delle Opzioni Ordinarie...31

- 2.1 Replica Statica Esatta...31
 - Put-Call Parity...32*
 - Replica Statica delle Opzioni «a scelta»...34*
- 2.2 Replica Statica delle Opzioni Plain Vanilla Europee...37
- 2.3 Il Modello di Wu e Zhu (2011)...38
 - Derivazione del modello...38*
 - Analisi del modello...42*
 - Estensione del modello: Opzioni di Scambio...46*
- 2.4 Il Modello di Carr e Wu (2002)...49
 - Derivazione del modello...49*
 - Analisi del modello...52*
 - Estensione del modello: Opzioni Asiatiche...56*
- 2.5 Modelli a confronto: Esempi pratici...59
 - Copertura di SPX (S&P 500 Index) Options...59*

Appendice al Capitolo 2...64

- Dimostrazione della Funzione di Densità neutrale al rischio...64
- Modello di Carr e Wu (2002) per Opzioni Asiatiche Geometriche...65

Capitolo 3...67

Replica Statica delle Opzioni con Barriera...67

- 3.1 Introduzione alle Opzioni con Barriera...67
- 3.2 Replica Statica di una Binary Option...69
 - BVZ Options...72*
- 3.3 Maturity-Spread Approach...73
 - Descrizione del modello...73*
 - Applicazione del modello: Up and Out call...75*
 - Replica Statica di Discrete Barrier Options...80*
- 3.4 Put-Call Symmetry...81
 - Descrizione del modello...83*
 - Applicazione del modello: Down and Out call e Up and Out call...83*
 - Estensione del modello: Costi di trasferimento non-nulli...87*

3.5 Strike-Spread Approach...	89
<i>Derivazione del modello: DO call e UO call...</i>	<i>91</i>
<i>Applicazione del modello...</i>	<i>92</i>
<i>Ottimizzazione del modello...</i>	<i>96</i>
3.6 Risultati Empirici...	99
<i>Pricing di Opzioni con Barriera...</i>	<i>100</i>

Appendice al Capitolo 3...105

Dimostrazione della Static Spanning Relation...	105
Dimostrazione del “Lemma 1” in Carr e Chou (1997)...	106

Conclusioni...107

Codici VBA...112

Riferimenti Bibliografici...124

Siti Web...126

Introduzione

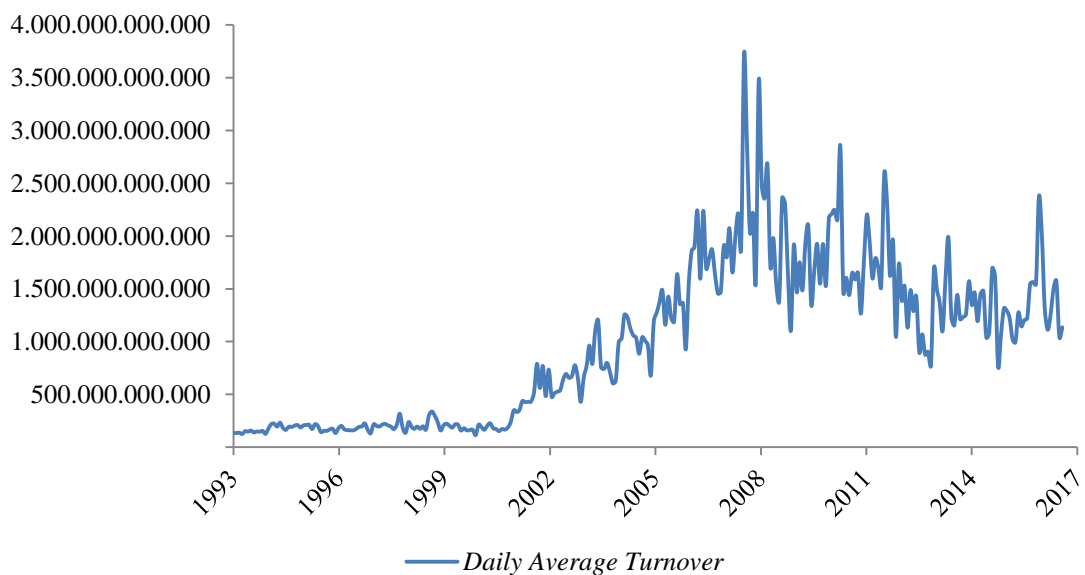
Al giorno d'oggi, certi concetti appartenenti al mondo della finanza che soltanto fino a pochi anni fa venivano considerati appannaggio esclusivo degli “addetti ai lavori”, sono diventati di pubblico dominio. Nel 2007, la crisi dei mutui *sub-prime* e delle cartolarizzazioni scoppiata negli Stati Uniti ha letteralmente stravolto le borse internazionali, gettando anche molte ombre sull'intero mondo dei derivati. Dopo quasi dieci anni, questi strumenti vengono classificati da parte di molte persone come il mezzo attraverso cui le grandi banche d'affari conducono le loro speculazioni, manipolando i prezzi e generando instabilità nell'intero sistema economico; in realtà, niente di tutto questo corrisponde al vero.

A ben vedere, i contratti derivati hanno origini ben più lontane nel tempo, origini che – non a caso – si collegano alla crisi finanziaria più antica di cui si abbia memoria: lo scoppio della bolla dei tulipani, nei Paesi Bassi, del 1637. L'Olanda è stata infatti la sede della prima borsa valori moderna della storia, fondata ad Anversa nel 1531, in un periodo estremamente fiorente delle allora “Province Unite”. Si narra che circa trent'anni più tardi, un mercante fiammingo ottenne, in uno scambio con una sua controparte turca, alcuni bulbi. Da questi bulbi nacquero dei fiori, che riscossero immediatamente grande successo in tutta Europa, diventando ben presto un autentico simbolo di prestigio, del quale si fregiavano le classi più agiate. Parigi in particolare, da sempre capitale del gusto e della moda, favorì lo sviluppo e la diffusione dei tulipani: dalle cento specie conosciute agli inizi del '600, le varietà divennero oltre mille nel 1630. L'enorme successo e la veloce propagazione di questi fiori attirò in modo particolare l'attenzione degli olandesi, popolo di mercanti dallo spiccato spirito imprenditoriale, inclini ad accettare rischi molto elevati per garantirsi buoni profitti. Il tulipano costituiva un bene di consumo sul quale si sarebbe potuto speculare: la domanda continuava a crescere ma esisteva invece un problema dal lato dell'offerta. Il ciclo di vita di questi fiori durava degli anni, mentre una volta raccolti – chiaramente – erano utilizzabili per un periodo molto breve. Nonostante la loro enorme diffusione quindi, la domanda continuava a superare l'offerta, e il prezzo di conseguenza proseguiva la sua incontrollabile salita. Nel frattempo, ebbero inizio aste e compravendite rivolte direttamente ai bulbi, che erano percepiti come sicuri beni d'investimento, in quanto costituivano nient'altro che “futuri tulipani”: nacquero i primi contratti *futures* della storia. Lo sviluppo successivo della bolla fu dovuto al fatto che, in breve tempo, si passò a negoziare attivamente i diritti sui bulbi, grazie ai quali pagando solamente una parte dell'intero valore del bulbo come acconto, il mercante poteva assicurarsi il diritto d'acquisto sul bene ad un prezzo stabilito, con il resto saldato alla

consegna. I diritti venivano spesso rivenduti senza attendere la fioritura, così che il compratore potesse lucrare direttamente sull'acconto versato, sfruttando l'effetto leva e la continua crescita del prezzo di questi contratti, prezzo che ormai era scollegato completamente dal valore reale del sottostante: nel 1633, una casa ad Hoorn venne ceduta in cambio di tre bulbi.

Non ci volle molto perché il sentimento del mercato cambiasse. Nel 1637, un'asta ad Harleem andò deserta, scatenando il panico in tutto il paese e facendo crollare le quotazioni. I compratori dei *futures* sarebbero stati costretti a pagare cifre insostenibili, per dei beni che ormai non valevano più nulla. Intervenero allora le autorità, imponendo una trasformazione dei contratti tale per cui gli acquirenti avrebbero dovuto corrispondere ai venditori (i contadini produttori dei bulbi) un ammontare pari al 3,5% del prezzo pattuito, mentre la proprietà del bene sarebbe rimasta in mano a quest'ultimi. Fu l'origine delle opzioni finanziarie.

Tornando in epoca recente, le prime opzioni quotate apparvero a partire dal 1973 sul *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), un mercato centralizzato – tutt'ora operante – che negoziò inizialmente opzioni scritte su alcuni titoli della borsa statunitense. Da allora, l'innovazione tecnologica e finanziaria ha favorito lo sviluppo di questi contratti, permettendo di raggiungere elevati livelli di complessità e sofisticazione, mentre la nascita in parallelo dei c.d. mercati *Over The Counter* ha contribuito a rendere possibile l'enorme diffusione dei derivati che si osserva ai nostri giorni.



Volumi di scambio giornalieri medi per le opzioni negoziate sui mercati regolamentati mondiali.

La figura mostra i volumi giornalieri (in USD) per le opzioni scambiate su mercati regolamentati in tutto il mondo (fonte dati: *Bank for International Settlements*). Prima dello scoppio della crisi creditizia del 2007, il *daily average turnover* per le sole *exchange-traded options* era arrivato a toccare oltre 3.725 miliardi di dollari. Il grande successo riscosso da questi strumenti, così come dalla mag-

gior parte dei contratti derivati, è legato alla molteplicità di funzioni che sono in grado di adempiere: assumere posizioni con leva, realizzare profitti sulla base dell'andamento dei mercati, gestire strutture di pagamenti presenti o future caratterizzate da elevati gradi di complessità, e molto altro ancora. Prima di tutto però, le opzioni nascono con l'intento di fornire protezione agli investitori: per loro stessa natura, espongono l'acquirente ad un rischio controllato, come una forma di assicurazione. Fu questo d'altronde, richiamando la storia raccontata in precedenza, il motivo per cui vennero introdotte per la prima volta dalle autorità olandesi, che intervenendo a salvaguardia dei mercanti imposero loro il pagamento di un "premio", in virtù del quale non sarebbero stati costretti a dover acquistare obbligatoriamente i bulbi.

Il problema infatti, sia nella recente crisi finanziaria che nella più antica bolla dei tulipani, non fu legato alle opzioni finanziarie o agli strumenti derivati di per sé, quanto piuttosto all'utilizzo che ne venne fatto e – nello specifico – ad una inappropriata considerazione e gestione del rischio che il *trading* di tali contratti comporta. Non è un caso che, a partire dal 2007, abbia avuto luogo un'intensa attività di regolamentazione e vigilanza sulle borse internazionali, volta a garantire maggiore trasparenza negli scambi, e sia stata posta crescente attenzione ai processi di *risk management* adottati dalle istituzioni finanziarie. Le opzioni costituiscono uno strumento estremamente potente, ma anche estremamente pericoloso per gli equilibri dell'intero sistema se non venissero adottate misure di controllo idonee, atte a garantirne un corretto funzionamento nel rispetto dei limiti di rischio ragionevolmente accettabili.

Il tema di fondamentale rilevanza relativo alla gestione del rischio per le esposizioni in derivati, permette di collegarsi a quello che sarà l'argomento centrale del presente elaborato: la replica statica delle opzioni finanziarie. A partire dalla formulazione dovuta a Black, Scholes e Merton nel 1973 delle prime formule di valutazione universalmente accettate e riconosciute per questo tipo di strumenti, vennero proposte una serie di strategie di copertura c.d. "dinamica", che prevedono la creazione di un portafoglio composto dal titolo sottostante, un *asset* privo di rischio ed eventuali altri contratti. Tutt'oggi, i *traders* delle principali istituzioni finanziarie impiegano attivamente alcune di queste tecniche per gestire le posizioni nei propri *books*. In certi casi, i metodi di replica possono anche essere utilizzati per derivare il prezzo implicito di opzioni esotiche a partire dai valori di mercato di altri strumenti quotati (opzioni *plain vanilla*, *futures*...). Col passare degli anni, il grande sviluppo dell'industria dei derivati ha comportato – come si è detto – una rapida espansione ed evoluzione delle opzioni finanziarie, facendo sorgere allo stesso tempo la necessità di sviluppare modelli di *pricing* e di *risk management* sempre più sofisticati ed efficaci, che fossero in grado di tenere il passo con la crescente complessità che andava caratterizzando i mercati. Il *framework* di Black, Scholes e Merton si rivelò ben presto un'approssimazione per certi versi eccessivamente semplicistica della realtà, che non riusciva a tener conto e ad interpretare adeguatamente una serie di elementi che risultavano invece empiricamente osservabili. Anche le strategie di replica dinamica, in larga parte basate

su questi modelli, mostravano risultati poco soddisfacenti, soprattutto in relazione ad alcuni strumenti o in condizioni di mercato “anomale” (e.g., *shocks*, *downturns*...).

Dai primi anni '90 vennero introdotte pertanto le c.d. “strategie di replica statica” per opzioni finanziarie. Queste strategie risolvono una serie di problemi emersi dall’impiego delle tecniche dinamiche, garantendo una miglior gestione del rischio e in molti casi una razionalizzazione dei portafogli di copertura. Lo scopo dell’elaborato sarà pertanto quello di fornire un’esame puntuale e dettagliato sull’argomento, al fine di confermare la tesi secondo cui molti di questi metodi forniscono effettivamente delle alternative più che valide alle “classiche” strategie di *hedging* dinamico comunemente impiegate. Il lavoro presenterà quindi molti risultati nuovi ed interessanti sul tema, frutto di approfondite analisi e simulazioni condotte dal punto di vista teorico ed empirico. Molte di queste analisi e simulazioni sono state prodotte sfruttando Excel, e in diversi casi si è rivelato utile ed opportuno sviluppare funzioni *ad hoc* in Visual Basic per supportare la ricerca; i codici principali, con cui sono stati costruiti gran parte delle tabelle e delle figure inserite a sostegno della trattazione nei vari capitoli, saranno raccolti e presentati – per ragioni di trasparenza e completezza – in una sezione apposita della tesi. Oltre che all’aspetto matematico e quantitativo, verrà dato poi molto spazio alle considerazioni di natura finanziaria relativamente ai modelli presentati, con l’intento di individuarne gli aspetti di maggiore pregio e le eventuali debolezze, che potrebbero influenzarne l’implementazione sul piano pratico. Infine, per molte delle strategie presentate saranno proposte delle estensioni o delle ottimizzazioni per il processo di replica statica, suggerendo possibili sviluppi e avanzamenti nella materia.

Il resto dell’elaborato sarà strutturato come segue: il Capitolo 1 presenterà alcune delle principali tecniche di copertura dinamica, utili per gettare le basi di un successivo confronto. Il Capitolo 2 introdurrà invece le strategie di replica statica di opzioni ordinarie, con applicazione dei modelli su dati simulati e reali. Il Capitolo 3 tratterà la replica statica di opzioni con barriera, opzioni caratterizzate da una particolare struttura per il *payoff* a scadenza, grazie alla quale l’approccio di *static replication* si rivela specialmente adatto alla gestione del rischio di questi strumenti. Al termine della trattazione, verranno presentate le conclusioni sull’intero lavoro.

Capitolo 1

Opzioni: Tecniche di Hedging

In questo capitolo, verranno presentate le principali tecniche di copertura (*hedging*) di opzioni. Nello specifico, saranno descritte alcune tra le più diffuse metodologie di replica e ne verrà fornita un'approfondita lettura in chiave teorica; si proporrà inoltre – in aggiunta all'analisi concettuale – una serie di simulazioni ed esemplificazioni pratiche, volte a testare l'effettiva efficacia di questi strumenti. L'obiettivo della presente sezione sarà infine prevalentemente rivolto all'introduzione delle c.d. “tecniche di copertura dinamica” (*dynamic hedging*), destinando i capitoli successivi alla presentazione delle c.d. “tecniche di copertura statica” (*static hedging*), che rappresentano l'argomento centrale dell'elaborato.

1.1 STRATEGIE STOP-LOSS

La più semplice delle strategie di copertura per opzioni di tipo *plain vanilla* – ad esempio, opzioni *calls* e *puts* europee – è la cosiddetta “strategia a costo limitato” (*stop-loss strategy*), che consente una replica teoricamente¹ esatta del contratto derivato mediante l'assunzione di posizioni lunghe o corte sullo strumento sottostante. L'idea fondamentale dietro a questo metodo, è quella di avere una posizione coperta² (*covered position*) lungo la vita dell'opzione ogni qualvolta quest'ultima sia *in-the-money*, ed una posizione scoperta (*naked position*) quando sia *out-of-the-money*. Questa strategia risulta dunque essere di facile interpretazione e di altrettanto facile implementazione, garantendo all'emittente una copertura efficace alla scadenza nel caso in cui il diritto d'opzione venga esercitato dal possessore, ed evitando all'istituzione il costo legato alla detenzione del titolo in portafoglio nella situazione opposta in cui il derivato giunga al tempo T privo di valore. Infatti, nel caso di una *call* e una *put* europee con prezzo di esercizio K , scritte su 1 unità del sottostante S , si avrà:

$$\begin{array}{l} \textit{Opzione Call} \\ \left\{ \begin{array}{l} S_t < K \rightarrow \textit{OTM} \rightarrow \text{Nessuna copertura} \\ S_t > K \rightarrow \textit{ITM} \rightarrow \text{Lungo 1 unità di } S \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textit{Opzione Put} \\ \left\{ \begin{array}{l} S_t < K \rightarrow \textit{ITM} \rightarrow \text{Corto 1 unità di } S \\ S_t > K \rightarrow \textit{OTM} \rightarrow \text{Nessuna copertura} \end{array} \right. \end{array}$$

¹ A condizione che valgano alcune assunzioni, piuttosto irrealistiche nella realtà dei mercati finanziari.

² Una posizione complessiva sull'opzione e sullo strumento sottostante tale per cui il valore del portafoglio totale non venga influenzato da variazioni nel valore dell'*underlying asset*.

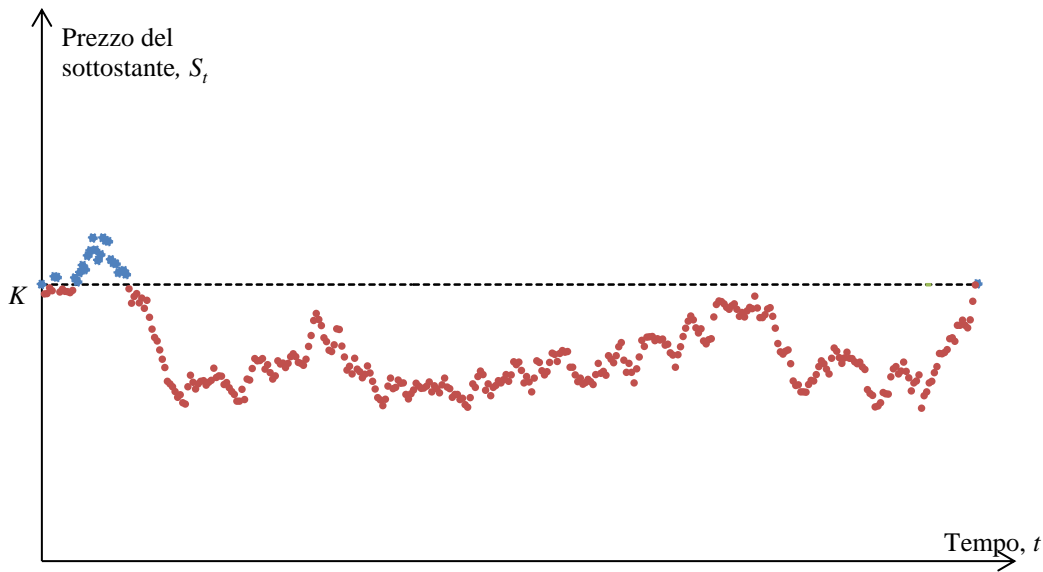


Figura 1.1 Strategia *stop-loss*.

La Figura 1.1 mostra un andamento simulato in maniera casuale³ per l'evoluzione del prezzo di un ipotetico sottostante nel tempo, assumendo una distribuzione log-normale per S , del tipo:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t g_t \sqrt{dt} \quad (1.1)$$

Dove μ è il tasso di rendimento atteso annuo (*drift*), ipotizzato essere pari al 5%, σ è la volatilità annua del sottostante, posta uguale al 15%, g_t è una variabile normale standard e dt è un intervallo di tempo arbitrariamente piccolo ($=1/365$, in questo esempio). Il prodotto $g_t \sqrt{dt}$ può essere alternativamente indicato come dz_t , ed è chiamato Moto Browniano: questo elemento è estremamente importante, poiché costituisce il fattore di incertezza nell'evoluzione temporale di S , senza cui l'*asset* sottostante al derivato crescerebbe secondo un processo deterministico di tipo esponenziale; l'assenza di incertezza costituirebbe un'ipotesi piuttosto irrealistica, in presenza della quale nessuno avrebbe particolari incentivi a negoziare opzioni ed altri strumenti analoghi.

Richiamando l'attenzione alla Figura 1, è possibile definire una strategia a costo limitato per un'istituzione finanziaria che abbia scritto un'opzione sul sottostante, emessa con un prezzo d'esercizio (*strike price*) pari al valore iniziale del prezzo del sottostante in $t=0$. L'obiettivo dell'emittente di una *call* (*put*), sarà dunque quello di avere una posizione coperta ogni volta che S_t sia maggiore (minore) di K , ossia nella parte della figura colorata in blu (rosso), rimanendo invece scoperto nella situazione opposta.

³ L'elemento di casualità nella formula è dato da g_t , la quale è stata stimata tramite Excel utilizzando la formula "Inv.Norm.S(Casuale())" in modo da generare T/dt estrazioni stocastiche indipendenti dalla distribuzione normale standardizzata.

Tuttavia, seppure la strategia *stop-loss* sembri lavorare perfettamente in linea teorica, sussistono in pratica numerose complicazioni, che la rendono uno strumento di replica poco efficace per un'opzione finanziaria. Tralasciando le eventuali criticità legate alla presenza di costi di transazione e all'effettiva possibilità da parte dell'istituzione di vendere allo scoperto l'attività sottostante⁴, il problema principale è legato al fatto che l'*hedger* non è in grado di effettuare le operazioni di acquisto o vendita esattamente al prezzo d'esercizio. La ragione è che, nel momento in cui il prezzo del sottostante raggiunge K , non è possibile prevedere se nell'istante successivo S_t aumenterà o diminuirà. Si consideri ad esempio un'istituzione finanziaria che abbia venduto un'opzione *put* ad un cliente, scritta su un certo quantitativo x di azioni della società "ABC S.p.a.", che quotano €120 ciascuna, fissando uno *strike price* pari a €100. Si supponga inoltre che l'emittente del derivato desideri ricorrere ad una strategia a costo limitato per coprire la propria esposizione: in $t=0$ pertanto, in linea con quanto descritto in precedenza, sarà sufficiente mantenere una *naked position* sull'opzione. Se in seguito, nel corso della vita del contratto, il prezzo del sottostante dovesse toccare €100, l'istituzione potrebbe decidere di vendere allo scoperto x -azioni della società "ABC S.p.a." in modo tale da ottenere un'idonea copertura della propria esposizione, in ottemperanza alla strategia *stop-loss*. Tuttavia, qualora S_{t+1} dovesse tornare a crescere al di sopra di K , l'emittente sarebbe costretto ad assumere nuovamente una posizione scoperta sul sottostante, e ciò comporterebbe un doppio costo dovuto da una parte alla duplice (e non necessaria) transazione effettuata, e dall'altra al fatto che il riacquisto avverrebbe inevitabilmente ad un prezzo maggiore di €100, e il differenziale ε rispetto alla vendita allo scoperto iniziale andrebbe perso in maniera irrecuperabile. L'unica alternativa percorribile per l'istituzione finanziaria, rimarrebbe dunque quella di attendere il successivo movimento del sottostante, da S_t a S_{t+1} , ed agire di conseguenza: vendendo allo scoperto x -azioni se il prezzo dovesse scendere ulteriormente o rimanendo *naked* altrimenti. Anche in questo caso si perderà ε , ma si eviteranno perlomeno transazioni inutili (e generalmente costose).

L'emittente può ridurre l'entità dello spread ε solamente incrementando la frequenza con cui S_t viene osservato, ma in tal modo aumenterà rapidamente anche il numero delle transazioni attese. Al limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$ (prezzo delle azioni controllato continuamente) le compravendite del sottostante tenderanno all'infinito; questo risultato è dovuto ad una particolare proprietà del Moto Browniano⁵ (o Processo di Wiener), tale per cui quando $\Delta t \rightarrow 0$ il valore atteso del numero di volte in cui z_t (e per estensione S_t) risulta uguale ad uno specifico valore, è infinito. In presenza di tale *trade-off* e dell'oggettiva impossibilità da parte dell'istituzione di monitorare continuamente l'andamento del sottostante, la strategia a costo limitato non sarà in grado di lavorare perfettamente.

Per misurare la *performance* o il grado di effettività della strategia *stop-loss* si possono impiegare vari metodi e strumenti: uno di questi consiste nel simulare N traiettorie potenziali per l'*asset* sottostante e, assumendo di vestire i panni di un'istituzione finanziaria che abbia emesso un'opzione

⁴ Necessaria ai fini della copertura di un'opzione *put* attraverso questa metodologia.

⁵ Utilizzato per descrivere l'andamento del sottostante nel tempo nella Formula (1.1).

e desideri coprirla, sviluppare un piano di *hedging* in accordo con quanto descritto in precedenza. Infatti, posto che l'obiettivo dell'emittente è quello di replicare il *payoff* della *call* o della *put* alla scadenza in maniera approssimativamente esatta per poter far fronte all'eventuale esercizio del diritto di opzione da parte dell'acquirente senza incorrere in costi imprevisti, una stima dell'efficacia della strategia a costo limitato è fornita proprio dall'abilità di quest'ultima di generare un portafoglio di replica il cui valore al tempo T sia quanto più vicino possibile al valore del derivato target.

Si ipotizzi dunque che una banca d'investimento abbia venduto una *call option* a 20 settimane, con prezzo d'esercizio pari a € 100, scritta su 100.000 unità di un titolo che non paga dividendi⁶ e che in $t=0$ è quotato a € 95. Il sottostante ha una volatilità del 20% e il tasso di interesse privo di rischio è pari al 5%. L'istituzione decide inoltre di seguire una strategia a costo limitato per coprirsi dall'esposizione assunta nei confronti dell'acquirente; al momento dell'emissione si trova nella seguente situazione:

- Incassa c_0 , il premio della *call* venduta;
- Mantiene una *naked position*, in quanto $S_0 < K$;
- Investe il premio ottenuto al tasso *risk-free* fino alla successiva data di monitoraggio⁷.

Trascorso un certo periodo prestabilito (un mese, una settimana, un giorno...), la banca tornerà ad osservare il prezzo del sottostante e modificherà, se necessario, la propria copertura:

- Se $S_t > K$, acquisterà 100.000 unità del sottostante per ottenere una *covered position*, mentre se $S_t \leq K$ manterrà semplicemente l'esposizione scoperta assunta in $t=0$;
- Il deposito privo di rischio vedrà il proprio valore incrementarsi grazie agli interessi maturati. Se $S_t > K$, la banca prenderà a prestito al tasso *risk-free* l'ammontare necessario ad acquistare 100.000 azioni al prezzo S_t , riducendo l'entità del deposito. Il saldo rimanente sarà poi nuovamente reinvestito fino al periodo successivo.

L'istituzione proseguirà in maniera analoga con la strategia, ripetendo le operazioni descritte fino alla scadenza dello strumento, acquistando o vendendo l'*asset* ogni volta che il prezzo oltrepassa – rispettivamente dal basso o dall'alto – la soglia data dallo *strike price*, e aggiustando di conseguenza il saldo del deposito privo di rischio. Alla fine, il portafoglio di replica al tempo T sarà costituito dall'eventuale posizione sul sottostante (se l'opzione termina *in the money*) più il saldo dell'investimento al tasso *risk-free*.

La Tabella 1.1 mostra l'applicazione della strategia a costo limitato con monitoraggio settimanale del prezzo del sottostante, data una traiettoria per quest'ultimo generata in maniera casuale. Come si evince chiaramente osservando l'ultima riga, questa tecnica produce una replica alquanto imprecisa dell'opzione, con conseguenti problemi per l'*hedging* dell'emittente, il quale potrebbe trovarsi a dover fronteggiare costi notevolmente alti senza avere a disposizione gli strumenti per farlo.

⁶ Assunzione fatta per rendere più facile lo svolgimento dell'esempio, non comportando significative differenze di risultato ai fini dell'analisi che si desidera effettuare.

⁷ Data in cui viene osservato il prezzo del sottostante ed eventualmente aggiustata la copertura.

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Valore azioni Acquistate	Call	Deposito risk-free	Azioni detenute	Portafoglio di replica
0	95,00	0	0	337.610	337.610	0	337.610
1	97,37	0	0	430.495	337.934	0	337.934
2	99,81	0	0	543.830	338.258	0	338.258
3	97,62	0	0	409.017	338.583	0	338.583
4	99,57	0	0	494.291	338.908	0	338.908
5	100,13	1	10.013.142	507.379	-9.673.910	10.013.142	339.233
6	101,04	1	0	541.880	-9.683.190	10.103.782	420.592
7	100,57	1	0	493.904	-9.692.480	10.057.233	364.753
8	99,87	0	-9.987.294	433.090	285.515	0	285.515
9	103,90	1	10.390.103	670.186	-10.104.314	10.390.103	285.789
10	105,65	1	0	780.353	-10.114.008	10.564.889	450.881
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	108,55	1	0	854.799	-10.624.525	10.854.799	230.274

Tabella 1.1 Strategia stop-loss.

Nell'esempio mostrato in Tabella 1.1, il prezzo dell'azione quota a € 108,55 alla scadenza del derivato, l'opzione è *in the money* e il possessore deciderà dunque di esercitare il suo diritto, ottenendo il valore intrinseco in T pari a € 854.799. Tuttavia, il portafoglio di replica ammonta soltanto a € 230.274: per ottenere la differenza di € 624.525 – in modo tale da poter coprire interamente il corrispettivo spettante al compratore – l'istituzione finanziaria sarà costretta a reperire i fondi necessari facendo ricorso ad altri mezzi. Questo costo imprevisto potrebbe rivelarsi oneroso per l'emittente, costringendolo ad esempio a liquidare alcuni *asset* per ottenere l'ammontare necessario a fronteggiare l'esercizio della *call* da parte dell'acquirente. Nel peggiore dei casi, la banca potrebbe addirittura non essere in grado di reperire i fondi sufficienti a coprire il pagamento dell'opzione (acquisto e contestuale rivendita del sottostante al prezzo di esercizio K), divenendo insolvente e trovandosi costretta a confrontarsi con i notevoli problemi che ne conseguirebbero.

La Figura 1.2 mette a confronto l'output della strategia a costo limitato con ribilanciamento settimanale per $N=1000$ traiettorie casuali del prezzo dell'azione sottostante con il valore intrinseco della *call* a scadenza. Dall'osservazione del grafico risulta chiaro che questo metodo di *hedging* funziona in maniera alquanto imprecisa, con scostamenti significativi dal *payoff* reale dell'opzione per valori di S_T vicini a K , ossia quei casi in cui i ribilanciamenti della copertura da *naked* a *covered* e viceversa, si verificano, verosimilmente, con maggior frequenza. Quando invece il prezzo in T del sottostante è più lontano dallo *strike price* – in positivo o in negativo – la precisione tende ad aumentare, ma non risulta comunque possibile ottenere una replica accurata del derivato.

La Figura 1.3 mostra il funzionamento della strategia *stop-loss* con frequenza di osservazione giornaliera. Anche in questo caso, la copertura della *call* è poco efficace, e non si verifica un miglioramento significativo rispetto alla strategia con ribilanciamento settimanale. In entrambi i casi è inol-

È interessante notare la presenza di un elevato numero di portafogli di replica posti sullo stesso livello, per valori di S_T minori di K (riga blu orizzontale sulla sinistra in Figura 1.2 e 1.3). Questo risultato è dovuto al fatto che se il prezzo iniziale dell'azione (S_0) è al di sotto del prezzo d'esercizio, e nel corso della vita dell'opzione quest'ultimo non viene mai oltrepassato, la strategia prevede che l'esposizione dell'emittente rimanga scoperta fino a scadenza, garantendo un payoff finale pari al premio della *call* più gli interessi maturati sul deposito privo di rischio; al contrario, se $S_T > K$ il derivato sarà *out of the money* e avrà un valore intrinseco pari a 0.

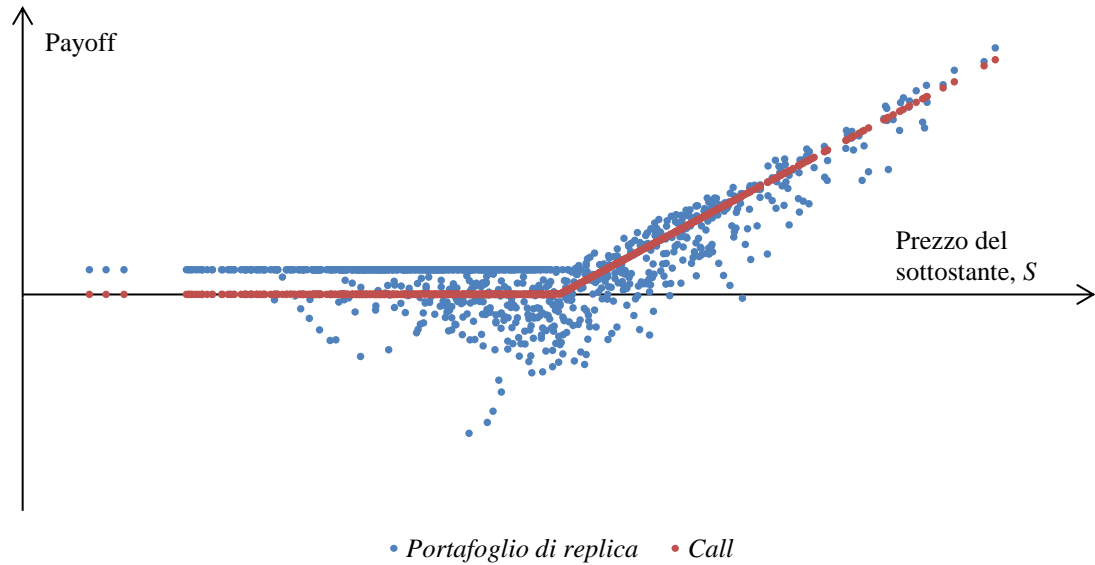


Figura 1.2 Strategia *stop-loss* con copertura settimanale.

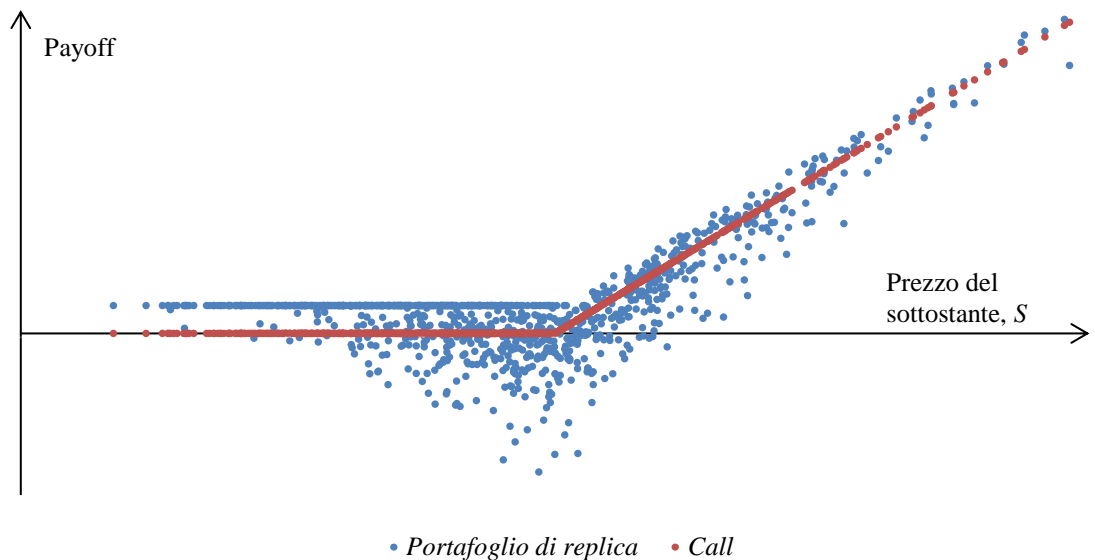


Figura 1.3 Strategia *stop-loss* con copertura giornaliera.

La conformazione delle due figure mostrate sopra dipende in ogni caso in maniera imprescindibile dal valore a parità di sottostante⁸ (*moneyness*) dell'opzione analizzata, alla luce di quanto appena discusso. Infine, i risultati riscontrati negli esempi prodotti possono essere estesi facilmente ad una *put* con caratteristiche simili.

Indipendentemente da queste considerazioni, le simulazioni numeriche e grafiche fin qui condotte per testare l'efficacia della strategia a costo limitato portano a concludere che la metodologia in esame, sebbene semplice da implementare, non sia in grado di produrre una replica soddisfacente dell'opzione, tale da consentire una copertura adeguata dell'esposizione da parte dell'istituzione emittente. Nei paragrafi successivi verranno dunque proposte tecniche più sofisticate, ma comunque di semplice utilizzo, che – come si vedrà – sapranno garantire *hedging* migliori e più accurati.

1.2 DELTA HEDGING

La tecnica del *delta hedging* scaturisce direttamente dall'applicazione del principio di valutazione neutrale al rischio, utilizzato da Black, Scholes e Merton nella dimostrazione dell'omonima formula di *options pricing*. In particolare, nel 1973 Robert C. Merton propose, in un lavoro⁹ dell'epoca, una maniera alternativa e più efficace per ottenere lo stesso risultato al quale i suoi colleghi erano giunti poco tempo prima: il suo contributo permise infatti di rilassare alcune assunzioni restrittive e non necessarie impiegate da Black e Scholes, relative alla propensione al rischio degli investitori.

Si supponga dunque, come già ipotizzato in precedenza, che l'emittente di una *call* europea desideri replicare il *payoff* dell'opzione a scadenza, in modo da proteggere la propria esposizione, detenendo in portafoglio i fondi necessari a fronteggiare l'eventuale esercizio da parte del compratore al tempo T . Tuttavia, il *dealer* venditore del derivato non è disposto a spendere soldi per realizzare la copertura, ma vorrà piuttosto che la liquidità richiesta scaturisca direttamente da un'opportuna gestione del premio pagato dall'acquirente in $t=0$.

L'idea di Merton è la seguente: detenere una certa quantità delta (Δ) – da definire – di sottostante, per replicare (e quindi coprire) l'esposizione dell'emittente dovuta alla vendita della *call*. Il portafoglio totale (Π) sarà dunque dato da:

$$\Pi = -c + \Delta S \quad (1.2)$$

Dove c è il premio pagato dall'acquirente dell'opzione e S è il prezzo corrente dell'*underlying asset*. Il passo successivo per stabilire l'entità del delta, consiste nel formulare la variazione ($d\Pi$) subita dal portafoglio nel corso di un brevissimo intervallo di tempo (dt). Assumendo che il tasso privo di rischio e la volatilità dell'azione siano costanti lungo la vita dell'opzione, le uniche variabili che pos-

⁸ Definita come il rapporto S/K .

⁹ MERTON, R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), 141-183.

sono determinare un cambiamento nel valore di Π sono esclusivamente il prezzo del sottostante e il trascorrere del tempo (che fa sì che si riduca la durata residua del derivato). Di conseguenza, è possibile espandere $d\Pi$ rispetto alle variabili S e t , ottenendo:

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial S} dS + \Delta dS - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} (dS)^2 + \dots - \frac{\partial c}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} (dt)^2 + \dots \quad (1.3)$$

Dato che si stanno prendendo in considerazione intervalli di tempo infinitesimali, si possono ignorare i termini di secondo ordine in dt presenti nell'Equazione 1.3. Si osservi tuttavia, che il termine in dS^2 , richiamando il processo descritto dall'Equazione 1.1 per l'azione sottostante ed applicando il Lemma di Ito, sarà:

$$dS^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + \sigma^2 S^2 g^2 dt = \sigma^2 S^2 dt$$

Infatti, la componente di sinistra viene omessa perchè contiene un termine di secondo ordine in dt , mentre g^2 coincide semplicemente con la varianza della variabile normale standard g , ovvero 1. L'Equazione 1.3 si può dunque semplificare ulteriormente.

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial S} dS + \Delta dS - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt - \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

A questo punto, osservando il risultato ottenuto, una scelta appropriata sarebbe quella di porre $\Delta = \partial c / \partial S$, la derivata del valore dell'opzione rispetto al prezzo dell'*asset*. Così facendo, si ottiene:

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\partial c}{\partial S} dS - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt - \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

E, semplificando i termini in dS .

$$d\Pi = -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt - \frac{\partial c}{\partial t} dt \quad (1.4)$$

La caratteristica più interessante dell'Equazione 1.4¹⁰ è che non sono presenti termini in dS : ciò significa che $d\Pi$ è indipendente dalla variazione del prezzo del sottostante, ossia in un brevissimo intervallo di tempo dt il portafoglio composto da una posizione corta sul derivato e da una posizione

¹⁰ Da questa equazione, imponendo l'assenza di possibilità di arbitraggio (tale per cui $\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$) ed aggiungendo opportune condizioni al contorno, si giunge all'equazione di BSM per stabilire il prezzo di un'opzione. La derivazione della formula finale, tuttavia, non rientra nello scopo del presente paragrafo.

lunga su “delta” azioni è privo di rischio. In ultima analisi, ciò implica che durante questo periodo di durata infinitesimale, l’esposizione assunta dal *trader* – dovuta alla vendita della *call* – sia perfettamente coperta.

Il *delta hedging* sembrerebbe quindi una tecnica infallibile per replicare il *payoff* di un’opzione in maniera esatta. Purtroppo però, il suo limite principale è dovuto al fatto che la copertura risulta efficace solamente per un cortissimo intervallo di tempo, trascorso il quale il portafoglio Π – così come costruito in $t=0$ – non è più indipendente dal rischio di una variazione nel prezzo dell’*underlying asset*. La ragione è che, in $t=1$ (i.e., trascorso dt) le variabili che determinano il valore del portafoglio cambieranno rispetto all’istante precedente, incluso il delta della *call*. Affinché la copertura rimanga effettiva, la posizione lunga sul sottostante andrebbe dunque ri-bilanciata, adeguandola al nuovo valore assunto dal Δ . Se questa operazione non venisse effettuata, ovvero se il numero di azioni detenute fosse mantenuto invariato, nel corso della vita dell’opzione il portafoglio Π sarebbe esposto alle variazioni di S e la copertura del derivato risulterebbe inefficace. Per questa ragione, la tecnica del *delta hedging* è una procedura “dinamica”, nella misura in cui risulta necessario effettuare un monitoraggio periodico al fine di poter modificare la posizione assunta sul sottostante in maniera adeguata.

La Figura 1.4 mostra un esempio di replica tramite *delta hedging* di una *call* europea con caratteristiche analoghe a quelle impiegate nel paragrafo precedente ($S_0=95$, $K=100$, $r=5\%$, $\sigma=20\%$, $T=0,384$). Il delta iniziale può essere calcolato utilizzando la formula:

$$\Delta_c = N(d_1) \quad (1.5)$$

Dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Nel caso in analisi, si ottiene $\Delta=0,355$: questa è la pendenza della retta tangente (linea tratteggiata), che esprime l’approssimazione lineare¹¹ del *payoff* dell’opzione. L’emittente dovrà quindi acquistare 35.500 azioni¹², ciascuna con un delta pari a 1. Dopodiché, se il prezzo del sottostante dovesse aumentare o diminuire nel periodo successivo, la variazione del valore della *call* sarebbe approssimativamente compensata dalla variazione nel valore della posizione sull’*underlying asset*. Per mantenere l’esposizione “delta neutrale”, si renderà poi necessario ricalcolare il nuovo Δ e adeguare la copertura.

¹¹ Espansione in Serie di Taylor di 1° grado.

¹² Si assume, come in precedenza, che l’opzione dia diritto all’acquisto a scadenza di 100.000 azioni del sottostante.

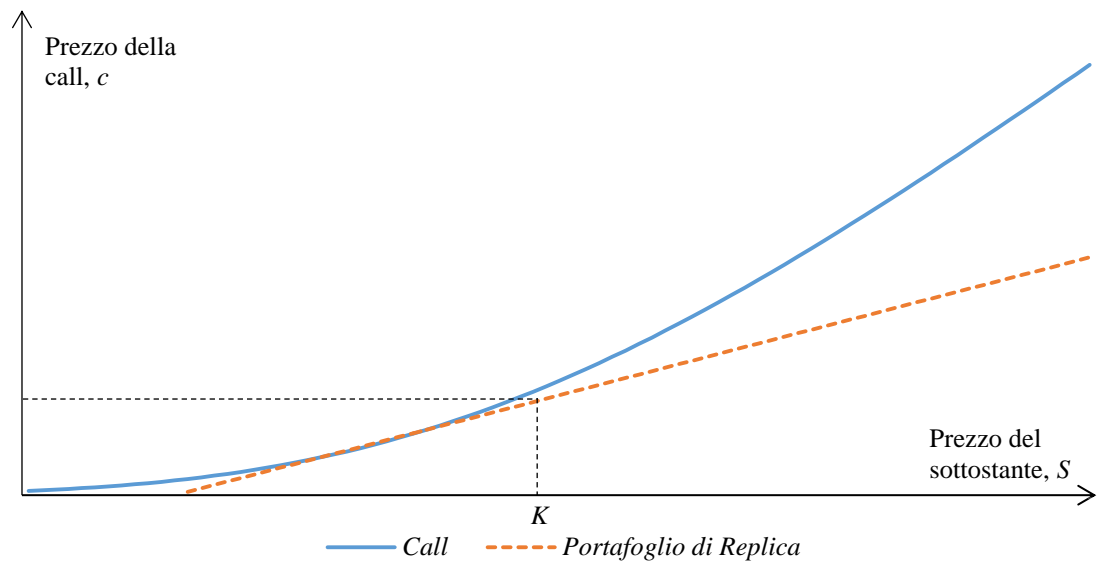


Figura 1.4 Delta di una *call* europea.

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Valore azioni acquistate	Call	Deposito risk-free	Azioni detenute	Portafoglio di replica
0	95,00	0,355	3.376.969	337.610	-3.039.359	3.376.969	337.610
1	95,85	0,379	223.074	359.112	-3.265.349	3.630.338	364.989
2	99,10	0,484	1.047.422	504.197	-4.315.904	4.800.900	484.996
3	100,64	0,536	519.130	574.510	-4.839.175	5.394.262	555.087
4	105,61	0,697	1.704.094	894.050	-6.547.911	7.364.941	817.030
5	112,80	0,868	1.922.501	1.479.508	-8.476.694	9.789.243	1.312.549
6	117,60	0,934	782.293	1.913.784	-9.267.119	10.987.482	1.720.362
7	118,03	0,945	120.382	1.942.990	-9.396.392	11.148.422	1.752.030
8	122,91	0,975	371.275	2.409.234	-9.776.682	11.980.107	2.203.426
9	121,51	0,975	-2.287	2.260.393	-9.783.774	11.841.778	2.058.004
10	123,66	0,984	113.590	2.462.784	-9.906.750	12.164.479	2.257.729
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	107,24	1,000	33.552	723.716	-10.155.706	10.723.662	567.956

Tabella 1.2 *Delta Hedging*.

La Tabella 1.2 mostra l'applicazione della strategia in esame per un sentiero simulato in maniera casuale del prezzo del sottostante, nell'ipotesi in cui l'emittente debba coprire l'esposizione derivante dalla vendita di una *call* europea. Come in precedenza, si assume che S sia caratterizzato da una distribuzione log-normale del tipo definito dall'Equazione 1.1, con volatilità e tasso privo di rischio costanti da $t=0$ a T . In questo caso, rispetto alla performance generata dalla strategia a costo limitato, si osserva un netto miglioramento: la replica è visibilmente più accurata, tanto nel corso della vita dello strumento quanto a scadenza, seppure non perfetta – in accordo con le aspettative – per via del-

la frequenza di monitoraggio settimanale. Un'altra importante differenza da rimarcare, sta nella quantità e nell'ammontare delle compravendite di azioni effettuate in applicazione delle due strategie: la *stop-loss* implicava un basso numero di acquisti e vendite ma di grande entità, mentre l'evolvere più graduale del Δ nel *delta hedging* fa sì che venga generato un elevato numero di transazioni di entità minore. In presenza di significativi costi di transazione¹³, quest'ultima tecnica potrebbe quindi peggiorare notevolmente la propria efficacia, mentre l'altra subirebbe un effetto più marginale, provocando un parziale riallineamento delle rispettive *performances*. In ogni caso, anche le ingenti compravendite implicate dalla strategia a costo limitato possono creare condizioni sfavorevoli¹⁴ per l'emittente, rendendola a livello pratico una metodologia difficilmente implementabile.

La Figura 1.5 sintetizza l'output di $N=1000$ simulazioni di replica per il medesimo derivato di cui alla Tabella 1.2 tramite *delta hedging*, per altrettante traiettorie di S generate in maniera *random*. In questo caso, il ribilanciamento settimanale sembra essere sufficiente a produrre una copertura notevolmente precisa della *call*, confermando ulteriormente quanto sostenuto finora circa la bontà della tecnica in esame. Inoltre, l'osservazione della Figura 1.6, in cui dt è assunto essere uguale ad un giorno ($=1/365$), rende immediatamente chiaro che aumentando la frequenza di monitoraggio del sottostante è possibile migliorare sensibilmente l'efficacia della strategia, coerentemente con la teoria illustrata ad inizio paragrafo. Nella pratica infatti, la presenza di costi di transazione genera una *trade-off* rilevante per l'istituzione finanziaria: riducendo l'intervallo di osservazione e ribilanciamento della copertura aumenterà considerevolmente il numero di compravendite effettuate in applicazione del *delta hedging*. Infatti, per $dt \rightarrow 0$, la quantità di acquisti e vendite dell'azione sottostante tenderà ad infinito e con esse il costo della replica della *call*.

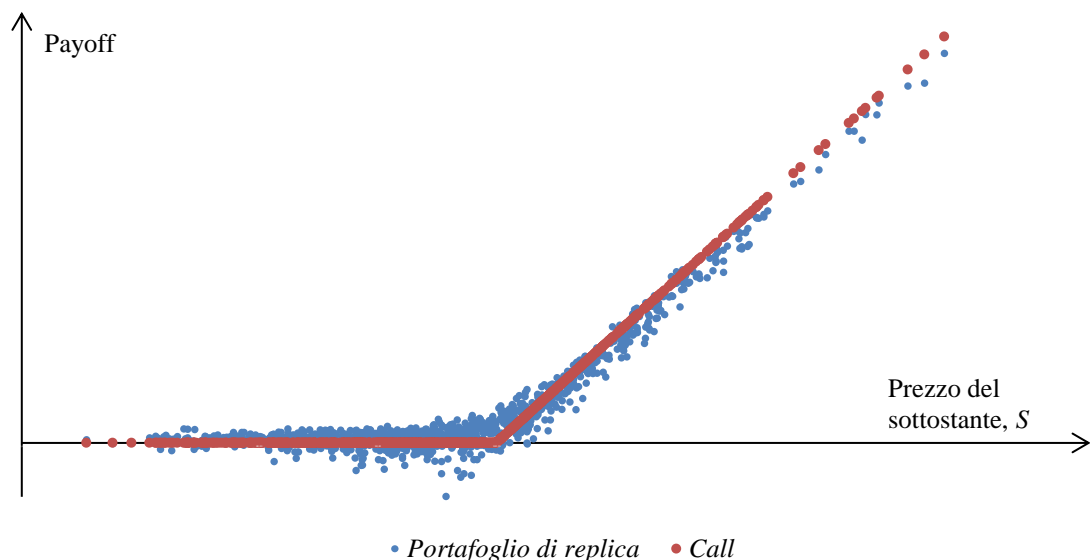


Figura 1.5 Delta Hedging con copertura settimanale.

¹³ Non considerati nell'applicazione degli esempi riportati, per questione di praticità.

¹⁴ Ad esempio, problemi di liquidità ed elevati *bid-ask spreads*.

