Dipartimento di Impresa e Management
Corso di Laurea Triennale in Economia e Management
Cattedra di Matematica Finanziaria

SIMULAZIONE MONTECARLO: APPLICAZIONI FINANZIARIE

RELATORE :
Emerito Prof. Gennaro OLIVIERI

CANDIDATO:
Martina AQUILA , Matr.188291

ANNO ACCADEMICO 2016 / 2017

a mamma e papà

Il caso è il solo sovrano legittimo dell'universo.
Honoré de Balzac

Indice

Introduzione

La simulazione Montecarlo nasce in un contesto diverso da quello finanziario. Le sue prime applicazioni, infatti, sono confinate alle scienze matematiche e fisiche, con il fine di fornire un supporto alla realizzazione della Bomba Nucleare nel contesto della Guerra Fredda. La prima applicazione finanziaria della Simulazione Montecarlo si deve a Boyle nel 1977. La pubblicazione dell'articolo "*Options: a Monte Carlo approach"* sulla nota rivista *Journal of Financial Economics* segna l'avvio di una stagione piuttosto prolifica che porterà a un grosso ampiamento della letteratura finanziaria con protagonista la simulazione il cui nome è tratto dal noto Principato. Come si evince dal titolo del lavoro di Boyle il primo ambito applicativo della Simulazione Montecarlo nel contesto finanziario è il pricing di opzioni, in particolare, e strumenti derivati, in generale. Gli stessi presupposti teorici sono stati successivamente estesi al concetto di VaR: uno dei metodi più diffusi per il calcolo della massima perdita possibile è proprio la simulazione Montecarlo. L'eleborato, articolato in tre capitoli, tratterà la simulazione nelle sue linee generali e comuni, con cenni relativi ai vari ambiti di applicazione, per poi approfondirne le implementazioni finanziarie, relative alle opzioni, nel secondo capitolo, e al VaR, nel terzo. La trattazione di queste tematiche si presenta, in realtà, come uno strumento utile per la comprensione delle tendenze economiche moderne. In altre parole i temi in questa sede trattati, al di là delle specificazioni tecniche rese necessarie dal contesto, sono di grande attualità. Seguendo l'impostazione dell'elaborato, consideriamo in primo luogo opzioni e derivati. In merito a questo aspetto ritengo eloquente un pensiero di W. Buffett: "*I derivati sono armi finanziarie di distruzione di massa. [...] La varietà dei contratti derivati trova un limite solo nell'immaginazione dell'uomo (o, talvolta, a quanto pare, del folle). Non compro mai un titolo che non sono sicuro di capire"*. I derivati sono definiti armi di distruzione di massa poichè è stato riconosciuto loro un ruolo centrale nel propagare le conseguenze della crisi globale che ha colpito le economie più evolute dal 2007. Dagli anni '70 del secolo scorso, infatti, i derivati hanno assunto una importanza sistemica, iniziando a costituire percentuali sempre più significative degli scambi all'interno dei mercati finanziari. Se è vero che i derivati possono essere utilizzati con finalità di copertura, è vero anche che sempre più spesso essi vengono sottoscritti perseguendo scopi di tipo speculativo, con la potenzialità di causare ingenti perdite. Dato l'innegabile ruolo assunto dagli strumenti derivati all'interno della crisi, massiccio è stato lo sviluppo della letteratura in questo ambito. La simulazione Montecarlo ritrova vigore nelle sua prima applicazione finanziaria, offrendo uno strumento utile e preciso per il calcolo del valore dei derivati. Ancora più attuale, però, risulta l'applicazione al calcolo del VaR. La crisi bancaria, prima, e dei debiti sovrani, poi, ha avuto conseguenze significative soprattutto al livello europeo. Queste istanze hanno indotto la neonata Banking Union a considerare seriamente le esigenze di ricapitalizzazione del sistema bancario europeo, valutato unanimamente come eccessivamente indebitato. Il *Comprehensive Assessment* (CA), condotto nel 2014, ha fatto emergere tutte le debolezze del nostro sistema bancario, portando le autorità ad adottare manovre di tipo prudenziale. Si è quindi arrivati alla conclusione che l'ammontare di capitale detenuto dalle banche, e dagli intermediari finanziari in genere, debba essere adeguato ai rischi assunti. È il capitale stesso, infatti, ad essere lo strumento deputato alla copertura delle perdite. Recependo gli impulsi internazionali sanciti dagli accordi di Basilea III, il VaR è stato definito come lo strumento da utilizzare per la quantificazione della perdita massima in cui l'intermediario può incorrere, date le sue esposizioni, l'intervallo di analisi e il livello di confidenza prescelto. Per gli intermediari più sofisticati e che possono sopportarne i costi di implementazione , è consigliata la metodologia Montecarlo per il calcolo del Value at Risk. Questa, infatti, permette di analizzare contesti più complessi rispetto alle tecniche analitiche e storiche, e soprattutto consente di valutare tutti rischi cui un portafoglio è esposto e le correlazioni tra essi.

Nell'analisi delle caratteristiche tecniche della Simulazione Montecarlo, va sempre ricordato quali sono le finalità per cui questa viene implementata: la stabilità finanziaria dell'intermediario nel caso del VaR, l'esigenza di definire il valore di derivati in modo preciso, nel caso del pricing.

Capitolo 1

La Simulazione Montecarlo: cenni generali e ambiti di applicazione

1.1 Cenni storici

La nascita della simulazione Montecarlo viene normalmente ricondotta al secondo dopoguerra. Pur in assenza di dati certi, si ritiene che il metodo sia stato elaborato, negli Stati Uniti d'America, nell'ambito del progetto Manhattan[1]. La vera formalizzazione del metodo si deve a Enrico Fermi[2], John von Neumann[3] e Stanislaw Marcin Ulam[4], nell'ambito dello studio delle reazioni nucleari. Era infatti in corso la ricerca per realizzare la bomba atomica. Nel contesto bellico l'applicazione del metodo Montecarlo trova giustificazione nella necessità, durante un bombardamento aereo, di selezionare gli obiettivi da colpire su una vasta area in modo non totalmente casuale. L'utilizzo della simulazione è oggi associato a calcolatori e software che sono in grado di generare successioni di numeri casuali, difficilmente riproducibili dalla mente umana. In realtà, però, una traccia embrionale della simulazione può essere rintracciata già nel '700 negli studi di George Louis Leclerc de Buffon[5]. Il naturalista, matematico e cosmologo francese è ricordato per un esperimento il cui fine è quello di stimare π. L'esperimento consiste nel lanciare uno spillo su un piano intersecato da rette parallele e consente di stimare π sulla base dell'analisi della distanza dell'ago dalle rette nei lanci ripetuti[6].L'approssimazione ottenuta (per esempio dal matematico Mario Lazzarini nel '900) è piuttosto soddisfacente vista l'assenza di conoscenze tecniche e metodi di risoluzione moderni. Oggi la simulazione assume connotati (e di conseguenza modalità di applicazione) differenti a seconda del contesto applicativo.