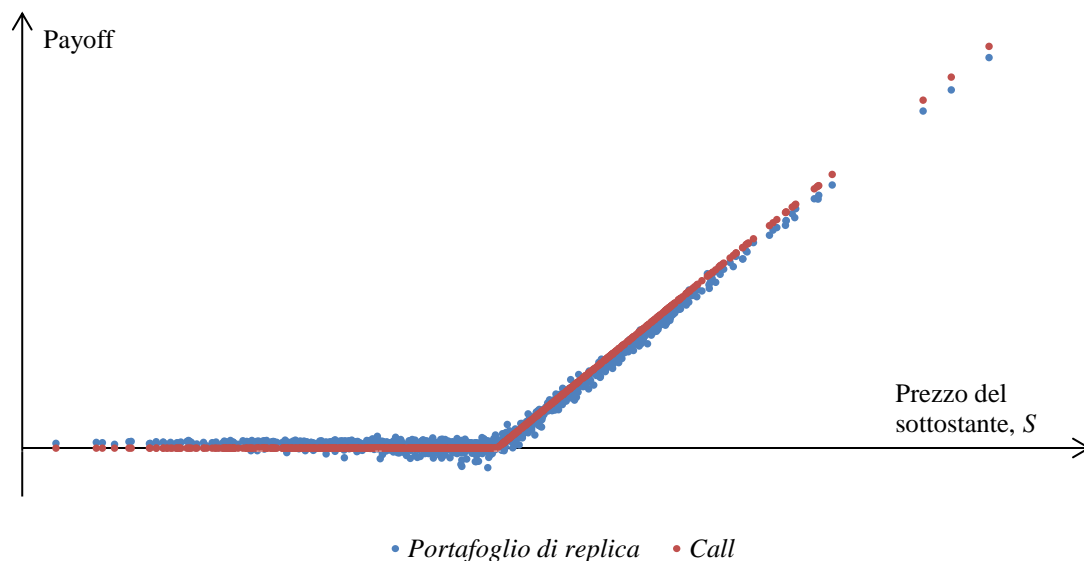


Figura 1.6 Delta Hedging con copertura giornaliera.

L'emittente dovrà quindi scegliere la frequenza di monitoraggio più appropriata in base alle proprie esigenze e preferenze: generalmente, il delta viene gestito a livello di portafoglio di opzioni (scritte sul medesimo sottostante) su base giornaliera, ma non esiste una regola chiara ed univoca per stabilire quale sia la frequenza "ottimale".

La presenza di costi di transazione comporta ulteriori problemi, perché produce un incremento dell'*hedging error*, ossia la differenza tra il valore del derivato e il valore del portafoglio di replica, che in ultima analisi è il dato che qualifica in maniera più evidente la *performance* della copertura. Alcuni studi e ricerche nel corso degli anni hanno indirizzato questo argomento in maniera diretta. Uno dei primi ad approfondire la questione fu ad esempio il professor Hayne E. Leland¹⁵, che nel 1985 propose un'estensione della strategia basata sul modello di Black, Scholes e Merton, permettendo di includere i *transaction costs* nell'analisi. Il suo semplice ragionamento parte dall'idea che questo fattore comporta la possibilità per l'*hedger* di acquistare il sottostante ad un prezzo più elevato rispetto a quello di equilibrio, e di venderlo ad un prezzo più basso. Questa caratteristica può essere tradotta in un aumento della volatilità di S : operando un'opportuna modifica alla varianza dell'*underlying*, Leland sviluppa una tecnica alternativa al *delta hedging* "classico", in grado di generare risultati migliori quando si considerano costi di transazione non nulli¹⁶.

Un altro elemento di interesse che emerge delle Figure 1.5 e 1.6, è la notevole concentrazione di osservazioni con un elevato *hedging error* per valori di S prossimi a K : come si può facilmente notare, la replica sembra essere più imprecisa quando il prezzo dell'azione alla scadenza rimane vi-

¹⁵ LELAND, H. E., "Option Pricing and Replication with Transaction Costs", *The Journal of Finance*, 40, 5 (Dicembre 1985), 1283-1301.

¹⁶ Una delle assunzioni fondamentali su cui si basa il modello di Black, Scholes e Merton è proprio l'assenza di costi di transazione.

cino a 95. Questo risultato è tutt'altro che casuale, ed è dovuto alla maggiore incertezza relativa all'esercizio della *call* da parte dell'acquirente: in quel *range* di valori per l'*underlying*, avvicinandosi alla scadenza, è più difficile stabilire con sicurezza se l'opzione terminerà *in* o *out-of-the-money* in T . Nel prossimo paragrafo tuttavia, si vedrà che è possibile ovviare a questo problema espandendo il *delta hedging*, in maniera tale da includere nella replica la derivata di secondo ordine: il *gamma*. Questo coefficiente infatti, assume valori più alti se il sottostante è prossimo allo *strike*, e si riduce rapidamente quando S tocca prezzi maggiori o minori di K .

Infine, sebbene i risultati fin qui commentati possano apparire positivi ed incoraggianti, nella realtà dei mercati finanziari le cose non sono mai così semplici come in teoria, ed il *delta hedging* può rivelarsi una tecnica di replica molto modesta in presenza di elementi – quali, ad esempio, i già citati costi di transazione – non esplicitamente considerati nel *framework* del modello di Black, Scholes e Merton. Assumere che il tasso privo di rischio e la volatilità dell'*asset* sottostante si mantengano costanti nel corso della vita dell'opzione potrebbe essere in certi casi un'ipotesi piuttosto limitante ed irrealistica, soprattutto quando si considerano derivati con scadenza molto lunga. Non è raro osservare casi in cui la volatilità di un'azione, di un indice o di altre tipologie di *underlying* cambi nel tempo, reagendo a *shocks* e notizie che impattano sulle aspettative degli operatori di mercato ed evolvendo in maniera più o meno prevedibile e misurabile. Sono numerosi, anche in questo caso, i tentativi di modellare questi fenomeni per poterli includere all'interno di modelli di *pricing* o di *hedging*, allo scopo di renderli più completi e connessi con il mondo reale. Alcuni tra i più noti, relativamente agli studi sul comportamento della varianza del sottostante, sono gli *ARCH* (*Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity*) e *GARCH* (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity*) *models*, proposti rispettivamente da Robert Engle – vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2003 – nel 1982¹⁷ e dal suo allievo Tim Bollerslev nel 1986¹⁸.

L'arrivo di nuova informazione sui mercati finanziari può provocare reazioni repentine nei prezzi degli strumenti quotati, specialmente se si verifica il c.d. "effetto sorpresa", ovvero lo spiazzamento delle aspettative degli operatori di fronte all'arrivo della notizia. Il modello BSM non è in grado di tenere conto di questi fenomeni, in presenza dei quali il *delta hedging* restituisce *performances* insoddisfacenti: l'approssimazione lineare è tanto meno precisa – come si è visto dalla Figura 1.4 – quanto maggiore è la variazione di S nell'intervallo dt . La possibilità che si verifichino rendimenti anomali in corrispondenza del rilascio di nuova informazione, rende ancora una volta necessario ricorrere a formulazioni alternative e più esaustive, che consentano di risolvere la questione. In tale contesto, è opportuno citare il modello diffusivo a salti non-browniani di Merton, presentato in un lavoro del 1976¹⁹, che estende il *framework* classico di BSM includendo un fattore stocastico gra-

¹⁷ ENGLE, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 4 (Luglio 1982), 987-1008.

¹⁸ BOLLERSLEV, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31 (Febbraio 1986), 307-327.

¹⁹ MERTON, R. C., "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 125-144.

zie al quale è possibile che la traiettoria del sottostante nel tempo effettui, appunto, dei “salti” improvvisi, ovvero scostamenti ingenti e repentini che rappresentano idealmente l’effetto di *shocks* o notizie inattese sul mercato.

L’idea generale, che emerge dall’analisi svolta sino a questo momento relativamente al *delta hedging*, è che sebbene il miglioramento rispetto alla semplice strategia a costo limitato sia evidente e la *performance* prodotta appaia nel complesso robusta, esistono diverse limitazioni pratiche che caratterizzano la realtà dei mercati finanziari e la rendono – in determinate circostanze – una tecnica incompleta e migliorabile.

Delta Hedging di Opzioni Esotiche

Come si è detto, il *delta hedging* costituisce la tecnica di copertura più diffusa al giorno d’oggi nella pratica dei mercati finanziari. I *traders* delle grandi banche che operano in derivati tengono in genere sotto controllo giornaliero il *delta* dei loro *books* (portafogli) di opzioni, e con minore frequenza monitorano anche il livello raggiunto dalle altre “greche” (ad esempio, gamma, vega e volga, rho).

La necessità di controllare il vega e il rho (rispettivamente la derivata del prezzo dell’opzione rispetto alla volatilità del sottostante ed al tasso d’interesse privo di rischio) deriva dal fatto che, diversamente da quanto postulato dal modello BSM, σ e r variano nel tempo così come il valore dell’*underlying*: di conseguenza è necessario che l’*hedger* monitori periodicamente le varie greche, per evitare di veder deteriorare la *performance* della propria copertura.

Il gamma invece – che verrà ripreso nel successivo paragrafo – esprime la derivata seconda del prezzo dell’opzione rispetto a S ed anche nel modello di Black, Scholes e Merton riveste un ruolo importante e significativo, perché fornisce in ultima analisi una misura della sensibilità del delta alle variazioni del sottostante: quanto più T è elevato tanto più Δ risulterà volatile, peggiorando l’efficacia complessiva del *delta hedging*.

Oltre alle opzioni *puts* e *calls plain vanilla* esaminate in precedenza, anche per alcune opzioni esotiche è possibile ricorrere al *delta hedging* a fini di copertura. Le *exotic options* sono strumenti generalmente complessi, il cui valore può dipendere ad esempio dal “percorso” compiuto dal sottostante prima della scadenza (e.g., opzioni americane, opzioni asiatiche, opzioni retrospettive...), dal valore di altre opzioni (e.g., opzioni a scelta, opzioni composte...), da due o più *underlyings* (e.g., opzioni di scambio, *basket options*...) o dal fatto che S raggiunga o meno un certo livello stabilito inizialmente (e.g., opzioni digitali, opzioni con barriera...).

Le esotiche possono risultare più semplici da coprire tramite *delta hedging* rispetto ad opzioni *plain vanilla* – come nel caso delle opzioni asiatiche – o anche più difficili – come per le opzioni con barriera.

Le *asian options*, che verranno riprese e discusse anche nel corso del Capitolo 2, sono opzioni scritte sul valore medio assunto dall’*asset* sottostante, calcolato in base a un certo numero di osservazioni antecedenti alla scadenza dello strumento. Poiché il *payoff* finale dipende dalla media degli

S_t , ogni ulteriore osservazione avrà un peso marginalmente inferiore sulla media con l'avvicinarsi di T . Di conseguenza, il prezzo dell'opzione diventerà meno sensibile alle variazioni del sottostante ed il *delta* tenderà a ridursi fino ad arrivare a zero.

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Valore azioni acquistate	Asian Call	Deposito risk-free	Azioni detenute	Portafoglio di replica
0	95,00	0,351	33,358	2,294	-31,064	33,358	2,294
1	98,78	0,459	10,621	3,512	-41,715	45,308	3,591
2	103,99	0,608	15,496	5,979	-57,251	63,192	5,940
3	97,67	0,367	-23,509	2,491	-33,798	35,841	2,045
4	97,49	0,331	-3,473	2,139	-30,357	32,302	1,946
5	104,24	0,519	19,579	4,800	-49,965	54,119	4,154
6	104,93	0,512	-0,722	4,872	-49,291	53,756	4,465
7	102,16	0,414	-10,008	3,268	-39,330	42,328	2,998
8	104,23	0,443	2,987	3,924	-42,355	46,172	3,818
9	104,42	0,423	-2,069	3,775	-40,327	44,188	3,862
10	108,55	0,458	3,747	5,506	-44,113	49,683	5,571
11	118,37	0,447	-1,306	10,146	-42,849	52,873	10,023
12	119,95	0,398	-5,857	10,767	-37,033	47,719	10,687
13	117,94	0,348	-5,835	9,904	-31,234	41,085	9,852
14	105,95	0,299	-5,261	5,713	-26,002	31,648	5,645
15	105,24	0,249	-5,213	5,489	-20,814	26,221	5,408
16	103,95	0,199	-5,166	5,164	-15,668	20,734	5,067
17	105,09	0,150	-5,230	5,386	-10,454	15,731	5,279
18	103,90	0,100	-5,178	5,211	-5,286	10,376	5,091
19	102,32	0,050	-5,105	5,060	-0,185	5,112	4,928
20	106,74	0,000	-5,334	5,282	5,148	0,000	5,149

Tabella 1.3 Delta hedging settimanale di una call asiatica.

La Tabella 1.3 mostra un'applicazione del *delta hedging* per una *call* asiatica ($S_0=95$, $K=100$, $\sigma=30\%$, $r=5\%$, $q=0\%$, $T=0,384$). La strategia di copertura viene ri-bilanciata, come nel caso della *plain vanilla call*, settimanalmente. Per sviluppare l'esempio è stata utilizzata la formula di valutazione per *arithmetic average options* (e relativo delta) suggerita da John Hull²⁰ e contenuta in *DerivaGem*. Come si evince dalla tabella, la replica di questo tipo di opzioni esotiche prevede che inizialmente si debba detenere una certa quantità di sottostante, per poi ridurre gradualmente l'esposizione ($\Delta \rightarrow 0$) man mano che si avvicina la scadenza dello strumento. Il risultato è in linea con l'intuizione teorica evidenziata precedentemente, e l'ottima *performance* registrata dalla tecnica sul *random path* simulato è indicativa del fatto che il *delta hedging* possa senz'altro rivelarsi un buon candidato per la copertura di opzioni asiatiche. Nel Capitolo 2, cambiando alcune assunzioni di fondo, si vedrà che anche una strategia di replica statica può produrre ottimi risultati, in certe condizioni addirittura migliori, per questo tipo di derivato.

²⁰ HULL, J. C., "Options, Futures and Other Derivatives – 9th ed.", Pearson, (2015), p. 609-610.

A differenza delle asiatiche, le opzioni con barriera sono invece alcuni degli strumenti più difficili da replicare (o da coprire), per via della discontinuità mostrata dal loro *payoff*, che è contingente al raggiungimento di un certo livello di prezzo da parte di S . Senza la necessità di specificare in questa sede ulteriori dettagli relativamente alle *barrier options* (la cui trattazione sarà ripresa nel Capitolo 3), anche in questo caso un esempio pratico può rivelarsi utile, per capire meglio le difficoltà incontrate dai *traders* che devono coprire questo tipo di opzioni.

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Valore azioni acquistate	Up and Out Call	Deposito risk-free	Azioni detenute	Portafoglio di replica
0	95,00	0,025	2,376	1,289	-1,087	2,376	1,289
1	95,27	0,028	0,320	1,345	-1,409	2,703	1,295
2	92,75	0,050	1,960	1,290	-3,370	4,592	1,222
3	87,11	0,072	1,990	0,949	-5,364	6,303	0,940
4	88,09	0,078	0,477	1,020	-5,846	6,851	1,005
5	90,46	0,082	0,359	1,214	-6,210	7,395	1,184
6	90,11	0,091	0,833	1,190	-7,050	8,199	1,149
7	87,49	0,096	0,460	0,929	-7,516	8,420	0,904
8	86,08	0,095	-0,108	0,758	-7,415	8,176	0,761
9	91,98	0,122	2,473	1,380	-9,895	11,210	1,315
10	96,27	0,123	0,114	1,934	-10,019	11,847	1,828
11	89,06	0,129	0,500	0,921	-10,528	11,459	0,931
12	89,25	0,135	0,530	0,865	-11,069	12,014	0,945
13	99,09	0,186	5,107	2,572	-16,186	18,446	2,259
14	103,82	0,125	-6,334	3,546	-9,868	12,992	3,124
15	107,23	0,020	-11,222	4,276	1,344	2,198	3,541
16	106,11	0,177	16,578	4,788	-15,233	18,753	3,519
17	117,17	-0,836	-118,706	2,509	103,458	-97,998	5,459
18	116,38	-1,061	-26,101	4,450	129,658	-123,435	6,219
19	119,73	-2,226	-139,521	0,601	269,339	-266,549	2,789
20	127,81	0,000	284,537	0,000	-14,940	0,000	-14,940

Tabella 1.4 Delta hedging settimanale di una *Up and Out call*.

Nella Tabella 1.4 viene esposta la copertura dinamica settimanale tramite delta per una *Up and Out call* ($S_0=95$, $K=100$, $\sigma=30\%$, $r=5\%$, $q=0\%$, $T=0,384$, $H=120$). Questa opzione restituisce lo stesso *payoff* di una normale *call plain vanilla* a meno che la barriera H non venga raggiunta o oltrepassata dall'*underlying asset* in qualsiasi momento precedente alla scadenza o in T , nel qual caso cesserebbe di esistere. La presenza della barriera crea quindi una discontinuità nel valore dello strumento e nel delta. Si noti infatti che alla settimana 19 il prezzo del sottostante è pari a 119,73 e l'*UO call* sta per giungere a scadenza *in-the-money*, il delta però è contro-intuitivamente negativo: una *standard call* ha sempre un delta maggiore di zero, tanto più se $S>K$ e la *maturity* è vicina. Nel caso dell'*UO call* però, la presenza della barriera genera un comportamento "anomalo" della greca, che assume un valore elevato e negativo. L'effetto più evidente si vede inoltre proprio alla scadenza, dove in base alla

simulazione S oltrepassa la barriera e l'*UO call* cessa di esistere; il portafoglio di replica invece non è in grado di seguire la dinamica dello strumento, dal quale si discosta nettamente²¹.

Si noti che anche qualora S_T fosse rimasto al di sotto di H (e.g., $S_T = 119$) si sarebbe comunque verificato uno scostamento significativo tra il valore finale della *barrier option* (che avrebbe restituito semplicemente $\text{Max}[S_T - K; 0] = 19$) e la copertura (che sarebbe risultata pari a 4,673). Appare quindi evidente come la natura dello strumento crei problemi alla replica dinamica dello stesso.

La scelta della *Up and Out call* per illustrare l'inaffidabilità del *delta hedging* rispetto alle opzioni con barriera non è casuale. Questa particolare opzione infatti, così come ad esempio la *Down and Out put*, è quella che si caratterizza per la più evidente discontinuità nel *payoff*, soprattutto in prossimità della scadenza: se S_t si trova appena sotto ad H (con $t \rightarrow T$), la *Up and Out call* è tecnicamente *in-the-money*, ma se (come nell'esempio in Tabella 1.4) il sottostante supera la barriera, il suo valore va a zero e cessa di esistere. Questa forte incertezza si riflette inevitabilmente sull'efficacia del *delta hedging*, ed apre la strada ad altre tecniche alternative di copertura, che siano in grado di far fronte al problema riscontrato. A tal proposito, il Capitolo 3 illustrerà e fornirà un'analisi puntuale delle strategie di replica statica maggiormente diffuse, che riescono in molti casi ad ottenere risultati ben più soddisfacenti rispetto alle tecniche dinamiche, e sono infatti molto utilizzate per questo genere di derivati.

1.3 DELTA-GAMMA HEDGING

Il gamma esprime la derivata seconda del valore di un'opzione rispetto al prezzo del sottostante. Nel caso di una *call plain vanilla*:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad (1.10)$$

Dove $n(d_1)$ è la derivata prima di $N(d_1)$, ed equivale alla funzione di densità normale standard. L'Equazione 1.10 restituisce il gamma di una *call* scritta su un sottostante che non paga dividendi²², che corrisponde ad una quantità sempre positiva. Il gamma misura inoltre – come si è detto – la sensibilità del delta alle variazioni di S , fornendo dunque in ultima istanza un'indicazione sull'efficacia del *delta hedging*. In precedenza era infatti stato osservato (Figure 1.5 e 1.6) che la *performance* restituita dalla replica dinamica risulta meno accurata quando il sottostante si trova nelle vicinanze del prezzo d'esercizio a scadenza. Questa osservazione si deve al fatto che Γ raggiunge i propri massimi proprio per valori di S prossimi a K : per avere un riscontro immediato di tale caratteristica, la Figura 1.7 mostra il valore del gamma di una *call plain vanilla* ($K=100$, $\sigma=20\%$, $r=5\%$, $q=0\%$, $T=0,384$) al variare del livello raggiunto dall'*asset* sottostante. Il gamma è rappresentato su un piano cartesiano e confrontato con il *payoff* dello strumento (che è raffigurato con una scala differente).

²¹ Un risultato analogo si sarebbe registrato anche se il sottostante avesse raggiunto H prima della scadenza.

²² La formula è facilmente modificabile nel caso in cui si voglia analizzare un'opzione il cui sottostante abbia $q \neq 0$.

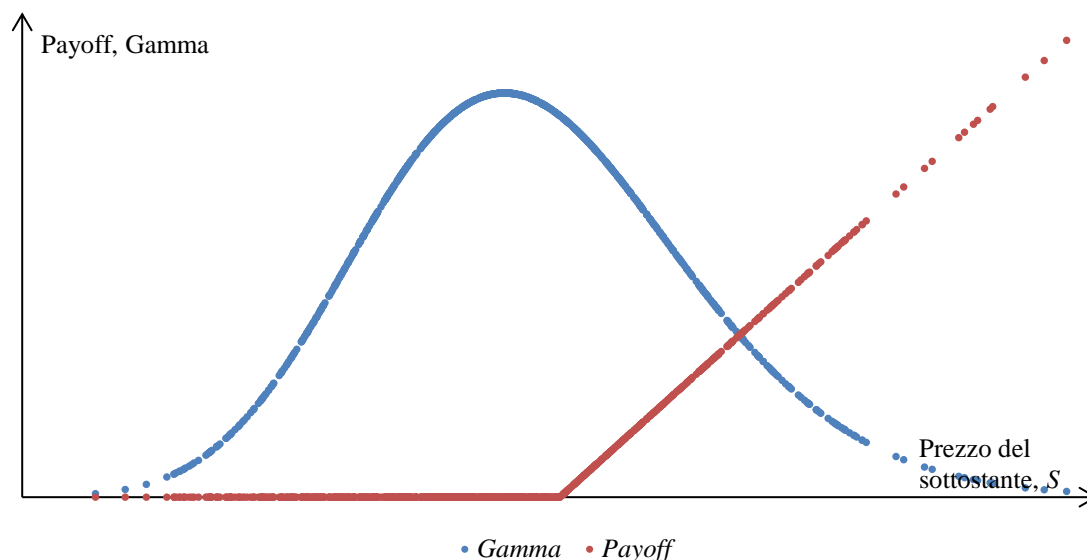


Figura 1.7 Gamma di una *call plain vanilla*.

Si nota facilmente che, per opzioni *at-the-money*, il valore assunto da Γ è elevato, e si riduce fino a zero per opzioni *deep-in* o *deep-out of-the-money*.

Un passo avanti rispetto al semplice *delta hedging* consiste pertanto nell'includere nel portafoglio di replica uno strumento ulteriore rispetto al sottostante, con cui azzerare periodicamente anche il gamma dell'esposizione dovuta all'opzione target: effettuare cioè, il cosiddetto *delta-gamma hedging*. A livello concettuale, il procedimento equivale ad aggiungere un ordine di espansione per la funzione valore del derivato da coprire, ed ottenere tramite la negoziazione di più strumenti un *match* non soltanto della pendenza ma anche della curvatura. A livello pratico, il *trader* deve:

- Assumere una posizione lunga o corta su un'opzione di replica, in modo da avere un gamma netto con l'opzione target pari a zero;
- Assumere una posizione lunga o corta sul sottostante, in modo da avere un delta netto con le due opzioni pari a zero;
- Investire o prendere a prestito al tasso *risk-free* l'ammontare necessario all'acquisto o alla vendita degli strumenti di copertura, al netto del premio incassato o pagato per l'opzione target;
- Ad ogni data di ribilanciamento, ricalcolare le quantità dell'opzione di replica e del sottostante da mantenere in portafoglio in modo tale da avere un'esposizione netta nulla al gamma e al delta.

Il *delta-gamma hedging* prevede l'aggiunta di un ulteriore strumento (oltre al sottostante e al deposito privo di rischio) rispetto al *delta hedging*, per poter replicare anche il secondo termine di espansione tra il target e il portafoglio di copertura. L'*underlying* infatti non è più sufficiente da solo a

Settimana dell'azione	Opzione Target				Opzione di replica				Deposito risk-free	Delta-Gamma Hedge	Delta Hedge			
	Prezzo dell'azione	Target Call	Delta	Gamma	Call di copertura	Delta	Gamma	Valore opzioni acquistate				Valore azioni acquistate	Valore opzioni detenute	Valore azioni detenute
0	95,00	337.610	35.547	3.325	46.158	5.551	1.108	138.565	1.793.842	138.565	1.793.842	-1.594.797	337.610	337.610
1	92,74	237.360	28.137	3.272	27.408	3.598	842	24.268	-438.835	106.546	1.312.424	-1.181.760	237.210	254.530
2	95,65	334.339	36.812	3.497	42.177	5.342	1.102	-30.132	546.166	133.831	1.899.676	-1.698.928	334.578	333.965
3	95,17	298.348	34.755	3.572	34.487	4.583	1.008	12.788	-128.135	122.218	1.762.018	-1.585.210	299.026	313.259
4	96,89	356.603	40.284	3.701	42.372	5.596	1.161	-15.028	379.889	135.131	2.173.741	-1.951.593	357.279	370.143
5	98,12	398.286	44.445	3.790	47.369	6.299	1.267	-9.341	310.337	141.727	2.511.683	-2.254.462	398.948	416.319
6	101,84	592.163	58.229	3.546	81.403	10.182	1.714	-75.178	1.178.139	168.380	3.785.137	-3.359.585	593.932	578.024
7	106,36	895.762	73.848	2.744	149.719	17.120	2.277	-129.253	1.706.951	180.435	5.660.015	-4.940.506	899.945	835.980
8	108,85	1.081.280	81.477	2.198	196.502	21.696	2.565	-68.406	1.052.245	168.410	6.844.562	-5.929.084	1.083.888	1.012.844
9	108,22	1.009.505	80.882	2.385	166.535	19.555	2.516	15.104	-57.754	157.832	6.747.159	-5.892.122	1.012.868	953.935
10	109,75	1.124.375	85.733	1.983	191.282	22.352	2.718	-41.708	776.317	139.578	7.618.978	-6.632.384	1.126.171	1.070.341
11	106,87	858.444	79.313	2.873	112.049	15.082	2.338	55.938	-923.893	137.700	6.495.577	-5.770.793	862.485	815.963
12	110,31	1.141.032	89.493	1.757	175.246	22.115	2.857	-107.597	1.667.436	107.767	8.372.010	-7.336.168	1.143.610	1.081.345
13	111,28	1.215.093	92.635	1.389	185.136	23.797	3.029	-28.977	649.013	84.873	9.094.579	-7.963.242	1.216.209	1.159.648
14	111,65	1.235.290	94.594	1.152	178.035	23.882	3.137	-16.211	457.121	65.406	9.581.982	-8.411.792	1.235.597	1.185.195
15	110,27	1.087.576	94.166	1.409	126.069	18.962	2.949	13.946	-79.163	60.261	9.383.861	-8.354.644	1.089.478	1.045.080
16	106,18	691.135	86.312	3.385	46.623	8.791	1.985	57.220	-1.463.272	79.506	7.572.586	-6.956.607	695.484	651.054
17	108,89	924.621	96.132	1.354	70.453	12.971	2.615	-83.679	1.970.752	36.465	9.737.170	-8.850.354	923.281	877.462
18	113,66	1.385.593	99.758	34	156.624	25.586	3.831	-79.672	1.149.441	1.392	11.313.108	-9.928.613	1.385.887	1.326.779
19	112,68	1.277.139	99.903	1	109.426	20.522	3.693	-944	41.373	29	11.256.115	-9.978.568	1.277.576	1.218.583
20	107,76	775.560	100.000	0	23.099	6.107	1.875	-6	10.933	0	10.775.506	-9.999.068	776.438	718.673

Tabella 1.5 Delta-gamma hedging con ribilanciamento settimanale.

garantire il *match* con il delta e il gamma dell'opzione, per due semplici motivi: primo perché un solo strumento non può comunque essere in grado di replicare due ordini di espansione, secondo – e più importante – perché il gamma del sottostante è nullo. Di conseguenza è necessario acquistare o vendere un'ulteriore opzione (o un qualsiasi derivato con $\Gamma \neq 0$) per completare l'*hedge*.

La Tabella 1.5 mostra un'applicazione del *delta-gamma hedging* con frequenza di ribilanciamento settimanale. Come in precedenza, l'opzione target è una *call plain vanilla* scritta su 100.000 unità dell'*asset* sottostante, ed i parametri sono specificati come per gli esempi condotti finora²³. Per le ragioni già illustrate, viene introdotto un nuovo strumento, una *call* europea standard con lo stesso *underlying* ma diverso prezzo d'esercizio ($K^*=120$) e scadenza più lunga ($T^*=0,5$). La scelta dell'opzione di replica è liberamente effettuata dal *trader*, ma in generale è preferibile che abbia caratteristiche non troppo differenti a quella da replicare e una *maturity* possibilmente maggiore. In ogni caso, come si è detto, l'unica condizione necessaria rispetto allo strumento di copertura è che abbia un gamma non nullo.

Le ultime due colonne della Tabella 1.5 mostrano la *performance* nel tempo del *delta-gamma hedge* e del *delta hedge*; quest'ultimo è stato riprodotto come in precedenza, calcolando semplicemente il delta dell'opzione target e replicandolo attraverso un'adeguata posizione sul sottostante; la computazione del valore dell'*hedging portfolio* è stata omessa in questo caso, per evitare confusione.

Il valore dell'opzione target è esposto nella terza colonna. Si nota immediatamente l'effetto positivo dato dall'aggiunta della *call* di replica, grazie alla quale si riesce ad ottenere una copertura quasi perfetta, nonostante la frequenza di ribilanciamento settimanale.

Due aspetti vanno però rimarcati: in primo luogo, le simulazioni dei prezzi dei vari strumenti coinvolti sono effettuate in base al modello di Black, Scholes e Merton, in cui le uniche variabili che possono variare da un periodo di osservazione all'altro sono S e t . Coprire l'esposizione dell'opzione target al sottostante fino al secondo ordine fa sì che – dato il *framework* di riferimento – quasi il 100% del rischio venga di fatto coperto, rendendo la replica approssimativamente esatta, soprattutto se si riducesse ulteriormente dt (e.g., giornaliero). Tuttavia, la realtà dei mercati è ben diversa. I tassi d'interesse, i tassi di dividendo e soprattutto le volatilità non sono parametri fissi, a volte neanche nel breve termine. Dunque, per coprire realmente l'esposizione dell'opzione target in maniera dinamica bisognerebbe innanzitutto espandere la funzione valore lungo diverse dimensioni, ed impiegare molti più strumenti per costruire un portafoglio di replica realmente efficace. In più, la necessità di affidarsi a BSM, come in questo caso, o ad altri modelli più sofisticati per stimare i parametri, produce inevitabilmente delle imprecisioni, dovute al fatto che la realtà non è mai totalmente modellabile in maniera esatta.

²³ Si confronti l'esempio in Tabella 1.2.

Il secondo aspetto riguarda invece qualcosa di ancora più concreto, e concerne il costo dato dall'inserimento di un ulteriore strumento nel portafoglio di copertura. In presenza di costi di transazione, la differenza positiva nella *performance* fornita dal *delta-gamma hedge* rispetto al semplice *delta hedge* potrebbe svanire rapidamente, portando l'*hedger* a rivalutare l'effettivo beneficio prodotto dall'aggiunta dell'opzione di copertura nel portafoglio. I costi di transazione sono una realtà di qualsiasi mercato, anche per i titoli più liquidi e in presenza di volatilità moderata: la necessità di ribilanciare dinamicamente le posizioni per mantenere nulla l'esposizione al delta e al gamma crea nella pratica un peggioramento significativo nel risultato finale della strategia. Per questo, i *traders* generalmente monitorano giornalmente il delta, ma non effettuano operazioni sul gamma (e sulle altre greche) con la stessa frequenza, andando ad intervenire soltanto quando il valore complessivo di portafoglio oltrepassa certi limiti prestabiliti.

In conclusione quindi, il *delta-gamma hedging* rappresenta un elegante miglioramento rispetto al *delta-hedging* se applicato nel contesto ideale ipotizzato da Black, Scholes e Merton. Tuttavia, la realtà dei mercati finanziari mette in evidenza tutti i problemi riscontrati da questa tecnica sul piano pratico. I due limiti principali – errore nella specificazione del modello di riferimento ed impatto dei costi di transazione – sono direttamente affrontati e risolti dalle strategie di replica statica che saranno introdotte nel Capitolo 2, per le opzioni ordinarie, e nel Capitolo 3, per le opzioni con barriera. Questi metodi permettono infatti di ridurre notevolmente il volume di scambi necessari per costruire e mantenere il portafoglio di copertura, ed in alcuni casi derivano da risultati *model-independent*, producendo un effetto chiaramente positivo sulla *performance* complessiva dell'*hedge*.

Delta-Gamma Hedging di Opzioni Esotiche

Il *delta-gamma hedging* può essere applicato, in maniera del tutto analoga a quanto mostrato per le opzioni *plain vanilla* europee, anche alle opzioni esotiche. Il procedimento da seguire è lo stesso: occorre innanzitutto individuare uno strumento in grado di riprodurre l'esposizione al gamma del target, e coprire poi il delta netto di portafoglio facendo *trading* sul sottostante.

Come per il *delta hedging*, alcune *exotic options* risultano più semplici da replicare con questa strategia dinamica ed altre meno. Le opzioni asiatiche, ad esempio, ottengono un beneficio modesto dall'aggiunta di un ulteriore strumento di replica, perché il loro delta è estremamente stabile e tende ad azzerarsi; di conseguenza, anche il gamma assume valori molto ridotti e l'impatto marginale sull'efficacia dell'*hedge* risulta poco significativo. La presenza di costi di transazione in questo caso potrebbe portare il *trader* a preferire il semplice *delta hedging*, intervenendo solo in caso di reale necessità per correggere il gamma di portafoglio.

Le opzioni con barriera invece hanno rivelato numerose difficoltà in rapporto alla copertura dinamica tramite delta, ed è interessante quindi considerare l'espansione di ordine superiore (Γ) per cercare di capire se la situazione possa migliorare o meno.

Settimana dell'azione	Opzione Target				Opzione di replica				Deposito risk-free	Delta-Gamma Hedge	Delta Hedge			
	Prezzo dell'azione	Target UO Call	Delta	Gamma	Call di copertura	Delta	Gamma	Valore opzioni acquistate				Valore azioni acquistate	Valore opzioni detenute	Valore azioni detenute
0	95	1,289	0,025	-0,006	1,916	0,190	0,013	-0,877	10,645	-0,877	10,645	-8,479	1,289	1,289
1	95,27	1,345	0,028	-0,007	1,968	0,194	0,014	-0,052	0,967	-0,953	11,643	-9,402	1,287	1,295
2	92,75	1,290	0,050	-0,005	1,522	0,161	0,012	0,092	-0,415	-0,645	10,920	-9,088	1,187	1,222
3	87,11	0,949	0,072	0,000	0,796	0,099	0,009	0,306	-3,615	-0,031	6,641	-5,788	0,822	0,940
4	88,09	1,020	0,078	-0,001	0,898	0,109	0,010	-0,018	0,701	-0,053	7,417	-6,477	0,887	1,005
5	90,46	1,214	0,082	-0,002	1,185	0,134	0,011	-0,177	2,303	-0,247	9,920	-8,610	1,063	1,184
6	90,11	1,190	0,091	-0,001	1,138	0,130	0,011	0,116	-0,431	-0,122	9,450	-8,303	1,026	1,149
7	87,49	0,929	0,096	0,003	0,834	0,103	0,010	0,343	-3,490	0,253	5,686	-5,164	0,776	0,904
8	86,08	0,758	0,095	0,006	0,699	0,090	0,009	0,228	-2,287	0,440	3,307	-3,109	0,638	0,761
9	91,98	1,380	0,122	0,000	1,401	0,152	0,012	-0,906	7,908	-0,023	11,442	-10,114	1,305	1,315
10	96,27	1,934	0,123	-0,008	2,169	0,208	0,014	-1,185	11,125	-1,221	23,100	-20,064	1,816	1,828
11	89,06	0,922	0,129	0,009	1,008	0,119	0,011	1,433	-18,987	0,866	2,383	-2,529	0,720	0,931
12	89,25	0,865	0,135	0,012	1,031	0,121	0,011	0,262	-2,368	1,148	0,020	-0,426	0,742	0,945
13	99,09	2,571	0,186	-0,013	2,812	0,249	0,015	-5,480	39,013	-2,349	39,035	-33,959	2,727	2,259
14	103,82	3,546	0,125	-0,037	4,162	0,323	0,016	-5,840	47,193	-9,317	88,092	-75,345	3,430	3,124
15	107,23	4,276	0,021	-0,061	5,360	0,380	0,017	-7,384	58,453	-19,383	149,438	-126,486	3,569	3,541
16	106,11	4,788	0,177	-0,064	4,945	0,361	0,017	-1,247	19,036	-19,130	166,914	-144,397	3,387	3,519
17	117,17	2,510	-0,836	-0,057	9,958	0,544	0,016	2,720	-52,979	-35,804	131,332	-94,277	1,251	5,459
18	116,38	4,448	-1,061	-0,140	9,533	0,532	0,016	-48,509	283,420	-82,785	413,867	-329,278	1,803	6,219
19	119,73	0,601	-2,226	-0,014	11,403	0,584	0,015	88,681	-628,846	-10,345	-203,066	210,571	-2,840	2,789
20	127,81	0,000	0,000	0,000	16,602	0,699	0,013	15,061	216,770	0,000	0,000	-21,058	-21,058	-14,940

Tabella 1.6 Delta-Gamma hedging settimanale di una Up and Out call.

La Tabella 1.6 ripropone la stessa simulazione per S mostrata nella Tabella 1.4, in base alla quale viene effettuato, con le medesime modalità con cui è stata costruita la Tabella 1.5, il *delta-gamma hedging* per la *Up and Out call* considerata al paragrafo precedente.

I risultati esposti evidenziano immediatamente un esito non previsto: il *delta-gamma hedge* peggiora la *performance* della copertura rispetto al *delta hedge* (riproposto nell'ultima colonna della Tabella 1.6, per facilitare il confronto tra le due strategie). Si noti che la *call* impiegata quale strumento di replica mantiene le stesse caratteristiche dell'esempio in Tabella 1.5 (medesimo sottostante dell'*UO call*, $K^*=120$, $T^*=0,5$). Come si spiega allora il risultato ottenuto? La ragione va ricercata nel comportamento del delta e del gamma dell'*Up and Out call* al variare di S ; per aiutare la discussione, la Figura 1.8 li rappresenta, mettendoli a confronto con il *payoff* a scadenza²⁴.

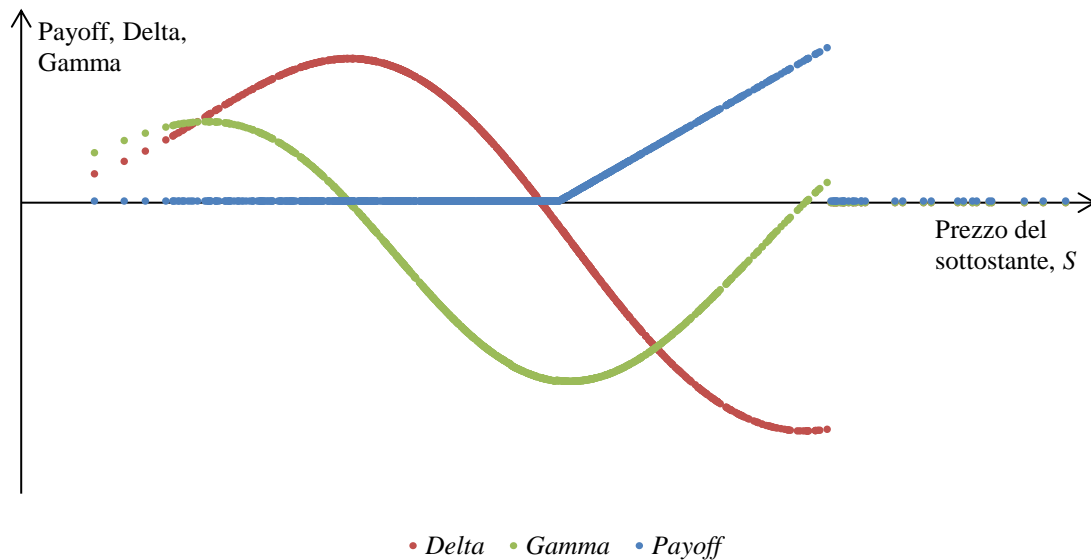


Figura 1.8 Delta, gamma e *payoff* a scadenza di un'*Up and Out call* in funzione di S .

Si vede facilmente che il delta e il gamma si comportano in maniera molto diversa rispetto a quelli di una *call plain vanilla*. Entrambi assumono valori negativi e sono estremamente volatili, specialmente quando il sottostante si trova tra il prezzo d'esercizio e la barriera, e Δ in particolare "salta" a zero appena S oltrepassa H .

Nell'esempio in Tabella 1.6, la *performance* del *delta-gamma hedge* si deteriora in maniera vistosa proprio quando il sottostante si trova tra lo *strike* e la barriera. Da quel momento – nello specifico a partire dalla settimana 17 – sia il delta che il gamma dell'*UO call* sono negativi e tendono (specialmente Δ) a ridursi, mentre il delta e il gamma della *call* europea di copertura sono al contrario positivi e soprattutto tendono a crescere (dato che S che aumenta). Tra una data di ribilanciamento

²⁴ Le tre variabili sono raffigurate su tre assi con scala differente, centrati in zero.

to e l'altra quindi, Δ e Γ del portafoglio complessivo²⁵ variano molto, perché le due opzioni si “muovono” in direzioni opposte: il valore dell'*UO call* inizia a ridursi (delta negativo) mentre quello della *call plain vanilla* cresce (delta positivo). Alla fine, questa differenza è anche più marcata che nel *delta hedge*, dove il sottostante mantiene ovviamente un delta costante e pari a 1 indipendentemente dal livello raggiunto dall'*asset* e dal tempo residuo alla scadenza, garantendo quindi in un certo senso maggiore stabilità alla strategia.

Si possono trarre dunque alcune conclusioni in merito alla tecnica in esame, applicata ad opzioni con barriera. In generale, vengono confermati i problemi già riscontrati in precedenza per quanto riguarda l'*hedging* dinamico delle *barrier options*, il cui *payoff* irregolare produce “anomalie” anche nel comportamento delle greche, con conseguenze negative sulla copertura tramite delta e gamma. Per migliorare il rendimento di queste strategie, in particolare del *delta-gamma hedging*, si potrebbe pensare di impiegare come strumento di replica da affiancare al sottostante un'altra opzione con barriera, che mostri un andamento simile nel prezzo e quindi nel Δ e nel Γ . Probabilmente una simile accortezza apporterebbe sensibili benefici all'efficacia della tecnica, ma potrebbe porre allo stesso tempo nuovi problemi. Ad esempio, un'opzione con barriera con caratteristiche simili a quella target potrebbe non essere disponibile sui mercati regolamentati; le *barrier options* sono infatti negoziate quasi esclusivamente *Over The Counter*. Inoltre, potrebbe essere molto costoso per il *trader* effettuare transazioni frequenti sul sottostante e sull'opzione di copertura, e la *performance* della strategia ne risentirebbe inevitabilmente.

Come si vedrà nel Capitolo 3, è possibile ottenere risultati migliori per l'*hedging* di opzioni con barriera ricorrendo ad alcune tecniche di replica statica, a causa della particolare natura di questi derivati.

²⁵ Inteso come il portafoglio totale del *trader*, dato dall'opzione target e dagli strumenti di copertura.

Capitolo 2

Replica Statica delle Opzioni Ordinarie

Dopo aver effettuato una disamina puntuale e dettagliata delle più diffuse metodologie di copertura dinamica per opzioni, l'obiettivo di questo secondo capitolo sarà quello di presentare alcuni esempi di replica statica, tecnica che – come illustrato in precedenza – si basa essenzialmente sull'idea di creare un portafoglio di strumenti finanziari (spesso *bond*, *futures* e opzioni *plain vanilla*) tale da essere in grado, tanto nel corso quanto al termine dell'*hedging period*, di ricalcare nella maniera più accurata possibile il valore dell'opzione target. Come si vedrà in seguito, queste tecniche possono essere applicate ad un'ampia varietà di opzioni, partendo dai prodotti standard fino ad arrivare alle cosiddette “esotiche”. Inoltre, la possibilità di ottenere in alcuni casi una replica esatta o quasi esatta, fa sì che l'impiego di queste metodologie possa risultare utile anche allo scopo di attribuire un prezzo per il derivato in analisi, che dovrà essere uguale (o sufficientemente simile) al valore del portafoglio di *hedging*, per impedire che si creino opportunità di arbitraggio sui mercati.

Infine, le tecniche di copertura statica si rivelano essere uno strumento migliore e maggiormente efficace – rispetto alle tecniche dinamiche discusse nel primo capitolo – soprattutto quando vengono meno gli assunti idealistici del *framework* ipotizzato da Black, Scholes e Merton, come ad esempio l'assenza di costi di transazione o la volatilità costante dell'*underlying*, “anomalie”¹ che possono produrre considerevoli effetti negativi per il *delta hedging*.

2.1 REPLICA STATICA ESATTA

Nell'introduzione al Capitolo 2 è stato già brevemente anticipato che in certi casi e per certi tipi di opzioni target, esiste l'opportunità di ottenere una replica statica esatta tramite la costruzione di un portafoglio di strumenti finanziari adeguatamente selezionato e bilanciato. Questa possibilità risulta pertanto molto importante sia ai fini dell'implementazione di *hedging strategies* efficaci, sia in sede di *pricing* di tali derivati. Di conseguenza, conoscere le tecniche e le relazioni che caratterizzano l'approccio di *static replication* è fondamentale non solamente per coloro i quali siano coinvolti nella copertura degli strumenti in questione, ma anche, ad esempio, per gli emittenti che debbano stabi-

¹ Questi fattori risultano anomali in riferimento alle assunzioni del modello di BSM, sebbene a livello empirico sia facile constatare che si tratti di fenomeni facilmente osservabili e riscontrabili in molteplici circostanze.

lire un prezzo di vendita o per gli investitori che desiderino individuare e sfruttare eventuali opportunità di arbitraggio. Si rende tuttavia necessario puntualizzare, ancora una volta, che sebbene le tecniche in esame sembrano funzionare in maniera teoricamente perfetta, la realtà dei mercati finanziari si caratterizza per la presenza di costi di transazione, differenziali di prezzo in acquisto e vendita (*bid-ask spreads*), differenti gradi di liquidità per diversi strumenti e altri fattori, che influenzano la relazione concettuale esatta che lega l'opzione target con il portafoglio di replica, trasformandola spesso in un'approssimazione estremamente precisa ma pur sempre caratterizzata da una certa percentuale di errore. D'altra parte, lo stesso principio vale (cfr. Capitolo 1 - Paragrafo 1.2) per il *delta hedging*, che permetterebbe all'emittente di ottenere una copertura esatta qualora fosse possibile per quest'ultimo effettuare continue transazioni² ($dt \rightarrow 0$): le imperfezioni di mercato rendono impossibile – come si è detto – questa eventualità.

Verranno ora discusse alcune metodologie di replica statica, con le quali è possibile riprodurre in maniera puntuale il valore dell'opzione target. Si noti che, sebbene il modello di riferimento con cui verrà impostata la discussione sia quello di Black, Scholes e Merton, i risultati ottenuti si dimostrano in realtà validi in un contesto ben più generale, e richiedono esclusivamente che sia rispettata l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio.

Put-Call Parity

La *Put-Call Parity* è una delle relazioni di parità maggiormente note nell'ambito dello studio delle opzioni finanziarie, e costituisce anche il fondamento per la più semplice ed immediata delle tecniche di *static replication*. L'equazione fondamentale che la caratterizza è la seguente:

$$c-p=S_0-Ke^{-rT} \quad (2.1)$$

Dove c e p rappresentano rispettivamente il valore in $t=0$ di una *call* e una *put* europee, scritte su un sottostante il cui prezzo corrente è pari a S_0 e con *strike price* pari a K . Nel caso di un titolo che paga dividendi, l'Equazione 2.1 diventa:

$$c-p=S_0-Ke^{-(r-q)T} \quad (2.2)$$

Con q che misura il *dividend yield* noto dell'azione.

Questa semplice relazione mette quindi in rapporto il valore di due opzioni *plain vanilla* europee con quello di un contratto *forward*, con cui il compratore si assicura in T l'acquisto di un'unità dell'*underlying* al prezzo K (stabilito all'emissione).

² Ignorando inoltre la presenza dei costi di transazione, che nel caso di *continuous trading* genererebbero un costo infinitamente alto per l'*hedger*.

Esistono vari modi per dimostrare la validità di questa formula. Uno dei più semplici ed immediati, consiste nell'analizzare e confrontare il *payoff* alla scadenza di due portafogli:

- Il Portafoglio A, composto da una posizione lunga sulla *call* e corta sulla *put* (equivalente al lato sinistro dell'Equazione 2.1 o 2.2).
- Il Portafoglio B, composto da una posizione lunga su un contratto *forward* per l'acquisto del titolo a scadenza al prezzo prefissato K (equivalente al lato destro dell'Equazione 2.1 o 2.2).

Data la composizione del Portafoglio A, il suo valore in T risulta uguale a:

$$\underline{\text{Portafoglio A}} = \text{Max}(S_T - K; 0) - \text{Max}(K - S_T; 0) = S_T - K \quad (2.3)$$

Per comprendere il risultato dell'Equazione 2.3, è sufficiente analizzare due possibili scenari. Infatti, se alla scadenza $S_T > K$, la *call* viene esercitata e paga al compratore $S_T - K$ mentre la *put* termina *out-of-the-money*; se invece $S_T < K$, si verifica la situazione opposta, in cui la *call* scade priva di valore e la *put* viene esercitata dall'acquirente, permettendo al venditore di ottenere $-(K - S_T) = S_T - K$.

Il *payoff* del Portafoglio B invece, che include solo il *forward contract*, è semplicemente $S_T - K$, indipendentemente dal prezzo dell'azione sottostante al termine dell'*holding period*: è facile quindi osservare che i due portafogli restituiscono esattamente il medesimo pagamento, risultando equivalenti per l'investitore. L'ultimo passaggio necessario per dimostrare la validità delle Equazioni 2.1 e 2.2 consiste nel calcolare il valore atteso dei *payoffs* sopra descritti³, e successivamente attualizzarlo per ottenere il valore in $t=0$, consentendo infine di giungere alla relazione stabilita inizialmente.

La *Put-Call Parity* viene spesso impiegata per definire il prezzo corrente di un'opzione *call* o *put* europea, sulla base delle quotazioni dei due strumenti complementari. La relazione può inoltre trovare utilizzo anche nel contesto della replica statica. Si supponga, ad esempio, che l'emittente di una *call* europea desideri coprire la propria esposizione e che esistano sul mercato una *put* e un contratto *forward* con caratteristiche analoghe⁴: in virtù del rapporto stabilito dalle Equazioni 2.1 e 2.2, in tali circostanze la vendita della *call* può essere coperta dall'istituzione finanziaria assumendo un'ulteriore posizione corta sulla *put* e sul *forward*⁵. La sola condizione necessaria affinché sia possibile sfruttare la *Put-Call Parity* in un'ottica di *static replication* pertanto, è che i tre derivati coinvolti nella strategia siano negoziabili sul mercato. In assenza di costi di transazione, l'emittente riuscirebbe ad ottenere un *hedge* perfetto, che non necessita di essere modificato o ri-bilanciato periodicamente prima della scadenza degli strumenti. Tuttavia, considerato il ridotto numero di negoziamenti in acquisto e in vendita che la strategia implica, anche l'esistenza di *transaction costs* non deterio-

³ L'Equazione 2.3 per il Portafoglio A, $S_T - K$ per il Portafoglio B.

⁴ Stesso sottostante, stesso prezzo d'esercizio e stessa scadenza.

⁵ Un'operazione del tutto simile si potrebbe effettuare anche qualora la strategia fosse rivolta alla copertura di un'opzione *put* europea.

rerebbe significativamente la *performance* della copertura, garantendo comunque un risultato estremamente accurato.

La Tabella 2.1 sintetizza le quattro strategie di copertura per opzioni *plain vanilla* europee implicate dalla *Put-Call Parity*, specificando l'opportuna composizione del portafoglio di *hedging* a seconda del tipo di esposizione assunta da un ipotetico investitore.

<i>Esposizione</i>	<i>Portafoglio di replica</i>
<i>Call Lunga</i>	<i>Put Lunga + Forward Lungo</i>
<i>Put Lunga</i>	<i>Call Lunga + Forward Corto</i>
<i>Call Corta</i>	<i>Put Corta + Forward Corto</i>
<i>Put Corta</i>	<i>Call Corta + Forward Lungo</i>

Tabella 2.1 Replica Statica tramite *Put-Call Parity*.

In conclusione, le Equazioni 2.1 e 2.2 stabiliscono una relazione tanto semplice e intuitiva quanto importante, tra i prezzi correnti di una *call*, una *put* e un contratto *forward* che abbiano caratteristiche analoghe tra di loro. Questo risultato illustra di fatto come sia possibile replicare uno dei tre strumenti attraverso una combinazione dei due rimanenti: per tale motivo, viene spesso impiegato in ambito di *pricing*, ma può costituire anche un'utile tecnica di *static hedging*. Più avanti nel presente capitolo si vedrà quali possono essere i problemi all'attuazione di queste strategie e come adottare delle metodologie alternative per poterli risolvere. La *Put-Call Parity* si rivelerà utile in ogni caso per poter gestire con facilità i risultati prodotti dai modelli più sofisticati. In particolare, quando una tecnica dovesse essere applicabile, ad esempio, ad una *call* europea, la relazione di parità permetterebbe di estendere l'approccio rapidamente ad una *put* con gli stessi parametri, e viceversa.

Replica Statica delle Opzioni «a scelta»

Le *chooser options* sono opzioni esotiche caratterizzate dal fatto che, trascorso un certo periodo T_1 , il compratore ha la facoltà di decidere se “trasformare” l'opzione acquistata in $t=0$ in una *call* o in una *put* europea, con prezzo d'esercizio K fissato all'emissione e scadenza $T_2 (>T_1)$. La facoltà di effettuare questa scelta (da cui proviene il nome del derivato), costituisce un'ulteriore vantaggio per il possessore rispetto all'acquisto di una semplice opzione *plain vanilla*. Di norma, l'acquirente di una *simple chooser*⁶ prevede infatti che la volatilità del sottostante aumenterà, senza però riuscire ad anticipare con esattezza la direzione futura (in aumento o in riduzione) di S . L'opzione a scelta consente di ottenere un ritorno positivo nel caso in cui la previsione si riveli corretta: concettualmente è simile all'acquisto di uno *straddle*, ma risulta meno costosa e quindi senz'altro più attraente agli occhi degli investitori.

⁶ Una *simple chooser* è caratterizzata dallo stesso prezzo d'esercizio K per la *call* e la *put*.

Uno degli aspetti interessanti delle *chooser options* è che quando lo *strike price* e la scadenza delle opzioni europee (*call* e *put*) sottostanti coincidono, e se l'*underlying asset* è un titolo che non paga dividendi, il suo *payoff* si può facilmente replicare attraverso un portafoglio composto da:

- Una *call* con scadenza T_2 e prezzo d'esercizio K .
- Una *put* con scadenza T_1 e prezzo d'esercizio $Ke^{-r(T_2-T_1)}$.

Per dimostrare questo risultato si può ricorrere alla *Put-Call Parity*⁷ – che è stata definita in precedenza tramite le Equazioni 2.1 e 2.2 – la quale esplicita l'eguaglianza matematica tra la *chooser* e il *package* appena descritto. Un'altra strada consiste invece nell'andare ad analizzare il valore dell'opzione a scelta e del portafoglio di replica a seconda dello scenario che potrebbe verificarsi, e confermare che essi coincidono in qualsiasi situazione. Questo secondo metodo è certamente più lungo, ma costituisce un esercizio utile e chiaro per illustrare la validità della relazione in esame.

Prima di procedere è tuttavia necessario specificare un'ulteriore assunzione, che deve essere rispettata per consentire l'effettivo funzionamento della replica. Si ipotizza infatti che alla *chooser date* – la data in cui l'acquirente deve scegliere se ricevere una *call* o una *put* europea – il compratore deciderà di ottenere l'opzione che in quel momento sarà *in-the-money forward*. Cosa significa? Significa semplicemente optare per il più “costoso” dei due derivati, quello cioè che il mercato reputa avere maggior valore (in T_1) perché il *payoff* futuro atteso (in T_2) è più elevato. In altri termini, si assume quindi che l'acquirente effettui la propria scelta basandosi su una logica di massimizzazione prettamente economica, ipotesi tutt'altro che infondata sia a livello teorico che pratico.

In concreto dunque, la decisione dipenderà dal valore assunto dal sottostante alla *chooser date* (S_1), opportunamente rapportato a K . La Tabella 2.2 mostra i possibili scenari in T_1 , definendo la contestuale opzione dell'investitore in favore della *call* o della *put*.

Scenario	Call	Put	Decisione
$S_1 e^{r(T_2-T_1)} = F_1 > K$	<i>In the money forward</i>	<i>Out of the money forward</i>	Call
$S_1 e^{r(T_2-T_1)} = F_1 < K$	<i>Out of the money forward</i>	<i>In the money forward</i>	Put

Tabella 2.2 Decisione alla *chooser date*, T_1 .

Come si può notare, il prezzo d'esercizio viene confrontato con il prezzo *forward* in T_1 con scadenza T_2 (F_1), per stabilire quale delle due opzioni sia *in the money forward* alla *chooser date*.

A questo punto, si può proseguire analizzando i due scenari proposti ed il relativo valore del portafoglio di replica definito in precedenza. Nel primo caso ipotizzato, si vede che:

$$S_1 e^{r(T_2-T_1)} > K \rightarrow S_1 > Ke^{-r(T_2-T_1)}$$

⁷ Questo è il metodo utilizzato da Hull (“Opzioni, Futures e altri Derivati”, 9ª Ed. – Edizione Italiana a cura di E. Barone, pag. 635).

Quindi la *put* con *strike price* $Ke^{-r(T_2-T_1)}$ scade priva di valore in T_1 . Rimane in portafoglio pertanto solo la *call*, che in base alla Tabella 2.2 coincide esattamente con la scelta effettuata dall'acquirente sotto questo scenario: il *package* restituisce lo stesso risultato della *chooser*, poiché entrambi sono rappresentati, di fatto, dal medesimo strumento⁸.

Infine, per dimostrare l'uguaglianza è ora sufficiente far vedere come quest'ultima sia valida anche nel secondo caso, ovvero quando:

$$S_1 e^{r(T_2-T_1)} < K$$

In tali circostanze, l'esercizio della *put* in T_1 consentirà all'acquirente di ottenere $Ke^{-r(T_2-T_1)}$ in *cash* e una posizione corta su un'unità del sottostante, $-S_1$. Tra la *chooser date* e la scadenza, il compratore investirà l'ammontare ricevuto al tasso privo di rischio fino a T_2 , ottenendo:

$$Ke^{-r(T_2-T_1)} e^{r(T_2-T_1)} = K$$

Inoltre, la *short position* sull'*underlying asset* verrà mantenuta, così che il *payoff* totale in T_2 , considerando anche la *call* inclusa nel portafoglio di replica, sarà pari a:

$$\text{Max}[S_2 - K] + K - S_2 = \text{Max}[K - S_2]$$

Il risultato a destra dell'equazione⁹, a ben vedere, non è altro che il *payoff* di una *put* con prezzo d'esercizio K , esattamente lo strumento in cui l'acquirente aveva deciso di "trasformare" la *chooser* in T_1 , nello scenario in analisi (cfr. Tabella 2.2). Anche in questo caso l'opzione a scelta restituisce lo stesso pagamento del *package*, che risulta quindi un valido metodo di replica statica, utilizzabile ai fini di *pricing* e *hedging* di una *simple chooser*.

Qualora il titolo sottostante sia un'azione che paga un *dividend yield* noto, è possibile costruire un portafoglio del tutto analogo ma più generale rispetto a quello definito per il caso in cui $q=0$, che in particolare risulta composto da:

- Una *call* con scadenza T_2 e prezzo d'esercizio K .
- $e^{-q(T_2-T_1)}$ *puts* con scadenza T_1 e prezzo d'esercizio $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$.

Si può dimostrare che il *package* equivale all'opzione a scelta ricorrendo ancora una volta alla *Put-Call Parity* o esaminando singolarmente i possibili scenari, come fatto in precedenza.

⁸ Una *call option* con scadenza T_2 e prezzo d'esercizio K .

⁹ Risultato che deriva dall'applicazione della *Put-Call Parity*, illustrata precedentemente.

2.2 REPLICA STATICA DELLE OPZIONI PLAIN VANILLA EUROPEE

L'analisi fin qui svolta ha posto l'enfasi su alcune importanti relazioni, stabilite nell'ambito dello studio delle opzioni finanziarie, che costituiscono soluzioni interessanti specialmente in un'ottica di *derivatives pricing*. La *Put-Call Parity*, ad esempio, sancisce un collegamento tanto semplice ed intuitivo quanto utile e fondamentale tra i prezzi di due opzioni europee e di un contratto *forward* scritti sullo stesso sottostante. Come si è visto e discusso precedentemente, tale risultato può essere impiegato (almeno a livello concettuale) anche per implementare delle strategie di replica statica, poiché consente di riprodurre con esattezza il *payoff* di uno dei tre strumenti attraverso l'acquisto o la vendita contestuale dei due rimanenti.

Tuttavia, un forte limite all'impiego di questa tecnica a fini di copertura sta nel fatto che, per costruire il portafoglio di replica, l'*hedger* si troverebbe costretto ad utilizzare dei derivati con caratteristiche definite in modo rigido ed eccessivamente vincolante: ad esempio, dovrebbe assicurarsi che tutti gli strumenti abbiano la medesima scadenza e prezzo d'esercizio dell'opzione *target*. Rispettare tale condizione può risultare non semplice, soprattutto quando si considerano opzioni poco liquide o negoziate in mercati *OTC*, che sono spesso caratterizzate da specifiche contrattuali non-standard, concordate direttamente tra l'istituzione emittente e l'investitore che desidera acquistarle. Un'ulteriore e ancor più rilevante questione deriva poi dall'impossibilità di applicare la *Put-Call Parity* a livello di portafoglio: questo è certamente l'aspetto più problematico, dato che – per ovvie ragioni – i *traders* delle grandi banche d'investimento non possono effettuare la copertura a livello di singolo contratto per ogni strumento contenuto nei loro *books*. In tal senso, si pensi all'enorme costo che comporterebbe una gestione dell'*hedging* effettuata individualmente per ciascuna opzione negoziata dall'istituzione finanziaria, piuttosto che una replica dinamica tramite delta applicata direttamente all'intero portafoglio di derivati scritti sul medesimo *underlying asset*.

Gli aspetti fin qui discussi quindi, spiegano perché la *Put-Call Parity* può difficilmente essere considerata un'utile metodo di *static replication* nella pratica. Allo scopo di aggirare alcuni di questi limiti, sono state pertanto proposte diverse alternative, più sofisticate e complesse, che garantiscono maggiore libertà per l'*hedger* permettendogli di mettere in piedi delle soluzioni di copertura efficaci e flessibili.

I successivi paragrafi, illustreranno due diversi modelli di replica statica proposti rispettivamente da Liuren Wu e Jingyi Zhu (2011) e Peter Carr e Liuren Wu (2003), modelli che superano alcuni dei problemi fin qui evidenziati e che di conseguenza si propongono quali approcci alternativi al *dynamic hedging* per la copertura di opzioni *plain vanilla* europee. La *Put-Call Parity* costituisce in ogni caso un aiuto essenziale per estendere facilmente i risultati ottenuti mediante l'attuazione di strategie più complesse tra strumenti di diversa natura.

2.3 IL MODELLO DI WU E ZHU (2011)

In un *working paper* pubblicato nel 2011¹⁰, i professori Liuren Wu e Jingyi Zhu sviluppano un nuovo metodo di replica statica per opzioni, partendo da un'idea estremamente intuitiva ed interessante: gli autori sostengono infatti che la maniera migliore per gestire il rischio proveniente da un'esposizione in derivati, sia quella di effettuare l'*hedge* impiegando dei contratti che abbiano caratteristiche simili (*nearby contracts*) allo strumento *target*, poiché condivideranno necessariamente rischi della stessa natura con esso, indipendentemente dall'evoluzione del sottostante o dal possibile cambiamento nel tempo delle altre variabili coinvolte (tassi d'interesse, volatilità, *dividend yield*...). Un ulteriore aspetto fondamentale di tale approccio, risiede nel fatto che la valutazione dell'esposizione al rischio è *model-independent*, ovvero non è necessario per l'*hedger* specificare delle formule o delle assunzioni per quantificare esplicitamente i parametri di copertura. Nell'applicazione del *delta hedging*, la misura di riferimento è ovviamente il delta dell'opzione, che serve a stabilire la quantità di sottostante da detenere ad ogni *monitoring date* per replicare il contratto *target*; il delta a sua volta dipende imprescindibilmente dal modello assunto per descrivere il processo seguito dall'*underlying asset* nel tempo: nel caso "classico" in cui si ipotizza che S evolva secondo un moto browniano geometrico con volatilità e tasso di interesse privo di rischio costanti, Black, Scholes e Merton dimostrano ad esempio che il delta sia uguale a $N(d_1)$. Tuttavia, affidarsi ad un modello teorico per stimare i parametri di *hedging*, significa accettare l'esposizione ad un'altra fonte di rischio – c.d. *model misspecification* – ossia il rischio che il modello utilizzato si riveli inadeguato a rappresentare correttamente la realtà. Il delta stimato tramite la formula di BSM sarà quindi diverso, ad esempio, da quello ottenuto tramite il modello diffusivo a salti di Merton (1976) o tramite il modello *CEV* (*Constant Elasticity of Variance*), e tutti saranno sicuramente differenti (ma ragionevolmente vicini) al delta "reale"¹¹.

L'approccio proposto da Wu e Zhu non richiede l'esplicita assunzione di un modello per calcolare le variabili di copertura, evitando così all'*hedger* la responsabilità di effettuare una scelta complessa e potenzialmente in grado di ridurre l'efficacia della strategia implementata.

Ulteriori vantaggi di questa tecnica sono senz'altro la sua semplicità, flessibilità e la possibilità di estenderne l'applicazione a opzioni di tipo diverso da quelle analizzate dagli autori del *paper*; ciascuno di tali aspetti verrà maggiormente trattato ed approfondito in seguito.

Derivazione del modello

Il modello parte dalla costruzione di un *maturity-strike triangle* di opzioni, che comporranno il portafoglio di replica per l'opzione *target*. Il "triangolo" viene chiamato così dagli autori perché le tre opzioni che lo compongono corrispondono ai tre vertici della figura, in un'ideale rappresentazione lungo le dimensioni della scadenza (T) e del prezzo d'esercizio (K).

¹⁰ WU, L. e ZHU, J., "Simple Robust Hedging with Nearby Contracts.", *SSRN Working Paper Series* (2011).

¹¹ Il delta calcolato con un ipotetico modello in grado di prevedere con esattezza l'andamento di S nel tempo.

Le tre opzioni di replica possono avere differenti *strikes* e *maturities* tra loro e anche rispetto all'opzione *target*: tuttavia, per ragioni di semplicità e per meglio rappresentare la realtà (in cui sono normalmente disponibili un numero limitato di prezzi d'esercizio ma soprattutto di scadenze), Wu e Zhu si concentrano su un caso particolare di triangolo, in cui $K_d < K_c < K_u$ e $T_o \neq T_c$, ossia quando l'opzione *down* e l'opzione *up* scadono in T_o , mentre l'opzione *centre* scade in T_c . Tramite questo portafoglio di *hedging*, si ottiene la replica della *target option*¹², ma è opportuno rimarcare che il risultato a cui giungono gli autori si può ottenere anche in un contesto più generale¹³. Un esempio di triangolo con le caratteristiche appena definite è mostrato in Figura 2.1.

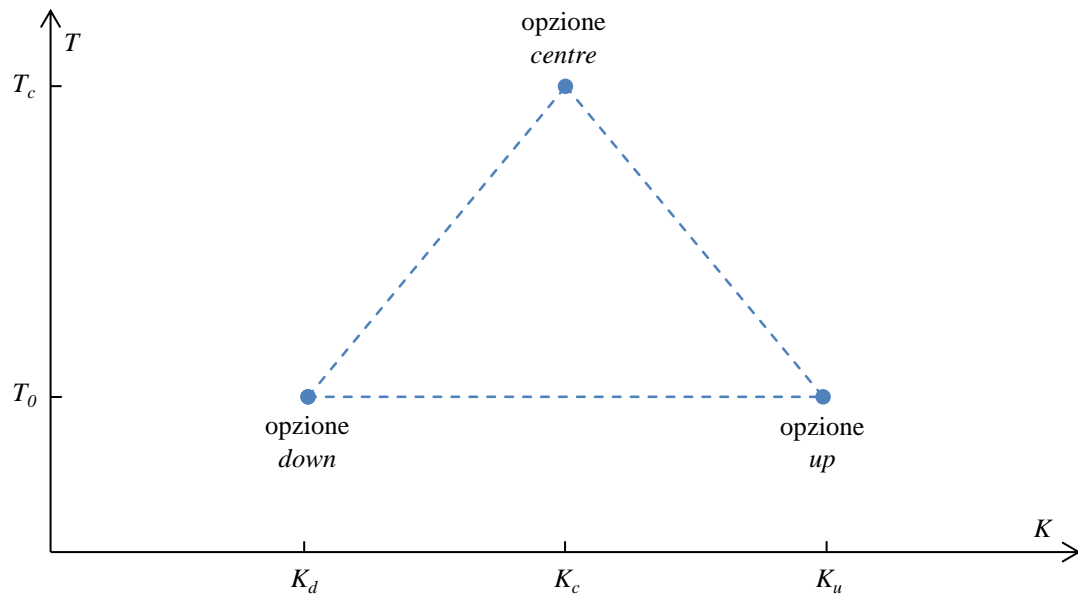


Figura 2.1 Esempio di triangolo con $T_c > T_o$.

Come si può notare osservando il grafico sovrastante, le tre opzioni di replica formano in effetti un triangolo, da cui il nome scelto da Wu e Zhu per identificare il loro modello. Ovviamente, rispettando l'unico vincolo dato dalle condizioni poste in precedenza, è possibile generare un numero infinito di triangoli – e quindi di portafogli di *hedging* – per ciascuna *target option*: questo aspetto costituisce un vantaggio notevole per i *traders* che desiderino ricorrere alla tecnica in analisi a fini di copertura, garantendo un elevato grado di elasticità e flessibilità nell'attuazione della strategia.

Per derivare il modello, il primo passo consiste nell'effettuare un'espansione in serie di Taylor sulle quattro opzioni coinvolte, lungo le dimensioni della scadenza (al primo ordine) e del prezzo

¹² L'opzione *target* ha prezzo d'esercizio K e scadenza T .

¹³ Ovvero, senza imporre alcun vincolo alle scadenze o ai prezzi d'esercizio delle tre opzioni che compongono il triangolo.

d'esercizio (al secondo ordine) ed intorno ad un punto iniziale comune $(K, T_0)^{14}$. Così facendo, si ottiene un sistema di quattro equazioni come segue:

$$\begin{aligned} c(K, T) &\cong c(K, T_0) + c_T(K, T_0)(T - T_0) \\ c(K_d, T_0) &\cong c(K, T_0) + c_K(K, T_0)(K_d - K) + \frac{1}{2} c_{KK}(K, T_0)(K_d - K)^2 \\ c(K_u, T_0) &\cong c(K, T_0) + c_K(K, T_0)(K_u - K) + \frac{1}{2} c_{KK}(K, T_0)(K_u - K)^2 \\ c(K_c, T_0) &\cong c(K, T_0) + c_K(K, T_0)(K_c - K) + c_T(K, T_0)(T_c - T_0) + \frac{1}{2} c_{KK}(K, T_0)(K_c - K)^2 \end{aligned}$$

Dove c_X e c_{XX} rappresentano rispettivamente la derivata prima e seconda della funzione c rispetto alla variabile X (con X che può corrispondere alternativamente a K o a T); a sua volta, c indica la generica funzione valore per l'opzione *target* e per le opzioni che formano il triangolo. Si può notare quindi, che l'espansione genera quattro termini: $c(K, T_0)$, $c_K(K, T_0)$, $c_{KK}(K, T_0)$ e $c_T(K, T_0)$. Lo *step* successivo è pertanto quello di trovare i pesi w_i (con $i=d, c, u$) da attribuire a ciascuna delle opzioni che compongono il triangolo in modo tale da far corrispondere i termini di espansione tra il portafoglio di replica e la *target option*. Tuttavia, non è possibile risolvere il sistema di quattro equazioni con tre sole incognite¹⁵. Si rende dunque necessario, prima di procedere, specificare l'unica assunzione proposta da Wu e Zhu per ridurre il numero di equazioni linearmente indipendenti da quattro a tre e poter proseguire con la risoluzione del sistema. Sfruttando la definizione di volatilità locale suggerita da Dupire (1994), gli autori ottengono una relazione tra la derivata seconda parziale della funzione valore rispetto a K e la derivata prima parziale rispetto a T :

$$c_{KK}(K, T_0) = \frac{2}{\sigma^2(K, T_0) K^2} c_T(K, T_0) \quad (2.4)$$

Grazie alla sostituzione effettuata attraverso l'Equazione 2.4, il sistema diventa risolvibile e la replica può essere effettuata. La derivazione del collegamento appena proposto tra c_{KK} e c_T non sarà oggetto della presente tesi; ai fini dell'analisi del modello in esame, è sufficiente sapere che la definizione di volatilità locale proposta da Dupire risulta efficace in un elevato numero di situazioni ed è valida senza la necessità di condizioni restrittive o irrealistiche.

Procedendo con la risoluzione del sistema, si ottengono, per i termini $c(K, T_0)$ e $c_K(K, T_0)$, le seguenti equazioni:

¹⁴ Gli autori dimostrano successivamente che la scelta del punto di riferimento iniziale per l'espansione non impatta sul valore dei pesi w_i attribuiti alle opzioni che compongono il triangolo. La scelta in questo caso ricade quindi su (K, T_0) solamente per questioni di praticità, ma è bene sapere che qualsiasi altro generico punto (K, T_*) porterebbe al medesimo risultato.

¹⁵ Le incognite per le quali risolvere il sistema, come detto, sono i pesi da assegnare a ciascuna opzione di replica.

$$1 = w_d + w_c + w_u$$

$$0 = w_d(K_d - K) + w_c(K_c - K) + w_u(K_u - K)$$

L'unione di questi due risultati, produce un'ulteriore relazione:

$$K = w_d K_d + w_c K_c + w_u K_u$$

Da cui si evince che la media ponderata dei prezzi d'esercizio delle opzioni appartenenti al triangolo deve essere uguale al prezzo d'esercizio dell'opzione *target*. Infine, imponendo l'uguaglianza rispetto all'ultimo termine, $c_T(K, T_0)$, si ha:

$$(T - T_0) = \frac{1}{\sigma^2(K, T_0) K^2} \sum_i w_i (K_i - K)^2 - w_c (T_0 - T_c), \quad i = d, c, u$$

Per semplificare l'esposizione, Wu e Zhu definiscono due misure aggiuntive di *relative spacing* per i prezzi d'esercizio (d_i) e per le scadenze (α) delle quattro opzioni coinvolte, come segue:

$$d_i = \frac{(K_i - K)}{K \sigma(K, T_0) \sqrt{T - T_0}}$$

$$\alpha = \frac{T_0 - T_c}{T - T_0}$$

Tali variabili assumono un significato ben preciso, ma vengono esplicitate fundamentalmente per consentire una rappresentazione più chiara del sistema, che si presenta infine in una forma comprensibile e semplice da risolvere:

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_c \\ w_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ K_d & K_c & K_u \\ d_d^2 & d_c^2 - \alpha & d_u^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ K \\ 1 \end{bmatrix}$$

La raffigurazione del sistema in forma matriciale, illustra in maniera semplice e diretta la soluzione di quest'ultimo, e permette di dare risalto ad alcuni aspetti interessanti della tecnica. Nel dettaglio, si può facilmente notare che i pesi w_i non dipendono né da t (la data di valutazione) né da S_t (il prezzo corrente del sottostante). Di conseguenza, i parametri del modello derivano esclusivamente da variabili costanti nel tempo, garantendo di fatto la natura statica della strategia di copertura. Tuttavia, dal momento che – come si è visto in precedenza – è stata sfruttata la definizione di volatilità locale, $\sigma(K, T_0)$, per ridurre il numero dei termini e consentire la risoluzione del sistema, è fondamentale che

anche quest'ultima rimanga fissa al variare di t . Altrimenti, i pesi w_i sarebbero differenti ad ogni data di monitoraggio e si renderebbe opportuno modificare periodicamente il triangolo per mantenere effettiva la replica, che assumerebbe però in quel caso una natura dinamica. Gli autori assumono pertanto che $\sigma(K, T_0)$ sia costante nel tempo per implementare staticamente la loro strategia. Questa è un'ipotesi forte ma allo stesso tempo ammette l'esistenza di una *volatility surface* – seppure invariante rispetto a t – consentendo di superare almeno in parte i limiti derivanti dal *framework* postulato da Black, Scholes e Merton.

Analisi del modello

Dopo aver illustrato la derivazione e le caratteristiche principali della strategia formulata da Wu e Zhu, si rivela opportuno ed interessante effettuare un esame più analitico del modello, per poterne comprendere meglio il funzionamento. Ancora una volta, allo scopo di rendere semplice ed immediata l'esposizione, verranno specificate ulteriori assunzioni circa la “struttura” del triangolo: queste condizioni non sono da intendersi in senso restrittivo, ma vengono semplicemente introdotte con l'idea di circoscrivere l'analisi ad alcuni casi particolari, evitando di generare confusione o di proporre una discussione eccessivamente dispersiva sull'argomento. In particolare, verrà proposto l'esame di quello che gli autori del *paper* chiamano “triangolo simmetrico”, ovvero un portafoglio di replica caratterizzato dal fatto che lo *strike price* dell'opzione *centre*, K_c , coincide con quello dell'opzione *target*, K , e le due opzioni esterne (*up* e *down*) hanno un prezzo d'esercizio equidistante da quello centrale ($K_u - K = K - K_d$, ovvero $d_u = d_d$); inoltre, le scadenze T_0 e T_c devono essere entrambe inferiori a T (risulta invece indifferente quale sia la maggiore o la minore delle due *maturity*)¹⁶. In effetti, un esempio di triangolo con le proprietà appena descritte è stato già mostrato in precedenza, ed è quello rappresentato in Figura 2.1. La decisione di esaminare questa particolare fattispecie, è dovuta a vari motivi: in primo luogo, si tratta di una tipologia sufficientemente generica (tre diversi *strikes*, due diverse *maturities*) e con pochi vincoli, che consente quindi di includere nell'analisi una considerevole varietà di casi con caratteristiche differenti. Inoltre, un triangolo simmetrico potrebbe trovare senz'altro applicazione nella pratica come strumento di replica, perché l'elevato grado di flessibilità che lo contraddistingue consentirebbe all'*hedger* di adeguare facilmente la costruzione del portafoglio di copertura alle (normalmente limitate) disponibilità di mercato. Infine, le due ragioni appena descritte ne generano una terza, ovvero la possibilità di ottimizzare l'*hedging* in modo da ottenere una *performance* efficace.

Per iniziare con l'analisi del modello di Wu e Zhu, si esplicitano di seguito le informazioni principali di partenza su cui è basato l'esercizio:

- Il focus sarà su opzioni *plain vanilla* europee di tipo *call*;

¹⁶ La simmetria del triangolo, in realtà, fa riferimento soltanto ai prezzi d'esercizio delle due opzioni esterne (d e u) che sono appunto simmetrici (equamente spaziate) rispetto allo *strike* dell'opzione centrale (e di quella *target*). La condizione imposta alle scadenze invece è legata a motivi di praticità, per consentire di focalizzare l'analisi ad un caso più facilmente ricollegabile alla realtà.

- Le opzioni saranno valutate secondo il modello di BSM, e per quanto riguarda le variabili coinvolte nella valutazione, si assumeranno i seguenti valori: $S_0=100$, $K=100$, $\sigma=20\%$, $r=6\%$, $q=1,5\%$, $T=1$;

La scelta di concentrarsi su opzioni europee *plain vanilla* deriva dal fatto che sono alcuni dei derivati più semplici da esaminare e da valutare, nonché tra i più liquidi e frequentemente negoziati all'interno di mercati regolamentati (e.g., CBOE, ICE...). Quest'ultimo elemento permetterà, in una fase successiva, di effettuare delle simulazioni basate su dati storici per testare la resa effettiva del modello in un contesto reale, consentendo un confronto diretto tra analisi teorica e pratica. Il modello classico di BSM – come noto – assume che i parametri di valutazione siano costanti nel tempo: ciò implica in particolare che $\sigma(K, T_0) = \sigma$, o in altri termini che la superficie di volatilità sia piatta lungo entrambe le dimensioni. Sebbene il limite imposto da tale ipotesi appaia evidente, non compromette in generale la validità dei risultati che verranno proposti, e sarà in ogni caso superato attraverso la verifica empirica su dati reali. Poste le necessarie premesse, si può ora procedere con l'analisi. Il grafico sottostante (Figura 2.2) mostra il valore del portafoglio di replica al variare del ΔK , lo spazio tra gli *strike prices* delle opzioni esterne e quello dell'opzione centrale ($K_u - K = K - K_d$), una delle variabili sotto il controllo diretto dell'*hedger*.

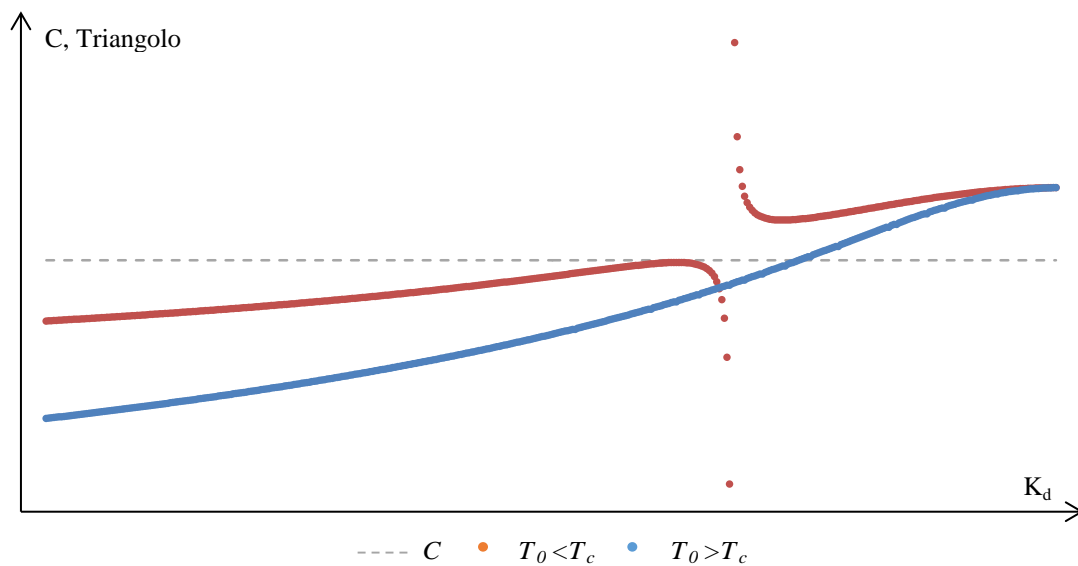


Figura 2.2 Valore del triangolo di replica al variare di K_d .

Il valore dell'opzione call *target*, dati i parametri definiti in precedenza, calcolato in base al modello di BSM è pari a circa 10, ed è rappresentato dalla linea tratteggiata in grigio. Nella situazione in cui $T_0 < T_c$ (serie arancione), l'approssimazione appare sufficientemente buona, avvicinandosi progressivamente al valore obiettivo con l'aumentare di K_d (e il conseguente ridursi di ΔK e di K_u). Tuttavia, si nota facilmente la presenza di un asintoto verticale, in prossimità del quale il valore del triangolo

diverge rapidamente – in quanto i pesi w_i assegnati alle tre opzioni di replica assumono valori “anormali” – compromettendo in modo considerevole l’efficacia della strategia.

Il caso in cui $T_0 < T_c$ (serie blu) invece, presenta un andamento più uniforme e senza interruzioni, sebbene l’accuratezza dell’*hedge* sembri essere inferiore per valori bassi di K_d (e alti di ΔK e di K_u). L’aspetto più interessante è che sembrerebbe possibile stabilire un ΔK ottimale, che permetta di replicare in maniera quasi esatta il derivato *target*; nell’esempio proposto e rappresentato in Figura 2.2, ΔK^* sarebbe circa 10 ($K_d^* \approx 90$, $K_u^* \approx 110$). Questa informazione si rivela molto utile per l’*hedger*, il quale in base alle opzioni negoziabili a sua disposizione e a parità di costi, avrà la possibilità di utilizzare il criterio descritto per stabilire la spaziatura migliore tra gli *strike prices*, cioè quella che consente di ottenere una replica puntuale o comunque molto accurata.

La Figura 2.3 mostra l’impatto di una variazione delle scadenze delle opzioni che compongono il triangolo (T_0 e T_c) sulla precisione della replica.

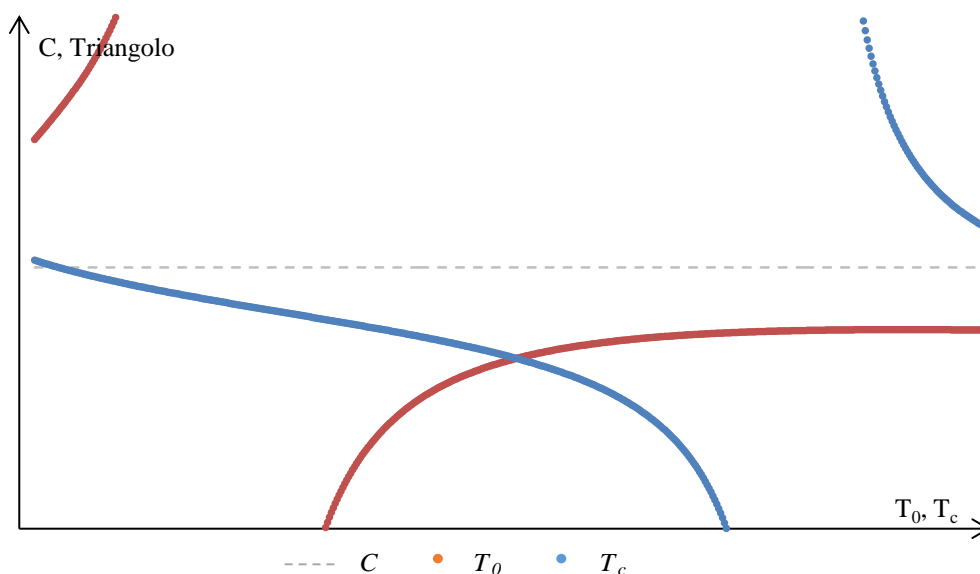


Figura 2.3 Valore del triangolo di replica al variare di T_0 e T_c .

Il grafico è definito in un dominio che va da 1 a 11 mesi per T_0 e T_c – tenendo fissa a 6 mesi una delle due scadenze e facendo variare l’altra – ed è stato assunto $\Delta K=10$. Anche in questo caso, si può notare la presenza di asintoti verticali, che provocano discontinuità evidenti nei valori assunti dal triangolo di replica, nonostante ΔK sia stato scelto in maniera tale da essere prossimo al valore ottimale stimato quando $T_0=1$ mese e $T_c=6$ mesi. Chiaramente, l’opportuna scelta della spaziatura non può garantire da sola la buona riuscita della strategia: la combinazione essenziale da tenere sotto controllo e da ottimizzare è quella tra d e α . L’osservazione delle Figure 2.2 e 2.3 fa emergere in conclusione alcuni aspetti importanti del modello di Wu e Zhu:

- La strategia garantisce all’utente estrema libertà nella scelta delle opzioni da impiegare nella replica (in particolare nella selezione di prezzi d’esercizio e scadenze).

Tuttavia, esiste la possibilità di ottenere coperture più accurate scegliendo opportunamente i parametri (K_d, K_u, T_0, T_c) che definiscono la struttura del triangolo;

- Nella decisione, l'*hedger* deve tenere conto della combinazione di d e α , che in ultima analisi costituiscono le variabili fondamentali per la definizione dei pesi w_i e per la *performance* complessiva della tecnica.

Finora, si è ragionato in un contesto uni-periodale, ma il modello è volto ovviamente a fornire un *hedging* statico per un intervallo temporale che va da oggi a una qualsiasi data futura. Per testarne il funzionamento in quest'ottica, si è deciso come in precedenza di simulare un percorso *random* per l'evoluzione del sottostante nell'arco di un mese (21 giorni lavorativi), costruire un triangolo di replica per l'opzione *target* ed analizzare lo scostamento tra i due valori nel tempo. La Tabella 2.3 mostra un esempio di quanto descritto, per una traiettoria¹⁷ generata casualmente di S_t .

<i>Giorno</i>	S_t	c_{Target}	c_d	c_c	c_u	<i>Portafoglio di Replica</i>	<i>Ratio</i>	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
0	100	10,03	13,22	2,49	2,81	10,09	1,01	10,03
1	101,20	10,77	14,21	3,12	3,19	10,79	1,01	10,73
2	102,61	11,66	15,39	3,99	3,69	11,62	1,01	11,56
3	101,55	10,94	14,45	3,20	3,26	10,98	1,01	10,92
4	101,74	11,04	14,59	3,26	3,31	11,08	1,01	11,02
5	102,42	11,47	15,16	3,66	3,53	11,48	1,01	11,42
6	102,25	11,33	14,98	3,47	3,44	11,36	1,01	11,30
7	103,01	11,81	15,62	3,96	3,70	11,80	1,01	11,74
8	103,74	12,28	16,24	4,46	3,97	12,22	1,01	12,16
9	101,95	11,06	14,65	3,04	3,24	11,16	1,01	11,10
10	98,99	9,19	12,13	1,28	2,25	9,41	1,01	9,36
11	100,07	9,82	13,00	1,71	2,55	10,05	1,01	9,99
12	100,86	10,29	13,64	2,08	2,78	10,51	1,01	10,45
13	102,09	11,05	14,67	2,82	3,18	11,22	1,01	11,16
14	102,04	11,00	14,61	2,69	3,14	11,19	1,01	11,13
15	102,87	11,52	15,31	3,26	3,42	11,65	1,01	11,59
16	102,24	11,08	14,73	2,66	3,15	11,30	1,01	11,24
17	102,15	11,00	14,63	2,49	3,09	11,25	1,01	11,19
18	102,35	11,10	14,77	2,55	3,13	11,35	1,01	11,29
19	101,17	10,31	13,73	1,47	2,69	10,74	1,01	10,68
20	98,42	8,61	11,40	0,06	1,86	9,09	1,01	9,04
21	99,04	8,95	11,88	0,00	2,00	9,54	1,01	9,49

Tabella 2.3 Esempificazione di triangolo simmetrico.

¹⁷ Dato che la valutazione delle opzioni coinvolte nell'esercizio è formulata tramite il modello di Black, Scholes e Merton, si assume ancora una volta che l'*underlying asset* segua un moto Browniano geometrico, con volatilità e tasso d'interesse privo di rischio costanti.

Nell'esempio in analisi, $\Delta K=10$ (valore prossimo alla spaziatura ottimale calcolata precedentemente), $T_c=1$ mese e $T_0=6$ mesi. Il portafoglio di replica che scaturisce dalla risoluzione del modello è quello rappresentato nella settima colonna, con pesi rispettivamente pari a 68,75% per c_d e c_u e -37,50% per c_c . La strategia, in questo caso, prevede dunque la vendita dell'opzione centrale: in determinate circostanze, potrebbe risultare difficile, costoso o addirittura impossibile per l'*hedger* assumere una posizione corta su uno dei derivati che formano il triangolo; laddove esistesse un problema o una limitazione in tal senso, il *trader* potrebbe semplicemente indirizzare la sua scelta verso altri strumenti (con scadenze e/o prezzi d'esercizio differenti), fino ad ottenere una combinazione accettabile e che non richieda la vendita allo scoperto (i.e., $w_i > 0$, $i=d,c,u$) delle opzioni di replica.

L'ultima colonna a destra della Tabella 2.3 mostra il "portafoglio ottimizzato". Wu e Zhu propongono infatti di ri-bilanciare i pesi ottenuti come soluzione della matrice in modo da far combaciare esattamente il valore dell'opzione *target* e del triangolo all'inizio del periodo di copertura. Per fare questo, è sufficiente stimare il rapporto (*ratio*) tra i due, ed utilizzarlo per calcolare le nuove quantità ottimizzate. In tal modo, la somma dei w_i non corrisponderà più al 100%, ma sarà possibile in compenso ottenere una migliore approssimazione di c , anche per i periodi successivi a $t=0$. Nell'esempio preso in esame, il rapporto è estremamente vicino ad 1, e l'operazione descritta produce un cambiamento nella struttura della strategia quasi impercettibile, ma in altre situazioni questa correzione potrebbe rivelarsi decisamente più marcata.

Come si può notare osservando la tabella, la strategia permette di approssimare con buona precisione il valore dell'opzione *target* attraverso il triangolo simmetrico composto da tre opzioni a più breve scadenza. L'*hedging error* è basso durante l'intero periodo di copertura, e l'ottimizzazione proposta dagli autori aiuta effettivamente a migliorare – seppur di poco – la *performance* della tecnica.

In conclusione, l'analisi proposta ha fatto emergere aspetti importanti del modello formulato da Wu e Zhu, confermandone – perlomeno in un contesto teorico, in linea con il *framework* di Black, Scholes e Merton – l'efficacia ai fini di un utilizzo come tecnica di replica statica per opzioni. In seguito, sarà utile effettuare un confronto basato su dati reali (serie storiche di prezzi quotati) per verificare in maniera definitiva il funzionamento della strategia.

Estensione del modello: Opzioni di Scambio

Tra le caratteristiche che rendono il modello di Wu e Zhu uno strumento senza dubbio interessante in un'ottica di *static hedging*, è stato fatto riferimento già in precedenza alla sua considerevole flessibilità e capacità di essere adattabile ad una serie potenzialmente illimitata di opzioni. La sola condizione per poter implementare la strategia infatti, è che la copertura sia effettuata tramite *nearby contracts*, ovvero derivati che abbiano un'esposizione al rischio e specifiche contrattuali (scadenze e prezzi d'esercizio) simili a quelle del *target*. Di conseguenza, la tecnica proposta dagli autori può essere facilmente impiegata per replicare ad esempio opzioni esotiche, quali opzioni asiatiche, opzioni

di scambio, opzioni retrospettive, ecc... Ovviamente, il triangolo in tali circostanze sarebbe formato non più da *plain vanilla options*, bensì da opzioni esotiche dello stesso tipo del *target*: risulterebbe pertanto complicato proporre una strategia di *hedging* basata sul modello in analisi nel caso in cui siano coinvolte opzioni poco liquide o poco negoziate, per le quali potrebbe essere più conveniente ricorrere – quando possibile – al *delta hedging* o ad altri metodi.

Prima di proseguire con l'introduzione dell'argomento successivo, questo paragrafo concluderà la trattazione concettuale del modello di Wu e Zhu, mostrando come sia possibile applicarlo per coprire un'esposizione dovuta alla vendita di opzioni di scambio (*exchange options*). Innanzitutto, un'opzione di scambio è un contratto derivato che – come suggerisce il nome – consente all'acquirente di scambiare i due (o più) *asset* sottostanti tra loro alla scadenza. La struttura è molto simile a quella di una normale *call* o *put* europee *plain vanilla*, con la differenza che in questo caso non si ha un prezzo d'esercizio fisso e predeterminato. Nella pratica, questa tipologia di opzioni possono essere utilizzate, ad esempio, per effettuare scambi espressi in valute diverse, e quindi per sterilizzare (o sfruttare a proprio vantaggio) l'effetto delle variazioni nei tassi di cambio; inoltre, rivestono un interesse particolare anche in altri campi, come ad esempio in ambito di opzioni reali (*real options*), per l'analisi di progetti con possibilità di espansione.

Un modello di valutazione semplice – che si rifà a BSM – per calcolare il prezzo di una *exchange option*, è stato proposto da William Margrabe (1978)¹⁸. In breve, la formula a cui giunge l'autore è la seguente:

$$EX_t = S_t e^{-q_S(T-t)} N(d_1) - K_t e^{-q_K(T-t)} N(d_2) \quad (2.5)$$

dove,

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K_t) + (q_K - q_U + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_K^2 + \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_K\sigma_S}$$

I due sottostanti (*S* e *K*) hanno diversa volatilità (σ_S e σ_K), diversi tassi di dividendo (q_S e q_K) ed il coefficiente di correlazione comune tra di essi è ρ . I parametri sono assunti essere costanti nel tempo. L'opzione di scambio, diversamente da altre fattispecie, non consente all'*hedger* di fissare i prezzi d'esercizio per le opzioni che compongono il triangolo: K_t corrisponde semplicemente al valore corrente di uno dei due *asset* su cui è scritto il derivato. In questo caso, il portafoglio di replica si riduce

¹⁸ MARGRABE, W., "The Value of an Option to Exchange an Asset for another", *Journal of Finance*, 33, 1 (1978), 177-186.

quindi ad essere formato da due sole opzioni con due diverse scadenze, T_0 e T_c , perché gli *strike prices* convergono tutti verso il medesimo ammontare.

La strategia assume dunque connotati diversi, ma non risulta per questo meno efficace. La Tabella 2.4, mostra un esempio di copertura per un'opzione di scambio *target* ($T=1$ anno) con due opzioni di scambio ($T_0=6$ mesi, $T_c=1$ anno e mezzo¹⁹).

I due *underlying assets* sono caratterizzati da diverse volatilità ($\sigma_S=20\%$ e $\sigma_K=15\%$), diversi tassi di dividendo ($q_S=2\%$ e $q_K=1\%$) ed il coefficiente di correlazione comune tra di essi (ρ) è pari a 0,3.

Entrambi seguono un moto Browniano geometrico, le cui rispettive componenti stocastiche (processi di Wiener) si distribuiscono normalmente ma co-muovono nel tempo.

Giorno	S_t	K_t	EX_{Target}	EX_0	EX_c	Portafoglio di Replica	Ratio	Portafoglio Ottimizzato
0	100	100	7,79	5,66	9,33	7,49	0,96	7,79
1	99,86	99,44	7,95	5,82	9,49	7,66	0,96	7,96
2	100,13	98,65	8,44	6,32	9,96	8,14	0,96	8,47
3	97,98	97,98	7,59	5,48	9,11	7,29	0,96	7,58
4	98,12	99,44	7,03	4,89	8,58	6,73	0,96	7,00
5	98,69	98,91	7,52	5,38	9,07	7,22	0,96	7,51
6	98,28	100,81	6,53	4,37	8,10	6,23	0,96	6,48
7	98,47	100,06	6,91	4,73	8,47	6,60	0,96	6,86
8	97,08	99,68	6,39	4,23	7,94	6,08	0,96	6,32
9	97,75	99,23	6,87	4,69	8,42	6,56	0,96	6,82
10	98,95	99,01	7,54	5,36	9,10	7,23	0,96	7,52
11	97,17	98,71	6,77	4,60	8,32	6,46	0,96	6,72
12	96,27	98,85	6,27	4,11	7,82	5,97	0,96	6,20
13	96,01	99,12	6,04	3,87	7,59	5,73	0,96	5,96
14	94,88	99,64	5,34	3,22	6,88	5,05	0,96	5,25
15	95,97	100,03	5,66	3,49	7,22	5,35	0,96	5,57
16	96,06	102,15	4,96	2,83	6,52	4,67	0,96	4,86
17	94,47	101,16	4,64	2,56	6,17	4,37	0,96	4,54
18	95,01	100,67	4,99	2,86	6,54	4,70	0,96	4,89
19	94,31	99,66	5,03	2,90	6,58	4,74	0,96	4,93
20	93,71	97,69	5,45	3,30	6,99	5,15	0,96	5,35
21	94,67	97,66	5,87	3,67	7,43	5,55	0,96	5,77

Tabella 2.4 Esempificazione di triangolo per la replica di un'opzione di scambio.

La strategia proposta da Wu e Zhu produce buoni risultati anche per opzioni diverse dalle semplici *plain vanilla* europee. Nel caso di un'opzione di scambio, ad esempio, attuare il *delta hedging* è concettualmente possibile ma praticamente molto costoso, perché coinvolge due differenti sottostanti

¹⁹ Non è necessario che valga la relazione definita in precedenza nel caso di triangolo simmetrico, secondo cui T_0 e T_c devono essere inferiori a T .

raddoppiando di fatto il numero delle transazioni necessarie per mantenere coperta l'esposizione, deteriorando la *performance* complessiva della replica. Il modello in esame può essere utilizzato come alternativa ad altre tecniche più dispendiose e meno efficaci.

2.4 IL MODELLO DI CARR E WU (2002)

Peter Carr e Liuren Wu pubblicano – per la prima volta nel 2002 – un *paper*²⁰ in cui presentano una strategia per replicare staticamente opzioni *plain vanilla* europee. Gli autori spiegano inoltre che la tecnica si può estendere ad altri tipi di opzioni esotiche *path-dependent*; in quel caso tuttavia, la maggiore complessità del modello e la diversa natura che assume (semi-statica), fanno sì che la sua attuazione risulti poco conveniente nella pratica, rispetto ad altri metodi di *hedging*.

Come si vedrà, la strategia proposta da Carr e Wu presenta caratteristiche piuttosto differenti rispetto a quella analizzata nel paragrafo precedente. In primo luogo, effettua alcune assunzioni circa le condizioni di mercato (assenza di costi di transazione e di possibilità di arbitraggio) e l'andamento del prezzo del sottostante, il quale in particolare deve seguire un processo di Markov²¹. In più, occorre che l'*hedger* definisca esplicitamente un modello di riferimento per il *pricing* delle opzioni coinvolte nella replica (e.g., Black, Scholes e Merton), che possa consentirgli di impostare correttamente i parametri della tecnica e costruire il portafoglio di copertura.

Il metodo sviluppato da Carr e Wu si caratterizza dunque per un minore grado di flessibilità, dovuto da una parte alle numerose e limitanti ipotesi che richiede per poter essere implementato e dall'altra al fatto che genera internamente un *set* di prezzi d'esercizio e di relativi pesi, partendo dai quali si può costruire l'*hedge*: il *trader* è libero di stabilire la scadenza (comune) delle opzioni che compongono il portafoglio di replica, ma non può selezionare liberamente gli *strike prices* in base alle sue preferenze o alle disponibilità di mercato, come nel modello di Wu e Zhu.

Questi limiti, potenzialmente problematici, sono però compensati da altri aspetti interessanti del modello, che verranno illustrati ed analizzati nel corso del presente paragrafo.

Derivazione del modello

Lo sviluppo della strategia in esame è piuttosto lungo e complesso, e sfrutta numerose relazioni e concetti ripresi da varie fonti matematiche e finanziarie. Per comprendere a fondo la tecnica e la logica sottostante ad essa, è opportuno riportare in maniera concisa ma efficace i passaggi fondamentali che portano ad ottenere il risultato finale trovato da Carr e Wu.

²⁰ CARR, P. e WU, L., "Static Hedging of Standard Options", *NY University and Baruch College Working Paper*, (2002).

²¹ I processi di Markov sono caratterizzati dal fatto che i valori passati assunti dalla variabile sono ininfluenti nello stabilire una previsione per l'andamento futuro di quest'ultima. Equivale, in altri termini, alla teoria della *random walk*, normalmente assunta per descrivere l'evoluzione dei corsi azionari.

Innanzitutto, la dimostrazione parte esplicitando il valore di una *call* europea²² come la media ponderata per la probabilità *risk-neutral* dei valori futuri attesi che quest'ultima potrà assumere in una generica data futura, u , antecedente alla scadenza.

$$c(S,t;K,T;\Theta) = e^{-r(u-t)} \int_0^{\infty} g(S,t;K,u;\Theta) c(K,u;K,T;\Theta) dK$$

Dove Θ è un generico vettore che indica una serie di parametri fissi del modello, mentre $g(S,t;K,u;\Theta)$ è la funzione di densità di probabilità neutrale al rischio, definita da Breeden e Litzenberger (1978)²³ come segue:

$$g(S,t;K,T;\Theta) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(S,t;K,T;\Theta)$$

Questa importante equazione si può dimostrare in pochi passaggi e verrà illustrata con maggiore dettaglio in appendice al presente capitolo. Effettuando la sostituzione, si ottiene:

$$c(S,t;K,T;\Theta) = e^{-r(u-t)} \int_0^{\infty} g(S,t;K,u;\Theta) c(K,u;K,T;\Theta) dK = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(S,t;K,u;\Theta) c(K,u;K,T;\Theta) dK$$

Giunti a questo punto, gli autori definiscono una *weighting function*, $w(K)$, tale che:

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(K,u;K,T;\Theta)$$

Da cui,

$$c(S,t;K,T;\Theta) = \int_0^{\infty} w(K) c(S,t;K,u;\Theta) dK \quad (2.6)$$

L'Equazione 2.6 stabilisce una relazione esatta tra il valore in t della *call* ed un *continuum* di opzioni a più breve scadenza ($u < T$), con pesi stabiliti dalla funzione $w(K)$. L'unico – e piuttosto rilevante – problema, è che anche ammettendo che sia possibile reperire un numero infinito di opzioni e di prez-

²² Quanto discusso è valido anche per opzioni *put* europee. Una dimostrazione molto semplice si può ottenere, ad esempio, ricorrendo alla *Put-Call Parity*.