---

[1] Il progetto Manhattan è il nome attribuito ad un'iniziativa statunitense, di tipo militare, che
[2] Enrico Fermi (1901-1954), è stato un fisico italiano. Vincitore del premio Nobel per la fisica nel 1938 , è ricordato principalmente per i suoi studi nell'ambito della fisica nucleare.
[3] John von Neumann (1903-1957), è stato un matematico e fisico (oltre che informatico) ungherese. È noto come una personalità poliedrica. I suoi principali contributi sono stati nell'ambito delle scienze matematiche, economiche, informatiche e fisiche.
[4] Stanislaw Ulam (1909-1984), è stato un matematico polacco. È noto soprattutto per il suo contributo nell'ambito della propulsione nucleare ad impulso.
[5] George Louis Leclerc de Buffon (1707-1788), è stato un conte francese esponente del movimento illuminista.
[6] L'esperimento è descritto nell'opera *Essai d'artithmètique morale*, 1977.

1.2 Definizioni

Il metodo Montecarlo è una simulazione stocastica. Per simulazione (dal Latino *similis,* simile) si intende la realizzazione di un modello astratto in grado di replicare il comportamento di un sistema, fenomeno, processo reale. Il termine simulazione ha quindi un significato scientifico non pienamente coincidente con quello d'uso comune. Simulare equivale, in questa sede, a riprodurre o imitare, non a fingere. Elemento fondamentale della simulazione è la sua controllabilità, ovvero la capacità di essere osservata e manipolata dal ricercatore. Quale che sia il metodo scientifico utilizzato, induttivo o deduttivo, le simulazioni, e i modelli che da queste vengono tratti, sono fondamentali per la comprensione della realtà e dei suoi fenomeni, dalle scienze naturali a quelle matematiche. Tra i modelli simbolici[7] un ruolo centrale è assunto da quelli stocastici. I modelli stocastici si prestano alla descrizione di realtà complesse, utilizzando come grandezze variabili aleatorie. A tali variabili viene attribuita, dal calcolatore, una distribuzione di probabilità, attraverso il campionamento di numeri casuali. È quindi evidente che tali simulazioni possano offrire un insieme aperto di risultati, essendo questi stessi casuali.[8] Precisamente questo è il funzionamento della simulazione Montecarlo: un fenomeno viene osservato *n* volte, registrando le modalità assunte in ciascuna manifestazione, con l'obiettivo di identificare la distribuzione statistica del carattere. Prima questione da porsi per comprendere a fondo il funzionamento della suddetta simulazione è il nome. Tale denominazione si deve inizialmente a motivi di segretezza[9]; il riferimento al noto Principato non è, però, dovuto al gioco d'azzardo in quanto tale, ma a ciò che accade all'interno dei Casino. Nelle sale da gioco, infatti, per ore i croupiers ripetono le stesse movenze e gesture. Ripetono, in sostanza, lo stesso esperimento casuale, che, come detto, è il tratto distintivo della simulazione Montecarlo. La simulazione in esame è, inoltre, una simulazione numerica, in quanto permette di rappresentare un fenomeno per mezzo di numeri e di ripetere le osservazioni infinite volte.

1.3 Condizioni

L'obiettivo primo del metodo Montecarlo è la stima di un parametro rappresentativo di una popolazione. Per far ciò, il calcolatore genera una serie di *n* numeri casuali che costituiscono il campione della popolazione in esame. L'invenzione della simulazione si deve alla comparsa dei primi calcolatori. Montecarlo, infatti, risolve quei problemi la cui soluzione è analiticamente molto

[7] I modelli simbolici traducono la realtà in uno schema matematico in modo tale da poter studiare il comportamento del fenomeno al mutare di ogni variabile. (*Enciclopedia delle Scienze Sociali Treccani, 1997).*

[8] *Enciclopedia delle Scienze Sociali Treccani,1997.*

[9] Si noti che, nella sua versione originaria, la simulazione viene elaborata nel contesto della Guerra Fredda.

complessa o "impossibile". La simulazione Montecarlo è atta alla risoluzione di due ordini di problemi[10]:

• Problemi di natura intrinsecamente probabilistica in cui sono coinvolti fenomeni legati alla fluttuazione stocastica di variabili aleatorie[11].
• Problemi di natura essenzialmente deterministica, del tutto privi di componenti aleatorie, ma la cui strategia di soluzione può essere riformulata in modo tale da risultare equivalente alla determinazione del valore di aspettazione di una funzione di variabili stocastiche.

Condizioni necessarie per l'applicazione del metodo sono poi l'indipendenza e l'analogia degli esperimenti.[12] Per indipendenza si intende che i risultati di ogni ripetizione dell'esperimento non devono essere in grado di influenzarsi a vicenda. Per analogia, invece, si fa riferimento al fatto che, per l'osservazione del carattere, venga ripetuto *n* volte lo stesso esperimento.

1.4 Montecarlo e il calcolo integrale

Una delle applicazioni prime del metodo in esame è il calcolo integrale. Nei casi più semplici, l'operazione di integrazione può essere svolta mediante il ricorso a metodi quali l'integrazione per parti, sostituzione e serie. Nelle situazioni meno immediate, però, è necessario ricorrere all'uso di un calcolatore e la simulazione Montecarlo offre una semplice soluzione, utile soprattutto nei casi di integrali multidimensionali. È comunque fondamentale notare che il risultato fornito da questa simulazione rappresenta esclusivamente un'approssimazione dell'integrale e non il suo valore preciso.
Sia dato un integrale I della funzione f limitata sull'intervallo $[a,b]$[13]:

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$$

Sia M un maggiorante della funzione f sull'intervallo $[a,b]$. Per delimitare l'approssimazione è anzitutto necessario tracciare un rettangolo di base $[a,b]$ e altezza M. In tal modo, infatti, l'area sottesa dalla funzione $f(x)$, ovvero l'integrale di $f(x)$ sarà certamente minore dell'area del suddetto rettangolo. Entra adesso in gioco la simulazione Montecarlo. Definiamo:

• $x \in [a,b]$
• $y \in [0,M]$

---

10 *Introduzione al Metodo Montecarlo, G. Della Lunga, Università degli studi di Bologna .*
11 Per una trattazione completa si rimanda ai capitoli su opzioni(2) e VaR(3).
12 *Tecniche di simulazione statistica, M. Chiodi, Università degli studi di Palermo.*
13 La trattazione segue *Integrazione numerica, M. Tumminiello, V. Lacagnina, A. Consiglio, Università degli studi di Palermo, 2015.*

x e *y* sono entrambi numeri casuali. Consideriamo un punto nel piano di coordinate (*x;y*).
Ciò che interessa è conoscere la probabilità che tale punto si trovi all'interno del grafico della funzione *f,* ovvero la probabilità che $y \leq f(x)$. Tale probabilità coincide con il rapporto tra:

- l'area sottesa dalla funzione *f,* che coincide con l'integrale definito I;
- l'area A del rettangolo con base [*a,b*] e altezza M:

$$A = (b-a)M$$

Per cui, formalmente:

$$P(y \leq f(x)) = \frac{I}{A} = \frac{I}{(b-a)M}$$

Poiché l'obiettivo è trovare I, l'unico termine non noto risulta essere $P(y \leq f(x))$. La simulazione Montecarlo assolve la funzione di stimare tale probabilità. Si generino *n* coppie di numeri casuali $(x_i; y_i)$, con:

- i=1,…..,n
- $x_i \in [a,b]$
- $y_i \in [0,M]$

Sulla base della generazione di tali vettori bidimensionali di numeri casuali, vi sarà una certa quantità di casi per cui $y_i \leq f(x_i)$. Tale quantità sarà denotata con U e varia al variare dei vettori generati. È perciò bene notare che non si tratta di un numero certo ma di una *approssimazione* la cui precisione incrementa all'aumentare del numero di vettori generati. L'approssimazione di $P(y \leq f(x))$ sarà quindi pari a

$$\rho = \frac{U}{n}$$

Avendo trovato il valore dell'ultima incognita, è possibile procedere con la stima dell'integrale I:

$$I \cong \rho\,(b-a)M = \frac{U}{n}(b-a)M$$

1.5 Montecarlo e il lancio dei dadi

Gli studenti di un corso base di Statistica entrano immediatamente a contatto con la definizione classica di probabilità. Secondo tale impostazione, dato lo spazio campionario S, se gli eventi elementari sono *equiprobabili,* ovvero hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi, e in numero finito, allora la probabilità di un evento A è data dal rapporto tra i casi favorevoli (ovvero il numero di eventi elementari in A) e i casi possibili (ovvero il numero di eventi dello spazio campionario S)[14]. Cioè:

- spazio campionario: S
- n eventi A_i, con i=1,2,…..,n
- tali eventi sono equiprobabili, ovvero formalmente P(A_1)= P(A_2)= ….= P(A_n)

La probabilita di ciascun evento A_i è allora pari a:

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{n}$$

In letteratura l'esempio principe di questo semplice concetto di probabilità è il lancio di un dado non truccato. Lo spazio campionario S è costituito da sei eventi, ciascuno corrispondente ad una faccia del dado, che sono tutti equiprobabili. La distribuzione di probabilità risulta quindi:

A_i	$\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{n}$	Probabilità cumulate
1	16,7%	16,7%
2	16,7%	33,3%
3	16,7%	50%
4	16,7%	66,7%
5	16,7%	83,3%
6	16,7%	100%

Tabella 1.1. Distribuzione di probabilità nel lancio di un dado non truccato e probabilità cumulate.

[14] *Introduzione alla statistica, A.C.Monti, Edizioni Scientifiche Italiane, 2008.*

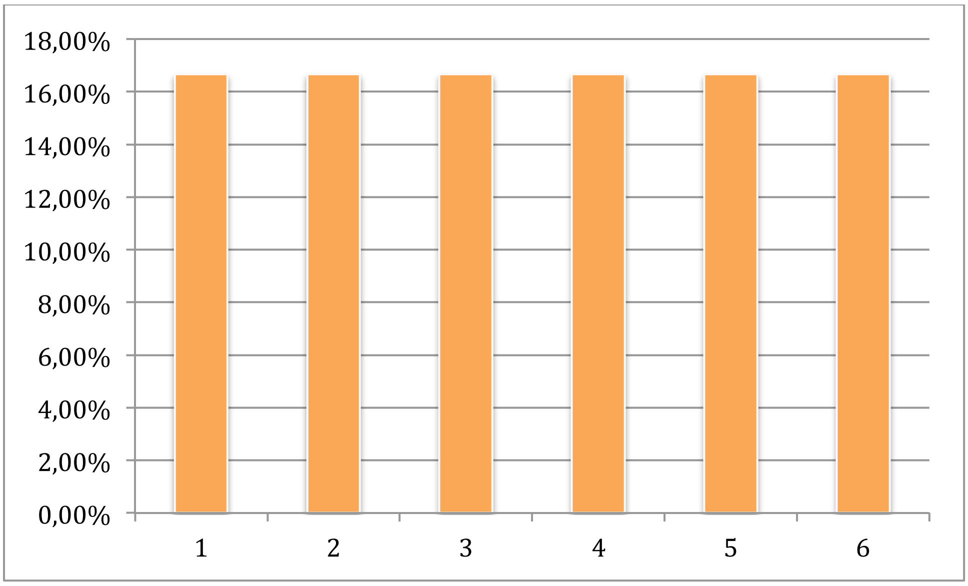


Grafico 1.1. Istogramma della distribuzione di probabilità nel lancio di un dado non truccato.