²³ BREEDEN, D. T., e LITZENBERGER, R. H., "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", *The Journal of Business*, 51, 4 (1978), 621-651.

zi d'esercizio differenti, la presenza di costi di transazione manderebbe istantaneamente in bancarotta qualsiasi *hedger* che tentasse di seguire un simile modello.

Carr e Wu ricorrono allora ad un espediente matematico, che permette di approssimare con buona precisione integrali di funzioni con determinate caratteristiche, riducendoli a sommatorie finite. La regola in questione è la quadratura di Gauss-Hermite, che consente di applicare l'approssimazione appena descritta al caso di integrazione di generiche funzioni $f(x)$, del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

Le x_i sul lato destro dell'uguaglianza corrispondono alle radici del polinomio di Hermite fisico di grado N , mentre i corrispondenti pesi w_i vengono calcolati in base ad una procedura ricorsiva; l'*hedger* può quindi stabilire liberamente il numero di opzioni da inserire nel portafoglio di replica, sapendo che all'aumentare di N crescerà la precisione ma con essa anche il costo di implementazione della tecnica. Il ricorso al metodo di quadratura è possibile, perché esiste il modo di esprimere l'Equazione 2.6 nella forma richiesta. Per calcolare la derivata seconda contenuta nella *weighting function*, è necessario definire un modello di riferimento per il prezzo delle opzioni: gli autori partono pertanto dal modello di Black, Scholes e Merton²⁴. Di conseguenza, si ha che:

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(K,u;K,T;\Theta) = e^{-q(T-u)} \frac{n(d_1)}{K\sigma\sqrt{T-u}} = e^{-q(T-u)} \frac{e^{-d_1^2/2}}{K\sigma\sqrt{2\pi(T-u)}}$$

Si vede facilmente che imponendo $d_1 = x\sqrt{2}$, l'Equazione 2.6 assume la forma desiderata e si può applicare la regola di quadratura di Gauss-Hermite descritta in precedenza. Esplicitando K_i rispetto a x_i , tramite la definizione di d_1 , si ottiene:

$$K_i = Ke^{x_i\sigma\sqrt{2(T-u)} + (q-r-\sigma^2/2)(T-u)}$$

Infine, risolvendo l'integrale per sostituzione ($dK = K'dx$) si ottengono i pesi per ciascuna opzione del portafoglio di replica, che derivano direttamente dalla conseguente trasformazione dei pesi w_i generati dalla quadratura.

$$W_i = \frac{w(K_i)K_i'(x_i)}{e^{-x_i^2}} w_i = \frac{e^{-q(T-u)}}{\sqrt{\pi}} w_i$$

²⁴ Carr e Wu utilizzano poi nel *paper* altri tre diversi modelli, estensioni del *framework* di BSM, per confrontare i risultati ottenuti dalla strategia nei vari casi e identificare possibili limiti al suo utilizzo.

L'applicazione della regola di Gauss-Hermite, permette – in ultima analisi – di ottenere un'approssimazione finita dell'integrale contenuto nell'Equazione 2.6, consentendo all'*hedger* di costruire un portafoglio con un numero prestabilito di opzioni di replica e di poter quindi sfruttare il modello sviluppato da Carr e Wu a fini di copertura. Si avrà, infatti:

$$c(S,t;K,T;\Theta) = \int_0^{\infty} w(K)c(S,t;K,u;\Theta)dK \cong \sum_{i=1}^N W_i c(S,t;K_i,u;\Theta)$$

Come già anticipato, la strategia è caratterizzata da una struttura abbastanza rigida, dovuta da un lato alla necessità di esprimere un modello di *pricing* e dall'altro dall'impossibilità di scegliere liberamente gli *strike prices* per le opzioni di replica. Il primo dei due limiti è dovuto al fatto che i pesi W_i dipendono inevitabilmente dal *framework* di riferimento, mentre il secondo scaturisce dalla natura stessa della tecnica, in base alla quale i K_i vengono generati attraverso la quadratura.

Tuttavia, nel caso di contratti quotati e abbastanza liquidi, questi problemi vengono attenuati e non comportano significativi peggioramenti nella *performance* della strategia.

Il principale aspetto positivo consiste invece nella possibilità di stabilire facilmente il numero N di opzioni da includere nel portafoglio di replica, all'aumentare del quale cresce la precisione del modello: il *trader* potrà optare per una quantità ottimale, che garantisca un buon rendimento senza comportare ingenti costi di transazione. La strategia si configura – similmente al modello di Wu e Zhu esaminato in precedenza – come una tecnica di replica semi-statica, perché coinvolge opzioni con scadenza u , minore della scadenza T della *target option*. Ciò significa che per mantenere la copertura fino al termine della vita utile dello strumento, è necessario effettuare un *roll-over* da u a T , ricorrendo a metodologie alternative (ad esempio impiegando la *Put-Call Parity*, il *delta hedging*, o semplicemente assumendo una posizione di segno opposto sullo stesso derivato).

Analisi del modello

L'analisi del modello di Carr e Wu sarà rivolta in particolare a rimarcare pregi e difetti – molti di essi già in precedenza menzionati durante la presentazione e la derivazione della strategia – per meglio comprendere come questi ultimi si riflettono sull'efficacia complessiva della tecnica e come possono essere gestiti al meglio dall'*hedger* per garantire il raggiungimento del miglior risultato possibile. Coerentemente con quanto visto finora, in questo primo esame teorico (cui seguirà, come per il modello di Wu e Zhu, un "esperimento", basato su prezzi reali di opzioni quotate in mercati regolamentati) il contesto di riferimento sarà ancora una volta quello "classico" formulato da Black, Scholes e Merton. Nell'analisi di questo specifico modello, la coerenza tra il metodo di valutazione utilizzato per calcolare i parametri della quadratura e quello impiegato per calcolare il prezzo delle opzioni coinvolte è ancora più rilevante, perché qualora tale assunto non fosse verificato la tecnica

proposta dagli autori non potrebbe funzionare correttamente e produrrebbe una replica inesatta del *target*. Il modello parte quindi dalla stima delle variabili chiave che rientrano nella definizione del prezzo di un'opzione secondo BSM: oltre ai parametri fissi o direttamente osservabili (prezzo d'esercizio, scadenza, prezzo corrente del sottostante), viene richiesto di esplicitare anche quei fattori per i quali è necessario produrre delle previsioni quanto più accurate possibile (volatilità del sottostante, tasso d'interesse privo di rischio, eventuale tasso di dividendo) in quanto per esse non è possibile osservare o stabilire un valore certo. Già la prima fase del modello di Carr e Wu presenta dunque alcune problematiche: la necessità di stimare i valori appena citati costituisce senz'altro un elemento di considerevole difficoltà per l'*hedger*, esponendolo al rischio di commettere un errore nel formulare i valori da attribuire a ciascuna delle variabili. Se a questo si aggiunge l'ulteriore limite – già discusso – derivante dall'obbligo di selezionare un modello di *pricing* di riferimento, nel complesso si nota come la strategia comporti notevoli incertezze sin dalle prime fasi.

<i>Giorno</i>	S_t	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
0	100	10,03	32,59	6,51	0,00	9,64	0,39	10,03
1	101,20	10,77	33,78	7,54	0,00	10,51	0,39	10,91
2	102,61	11,66	35,18	8,82	0,00	11,59	0,39	11,98
3	101,55	10,94	34,11	7,79	0,00	10,73	0,39	11,13
4	101,74	11,04	34,29	7,94	0,00	10,86	0,39	11,25
5	102,42	11,46	34,96	8,55	0,00	11,37	0,39	11,76
6	102,25	11,33	34,78	8,36	0,00	11,21	0,39	11,61
7	103,01	11,81	35,53	9,07	0,00	11,80	0,39	12,20
8	103,74	12,28	36,25	9,76	0,00	12,38	0,39	12,77
9	101,95	11,06	34,45	7,98	0,00	10,91	0,39	11,31
10	98,99	9,19	31,48	5,17	0,00	8,57	0,39	8,97
11	100,07	9,82	32,55	6,12	0,00	9,37	0,39	9,77
12	100,86	10,29	33,33	6,84	0,00	9,98	0,39	10,37
13	102,09	11,05	34,55	8,02	0,00	10,95	0,39	11,35
14	102,04	11,00	34,49	7,95	0,00	10,90	0,39	11,29
15	102,87	11,52	35,31	8,75	0,00	11,56	0,39	11,95
16	102,24	11,08	34,67	8,11	0,00	11,03	0,39	11,42
17	102,15	11,00	34,57	8,00	0,00	10,94	0,39	11,34
18	102,35	11,10	34,76	8,18	0,00	11,10	0,39	11,49
19	101,17	10,31	33,57	6,99	0,00	10,11	0,39	10,51
20	98,42	8,61	30,81	4,22	0,00	7,84	0,39	8,24
21	99,04	8,95	31,42	4,82	0,00	8,34	0,39	8,73

Tabella 2.5 Esempificazione di replica statica ($N=3$).

Una volta che il *framework* sia stato stabilito e tutte le variabili definite, l'utilizzatore della tecnica può decidere liberamente quante opzioni inserire nel portafoglio di replica (N) e la loro scadenza ($u < T$). Dopodichè, il secondo passaggio consiste nell'applicare opportunamente la quadratura, in base all'opzione *target* (sia essa una *call*, una *put* o un altro tipo di opzione esotica, come si vedrà in seguito), per derivare i prezzi d'esercizio (K_i) ed i relativi pesi (W_i) che caratterizzeranno la copertura. Quest'ultimo *step* è di fatto "automatico", e non comporta alcun problema o vincolo per l'*hedger*.

La Tabella 2.5 mostra un esempio di replica statica condotto attraverso la strategia di Carr e Wu, con $N=3$ ed $u=1$ mese. Il percorso simulato per il prezzo del sottostante corrisponde a quello proposto in Tabella 2.3, consentendo in tal modo un confronto diretto col modello di Wu e Zhu. La quadratura genera tre *strike prices* ($K_1=67,62$; $K_2=94,22$; $K_3=131,27$) e tre *weights* ($W_1=16,44\%$; $W_2=65,76\%$; $W_3=16,44\%$).

I pesi sono tutti positivi, e sommano approssimativamente a 100%: questa particolarità è dovuta alla regola di Gauss-Hermite, ed è certamente apprezzabile in questo contesto per via dei potenziali problemi – esposti in precedenza – che si potrebbero verificare in presenza di quantità negative (*short selling*) o anche di quantità positive eccessivamente elevate, che causerebbero un aumento nel costo complessivo. La settima colonna presenta il valore del portafoglio di replica che scaturisce dal modello: mentre Wu e Zhu ricalcolavano i pesi in funzione del rapporto tra il valore *target* e il portafoglio, in questo caso gli autori stabiliscono che il valore in eccesso (o in difetto) venga investito (o preso a prestito) al tasso *risk-free*, e portato fino alla scadenza dell'*hedge*. L'ottava colonna riporta quindi proprio questa differenza, rappresentata come B_t (*bond* privo di rischio). La nona ed ultima colonna infine, scaturisce dalla somma delle due precedenti e fornisce il portafoglio di replica totale ottimizzato.

La strategia produce ottimi risultati, con un'approssimazione anche migliore di quella generata dal modello di Wu e Zhu al ventunesimo (ed ultimo) giorno, e produce in generale un contenuto *hedging error*.

L'efficacia cresce rapidamente al crescere di N . Nella Tabella 2.6 viene mostrato ancora una volta lo stesso percorso simulato per S , ma stavolta le opzioni di replica sono 5. Chiaramente, l'approssimazione migliora e la copertura diventa quasi perfetta; in presenza di costi di transazione tuttavia, il *trader* deve tenere in considerazione anche il possibile deterioramento della *performance* finale dovuto al maggior numero di strumenti acquistati.

Per concludere, la Tabella 2.7 riporta alcune delle principali statistiche descrittive per la strategia di replica di un'opzione *call* europea *target* proposta da Carr e Wu, applicata a 10000 simulazioni casuali di S ; le statistiche indicate fanno riferimento all'*hedging error* alla scadenza della copertura.

Giorno	S_t	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	Portafoglio di Replica	B_t	Portafoglio Ottimizzato
0	100	10,03	45,63	27,56	6,51	0,00	0,00	9,97	0,06	10,03
1	101,20	10,77	46,82	28,75	7,54	0,00	0,00	10,79	0,06	10,85
2	102,61	11,66	48,22	30,15	8,82	0,00	0,00	11,78	0,06	11,84
3	101,55	10,94	47,16	29,08	7,79	0,00	0,00	10,99	0,06	11,06
4	101,74	11,04	47,34	29,26	7,94	0,00	0,00	11,11	0,06	11,17
5	102,42	11,46	48,01	29,92	8,55	0,00	0,00	11,59	0,06	11,65
6	102,25	11,33	47,84	29,74	8,36	0,00	0,00	11,44	0,06	11,51
7	103,01	11,81	48,59	30,49	9,07	0,00	0,00	11,99	0,06	12,05
8	103,74	12,28	49,31	31,21	9,76	0,00	0,00	12,52	0,06	12,58
9	101,95	11,06	47,52	29,41	7,98	0,00	0,00	11,17	0,06	11,23
10	98,99	9,19	44,55	26,44	5,17	0,00	0,00	9,00	0,06	9,07
11	100,07	9,82	45,62	27,51	6,12	0,00	0,00	9,75	0,06	9,81
12	100,86	10,29	46,41	28,29	6,84	0,00	0,00	10,31	0,06	10,37
13	102,09	11,05	47,63	29,50	8,02	0,00	0,00	11,21	0,06	11,27
14	102,04	11,00	47,57	29,44	7,95	0,00	0,00	11,16	0,06	11,22
15	102,87	11,52	48,39	30,26	8,75	0,00	0,00	11,77	0,06	11,83
16	102,24	11,08	47,76	29,62	8,11	0,00	0,00	11,28	0,06	11,35
17	102,15	11,00	47,66	29,52	8,00	0,00	0,00	11,20	0,06	11,27
18	102,35	11,10	47,85	29,71	8,18	0,00	0,00	11,34	0,06	11,41
19	101,17	10,31	46,67	28,52	6,99	0,00	0,00	10,44	0,06	10,50
20	98,42	8,61	43,91	25,76	4,22	0,00	0,00	8,35	0,06	8,41
21	99,04	8,95	44,52	26,36	4,82	0,00	0,00	8,81	0,06	8,87

Tabella 2.6 Esempificazione di replica statica ($N=5$).

	N					Delta Hedging
	3	5	9	15	21	
Media	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	-0,08
Dev. Standard	0,80	0,52	0,28	0,17	0,12	0,43
Minimo	-1,56	-1,10	-0,67	-0,40	-0,28	-2,02
Massimo	1,26	0,63	0,30	0,18	0,14	1,08
Simmetria	-0,24	-0,54	-0,81	-0,73	-0,64	-0,31
Curtosi	1,93	2,03	2,46	2,31	2,17	2,93
Valore Call	9,64	9,97	10,06	10,05	10,04	10,03

Tabella 2.7 Statistiche descrittive per il modello di Carr e Wu.

Si deduce immediatamente l'effetto positivo di un incremento del numero di opzioni di replica (N), in assenza di costi di transazione: l'*hedging error* medio e la sua deviazione standard calano note-

volmente, e contemporaneamente cresce la precisione della tecnica in $t=0$, come si può capire osservando l'ultima riga in cui è riportato il valore iniziale del portafoglio al variare di N ; questo valore si può confrontare con il prezzo vero, mostrato nell'ultima colonna sulla destra. Tale colonna elenca le varie statistiche descrittive nel caso di *delta hedging* giornaliero dello strumento *target*, tecnica di replica dinamica che – come si è detto nel Capitolo 1 – lavora in maniera ottimale proprio quando il contesto di riferimento è quello postulato da Black, Scholes e Merton. Si nota subito, tuttavia, che la *performance* prodotta dal metodo di Carr e Wu risulta migliore sotto diversi aspetti anche con un numero contenuto di opzioni di replica. Gli autori dimostrano nel *paper* che il divario tra le due strategie aumenta in misura maggiore quando si esce dal *framework* ideale di BSM e si ammette, ad esempio, la possibilità di osservare salti stocastici nell'andamento del prezzo del sottostante (e.g., Modello a salti stocastici di Merton).

Estensione del modello: Opzioni Asiatiche

Il modello di Carr e Wu viene introdotto con l'idea di proporre un'alternativa alle tecniche di replica dinamica per coprire opzioni *plain vanilla* europee. Gli autori, al termine del lavoro, suggeriscono un possibile impiego della strategia per opzioni esotiche *path dependent*, ovvero quelle opzioni il cui *payoff* finale dipende non soltanto dal prezzo del sottostante alla scadenza, ma anche da una serie di valori passati assunti dall'*underlying* nel corso della vita utile del derivato, in altre parole dal suo “percorso” temporale. Il problema fondamentale di quel tipo di approccio deriva dal fatto che la copertura andrebbe ri-bilanciata ad ogni *monitoring date*: questo elemento esclude di fatto l'utilizzo del modello per ogni opzione che preveda l'osservazione nel continuo del prezzo del sottostante, ma limita anche il vantaggio principale dell'attuazione di una strategia di replica statica (bassi costi di transazione) per gran parte dei derivati che rientrano nella categoria in questione.

Tuttavia, rimane possibile estendere l'impiego della strategia suggerita da Carr e Wu ad alcune *exotic options*, senza rinunciare ai principali benefici che la caratterizzano. Ad esempio, Wang, Shen e Qian (2015)²⁵ propongono un'applicazione del modello per opzioni asiatiche geometriche. Le opzioni asiatiche somigliano alle classiche opzioni europee *plain vanilla*, con la differenza che il prezzo di riferimento per calcolare il *payoff* finale non è S_T , bensì la media dei prezzi assunti dal sottostante in un predefinito arco temporale antecedente alla scadenza (\bar{S}): si classificano quindi come opzioni esotiche *path dependent*. La media può inoltre essere aritmetica o geometrica: nella pratica, gran parte dei contratti di questo genere fanno riferimento alla media aritmetica (più semplice ed immediata da comprendere e calcolare), ma la media geometrica risulta normalmente più facile da trattare in sede di *pricing*. In ogni caso, a meno che la volatilità del sottostante non sia decisamente elevata, media aritmetica e geometrica risultano pressoché identiche l'una all'altra.

²⁵ WANG, S., SHEN, Y., e QIAN, L., “Static Hedging of Geometric Average Asian Options with Standard Options”, *Communication in Statistics – Simulation and Computation*, (2015), 2101-2116.

In questo paragrafo, prendendo spunto dall'idea di Wang, Shen e Qian ma facendo uso di un diverso metodo di *pricing* per opzioni asiatiche geometriche, si mostrerà come estendere l'impiego della tecnica formulata da Carr e Wu a questo tipo di strumenti. Nello specifico, il modello a cui si è scelto di fare riferimento è quello sviluppato da Kemna e Vorst (1990)²⁶, con cui è possibile definire il prezzo di un'opzione scritta sulla media geometrica dell'*asset*, assumendo che il valore di quest'ultimo venga osservato nel continuo. La formula per trovare il prezzo corrente dello strumento è la seguente:

$$GAC_t = e^{-r(T-t)} [S_t e^{M+0,5V} N(d_1) - KN(d_2)]$$

dove,

$$M = (r - q - 0,5\sigma^2) [(T_0 - t) + 0,5(T - T_0)] \quad V = \sigma^2 \left[T_0 - t + \frac{(T - T_0)}{3} \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + M + V}{\sqrt{V}} \quad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + M}{\sqrt{V}}$$

Con T_0 che rappresenta la data a partire dalla quale si inizia a calcolare la media. La scelta di questo particolare modello è dovuta principalmente al fatto che risulta piuttosto semplice da capire e da utilizzare (la forma è molto simile a BSM); inoltre, sebbene la maggior parte delle opzioni asiatiche quotate dipendano dalla media aritmetica, spesso giornaliera, del prezzo del sottostante, la quadratura ottenuta attraverso il modello di Kemna e Vorst può con buona approssimazione ritenersi da²⁷. I passaggi effettuati per calcolare i parametri di *hedging* (K_i , W_i) sono analoghi a quelli svolti per la *call* europea *plain vanilla*, e verranno mostrati in appendice al presente capitolo.

La Tabella 2.8 mostra una simulazione di copertura tramite il modello di Carr e Wu applicato ad una *call* asiatica geometrica (*Geometric Asian Call*). Come si può vedere, la strategia sembra funzionare piuttosto bene già con tre sole opzioni di replica, dato che il valore del portafoglio rimane vicino a quello *target* per l'intera durata dell'*hedge*. La tecnica può essere utilizzata fintanto che $t < T_0$, ossia prima di entrare nell'*averaging period*: il motivo è che la formula di Kemna e Vorst non si può impiegare per esplicitare il valore dell'opzione tra T_0 e T , quando alcuni dei prezzi del sottostante che rientrano nel calcolo della media sono già stati osservati; in questo caso la copertura può essere mantenuta soltanto fino a T_0 . Tuttavia, nella pratica molte opzioni asiatiche prevedono che

²⁶ KEMNA, A.G.Z., e VORST, A.C.F., "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), 113-129.

²⁷ In generale, la media aritmetica di una qualsiasi variabile sarà sempre maggiore o uguale alla sua media geometrica. D'altra parte, aumentando il numero di osservazioni ($n \rightarrow \infty$) la media geometrica tenderà ad aumentare. Questi due effetti quindi, contrastano e si elidono a vicenda: da un lato la media aritmetica condurrebbe ad un valore dell'opzione più elevato, ma dall'altro la minore frequenza d'osservazione porterebbe ad una riduzione di quest'ultimo. Il risultato finale è che il prezzo di una opzione asiatica geometrica con osservazione continua è approssimativamente simile a quello di una opzione asiatica aritmetica con osservazione discreta (giornaliera).

l'*averaging period* inizi soltanto nell'ultimo mese di vita del derivato, ed attuare la strategia dall'emissione fino a T_0 può aiutare comunque i *traders* a coprire le proprie esposizioni.

Giorno	S_t	GAC_{Target}	c_1	c_2	c_3	Portafoglio di Replica	B_t	Portafoglio Ottimizzato
0	100	7,88	26,50	5,01	0,00	7,55	0,33	7,88
1	101,31	8,65	27,80	6,03	0,00	8,42	0,33	8,76
2	101,36	8,66	27,84	6,02	0,00	8,43	0,33	8,76
3	100,88	8,33	27,34	5,56	0,00	8,05	0,33	8,38
4	102,67	9,44	29,12	7,09	0,00	9,33	0,33	9,67
5	103,19	9,75	29,63	7,53	0,00	9,70	0,33	10,03
6	104,35	10,51	30,78	8,60	0,00	10,58	0,33	10,91
7	105,19	11,06	31,60	9,38	0,00	11,22	0,33	11,55
8	103,90	10,14	30,30	8,10	0,00	10,18	0,33	10,51
9	104,05	10,22	30,44	8,22	0,00	10,28	0,33	10,61
10	104,40	10,43	30,79	8,54	0,00	10,54	0,33	10,87
11	102,42	9,08	28,79	6,59	0,00	8,95	0,33	9,28
12	99,88	7,48	26,24	4,22	0,00	7,00	0,33	7,33
13	101,17	8,24	27,52	5,34	0,00	7,93	0,33	8,26
14	102,74	9,20	29,08	6,80	0,00	9,13	0,33	9,47
15	104,51	10,37	30,84	8,54	0,00	10,55	0,34	10,88
16	105,02	10,69	31,33	9,02	0,00	10,94	0,34	11,27
17	105,14	10,75	31,45	9,13	0,00	11,03	0,34	11,37
18	103,84	9,82	30,13	7,81	0,00	9,96	0,34	10,29
19	101,98	8,57	28,26	5,93	0,00	8,44	0,34	8,77
20	104,08	9,93	30,35	8,02	0,00	10,13	0,34	10,47
21	104,18	9,97	30,43	8,10	0,00	10,20	0,34	10,53

Tabella 2.8 Esempificazione di replica statica per una call asiatica geometrica ($N=3$).

	N					Delta Hedging
	3	5	9	15	21	
Media	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,07
Dev. Standard	0,67	0,41	0,23	0,13	0,09	0,12
Minimo	-1,24	-0,86	-0,52	-0,31	-0,22	-0,73
Massimo	1,00	0,51	0,26	0,15	0,11	0,25
Simmetria	-0,15	-0,48	-0,63	-0,63	-0,63	-0,53
Curtosi	1,78	1,97	2,16	2,18	2,19	3,35
Valore Call	7,55	7,81	7,88	7,89	7,88	7,88

Tabella 2.9 Statistiche descrittive per il modello di Carr e Wu applicato ad opzioni asiatiche.

Le statistiche descrittive presentate dalla Tabella 2.9 confermano ulteriormente la bontà del modello e la possibilità di utilizzarlo al di fuori del contesto proposto dagli autori. Sebbene il *delta hedging* risulti un ottimo candidato per la copertura²⁸, la replica statica si conferma essere migliore (anche in assenza di costi di transazione), e la sua *performance* cresce all'aumentare di N .

2.5 MODELLI A CONFRONTO: ESEMPI PRATICI

I due modelli principali analizzati nel Capitolo 2 (Wu e Zhu (2011) e Carr e Wu (2003)) nascono dalla volontà dei rispettivi autori di proporre nuove tecniche di replica statica per opzioni che possano essere impiegati dai *traders* per coprire le esposizioni attive nei propri portafogli (*books* di negoziazione). In entrambi i *papers*, viene illustrata l'applicazione ad opzioni europee *plain vanilla* delle strategie sviluppate: l'impiego dei metodi esaminati può comunque essere esteso anche ad altri tipi di *exotic options*, per le quali sono stati prodotti alcuni esempi nel corso della trattazione.

Il *test* decisivo per comprendere fino in fondo i modelli presentati ed affermarne la validità, non può che essere condotto attraverso l'utilizzo di dati reali (serie storiche), in maniera tale da avere una prospettiva completa in un contesto di riferimento non più teorico (ad esempio Black, Scholes e Merton) ma caratterizzato da una serie di fattori in presenza dei quali è interessante cercare di capire se l'efficacia delle strategie in esame possa risultare compromessa.

Copertura di SPX (S&P 500 Index) Options

Le *calls* e *puts* europee scritte sull'indice S&P 500 sono tra le opzioni *cash settled* più negoziate del CBOE (*Chicago Board Options Exchange*). Gli elevati volumi di scambio garantiscono liquidità per una notevole varietà di scadenze e prezzi d'esercizio per questo tipo di strumenti. Per effettuare l'analisi empirica dei modelli presentati nel Capitolo 2, è stato creato un *dataset* contenente le serie storiche di prezzi e volumi per le SPX *Options*. I dati sono stati reperiti giorno per giorno direttamente dal sito del CBOE²⁹, per un arco di tempo che va dal 31 Ottobre 2016 al 30 Novembre 2016 (21 giorni lavorativi). I dati sono stati quindi utilizzati per produrre alcune simulazioni di *hedging* come mostrato in precedenza; di seguito, verranno esposti e commentati alcuni degli esempi più significativi tra quelli ottenuti, allo scopo di definire ulteriori aspetti delle due strategie riscontrati in questa fase. Come modello di riferimento per stimare i parametri della quadratura è stato impiegato Black, Scholes e Merton. Al 31 Ottobre 2016, l'indice S&P 500 quotava a 2126,15 punti. Come opzione *target* è stata scelta una *call* europea con prezzo d'esercizio 2150 e scadenza al 28 Aprile 2017 ($\approx 0,5$ anni). Il *dividend yield* atteso era pari a 2,13% (*Bloomberg*) ed il tasso d'interesse privo di rischio sui titoli governativi americani a 6 mesi valeva 0,51% (*US Department of the Treasury*). Dati gli input appena definiti, la volatilità implicita che giustificava un valore corrente dell'opzione pari a

²⁸ La media dei prezzi è meno volatile del prezzo stesso: ciò implica che il prezzo finale della *call* asiatica sia inferiore a quello della equivalente *call* europea, e che il delta sia più stabile per la prima che per la seconda, migliorando l'efficacia del *delta hedging*.

²⁹[Http://www.cboe.com](http://www.cboe.com)

\$ 74 (prezzo medio tra *bid* e *ask*) in base al modello BSM era circa 15,66%. Per formare il portafoglio di replica sono state usate sia 3 che 5 opzioni, con prezzi d'esercizio quanto più possibile vicini a quelli generati dalla quadratura di Gauss-Hermite e i pesi ottenuti tramite la risoluzione del modello. Ad esempio, nel caso in cui $N=3$ sono stati generati *strike prices* pari a 1929,13 (≈ 1925), 2151,37 (≈ 2150) e 2399,22 (≈ 2400) con pesi rispettivamente uguali a 16,61%, 66,44% e 16,61%.

<i>Data</i>	<i>S&P 500</i>	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	222,40	54,60	0,75	73,34	0,66	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	206,40	46,15	0,65	65,05	0,66	65,71
02/11/2016	2097,94	59,30	196,25	40,80	0,50	59,79	0,66	60,45
03/11/2016	2088,66	57,30	192,00	39,10	0,53	57,95	0,66	58,62
04/11/2016	2085,18	55,70	189,55	37,95	0,63	56,80	0,66	57,46
07/11/2016	2131,52	71,95	224,10	53,10	0,78	72,63	0,66	73,29
08/11/2016	2139,56	62,55	205,45	44,30	0,93	63,71	0,66	64,37
09/11/2016	2163,26	92,05	257,45	72,65	1,13	91,21	0,66	91,88
10/11/2016	2167,48	87,15	246,40	67,55	1,38	86,03	0,66	86,69
11/11/2016	2164,45	88,95	249,50	69,15	1,23	87,59	0,66	88,25
14/11/2016	2164,20	89,75	253,90	71,70	1,40	90,04	0,66	90,70
15/11/2016	2180,39	92,50	263,80	77,20	1,58	95,37	0,66	96,03
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	279,80	86,05	1,90	103,96	0,66	104,62

Tabella 2.10 Esempio di replica statica per *SPX Options* ($N=3$).

<i>Data</i>	<i>S&P 500</i>	c_{Target}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	<i>Portafoglio di Replica</i>	B_t	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	334,55	180,30	54,60	2,45	0,18	73,22	0,78	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	316,45	165,40	46,15	1,90	0,15	65,11	0,78	65,89
02/11/2016	2097,94	59,30	305,00	155,75	40,80	1,55	0,15	59,92	0,78	60,70
03/11/2016	2088,66	57,30	299,90	152,05	39,10	1,53	0,13	58,14	0,78	58,92
04/11/2016	2085,18	55,70	296,95	150,00	37,95	1,68	0,20	57,07	0,78	57,85
07/11/2016	2131,52	71,95	337,40	180,80	53,10	2,15	0,18	72,50	0,78	73,28
08/11/2016	2139,56	62,55	316,55	164,15	44,30	2,33	0,28	63,94	0,78	64,72
09/11/2016	2163,26	92,05	374,50	212,10	72,65	3,85	0,33	90,61	0,78	91,39
10/11/2016	2167,48	87,15	361,80	202,45	67,55	4,15	0,38	85,69	0,78	86,47
11/11/2016	2164,45	88,95	365,50	205,15	69,15	3,95	0,35	87,13	0,78	87,91
14/11/2016	2164,20	89,75	370,20	209,30	71,70	4,50	0,45	89,58	0,78	90,36
15/11/2016	2180,39	92,50	380,65	218,35	77,20	5,20	0,48	94,78	0,78	95,56
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	398,10	233,40	86,05	6,25	0,50	103,24	0,78	104,03

Tabella 2.11 Esempio di replica statica per *SPX Options* ($N=5$).

I risultati della strategia sono mostrati nelle Tabelle 2.10 e 2.11. Si può notare immediatamente che, in linea con quanto osservato attraverso le simulazioni teoriche, la *performance* della tecnica si conferma valida, anche con un portafoglio formato da tre sole opzioni. La precisione con $N=5$ stavolta è invece leggermente peggiore del caso $N=3$: un riscontro totalmente in disaccordo con il fondamento teorico del modello, che prevede un'accuratezza crescente e lineare (riduzione del termine di errore) all'aumentare del numero di strumenti che vengono inclusi nel portafoglio di replica. La ragione di questo comportamento "anomalo" della strategia è probabilmente legata alla struttura imposta dalla quadratura. Incrementando gradualmente N infatti, si tende a coinvolgere nella copertura opzioni *deep-out* o *deep-in-the-money*, opzioni che si caratterizzano per due aspetti fondamentali: sono innanzitutto meno liquide di altri contratti la cui *moneyness* (K/S_t) si trova in un intorno di 1, e inoltre – data la presenza generalmente osservabile di *volatility smiles* nei mercati azionari – le opzioni con prezzi d'esercizio molto alti o molto bassi rispetto al valore corrente del sottostante si caratterizzano per livelli di volatilità implicita decisamente diversi tra loro. Quest'ultimo elemento è probabilmente decisivo nel giustificare la minore efficacia del portafoglio di copertura formato da cinque opzioni: aumentare N significa aumentare anche la dispersione degli *strike prices* intorno a K_{Target} (che nell'esempio proposto è estremamente vicino al prezzo corrente dell'*underlying*), includendo nella replica degli strumenti meno liquidi e che presentano volatilità implicite differenti. La struttura rigida imposta dai modelli di Carr e Wu e BSM fa sì che l'unica volatilità coinvolta nella stima dei parametri non sia in grado di descrivere adeguatamente la realtà, compromettendo in parte la precisione dell'*hedge*. Una maniera per risolvere questo problema sarebbe quella di adottare un *pricing model* di riferimento in grado di considerare in modo appropriato la struttura della volatilità.

<i>Data</i>	<i>S&P 500</i>	c_{Target}	c_d	c_c	c_u	<i>Portafoglio di Replica</i>	<i>Ratio</i>	<i>Portafoglio Ottimizzato</i>
31/10/2016	2126,15	74,00	201,15	33,15	1,53	70,98	0,96	74,00
01/11/2016	2111,72	65,05	185,55	26,60	1,20	63,64	0,96	66,35
02/11/2016	2097,94	59,30	175,60	22,50	0,98	59,00	0,96	61,51
03/11/2016	2088,66	57,30	171,80	21,30	1,05	57,43	0,96	59,87
04/11/2016	2085,18	55,70	169,45	20,65	1,15	56,51	0,96	58,92
07/11/2016	2131,52	71,95	202,25	31,90	1,35	70,68	0,96	73,69
08/11/2016	2139,56	62,55	184,55	25,10	1,65	62,82	0,96	65,50
09/11/2016	2163,26	92,05	234,45	48,10	2,35	87,10	0,96	90,81
10/11/2016	2167,48	87,15	224,30	43,80	2,65	82,45	0,96	85,96
11/11/2016	2164,45	88,95	227,10	44,95	2,45	83,69	0,96	87,25
14/11/2016	2164,20	89,75	231,45	46,90	2,85	85,87	0,96	89,53
15/11/2016	2180,39	92,50	240,90	51,65	3,25	90,72	0,96	94,58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30/11/2016	2199,20	108,00	256,40	57,90	3,95	97,99	0,96	102,17

Tabella 2.12 Esempio di triangolo simmetrico per SPX Options.

Per testare il modello di Wu e Zhu si è riprodotto un triangolo simmetrico con caratteristiche simili al portafoglio con tre opzioni mostrato in Tabella 2.10, con alcune differenze: i prezzi d'esercizio per le opzioni *down*, *centre* e *up* sono rispettivamente pari a 1950, 2150 e 2350 ($\Delta K=200$) e la scadenza dell'opzione centrale (T_c) è il 31 Gennaio 2017. La decisione di avere $T_0 > T_c$ è dovuta all'osservazione fatta in precedenza, secondo cui la strategia risulta più stabile in questo caso e i pesi non divergono al variare della spaziatura tra gli *strikes*. Questi ultimi sono stati poi fissati di conseguenza, cercando di garantire una struttura simile a quella impostata dal modello di Carr e Wu e di ottenere allo stesso tempo delle quantità positive e ragionevolmente contenute per il portafoglio di replica ($w_d=w_u=27,74\%$; $w_c=44,52\%$). Il risultato della simulazione è mostrato in Tabella 2.12.

Il triangolo replica abbastanza bene il *target*, ottenendo una *performance* leggermente meno accurata rispetto al modello di Carr e Wu. Tuttavia, il confronto diretto non è particolarmente significativo, poiché le due strategie coinvolgono opzioni diverse tra loro e non risulterebbe in ogni caso conclusivo un paragone effettuato sulla base di un singolo esempio.

Dopo aver testato il comportamento delle due tecniche proposte nel Capitolo 2 su una serie di strumenti estratti dal *dataset* per le opzioni sull'S&P 500, è possibile trarre alcune conclusioni. In primo luogo, i metodi di replica statica analizzati producono coperture efficaci, ed in presenza di costi di transazione un portafoglio costruito con tre soli strumenti è senz'altro in grado di garantire una *performance* complessivamente superiore al *delta hedging*. Inoltre, è stato possibile osservare che entrambe le strategie lavorano meglio quando l'opzione *target* è *near-the-money*: questo aspetto molto importante non è stato riscontrato dagli autori dei due *papers* ma rivela un particolare interessante, ovvero che la replica statica ottiene risultati migliori laddove il *delta hedging* tende a fallire con maggior probabilità, e viceversa. La ragione è semplice: quando l'opzione da coprire è *at-the-money*, il gamma è estremamente elevato e di conseguenza il delta tende ad essere piuttosto variabile, con effetti negativi per la copertura dinamica. Questo comportamento sottolinea ancor più chiaramente l'importanza delle strategie di replica statica in ambito di *hedging* delle opzioni, fornendo uno strumento alternativo e complementare di assoluto rilievo rispetto al più "classico" *delta hedging*.

Infine, i due metodi in esame mostrano di soffrire un po' l'impostazione deterministica attribuita dal modello di Black, Scholes e Merton, in particolare la definizione di una struttura rigida per la volatilità del sottostante, che non è in grado di considerare opportunamente la presenza di fenomeni (*skew*, *smile*...) ampiamente osservati e riconosciuti nella pratica. Sebbene il risultato prodotto dalle simulazioni possa considerarsi decisamente soddisfacente, il limite appena citato porta ad effettuare alcune considerazioni: innanzitutto, è sufficiente includere nel portafoglio di replica un numero ridotto di contratti (ad esempio tre, come nelle situazioni analizzate) per ottenere una buona copertura ed evitare allo stesso tempo di dover sopportare ingenti costi di transazione o esporsi in maniera significativa al rischio – già discusso – derivante dall'acquisto di opzioni *deep out* o *deep in the money*. La seconda riflessione riguarda invece il modello di riferimento da utilizzare: adottare BSM si-

gnifica semplificare il *framework* ma anche imporre delle restrizioni alla *performance* potenziale della strategia. Modelli più flessibili, qualora applicabili³⁰, potrebbero in teoria far registrare risultati migliori, poiché sarebbero in grado di tenere conto di un insieme più ampio di fattori e circostanze.

³⁰ Si ricordi che il metodo di quadratura di Gauss-Hermite (Carr e Wu) prevede che l'integrale da approssimare contenga una funzione che sia rappresentabile in una forma ben definita. Cambiare il modello di riferimento non garantisce che la strategia sia compatibile con esso, laddove potrebbe risultare impossibile esprimere la funzione integranda nella forma desiderata.

Appendice al Capitolo 2

DIMOSTRAZIONE DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ NEUTRALE AL RISCHIO

La funzione di densità di probabilità neutrale al rischio è stata ricavata nel 1978 da Breeden e Litzenberger. Il punto di partenza per la dimostrazione è semplicemente l'espressione del valore corrente di una generica opzione in termini del valore atteso attualizzato del *payoff* a scadenza. Nel caso di una *call* ad esempio, questo valore è dato da:

$$c_t = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} g(S) \text{Max}[S-K; 0] dS$$

dove $g(S)$ esprime la distribuzione di probabilità di S . Prendendo la derivata rispetto a K dei termini a destra e a sinistra dell'uguaglianza, si ottiene:

$$\frac{\partial c_t}{\partial K} = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} g(S) \frac{\partial \text{Max}[S-K; 0]}{\partial K} dS$$

La derivata della funzione massimo è semplice da calcolare: varrà infatti 0 per $S < K$ e -1 per $S > K$. Di conseguenza, è possibile riscrivere l'equazione come segue:

$$\frac{\partial c_t}{\partial K} = -e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} g(S) dS$$

Prendendo adesso la derivata seconda rispetto a K , si ha:

$$\frac{\partial^2 c_t}{\partial K^2} = -e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial K} \int_K^{\infty} g(S) dS = \frac{-e^{-r(T-t)}}{dK} \left[\int_{K+dK}^{\infty} g(S) dS - \int_K^{\infty} g(S) dS \right] = \frac{e^{-r(T-t)}}{dK} [g(K) dK]$$

Il secondo passaggio sfrutta la definizione di derivata di una funzione come limite del rapporto incrementale per dx che tende a zero. Infine, semplificando dK nell'ultima espressione, si giunge al risultato finale:

$$\frac{\partial^2 c_t}{\partial K^2} = e^{-r(T-t)} g(K) \rightarrow \boxed{g(K) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 c_t}{\partial K^2}}$$

Questa formula è innanzitutto *model-independent*, perché non deriva da alcuna assunzione o non si lega ad alcun modello in particolare (e.g. Black, Scholes e Merton), fornendo quindi una relazione di carattere generale. L'equazione per la densità di probabilità neutrale a rischio ottenuta da Breedan e Litzenberger permette quindi, data una serie di opzioni con differenti prezzi d'esercizio, di ottenere una distribuzione di probabilità implicita per il prezzo del sottostante: ad esempio, nel contesto classico in cui si assume che il sottostante cresca nel tempo secondo un moto Browniano geometrico, la distribuzione dell'*underlying asset* (in presenza di volatilità costante) è log-normale. L'equazione di Breedan e Litzenberger consente, dati i prezzi delle opzioni quotate sul mercato, di stimare la distribuzione implicita ed individuarne le caratteristiche fondamentali.

MODELLO DI CARR E WU (2002) PER OPZIONI ASIATICHE GEOMETRICHE

L'impiego del modello di Carr e Wu si può estendere al caso di un'opzione (*call* o *put*) asiatica geometrica. Per dimostrare in che modo possa essere ottenuto tale risultato, si procede in primo luogo – come nel *paper* originale – ad esplicitare il valore dell'opzione *target* in funzione del suo valore atteso ad una generica data futura u . Nel caso di una *call* asiatica geometrica (*GAC*), si ha:

$$GAC(S,t;K,T;\Theta) = e^{-r(u-t)} \int_0^{\infty} g(S,t;K,u;\Theta) GAC(K,u;K,T;\Theta) dK$$

Data la formula per la funzione di densità di probabilità neutrale al rischio di Breedan e Litzenberger (1978), la relazione appena mostrata si può riscrivere come di seguito:

$$GAC(S,t;K,T;\Theta) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial K^2} c(S,t;K,u;\Theta) GAC(K,u;K,T;\Theta) dK$$

Da cui, ponendo

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} GAC(K,u;K,T;\Theta)$$

Si ha,

$$GAC(S,t;K,T;\Theta) = \int_0^{\infty} w(K)c(S,t;K,u;\Theta)dK$$

A questo punto, si può applicare il metodo di quadratura di Gauss-Hermite per approssimare l'integrale ad una sommatoria finita ed ottenere una strategia implementabile per la copertura dell'opzione *target*. Facendo riferimento al modello di *pricing* di Kemna e Vorst (1990), si può esplicitare la funzione gamma $w(K)$:

$$w(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} GAC(K,u;K,T;\Theta) = e^{-r(T-u)+M+V/2} \frac{n(d_1)}{K\sqrt{V}} = e^{-r(T-u)+M+V/2} \frac{e^{-d_1^2/2}}{K\sqrt{2\pi V}}$$

Imponendo dunque $d_1 = x\sqrt{2}$ la funzione integranda assume la forma richiesta dalla regola di quadratura ed è possibile ottenere i prezzi d'esercizio e i pesi relativi per ciascuna opzione del portafoglio di replica. Esplicitando K rispetto a d_1 si ottiene quindi:

$$K_i = Ke^{x_i\sqrt{2V}-M-V}$$

Ed i pesi,

$$W_i = \frac{w(K_i)K_i'(x_i)}{e^{-x_i^2}} w_i = \frac{e^{-r(T-u)+M+V/2}}{\sqrt{\pi}} w_i$$

La dimostrazione proposta illustra come sia possibile applicare il modello di Carr e Wu nel caso di opzioni asiatiche geometriche. La precisione della strategia aumenta se si incrementa il numero di azioni che compongono il portafoglio di copertura. L'aspetto più interessante, è che la tecnica consente di replicare un'opzione esotica acquistando una serie di opzioni *plain vanilla* europee; se si potesse ipotizzare di negoziare un *continuum* di strumenti con prezzi d'esercizio che vanno da 0 a infinito, la replica sarebbe addirittura esatta. La tecnica resta comunque applicabile fintanto che $t < T_0$, ovvero rimane valida fino all'inizio dell'*averaging period*, perché il modello di Kemna e Vorst non è in grado di estrapolare il valore di un'opzione asiatica se alcuni dei prezzi che rientrano nel computo della media geometrica sono già stati precedentemente osservati.

Capitolo 3

Replica Statica delle Opzioni con Barriera

Il terzo ed ultimo capitolo di questo elaborato tratta la replica statica delle c.d. “opzioni con barriera” (*barrier options*), le più negoziate tra le opzioni esotiche, generalmente scambiate sui mercati *Over The Counter*. Rispetto alle classiche *calls* e *puts plain vanilla* o alle altre *exotic options* analizzate fino a questo momento, il *payoff* finale delle opzioni con barriera cambia a seconda del fatto che il sottostante raggiunga o meno – nel corso della vita dello strumento o alla scadenza – un certo livello di prezzo prestabilito. La presenza della barriera genera un forte interesse da parte degli investitori per questi strumenti, perché li rende innanzitutto meno costosi delle corrispettive *plain vanilla options*, e anche per via del fatto che permettono di gestire in modo appropriato tutta una serie di situazioni il cui esito sia contingente al raggiungimento di un determinato valore per *S*. Le *barrier options* – come è stato mostrato nel Capitolo 1 – sono però difficili da coprire attraverso le classiche tecniche di *hedging* dinamico (delta e delta-gamma), proprio a causa del loro *payoff* discontinuo in corrispondenza della barriera. In alcuni casi, possono risultare invece estremamente semplici da replicare staticamente: alcune delle strategie che saranno esaminate nel corso del presente capitolo consentono infatti di ottenere una copertura esatta, o comunque molto precisa, di questi strumenti. Il Capitolo 3 passerà quindi in rassegna le principali tecniche di *static replication* per opzioni con barriera, proponendone diverse applicazioni ed esempi, e commentando alcuni interessanti riscontri empirici inerenti agli argomenti in analisi.

3.1 INTRODUZIONE ALLE OPZIONI CON BARRIERA

Le opzioni con barriera sono comparse per la prima volta sul mercato statunitense verso la fine degli anni '80, riscuotendo immediatamente grande successo tra gli investitori. Pochi anni più tardi, Reiner e Rubinstein (1991)¹ elaborano una serie di formule per prezzare questi strumenti in un *framework* “à la Black e Scholes”², e nello stesso anno il CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) e l'American Exchange quotano le prime *barrier options* su borse regolamentate. Negli anni successivi anche altri mercati iniziano a negoziare questi derivati, come ad esempio l'Australian Stock Exchange (ASX) nell'agosto del 1998.

¹ RUBINSTEIN, M., e REINER, E., “Breaking Down The Barriers”, *Risk*, (Settembre 1991), 28-35.

² Già Merton (1973) aveva fornito una serie di formule di valutazione per opzioni con barriera.

Oggi queste opzioni sono scambiate quasi esclusivamente su mercati *Over The Counter* non regolamentati. Tra le rare eccezioni si possono menzionare le opzioni digitali sul VIX (*Volatility Index*), l'indice che misura la volatilità implicita delle opzioni a 30 giorni sull'indice S&P500, quotate sul CBOE. L'assenza di volumi di scambio significativi su mercati regolamentati rende difficile la raccolta dei dati necessari per lo svolgimento di analisi empiriche, volte a testare la validità e il funzionamento dei modelli di *hedging* proposti, come in precedenza nel Capitolo 2 per il caso delle opzioni europee *standard*. Anche la letteratura esistente è piuttosto esigua in questo contesto, ma i contributi più rilevanti verranno in ogni caso esposti in seguito alla trattazione delle strategie di *static replication*, al termine del presente capitolo.

Esistono vari tipi di opzioni con barriera: le più semplici e conosciute (c.d. *plain vanilla barrier options*) sono le *knock-out* e *knock-in calls* e *puts*. Un esempio di *knock-out* è stato già introdotto in precedenza, nel Capitolo 1: la *Up and Out call* utilizzata per mostrare il (cattivo) funzionamento del *delta hedging* applicato alle *barrier options* a fini di copertura. Al momento dell'emissione, il sottostante aveva un prezzo pari a 95, mentre l'opzione aveva lo *strike* a 100 e una barriera (H) a 120. L'*UO call* è tale per cui se in qualsiasi momento antecedente alla scadenza o in T il valore di S fosse salito ("up") fino a raggiungere H , lo strumento sarebbe cessato di esistere ("out"); altrimenti, il *payoff* sarebbe stato lo stesso di una *plain vanilla call* con caratteristiche simili. Una *Up and In call* (o *put*) è invece un'opzione che entra in vita solo se il sottostante oltrepassa la barriera dal basso verso l'alto. Le *Down In* e *Down Out options* invece, prevedono che l'*underlying* debba scendere fino ad H per far sì che lo strumento si attivi o si cancelli.

Oltre alle *plain vanilla barrier options* ci sono poi numerose varianti più complesse. Le *parisian options* ("opzioni parigine") prevedono ad esempio che la barriera debba essere superata per un certo periodo di tempo minimo prima che il *knock-in* o il *knock-out* possano avere luogo. Le *reverse barrier options* sono opzioni con barriera *plain vanilla* ma caratterizzate dal fatto che la barriera sia *in-the-money*: una *UI call* con $K=100$ e $H=120$ ad esempio, qualora diventasse attiva otterrebbe istantaneamente un valore intrinseco di 20, al quale si aggiungerebbe il valore temporale. Le *double-barrier options* hanno di solito due barriere per il *knock-in* o per il *knock-out*, normalmente una superiore ("up") e una inferiore ("down") al valore corrente di S . Si possono considerare opzioni con barriera anche le *lookback* ("opzioni retrospettive") e le *ratchet*.

Per ciascuno degli strumenti menzionati è possibile applicare, più o meno facilmente, una serie di tecniche di copertura statica mediante *calls* e *puts plain vanilla*, che in determinate condizioni possono restituire una replica addirittura esatta del target. In generale, tali strategie garantiscono risultati estremamente accurati, soprattutto in confronto agli *hedge* dinamici analizzati al Capitolo 1 che – come si ricorderà – fornivano *performances* abbastanza deludenti. Il criterio generale che guida la *static replication* di questi strumenti è comune a tutte le strategie che verranno presentate, sebbene le varie tecniche presentino tra di loro differenze evidenti nell'approccio e nel metodo impiegato. Il concetto di fondo che le guida è quello per cui "se due portafogli hanno uguale valore in un

certo contorno, hanno uguale valore anche in tutti i punti al suo interno”³. Questo enunciato si rivelerà essere il principio essenziale alla base di ciascun metodo di replica statica che verrà proposto nel presente capitolo. In altre parole, sarà sufficiente costruire il portafoglio di copertura facendo in modo che assuma lo stesso valore dell’opzione target in certe condizioni per garantire che, in assenza di opportunità di arbitraggio, il valore dei due strumenti coincida sempre, per ogni livello di S e t . L’applicazione del criterio proposto fa sì che, nella maggior parte dei casi, una replica esatta richieda – come già si è visto per le opzioni *plain vanilla* esaminate al Capitolo 2 – la negoziazione di un *continuum* di opzioni di copertura: approssimare questa quantità infinita ad un numero finito genera un *hedging error*, che rimane comunque accettabile, soprattutto se messo a confronto con i risultati ottenuti dalle repliche dinamiche, discussi in precedenza.

I portafogli di copertura creati attraverso le strategie di *static replication* saranno sempre formati da opzioni *calls* e/o *puts* europee *plain vanilla*, mentre i criteri di composizione e gli strumenti da includere cambiano a seconda del modello a cui si fa riferimento.

Le opzioni con barriera costituiscono, in ultima analisi, la vera ragione per la quale nasce l’esigenza di formulare nuovi e più efficaci metodi di replica, metodi che possano adattarsi meglio alle caratteristiche di questi strumenti rispetto a quanto non fosse in grado di fare il *delta hedging* proposto da Merton nel 1973. Per tale motivo, la letteratura relativa alle tecniche di copertura statica di *barrier options* è decisamente più ricca rispetto a quella riguardante le *plain vanilla options*. L’obiettivo del Capitolo 3 sarà, in sintesi, quello di fornire un’analisi esaustiva e dettagliata dei principali contributi e lavori sull’argomento, cercando come in precedenza di mostrare esempi pratici e applicati delle strategie presentate e – laddove possibile – proporre delle estensioni o delle ottimizzazioni, nel tentativo di suggerire miglioramenti e avanzamenti per lo studio delle tecniche in esame.