Il problema della definizione della funzione di probabilità diventa molto più complesso da un punto di vista analitico, all'aumentare del numero di dadi considerati. Nel caso in cui i dadi siano due il problema ha soluzioni in forma chiusa che possono agevolmente essere individuate senza l'ausilio di programmi particolarmente sofisticati. Se vengono lanciati contemporaneamente due dadi, i possibili esiti di ciasun lancio sono:

1;1	2;1	3;1	4;1	5;1	6;1
1;2	2;2	3;2	4;2	5;2	6;2
1;3	2;3	3;3	4;3	5;3	6;3
1;4	2;4	3;4	4;4	5;4	6;4
1;5	2;5	3;5	4;5	5;5	6;5
1;6	2;6	3;6	4;6	5;6	6;6

Tabella 1.2. Esiti lancio congiunto di due dadi non truccati.

La soluzione del problema è anche qui riconducibile alla definizione classica di probabilità; la probabilità di ciascun evento è agevolmente calcolata rapportando i casi favorevoli ai casi possibili. Questi ultimi dati sono immediatamente desumibili dalla tabella soprariportata; i casi possibili sono 6x6=36. Se, ad esempio, si volesse calcolare la probabilità che, nel lancio congiunto, esca almeno un 2, basta contare il numero di volte in cui il 2 compare nella tabella per ottenere i casi favorevoli:

1;1	2;1	3;1	4;1	5;1	6;1
1;2	2;2	3;2	4;2	5;2	6;2
1;3	2;3	3;3	4;3	5;3	6;3
1;4	2;4	3;4	4;4	5;4	6;4
1;5	2;5	3;5	4;5	5;5	6;5
1;6	2;6	3;6	4;6	5;6	6;6

Tabella 1.3. Esiti lancio congiunto di due dadi non truccati, con evidenziazione dell'evento A=2.

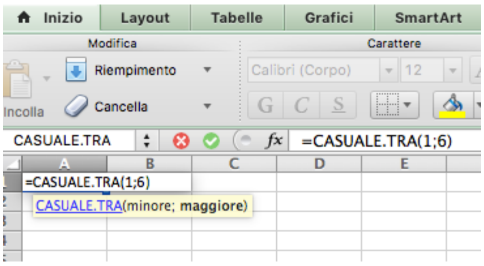
La probabilità che esca almeno un due è quindi pari a:

$$\mathrm{P}(A = 2) = \frac{11}{36}$$

Se con due soli dadi il problema è ancora risolvibile in forma chiusa, all'aumentare del numero di dadi è difficile trovare la probabilità di un evento senza ricorrere ad un calcolatore. Si ipotizzi, ad esempio, di voler calcolare la probabilità di un certo evento nel caso in cui vengano lanciati congiuntamente 1000 dadi. La soluzione analitica del problema, seppur esistente, sarebbe molto complessa. Per questo motivo possono essere sfruttate le funzionalità del calcolatore per "simulare" il lancio di ciascun dado. Tra i programmi che possono essere utilizzati quello operativamente più semplice è Micorosoft Excel[15]. Con la

[15] Nel capitolo sulle opzioni (2) verrà più approfonditamente descritto il funzionamento della simulazione Montecarlo con Microsoft Excel.

funzione CASUALE.TRA(1;6) è possibile generare *n* valori casuali tra 1 e 6, simulando quindi il lancio di un dado. In tal modo sarà possibile stimare la probabilità di ciascun evento, ricordando, comunque, che per il calcolo delle probabilità effettive è necessario affidarsi a formule di tipo chiuso. Come detto, quindi, si deve in primo luogo procedere alla generazione di n=1000 numeri casuali compresi tra 1 e 6 con la funzione CASUALE.TRA(1;6):



Foglio di calcolo 1.1. Generazione di numeri casuali compresi tra 1;6.

Si riportano di seguito i valori di probabilità stimati:

A_i	F_i	f_i
1	171	17,10%
2	185	18,50%
3	166	16,60%
4	163	16,30%
5	159	15,90%
6	156	15,60%
tot	1000	100,00%

Tabella1.4.Distribuzione di probabilità simulata nel lancio di 1000 dadi

1.6 Applicazioni finanziarie del metodo Montecarlo

La simulazione Montecarlo viene normalmente utilizzata per la previsione del valore futuro di vari strumenti finanziari.
Tuttavia, come evidenziato in precedenza, è bene sottolineare che tale metodo di previsione si presenta esclusivamente come una stima e non fornisce, perciò, come risultato, un valore preciso. Le principali applicazioni finanziarie del suddetto metodo riguardano il pricing di opzioni (o di derivati in genere), la valutazione di portafogli di titoli e di progetti finanziari. Analizzando questi tre principali campi, è subito evidente che essi presentino un elemento di analogia. Opzioni, portafogli e progetti finanziari, infatti, hanno un valore influenzato da molte fonti di incertezza. La simulazione in esame non si presta alla valutazione di qualsiasi strumento finanziario. Titoli quali, ad esempio, azioni ed obbligazioni, non sono normalmente valutati col suddetto metodo, proprio perché il loro valore è subordinato ad un minor numero di fonti di incertezza.

Le opzioni, al contrario, sono titoli derivati, il cui valore è quindi influenzato dall'andamento del sottostante (che può avere il contenuto più vario) e da numerosi altri fattori (tassi di interesse, tassi di cambio). La simulazione Montecarlo permette di generare valori pseudocasuali per ognuna di queste variabili e così di attribuire un valore all'opzione. È bene notare, comunque, che il metodo Montecarlo è solo uno di quelli disponibili per effettuare il pricing delle opzioni.

Proseguendo nella categoria degli strumenti finanziari i portafogli sono insiemi di diversi titoli, normalmente di natura varia. I portafogli sono esposti a una molteplicità di fonti di rischio. Le necessità operative dei moderni intermediari finanziari hanno portato all'affermarsi di metodi di calcolo che hanno il fine di monitorare l'esposizione complessiva al rischio dei proprio portafogli. Il metodo principe in questo contesto è il VaR, che viene spesso calcolato facendo ricorso alla simulazione Montecarlo.

In ultima analisi, quando un'azienda si trova a dover valutare la profittabilità di un progetto, essa dovrà confrontare il costo dello stesso con le entrate generate. Il costo iniziale è, normalmente (ma non necessariamente), certo. I flussi di cassa generati, invece, difficilmente sono noti a priori. Il metodo Montecarlo permette di valutare la profittabilità del progetto attribuendo valori pseudocasuali ai vari flussi di cassa.