3.2 REPLICA STATICA DI UNA BINARY OPTION

Le opzioni binarie (*binary options*), chiamate anche opzioni digitali (*digital options*), sono senza dubbio alcune tra le più semplici opzioni con barriera esistenti. Il *payoff* di una *binary call*, ad esempio, è strutturato in modo che al portatore venga pagato un ammontare fisso pari a 1 se S si trova oltre la barriera a scadenza, e 0 altrimenti: il nome deriva proprio da questa particolare struttura di pagamento, che ricorda quella del codice binario.

Il prezzo di una *binary call* si può calcolare in maniera estremamente intuitiva, ed in base alla valutazione neutrale al rischio si dimostra essere pari a:

$$BC_t = e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.1)$$

dove,

³ HULL, J. C., “Opzioni, Futures e Altri Derivati – 9ª Edizione, Edizione italiana a cura di Emilio Barone”, Pearson, (2015), p.651.

$$d_2 = \frac{\ln(S/H) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

mentre $N(\cdot)$ è la funzione di distribuzione di una variabile normale standard. In questo caso, si assume che il titolo sottostante non paghi dividendi. Il prezzo della *call* binaria equivale in altri termini alla probabilità *risk-neutral* che $S_T > H$, ovvero che l'*underlying asset* abbia oltrepassato la barriera alla scadenza, attualizzata al tempo t .

Le *digitals* possono essere replicate in maniera approssimativamente esatta tramite *spread* verticali. Gli *spread* verticali sono strategie in opzioni *plain vanilla* (*calls* o *puts*) che prevedono l'acquisto e la vendita simultanei di due strumenti dello stesso tipo, con lo stesso sottostante e stessa scadenza ma diverso prezzo d'esercizio. Un *bull call spread* per esempio, prevede l'acquisto di una *call* con *strike* pari a K_1 e la vendita di una *call* con *strike* pari a K_2 , con $K_1 < K_2$. Acquistando una certa quantità α del *vertical call spread* appena descritto, è possibile ottenere una replica quasi esatta della *call* digitale. La Figura 3.1 mette a confronto i *payoffs* dello strumento target con quello della strategia.

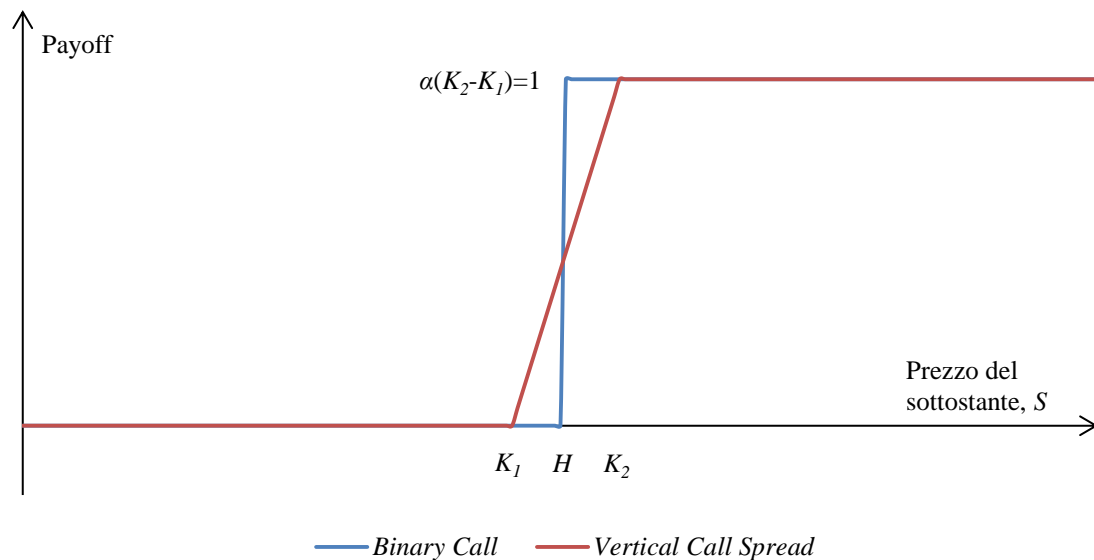


Figura 3.1 Payoffs a scadenza di una *Binary Call* e di un *Vertical Call Spread* al variare di S .

Nell'esempio mostrato in Figura 3.1, $K_1=90$, $H=100$ e $K_2=110$. Il *vertical call spread* dà luogo, per valori di S maggiori di K_2 , ad un pagamento pari a $\alpha(K_2 - K_1)$. Per replicare il *payoff* della *binary call* in quell'intervallo ($=1$), la quantità α di *spread* da acquistare risulta uguale in questo caso a 0,05. Si nota facilmente che per migliorare il *match* tra lo strumento target e la strategia sarebbe necessario ridurre la distanza tra i prezzi d'esercizio delle due *calls* che formano lo *spread*. Così facendo però, α aumenterebbe rapidamente: se ad esempio si imponesse $K_1=99$ e $K_2=101$, α risulterebbe pari a 0,5, ovvero 10 volte maggiore rispetto al caso precedente. In presenza di costi di transazione una tale si-

tuazione potrebbe creare problemi all'*hedger*, che si trova davanti ad un *trade-off*: riducendo ΔK aumenta la precisione della replica ma cresce anche la quantità di *calls* da acquistare e vendere per costruire lo *spread*. Al limite, per $\Delta K \rightarrow 0$ ($K_1 = K = K_2$) si ottiene $\alpha = \infty$, chiaramente una situazione irrealizzabile, anche senza tenere in considerazione il costo che l'attuazione della strategia comporterebbe.

La replica statica tramite *vertical spread* può essere facilmente estesa anche al caso di *binary puts*, sostituendo il *bull call spread* con un *bear call* o *put spread*. Questa tecnica di copertura per le opzioni digitali è talmente semplice ed efficace da mettere in pratica che spesso i *traders* che vendono gli strumenti in questione ai propri clienti li prezzano e li gestiscono proprio come se fossero degli *spreads*, ad insaputa delle loro controparti, per le quali in realtà tale aspetto non è realmente importante, mentre lo è invece per l'*hedger* in un'ottica di *risk management* della propria esposizione. Il prezzo richiesto al cliente quindi, deriva in realtà da un *over-hedge* dell'opzione digitale, costruito in maniera del tutto analoga a quanto visto in precedenza ma con la differenza che K_2 viene posto sullo stesso livello di H . Graficamente, si ottiene un *payoff* come quello mostrato nella Figura 3.2.

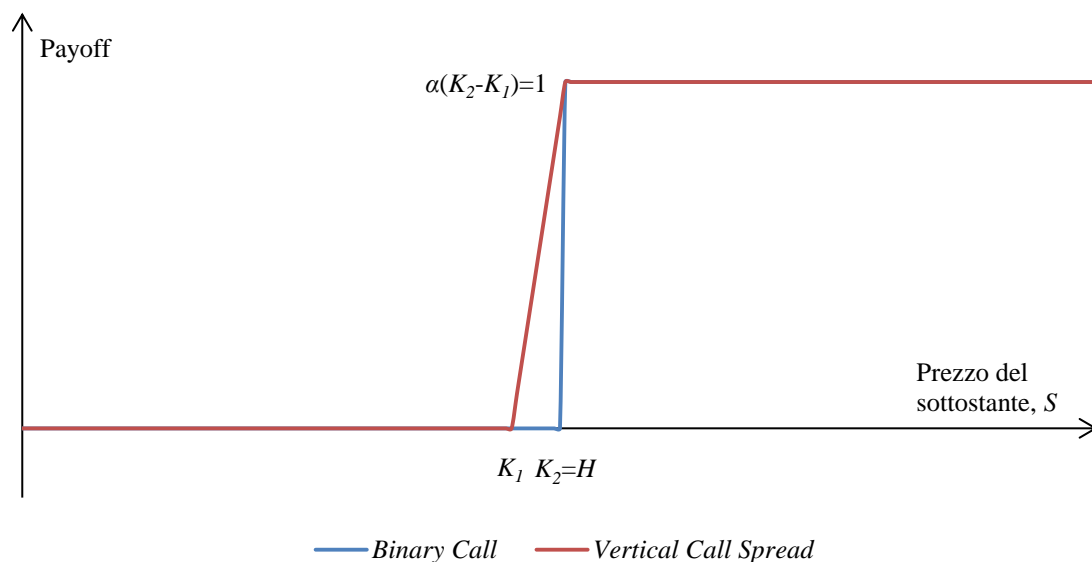


Figura 3.2 Payoffs a scadenza di una Binary Call e di un Vertical Call Spread al variare di S , con $K_2 = H$.

Si vede facilmente che il *payoff* a scadenza del nuovo *vertical call spread* è sempre superiore o uguale a quello della *binary call*, per qualsiasi valore del sottostante. La quantità α risulta pari a 0,1 e consente di costruire una replica per l'opzione target tale per cui il portafoglio di copertura, composto da una *long position* in α *plain vanilla calls* con $K_1 = 90$ e una *short position* in α *plain vanilla calls* con $K_2 = H = 100$, dovrà avere – in assenza di opportunità di arbitraggio – un valore mai inferiore all'opzione digitale target (*over-hedge*).

BVZ Options

Il CBOE quota alcune opzioni binarie di tipo *call* e *put* a breve scadenza, scritte sull'indice VIX. Il *ticker* identificativo per queste opzioni è BVZ. Le *VIX Options* sono invece le *plain vanilla calls* e *puts* scritte sul VIX, e sono disponibili anche per scadenze più lunghe. L'esistenza di prezzi quotati per questi strumenti consente di effettuare una verifica di quanto appena discusso; in particolare, costruendo uno *spread* verticale con opzioni *plain vanilla* è interessante cercare di capire se la condizione di non arbitraggio riscontrata poco fa – e rappresentata graficamente in Figura 3.2 – venga rispettata. Ciò che ci si aspetta di osservare è che il costo di acquisto (*ask*) di una *call* digitale con una certa barriera H sia minore del costo di uno *spread* costruito acquistando (*ask*) una *plain vanilla call* con $K_1 > H$ e vendendo (*bid*) una *plain vanilla call* con $K_2 = H$. In altri termini, riproducendo la struttura proposta in Figura 3.2 si dovrebbe osservare una relazione tra la *binary call* e lo *spread* tale per cui il prezzo della prima sia sempre inferiore al prezzo del secondo, dato che il *payoff* di quest'ultimo domina il *payoff* dell'opzione digitale.

Prezzo d'esercizio	Binary Call		Plain Vanilla Call		Long Binary	Long Vertical Call Spread	Delta
	Bid	Ask	Bid	Ask			
10	0,9	1	5,7	5,9	1		
11	0,85	0,97	4,7	4,9	0,97	1,20	0,23
12	0,74	0,86	3,9	4,1	0,86	1,00	0,14
13	0,53	0,68	3,2	3,4	0,68	0,90	0,22
14	0,39	0,54	2,7	2,85	0,54	0,70	0,16
15	0,3	0,45	2,3	2,4	0,45	0,55	0,10
16	0,23	0,35	2	2,1	0,35	0,40	0,05
17	0,18	0,3	1,7	1,85	0,30	0,40	0,10
18	0,14	0,26	1,5	1,6	0,26	0,35	0,09
19	0,1	0,22	1,3	1,4	0,22	0,30	0,08
20	0,1	0,22	1,15	1,25	0,22	0,25	0,03
21	0,09	0,22	1	1,15	0,22	0,25	0,03
22	0,06	0,16	0,9	1	0,16	0,25	0,09
23	0,04	0,14	0,8	0,9	0,14	0,20	0,06
24	0,03	0,13	0,75	0,8	0,13	0,15	0,02
25	0	0,12	0,65	0,75	0,12	0,15	0,03

Tabella 3.1 Quotazioni di *calls plain vanilla* e digitali dal sito del CBOE al 12 gennaio 2017.

Pertanto, dal sito del CBOE sono stati ottenuti i dati relativi alle quotazioni di BVZ e VIX *Options* alla chiusura dei mercati il 12 gennaio 2017, quando il sottostante (VIX *Index*) quotava a 11,54. La Tabella 3.1 mostra alcune quotazioni dei prezzi *bid* e *ask* per gli strumenti in esame con scadenza 22 marzo 2017 ed una serie di prezzi d'esercizio che vanno da 10 a 25. Le ultime colonne sulla destra mostrano il costo di acquisto di una *binary call* e di uno *spread* con le caratteristiche appena discus-

se, e viene proposto anche il delta tra i due valori. La colonna dei delta è calcolata come semplice differenza tra la penultima e la terzultima colonna: ci si aspetta quindi di osservare un valore sempre positivo, come in effetti si può riscontrare per ognuno dei casi osservabili. In alcune situazioni il Δ tra i due strumenti è molto ridotto e addirittura quasi nullo, soprattutto per le opzioni *out-of-the-money*, confermando l'idea che spesso nella pratica le opzioni digitali tendono ad essere trattate alla stregua di *spreads* verticali.

3.3 MATURITY-SPREAD APPROACH

Uno tra i primi e più diffusi approcci alla replica statica di opzioni con barriera è il c.d. *maturity-spread approach*, proposto per la prima volta in un *working paper* del 1995 da Derman, Ergener e Kani⁴. Gli autori propongono una strategia basata sulla costruzione di un portafoglio di strumenti di replica con caratteristiche simili ma diverse scadenze, che si fonda sul principio fondamentale illustrato nel primo paragrafo, secondo cui se due portafogli hanno uguale valore in un certo contorno allora lo stesso sarà vero anche all'interno di tale contorno. Con la tecnica in analisi si riesce ad ottenere una replica estremamente precisa – ed in determinate circostanze addirittura esatta – dello strumento target. Nel presente paragrafo verrà illustrata l'idea sottostante al modello e saranno proposti alcuni esempi di applicazione pratica, per comprendere a fondo l'approccio adottato e poter discutere i risultati ottenuti.

Descrizione del modello

Il primo passo nella definizione della strategia è stabilire le dimensioni lungo le quali dovrà essere tracciato il contorno. Derman, Ergener e Kani propongono di prendere come riferimento le due variabili che giustificano il valore di un'opzione, in accordo alle ipotesi del modello di Black, Scholes e Merton: il sottostante (S) e il tempo (t). A questo punto, per replicare una generica *plain vanilla barrier option*, è necessario stabilire quale sia il contorno migliore lungo cui garantire l'uguaglianza tra il valore del portafoglio di replica e il valore dell'opzione target, costruendo il portafoglio con strumenti e pesi idonei al perseguimento dell'obiettivo.

Gli autori asseriscono che il contorno ottimale corrisponda ad un livello per l'*underlying asset* corrispondente alla barriera dell'opzione e un valore di t pari alla scadenza del derivato, T . La Figura 3.3 mostra il contorno in questione per una *Up and Out call*, lo stesso strumento esaminato nel Capitolo 1.

⁴ DERMAN, E., ERGENER, D. e KANI, I., "Static Options Replication", *Journal of Derivatives*, 2, 4, (Summer 1995), 78-95.

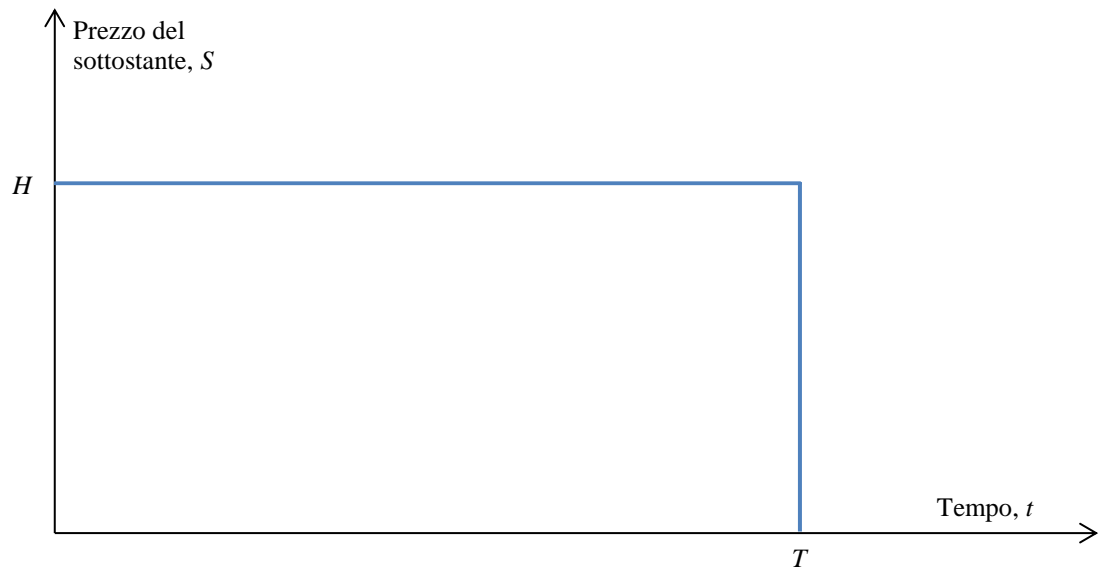


Figura 3.3 Contorno per una *Up and Out call* con barriera H e scadenza T .

Il contorno viene rappresentato diversamente a seconda del tipo di opzione con barriera che si intende replicare, ma non cambiano il principio di fondo, le dimensioni (S e t) e i valori (H e T) in base ai quali quest'ultimo deve essere delineato. Si è deciso di prendere l'esempio di una *Up and Out call* perché la strategia descritta verrà successivamente applicata a tale strumento, e si potrà effettuare un confronto diretto con il risultato ottenuto in precedenza tramite *delta hedging* e *delta-gamma hedging* dell'opzione in questione. Poiché il *framework* concettuale del modello di Derman, Ergener e Kani è estremamente semplice e lineare, risulta altrettanto facile adattarlo alle altre *plain vanilla barrier options*, e non si ritiene necessario specificare il procedimento caso per caso, evitando così inutili ripetizioni o una trattazione eccessivamente lunga e inappropriata.

Una volta stabilito il contorno, l'obiettivo della strategia come si è detto è far sì che il portafoglio di replica assuma lo stesso valore dell'opzione target lungo le due dimensioni specificate. In particolare, il portafoglio dovrà essere costruito in maniera tale da:

- Avere valore uguale all'*Up and Out call* per tutti i valori di $S < H$ quando $t = T$ (contorno verticale).
- Avere valore uguale all'*Up and Out call* per tutti i valori di $t < T$ quando $S = H$ (contorno orizzontale).

Per ottenere il *match* sul contorno verticale è sufficiente acquistare l'opzione *plain vanilla* sottostante: in questo caso, una *call* europea con lo stesso prezzo d'esercizio dell'*UO call*; se alla scadenza il prezzo dell'*asset* rimane al di sotto della barriera infatti, l'opzione rimane in vita e restituisce un *payoff* identico a quello di una *call plain vanilla*. Questo è vero però solamente se la barriera non viene raggiunta prima della scadenza, ovvero quando $S = H$ per $t < T$. Per tale motivo anche il contorno

orizzontale deve essere replicato. La replica del secondo contorno avviene attraverso la seguente procedura iterativa:

- Per prima cosa, si divide l'intervallo temporale che va da oggi alla *maturity* in N sotto-intervalli, ciascuno di lunghezza Δt .
- Si acquista o vende una certa quantità (q_1) di *calls plain vanilla* europee con scadenza T e prezzo d'esercizio uguale o superiore alla barriera, in modo tale che il portafoglio fin qui costituito (formato dalla *call* sottostante) possa replicare il valore dell'*UO call* in $T - \Delta t$.
- Si acquista o vende una certa quantità (q_2) di *calls plain vanilla* europee con scadenza $T - \Delta t$ e prezzo d'esercizio uguale o superiore alla barriera, in modo tale che il portafoglio fin qui costituito (formato dalla *call* sottostante e da q_1 *calls* europee con scadenza T e *strike* H) possa replicare il valore dell'*UO call* in $T - 2\Delta t$.
- Si prosegue in modo analogo fino a $t=0$.

I pesi delle opzioni in portafoglio sono dunque stabiliti in maniera iterativa e dipendono esclusivamente dal portafoglio preesistente costruito all'intervallo precedente. L'aggiunta di nuovi strumenti con scadenza più breve non causa infatti cambiamenti al valore che il portafoglio avrà nei vari sotto-intervalli successivi.

Un altro assunto fondamentale di questa tecnica è che quando il contorno viene raggiunto, ovvero a scadenza o qualora il sottostante toccasse la barriera, il portafoglio di *hedging* deve essere immediatamente liquidato. In assenza di costi di transazione e se le condizioni al contorno fossero pienamente rispettate, la copertura sarebbe esatta. Infatti, se S arrivasse a scadenza senza aver mai oltrepassato H , l'*UO call* verrebbe replicata precisamente dalla *call plain vanilla* che ha le sue stesse caratteristiche, mentre tutte le altre opzioni nel portafoglio scadrebbero prive di valore. Altrimenti, se S dovesse invece raggiungere la barriera prima di T , il *match* imposto sul contorno orizzontale garantirebbe un valore netto pari a zero per il portafoglio, così come l'opzione target (che cesserebbe definitivamente di esistere).

Il procedimento potrebbe sembrare macchinoso ma in realtà è estremamente semplice ed intuitivo e consente, come si vedrà, di realizzare una gestione efficace del rischio proveniente dall'esposizione in opzioni con barriera. L'applicazione pratica della strategia verrà mostrata per facilitarne la comprensione, catturandone gli aspetti fondamentali e commentando i risultati di maggiore interesse.

Applicazione del modello: Up and Out call

Per testare il modello di Derman, Ergener e Kani, si riprende l'esempio proposto al Capitolo 1 di una *Up and Out call* con scadenza a 20 settimane ($T=0,384$), scritta su un sottostante che non paga dividendi ed il cui prezzo corrente (S_0) è uguale a 95, il prezzo d'esercizio K è pari a 100, la barriera è 120 ed il tasso d'interesse privo di rischio e la volatilità sono costanti e rispettivamente pari a 5% e 30%.

Supponendo di voler coprire l'esposizione data dalla vendita dell'opzione target, il primo strumento da inserire nel portafoglio di replica, pertanto, è una *call plain vanilla* con le stesse caratteristiche dell'opzione con barriera, sulla quale viene assunta una posizione lunga: il contorno verticale è in tal modo replicato. Per ottenere il *match* del contorno orizzontale si stabilisce innanzitutto il numero di intervalli in cui dividere la vita residua del derivato: per ciascuno di essi si acquisterà o venderà una certa quantità q_i di *calls* con *strike* maggiore o uguale alla barriera e scadenza T . La necessità di porre il prezzo d'esercizio superiore o uguale ad H è dovuta al fatto che il valore di questa opzione in T deve essere nullo per $S < H$, allo scopo di evitare che il nuovo strumento interferisca con la replica del contorno verticale. Le Tabelle 3.2 e 3.3 mostrano le specifiche del portafoglio di replica per $N=3$ e $N=10$, ovvero rispettivamente 4 e 11 opzioni in totale.

Prezzo d'esercizio	Scadenza (in anni)	Prezzo iniziale Call	Quantità
100	0,384	5,702	1
120	0,384	1,207	-3,780
120	0,256	0,520	1,487
120	0,128	0,070	0,460

Tabella 3.2 Portafoglio di replica per $N=3$.

Prezzo d'esercizio	Scadenza (in anni)	Prezzo iniziale Call	Quantità
100	0,384	5,702	1,000
120	0,384	1,207	-6,901
120	0,345	0,987	2,933
120	0,307	0,777	0,990
120	0,27	0,58	0,48
120	0,23	0,40	0,28
120	0,19	0,25	0,19
120	0,15	0,13	0,13
120	0,12	0,05	0,10
120	0,08	0,01	0,08
120	0,04	0,00	0,06

Tabella 3.3 Portafoglio di replica per $N=10$.

Considerando ad esempio la Tabella 3.2, la quantità relativa alla seconda *call* ($K=120$; $T=0,384$) è calcolata imponendo che, per $S=H=120$, il portafoglio in $t=T-\Delta t=0,256$ sia uguale a zero (*match* sul primo punto appartenente al contorno orizzontale). Poiché la prima opzione vale 20,822 mentre la seconda vale 5,508 (quando $S=120$ e $t=0,256$), la quantità ottimale è $-20,822/5,508=-3,780$. In $t=T-2\Delta t$ viene imposta la stessa condizione: con $S=120$ e $t=0,128$, la prima *call* vale 22,043, la seconda *call* vale 7,997 e la terza *call* vale 5,508. La quantità q_2 è pertanto uguale a $-(22,043-3,780*7,997)/5,508=1,487$. La terza ed ultima quantità è ottenuta nella stessa maniera ed è pari a

0,460. Il procedimento iterativo è il medesimo anche per il caso in cui $N=10$, dove l'unico elemento che cambia rispetto all'esempio precedente è Δt .

Il valore in $t=0$ della *UO call* in base alla formula di valutazione proposta da Merton (1973)⁵ è uguale a 1,289, valore che era stato già mostrato nel Capitolo 1. Il valore del portafoglio di copertura con $N=3$ è invece pari a 1,947 ed è calcolato moltiplicando i prezzi iniziali delle *calls* per le quantità ottimali stimate. Con $N=10$ il valore iniziale del portafoglio risulta invece essere uguale a 1,503.

Si possono osservare sin da subito due importanti caratteristiche del modello. Innanzitutto, assumendo che il prezzo del sottostante venga monitorato continuamente, per replicare con esattezza un'opzione con barriera sarebbe necessario negoziare un numero infinito di opzioni di copertura, per ottenere un *match* tra il portafoglio e il target in ogni punto del contorno orizzontale. Poiché a livello pratico questo non è possibile per via dell'esistenza di un numero limitato di scadenze e per la presenza di costi di transazione, la replica è soggetta ad un certo grado di imprecisione. La seconda caratteristica che si osserva è che questa imprecisione sembra possa essere ridotta aumentando il numero di opzioni di replica contenute nel portafoglio, o in altre parole incrementando il numero di punti lungo il contorno temporale in cui viene garantita l'uguaglianza con l'opzione target. Passando da 4 a 11 strumenti di replica infatti, il valore iniziale dell'*hedging portfolio* si avvicina maggiormente a quello dell'*UO call*. La Figura 3.4 elabora visivamente questa intuizione, mostrando il valore iniziale del portafoglio di replica all'aumentare di N e comparandolo con il valore reale dell'opzione target.

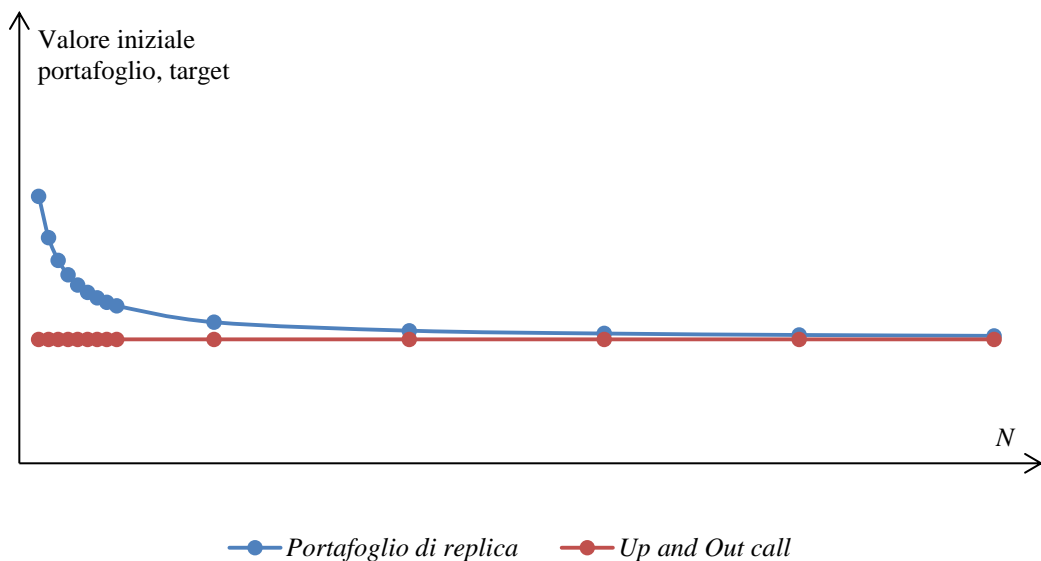


Figura 3.4 Valore iniziale del portafoglio di replica e dell'*UO call* al variare di N .

La figura è tracciata per valori di N uguale a 2, 3, ..., 10, 20, 40, 60, 80 e 100 opzioni di copertura. La precisione aumenta considerevolmente e costantemente, anche se il contributo marginale di ogni

⁵ MERTON, R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), 141-183.

nuovo strumento è progressivamente inferiore. Con $N=2$ il portafoglio di replica ha un valore iniziale pari a 2,218, con un grado di precisione di circa il 28%⁶. Per $N=10$ il valore del portafoglio è 1,503 e la precisione cresce a 83,41%, circa tre volte superiore. Aumentando ancora il numero di opzioni fino a $N=100$ si ottiene un'accuratezza di 98,28%.

Il riscontro effettuato conferma l'ipotesi che detenendo un numero sempre maggiore di *calls* di copertura si può migliorare l'efficacia dell'*hedge*, sebbene in misura gradualmente minore. Il risultato è in accordo anche con l'idea che se si potesse negoziare un *continuum* di strumenti in maniera tale da replicare ogni punto del contorno, la replica sarebbe precisa al 100%.

L'analisi del modello svolta fino a questo punto ha permesso di stabilire che la strategia suggerita da Derman, Ergener e Kani possa essere una buona soluzione per i *traders* che abbiano la necessità di coprire un'esposizione in opzioni con barriera. Persino nel caso di una *UO call* – una delle *barrier options* che può creare maggiori difficoltà all'*hedger* – la replica statica basata sul *maturity-spread approach* sembra funzionare bene, anche con un numero relativamente ridotto di opzioni di copertura.

La tecnica ha diversi lati positivi: innanzitutto, una volta impostata in $t=0$ non deve più essere ribilanciata o modificata, a meno che un qualsiasi punto del contorno non venga raggiunto. Il *trader* potrebbe comunque inoltrare – contestualmente alla composizione del portafoglio – un ordine con limite di prezzo, assicurandosi che se S dovesse raggiungere H la posizione sarebbe istantaneamente liquidata alle condizioni di mercato esistenti. In questo modo l'*hedger* può risparmiarsi l'onere dato dal monitoraggio continuo del prezzo dell'*underlying*, che potrebbe impiegare tempo e risorse.

Una volta compreso a fondo il funzionamento del modello, si può intuire come uno degli elementi di maggiore criticità rimanga il fatto di non poter garantire il *match* tra l'opzione target e il portafoglio di replica lungo tutto il contorno, in quanto sarebbe necessario negoziare un numero infinito di *calls* di copertura. Il compromesso raggiunto per poter applicare la strategia nel mondo reale è di discretizzare l'intervallo di tempo che va da 0 a T in N sotto-intervalli di durata Δt , e costruire la replica in modo che il valore del portafoglio sia nullo per $S=H$ quando t si trova in una qualsiasi *matching date*. La domanda che sorge spontanea a questo punto è: cosa accade se il sottostante arriva a toccare la barriera in una data che non coincide con alcuna di quelle tecnicamente “coperte”? Ad esempio, quando $N=10$ la corrispondenza tra il valore del portafoglio e il valore dell'*UO call* è di fatto assicurata ogni due settimane, per ciascuna settimana pari (2, 4, ..., 18, 20). Qual è allora il valore dell'*hedging portfolio* se S raggiunge H durante una settimana dispari?

La risposta al quesito è rappresentata in Figura 1.5, che mostra il valore del portafoglio per $N=3$ e per $N=10$ quando il sottostante coincide con la barriera ($S=H$), al variare del tempo residuo alla scadenza ($\tau=T-t$).

⁶ Il livello di precisione è calcolato come: $1-(V_P(N)/V_{UO}-1)$, dove $V_P(N)$ è il valore iniziale del portafoglio di replica con N opzioni di copertura mentre V_{UO} è il valore iniziale dell'*UO call*.

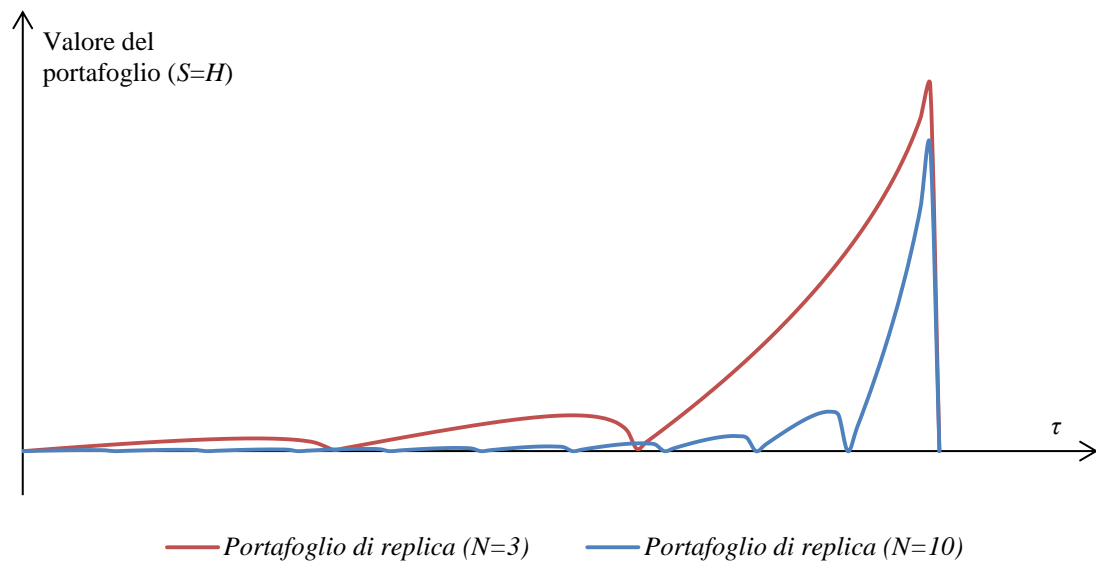


Figura 3.5 Valore del portafoglio di replica per $N=3$ e $N=10$ quando $S=H$, in funzione di τ .

La figura fornisce in primo luogo una diversa prospettiva dalla quale analizzare la strategia di Derman, Ergener e Kani, mostrando in maniera estremamente chiara l'idea di fondo del modello: garantire la corrispondenza tra portafoglio e opzione target in alcuni punti pre-stabiliti del contorno. Questi punti sono le *matching dates* tra le quali intercorre un intervallo costante pari a $\Delta t=T/N$, e si riescono ad identificare molto bene graficamente dalla Figura 3.5.

L'altro aspetto degno di nota – obiettivo ultimo della rappresentazione – è il comportamento del portafoglio tra due date consecutive. Il suo valore tende infatti a rimanere vicino a zero (come l'*UO call* quando il sottostante tocca la barriera) quando la scadenza è lontana, ma per $t \rightarrow T$ gli scostamenti diventano sempre più significativi. Il picco massimo si osserva un istante prima della *maturity*, sia per $N=3$ che per $N=10$, ed è più marcato nel primo caso che nel secondo. Dunque in ultima analisi sembrerebbe che la tecnica sia caratterizzata, seppure in misura minore, dagli stessi problemi già osservati per le tecniche dinamiche al Capitolo 1: quando S è in prossimità della barriera e l'opzione sta per giungere a scadenza la precisione dell'*hedge* ne risente, ed in maniera piuttosto chiara. Tuttavia, aumentare il numero di strumenti di copertura tende a far ridurre l'entità dell'errore. Inoltre, conoscendo questo limite si potrebbe pensare di strutturare la strategia in modo da garantire il *match* sul contorno orizzontale in maniera “disomogenea”, ovvero stabilendo un Δt minore per i punti vicini alla scadenza ed ampliando l'intervallo temporale man mano che ci si allontana da T . In questa maniera il picco osservato in Figura 3.5 andrebbe a ridursi senza però che venga aumentato il numero di opzioni negoziate, e quindi teoricamente a parità di costo si potrebbe ottenere una replica migliore. L'errore verrebbe in altre parole ridistribuito, su un livello mediamente più accettabile. Si noti che non risulterebbe altrettanto efficace attuare il medesimo espediente nell'applicazione del

delta-hedging, in quanto comporterebbe comunque un rischio elevato nella prima parte della vita dello strumento e potrebbe generare costi elevati per il *trader*.

In conclusione, la strategia sviluppata da Derman, Ergener e Kani si rivela un'ottima alternativa alla *dynamic replication* vista in precedenza. Entrambi gli approcci sono *model-dependent* e soggetti a costi di transazione, ma la replica statica implica un costo minore per l'*hedger* permettendo al contempo di ottenere un risultato senz'altro più accurato. La tecnica è anche caratterizzata, come si è detto, da un elevato grado di flessibilità nella scelta del contorno e degli strumenti di copertura da includere nel portafoglio. Ad esempio, per replicare l'*UO call* il *trader* può decidere di utilizzare *calls plain vanilla* con un prezzo d'esercizio superiore o uguale alla barriera, ed ha quindi notevole flessibilità nella scelta della composizione del portafoglio. Si noti che scegliere di acquistare o vendere opzioni con *strike prices* molto elevati implica la negoziazione di strumenti *deep-out-of-the-money* (che potrebbero essere non disponibili o poco liquidi) in quantità molto elevate. D'altra parte, è stato empiricamente osservato che questi derivati sono generalmente caratterizzati da una volatilità implicita minore e quindi normalmente da un prezzo relativamente contenuto, che potrebbe renderli più attraenti e convenienti per i *traders*. In generale, la soluzione suggerita dagli autori e riproposta nel presente elaborato (*strike* delle *calls* di copertura uguale alla barriera) sembra essere l'alternativa migliore.

Replica Statica di Discrete Barrier Options

Il *maturity-spread approach* di Derman, Ergener e Kani può essere utilizzato per replicare o prezzare opzioni con barriera discrete, ovvero opzioni per le quali il prezzo del sottostante non viene osservato nel continuo ma il monitoraggio avviene ad intervalli periodici con frequenza discreta (es., giornaliera, settimanale, mensile).

Per questi strumenti il contorno temporale non è rappresentato da una linea continua – come in Figura 3.3 – bensì da una serie di punti isolati, corrispondenti alle *monitoring dates*. Per ottenere il *match* tra il valore del portafoglio di copertura e dell'opzione target è sufficiente garantire pertanto che la corrispondenza valga per ogni t in cui il livello del sottostante è osservato. Di conseguenza, è possibile tramite la strategia in esame ottenere una replica esatta dell'opzione con barriera discreta, rendendola utilizzabile anche in un contesto di *pricing*. Ad esempio, ricollegandosi al caso dell'*UO call* già descritta, se S fosse monitorato una volta a settimana, per avere una replica esatta del target basterebbe imporre $N=20$, ottenendo un valore del portafoglio di copertura pari a 1,398: in assenza di costi di transazione e opportunità di arbitraggio, questo dovrebbe essere il prezzo di mercato dell'*Up and Out call* con frequenza di osservazione settimanale del sottostante.

Broadie, Glasserman e Kou (1997)⁷ hanno proposto una correzione semplice (ma approssimativa) per formulare il prezzo di un'opzione con barriera con frequenza di osservazione discreta, m .

⁷ BROADIE, M., GLASSERMAN, P. e KOU, S. G., "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options", *Mathematical Finance*, 7, 4, (Ottobre 1997), 325-349.

Nel caso di una *up-in* o *up-out option*, è sufficiente sostituire la barriera H nella formula di valutazione classica con $He^{0,5826\sigma T/m}$, dove il fattore 0,5826 è un'approssimazione della funzione:

$$-\zeta\left(\frac{1}{2}\right)/\sqrt{2\pi} \approx 0,5826$$

con ζ che rappresenta la funzione Zeta di Riemann. L'approssimazione commette un errore che è piccolo di $1/\sqrt{m}$, e tende quindi a ridursi con l'aumentare della frequenza di monitoraggio. La Figura 3.6 ripropone il confronto già mostrato in Figura 3.4 tra il valore iniziale del portafoglio e il valore iniziale dell'*UO call*, assumendo però stavolta che S sia osservato in N intervalli discreti e calcolando il prezzo dell'opzione target applicando la correzione appena mostrata.

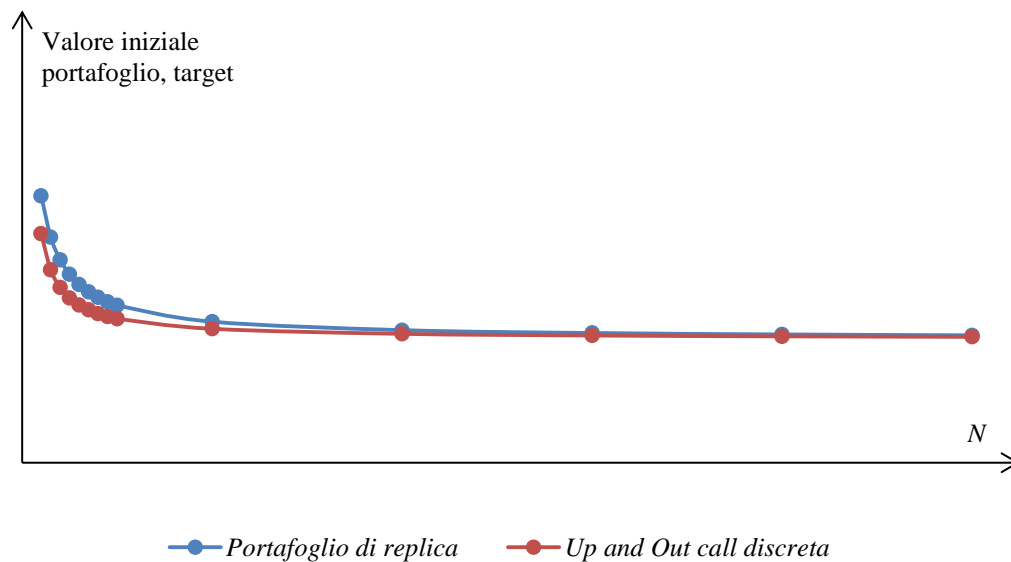


Figura 3.6 Valore iniziale del portafoglio di replica e dell'*UO call* discreta al variare di N .

La figura conferma pienamente le idee fin qui espresse. La correzione proposta da Broadie, Glasserman e Kou fa riallineare il valore dell'*UO call* a quello del portafoglio di *hedging*, e la differenza si riduce all'aumentare di N (e quindi di m), in linea con le attese. La strategia di Derman, Ergener e Kani permette dunque non solo di coprire l'esposizione di un'opzione con barriera con un margine di errore molto ridotto, ma consente anche di stabilire il prezzo di una *discrete barrier options* partendo dai prezzi quotati di *plain vanilla calls* o *puts*.

3.4 PUT-CALL SYMMETRY

Come si è visto nel Capitolo 2, le relazioni di parità tra opzioni finanziarie possono ricoprire un ruolo molto importante, tanto in sede di *pricing* quanto in sede di *hedging* di questi derivati. La *Put-Call Parity* ad esempio mette in rapporto i prezzi di una *call* e una *put plain vanilla* europee con quelle di

un contratto *forward* con le stesse caratteristiche. Per le opzioni con barriera esistono numerose relazioni di parità a seconda del tipo di strumento considerato. Una delle relazioni più note è la *In-Out Parity*, che mette a confronto una *knock-in* e una *knock-out option* con l'equivalente *plain vanilla* ordinaria. Nel caso di *call options* le equazioni sono le seguenti:

$$c = c_{ui} + c_{uo} \quad (3.2)$$

$$c = c_{di} + c_{do} \quad (3.3)$$

Per ottenere le formule per *put options* basta sostituire c con p nelle equazioni soprastanti. Le relazioni appena mostrate sono valide per qualsiasi livello di S e di t , come per la *Put-Call Parity*, e sono tanto semplici ed intuitive quanto utili.

Un'altra relazione, sulla quale si basano i lavori di Bowie e Carr (1994)⁸ e di Carr, Ellis e Gupta (1998)⁹, è invece la *Put-Call Symmetry* (PCS). La PCS si fonda su un rapporto di simmetria tra il *payoff* di una *call* e di una *put* scritte sullo stesso sottostante ma con diverso prezzo d'esercizio. L'equazione fondamentale è:

$$\frac{c(K)}{\sqrt{K}} = \frac{p(H)}{\sqrt{H}} \quad (3.4)$$

dove,

$$\sqrt{KH} = F$$

ed F è il prezzo *forward*. In questo contesto, K ed H rappresentano semplicemente i due *strikes* della *call* e della *put* europee *plain vanilla*, e non c'è alcun riferimento alle opzioni con barriera. L'Equazione 3.4 stabilisce però che se il prodotto dei prezzi di esercizio di una *call* e di una *put* europee (rispettivamente K ed H) è uguale al quadrato del prezzo *forward*, il valore di $1/\sqrt{K}$ *calls* è uguale al valore di $1/\sqrt{H}$ *puts*. La PCS è una relazione meno flessibile della *Put-Call Parity*, perché se S cambia anche il prezzo *forward* varia, e i parametri devono essere aggiornati per mantenere l'uguaglianza. Tuttavia – come si vedrà – la formula appena illustrata può essere impiegata per costruire un *hedge* statico di opzioni con barriera in alcune circostanze. Il presente paragrafo presenta ed esemplifica le strategie di *static replication* basate sulla PCS.

⁸ BOWIE, J. e CARR, P., "Static Simplicity", *Risk* 7, (1994), 45-49.

⁹ CARR, P., ELLIS, K. e GUPTA, V., "Static Hedging of Exotic Options", *The Journal of Finance*, 53, 3 (Giugno 1998), 1165-1190.

Descrizione del modello

Bowie e Carr (1994) e successivamente Carr, Ellis e Gupta (1998) sviluppano un approccio alla replica statica di opzioni con barriera incentrato sulla relazione di *Put-Call Symmetry*, definita dall'Equazione 3.4. La strategia viene applicata ad un elevato numero di *barrier options*, tra cui, oltre alle *plain vanilla knock-in* e *knock-out*, anche alcune *double-barriers* e opzioni retrospettive.

Le assunzioni iniziali proposte dagli autori sono piuttosto limitanti, ma in alcuni casi realistiche, e possono portare ad ottenere facilmente – sotto determinate condizioni – una copertura esatta di alcuni degli strumenti menzionati. Inoltre, le ipotesi più problematiche possono essere rimosse, consentendo l'impiego delle tecniche sviluppate tramite PCS per la definizione di limiti minimi e massimi entro i quali il prezzo dell'opzione target può muoversi, in assenza di possibilità di arbitraggio.

Nello specifico, si assume inizialmente che il sottostante dell'opzione con barriera sia caratterizzato da costi di trasferimento (*cost of carry*) nulli. Una simile ipotesi risulta decisamente problematica per la maggior parte degli *underlying assets*: nel caso di un'azione implicherebbe che il tasso *risk-free* sia pari al tasso di dividendo, mentre nel caso di una valuta richiederebbe l'uguaglianza tra il tasso estero e quello domestico. Nel caso di opzioni su *futures* l'assunzione si adatta invece perfettamente al contesto. In seguito, tale assunto viene rimosso dagli autori e l'utilizzo della strategia viene allargato ad un numero molto più ampio di strumenti, indipendentemente dal tipo di *asset* sottostante. L'altra ipotesi fondamentale è che la struttura della volatilità dell'*underlying* sia simmetrica. Nel *framework* concettuale di Black, Scholes e Merton – che verrà preso come riferimento, ancora una volta, per analizzare il modello – non esistono problemi relativamente a quest'ultima assunzione, che nella realtà può invece costituire un limite di cui è opportuno tenere conto: ad esempio, l'*equity* è notoriamente caratterizzato da una struttura della volatilità asimmetrica e potrebbe rivelarsi inadeguato ad essere trattato in un simile contesto.

Di seguito, verrà mostrata l'applicazione della PCS per replicare staticamente alcuni tipi di opzioni con barriera, assumendo dapprima l'assenza di costi di trasferimento e in seguito rilassando tale ipotesi. La struttura della volatilità verrà mantenuta fissa per qualsiasi livello di S e di t , coerentemente con le ipotesi del modello di riferimento (BSM).

Applicazione del modello: Down and Out call e Up and Out call

La necessità di assumere *zero cost of carry* è data dal fatto che quando il costo di trasferimento è nullo, il prezzo *spot* di un bene d'investimento coincide col suo prezzo *forward*, ovvero $S=F$. Ciò consente di replicare facilmente una *Down and Out call*, sfruttando la PCS per costruire un portafoglio di copertura composto da due soli strumenti. Il primo dei due è la *call plain vanilla* europea corrispondente, con lo stesso prezzo d'esercizio della *DO call*, e garantisce il *match* con il *payoff* del target alla scadenza. Per coprire anche il secondo contorno, dato dalla barriera, si può sfruttare invece la *Put-Call Symmetry*. L'idea è acquistare o vendere una certa quantità di un'altra opzione, in modo tale che lungo la barriera il valore del portafoglio totale sia sempre nullo, come nullo è il valore

della *DO call* quando $S=H$. Dato che fino a questo momento l'*hedging portfolio* è composto da una *call* europea con *strike* K , per $F=S=H$ in base alla PCS si ha che,

$$c(K) = \frac{K}{H} p\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

e il portafoglio totale di copertura per la *barrier option* sarà quindi:

$$\text{Portafoglio di replica} = c(K) - \frac{K}{H} p\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

La replica risulterà in questo caso esatta, a condizione che $H < K$. Infatti, se il sottostante raggiunge la barriera prima della scadenza la PCS garantisce che il valore netto del portafoglio di copertura sia nullo; come in precedenza, se un qualsiasi punto del contorno viene toccato il *trader* è tenuto a liquidare l'*hedge* per garantire l'effettivo funzionamento della strategia. Se invece S rimane al di sotto di H fino a T , la *call* europea replica esattamente il *payoff* della *DO call*, mentre le *puts* scadono prive di valore, poiché $H^2/K < H$ se $H < K$.

Per vedere un'applicazione pratica si consideri una *Down and Out call* con i seguenti parametri: $S_0=95$, $K=100$, $H=90$, $\sigma=20\%$, $r=q=5\%$, $T=1$. In base alla formula di valutazione il suo valore in $t=0$ è pari a 3,017. Una *call* europea con le stesse caratteristiche ha valore uguale a 5,250 mentre una *put* con prezzo d'esercizio $H^2/K=81$ vale 2,010. In base alla condizione di non arbitraggio, il portafoglio di replica composto da una posizione lunga in 1 *call* e da una posizione corta in $K/H=1,111$ *puts* deve avere lo stesso valore della *DO call* target. Poiché $5,250 - 1,111 * 2,010 = 3,017$ la relazione è valida e – stanti le ipotesi iniziali – la replica statica dell'opzione con barriera è ottenuta attraverso due semplici *plain vanilla options*.

Per l'*UO call* la tecnica diventa più elaborata, e per costruire un portafoglio di copertura contenente soltanto opzioni *plain vanilla* è necessario ricorrere ad un'approssimazione che comporta la presenza di un (ridotto) *hedging error*. Tramite la *In-Out Parity* mostrata in precedenza, il valore di una *Up and Out call* si può riscrivere come segue:

$$UOC(K,H) = C(K) - UIC(K,H)$$

Applicando invece la *Put-Call Parity* alla *Up and In call*, si ottiene:

$$UIC(K,H) = C(K) - UIP(K,H) - (H-K)UIB(H)$$

Dove l'*Up and In bond (UIB)* è un derivato che paga alla scadenza un *payoff* pari a 1 se il sottostante oltrepassa la barriera H prima di T . A questo punto, occorre innanzitutto replicare la *Up and In put*. Poiché una *Up and Out put* si può replicare in maniera del tutto analoga alla *Down and Out call* vista in precedenza, ossia sfruttando la PCS:

$$UOP(K,H)=P(K)-\frac{K}{H}C\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

tramite *In-Out Parity* si ha,

$$UIP(K,H)=P(K)-UOP(K,H)=\frac{K}{H}C\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

Infine, Carr, Ellis e Gupta dimostrano che l'*UI bond* si può replicare con esattezza come segue:

$$UIB(H)=2BC(H)+\frac{1}{H}C(H)$$

dove le due *binary calls (BC)* possono a loro volta essere riprodotte tramite *vertical call spreads*, come illustrato al Paragrafo 3.2 del presente capitolo. Gli autori propongono un'ulteriore approssimazione per le opzioni digitali attraverso il processo di estrapolazione di Richardson. Partendo dall'idea che il prezzo di un'opzione digitale in funzione del *vertical spread* possa essere formalizzato dall'espressione:

$$BC(H)=\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[C(H)-C\left(H+\frac{1}{n}\right) \right] = V(n)$$

l'extrapolazione a tre punti di Richardson stabilisce che:

$$V(n) \approx 0,5V(1)-4V(2)+4,5V(3)$$

con cui è possibile ottenere una replica sufficientemente accurata di una *binary call* tramite tre sole *calls plain vanilla*. In conclusione, è possibile coprire con buona precisione la *Up and Out call target* negoziando un portafoglio composto interamente da opzioni *call* europee standard:

$$UOC(K,H)=C(K)-\frac{K}{H}C\left(\frac{H^2}{K}\right)-(H-K)\left[-C(H+1)+16C\left(H+\frac{1}{2}\right)-27C\left(H+\frac{1}{3}\right)+\frac{12H+1}{H}C(H)\right]$$

Riprendendo nuovamente l'esempio dell'*UO call* presentato in precedenza nel presente capitolo e nel Capitolo 1 ma modificando il tasso di dividendo e portandolo ad un valore pari al *risk-free rate* ($S_0=95$, $K=100$, $H=120$, $\sigma=30\%$, $r=q=5\%$, $T=0,384$), il prezzo iniziale dello strumento target è pari a 1,184. La composizione del portafoglio di copertura è mostrata nella Tabella 3.4.