Capitolo 2

Simulazione Montecarlo e derivati: la valutazione di opzioni finanziarie

La letteratura propone numerosi modelli di pricing per strumenti derivati in generale e opzioni in particolare. Nei tempi più recenti l'attività di ricerca accademica relativa agli strumenti derivati ha assunto una portata sempre più ampia, soprattutto a causa della rinnovata consapevolezza del ruolo che tali strumenti hanno giocato nella recente crisi economica. Un derivato è uno strumento finanziario il cui rendimento è legato al rendimento di un altro strumento finanziario emesso in precedenza e separatamente negoziato[16]. Negli ultimi trent'anni del secolo scorso si è assistito ad un grande sviluppo dei mercati dei derivati. Questi vengono utilizzati principalmente per tre finalità:

- hedging (copertura), per proteggere il valore di una posizione contro andamenti avversi del mercato;
- speculative, per ottenere profitti che si basano su ipotesi circa l'evoluzione futura delle condizioni di mercato;
- di arbitraggio, sfruttando il disallineamento temporaneo tra il prezzo del derivato e quello dell'attività sottostante, che sono destinati a coincidere alla scadenza del contratto.

Nelle pagine seguenti si descriveranno brevemente le opzioni, e il modello Montecarlo come alternativa alle altre tecniche di pricing. Le opzioni vengono utilizzate come titoli rappresentativi della più ampia classe dei derivati. Si noti, però, che le considerazioni avanzate sono applicabili agli altri derivati.

2.1 Opzioni

Le opzioni sono contratti finanziari che attribuiscono al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere una data quantità di un'attività finanziaria sottostante[17] ad un prezzo di esercizio chiamato *strike price,* ad una certa data o

---

[16] *Economia degli intermediari finanziari, A.Saunders, M. Millon Cornett, M.Anolli, B.Alemanni, IV Edizione, McGraw Hill, 2015.*

[17] Il sottostante di un'opzione può avere varia natura. Le opzioni più diffuse sono quelle su titoli azionari (*stock options),* su titoli obbligazionari (*bond options),* su indici di mercato (*stock index options),* su valute (*currency options)*, su commodities come petrolio (*oil options*) o oro (*gold options)*. Ultimamente si sono diffuse nuove categorie di opzioni, come quelle sull'andamento meteorologico in una particolare regione (*meteo options*).

entro tale data[18]. Nel caso in cui l'esercizio debba avvenire alla data di scadenza si parla di *opzioni europee;* mentre nel caso in cui l'esercizio possa avvenire in qualsiasi momento prima della data di scadenza si parla di *opzioni americane.*

Esistono due principali categorie di opzioni: opzioni call e put.

Le **opzioni call** attribuiscono al possessore il diritto di acquistare (entro o a una certa scadenza) una data quantità di sottostante ad un prezzo prefissato, lo *strike price* (K). Il corrispettivo per l'acquisto di tale diritto è il pagamento di un premio anticipato C al venditore dell'opzione. È quindi evidente che il titolare eserciterà l'opzione solo se, a scadenza, il prezzo di mercato sarà superiore allo strike price. In tale scenario, infatti, il possessore dell'opzione acquisterà il sottostante al prezzo K con S>K, registrando così un profitto pari a π=S-K[19]. Tale quantità è per ipotesi positiva. Il suddetto profitto deriva evidentemente dalla possibilità, per il possessore dell'opzione, di rivendere immediatamente sul mercato il sottostante al prezzo più alto S. Un derivato di questo tipo verrà acquistato solamente se l'acquirente ritiene che il valore del sottostante tenderà al rialzo e, di contro, solo se il venditore ritiene che il sottostante subirà una riduzione. Sinteticamente, quindi, il valore a scadenza di un'opzione call è:

- S-K, se S>K
- 0, se K>S[20]

I profitti, invece, sono pari a:

- S-K-C, se S>K
- -C, se K>S

Il grafico proposto descrive sinteticamente tali considerazioni.

[18] *www.borsaitaliana.it*
[19] Più precisamente il profitto è pari a S-K-C, poiché è necessario computare anche il premio pagato anticipatamente.
[20] Il valore dell'opzione call non è mai negativo poiché, nel caso il cui la quotazione del sottostante a scadenza scendesse al di sotto dello strike price, il titolare non eserciterebbe l'opzione.

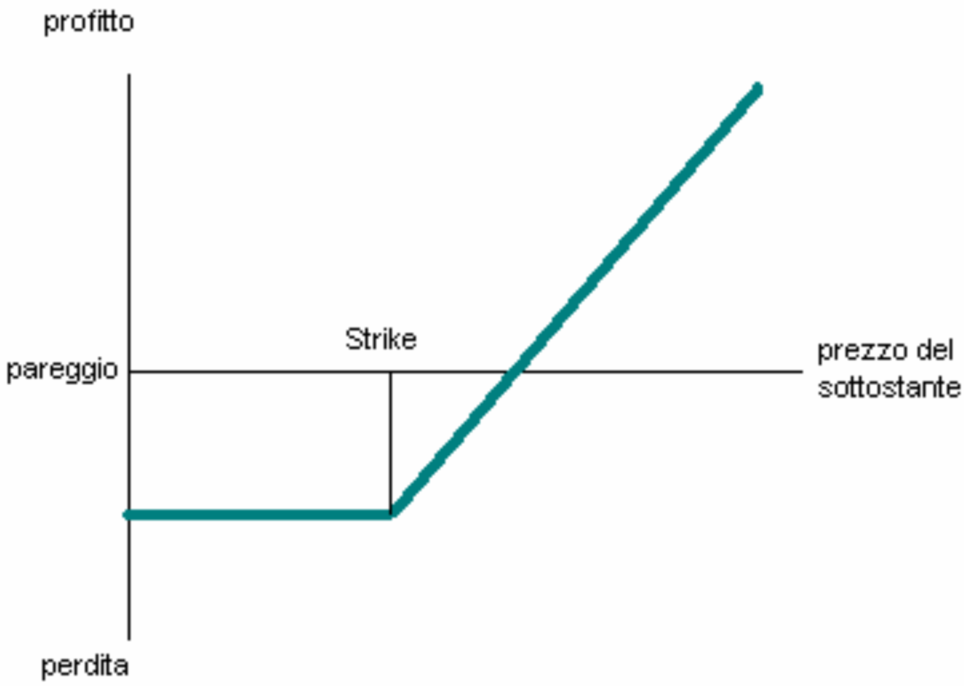


Grafico 2.1. Profitto relativo ad un'opzione call[21]

Sull'asse delle ascisse si indichi il prezzo (valore di mercato) del sottostante, sull'asse delle ordinate il profitto del titolare dell'opzione. L'intercetta sull'asse verticale corrisponde al premio C. Finchè il prezzo del sottostante è inferiore allo strike price pattuito, K, l'opzione non verrà esercitata, tuttavia la perdita, per qualsiasi valore S_i<K, è sempre costante e pari al premio pagato anticipatamente. L'acquisto di un'opzione call, quindi, comporta in ogni caso una perdita massima predeterminabile a priori; diverso discorso vale per i possibili profitti.
All'aumentare del prezzo corrente del sottostante, infatti, aumentano i profitti realizzabili (S-K-C) e di conseguenza la convenienza all'esercizio dell'opzione. Il punto di intersezione con l'asse orizzontale rappresenta il punto di pareggio (*break even point*), in cui, cioè, i profitti per il titolare sono nulli, essendo il prezzo di mercato perfettamente coincidente con la somma di strike price e premio pagato (S=K+C). In conclusione l'acquisto di un'opzione call comporta una perdita limitata e profitti potenzialmente illimitati.

Le **opzioni put** attribuiscono al possessore il diritto di vendere (entro o a una certa scadenza) una data quantità di sottostante ad un prezzo prefissato, lo *strike price* (K). Il corrispettivo per l'acquisto di tale diritto è il pagamento di un premio anticipato P al venditore dell'opzione, che si obbliga ad acquistare il sottostante a scadenza (o entro la scadenza) dal titolare del diritto. Specularmente a quanto notato per le opzioni call, il possessore eserciterà l'opzione solo se, a scadenza, il prezzo di mercato sarà inferiore allo strike price. In tale scenario, infatti, il titolare

[21] Grafico tratto da *www.borsaitaliana.it*

dell'opzione venderà il sottostante al prezzo K con K>S, registrando così un profitto pari a π=K-S[22]. Tale quantità è per ipotesi positiva. Un'opzione put verrà acquistata solamente se l'acquirente ritiene che il valore del sottostante tenderà al ribasso e, di contro, solo se il venditore ritiene che il sottostante subirà una rialzo. Sinteticamente, quindi, il valore a scadenza di un'opzione put è:

- K-S, se K>S
- 0, se S>K[23]

I profitti, invece, sono pari a:

- K-S-P, se K>S
- -P, se S>K

Il grafico proposto descrive sinteticamente tali considerazioni.

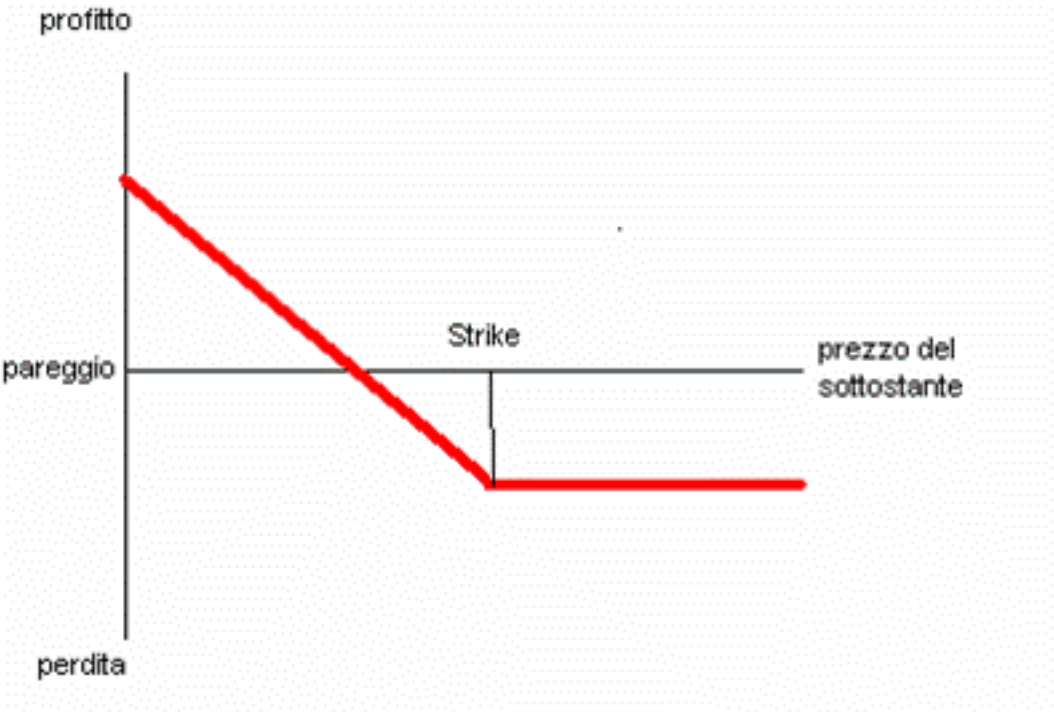


Grafico 2.2. Profitto relativo ad un'opzione put[24]

Sull'asse delle ascisse si indichi il prezzo (valore di mercato) del sottostante, sull'asse delle ordinate il profitto del titolare dell'opzione. L'intercetta sull'asse

[22] Più precisamente il profitto è pari a K-S-P, poiché è necessario computare anche il premio pagato anticipatamente. Tale profitto deriva dalla possibilità di vendere l'attività sottostante a condizioni migliori di quelle riscontrabili sul mercato.
[23] Il valore dell'opzione put non è mai negativo poiché, nel caso il cui la quotazione del sottostante a scadenza superasse lo strike price, il titolare non eserciterebbe l'opzione.
[24] Grafico da *www.borsaitaliana.it*

verticale corrisponde al massimo profitto, che si realizza quando il valore di mercato del sottostante è nullo. In questo caso, infatti, il titolare venderà il sottostante allo strike price K realizzando un profitto pari a K-P. Finchè il prezzo del sottostante è inferiore allo strike price pattuito, K, l'opzione verrà esercitata[25], riuscendo il titolare a vendere l'attività sottostante a condizioni migliori rispetto a quelle osservabili sul mercato. Al diminuire del valore di mercato dei sottostante, l'esercizio diventa meno conveniente, poiché diminuisce il margine di guadagno rispetto alle condizioni di mercato. Quando il valore di mercato del sottostante supera lo strike price K, non vi è più convenienza all'esercizio dell'opzione put. La perdita massima, però, coincide sempre con il premio anticipatamente pagato, poiché in caso di condizioni avverse l'opzione non sarà esercitat. Il punto di intersezione con l'asse orizzontale rappresenta il punto di pareggio, in cui, cioè, i profitti per il titolare sono nulli, essendo il prezzo di mercato perfettamente coincidente con la differenza tra strike price e premio pagato (S=K-P). In conclusione l'acquisto di un'opzione put risulta conveniente se si ritiene che il valore di mercato del sottostante, in futuro, tenderà al ribasso.