<i>Strumento</i>	<i>Prezzo d'esercizio</i>	<i>Quantità</i>	<i>Prezzo iniziale</i>
$C(K)$	100	1	4,894
$C(H^2/K)$	144	-0,833	0,093
$C(H+1)$	121	20	0,883
$C(H+1/2)$	120,5	-320	0,924
$C(H+1/3)$	120,33	540	0,938
$C(H)$	120	-240,167	0,967

Tabella 3.4 Portafoglio di replica basato sulla PCS per una *UO call*.

La somma ponderata dei vari strumenti per i relativi pesi restituisce un valore iniziale di 1,075, estremamente vicino al target a meno di un piccolo errore. La Tabella 3.4 mette anche in luce però che se da una parte il *trader* sia tenuto a negoziare solamente un limitato numero di opzioni per costruire il portafoglio, dall'altra le quantità richieste per alcune di esse sono davvero ingenti, e nella pratica comporterebbero un costo considerevole. Le quantità tendono ad aumentare con la distanza della barriera dal prezzo d'esercizio: quanto maggiore è H rispetto a K tanto più grandi saranno i pesi attribuiti agli strumenti di *hedging*.

In generale quindi, se per la replica della *DO call* è sufficiente negoziare due soli strumenti e in quantità molto contenute, le cose si complicano notevolmente nel caso di una *UO call*, per la quale il numero minimo¹⁰ di opzioni *plain vanilla* da detenere in portafoglio sale a sei, e l'esposizione da assumere per alcune di esse risulta estremamente elevata. Concettualmente, tale riscontro si dimostra in linea con la maggiore difficoltà generalmente osservabile nella copertura delle *Up and Out calls* rispetto alle *Down and Out calls*, come è stato più volte sottolineato.

La PCS può essere quindi utile per replicare staticamente alcuni tipi di opzioni con barriera. Gli autori derivano delle strategie simili a quelle appena presentate anche per strumenti più complessi, come le *double-barrier options*, le *ratchets* o le *lookbacks*. Tuttavia, considerando la notevole complessità di questi modelli, in aggiunta alle limitate possibilità di utilizzo dovute alla presenza di assunzioni fortemente restrittive sul costo di trasferimento del sottostante e sulla struttura della volatilità, le tecniche di copertura per *complex barrier options* non verranno trattate nel corso del presente elaborato. Riscuotono invece maggiore interesse – in questo contesto – i meccanismi già illustrati

¹⁰ Poiché la replica della *binary call* potrebbe essere migliorata aumentando ulteriormente il numero di strumenti contenuti nel portafoglio di copertura, la strategia prevede di fatto un numero minimo di opzioni richieste per ottenere un *hedge* accettabile del target.

per l'*hedging* di opzioni con barriera *plain vanilla*, quando nel *framework* di riferimento viene rimossa l'ipotesi di *zero cost-of-carry*, che permette di estendere di fatto la possibilità di applicare le metodologie in esame ad un numero ben più elevato di situazioni. Il prossimo sotto-paragrafo riformulerà pertanto i risultati ottenuti per la replica statica di *DO* e *UO calls* tramite *Put-Call Symmetry*, in presenza di costi di trasferimento non-nulli.

Estensione del modello: Costi di trasferimento non-nulli

Rilassando l'assunzione di partenza di costi di trasferimento pari a zero per l'*underlying asset*, le formule ricavate al sotto-paragrafo precedente possono ancora essere utilizzate per stabilire dei limiti minimi e massimi entro i quali il valore dell'opzione target può oscillare – in assenza di opportunità di arbitraggio. Le relazioni risultano molto semplici ed intuitive da ricavare, e potranno essere estremamente utili sia in un'ottica di *risk management* che, come si vedrà in seguito, in un'ottica di *pricing*.

Mentre le strategie sviluppate fino a questo momento sfruttando la PCS si possono applicare soltanto per alcuni tipi ben precisi di opzioni con barriera (e più nello specifico, tutte le opzioni il cui sottostante sia caratterizzato da *zero carrying cost*, come ad esempio le opzioni su *futures*), i risultati ottenuti rimuovendo l'ipotesi iniziale troveranno attuazione in un contesto molto più generale.

Nel caso di un'opzione con barriera scritta su un'azione – ad esempio – il costo di trasferimento è dato dalla differenza tra il tasso privo di rischio, r , e il tasso di dividendo annuale, q . Poiché entrambe le variabili possono risultare alternativamente maggiori o minori dell'altra, il *cost of carry* può essere sia positivo che negativo. Il prezzo *futures* dell'azione al tempo $t=0$ è dato da:

$$F_0 = S e^{(r-q)T} \quad (3.5)$$

Prendendo spunto dall'Equazione 3.5, viene definita una *forward barrier* (\hat{H}), tale per cui,

$$\hat{H} = H e^{(r-q)T}$$

Si consideri adesso il caso in cui il sottostante raggiunga la barriera all'inizio dell'*hedging period*. Quando $S=H$ in $t=0$, $F=\hat{H}$ in base alle definizioni appena stabilite. Se invece $S=H$ alla scadenza, quando $t=T$, $F=H$. Infine, se tra la data iniziale e la *maturity* l'*asset* tocca la barriera, il prezzo *forward* raggiungerà una *time-dependent barrier*, H_t , che avrà valore pari a:

$$F_t = H_t = H e^{(r-q)(T-t)}$$

Quindi, il qualsiasi momento durante la vita dell'opzione se $S=H$, ovvero per tutti una serie di punti appartenenti al contorno definito precedentemente, se il tasso *risk-free* è maggiore al *dividend yield* ($r>q$), il prezzo *forward* del sottostante si muoverà all'interno del seguente intervallo:

$$H \leq F \leq \hat{H}$$

L'espressione vale nel verso opposto nel caso in cui r sia minore di q . Di conseguenza, per una *DO call* risulterà valida la relazione,

$$c(K) - \frac{K}{\hat{H}} p\left(\frac{\hat{H}^2}{K}\right) \leq \text{DOC}(K, H) \leq c(K) - \frac{K}{H} p\left(\frac{H^2}{K}\right)$$

Riproponendo l'esempio illustrato in precedenza, ma impostando $r=5\%$ e $q=2\%$, si ottiene un prezzo iniziale per la *Down and Out call* target di 3,835. Il margine inferiore, calcolato utilizzando gli stessi parametri, risulta uguale a 3,607 e il margine superiore è pari a 4,810. L'ampiezza dell'intervallo tra i due valori dipende dalle variabili che costituiscono il valore dell'opzione con barriera, in modo particolare dalla volatilità e – chiaramente – dal costo di trasferimento del sottostante.

Per la *UO call* il ragionamento sarebbe analogo a quello appena mostrato per la *DO call*, tuttavia l'impossibilità di stabilire una relazione di replica esatta tra il portafoglio di copertura e lo strumento nel caso di *zero cost of carry* fa sì che non si possano definire con precisione nemmeno gli *upper* e *lower bounds* per il prezzo iniziale dell'opzione target.

In conclusione, la *Put-Call Symmetry* esprime una relazione di simmetria tra il prezzo di una *call* e una *put* europee, ma il suo utilizzo in ambito di *risk management* è decisamente limitato nell'ambito delle opzioni ordinarie. Nel contesto delle opzioni con barriera invece, la PCS fornisce uno strumento interessante per formulare strategie di replica statica, che funzionano in maniera semplice ed efficace quando vengono rispettate determinate condizioni. Rilassando le ipotesi più problematiche si ottengono comunque dei risultati utili tanto per l'*hedging* quanto per il *pricing* delle *barrier options*. Ad esempio, per le *DO calls* o per le *UI puts* (e, grazie alla *In-Out Parity*, anche le *DI calls* e le *UO puts*) è possibile ottenere facilmente dei *range* più o meno ampi entro cui il prezzo di equilibrio dello strumento deve trovarsi in assenza di opportunità di arbitraggio. A partire dai prezzi quotati di opzioni *plain vanilla* è possibile pertanto ottenere i limiti inferiori e superiori per i prezzi di alcune opzioni con barriera: alla fine del presente capitolo, la strategia sviluppata da Bowie e Carr verrà dunque implementata a questo scopo, utilizzando come nel Capitolo 2 dei dati reali di opzioni *calls* e *puts* europee, per "quotare" alcuni tipi di *barrier options*.

3.5 STRIKE-SPREAD APPROACH

Il terzo ed ultimo approccio alla replica statica per opzioni con barriera che verrà presentato è lo *strike-spread approach*, che come suggerisce il nome si basa su una copertura costituita da opzioni europee *plain vanilla* con caratteristiche simili tra di loro (e rispetto allo strumento target), ma con prezzi d'esercizio differenti. Sotto certi punti di vista, la tecnica si avvicina molto ai modelli già discussi nel Capitolo 2 per le opzioni ordinarie.

La strategia *strike-spread* si deve inizialmente a Carr e Chou, che nel 1997 hanno pubblicato un lavoro¹¹ su questo argomento. Qualche anno più tardi i due autori hanno presentato un'ulteriore ricerca¹², che riprendendo i temi tracciati nel primo *paper* approfondisce ed estende il *framework* ad altre *barrier options* più complesse, come ad esempio *partial barrier options* e *lookback options*. In linea con quanto visto finora, l'attenzione del Paragrafo 3.5 sarà rivolta prevalentemente alle opzioni con barriera di tipo *knock-in* e *knock-out*, per motivi di coerenza con il resto dell'elaborato e per evitare di appesantire eccessivamente la trattazione. Si noti in ogni caso che l'aspetto fondamentale da cogliere per ciascuno dei modelli presentati è la logica sottostante alla sua derivazione e costruzione; una volta compresi i passaggi essenziali e le chiavi di interpretazione, estendere le tecniche in analisi ad altre tipologie di opzioni non esplicitamente discusse in questa sede diventa, di fatto, un esercizio relativamente semplice.

Innanzitutto, la strategia di replica statica di Carr e Chou si applica in un contesto di riferimento che coincide con il modello di Black, Scholes e Merton, dal quale dipende il risultato principale che rende possibile l'attuazione della tecnica. In secondo luogo, viene sfruttata la seguente formula, dovuta a Breeden e Litzenberger¹³:

$$f(S_T) = f(F_0) + (S_T - F_0)f'(F_0) + \int_0^{F_0} f''(K)(K - S_T)^+ dK + \int_{F_0}^{\infty} f''(K)(S_T - K)^+ dK \quad (3.6)$$

L'Equazione 3.6 esprime un risultato fondamentale, che è alla base anche della tecnica di replica statica per opzioni europee *plain vanilla* proposta da Carr e Wu e presentata nel Capitolo 2. La formula mette in relazione il *payoff* di un generico strumento *path-independent* con i *payoffs* a scadenza – rispettivamente – di un *bond risk-free*, di $f'(F_0)$ contratti *forward* e di una quantità infinita di *puts* e *calls out-of-the-money*.

La relazione può essere provata in almeno tre diversi modi; in appendice al presente capitolo verrà brevemente riproposta la dimostrazione fornita da Carr e Madan¹⁴.

¹¹ CARR, P. e CHOU, A., "Breaking Barriers: Static Hedging of Barrier Securities", *Risk*, 10, 9 (Settembre 1997), 139-145.

¹² CARR, P. e CHOU, A., "Hedging Complex Barrier Options", *Working Paper, Morgan Stanley and MIT Computer Science*, (1997).

¹³ BREEDEN, D. e LITZENBERGER, R., "Prices of State Contingent Claims Implicit in Options Prices", *The Journal of Business*, 51, (1978), 621-651.

¹⁴ CARR, P. e MADAN, D., "Towards a Theory of Volatility Trading", *Risk Book on Volatility*, (1998), 417-427.

Dall'Equazione 3.6 deriva che il valore in $t=0$ di un derivato con *payoff* finale pari a $f(S_T)$ sia dato da,

$$V(S_0) = e^{-rT} f(F_0) + \int_0^{F_0} f''(K) p(K) dK + \int_{F_0}^{\infty} f''(K) c(K) dK \quad (3.7)$$

dove il contratto *forward*, che ha un valore iniziale pari a zero, non viene rappresentato pur rimanendo all'interno del teorico portafoglio di replica. L'Equazione 3.7 può anche essere utilizzata per ricavare la *Put-Call Parity*, imponendo $f(S_T) = (S_T - K)^+$; questa notazione equivale a $\text{Max}[S_T - K; 0]$ e verrà riutilizzata anche in seguito. La relazione funziona anche per *payoffs* discontinui ma differenziabili almeno due volte, lavorando con le c.d. "funzioni generalizzate".

Il problema principale nell'applicare le Equazioni 3.6 e 3.7 alle opzioni con barriera sta nel fatto che il loro *payoff* sia *path-dependent*: se il sottostante oltrepassa la barriera prima della scadenza, lo strumento viene attivato (*knock-in*) o cessa di esistere (*knock-out*). L'idea di Carr e Chou consiste dunque nell'individuare un "*payoff* corretto" (*adjusted payoff*) che coincida esattamente con il *payoff path-dependent* di un'opzione con barriera in determinate circostanze. Gli autori ottengono il *match* desiderato grazie al seguente Lemma, proposto nel loro *paper*. Si considerino, in un mondo in cui valgono le ipotesi di Black, Scholes e Merton, un portafoglio di opzioni europee X ed un portafoglio di opzioni europee Y , che scadono al tempo T e i cui rispettivi *payoffs* a scadenza sono definiti come segue:

$$X(S_T) = \begin{cases} f(S_T) & \text{se } S_T \in (A, B) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y(S_T) = \begin{cases} \left(\frac{S_T}{H}\right)^p f\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{se } S_T \in \left(\frac{H^2}{B}, \frac{H^2}{A}\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove,

$$p = 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$$

Si può dimostrare (v. Appendice), ricorrendo alla valutazione neutrale al rischio, che i due *payoffs* assumono lo stesso valore se $S=H$. Il *payoff* di Y infatti, non è altro che il riflesso del *payoff* di X lungo l'asse H . Il risultato appena mostrato costituisce il fondamento dell'intera strategia di Carr e Chou, perché – come si vedrà – può essere impiegato per costruire una replica statica delle opzioni con barriera. Nello specifico, il Lemma consente la definizione di un *payoff* corretto per questi stru-

menti, che non dipende da S_t per qualsiasi $t \neq T$, ovvero sia *path-independent*. L'*adjusted payoff* può dunque essere riprodotto attraverso l'applicazione delle Equazioni 3.6 e 3.7, per ottenere un portafoglio di copertura per la *barrier option* target. Nei prossimi paragrafi, verranno illustrati i principali passaggi e condotti alcuni esempi per la *static replication* di *DO calls* e *UO calls*. Tramite *In-Out Parity*, risulterà inoltre semplice fornire delle strategie valide anche per le corrispondenti *knock-in options*.

Derivazione del modello: DO call e UO call

Si consideri un portafoglio, tale da avere un *payoff* alla scadenza definito da $f^*(S_T)$:

$$f^*(S_T) = \begin{cases} -\left(\frac{S_T}{H}\right)^p g\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{se } S_T \in (0, H) \\ g(S_T) & \text{se } S_T \in (H, \infty) \end{cases}$$

L'obiettivo è dimostrare che il *payoff* di tale portafoglio sia precisamente uguale a quello di una *Down and Out option* con *payoff* $g(S_T)$ e barriera H . Per mostrare l'uguaglianza tra i due strumenti, si analizzano due situazioni:

- Il sottostante non raggiunge mai la barriera nel corso della vita dell'opzione target;
- Il sottostante tocca la barriera in $t \leq T$.

Nel primo caso, la *DO option* rimane in vita e restituisce un pagamento pari a $g(S_T)$. Per quanto riguarda il portafoglio, si può facilmente constatare che se S rimane al di sopra della *down-barrier*, il *payoff* finale sarà esattamente $g(S_T)$. Il *match* è dunque rispettato.

Nel secondo caso invece, l'opzione target cessa di esistere nel momento in cui il sottostante raggiunge la barriera, e il suo valore va a zero. Tramite il Lemma dimostrato da Carr e Chou, e riportato nella sezione precedente, quando $S=H$ i due portafogli sottostanti, $f_1(S_T)$ e $f_2(S_T)$, restituiscono lo stesso *payoff*:

$$f_1(S_T) = \begin{cases} -\left(\frac{S_T}{H}\right)^p g\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{se } S_T \in (0, H) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(S_T) = \begin{cases} -g(S_T) & \text{se } S_T \in (H, \infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sostituendo pertanto $f_1(S_T)$ con $f_2(S_T)$ nel portafoglio iniziale – vendendo il primo strumento ed acquistando contestualmente il secondo – si ha,

$$f^*(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \in (0, H) \\ g(S_T) - g(S_T) = 0 & \text{se } S_T \in (H, \infty) \end{cases} = 0$$

Quindi, in assenza di costi di transazione e di opportunità di arbitraggio, $f^*(S_T)$ ha un *payoff* uguale a quello della *Down and Out option*, indipendentemente dal valore di S prima della scadenza. Come per le altre strategie esaminate finora, quando (e se) il sottostante dovesse toccare la barriera il portafoglio di copertura andrebbe immediatamente liquidato, a costo (teoricamente pari a) zero, garantendo la replica statica del target. L'aspetto migliore tuttavia è che non è necessario acquistare un portafoglio con un *payoff* uguale a quello descritto inizialmente: l'Equazione 3.6 permette infatti di riprodurre la *barrier option* costruendo un *hedging portfolio* composto interamente ed esclusivamente da opzioni *plain vanilla* europee, con prezzi d'esercizio differenti.

In modo analogo a quanto dimostrato per la *DO option*, si può vedere che l'*adjusted payoff* di una *UO option* equivale a:

$$f^*(S_T) = \begin{cases} -\left(\frac{S_T}{H}\right)^p g\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{se } S_T \in (H, \infty) \\ g(S_T) & \text{se } S_T \in (0, H) \end{cases}$$

Nel prossimo sotto-paragrafo i risultati appena illustrati saranno implementati e discussi, con l'ausilio di esempi pratici. Si proporrà anche un'ottimizzazione della strategia nel caso di *DO calls*.

Applicazione del modello

Dopo aver ottenuto il *payoff* corretto *path-independent* – necessario per applicare le Equazioni 3.6 e 3.7 e replicare staticamente un'opzione con barriera – Carr e Chou lasciano che sia il lettore a sviluppare l'implementazione pratica della strategia. Si pone tuttavia un problema, come in precedenza, tra l'attuazione teorica della tecnica e la realtà dei mercati, dal momento che non è possibile negoziare un numero infinito di *plain vanilla options* per poter costruire il portafoglio di replica che riprodurrebbe con esattezza lo strumento target. Anche in questo caso, è necessario ricorrere ad un'approssimazione, acquistando o vendendo un numero limitato di opzioni di copertura per ottenere l'*hedge*.

Per capire come procedere, si considerino ad esempio una *UO call* ed una *DO call*. La Figura 3.7 traccia gli *adjusted payoffs*, così come sono stati definiti al sotto-paragrafo precedente. Si noti che in questo caso si avrà, per entrambi gli strumenti, $g(S_T) = (S - K)^+$.

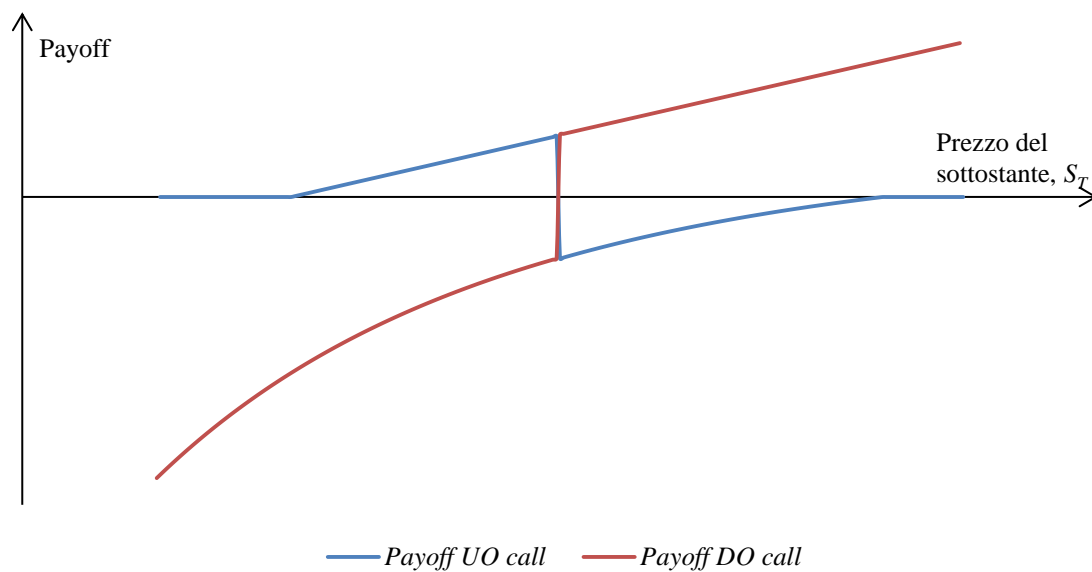


Figura 3.7 Adjusted payoffs per una *UO call* e una *DO call*.

La figura delinea un aspetto interessante, perché osservando la parte superiore del grafico, dove il *payoff* delle due opzioni è maggiore o uguale a zero, si nota che viene riprodotto il *payoff* di una *call* europea ordinaria, “spezzato” in corrispondenza della barriera. Questo elemento rende evidente che il primo strumento da includere nel portafoglio di replica – sia per la *UO call* che per la *DO call* – debba essere la *plain vanilla call* sottostante con le stesse caratteristiche. La copertura del *payoff* al di sotto dell’asse orizzontale invece, richiede maggiore attenzione. Seguendo lo *strike-spread approach* suggerito da Carr e Chou, si procederà in maniera simile a quanto già visto nel modello di Derman, Ergener e Kani, ma anziché garantire il *match* in diversi punti temporali del contorno utilizzando strumenti con scadenze diverse, stavolta la corrispondenza tra portafoglio di *hedging* e opzione target sarà garantita per diversi valori assunti dall’*underlying asset*, utilizzando strumenti con prezzi d’esercizio differenti. Nel caso della *DO call* si procede come segue:

- Si acquista la *call* ordinaria sottostante;
- Si acquista o vende una certa quantità q_1 di *puts* con prezzo d’esercizio $K_1 < H$, per replicare l’*adjusted payoff* nel punto $S_1 < K_1$.
- Si acquista o vende una certa quantità q_2 di *puts* con prezzo d’esercizio $K_2 < S_1$ per replicare l’*adjusted payoff* nel punto $S_2 < K_2$.
- Si procede in modo iterativo fino al N -esimo strumento, con cui si completa il portafoglio.

La scelta di utilizzare opzioni *put plain vanilla* è dovuta al fatto che in tal modo la replica ottenuta al passaggio precedente non viene alterata dall’aggiunta progressiva dei nuovi strumenti. In secondo luogo, S_i (il livello di sottostante per il quale si garantisce il *match*) deve essere sempre inferiore a K_i , dato che così le *puts* acquistate avranno un *payoff* positivo per $S = S_i$. Ipotizzando di voler costruire un portafoglio composto da $N=3$ opzioni (oltre alla *call* sottostante), il *match* in S_1 richiede che:

$$q_1(K_1-S_1)^++(S_1-K)^+=f(S_1)$$

Ovvero, il *payoff* di q_1 puts più quello della *call plain vanilla* deve coincidere con l'*adjusted payoff* della *Down and Out call* quando $S=S_1$. Trovato q_1 , il secondo passaggio richiede di replicare il contorno in S_2 :

$$q_2(K_2-S_2)^++q_1(K_1-S_2)^++(S_2-K)^+=f(S_2)$$

Infine, per S_3 si avrà,

$$q_3(K_3-S_3)^++q_2(K_2-S_3)^++q_1(K_1-S_3)^++(S_3-K)^+=f(S_3)$$

Negoziando q_1 , q_2 e q_3 puts rispettivamente con *strikes* K_1 , K_2 e K_3 si ottiene una replica statica dell'*adjusted payoff* della *DO call* per $S<H$. Il sistema di equazioni si può esprimere in forma matriciale come segue,

$$\begin{bmatrix} (K_1-S_1)^+ & 0 & 0 \\ (K_1-S_2)^+ & (K_2-S_2)^+ & 0 \\ (K_1-S_3)^+ & (K_2-S_3)^+ & (K_3-S_3)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(S_1)-(S_1-K)^+ \\ f(S_2)-(S_2-K)^+ \\ f(S_3)-(S_3-K)^+ \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto si può facilmente estendere ad un numero di opzioni di copertura $N>3$. Per una *UO call* invece, il *match* sul contorno verrà ottenuto nei punti $S_i>H$ tramite *plain vanilla calls* con prezzi d'esercizio $K_i<S_i$, per motivi analoghi a quanto discusso per l'esempio appena riportato. Si consideri allora di nuovo una *Down and Out call* come quella vista nell'applicazione della PCS al paragrafo precedente ($S_0=95$; $K=100$; $H=90$; $\sigma=20\%$; $r=5\%$; $q=2\%$; $T=1$). L'opzione target ha un valore iniziale pari a 3,835 in base alla formula di valutazione in un mondo *risk-neutral*. Ipotizzando di voler costruire un portafoglio di copertura con $N=4$ opzioni *put* europee, si divide l'intervallo tra 0 e H in $2N+1$ intervalli equidistanti; lo *spacing* ottimale sarà dunque $90/(2*4+1)=10$. Il *match* del contorno verrà quindi garantito per $S_i=70,50,30,10$ e $K_i=80,60,40,20$. Il sistema da risolvere risulta essere uguale a:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 10 & 0 & 0 \\ 50 & 30 & 10 & 0 \\ 70 & 50 & 30 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -83 \\ -294 \\ -2130 \end{bmatrix}$$

Risolviendo per le quantità, si ottiene $q_1=-1,78$, $q_2=-2,97$, $q_3=-11,62$, $q_4=-150,81$. Considerando i prezzi iniziali delle puts ($p_1=1,37$, $p_2=0,03$, $p_3=0,00$, $p_4=0,00$) il valore delle N opzioni di replica è -2,55. Aggiungendo la *call plain vanilla*, il cui prezzo in $t=0$ è 6,54, si ottiene un valore iniziale del portafoglio di copertura pari a 3,99. L'*hedge* risulta molto vicino alla *Down and Out call*, con soli 5 strumenti complessivi. La Figura 3.8 mostra la *performance* della strategia all'aumentare dei *matching points* (e quindi di N). La replica è messa a confronto il valore del target, rappresentato dalla linea tratteggiata, mentre il Δ equivale alla spaziatura tra i punti in cui viene garantito il *match* lungo il contorno, che chiaramente va riducendosi all'aumentare dei punti stessi. Al crescere del numero di opzioni di copertura la *performance* migliora, sebbene in maniera non proporzionale: si osserva facilmente ad esempio che l'efficacia sia peggiore per $N=9$ rispetto a $N=5$. In alcuni casi, è stato osservato che l'andamento risulta ancora più incerto, anche se per $N \rightarrow \infty$ il valore del portafoglio va sempre a coincidere esattamente con quello dell'opzione con barriera. L'effetto osservato può dipendere dalla spaziatura con Δ costante che in qualche modo potrebbe non riflettere adeguatamente i punti ottimali da coprire lungo il contorno. Come si è visto per il modello di Derman, Ergener e Kani al Paragrafo 3.2, alcuni punti sembrerebbero essere più importanti di altri. Nella prossima sezione verrà pertanto proposto un metodo alternativo per stabilire lo *spacing* tra i vari S_i e K_i , basato sulla distribuzione dei rendimenti attesi del sottostante.

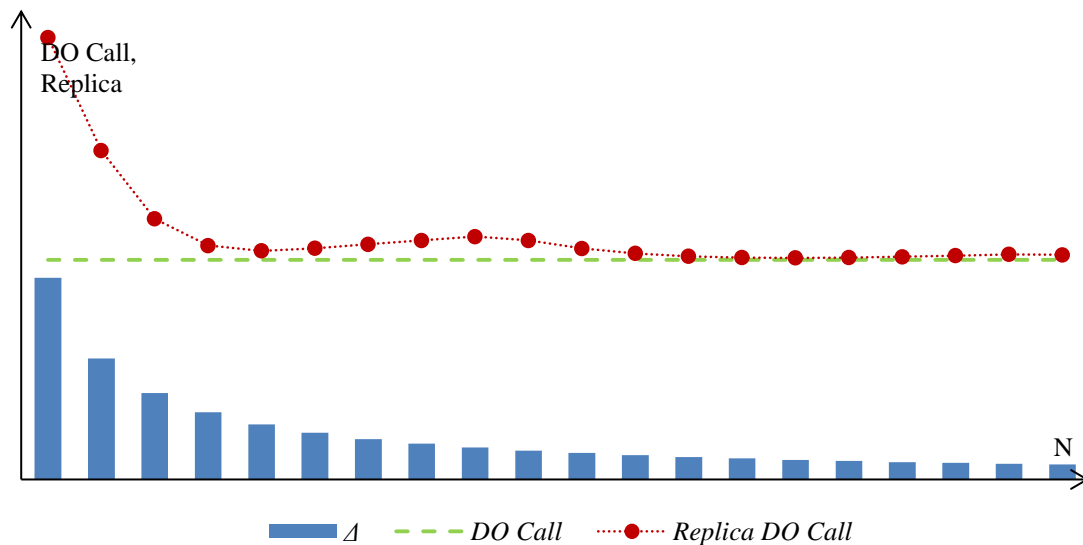


Figura 3.8 Replica di una *DO call* al variare di N tramite *strike-spread approach*.

La Figura 3.9 mostra l'applicazione della strategia ad una *UO call* con caratteristiche simili a quelle definite sin dal Capitolo 1 ($S_0=95$; $K=100$; $H=120$; $\sigma=30\%$; $r=5\%$; $q=2\%$; $T=0,384$). Il prezzo in $t=0$ dell'opzione target è pari a 1,289.

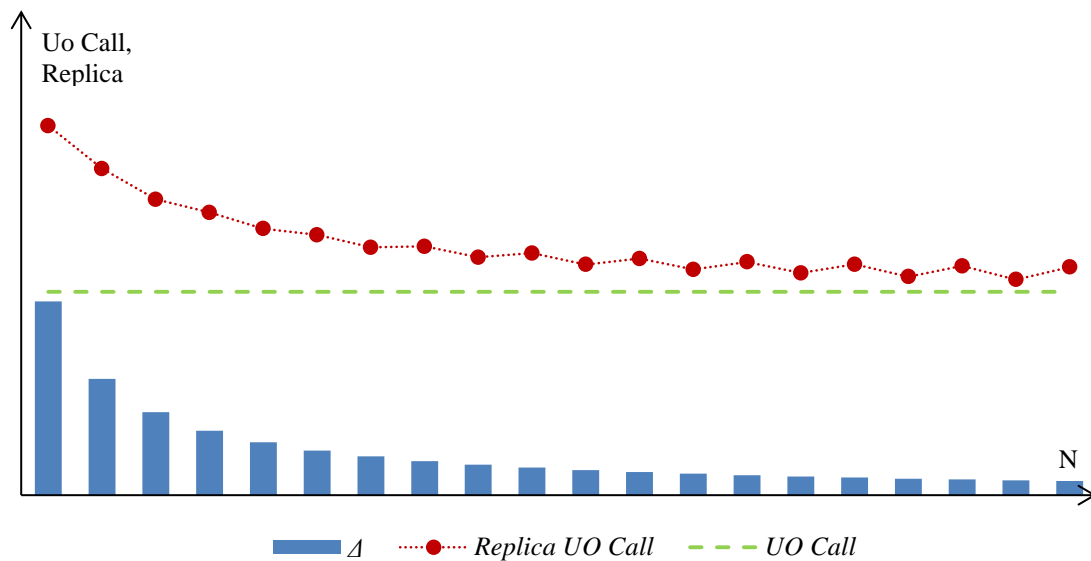


Figura 3.9 Replica di una *UO call* al variare di N tramite *strike-spread approach*.

La *performance* migliora stavolta in maniera proporzionale ad N , ma necessita di un numero elevato di opzioni di copertura per permettere di ottenere una replica soddisfacente. Anche in questo caso si rileva dunque la maggiore difficoltà nell'*hedging* di *Up and Out calls* rispetto ad altre *knock-in's* o *knock-out's*. La strategia sviluppata da Carr e Chou permette in ogni caso di coprire diversi tipi di opzioni con barriera, fornendo risultati decisamente notevoli in base all'analisi condotta. Il punto debole della tecnica è certamente il legame inscindibile con le assunzioni di Black, Scholes e Merton, in base alle quali viene stabilita la relazione di uguaglianza tra il *payoff* delle opzioni target e i corrispondenti *adjusted payoffs* descritti in precedenza. Un punto di forza considerevole è dato invece dalla possibilità di includere nel portafoglio di *hedging* strumenti con diversi prezzi d'esercizio, che sono generalmente disponibili per le opzioni più negoziate (come le *SPX Options*). Questo aspetto premia la strategia di Carr e Chou, soprattutto rispetto al modello di Derman, Ergener e Kani, in cui il *maturity-spread approach* può rivelarsi invece più difficile da mettere in pratica per via della (relativamente più) bassa disponibilità di scadenze per le opzioni europee *plain vanilla* scambiate sui mercati regolamentati (e.g., CBOE). Infine, al termine del capitolo verranno brevemente riassunti i principali risultati di alcuni *papers* empirici sulla *static replication* di opzioni con barriera, che implementano parte dei modelli descritti attraverso dati simulati o dati storici. In generale, si riscontra una preferenza per lo *strike-spread approach*, che si rivela essere mediamente più efficace degli altri metodi. Per una discussione più approfondita su questi aspetti, si rimanda al Paragrafo 3.6.

Ottimizzazione del modello

Al paragrafo 3.2 è stato presentato il modello di Derman, Ergener e Kani, che applica il *maturity-spread approach* per sviluppare una strategia di replica statica per opzioni con barriera utilizzando

plain vanilla calls o *puts* con scadenze diverse. Uno degli aspetti messi in risalto durante l'analisi era lo scostamento evidente tra il portafoglio di copertura e lo strumento target che si registra in prossimità di T per $S=H$ (v. Figura 3.5). Il riscontro grafico aveva sollevato una questione sulla spaziatura ottimale tra i punti del contorno temporale in cui fosse più opportuno garantire il *match*, alla luce della *performance* osservata della tecnica.

In questa sezione, viene proposto un metodo nuovo per tentare di calcolare uno *spacing* migliore rispetto a quello visto in precedenza (intervalli equidistanti tra gli S_i e i K_i) nel caso dello *strike-spread approach* di Carr e Chou. L'idea si parte dalla funzione di densità dei rendimenti (o alternativamente di S) nel contesto ipotizzato da Black, Scholes e Merton. In assenza di incertezza (o "in media"), il rendimento a scadenza in un mondo neutrale al rischio per una qualsiasi *security* è banalmente $(r-q)T$, con r che esprime il tasso d'interesse privo di rischio, q il tasso di dividendo e T la scadenza del titolo. La volatilità è data invece da σ , che misura la dispersione dei valori intorno alla media. In base a BMS, il rendimento di S_T segue una distribuzione normale, con media $(r-q)T$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{T}$.

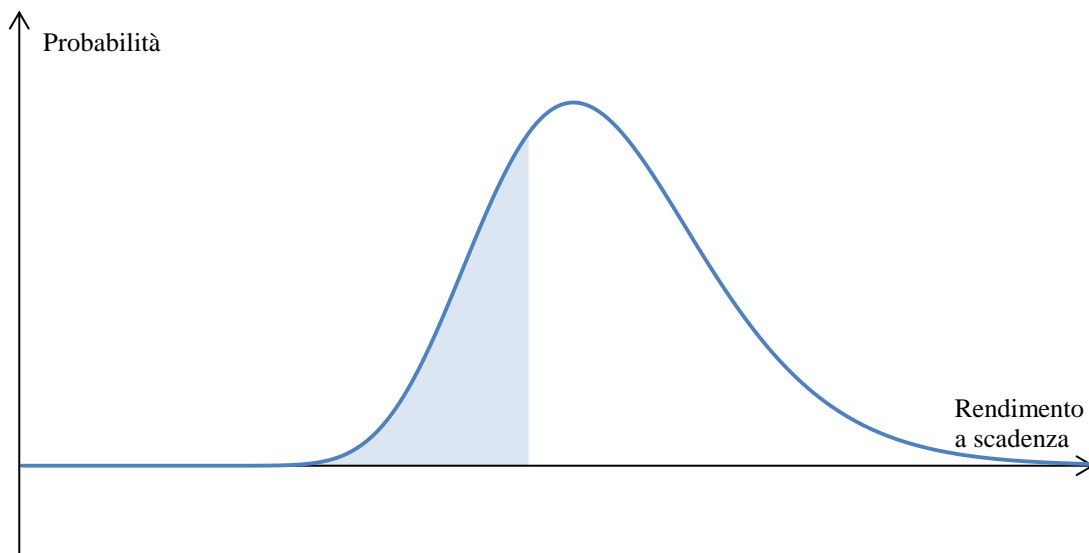


Figura 3.10 Distribuzione di probabilità del rendimento a scadenza di una *DO call*.

La Figura 3.10 aiuta a comprendere la logica dell'esperimento. Il grafico mostra la funzione di densità di probabilità (PDF) dei rendimenti a scadenza per la *Down and Out call* considerata al sottoparagrafo precedente. L'area azzurra esprime la probabilità che il rendimento del sottostante in T sia pari o inferiore a $\ln(H/S_T)=-5,41\%$, data una media pari al 3% e una deviazione standard pari a 20%, calcolate in base alle definizioni fornite sopra. In altri termini quindi, l'area azzurra stabilisce che la probabilità di osservare un valore di S a scadenza inferiore alla barriera sia pari a circa il 33,71%. La spaziatura ottimale suggerita prevede pertanto di dividere in $2N+1$ intervalli tale probabilità, e una volta individuati i relativi rendimenti sulla gaussiana ottenere i punti S_i e K_i mediante l'inversa della

funzione di densità. Questo procedimento permette di ottenere il *match* in maniera più selettiva, perché i punti scelti risulteranno maggiormente spostati verso H , a riflettere la probabilità decrescente di osservare valori molto lontani dalla media. Nel caso di $N=3$ ad esempio, l'area azzurra viene divisa in 7 intervalli pari a circa 4,82%. In Excel, la funzione "Inv.Norm.N" permette di ottenere a partire dalle probabilità (28,90%, 24,08%, 19,26%, 14,45%, 9,63%, 4,82%) i rendimenti a scadenza e quindi i valori impliciti per $K_i(87,58, 82,29, 75,44)$ e per $S_i(85,04, 79,19, 70,20)$. Questi punti sul contorno sono molto diversi da quelli che si ottenevano con la spaziatura equidistante illustrata all'inizio, in cui venivano considerati intervalli più ampi e valori anche molto lontani dalla barriera. Il portafoglio costruito con il metodo appena proposto risulta uguale a 3,99, lo stesso valore che si otteneva con $N=4$ nel caso "classico", contro un valore della *DO call* di 3,835. La Figura 3.11 riprende il confronto già mostrato in Figura 3.8, aggiungendo la replica ottimizzata dell'opzione target.

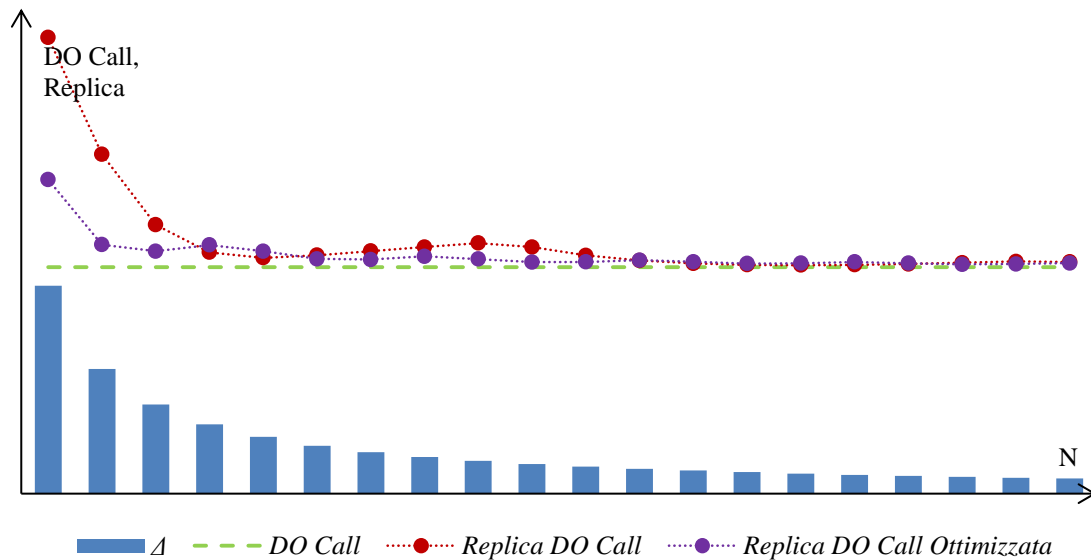


Figura 3.11 Replica di una *DO call* al variare di N tramite *strike-spread approach* ottimizzato.

In base all'esempio della *DO call* in analisi, la replica ottimizzata sembra produrre una copertura migliore del target, soprattutto per quantità ridotte di strumenti di *hedging*. La *performance* si conferma migliore anche quando N aumenta, tranne in due soli casi, in cui comunque la differenza rispetto alla replica "standard" risulta minima. In altre circostanze esaminate, il miglioramento dato dalla nuova spaziatura è ancora più evidente, perché riesce a mantenere stabile l'efficacia della strategia al crescere delle opzioni incluse nell'*hedge* indipendentemente dai parametri definiti per l'opzione target, laddove questo non è sempre vero nel caso di *spacing* equidistanziato. Dal momento che la tecnica non richiede la valutazione di variabili aggiuntive difficili da stimare, si configura senz'altro come un'utile alternativa alla versione standard del modello, presentata inizialmente.

3.6 RISULTATI EMPIRICI

L'analisi condotta nel Capitolo 3 ha permesso di discutere alcuni tra i più noti e diffusi modelli di replica statica per opzioni con barriera, consentendo di evidenziarne la logica, la struttura e la costruzione fino ad arrivare in ciascuno dei casi alla formulazione di esemplificazioni pratiche, che hanno consentito di fissare gli aspetti più rilevanti delle strategie esaminate e di metterne in luce punti di forza e di debolezza.

La discussione ha chiarito soprattutto le differenze con gli approcci dinamici illustrati nel Capitolo 1, permettendo di effettuare dei confronti diretti tra le varie tecniche proposte e di stabilire quale metodologia potesse dimostrarsi maggiormente efficace nel perseguire l'obiettivo desiderato, ovvero la copertura dell'esposizione in opzioni con barriera. Com'era stato anticipato anche nell'introduzione al presente capitolo, la letteratura empirica su questi argomenti è decisamente più scarsa rispetto ai lavori condotti sulle opzioni ordinarie o su altri strumenti standardizzati. Le *barrier options* hanno innanzitutto una storia più recente rispetto ad altri derivati, sebbene siano negoziate ormai da almeno quarant'anni; la difficoltà nel costruire serie storiche di prezzi con le quali effettuare analisi e simulazioni è legata anche al fatto che gli strumenti in questione sono negoziati quasi esclusivamente in mercati *Over The Counter*, ai quali hanno accesso solitamente gli investitori istituzionali che partecipano agli scambi.

Tra i contributi sull'argomento che impiegano prezzi quotati per testare la validità dei principali modelli di *pricing* per opzioni con barriera si fa menzione al lavoro di Easton, Gerlach, Graham e Tuyl (2004)¹⁵, in cui vengono confrontati i prezzi teorici di alcuni strumenti negoziati sull'ASX (*Australian Stock Exchange*) tra l'agosto del 1998 e il settembre del 1999. Gli autori riscontrano che per alcuni dei derivati analizzati si verifica un *over-pricing* rispetto al valore predetto dalla teoria; la ragione, secondo loro, è da ricercare nell'elevato gamma di queste opzioni in prossimità della barriera, che rende difficoltoso l'*hedging* da parte degli emittenti, i quali scontano tale problema caricando uno *spread* maggiore sul costo di acquisto dell'opzione. Diversi *papers* testano invece la *performance* del *delta hedging* di *barrier options* a confronto con le metodologie di *static replication*, basandosi su una serie di simulazioni in funzione di modelli di riferimento differenti, da Black, Merton e Scholes a *frameworks* più sofisticati. Tra di essi si ricordano Tompkins (2002)¹⁶, Nalholm e Poulsen (2006)¹⁷ e Engelmann, Fengler, Nalholm e Schwendner (2007)¹⁸. Tompkins svolge un'analisi dettagliata per numerosi tipi di opzioni esotiche e con barriera, concludendo che in generale i modelli statici risultano migliori di quelli dinamici. Nalholm e Poulsen mettono invece a confronto varie tecniche di *static replication*, combinandole tra loro e concludendo che lo *strike-spread approach* possa

¹⁵ EASTON, S., GERLACH, R., GRAHAM, M. e TUYL, F., "An Empirical Examination of the Pricing of Exchange-Traded Barrier Options", *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (Novembre 2004), 1049-1064.

¹⁶ TOMPKINS, R., G., "Static versus dynamic hedging of exotic option: An evaluation of hedge performance via simulation", *Journal of Risk Finance*, 3 (2002), 6-34.

¹⁷ NALHOLM, M. e POULSEN, R., "Static Hedging of Barrier Options Under General Asset Dynamics: Unification and Application", *Journal of Derivatives*, 13 (2006), 46-60.

¹⁸ ENGELMANN, B., FENGLER, M., R., NALHOLM, M. e SCHWENDNER, P., "Static versus dynamic hedges: an empirical comparison for barrier options", *Review of Derivatives Research*, 9 (2007), 239-264.

essere la strategia migliore se considerata individualmente, mentre una combinazione di *maturity-spread* e *strike-spread* si dimostra essere la più efficace in assoluto, secondo i loro esperimenti. I modelli di replica statica appaiono superiori al *delta hedging* anche in base allo studio proposto da Engelmann, Fengler, Nalholm e Schwendner.

La letteratura sull'argomento risulta pertanto unanimemente a favore della replica statica rispetto alla replica dinamica per le opzioni con barriera. Non soltanto la prima comporta minori costi di transazione rispetto alla seconda, in quanto non necessita di continui ri-bilanciamenti dell'*hedging portfolio* al fine di mantenere effettiva la copertura, ma garantisce un *match* decisamente migliore dei fattori di rischio che causano variazioni nel valore dello strumento target. Un grande vantaggio dell'approccio statico risiede nella possibilità di scegliere adeguatamente il contorno in funzione del quale si struttura l'*hedge*, e di considerare quindi con maggiore attenzione i punti "critici", che di solito sono caratterizzati da valori di S in prossimità della barriera e valori di t vicini alla scadenza. La presenza di discontinuità nel *payoff* delle *barrier options* richiama l'attenzione sulle tecniche di replica statica, per le quali i benefici sono ancor più evidenti di quanto non fossero per le opzioni *plain vanilla* o per le altre esotiche trattate nel Capitolo 2. Il successivo – ed ultimo – sotto-paragrafo mostrerà l'applicazione di alcuni dei modelli presentati in ottica di *pricing* basandosi sui prezzi quotati di alcune opzioni ordinarie, concludendo l'intera trattazione.

Pricing di Opzioni con Barriera

In questa sezione verranno testati con dati reali alcuni dei modelli presentati per prezzare opzioni con barriera, ovvero per individuare il valore corrente di tali strumenti costruendo dei portafogli di replica attraverso le tecniche mostrate nel Capitolo 3.

Il *dataset* con cui sono stati condotti i diversi esperimenti è lo stesso impiegato nel Capitolo 2 – Paragrafo 5, contenente i prezzi di chiusura giornalieri dal 31 ottobre al 30 novembre 2016 di opzioni *call* e *put* europee *plain vanilla* scritte sull'indice S&P 500 e quotate sul CBOE. Le strategie che saranno implementate e messe a confronto sono quelle che sfruttano la *Put-Call Symmetry* vista al Paragrafo 3.4 e lo *strike-spread approach* descritto nel Paragrafo 3.5. Si è deciso di concentrare l'attenzione su questi due metodi perché il primo consente, in assenza di opportunità di arbitraggio, di definire un *range* entro cui il prezzo dell'opzione con barriera può muoversi, mentre il secondo può sfruttare la considerevole disponibilità di prezzi d'esercizio delle *SPX Options* per comporre un portafoglio di replica per lo strumento; la simulazione con dati reali costituirà un importante banco di prova anche per il modello di Black, Scholes e Merton, sul quale – come si è detto – si basa la strategia di Carr e Chou, ispirata dallo *strike-spread approach*.

Si consideri quindi una *Down and Out call* scritta sull'indice S&P 500, con prezzo d'esercizio 2150, barriera 2100 e scadenza al 16 dicembre 2016. Al 31 ottobre, il prezzo di chiusura del sottostante era 2126,15, mentre il tasso privo di rischio e il tasso di dividendo atteso erano pari rispetti-

vamente a 0,25%¹⁹ e 2,13%²⁰. La volatilità implicita stimata in base a BMS per una *call* ordinaria con gli stessi parametri della *DO call* – quotata a 29,65 – è uguale a 14,07%. Due aspetti da evidenziare: si è scelto di riportare l'esempio di un'opzione con barriera a breve scadenza (1 mese e mezzo) per via del maggior numero di *calls* e *puts plain vanilla* disponibili con diversi *strike prices*, che favorisce l'applicazione della strategia di Carr e Chou. Inoltre, così come nel Capitolo 2, anche in questo caso si è deciso di identificare il prezzo medio tra denaro e lettera come prezzo di riferimento, ignorando quindi il *bid-ask spread* e i costi di transazione. La scelta è dovuta alla necessità di facilitare la trattazione, ma i risultati dell'esperimento non risentono di questa semplificazione, che viene comunemente adottata in letteratura: ad esempio, Carr e Wu utilizzano lo stesso espediente nel *paper* sulla replica statica di opzioni ordinarie.

Poste le opportune premesse e definiti i parametri fondamentali per l'opzione target, è possibile proseguire con l'esercizio. L'applicazione della PCS permette innanzitutto di stabilire il limite massimo e minimo per il valore della *DO call*, in base ai prezzi correnti di mercato. Dato che $r < q$, si ha che:

$$c(2150) - \frac{2150}{2100} p\left(\frac{2100^2}{2150}\right) \leq \text{DOC}(2150, 2100) \leq c(2150) - \frac{2150}{2095} p\left(\frac{2095^2}{2150}\right)$$

dove la *forward barrier* \hat{H} è uguale a 2095. Poiché gli *strikes* delle *puts* sul lato sinistro e sul lato destro (rispettivamente 2041 e 2051) non sono quotati, si è deciso di approssimarli al valore più vicino disponibile sul mercato (rispettivamente 2040 e 2050). A questo punto, estrapolando i prezzi delle opzioni di replica dal *dataset*, si ottiene:

$$29,65 - 1,02 * 23,5 \leq \text{DOC}(2150, 2100) \leq 29,65 - 1,03 * 21,55$$

$$5,59 \leq \text{DOC}(2150, 2100) \leq 7,73$$

Dunque, in assenza di opportunità di arbitraggio (senza considerare i costi di transazione), il prezzo al 31 ottobre 2016 di una *Down and Out call* deve essere ricompreso nell'intervallo [5,59;7,73]. Il prezzo stimato in base a BSM, utilizzando la volatilità implicita calcolata per la *call* europea con $K=2150$, è uguale a 15,73, al di sopra del *range* definito attraverso la *Put-Call Symmetry*. A cosa è dovuta la differenza? Il fattore fondamentale che spiega tale risultato è proprio la volatilità. Sebbene Black, Scholes e Merton assumano una struttura piatta rispetto al tempo e alla *moneyness* dei vari strumenti, la realtà dei mercati è ben diversa. Nell'esempio in analisi, le due *puts* utilizzate per valutare *upper* e *lower bound* sono caratterizzate da volatilità implicite più elevate rispetto alla *call*, ri-

¹⁹ Fonte: *US Department of the Treasury*.