2.2 Il modello Binomiale

Il modello Binomiale è uno dei più semplici strumenti utilizzati per la valutazione delle opzioni. La sua prima formulazione si deve a Sharpe nel 1978, ma la versione oggi più nota si deve a Cox, Ross e Rubistein. Nel modello Binomiale uniperiodale si considera l'orizzone di tempo (0;T), dove T coincide con la maturity dell'opzione. Il modello si basa sulla costruzione di un portafoglio di replica, costituito da strumenti finanziari il cui valore al tempo T coincide esattamente con quello dell'opzione[26]. Poiché i valori dei due strumenti (portafoglio ed opzione) al tempo T coincidono, la Legge del Prezzo Unico impone che il loro prezzo equo al tempo 0 debba coincidere. Per semplicità considereremo il caso di un'opzione call di tipo europeo. Si valuti un titolo B privo di rischio che frutta nel periodo (0;T) un tasso di interesse r_f (risk free), tipicamente un titolo di Stato. Ipotizzando il caso in cui il sottostante sia un'opzione che non paga dividenti, S rappresenta il valore corrente dell'azione al tempo 0, al tempo T sono invece possibili due soli scenari, S_u, se il valore dell'azione aumenta e S_d, se lo stesso diminuisce. Ricordando che il valore di un'opzione call è pari a Max(S-K ;0) e supponendo che K sia noto allora il valore dell'opzione in T sarà:

• C_u = Max(S_u-K,0)
• C_d = Max(S_d-K,0)

Il titolo B, essendo privo di rischio, avrà un rendimento pari ad (1+r_f),

25 Più precisamente, fino a quando S<K-C.
26 La trattazione segue *Corporate Finance, Third Edition, J.Berk, P.DeMarzo, Pearson, 2014.*

indipendentemente dallo scenario. È possibile sintetizzare queste informazioni attraverso un albero binomiale, che rappresenta i possibili scenari al tempo T:

Tempo 0	**Tempo T**		
	Azione	Opzione	Titolo
	S_u	C_u	$(1+r_f)$
S			
	S_d	C_d	$(1+r_f)$

Per determinare il valore dell'opzione è necessario notare che il suo rendimento può essere ottenuto costruendo un portafoglio che contiene un numero di opzioni pari a Δ e un investimento nel titolo risk-free pari a Λ. Il valore di tale portafoglio deve eguagliare quello dell'opzione in entrambi gli scenari affinchè sia applicabile la legge del prezzo unico. Di conseguenza nel primo scenario:

$$S_u\,\Delta + (1+r_f)\Lambda = C_u$$

Nel secondo, invece:

$$S_d\,\Delta + (1+r_f)\Lambda = C_d$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni in due incognite (Δ e Λ), otteniamo il numero di azioni e l'ammontare da investire in un titolo risk-free da inserire nel portafoglio per ottenere esattamente il valore dell'opzione nei due possibili scenari.

$$\Delta = \frac{Cu - Cd}{Su - Sd}$$

$$\Lambda = \frac{Cd - Sd\Delta}{1+r_f}$$

Una volta costruito tale portafoglio, il valore dell'opzione in 0, ovvero il suo prezzo, è pari a quello del portafoglio:

$$C = S\,\Delta + \Lambda$$

Tali formule sono applicabili anche nel caso di opzioni put[27].

Il modello uniperiodale fornisce uno strumento analitico semplice per la valutazione delle opzioni. Tuttavia l'assunzione di due soli possibili scenari futuri per il valore del sottostante risulta fortemente irrealistica. È quindi possibile ricorrere ad un modello multiperiodale, proposto da Cox, Ross e Rubistein.

Il modello binomiale multiperiodale si fonda sul medesimo assunto di quello monoperiodale: per ogni istante t esistono due soli possibili scenari (up state e down state). Il funzionamento e le formule utilizzate sono analoghe, tuttavia vengono meno le ipotesi eccessivamente restrittive del modello proposto da Sharpe. Aumentando i periodi considerati e riducendo gli intervalli tra questi, infatti, è possibile migliorare il realismo del modello, utilizzando valori che verosimilmente verranno assunti dal sottostante. Anche se l'assunzione di due soli possibili stati per ogni periodo resta forte, aumentando in numero di periodi si riesce a sopperire a questa impostazione[28]. È bene comunque ricordare che i modelli appena analizzati si prestano non soltanto alla valutazione di opzioni europee put o call, ma possono essere usate per valutare qualsiasi derivato. È sufficiente, infatti, che il titolo considerato sia influenzato dall'andamento di un altro strumento (sottostante), e questa è la caratteristica tipica dei contratti derivati.

2.3 L'ipotesi di neutralità per il rischio

In entrambi i modelli appena descritti non sono state avanzate ipotesi sulla probabilità di ciascuno scenario. Conoscendo tali probabilità, sarebbe sufficiente calcolare il valore atteso dell'opzione e scontarlo ad un tasso di interesse adeguato per ottenere il suo prezzo equo[29]. Come in precedenza, consideriamo un'opzione call nell'orizzonte temporale (0;T); in T il valore dell'opzione sarà C_u con probabilità π e C_d con probabilità (1- π). Il valore atteso dell'opzione è:

$$E(C) = C_u\,\pi + C_d(1-\pi)$$

Per trovare il prezzo C è sufficiente scontare il valore atteso, come avviene per qualsiasi altro strumento finanziario[30]. Tuttavia non è possibile trovare un tasso preciso se non si conosce il grado di propensione al rischio degli agenti economici. Un modello che permette di risolvere questa problematica è quello che