²⁰ Fonte: *Bloomberg*.

spettivamente pari a 17,63% e 17,28% per $K=2040$ e $K=2050$. Al 31 ottobre infatti, pochi giorni prima delle elezioni per la presidenza USA, la borsa statunitense è stata caratterizzata da elevata incertezza, e il timore (successivamente concretizzatosi) di un esito inatteso si è riflesso sulle quotazioni azionarie e sul sentimento generale degli investitori, spingendo la volatilità al rialzo. Ad ogni modo, una discussione conclusiva sui risultati ottenuti verrà condotta soltanto dopo aver osservato l'*output* dell'altra tecnica in esame, lo *strike-spread approach* di Carr e Chou.

Per costruire il portafoglio di replica sfruttando la seconda strategia, si è deciso di includere, oltre alla *call* europea sottostante, una serie di *puts* con prezzi d'esercizio vicini alla barriera partendo da $N=1$, per allontanarsi gradualmente all'aumentare del numero di strumenti considerati nella copertura. In tal modo, i pesi ottenuti per le singole opzioni saranno gli stessi indipendentemente dal valore di N , e risulterà più facile strutturare l'*hedge* aggiungendo semplicemente di volta in volta una nuova opzione. La spaziatura impiegata è di 10 punti indice tra ogni prezzo d'esercizio (K_i) e il relativo punto sul contorno (S_i) per il quale viene garantito il *match* con l'opzione target. Ad esempio, per $N=3$ si ha $K_i=2090, 2070, 2050$ e $S_i=2080, 2060, 2040$. La Tabella 3.5 riassume i dati utilizzati e i pesi ottenuti per $N=1, \dots, 20$.

<i>Prezzo d'esercizio</i>	<i>Prezzo corrente [p(K)]</i>	<i>Quantità</i>
2090	32,95	0,00
2070	27,80	0,00
2050	23,50	-1,08
2030	19,80	0,28
2010	16,70	-0,21
1990	14,05	0,28
1970	11,90	-0,21
1950	10,05	0,28
1930	8,35	-0,21
1910	7,15	0,28
1890	6,20	-0,21
1870	5,30	0,28
1850	4,55	-0,21
1830	3,95	0,28
1810	3,45	-0,22
1790	3,03	0,28
1770	2,63	-0,22
1750	2,33	0,27
1730	2,08	-0,22
1710	1,85	0,27

Tabella 3.5 *Strike-spread approach* applicato a *SPX Options*.

Si può notare che le quantità sono piuttosto contenute e simili tra loro, aspetto che rende più semplice l'attuazione pratica della strategia da parte dell'*hedger*. La Figura 3.12 mostra invece un interessante confronto grafico, in quanto vengono proiettati, al variare di N , i portafogli di replica costruiti con lo *strike-spread approach* valutati al 31 ottobre, mentre sullo stesso piano sono rappresentati anche il valore teorico della *DO call* calcolato con la formula di Merton e il *range* di prezzi stimato mediante PCS (in rosso chiaro).

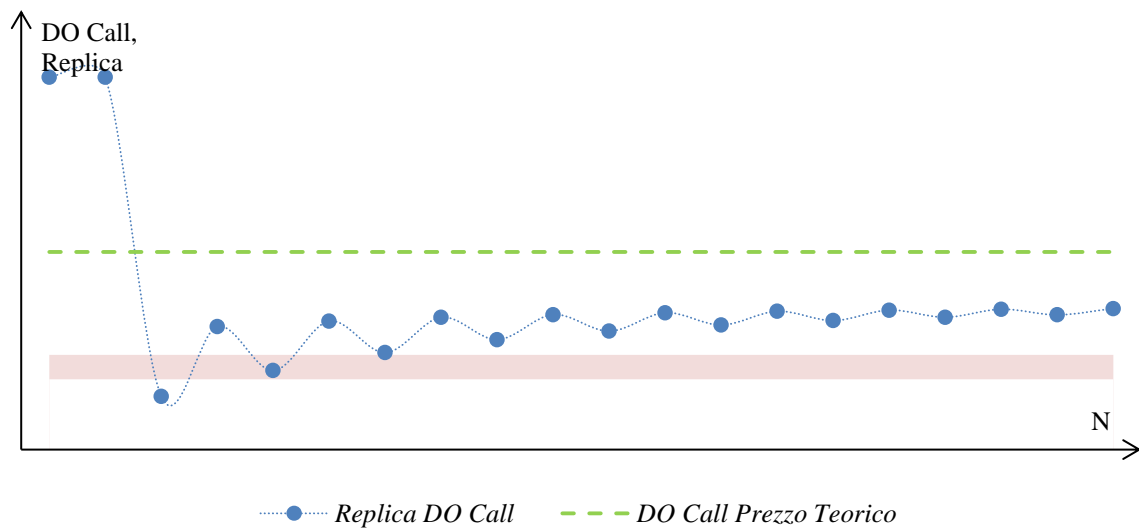


Figura 3.12 Replica *DO call* tramite *strike-spread approach* al variare di N (dati reali).

Dall'osservazione del grafico si desumono dei particolari interessanti. In primo luogo, la replica effettuata attraverso il metodo di Carr e Chou produce una buona approssimazione del valore dell'opzione target a partire da $N=3$ opzioni di copertura, rimanendo al di sopra del valore di mercato della *Down and Out call* così come avveniva nelle simulazioni svolte in precedenza, dove l'*hedging error* era minore ma quasi sempre positivo. Inoltre, il portafoglio di copertura tende a rimanere all'incirca a metà strada tra il prezzo teorico predetto dalla formula di Merton e il *range* stimato con la *Put-Call Symmetry*. La ragione è che lo *strike-spread approach* in questo caso è influenzato da due elementi: da una parte – come si è detto – la strategia si basa sulle assunzioni di Black, Scholes e Merton, essendo costruita in un mondo neutrale al rischio. Dall'altra, l'impiego di dati reali spinge la replica verso l'intervallo ottenuto mediante PCS, e in conclusione il portafoglio va a collocarsi proprio in mezzo ai due. Effettuando analisi simili per altre opzioni contenute nel *dataset*, è stato osservato più volte un comportamento analogo a quello riscontrato per la *Down and Out call* esemplificata nella presente sezione.

Si possono dunque trarre, infine, alcune conclusioni. Innanzitutto, l'analisi con dati reali ha messo in luce la parziale inadeguatezza del *framework* di BSM per valutare le opzioni con barriera. Parziale perché, in casi diversi da quello esposto, è stato possibile riscontrare una maggiore precisione; l'esempio riportato riguarda in effetti una *DO call* vicina alla scadenza e con S prossimo ad H : si

è detto più volte che tali condizioni rendono in genere più sensibili le *barrier options* a variazioni nel sottostante, e di conseguenza ne complicano anche il *pricing*. Nell'ottica della *static replication* in realtà, il "fallimento" delle formule teoriche può essere visto come una buona notizia, nella misura in cui rivela in maniera ancora più evidente l'importanza ricoperta dalle tecniche proposte per qualsiasi agente di mercato. Tanto la PCS quanto l'approccio *strike-spread* si sono dimostrati strumenti essenziali, da un lato per prezzare questi strumenti e dall'altro per consentire ai *traders* di coprire le proprie esposizioni in maniera più efficace e meno costosa rispetto al *delta hedging*.

Appendice al Capitolo 3

DIMOSTRAZIONE DELLA STATIC SPANNING RELATION

La dimostrazione che segue è stata ripresa dal *paper* di Carr e Madan (1998), “Towards a Theory of Volatility Trading”. La formula di *static spanning* suggerita per la prima volta da Breeden e Litzenberger può essere derivata anche facendo ricorso ad altri metodi.

Per un generico *payoff* $f(x)$, la proprietà di traslazione della funzione delta di Dirac implica che,

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(K) \delta(x-K) dK = \int_0^F f(K) \delta(x-K) dK + \int_F^{\infty} f(K) \delta(x-K) dK$$

con F non negativo. Integrando per parti ciascun integrale, si ottiene,

$$f(x) = f(K) \mathbf{1}_{x < K} \Big|_0^F - \int_0^F f'(K) \mathbf{1}_{x < K} dK + f(K) \mathbf{1}_{x \geq K} \Big|_F^{\infty} + \int_F^{\infty} f'(K) \mathbf{1}_{x \geq K} dK$$

dove $\mathbf{1}_{x > K}$ è la funzione indice, che assume valore uno quando la condizione è rispettata e zero altrimenti.

Integrando per parti una seconda volta, si avrà:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(F) \mathbf{1}_{x < K} - f'(K)(K-x)^+ \Big|_0^F + \int_0^F f''(K)(K-x)^+ dK + f(F) \mathbf{1}_{x \geq K} - f'(K)(K-x)^+ \Big|_F^{\infty} \\ &\quad + \int_F^{\infty} f''(K)(K-x)^+ dK \\ &= f(F) + f'(F)[x-F] + \int_0^F f''(K)(K-x)^+ dK + \int_F^{\infty} f''(K)(K-x)^+ dK \end{aligned}$$

La *static spanning relation* è quindi dimostrata e risulta valida per qualsiasi *path-independent payoff* che sia differenziabile almeno due volte.

DIMOSTRAZIONE DEL “LEMMA 1” IN CARR E CHOU (1997)

Per dimostrare il Lemma 1 in Carr e Chou (1997), “Hedging Complex Barrier Options”, si consideri la valutazione in un mondo neutrale al rischio del portafoglio X quando $S=H$:

$$V_X(H,t) = e^{-r(T-t)} \int_A^B f(S_T) \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\frac{(\ln(S_T/H) - (r-q-0,5\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} dS_T$$

Imponendo $\hat{S} = H^2/S_T$ si avrà che $dS_T = -H^2/\hat{S}^2 d\hat{S}$, da cui:

$$\begin{aligned} V_X(H,t) &= e^{-r(T-t)} \int_{H^2/A}^{H^2/B} f(H^2/\hat{S}) \frac{1}{\hat{S} \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\frac{(\ln(H/\hat{S}) - (r-q-0,5\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\hat{S} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{H^2/A}^{H^2/B} \left(\frac{\hat{S}}{H}\right)^p f(H^2/\hat{S}) \frac{1}{\hat{S} \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\frac{(\ln(\hat{S}/H) - (r-q-0,5\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\hat{S} = V_Y(H,t) \end{aligned}$$

con p definito come segue,

$$p = 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$$

Di conseguenza, il valore di X e di Y coincide, in base alla valutazione neutrale al rischio, quando il sottostante si trova in corrispondenza della barriera.

Conclusioni

L'analisi svolta nel presente elaborato ha permesso di esaminare e mettere a confronto le principali strategie di replica statica per opzioni finanziarie, dando risalto e attenzione agli aspetti più importanti ed evidenziandone i maggiori pregi e difetti. La derivazione concettuale e la successiva implementazione pratica sono state propedeutiche all'ottenimento di una visione globale e dettagliata sui temi illustrati, che ha dato la possibilità, in molti casi, di proporre interessanti soluzioni, estensioni e miglioramenti per le tecniche studiate, alla luce dei risultati riscontrati. Gli esperimenti condotti su dati reali, infine, hanno potuto confermare in larga parte quanto predetto dal punto di vista teorico, fornendo anche ulteriori spunti di riflessione.

Il primo capitolo ha effettuato pertanto una selettiva *overview* sulle strategie di copertura dinamica più conosciute ed utilizzate. Il contributo fondamentale di questa prima sezione è stato quello di porre l'accento sugli aspetti di maggiore criticità che caratterizzano l'attuazione delle *dynamic hedging techniques*. Nello specifico, calandosi nei panni di un ipotetico emittente si è cercato di dare risalto ai fattori che potrebbero generare rischi o difficoltà elevate per queste controparti, nella gestione delle proprie esposizioni. Gli elementi più problematici sono risultati essere l'impatto dei costi di transazione, la necessità di affidarsi ad un modello di riferimento per stimare i parametri di copertura (es., BSM) e l'impossibilità di ottenere una replica efficace e puntuale di tutti i fattori di rischio che influenzano il prezzo corrente delle opzioni. L'esempio del *delta hedging* applicato ad opzioni con barriera si è dimostrato particolarmente significativo in tal senso, rivelando una *performance* decisamente insoddisfacente e permettendo di invocare, di fatto, il ricorso a metodologie diverse, che riuscissero a garantire una copertura migliore dello strumento target considerato.

Nel secondo capitolo sono state quindi introdotte le tecniche di replica statica per opzioni ordinarie. In primo luogo sono state mostrate alcune relazioni esatte (*Put-Call parity*, opzioni a scelta), che hanno chiarito immediatamente la logica dell'approccio di *static replication* e la sua utilità anche in un'ottica di *pricing*; più in generale, hanno stabilito alcuni importanti concetti, che sono poi stati ripresi ed utilizzati anche nelle sezioni successive. I due modelli chiave in questo contesto erano quelli di Wu e Zhu (2011) e di Carr e Wu (2002). Il primo presentava un *framework* molto generico e flessibile, basato su un'intuizione alquanto semplice e proponendo dei risultati validi in un contesto molto ampio, tanto che è stato possibile estendere la tecnica anche ad altre opzioni esotiche (le opzioni di scambio) più complesse e non esplicitamente considerate dagli autori. Il modello di Carr e

Wu invece assumeva un'impostazione molto più rigorosa e sofisticata, facendo ricorso ad una serie di nozioni matematiche, fisiche e statistiche piuttosto avanzate. La struttura della strategia risultava in questo caso più rigida, ma con molti aspetti apprezzabili, tra cui la possibilità di scegliere liberamente il numero di opzioni da includere nel portafoglio di replica e la considerazione di quantità ridotte (sommanti a 1) per le opzioni di copertura da acquistare o vendere. Un'attenta analisi, insieme alla profonda comprensione dei meccanismi logici sui quali si fonda il modello, ha anche permesso di estendere il metodo in questione alle opzioni asiatiche geometriche, sfruttando la formula di *pricing* di Kemna e Vorst. Le simulazioni effettuate hanno evidenziato ottimi livelli di efficacia per entrambi i modelli. In particolare, prendendo a riferimento il *framework* di Black, Scholes e Merton, un confronto tra il *delta hedging* e la strategia di Carr e Wu ha permesso di stabilire con ragionevole sicurezza la superiorità di quest'ultimo. Sia per le opzioni *plain vanilla* che per le *asian options* infatti, l'*hedging error* medio osservato è stato inferiore nella replica statica rispetto alla replica dinamica; l'aggiunta dei costi di transazione avrebbe senza alcun dubbio rafforzato ulteriormente tale conclusione. Il capitolo ha proposto infine una verifica empirica delle tecniche presentate, sfruttando un *dataset* contenente diverse serie storiche di prezzi di *SPX Options* quotate sul CBOE, costruito appositamente per testare i modelli illustrati. Sono stati quindi condotti una serie di esperimenti per questo insieme di dati, ed è stato esposto un intero esempio a titolo dimostrativo, illustrato passaggio dopo passaggio. In linea con le aspettative, entrambi i modelli hanno prodotto buoni risultati, con la migliore *performance* registrata dalla strategia di Carr e Wu con $N=3$ opzioni di copertura. Per $N=5$ l'efficacia mostrava invece dei peggioramenti in alcuni casi, contrariamente a quanto predetto dalla teoria. La spiegazione si può ricercare nel fatto che se da un lato il *framework* di BSM assume una struttura piatta della volatilità lungo le dimensioni del tempo alla scadenza e della *moneyness* dello strumento, dall'altro la realtà dei mercati – soprattutto per l'*equity* – si caratterizza invece per volatilità implicite ben diverse al variare del prezzo d'esercizio. Dal momento che aumentare N significa anche includere nel portafoglio di copertura strumenti *deep-in* o *deep-out of-the-money*, l'abilità predittiva di Black, Scholes e Merton si riduce esponenzialmente, spiegando il peggioramento di *performance* osservato. In generale comunque, la possibilità di ottenere una buona replica dell'opzione target attraverso la costruzione di un portafoglio composto da un numero molto contenuto di strumenti di copertura, giustifica l'interesse verso queste strategie.

Il terzo – ed ultimo – capitolo ha concluso la trattazione affrontando il tema della replica statica delle opzioni con barriera. Tali strumenti si caratterizzano per una struttura molto particolare del *payoff* a scadenza, che risulta contingente al raggiungimento di un prestabilito livello di prezzo per l'*asset* sottostante. Di conseguenza, la *static replication* si rivela in genere decisamente efficace proprio in questo contesto, che di fatto ne ha giustificato la vera e propria nascita a partire dai primi anni '90. Dopo aver derivato alcune fondamentali relazioni e introdotto brevemente i principali tipi di opzioni con barriera, si è passato ad analizzare le strategie di copertura statica più diffuse ed utilizzate. Nel caso delle opzioni binarie, si è potuto osservare come una semplice replica tramite *vertical*

spread permettesse di ottenere un *hedge* quasi perfetto del target. L'esercizio empirico riportato impiegando *BVZ Options* quotate sul CBOE ha dato conferma della validità delle relazioni di non arbitraggio teorizzate, e degli aspetti discussi in generale. Alle opzioni di tipo *knock-in* o *knock-out* invece, si possono applicare fondamentalmente tre diversi approcci: *maturity-spread*, *Put-Call Symmetry* e *strike-spread*. Tutti e tre si basano su un principio comune, secondo cui è sufficiente garantire la replica del target in un certo contorno per assicurarsi che anche tutti i punti all'interno vengano riprodotti. Se il contorno venisse raggiunto in un qualsiasi momento antecedente alla scadenza, il portafoglio di *hedging* dovrebbe essere immediatamente liquidato, per garantire il *match* con il valore dell'opzione con barriera. Il *maturity-spread approach* permetteva di replicare in maniera efficace le *barrier options* tramite opzioni europee ordinarie a diversa scadenza. In particolare, si caratterizzava per una maggiore efficacia rispetto alle tecniche dinamiche mostrate al Capitolo 1, e dava la possibilità di adeguare facilmente l'*hedge* allo scopo di porre adeguata attenzione ai punti di maggiore criticità del contorno, quelli per cui S si trova vicino ad H e t vicino a T . In un'ottica di *pricing*, la strategia di Derman, Ergener e Kani rendeva possibile anche la definizione di un valore esatto per opzioni con barriera discrete, e il confronto con l'approssimazione proposta da Broadie e Glasserman ha confermato questa intuizione. La PCS stabilisce invece una relazione di parità per opzioni *plain vanilla* europee, ma può essere sfruttata come si è visto anche in ambito di replica statica per opzioni con barriera. I risultati più interessanti si possono ottenere definendo una serie di assunzioni sulla struttura della volatilità e del sottostante piuttosto limitanti, ma restano validi ad esempio nel caso di opzioni su *futures*, caratterizzate da *zero cost of carry*. Rilassando le ipotesi iniziali si può comunque ricavare una stima del *range* di prezzo entro cui alcune *barrier options* sono "libere" di muoversi in assenza di possibilità di arbitraggio. Poiché tale relazione è *model-independent*, si rivela essere in realtà uno strumento molto utile a disposizione dei *traders*, come è stato confermato in seguito dagli esempi condotti su dati reali. L'approccio *strike-spread* infine, costituiva quello che molti esperti in letteratura avevano indicato come il più efficace tra i vari metodi di replica statica. La derivazione della strategia, riportata nel Paragrafo 3.5, appare piuttosto complessa, e si fonda sugli assunti del modello di Black, Scholes e Merton relativamente alla valutazione *risk-neutral*, esponendosi quindi ai problemi più volte discussi. L'applicazione della tecnica per *DO* e *UO calls* ha permesso di definirne in maniera chiara gli aspetti rilevanti, ed anche in questa circostanza ha sottolineato la necessità di fare ricorso ad un'intelligente distribuzione dei punti lungo il contorno da replicare, così come era stato osservato nel caso del *maturity-spread approach*. Si è deciso pertanto di suggerire una spaziatura ottimale che riflettesse in maniera adeguata la probabilità di realizzazione dei rendimenti a scadenza, in base all'intuizione secondo cui i valori critici sui quali focalizzare l'attenzione dovesse essere – ancora una volta – quelli in prossimità della barriera. I risultati mostrati per la *DO call* target assunta come esempio e per altre opzioni, hanno permesso di concludere che si può in effetti osservare un miglioramento nella *performance* della replica, che diventa in generale anche più stabile all'aumentare di N . L'ultima sezione del terzo capitolo, dopo aver effettuato un *excursus* sui più

importanti contributi empirici relativi all'argomento della *static replication* di opzioni con barriera, ha proposto alcuni esperimenti con dati storici, con l'obiettivo di testare le tecniche illustrate in un contesto reale. Prendendo come riferimento l'intervallo di oscillazione per il prezzo di una *DO call* in assenza di opportunità di arbitraggio, derivato applicando la PCS, si è osservato che la formula di valutazione di Merton tende a sovra-stimare il valore di mercato di questo strumento. La ragione risiede nel fatto che la struttura della volatilità non è riflessa in modo appropriato nella formula "classica", e la conseguenza si traduce in un *mispicing* dell'opzione target. L'analisi empirica dello *strike-spread approach* è consistente con il risultato precedente, andandosi a collocare esattamente a metà strada tra il mondo ideale di Black, Scholes e Merton, dalle cui principali assunzioni dipende la sua formulazione, e la realtà dei mercati, in cui i prezzi quotati seguono l'andamento di una serie di fattori di rischio difficilmente modellabili.

Dopo aver rivisitato i risultati e i contributi più rilevanti dell'elaborato, si desidera concludere l'intera trattazione effettuando alcune considerazioni finali, di carattere relativo ed assoluto. Le prime riguardano il rapporto tra la replica statica e la replica dinamica delle opzioni. Il lavoro prodotto ha permesso innanzitutto di identificare i punti deboli delle strategie di *dynamic hedging*, ai quali la *static replication* riesce a porre rimedio in maniera efficace. Per esempio, la copertura statica si caratterizza per un minore impatto dei costi di transazione ed un miglior *matching* dei fattori di rischio tra il portafoglio di *hedging* e l'opzione target, ottenendo in media una *performance* superiore e rivelandosi un'alternativa più che valida rispetto alle classiche tecniche di copertura dinamica. In termini assoluti, la replica statica delle opzioni con barriera costituisce una soluzione indispensabile a disposizione dei *traders*, principalmente a causa della particolare struttura di questi derivati, che li rende molto sensibili alle variazioni del prezzo del sottostante ma alla quale la *static replication* riesce ad adattarsi estremamente bene. In senso relativo, c'è anche da considerare la netta superiorità rispetto alle coperture dinamiche, che proprio con le *barrier options* si comportano in maniera estremamente imprecisa. Per quanto riguarda le opzioni ordinarie, in teoria il vantaggio comparato con la *dynamic replication* dovrebbe risultare minore, ma l'analisi svolta ha portato alla luce risultati incoraggianti – in linea con le precedenti ricerche sull'argomento – che indicano la convenienza in molti casi di ricorrere alla replica statica a fini di copertura. A tale proposito, è importante sottolineare come in realtà questi due approcci concorrenti si possano considerare complementari tra loro, nella misura in cui l'utilizzo di uno dei due non esclude automaticamente l'altro. Alcuni autori ad esempio, hanno provato a sviluppare delle tecniche che costituiscono un *mix* tra l'approccio dinamico e quello statico, ottenendo riscontri positivi in base ai loro studi. In ogni caso, ad oggi l'enorme importanza di questi temi insieme, unita alla presenza di pochi contributi significativi sull'argomento, creano la possibilità e la necessità per il futuro di una ricerca maggiormente approfondita in questo campo.

L'evoluzione delle *FinTechs* (*Financial Technologies*) sta gettando i presupposti per nuove frontiere in campo finanziario, verso cui si tenderà negli anni a venire, in risposta ad una sempre crescente richiesta di prodotti sofisticati e personalizzati da parte dei clienti. Allo stesso tempo,

l'intensificazione delle attività di vigilanza e controllo da parte delle autorità competenti rivolte alla gestione dei contratti derivati nelle principali istituzioni finanziarie, pone la necessità per una particolare attenzione verso il tema del *risk management* e del *pricing* di opzioni finanziarie. Pertanto, sarà senza dubbio fondamentale – ed interessante – per gli attori coinvolti sviluppare ed approfondire le strategie di replica statica, che permetteranno di rispondere in modo efficace alle sfide future.

Codici VBA

```
Function BSCall(S, K, sigma, r, q, T)

d1 = (Log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

BSCall = S * Exp(-q * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(d1, True) _
- K * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(d2, True)

End Function
```

```
Function BSPut(S, K, sigma, r, q, T)

d1 = (Log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

BSPut = -S * Exp(-q * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(-d1, True) _
+ K * Exp(-r * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(-d2, True)

End Function
```

```
Function Delta_BSCall(S, K, r, b, sigma, T)

Dim d1 As Double

d1 = (Log(S / K) + (b + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / (sigma * Sqr(T))

Delta_BSCall = Exp((b - r) * T) * Application.WorksheetFunction.Norm_S_Dist(d1, True)

End Function
```

```
Function Gamma_BSCall(S, K, r, q, sigma, T)

Dim d1 As Double

d1 = (Log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / (sigma * Sqr(T))

Gamma_BSCall = (Exp(-(d1 ^ 2) / 2) / Sqr(2 * WorksheetFunction.Pi())) * Exp(-q * T) / (S * sigma * Sqr(T))

End Function
```

```
Function DeltaHedgingGraph_BSCall(S, K, r, q, sigma, T, dt, NumShares)
```

```

Dim NbSteps As Double
Dim j As Integer

NbSteps = T / dt

ReDim Output(2) As Double

Delta0 = Delta_BSCall(S, K, r, q, sigma, T)
Stock = S
SharesPurchased = Delta0 * NumShares * Stock
C = BSCall(Stock, K, sigma, r, q, T) * NumShares
b = C - SharesPurchased

For j = 1 To NbSteps - 1
    g = WorksheetFunction.Norm_S_Inv(Rnd())
    Stock = Stock * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * dt + sigma * g * Sqr(dt))
    Delta1 = Delta_BSCall(Stock, K, r, q, sigma, T - dt * j)
    SharesPurchased = (Delta1 - Delta0) * NumShares * Stock
    b = b * Exp(r * dt) - SharesPurchased
    Shares = Delta1 * Stock * NumShares
    Delta0 = Delta1
Next j

g = WorksheetFunction.Norm_S_Inv(Rnd())
Stock = Stock * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * dt + sigma * g * Sqr(dt))
Shares = Delta1 * Stock * NumShares
Output(1) = Stock
Output(2) = b * Exp(r * dt) + Shares

DeltaHedgingGraph_BSCall = Output

End Function

```

```

Function M(r, q, sigma, T, t0)

M = (r - q - (sigma ^ 2) / 2) * (t0 + (T - t0) / 2)

End Function

```

```

Function V(sigma, T, t0)

V = (sigma ^ 2) * (t0 + (T - t0) / 3)

End Function

```

```

Function KVGeoAsian(S, K, r, q, sigma, T, t0)

Dim M, V, d1, d2 As Double

M = (r - q - (sigma ^ 2) / 2) * (t0 + (T - t0) / 2)
V = (sigma ^ 2) * (t0 + (T - t0) / 3)

d1 = (Log(S / K) + M + V) / Sqr(V)
d2 = (Log(S / K) + M) / Sqr(V)

KVGeoAsian = Exp(-r * T) * (S * Exp(M + V / 2) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(d1, True) - K * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(d2, True))

End Function

```

```

Function KVGeoAsianDelta(S, K, r, q, sigma, T, t0)
Dim M, V, d1 As Double
M = (r - q - (sigma ^ 2) / 2) * (t0 + (T - t0) / 2)
V = (sigma ^ 2) * (t0 + (T - t0) / 3)
d1 = (Log(S / K) + M + V) / Sqr(V)
KVGeoAsianDelta = Exp(-r * T + M + V / 2) * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Dist(d1, True)
End Function

```

```

Function Margrabe(V, K, sigmaV, sigmaK, corr, deltaV, deltaK, T, t0)
As Double
Dim d1 As Double, d2 As Double
Dim sigma As Double
sigma = Sqr(sigmaV ^ 2 + sigmaK ^ 2 - 2 * corr * sigmaV * sigmaK)
d1 = (Log(V / K) + (deltaK - deltaV + 0.5 * sigma ^ 2) * (T - t0)) /
(sigma * Sqr(T - t0))
d2 = d1 - sigma * Sqr(T - t0)
Margrabe = V * Exp(-deltaV * (T - t0)) * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Dist(d1, True) - K * Exp(-deltaK * (T - t0)) * Worksheet-
Function.Norm_S_Dist(d2, True)
End Function

```

```

Public Function CarrWhuEuropean_BSCall(S, K_target, sigma, r, q, T, u,
mu, NbTraj, M) As Variant
Dim i, j, x2(), w2(), C_rep
ReDim x2(1 To M), w2(1 To M)
'La Function "gauher" è definita nel foglio di lavoro "Polino-
mi di Hermite e Integrazione Numerica.xlsm", scaricabile al link:
http://docenti.luiss.it/barone/files/2016/03/Opzioni\_9a\_Excel\_Files.zi
p
gauher x2(), w2(), M
ReDim K(1 To M) As Double, w(1 To M) As Double, C(1 To M) As Double,
Cw(1 To M) As Double
For i = 1 To M
K(i) = K_target * Exp(x2(i) * sigma * Sqr(2 * (T - u)) + (q - r -
sigma ^ 2 / 2) * (T - u))
w(i) = w2(i) * Exp(-q * (T - u)) / Sqr(WorksheetFunction.Pi())
C(i) = BSCall(S, K(i), sigma, r, q, u)
Cw(i) = w(i) * C(i)
Next i
C_rep = WorksheetFunction.Sum(Cw)
b_s = BSCall(S, K_target, sigma, r, q, T) - C_rep
ReDim e(1 To NbTraj) As Double
For j = 1 To NbTraj
Stock = S * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * u + sigma * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Inv(Rnd()) * Sqr(u))

```

```

    For i = 1 To M
        C(i) = WorksheetFunction.Max(Stock - K(i), 0)
        Cw(i) = w(i) * C(i)
    Next i
    e(j) = WorksheetFunction.Sum(Cw) + b_s * Exp(r * u) -
BSCall(Stock, K_target, sigma, r, q, (T - u))
Next j

ReDim Max(1 To 1) As Double
ReDim Min(1 To 1) As Double
ReDim Kurt(1 To 1) As Double

Average = WorksheetFunction.Average(e)
Std = WorksheetFunction.StDev(e)
Skew = WorksheetFunction.Skew(e)
Max(1) = WorksheetFunction.Max(e)
Min(1) = WorksheetFunction.Min(e)
Kurt(1) = WorksheetFunction.Kurt(e) + 3

ReDim Output(1 To 7, 1 To 1) As Double

Output(1, 1) = Average
Output(2, 1) = Std
Output(3, 1) = Min(1)
Output(4, 1) = Max(1)
Output(5, 1) = Skew
Output(6, 1) = Kurt(1)
Output(7, 1) = C_rep

CarrWhuEuropean_BSCall = Output

End Function

```

```

Function DeltaHedging_BSCall(S, K_target, r, q, sigma, T, u, dt,
NbTraj) As Variant

Dim i, j, g, NbSteps
Dim C As Double
ReDim e(1 To NbTraj) As Double

NbSteps = u / dt
C = BSCall(S, K_target, sigma, r, q, T)

For i = 1 To NbTraj
    Stock = S
    Delta0 = 0
    Delta1 = Delta_BSCall(S, K_target, r, q, sigma, T)
    b_d = C - Delta1 * Stock
    For j = 1 To NbSteps
        g = WorksheetFunction.Norm_S_Inv(Rnd())
        Stock = Stock * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * dt + sigma * g *
Sqr(dt))
        Delta0 = Delta1
        Delta1 = Delta_BSCall(Stock, K_target, r, q, sigma, (T - dt *
j))
        b_d = b_d * Exp(r * dt) - (Delta1 - Delta0) * Stock
    Next j
    e(i) = b_d + Delta1 * Stock - BSCall(Stock, K_target, sigma, r,
q, (T - u))
Next i

ReDim Max(1 To 1) As Double
ReDim Min(1 To 1) As Double
ReDim Kurt(1 To 1) As Double

Average = WorksheetFunction.Average(e)

```

```

Std = WorksheetFunction.StDev(e)
Skew = WorksheetFunction.Skew(e)
Max(1) = WorksheetFunction.Max(e)
Min(1) = WorksheetFunction.Min(e)
Kurt(1) = WorksheetFunction.Kurt(e) + 3

```

```
ReDim Output(1 To 7, 1 To 1)
```

```

Output(1, 1) = Average
Output(2, 1) = Std
Output(3, 1) = Min(1)
Output(4, 1) = Max(1)
Output(5, 1) = Skew
Output(6, 1) = Kurt(1)
Output(7, 1) = C

```

```
DeltaHedging_BSCall = Output
```

```
End Function
```

```
Public Function CarrWhuGeoAsianCall(S, K_target, sigma, r, q, T, t0,
u, mu, NbTraj, n) As Variant
```

```
Dim i, j, x2(), w2(), C_rep
ReDim x2(1 To n), w2(1 To n)
```

'La Function "gauher" è definita nel foglio di lavoro "Polino-
mi di Hermite e Integrazione Numerica.xlsm", scaricabile al link:
[http://docenti.luiss.it/barone/files/2016/03/Opzioni_9a_Excel_Files.zi
p](http://docenti.luiss.it/barone/files/2016/03/Opzioni_9a_Excel_Files.zip)

```
gauher x2(), w2(), n
```

```
ReDim K(1 To n) As Double, w(1 To n) As Double, C(1 To n) As Double,
Cw(1 To n) As Double
ReDim M1(1 To 1) As Double, V1(1 To 1) As Double
```

```

M1(1) = (r - q - (sigma ^ 2) / 2) * ((t0 - u) + (T - t0) / 2)
V1(1) = (sigma ^ 2) * ((t0 - u) + (T - t0) / 3)

```

```

For i = 1 To n
    K(i) = K_target * Exp(x2(i) * Sqr(2 * V1(1)) - M1(1) - V1(1))
    w(i) = w2(i) * Exp(-r * (T - u) + M1(1) + V1(1) / 2) /
Sqr(WorksheetFunction.Pi())
    C(i) = BSCall(S, K(i), sigma, r, q, u)
    Cw(i) = w(i) * C(i)
Next i

```

```

C_rep = WorksheetFunction.Sum(Cw)
b = KVGeoAsian(S, K_target, r, q, sigma, T, t0) - C_rep

```

```
ReDim e(1 To NbTraj) As Double
```

```

For j = 1 To NbTraj
    Stock = S * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * u - sigma * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Inv(Rnd()) * Sqr(u))
    For i = 1 To n
        C(i) = WorksheetFunction.Max(Stock - K(i), 0)
        Cw(i) = w(i) * C(i)
    Next i
    e(j) = WorksheetFunction.Sum(Cw) + b * Exp(r * u) - KVGe-
oAsian(Stock, K_target, r, q, sigma, (T - u), (t0 - u))
Next j

```

```

ReDim Max(1 To 1) As Double
ReDim Min(1 To 1) As Double

```

```

ReDim Kurt(1 To 1) As Double

Average = WorksheetFunction.Average(e)
Std = WorksheetFunction.StDev(e)
Skew = WorksheetFunction.Skew(e)
Max(1) = WorksheetFunction.Max(e)
Min(1) = WorksheetFunction.Min(e)
Kurt(1) = WorksheetFunction.Kurt(e) + 3

ReDim Output(1 To 7, 1 To 1) As Double

Output(1, 1) = Average
Output(2, 1) = Std
Output(3, 1) = Min(1)
Output(4, 1) = Max(1)
Output(5, 1) = Skew
Output(6, 1) = Kurt(1)
Output(7, 1) = C_rep

CarrWhuGeoAsianCall = Output

End Function

```

```

Function KVDeltaHedging(S, K_target, r, q, sigma, T, t0, u, dt,
NbTraj) As Variant

Dim i, j, g, NbSteps
Dim C As Double
ReDim e(1 To NbTraj) As Double

NbSteps = u / dt
C = KVGeoAsian(S, K_target, r, q, sigma, T, t0)

For i = 1 To NbTraj
    Stock = S
    Delta0 = 0
    Delta1 = KVGeoAsianDelta(Stock, K_target, r, q, sigma, T, t0)
    b_d = C - Delta1 * Stock
    For j = 1 To NbSteps
        g = WorksheetFunction.Norm_S_Inv(Rnd())
        Stock = Stock * Exp((r - sigma ^ 2 / 2) * dt + sigma * g *
Sqr(dt))
        Delta0 = Delta1
        Delta1 = KVGeoAsianDelta(Stock, K_target, r, q, sigma, (T - dt
* j), (t0 - dt * j))
        b_d = b_d * Exp(r * dt) - (Delta1 - Delta0) * Stock
    Next j
    e(i) = b_d + Delta1 * Stock - KVGeoAsian(Stock, K_target, r, q,
sigma, (T - u), (t0 - u))
Next i

ReDim Max(1 To 1) As Double
ReDim Min(1 To 1) As Double
ReDim Kurt(1 To 1) As Double

Average = WorksheetFunction.Average(e)
Std = WorksheetFunction.StDev(e)
Skew = WorksheetFunction.Skew(e)
Max(1) = WorksheetFunction.Max(e)
Min(1) = WorksheetFunction.Min(e)
Kurt(1) = WorksheetFunction.Kurt(e) + 3

ReDim Output(1 To 7, 1 To 1)

Output(1, 1) = Average
Output(2, 1) = Std

```

```

Output(3, 1) = Min(1)
Output(4, 1) = Max(1)
Output(5, 1) = Skew
Output(6, 1) = Kurt(1)
Output(7, 1) = C

```

```
KVDeltaHedging = Output
```

```
End Function
```

```
Function DownIn_Call(S, K, H, sigma, r, q, T)
```

```
Dim lambda, y As Double
```

```
If H <= K Then
```

```

lambda = (r - q + (sigma ^ 2) / 2) / (sigma ^ 2)
y = (Log((H ^ 2) / (S * K))) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma *
Sqr(T)

```

```

DownIn_Call = S * Exp(-q * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda)) * Work-
sheetFunction.Norm_S_Dist(y, True)
- K * Exp(-r * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda - 2)) * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Dist((y - sigma * Sqr(T)), True)

```

```
Else
```

```
DownIn_Call = BSCall(S, K, sigma, r, q, T) - DownOut_Call(S, K, H,
sigma, r, q, T)
```

```
End If
```

```
End Function
```

```
Function DownOut_Call(S, K, H, sigma, r, q, T)
```

```
Dim lambda, y, x1, y1 As Double
```

```
If H >= K Then
```

```

lambda = (r - q + 0.5 * sigma ^ 2) / (sigma ^ 2)
y = (Log((H ^ 2) / (S * K))) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma *
Sqr(T)
x1 = Log(S / H) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma * Sqr(T)
y1 = Log(H / S) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma * Sqr(T)

```

```

DownOut_Call = S * Exp(-q * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(x1,
True) - K * Exp(-r * T) *
* WorksheetFunction.Norm_S_Dist(x1 - sigma * Sqr(T), True)
- S * Exp(-q * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda)) * Worksheet-
Function.Norm_S_Dist(y1, True) + K
* Exp(-r * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda - 2)) * WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Dist((y1 - sigma * Sqr(T)), True)

```

```
Else
```

```
DownOut_Call = BSCall(S, K, sigma, r, q, T) - DownIn_Call(S, K, H,
sigma, r, q, T)
```

```
End If
```

```
End Function
```

```

Function UpIn_Call(S, K, H, sigma, r, q, T)
Dim lambda, y, y1, x1 As Double
If H > K Then
    lambda = (r - q + (sigma ^ 2) / 2) / (sigma ^ 2)
    y = (Log((H ^ 2) / (S * K))) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma *
Sqr(T)
    x1 = Log(S / H) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma * Sqr(T)
    y1 = Log(H / S) / (sigma * Sqr(T)) + lambda * sigma * Sqr(T)

    UpIn_Call = S * Exp(-q * T) * WorksheetFunction.Norm_S_Dist(x1,
True) - K * Exp(-r * T) *
WorksheetFunction.Norm_S_Dist(x1 - sigma * Sqr(T), True) - S *
Exp(-q * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda))
* (WorksheetFunction.Norm_S_Dist(-y, True) - WorksheetFunc-
tion.Norm_S_Dist(-y1, True))
+ K * Exp(-r * T) * ((H / S) ^ (2 * lambda - 2)) * (Worksheet-
Function.Norm_S_Dist(-y + sigma * Sqr(T), True)
- WorksheetFunction.Norm_S_Dist(-y1 + sigma * Sqr(T), True))

Else
    UpIn_Call = BSCall(S, K, sigma, r, q, T)
End If
End Function

```

```

Function UpOut_Call(S, K, H, sigma, r, q, T)
If H > K Then
    UpOut_Call = BSCall(S, K, sigma, r, q, T) - UpIn_Call(S, K, H,
sigma, r, q, T)
Else
    UpOut_Call = 0
End If
End Function

```

```

Function Out_Call_Payoff(S, K, H, sigma, r, q, T) As Double
p = 1 - 2 * (r - q) / (sigma ^ 2)
Out_Call_Payoff = -((S / H) ^ p) * (WorksheetFunction.Max((H ^ 2) / S
- K, 0))
End Function

```

```

Sub DerErgKani_StaticRep()
'Cancela il contenuto delle celle nel Range F5:J10000
Range("F5:J10000").ClearContents

'Assegna i valori alle variabili
S = Range("B1").Value
K = Range("B2").Value
H = Range("B3").Value

```

```

sigma = Range("B4").Value
r = Range("B5").Value
q = Range("B6").Value
T = Range("B7").Value

N = Range("B9").Value

ReDim C_W(N), W(N), C(N), R1(N), R2(N), Scadenza(N), Strike(N) As Double

Dim i, j As Integer
Dim dt, RCum As Double

dt = T / N
Scadenza(1) = T
Strike(1) = H
C1 = BSCall(S, K, sigma, r, q, T)
C(1) = BSCall(S, H, sigma, r, q, T)
R1(1) = BSCall(H, K, sigma, r, q, dt)
R2(1) = BSCall(H, H, sigma, r, q, dt)
W(1) = -R1(1) / R2(1)
RCum = 0
C_W(1) = C(1) * W(1)

For i = 2 To N
    Scadenza(i) = T - (i - 1) * dt
    Strike(i) = H
    R1(i) = BSCall(H, K, sigma, r, q, i * dt)
    R2(i) = BSCall(H, H, sigma, r, q, i * dt)
    C(i) = BSCall(S, H, sigma, r, q, (T - (i - 1) * dt))
    RCum = 0
    For j = 2 To i
        RCum = RCum + (R2(j) * W(i - j + 1))
    Next j
    RCum = RCum + R1(i)
    W(i) = -RCum / R2(i)
    C_W(i) = C(i) * W(i)
Next i

'Creare la tabella con i risultati nel Range G5:L(N)
Range("G5").Resize(N, 1).Value = WorksheetFunction.Transpose(Strike)
Range("H5").Resize(N, 1).Value = WorksheetFunction.Transpose(Scadenza)
Range("I5").Resize(N, 1).Value = WorksheetFunction.Transpose(C)
Range("J5").Resize(N, 1).Value = WorksheetFunction.Transpose(W)
Range("L4").Value = WorksheetFunction.Sum(C_W) + C1
End Sub

```

```

Function DerErgKani(S, K, H, sigma, r, q, T, N)

ReDim C_W(N), W(N), C(N), R1(N), R2(N) As Double
Dim i, j As Integer
Dim dt, RCum As Double

dt = T / N
C1 = BSCall(S, K, sigma, r, q, T)
C(1) = BSCall(S, H, sigma, r, q, T)
R1(1) = BSCall(H, K, sigma, r, q, dt)
R2(1) = BSCall(H, H, sigma, r, q, dt)
W(1) = -R1(1) / R2(1)
RCum = 0
C_W(1) = C(1) * W(1)

For i = 2 To N
    R1(i) = BSCall(H, K, sigma, r, q, i * dt)
    R2(i) = BSCall(H, H, sigma, r, q, i * dt)

```

```

C(i) = BSCall(S, H, sigma, r, q, (T - (i - 1) * dt))
RCum = 0
For j = 2 To i
    RCum = RCum + (R2(j) * W(i - j + 1))
Next j
RCum = RCum + R1(i)
W(i) = -RCum / R2(1)
C_W(i) = C(i) * W(i)
Next i

```

```
DerErgKani = WorksheetFunction.Sum(C_W) + C1
```

```
End Function
```

```
Function CarrChou_DOCall(S As Double, K As Double, H As Double, sigma
As Double, r As Double, q As Double, T As Double, N As Double)
```

```
Dim i, j As Integer
Dim delta, SumW As Double
```

```
delta = H / (2 * N + 1)
```

```
ReDim Strike(N), PrezzoOp(N), x(N), TN(N), W(N), PW(N)
```

```
Strike(1) = H - delta
PrezzoOp(1) = BSPut(S, Strike(1), sigma, r, q, T)
x(1) = Strike(1) - delta
TN(1) = Out_Call_Payoff(x(1), K, H, sigma, r, q, T) - WorksheetFunc-
tion.Max(x(1) - K, 0)
W(1) = TN(1) / WorksheetFunction.Max(Strike(1) - x(1), 0)
PW(1) = PrezzoOp(1) * W(1)
```

```
For i = 2 To N
    Strike(i) = x(i - 1) - delta
    PrezzoOp(i) = BSPut(S, Strike(i), sigma, r, q, T)
    x(i) = Strike(i) - delta
    TN(i) = Out_Call_Payoff(x(i), K, H, sigma, r, q, T) - Worksheet-
Function.Max(x(i) - K, 0)
    SumW = 0
    For j = 1 To i - 1
        SumW = SumW + W(j) * WorksheetFunction.Max(Strike(j) - x(i),
0)
    Next j
    W(i) = (TN(i) - SumW) / WorksheetFunction.Max(Strike(i) - x(i), 0)
    PW(i) = PrezzoOp(i) * W(i)
Next i
```

```
CarrChou_DOCall = WorksheetFunction.Sum(PW) + BSCall(S, K, sigma, r,
q, T)
```

```
End Function
```

```
Function CarrChou_DOCall_Ottimizzata(S As Double, K As Double, H As
Double, sigma As Double, r As Double, q As Double, T As Double, N As
Double)
```

```
Dim i, j As Integer
Dim delta, SumW, Ret, Prob As Double
```

```
Ret = Log(H / S)
Prob = WorksheetFunction.Norm_Dist(Ret, (r - q) * T, sigma * sqr(T),
True)
```

```
delta = Prob / (2 * N + 1)
```

```

ReDim Strike(N), PrezzoOp(N), x(N), TN(N), W(N), PW(N)

Strike(1) = S * Exp(WorksheetFunction.Norm_Inv((Prob - delta), (r - q)
* T, sigma * sqr(T)))
PrezzoOp(1) = BSput(S, Strike(1), sigma, r, q, T)
x(1) = S * Exp(WorksheetFunction.Norm_Inv((Prob - 2 * delta), (r - q)
* T, sigma * sqr(T)))
TN(1) = Out_Call_Payoff(x(1), K, H, sigma, r, q, T) - WorksheetFunc-
tion.Max(x(1) - K, 0)
W(1) = TN(1) / WorksheetFunction.Max(Strike(1) - x(1), 0)
PW(1) = PrezzoOp(1) * W(1)

For i = 2 To N
    Ret = Log(x(i - 1) / S)
    Strike(i) = S *
        Exp(WorksheetFunction.Norm_Inv(WorksheetFunction.Norm_Dist(Ret,
0, sigma, True) - delta, (r - q) * T, sigma * sqr(T)))
    PrezzoOp(i) = BSput(S, Strike(i), sigma, r, q, T)
    Ret = Log(Strike(i) / S)
    x(i) = S *
        Exp(WorksheetFunction.Norm_Inv(WorksheetFunction.Norm_Dist(Ret,
0, sigma, True) - delta, (r - q) * T, sigma * sqr(T)))
    TN(i) = Out_Call_Payoff(x(i), K, H, sigma, r, q, T) - Worksheet-
Function.Max(x(i) - K, 0)
    SumW = 0
    For j = 1 To i - 1
        SumW = SumW + W(j) * WorksheetFunction.Max(Strike(j) - x(i),
0)
    Next j
    W(i) = (TN(i) - SumW) / WorksheetFunction.Max(Strike(i) - x(i), 0)
    PW(i) = PrezzoOp(i) * W(i)
Next i

CarrChou_DOCall_Ottimizzata = WorksheetFunction.Sum(PW) + BScall(S, K,
sigma, r, q, T)

End Function

```

```

Function CarrChou_UOCall(S As Double, K As Double, H As Double, sigma
As Double, r As Double, q As Double, T As Double, N As Double)

Dim i, j As Integer
Dim delta, SumW As Double

delta = H / (2 * N + 1)

ReDim Strike(N), PrezzoOp(N), x(N), TN(N), W(N), PW(N)

Strike(1) = H + delta
PrezzoOp(1) = BScall(S, Strike(1), sigma, r, q, T)
x(1) = Strike(1) + delta
TN(1) = Out_Call_Payoff(x(1), K, H, sigma, r, q, T) - WorksheetFunc-
tion.Max(x(1) - K, 0)
W(1) = TN(1) / WorksheetFunction.Max(x(1) - Strike(1), 0)
PW(1) = PrezzoOp(1) * W(1)

For i = 2 To N
    Strike(i) = x(i - 1) + delta
    PrezzoOp(i) = BScall(S, Strike(i), sigma, r, q, T)
    x(i) = Strike(i) + delta
    TN(i) = Out_Call_Payoff(x(i), K, H, sigma, r, q, T) -
WorksheetFunction.Max(x(i) - K, 0)
    SumW = 0
    For j = 1 To i - 1

```

```
        SumW = SumW + W(j) * WorksheetFunction.Max(x(i) - Strike(j),  
0)  
    Next j  
    W(i) = (TN(i) - SumW) / WorksheetFunction.Max(x(i) - Strike(i), 0)  
    PW(i) = PrezzoOp(i) * W(i)  
Next i  
  
CarrChou_UOCall = WorksheetFunction.Sum(PW) + BSCall(S, K, sigma, r,  
q, T)  
  
End Function
```

Riferimenti Bibliografici

BOWIE, J. e CARR, P., "Static Simplicity", *Risk* 7, (1994), 45-49.

BROADIE, M., GLASSERMAN, P. e KOU, S. G., "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options", *Mathematical Finance*, 7, 4, (Ottobre 1997), 325-349.

BREEDEN, D. T., e LITZENBERGER, R. H., "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", *The Journal of Business*, 51, 4 (1978), 621-651.

CARR, P. e CHOU, A., "Breaking Barriers: Static Hedging of Barrier Securities", *Risk*, 10, 9 (Settembre 1997), 139-145.

CARR, P. e CHOU, A., "Hedging Complex Barrier Options", *Working Paper, Morgan Stanley and MIT Computer Science*, (1997).

CARR, P., ELLIS, K. e GUPTA, V., "Static Hedging of Exotic Options", *The Journal of Finance*, 53, 3 (Giugno 1998), 1165-1190.

CARR, P. e MADAN, D., "Towards a Theory of Volatility Trading", *Risk Book on Volatility*, (1998), 417-427.

CARR, P. e WU, L., "Static Hedging of Standard Options", *NY University and Baruch College Working Paper*, (2002).

DERMAN, E., ERGENER, D. e KANI, I., "Static Options Replication", *Journal of Derivatives*, 2, 4, (Summer 1995), 78-95.

EASTON, S., GERLACH, R., GRAHAM, M. e TUYL, F., "An Empirical Examination of the Pricing of Exchange-Traded Barrier Options", *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (Novembre 2004), 1049-1064.

ENGELMANN, B., FENGLER, M., R., NALHOLM, M. e SCHWENDNER, P., "Static versus dynamic hedges: an empirical comparison for barrier options", *Review of Derivatives Research*, 9 (2007), 239-264.

HULL, J. C., "Opzioni, Futures e Altri Derivati – 9° Edizione, ed. italiana a cura di Emilio Barone", *Pearson*, (2015).

KEMNA, A.G.Z., e VORST, A.C.F., "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), 113-129.

LELAND, H. E., "Option Pricing and Replication with Transaction Costs", *The Journal of Finance*, 40, 5 (December 1985), 1283-1301.

MARGRABE, W., "The Value of an Option to Exchange an Asset for another", *Journal of Finance*, 33, 1 (1978), 177-186.

MCDONALD, R., L., “Derivatives Markets – 3rd edition”, *Pearson Series in Finance*, (2013).

MERTON, R. C., “Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 125-144.

MERTON, R. C., “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), 141-183.

NALHOLM, M. e POULSEN, R., “Static Hedging of Barrier Options Under General Asset Dynamics: Unification and Application”, *Journal of Derivatives*, 13 (2006), 46–60.

RUBINSTEIN, M., e REINER, E., “Breaking Down The Barriers”, *Risk*, (September 1991), 28-35.

TOMPKINS, R., G., “Static versus dynamic hedging of exotic option: An evaluation of hedge performance via simulation”, *Journal of Risk Finance*, 3 (2002), 6–34.

WANG, S., SHEN, Y., e QIAN, L., “Static Hedging of Geometric Average Asian Options with Standard Options”, *Communication in Statistics – Simulation and Computation*, (2015), 2101-2116.

WU, L. e ZHU, J., "Simple Robust Hedging with Nearby Contracts.", *SSRN Working Paper Series* (2011).

Siti Web

Bank for International Settlements

<https://www.bis.org>

Bloomberg

<https://www.bloomberg.com>

Chicago Board of Options Exchange

<http://www.cboe.com>

John C. Hull – Rotman School of Management – University of Toronto

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

Peter Paul Carr – NYU Tandon School of Engineering

<http://engineering.nyu.edu/people/peter-paul-carr>

SSRN

<https://www.ssrn.com>

U.S. Department of the Treasury – Resource Center

<https://www.treasury.gov/resource-center>

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI
“LUISS - GUIDO CARLI”



FACOLTÀ DI ECONOMIA
Corso di laurea in Economia e Finanza

REPLICA STATICA DELLE OPZIONI

RIASSUNTO

RELATORE:
CHIARISSIMO PROF. EMILIO BARONE.

LAUREANDO:
LUCA SEBASTIANI

ANNO ACCADEMICO 2015-16

Capitolo 1

Opzioni: Tecniche di Hedging

Il primo capitolo dell'elaborato effettua un esame delle principali tecniche di copertura dinamica per le opzioni finanziarie, evidenziandone la logica ed il funzionamento pratico allo scopo di far emergere i punti di forza e di debolezza che caratterizzano queste strategie. L'intento fondamentale è quello di gettare le basi per un successivo confronto con i modelli di replica statica, che costituiscono l'argomento centrale della tesi.

1.1 STRATEGIE STOP-LOSS

La strategia a costo limitato (*stop-loss strategy*) è una delle più semplici tecniche di replica dinamica per opzioni europee *plain vanilla*. L'idea su cui si fonda consiste nel mantenimento di una posizione coperta (*covered position*) quando l'opzione target è *in-the-money* nel corso della sua vita e di una posizione scoperta (*naked position*) se l'opzione è *out-of-the money*. La copertura viene effettuata acquistando o vendendo una quantità di sottostante pari al nozionale dell'opzione ogni volta che S_t (il prezzo corrente dell'*underlying*) si porta al di sopra o al di sotto di K (il prezzo d'esercizio).

Sebbene la tecnica funzioni in maniera perfetta sul piano teorico, a livello pratico esistono invece una serie di elementi, tra i quali ad esempio la presenza di costi di transazione e soprattutto l'impossibilità per il *trader* di prevedere esattamente l'evoluzione del sottostante quando $S=K$, che portano alla creazione di un *hedging error*; questo termine di errore inoltre, si rivela in media più elevato quando la frequenza di monitoraggio dell'*underlying* è minore (e.g., settimanale). Di conseguenza, i fattori menzionati fanno sì che si verifichi un deterioramento significativo nell'efficacia della strategia, particolarmente visibile soprattutto a livello grafico (v. Figg. 1.2 e 1.3). Le simulazioni numeriche (v. Tab. 1.1) confermano ulteriormente tale riscontro, mostrando una *performance* poco soddisfacente nel complesso per la tecnica in esame e suggerendo la necessità di fare ricorso a modelli più sofisticati e strutturati, che consentano di gestire meglio la copertura dell'opzione target.

1.2 DELTA HEDGING

La tecnica del *delta hedging* proviene direttamente dall'applicazione del principio di valutazione neutrale al rischio, utilizzato da Black, Scholes e Merton per la dimostrazione dell'omonima e ben nota formula di *option pricing*. Gli autori dimostrano¹ infatti come sia possibile – in base alle loro

¹ Una breve spiegazione dei passaggi principali viene fornita al Paragrafo 1.2 dell'elaborato.

ipotesi – replicare un'opzione europea *plain vanilla* costruendo un portafoglio composto soltanto da un certo ammontare di sottostante e dal titolo *risk-free*. La quantità di *underlying asset* da acquistare o vendere viene definita dal delta dell'opzione – ovvero la derivata prima del prezzo dello strumento rispetto ad S – da cui prende il nome la strategia. Dal momento che il delta cambia nel tempo con l'avvicinarsi della scadenza dell'opzione e al variare del prezzo del sottostante, il portafoglio di replica deve essere bilanciato periodicamente per mantenere attiva la copertura. Al limite, ipotizzando di effettuare un monitoraggio continuo del sottostante e di adeguare conseguentemente la posizione, la replica risulta perfetta, a condizione che siano valide le assunzioni di Black, Scholes e Merton: assenza di costi di transazione, esistenza di infinite possibilità di *trading* e valori costanti per volatilità (σ), tasso d'interesse privo di rischio (r) e tasso di dividendo (q).

Le simulazioni di copertura settimanale e giornaliera effettuate (v. Tab. 1.2, Figg. 1.5 e 1.6) mostrano un chiaro miglioramento nella *performance* complessiva della tecnica rispetto alla strategia a costo limitato. Tuttavia, la realtà dei mercati finanziari richiede la considerazione di una serie di elementi, in presenza dei quali i risultati ottenuti possono peggiorare considerevolmente. Ad esempio, Leland (1985) dimostra che i costi di transazione causano un incremento dell'*hedging error*, e suggerisce una modifica al *delta hedging* “classico” per tenere conto di questo aspetto. Inoltre, la variazione temporale di alcuni dei parametri che contribuiscono a formare il prezzo dell'opzione (volatilità, *risk-free rate* e *dividend yield*), unita all'impossibilità di effettuare negoziazioni nel continuo, determinano problemi rilevanti per i *traders*, lasciando i loro *books* esposti ad altri fattori di rischio.

Per quanto riguarda le opzioni esotiche, è possibile applicare il *delta hedging* in modo analogo al caso delle opzioni *plain vanilla*. Le esotiche sono strumenti più complessi delle *calls* e *puts* europee, dato che di norma sono caratterizzate da una particolare struttura del *payoff* a scadenza, che dipende in maniera non lineare dal prezzo del sottostante. L'efficacia della copertura dinamica tramite delta varia considerevolmente a seconda del tipo di opzione considerata. Per le opzioni asiatiche ad esempio, si rileva un'ottima *performance* anche con frequenza di monitoraggio settimanale (v. Tab. 1.3), perché il pagamento si basa sulla media delle osservazioni passate del sottostante in un determinato intervallo temporale, che diventa gradualmente più stabile con l'avvicinarsi della scadenza, mentre il delta tende a zero. Al contrario, le opzioni con barriera si dimostrano particolarmente difficili da replicare dinamicamente (v. Tab. 1.4), per via della presenza di una discontinuità nel *payoff* finale che rende il delta e il gamma molto volatili, soprattutto in prossimità della barriera (H) e della scadenza.

Un ulteriore aspetto che emerge dall'analisi del *delta hedging* è che l'errore di copertura risulta più marcato quando il prezzo del sottostante alla *maturity* termina vicino al prezzo d'esercizio. Intuitivamente, l'incertezza cresce quando S si trova nei pressi di K , perché diventa più difficile prevedere se l'opzione terminerà la sua vita *in o out of-the-money*. Matematicamente invece, questa incertezza si misura con il gamma, la cui trattazione è stata delegata all'ultimo paragrafo del Capitolo 1.

1.3 DELTA-GAMMA HEDGING

Il gamma esprime la derivata seconda del prezzo di un'opzione rispetto ad S , fornendo quindi allo stesso tempo una misura della sensibilità del delta alle variazioni del sottostante. Nel contesto definito da Black, Scholes e Merton, le uniche variabili che possono giustificare un cambiamento nel prezzo delle opzioni nel corso della loro vita utile sono S e t . Se si espande fino al secondo ordine il valore dello strumento target rispetto a queste variabili si può dunque ottenere una copertura molto accurata, costruendo un portafoglio in grado di replicare sia la pendenza (delta) che la convessità (gamma) della funzione. Per effettuare il *delta-gamma hedging* di un'opzione è necessario pertanto aggiungere un ulteriore strumento, che – a differenza del sottostante – sia caratterizzato da un gamma non nullo. Ad esempio, si potrebbe decidere di impiegare un'altra opzione con caratteristiche simili a quella target. Prendendo come riferimento il modello di BSM, si osserva (v. Tab. 1.5) che la *performance* ottenuta dalla nuova strategia risulta migliore rispetto al semplice *delta-hedging* analizzato in precedenza. Tuttavia, vanno considerati due aspetti importanti: innanzitutto, l'aggiunta di un terzo strumento di copertura (oltre al sottostante e al deposito privo di rischio) comporta un incremento dei costi di transazione, producendo un peggioramento nell'efficacia della replica ed aumentando l'*hedging error*. Inoltre, sui mercati finanziari è facile osservare come i tassi d'interesse, i dividendi attesi e le volatilità dei titoli cambino giornalmente in maniera più o meno marcata, generando fattori di rischio rilevanti che il *delta-hedging* o il *delta-gamma hedging* non sono in grado di replicare. Per tali ragioni si rivela opportuno il ricorso a strategie di copertura che consentano di minimizzare i costi e di garantire allo stesso tempo una replica migliore e più completa del target lungo tutte le dimensioni. Per quanto riguarda invece l'applicazione della tecnica in esame alle opzioni con barriera, le simulazioni svolte (v. Tab. 1.6) hanno permesso di riscontrare alcuni interessanti risultati. In determinate circostanze infatti, l'aggiunta di un ulteriore strumento può contribuire addirittura a peggiorare l'efficacia della copertura. Dopo un'attenta analisi si è giunti alla conclusione che il problema risieda nella conformazione "anomala" del *payoff* delle *barrier options*, che si riflette sul delta e sul gamma rendendoli molto più sensibili alle variazioni di S rispetto a quelli delle equivalenti *plain vanilla* (v. Fig. 1.8). In particolare, quando il sottostante si trova in prossimità della barriera e l'opzione è vicina alla scadenza, il delta e il gamma risultano estremamente volatili, e i fattori di rischio del target e del portafoglio di replica tendono a muoversi in direzioni diverse, giustificando il complessivo peggioramento osservato in alcune delle simulazioni. Tale riscontro ha permesso ancora una volta di constatare le difficoltà incontrate dai *traders* nel replicare dinamicamente le opzioni con barriera, aprendo la strada allo sviluppo di modelli di *hedging* più robusti ed efficienti, in grado di far fronte alle problematiche sollevate.

Capitolo 2

Replica Statica delle Opzioni Ordinarie

Lo scopo del Capitolo 2 è quello di introdurre il concetto della replica statica di opzioni ordinarie, analizzando le strategie ed i modelli principali per poterne catturare la logica e comprendere il funzionamento. Inoltre, una serie di simulazioni verranno condotte con l'intento di individuare i punti di forza e di debolezza delle tecniche in esame, per le quali si proporranno e svilupperanno anche estensioni e miglioramenti. Infine, alcuni esperimenti su dati reali permetteranno di concludere la trattazione, rivelando ulteriori aspetti d'interesse e suggerendo nuovi spunti di riflessione.

2.1 REPLICA STATICA ESATTA

La replica statica delle opzioni prevede la costruzione di un portafoglio di strumenti detenuti in quantità fisse (ovvero, senza la necessità di effettuare bilanciamenti periodici) che consenta di realizzare una copertura efficace del target. In certi casi, l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio rende possibile stabilire delle strategie di replica esatta per alcuni tipi di opzioni, che si rivelano utili pertanto ai fini dell'*hedging* e del *pricing* degli strumenti in questione.

La *Put-Call Parity*, ad esempio, stabilisce una relazione di uguaglianza tra i prezzi di una *call* e una *put* europee *plain vanilla* e di un contratto *forward* con caratteristiche simili (stesso sottostante, scadenza e prezzo d'esercizio). Attraverso la PCP, i *traders* possono coprire (o prezzare) uno dei tre strumenti costruendo un portafoglio che contenga – in giuste quantità – i restanti due. La Tabella 2.1 definisce le varie combinazioni che si possono ottenere per formare una replica statica di opzioni ordinarie *plain vanilla*, in base al tipo di opzione target (*call* o *put*) e al tipo di esposizione assunta (lunga o corta). Tuttavia, la *Put-Call Parity* risulta piuttosto inefficace come strategia di *hedging*, a causa di alcuni importanti limiti: nello specifico, non è possibile applicarla a livello di portafoglio (per strumenti scritti sullo stesso *underlying*), come nel caso del *delta-hedging*, e non si dimostra flessibile nella scelta degli strumenti da impiegare per la copertura, in quanto i parametri vengono definiti in maniera molto rigida. Nei paragrafi successivi dell'elaborato verranno introdotti metodi più sofisticati e complessi di replica statica per le *standard options*. La PCP si rivela comunque utile in tale contesto, poichè fornisce un semplice espediente per estendere le strategie proposte dalle *calls* alle *puts*, e viceversa.

Un altro esempio di replica statica esatta per opzioni ordinarie riguarda le opzioni a scelta. Nel Paragrafo 2.1 viene brevemente dimostrato come una *chooser* scritta su un titolo che non paga divi-

dendi, con prezzo d'esercizio K , *chooser date* T_1 e scadenza T_2 , risulti equivalente – in assenza di opportunità di arbitraggio – ad un portafoglio composto da:

- Una *call* con scadenza T_2 e prezzo d'esercizio K .
- Una *put* con scadenza T_1 e prezzo d'esercizio $Ke^{-r(T_2-T_1)}$.

Questo esempio fornisce ancora una volta un'idea della logica che caratterizza l'approccio di replica statica delle opzioni.

2.2 REPLICA STATICA DELLE OPZIONI PLAIN VANILLA EUROPEE

Sebbene la *Put-Call Parity* – come si è detto – costituisca un'utile relazione in ambito di *pricing* per le opzioni *plain vanilla* europee, a livello pratico alcuni limiti ne impediscono l'utilizzo come strategia di copertura statica. I problemi principale riguardano l'impossibilità per il *trader* di estendere la replica all'intero *book* di opzioni, rendendo necessario l'impiego di due diversi strumenti per ciascuna opzione da coprire, e soprattutto la rigidità che caratterizza la strategia, dovuta al fatto che i parametri principali (prezzo d'esercizio e scadenza) non possono essere scelti liberamente dovendo necessariamente coincidere con quelli dello strumento target.

Si pone pertanto il bisogno di fare ricorso a modelli più sofisticati ed efficaci, che consentano di risolvere almeno in parte i problemi discussi.

2.3 IL MODELLO DI WU E ZHU (2011)

Il modello di Wu e Zhu si basa sulla semplice idea di costruire un portafoglio di replica statica per opzioni utilizzando “*nearby contracts*”, ovvero strumenti con caratteristiche simili al target: ad esempio, nel caso di una *call* europea verrebbero utilizzate altre *calls* scritte sullo stesso sottostante, con scadenze e prezzi d'esercizio vicini a quelli dell'opzione da coprire. L'approccio proposto dai due autori presenta vari aspetti positivi. Innanzitutto, l'impiego di *nearby contracts* permette di realizzare un ottimo *matching* dei fattori di rischio tra l'opzione target e il portafoglio di copertura, dal momento che – intuitivamente – i vari strumenti dovrebbero essere esposti a variabili della stessa natura. In più, la strategia si può implementare in maniera molto flessibile, perché la sua struttura consente al *trader* di selezionare in (quasi) assoluta libertà gli strumenti di replica da negoziare, permettendogli di adattare facilmente la scelta in funzione dei mercati e delle quotazioni esistenti. Tale aspetto ricopre un'estrema importanza, in quanto garantisce la possibilità di attuare facilmente la tecnica di Wu e Zhu in molte situazioni, permettendo inoltre all'*hedger* di formulare dei portafogli di replica “ottimali” a seconda del target prescelto. Infine, un elemento molto significativo risiede nel fatto che l'intera strategia sia *model-independent*: in altre parole, non si lega ad alcun modello o a particolari assunzioni per dimostrare i risultati che portano alla costruzione del portafoglio di copertura, riducendo così il margine d'errore dovuto alla c.d. *model misspecification* (che si può riscontrare, ad esempio, nel caso del *delta hedging*).

In breve, l'approccio di Wu e Zhu prevede la costruzione di un "triangolo" (v. Fig. 2.1), ovvero un portafoglio composto da tre sole opzioni, in grado di replicare staticamente l'opzione target. Nell'elaborato vengono descritti i passaggi principali della dimostrazione per la tecnica in esame (cfr. Par. 2.3). Successivamente, viene sviluppata un'approfondita analisi per comprendere a fondo i punti chiave della strategia. Nello specifico, sono state condotte una serie di simulazioni (per la cui trattazione si rimanda alla sezione dedicata all'interno della tesi), avendo assunto a riferimento il modello di Black, Scholes e Merton. In questa sede è utile sintetizzare i risultati più importanti che sono emersi. In primo luogo, come si è detto, l'*hedger* è totalmente libero di selezionare i prezzi d'esercizio e le scadenze degli strumenti di copertura in base alle sue preferenze: si è cercato dunque di capire se questa decisione potesse avere un impatto rilevante sull'efficacia della replica e se – di conseguenza – esistesse un modo per "ottimizzare" tale scelta. Il riscontro delle simulazioni prodotte ha permesso di stabilire che la *performance* della tecnica è piuttosto sensibile alle variazioni dei parametri (K_i e T_i) che vengono assegnati alle opzioni di copertura: in generale, più questi sono vicini ai valori target (K e T) migliore risulta la replica e minore l'*hedging error*. Inoltre, le variabili sotto il controllo del *trader*, ovvero le spaziature tra i prezzi d'esercizio (d_i) e quelle tra le scadenze (α_i) delle varie opzioni, devono essere valutate in rapporto le une con le altre – e non individualmente – per far sì che si possa realizzare una copertura ottimale. Infine, l'esempio presentato in Tabella 2.3 illustra il funzionamento pratico del metodo di Wu e Zhu, confermando la possibilità di ottenere una replica statica decisamente accurata del target con tre soli *nearby contracts* (nel *framework* di Black, Scholes e Merton). Ulteriori e ancor più significative evidenze di questo riscontro si avranno al termine del capitolo, quando la strategia verrà testata con dati storici di opzioni quotate.

Oltre al lavoro già presentato, il contributo principale dell'elaborato relativamente al modello di Wu e Zhu consiste nell'estensione della tecnica alle opzioni di scambio. Le *exchange options* sono derivati esotici piuttosto particolari, in quanto danno il diritto all'acquirente di scambiare alla scadenza il valore di due diversi sottostanti: il fatto di dipendere da due *underlying assets* li rende strumenti particolarmente complessi da replicare dinamicamente. La strategia di Wu e Zhu consente in teoricamente di generare un *hedging portfolio* per qualsiasi strumento, purché vengano impiegati *nearby contracts* nella copertura. Di conseguenza, è concettualmente possibile replicare un'opzione di scambio attraverso altre opzioni di scambio con caratteristiche simili. Il triangolo tuttavia, collascerà in questo caso ad un semplice "segmento" di due strumenti, in quanto il prezzo d'esercizio di qualsiasi *exchange option* è equivalente al valore in T del secondo *asset*: l'unica variabile sotto il controllo del *trader* rimane quindi la scadenza delle opzioni di copertura. Utilizzando la formula di Margrabe (Formula 2.5) è stata simulato un esempio di replica statica durante un intero mese lavorativo (22 giorni) per un'opzione di scambio target, sfruttando due opzioni di scambio con scadenza diversa (rispettivamente minore e maggiore di T). Il risultato ottenuto conferma l'efficacia del modello, mostrando anche in questo caso come in precedenza un *hedging error* decisamente contenuto (Tab. 2.4). Il modello di Wu e Zhu può essere dunque applicato con successo anche alle *exchange*

options, permettendo di costruire un portafoglio di copertura formato da due soli *nearby contracts* e fornendo un'alternativa molto interessante alle strategie di replica dinamica, particolarmente costose per questo genere di derivati.

2.4 IL MODELLO DI CARR E WU (2002)

Il modello di Carr e Wu presenta un approccio alla replica statica delle opzioni piuttosto complesso e sofisticato dal punto di vista matematico. La strategia risulta essere *model-dependent* e meno flessibile sotto alcuni punti di vista rispetto alla tecnica proposta da Wu e Zhu. Ad esempio, il *trader* può stabilire liberamente la scadenza (unica) delle opzioni di copertura nell'intervallo $[0, T]$, mentre i prezzi d'esercizio vengono generati invece in maniera endogena. La tecnica permette inoltre di stabilire il numero di opzioni (N) da includere nel portafoglio di replica, permettendo in tal modo di aumentare (teoricamente) la precisione complessiva. Rispetto al *delta hedging*, anch'esso *model-dependent*, i costi di transazione sono decisamente inferiori e l'efficacia del modello è garantita sotto una più ampia varietà di situazioni: per esempio, gli autori dimostrano che la presenza di "salti" stocastici nell'evoluzione temporale del sottostante non deteriora significativamente la *performance* generata dalla strategia.

I passaggi più rilevanti per la derivazione del modello sono riproposti e approfonditi nel Paragrafo 2.4 della tesi. La successiva analisi è stata condotta ancora una volta simulando il funzionamento pratico della strategia, con il duplice obiettivo di comprenderne a fondo i meccanismi e di poterne discutere gli aspetti più interessanti. Nel contesto di Black, Scholes e Merton la tecnica produce una replica estremamente accurata anche con poche opzioni di copertura (v. Tab. 2.4 e 2.5). In particolare, i risultati sono migliori di quelli ottenuti con il metodo di Wu e Zhu se si utilizzano tre sole opzioni, e migliorano ulteriormente al crescere di N : si pone quindi un *trade-off* per il *trader*, il quale sa che aumentando il numero di opzioni in portafoglio l'*hedging error* tenderà a ridursi, ma allo stesso tempo diventerà maggiore l'impatto dei costi di transazione. Anche in questo caso, l'esperimento condotto su dati reali a fine capitolo aiuterà a fare luce sulla questione.

Rispetto al *delta hedging*, la strategia di Carr e Wu si dimostra migliore – in linea con le aspettative – come si può vedere osservando le statistiche descrittive raccolte nella Tabella 2.7, che mettono a confronto le due tecniche su un campione di mille simulazioni casuali generate con l'ausilio di Visual Basic. In particolare, l'*hedging error* medio e il suo grado di dispersione risultano inferiori nella replica statica già a partire da $N=3$, e la situazione migliora ulteriormente al crescere del numero di opzioni di copertura negoziate, rispettando le attese. Si noti che l'esperimento non tiene in considerazione l'impatto dei costi di transazione, che farebbe spostare ancor più la preferenza verso la tecnica di Carr e Wu.

Infine, il contributo più originale e rilevante della tesi in questo ambito è dato dall'estensione del metodo in analisi ad altri strumenti esotici non trattati dai due autori: le opzioni asiatiche geometriche. Introdotte già nel Capitolo 1, le *asian options* sono scritte sulla media dei prezzi assunti dal

sottostante in un certo periodo (*averaging period*), in base a una certa frequenza di osservazione. Dato che la derivazione della strategia di Carr e Wu – come spiegato nel Paragrafo 2.4 – prevede che la formula impiegata per prezzare l'opzione target debba avere una forma ben specifica, il modello che si è scelto di considerare per estenderne l'applicazione al caso delle opzioni asiatiche è quello di Kemna e Vorst, che ha una struttura simile a quello di Black, Scholes e Merton (preso come riferimento da Carr e Wu). Per una dimostrazione dettagliata dei passaggi matematici si può consultare l'Appendice al Capitolo 2. Occorre precisare che la maggior parte delle opzioni asiatiche negoziate sui mercati reali sono di norma scritte sulla media aritmetica (con frequenza di monitoraggio giornaliera) dell'*underlying asset*, mentre la formula di Kemna e Vorst restituisce il prezzo di un'opzione scritta sulla media geometrica calcolata nel continuo. Tuttavia, la differenza matematica tra le due medie è pressoché nulla, e diventa rilevante soltanto quando la volatilità del sottostante raggiunge livelli molto elevati (>100%). Pertanto, la tecnica di replica statica proposta in questa sede può ritenersi una buona approssimazione anche per le *arithmetic asian options* introdotte nel Capitolo 1, e permette di costruire un portafoglio di opzioni europee *plain vanilla* in grado di coprire l'esposizione in un'opzione asiatica. Diversamente dal modello di Wu e Zhu pertanto, non è necessario utilizzare *nearby contracts*: il *trader* può negoziare *calls* e *puts plain vanilla*, che generalmente sono quotate su mercati regolamentati e quindi più liquide e disponibili per un'ampia varietà di scadenze e prezzi d'esercizio. Le simulazioni condotte in Visual Basic (v. Tab. 2.8) confermano la bontà del metodo sviluppato, e le statistiche descrittive di confronto con il *delta hedging* (v. Tab. 2.9) mostrano che la replica statica può risultare migliore della replica dinamica, nonostante quest'ultima rimanga comunque un buon candidato per la copertura delle opzioni asiatiche, come si è visto nel Capitolo 1.

2.5 MODELLI A CONFRONTO: ESEMPI PRATICI

L'ultimo paragrafo del Capitolo 2 analizza empiricamente il funzionamento delle due principali strategie di replica statica per opzioni europee *plain vanilla* analizzate nell'elaborato, sfruttando un *dataset* appositamente costruito contenente le quotazioni di fine giornata delle *SPX Options*, le *cash-settled calls* e *puts* scritte sull'indice S&P 500 e quotate sul CBOE (*Chicago Board of Options Exchange*). Il periodo coperto va dal 31 ottobre 2016 al 30 novembre 2016, per un totale di 21 giorni lavorativi, un lasso temporale in linea con quanto assunto per le simulazioni teoriche condotte in precedenza. In particolare, sono state generate una serie di portafogli di replica per diverse opzioni target appartenenti al *dataset*, per verificare la *performance* di tre diverse strategie: il triangolo simmetrico di Wu e Zhu e il modello di Carr e Wu per $N=3$ e $N=5$. Alcuni esempi rappresentativi (v. Tabb. 2.10, 2.11 e 2.12) sono stati riportati in nella sezione dedicata all'interno dell'elaborato (Par. 2.5) per favorire la comprensione dei metodi in esame e poter discutere i risultati ottenuti. In linea con le attese, le tre tecniche si rivelano decisamente efficaci e in grado di mantenere un ridotto *hedging error* durante l'intero periodo di copertura. Dall'esperimento emergono vari aspetti interessanti. Innanzitutto, la strategia che in media ha restituito il rendimento migliore è stata quella di Carr e Wu

con $N=3$ opzioni di copertura. Questo conduce a due importanti considerazioni: in primo luogo, il modello di Black, Scholes e Merton (attraverso il quale sono stati stimati i parametri di *hedging*) si dimostra in grado di rappresentare in maniera abbastanza soddisfacente, sebbene non perfetta, la realtà. Inoltre, il fatto che la strategia per $N=5$ abbia prodotto un risultato meno preciso rispetto al caso in cui $N=3$ si scontra con l'intuizione teorica secondo cui al crescere del numero di opzioni di copertura la *performance* tenda sempre a migliorare. Dopo un'attenta riflessione si è giunti alla conclusione che il motivo per cui viene osservata tale "anomalia" si lega alla struttura della volatilità del sottostante. Incrementando N si vanno infatti ad includere nel portafoglio di replica opzioni *deep-in* e *deep-out of-the-money*, che sono caratterizzate per dei livelli di volatilità implicita molto diversi rispetto all'opzione target. Il modello di Black, Scholes e Merton assume che σ sia costante nel tempo e rispetto a K , pertanto l'aggiunta di nuovi strumenti caratterizzati da valori a parità di sottostante (*moneyness*) diversi da 1 fa sì che la precisione complessiva della tecnica risulti – seppur di poco – peggiore. Se si considerassero anche i costi di transazione, i risultati ottenuti motiverebbero senz'altro un'attenta riflessione da parte del *trader*, portandolo ad optare per la costruzione di un portafoglio con un numero contenuto di strumenti di copertura. Nel complesso, l'esperimento conferma in larga parte gli aspetti già riscontrati attraverso le simulazioni teoriche, portando alla luce nuovi interessanti elementi e giustificando nel complesso la relativa preferenza per le strategie di replica statica rispetto alle tecniche di copertura dinamica.

Capitolo 3

Replica Statica delle Opzioni con Barriera

Il terzo ed ultimo capitolo della tesi tratta la replica statica delle opzioni con barriera. Il *payoff* a scadenza delle *barrier options* è contingente al raggiungimento di un certo livello di prezzo da parte del sottostante nel corso della vita dello strumento. Di conseguenza, la replica dinamica risulta particolarmente difficile da realizzare, e si rende necessario individuare metodi alternativi di copertura in grado di adattarsi meglio alla struttura di questi derivati. Le principali tecniche di replica statica per le opzioni con barriera saranno quindi analizzate nel presente capitolo, allo scopo di definirne gli aspetti caratterizzanti, presentare considerazioni di carattere pratico relativamente alla loro implementazione ed infine estendere o ottimizzare alcuni dei modelli in discussione per favorire ulteriori sviluppi nei temi trattati.

3.1 INTRODUZIONE ALLE OPZIONI CON BARRIERA

Le prime opzioni con barriera sono comparse sul mercato statunitense verso la fine degli anni '80, e da allora hanno vissuto una crescita esponenziale in termini di volumi di scambio e di tipologie. Al giorno d'oggi, questi strumenti vengono scambiati prevalentemente sui mercati OTC (*Over The Counter*). Le più comuni *barrier options* sono le cosiddette *knock-in* e *knock-out calls* e *puts*, che equivalgono alle corrispondenti opzioni europee *plain vanilla* ma con un'importante differenza: entrano in vita (*knock-in*) o cessano di esistere (*knock-out*) quando (e se) il sottostante raggiunge una certa barriera (H). Inoltre, l'*underlying* può toccare la barriera verso l'alto (*up*) o verso il basso (*down*); in tal modo, vengono classificati quattro tipi principali di *plain vanilla barrier option*: *Up and In*, *Up and Out*, *Down and In* e *Down and Out*.

Per questi strumenti sono state sviluppate sin dai primi anni '90 una serie di modelli di replica statica, che sfruttano la particolare conformazione del loro *payoff* finale e si basano generalmente su un principio comune, secondo cui è sufficiente che due portafogli abbiano uguale valore su un certo contorno per garantire che assumano lo stesso valore anche in tutti i punti all'interno di tale contorno. I portafogli di replica vengono formati diversamente a seconda dell'approccio considerato, ma includono sempre opzioni *call* o *put* europee scritte sullo stesso sottostante dell'opzione con barriera target. Se in un qualsiasi momento antecedente alla scadenza un punto del contorno venisse raggiunto, il portafoglio di replica andrebbe immediatamente liquidato e il principio fondamentale garantirebbe l'uguaglianza (in assenza di costi di transazione) tra il valore dell'opzione target e quello del portafoglio. Come si vedrà, le tecniche illustrate permettono in molti casi di ottenere una copertura

estremamente precisa, dimostrandosi superiori sotto tutti i punti di vista alle strategie dinamiche (e.g., *delta hedging* e *delta-gamma hedging*) presentate nel Capitolo 1.

3.2 REPLICA STATICA DI UNA BINARY OPTION

Le opzioni binarie – o digitali – si possono considerare le più semplici delle opzioni con barriera. Il loro *payoff* è pari a 1 se il sottostante si trova al di sopra di H alla scadenza e 0 altrimenti. Per replicare staticamente questi strumenti si può costruire uno *spread* verticale di opzioni *plain vanilla* europee (v. Fig. 3.1): lo *spread* è una strategia che consiste nell'acquisto e la vendita simultanea di due opzioni dello stesso tipo (*calls* o *puts*), scritte sullo stesso *asset* e con la stessa scadenza ma con due diversi prezzi d'esercizio. Si può ottenere una buona approssimazione del valore della *digital* acquistando una certa quantità α del *vertical spread* (v. Fig. 3.1). Nel caso di una *call* binaria ad esempio, si acquistano α *calls* europee con *strike* K_1 e si vendono α *calls* europee con *strike* K_2 con $K_1 < H < K_2$. La quantità di opzioni di copertura da acquistare si può ricavare facilmente, come mostrato nel Paragrafo 3.2 dell'elaborato.

Se si impone $K_2 = H$ si ottiene invece un *over-hedge* dell'opzione digitale, perché il *payoff* dello *spread* domina in ogni punto quello della *binary*. Di conseguenza, per la condizione di assenza di opportunità di arbitraggio il valore corrente dello *spread* così costruito dovrebbe essere sempre maggiore a quello dell'opzione binaria. Una verifica empirica per questo assunto è stata condotta utilizzando le quotazioni a fine chiusura delle *BVZ Options* scambiate sul CBOE. Le *BVZ* sono opzioni digitali scritte sul VIX, l'indice di volatilità implicita sulle opzioni a 30 giorni che hanno come sottostante l'indice S&P500. Il test condotto (v. Tab. 3.1) ha confermato l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, sebbene in alcuni casi si sia potuto osservare una differenza prossima a zero tra l'opzione digitale e lo *spread*; questo riscontro suggerisce che il *market-maker* potrebbe nella pratica quotare la prima proprio in funzione del prezzo di mercato del secondo, attraverso il quale effettua la copertura.

3.3 MATURITY-SPREAD APPROACH

Il *maturity-spread approach* è uno dei primi approcci alla replica statica delle opzioni con barriera, proposto per la prima volta nel 1995 da Derman, Ergener e Kani. La costruzione del portafoglio di copertura si basa sul principio fondamentale esposto in precedenza, e prevede la definizione di un primo contorno tracciato in corrispondenza della barriera (H) e di un secondo contorno temporale tracciato in corrispondenza della scadenza (T), come mostrato in Figura 3.3 per il caso di una *Up and Out call*. La strategia risulta comunque molto flessibile nella scelta dei contorni e degli strumenti di replica, che saranno costituiti da opzioni europee a diverse scadenze (da cui il nome, *maturity-spread*); la derivazione, mostrata nel Paragrafo 3.3 è inoltre *model-independent*, e la tecnica può pertanto trovare applicazione in un contesto molto ampio. La strategia di Derman, Ergener e Kani richiederebbe la negoziazione di una quantità infinita di opzioni *plain vanilla* per ottenere il *match*

esatto tra il portafoglio e l'opzione target sul contorno dato da $S=H$. Nella pratica chiaramente, questo non è possibile a causa dell'esistenza di costi di transazione non nulli e del fatto che esiste un numero limitato di opportunità di *trading*. Di conseguenza, si deve approssimare tale quantità infinita ad un ammontare finito di opzioni, scegliendo quali punti sul contorno replicare e quali invece lasciare scoperti, esponendosi in tal modo ad un certo grado di errore.

In ogni caso, per meglio comprendere gli aspetti di maggiore rilievo del modello sono state effettuate ancora una volta simulazioni ed analisi applicate con Excel e VBA (v. Tab. 3.2 e 3.3), che dimostrano in particolare il buon funzionamento della tecnica per le *Up and Out calls*, opzioni molto difficili da coprire tramite *delta hedging* a causa del comportamento anomalo del delta e del gamma in prossimità di H e di T , come visto nel Capitolo 1 (v. Fig. 1.8). Aumentando il numero di opzioni di copertura, viene dimostrato come sia possibile ottenere una precisione crescente della replica, che tende ad un livello di precisione del 100% per $N \rightarrow \infty$ (v. Fig. 3.4). Dal momento che non è possibile ottenere il *match* tra il portafoglio di copertura e l'opzione target lungo tutto il contorno, una seconda analisi è stata rivolta all'esame del comportamento della strategia in tutti quei punti in cui di fatto non viene garantita la corrispondenza. In questo contesto, la Figura 3.5 si dimostra emblematica: in linea con le attese infatti, la precisione decresce velocemente con l'avvicinarsi della scadenza, anche se in misura minore per i portafogli composti da un maggior numero di opzioni di copertura (ovvero nei casi in cui un maggior numero di punti sul contorno viene replicato). La scarsa efficacia della strategia per $t \rightarrow T$ solleva un interrogativo sulla spaziatura ottimale da utilizzare nella selezione dei punti sul contorno: la proposta di Derman, Ergener e Kani (equidistanza tra i vari punti) sembra trascurare il comportamento osservato in prossimità della scadenza, quando la corrispondenza tra il portafoglio di replica e l'opzione target diventa molto instabile. Sembrerebbe quindi opportuno proporre una diversa misura di *spacing* tra le scadenze, così da poter strutturare la replica in modo più strategico, spostando l'attenzione verso i punti più vicini a T . Questo tema viene sollevato anche più avanti nell'analisi dello *strike-spread approach* di Carr e Chou. In quel caso, verrà suggerito un modo più sofisticato ed efficace per stabilire la spaziatura da applicare nella replica statica del target.

Infine, il paragrafo si conclude prendendo in esame un aspetto particolare della strategia di Derman, Ergener e Kani sul quale, in base alle ricerche condotte, non sembra fosse mai stata posta attenzione da parte della letteratura. Il modello infatti, si rivela un'eccellente candidato per l'*hedging* e il *pricing* di opzioni con barriera discrete, ovvero opzioni per le quali il monitoraggio del prezzo del sottostante avviene ad intervalli periodici con frequenza discreta. Per verificare questa ipotesi, è stato effettuato un confronto tra i risultati ottenuti dalla strategia e quelli ricavati utilizzando la correzione proposta da Broadie, Glasserman e Kou alla formula di Merton. Si noti che tale approssimazione risulta caratterizzata da un termine di errore, che si riduce all'aumentare della frequenza di osservazione di S . Il paragone conferma le aspettative iniziali, mostrando una differenza minima tra i valori stimati attraverso i due approcci, differenza che peraltro si riduce al crescere di N (e quindi della frequenza di osservazione). Lo *strike-spread approach* si rivela quindi utile anche per apprezzare

o coprire le opzioni con barriera discrete, che sono estremamente diffuse e attivamente negoziate nei mercati OTC.

3.4 PUT-CALL SYMMETRY

La *Put-Call Symmetry* stabilisce un rapporto di simmetria tra il *payoff* di una *call* e di una *put* europee, scritte sullo stesso sottostante e con la stessa scadenza ma con diverso prezzo d'esercizio. La Formula 3.4 all'interno dell'elaborato esprime la PCS. La simmetria è definita rispetto ad F , il prezzo *forward* dell'*underlying asset*, e pertanto varia al variare di S . Di conseguenza, questa elegante relazione non trova utilizzo nell'ambito della replica statica di opzioni ordinarie. Tuttavia, si rivela invece uno strumento molto utile quando si considerano le opzioni con barriera.

L'approccio che sfrutta la *Put-Call Symmetry* per sviluppare alcune strategie di replica statica per *barrier options* si deve inizialmente a Bowie e Carr (1994). Successivamente, Carr, Ellis e Gupta (1998) estendono l'applicazione del modello ad altri strumenti più complessi. La PCS può essere impiegata per definire alcune relazioni di copertura esatta per determinati tipi di opzioni con barriera, sebbene il limite principale all'impiego della tecnica provenga dalla necessità di effettuare assunzioni piuttosto restrittive. In particolare, gli autori considerano opzioni scritte su un sottostante che sia caratterizzato da un costo di trasferimento (*cost of carry*) pari a zero e da una struttura simmetrica della volatilità. La prima delle due ipotesi restringe molto il raggio d'azione della strategia. Ad esempio, l'assenza di costi di trasferimento non si adatta a rappresentare opzioni scritte su azioni o su valute, mentre rappresenta bene il caso di opzioni su *futures*. In un secondo momento, questo assunto verrà rimosso, e la PCS renderà possibile soltanto la definizione di un intervallo entro il quale – in assenza di opportunità di arbitraggio – il prezzo dell'opzione target potrà muoversi.

Nel Paragrafo 3.4 della tesi vengono presentate ed analizzate alcune applicazioni dell'approccio alla replica statica mediante *Put-Call Symmetry* per opzioni *knock-in* e *knock-out*. Le esemplificazioni pratiche (v. Tab. 3.4) dimostrano chiaramente che la strategia si adatta in maniera migliore ad alcuni strumenti piuttosto che ad altri; nel caso di una *Up and Out call*, ad esempio, il portafoglio di replica risulterebbe composto da numeri e quantità molto elevate di opzioni di copertura, rendendo complicata l'applicazione sul piano pratico.

Rilassando l'ipotesi di *zero cost of carry* si ottengono infine delle relazioni di disuguaglianza, attraverso le quali – come si anticipava – si può stabilire un *range* di prezzo per l'opzione target. Questo risultato può essere ritenuto interessante soprattutto in un'ottica di *pricing*, e verrà applicato nell'ultimo paragrafo del Capitolo 3 quando si testeranno con dati storici alcune delle strategie presentate, con l'intento di fornire un giudizio complessivo e conclusivo sui modelli analizzati.

3.5 STRIKE-SPREAD APPROACH

Lo *strike-spread approach* costituisce il terzo ed ultimo approccio alla replica statica per opzioni con barriera discusso ed analizzato nell'ambito di questa tesi. Come il nome suggerisce, la strategia è molto simile a quella vista nel Paragrafo 3.2, basandosi però stavolta sulla costruzione di un portafoglio di opzioni europee *plain vanilla* di copertura con le stesse caratteristiche ma diversi prezzi d'esercizio. I primi ad introdurre questa tecnica furono Carr e Chou nel 1997, a cui fece seguito un'ulteriore ricerca degli stessi autori che estese l'applicazione del modello ad altre opzioni con barriera più complesse. L'approccio risulta molto flessibile e accurato, così come nel caso del *maturity-spread approach* di Derman, Ergener e Kani, ma la sua derivazione è *model-dependent*, dal momento che Carr e Chou sfruttano una proprietà caratteristica del *framework* di Black, Scholes e Merton (la valutazione neutrale al rischio) per giustificare il passaggio principale su cui si fonda l'intera strategia. Tale aspetto potrebbe pertanto costituire un limite nell'utilizzo pratico della tecnica di replica statica, che verrà indagato con maggiore attenzione nell'ultimo paragrafo del terzo capitolo. Dopo aver derivato il modello per alcuni tipi di opzioni con barriera (cfr. Par. 3.5), sono state condotte diverse analisi allo scopo di evidenziare gli aspetti di maggiore rilievo della tecnica in esame. Come in precedenza, appare evidente (v. Figg. 3.8 e 3.9) che aumentando il numero di opzioni di copertura incluse nel portafoglio di replica si possa ottenere un miglioramento della precisione, sebbene la relazione tra le due variabili (N e il grado di efficacia della strategia) non risulti essere monotona come accadeva invece nel caso del *maturity-spread approach*. Questo aspetto ha suscitato particolare attenzione, e ha riproposto l'interrogativo già sollevato riguardo all'opportunità di definire una misura di *spacing* "ottimale", che consenta di ottenere una replica statica migliore dell'opzione con barriera target. Inoltre, le simulazioni svolte hanno permesso di confermare la difficoltà relativamente maggiore – riscontrata in genere anche nell'applicazione degli altri metodi fin qui analizzati – nell'*hedging* delle *UO calls* rispetto alle *DO calls*.

Il principale contributo fornito dalla tesi nell'ambito dello *strike-spread approach* consiste nella proposta di un'ottimizzazione della tecnica, per definire una misura di spaziatura più efficace tra i punti del contorno su cui garantire la replica. Si noti innanzitutto che il contorno di riferimento per questa strategia non è altro che l'insieme dei valori al di sopra o al di sotto della barriera (a seconda del tipo di opzione target considerata) che il sottostante può assumere nel tempo.

L'idea di base è la seguente: se si struttura il modello in modo che venga mantenuta la stessa distanza tra i prezzi d'esercizio delle opzioni di copertura e tra i punti del contorno da replicare, è come se si assegnasse implicitamente la stessa "importanza" a tutti i valori possibili per S_T , o in altre parole la stessa probabilità di realizzazione alla scadenza. In realtà, questo è chiaramente irrealistico, tanto più se si prende come riferimento il contesto di Black, Scholes e Merton, in cui i rendimenti si distribuiscono normalmente intorno al valore atteso futuro. La spaziatura ottimale dovrebbe allora essere in grado di rappresentare adeguatamente la funzione di densità dei rendimenti a scadenza implicita nella valutazione neutrale al rischio (su cui si basa la strategia), concentrando maggiormente

l'attenzione sui punti vicini alla barriera (caratterizzati da un'elevata probabilità di realizzazione in T) assegnandogli uno *spacing* ridotto, ed ampliando gradualmente la spaziatura per i punti più distanti da H . Per una spiegazione più dettagliata e per la formulazione matematica dei concetti appena illustrati, si rimanda al Paragrafo 3.5 dell'elaborato.

La misura di *spacing* ottimale, non più equidistante ma approssimativamente esponenziale, a riflettere la struttura dei rendimenti a scadenza implicita nella valutazione neutrale al rischio, si dimostra efficace in linea con le attese. In particolare (v. Fig. 3.11) il confronto con la spaziatura "classica" nel caso di una *Down and Out call* ha permesso di evidenziare miglioramenti significativi già a partire da un basso numero di opzioni di copertura. In generale, si è potuto osservare una stabilizzazione considerevole nella precisione della tecnica, mentre nel caso iniziale era stato riscontrato – attraverso una serie di simulazioni – come la resa del modello tendesse ad essere volatile al variare di alcuni dei parametri fondamentali (e.g., scadenza, prezzo d'esercizio, valore della barriera...). In conclusione, sembra quindi che l'ottimizzazione proposta possa effettivamente risultare un'interessante alternativa alla versione standard del modello, contribuendo a migliorarne l'efficacia e la stabilità complessive.

3.6 RISULTATI EMPIRICI

Le simulazioni condotte con il supporto di Excel e VBA, si sono rivelate indispensabili per fornire una visione chiara e completa sui modelli discussi. Inoltre, hanno permesso di fare luce sui principali punti di forza e di debolezza delle strategie di replica statica delle opzioni con barriera illustrate, consentendo tra l'altro di sviluppare interessanti estensioni e ottimizzazioni per quest'ultime.

L'ultimo paragrafo conclude la trattazione effettuando alcuni esperimenti empirici per i modelli di *static replication*. Anche in questo caso sono stati utilizzati come dati di partenza i prezzi di chiusura delle opzioni *call* e *put* europee *plain vanilla* scritte sull'indice azionario S&P500 e quotate sul CBOE, già impiegate nel Capitolo 2. Occorre precisare che non è stato possibile costruire un *dataset* contenente quotazioni storiche di opzioni con barriera, poiché al giorno d'oggi questi strumenti vengono negoziati quasi esclusivamente sui mercati OTC, ai quali hanno accesso soltanto gli investitori istituzionali. Pertanto, dal momento che ciascuna delle strategie presentate genera un portafoglio di copertura composto interamente da opzioni *plain vanilla* europee, si possono comunque effettuare alcuni test partendo dalle quotazioni di fine giornata delle *SPX Options*, raccolte dal sito del *Chicago Board of Options Exchange* (<http://www.cboe.com>). Di conseguenza, la letteratura empirica in materia è piuttosto esigua, e sono rarissimi i contributi (brevemente menzionati al Par. 3.6) che impiegano dati reali per analizzare i modelli di replica statica delle opzioni con barriera.

Gli esperimenti condotti nella tesi hanno riguardato in primo luogo l'approccio che sfrutta la *Put-Call-Symmetry*, con cui è stato possibile definire dei limiti minimi e massimi per il prezzo di mercato di alcune *barrier options*, e in un secondo momento lo *strike-spread approach* (con una spaziatura che segue un principio di ottimizzazione simile a quello proposto nell'elaborato al Par.

3.5), in vista della considerevole disponibilità di prezzi d'esercizio quotati per le opzioni sull'S&P500 che favorisce l'implementazione della tecnica. I test effettuati, tra i quali viene mostrato a titolo esemplificativo il caso di una *Down and Out call* (v. Tab. 3.5 e Fig. 3.12), hanno permesso di riscontrare due principali risultati. Innanzitutto, è stato osservato che il prezzo teorico stimato con la formula di Merton tende molto spesso a cadere al di fuori del *range* ottenuto mediante l'applicazione della PCS, sovrastimando o sottostimando di conseguenza il valore reale (in assenza di opportunità di arbitraggio) dell'opzione target. La ragione fondamentale sta nel fatto che la struttura della volatilità implicita nei prezzi quotati delle *SPX Options* non è piatta: le opzioni incluse nei portafogli di replica, che definiscono i limiti inferiori e superiori dell'intervallo, risultano infatti caratterizzate da livelli differenti di volatilità implicite; la formula di Merton non tiene conto di tale aspetto, restituendo così una stima errata per il prezzo corrente della *barrier option*. Il secondo elemento interessante proviene invece dal confronto con lo *strike-spread approach*: prima di tutto, l'esperimento ha permesso di confermare la validità del modello, che restituisce anche sul piano pratico una *performance* decisamente notevole, con un grado di precisione che migliora e si stabilizza al crescere di N . Inoltre, il valore del portafoglio di replica tende a posizionarsi a metà strada tra il prezzo teorico (formulato sfruttando il principio della valutazione neutrale al rischio) e il *range* calcolato con la PCS. Del tutto in linea con le aspettative dunque, la strategia di Carr e Chou risente in parte delle assunzioni poco realistiche di Black, Scholes e Merton, ma riesce a garantire lo stesso una buona replica del target, andandosi a collocare in modo piuttosto emblematico tra due mondi: quello ideale e quello reale. In definitiva, i test empirici confermano sostanzialmente i riscontri teorici ottenuti nel Capitolo 3, fornendo una prova conclusiva della grande utilità che le tecniche di replica statica assumono relativamente al *pricing* e all'*hedging* delle opzioni con barriera.

Conclusioni

L'analisi condotta nell'ambito di questa tesi ha permesso di approfondire, estendere ed ottimizzare molti dei più importanti modelli di replica statica delle opzioni ordinarie e con barriera. Lo studio delle strategie di copertura dinamica presentate nel Capitolo 1 ha posto le necessarie premesse per il successivo confronto, evidenziando gli elementi più critici nella pratica rispetto ai quali la *static replication* si propone come la migliore delle possibili alternative. I modelli di replica statica consentono infatti di gestire in maniera efficace l'*hedging* delle opzioni finanziarie, generando un beneficio in termini di costo e garantendo un *match* accurato dei fattori di rischio che influenzano lo strumento target. I riscontri ottenuti nell'elaborato confermano in larga parte le idee di partenza e le premesse positive delle strategie analizzate, giustificando in molti casi la preferenza verso un approccio statico piuttosto che dinamico. Il lavoro ha cercato anche di dare un contributo alla letteratura esistente, proponendo nuovi temi e sviluppando utili estensioni per la maggior parte dei modelli trattati. Nel Capitolo 2 ad esempio, sono state proposte per la prima volta delle applicazioni per alcune opzioni esotiche (opzioni di scambio e opzioni asiatiche), ed è stata inoltre prodotta un'evidenza empirica, che supporta e conferma la validità delle tecniche di replica statica facendo ricorso alle quotazioni reali di *SPX Options*. Nel terzo capitolo invece sono state effettuate numerose simulazioni che hanno permesso di individuare una serie di aspetti sui quali in passato non erano state fatte in precedenza (per quanto è stato possibile constatare) riflessioni approfondite. Si sono quindi proposti nuovi utilizzi e ottimizzazioni per i principali metodi di *static replication* delle opzioni con barriera, ed anche in questo caso i test empirici hanno evidenziato l'efficacia e l'utilità dei modelli studiati ai fini di *pricing* e *hedging*, fornendo anche nuovi interessanti spunti. L'industria dei servizi finanziari guarda con crescente attenzione alle sfide future, mentre gli investitori richiedono in misura sempre maggiore prodotti sofisticati e altamente personalizzati, ritagliati sulle proprie esigenze e preferenze, favoriti in questo caso dalla recente diffusione delle *FinTechs* (*Financial Technologies*). Allo stesso tempo, le istituzioni di vigilanza e le Banche Centrali dei paesi sviluppati assegnano oggi un ruolo più che mai centrale ai temi della trasparenza e del *risk management*, in un contesto in cui la regolamentazione nazionale e sovra-nazionale svolge un ruolo molto importante anno dopo anno nelle dinamiche economiche internazionali. Lo sviluppo tecnologico, insieme con la nascita di nuovi e più efficaci controlli sulla gestione delle esposizioni e del capitale nelle principali istituzioni finanziarie, motiva l'approfondimento e l'avanzamento negli anni a venire dei temi discussi, con l'intento di riuscire a sviluppare tutti gli strumenti necessari per essere pronti ad affrontare le sfide future.