27 Si noti che nel caso di una call Δ>0 e Λ<0, mentre per una put Δ<0 e Λ>0.
28 Quando il numero di periodi considerati tende a infinito la formula normalmente utilizzata è quella proposta da *Black and Scholes.*
29 La trattazione segue *Corporate Finance, Third Edition, J.Berk, P.DeMarzo, Pearson, 2014.*
30 Tale assunzione vale solo se sono rispettate le ipotesi di mercati di capitali perfetti.

ipotizza che *tutti* gli operatori economici siano neutrali al rischio[31]. Sotto questa particolare condizione, infatti, il tasso da utilizzare per lo sconto del valore atteso di qualsiasi strumento finanziario è quello privo di rischio[32].
Consideriamo ancora l'albero binomiale monoperiodale:

Tempo 0	**Tempo T** Azione	Opzione	Titolo	Probabilità
	S_u	C_u	$(1+r_f)$	ρ
S				
	S_d	C_d	$(1+r_f)$	(1-ρ)

Per calcolare la probabilità ρ che si verifichi l'*up-state*[33] è sufficiente eguagliare il tasso di rendimento atteso del titolo azionario al tasso di interesse privo di rischio. Questo è diretta conseguenza dell'assunzione di neutralità per il rischio.

Il rendimento atteso del titolo azionario è pari a:

$$\frac{\rho Su+(1-\rho)Sd}{S}-1$$

tale rendimento deve essere uguale al rendimento di un titolo risk-free

$$\frac{\rho Su+(1-\rho)Sd}{S}-1=r_f$$

La probabilità neutrale per il rischio dell'up state ρ risulta quindi pari a :

$$\rho=\frac{(1+r_f)S-Sd}{Su-Sd}$$

Per computare il valore dell'opzione al tempo 0 è sufficiente calcolare il suo payoff atteso

---

[31] È bene comunque ricordare che l'ipotesi di neutralità per il rischio si presenta come assolutamente irrealistica nella realtà dei mercati finanziari. Gli operatori economici tendono infatti ad essere avversi al rischio.
[32] Nel modello Binomiale (monoperiodale e multiperiodale) come in quello di Black-Scholes, non si erano fatte assunzioni circa valore atteso dei payoff dell'opzione, probabilità di ciascuno scenario e grado di avversione al rischio. Questo perché tali modelli forniscono sempre lo stesso risultato (prezzo dell'opzione) indipendentemente dall'andamento di tali parametri.
[33] Di conseguenza (1-ρ) è la probabilità che si verifichi il *down-state.* Si tratta infatti di due eventi incompatibili, la cui somma delle probabilità eguaglia 1.

$$\rho Cu + (1-\rho)Cd$$

e attualizzarlo usando il tasso r_f

$$\frac{\rho Cu+(1-\rho)Cd}{(1+r_f)^\wedge T}$$

Il modello di probabilità neutrali per il rischio è alla base dell'applicazione della Simulazione Montecarlo per il pricing di opzioni.

2.4 Montecarlo e valutazione di opzioni

Come evidenziato in precedenza, la problematica sostanziale del modello binomiale è l'ipotesi che, per ogni istante considerato, il sottostante possa assumere due soli valori (up e down). Tale ipotesi risulta quantomeno irrealistica perché, nella realtà dei mercati finanziari, il sottostante ha un andamento che è certamente in qualche modo prevedibile, ma che può dipendere da numerosi fattori che è necessario tenere in considerazione in sede di valutazione[34]. La simulazione Montecarlo risolve le problematiche insite nel modello binomiale perché ricorrendo ad essa è possibile generare *n* possibili valori pseudocasuali assunti dal sottostante al tempo T. Sulla base di questi è possibile calcolare il valore dell'opzione. La simulazione Montecarlo è quindi una simulazione statistica e stocastica perché i possibili valori del sottostante non rappresentano altro che campioni della variabile casuale costituita dal sottostante stesso.

Consideriamo il caso di un'opzione europea (quindi esercitabile solo a scadenza) call su un indice azionario[35].
Come ribadito in precedenza, il valore dell'opzione a scadenza, e quindi la convenienza all'esercizio, dipende dal contestuale valore dell'indice azionario. Se la valutazione avviene al tempo 0 non si dispone di dati certi circa il valore futuro del sottostante. Affinchè la simulazione Montecarlo restituisca una stima precisa è

[34] Normalmente in letteratura vengono trattate opzioni che hanno come sottostante titoli azionari. Per i titoli quotati, infatti, è possibile consultare serie storiche e analisi statistiche che consentano di valutare la distribuzione del sottostante e ridurre il margine di errore. Per i titoli di questo genere l'andamento futuro è parzialmente prevedibile e la simulazione Montecarlo fornisce una stima accettabile del valore delle relative opzioni. Ci sono poi certamente eventi che non possono essere statisticamente previsti. Nel recente passato, ad esempio, si sono diffuse opzioni sull'andamento meteorologico. In questi casi i valori generati sono assolutamente casuali e i risultati ottenuti non possono essere interpretati come una stima attendibile, ma come un indicatore del valore atteso.
[35] La scelta deriva da esigenze di sinteticità nella trattazione. È comunque possibile estendere i risultati ad opzioni europee, americane, asiatiche sia di tipo call che put.

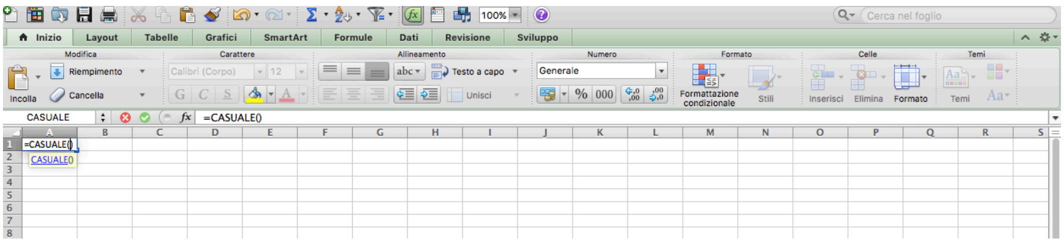
necessario che i valori generati siano verosimili. È possibile partire da un'analisi storica dell'andamento dei prezzi dei titoli compresi nell'indice, o da un'analisi dell'andamento dell'indice stesso nel tempo. Tali valori sono disponibili negli archivi dei maggiori quotidiani economici su base giornaliera, settimanale, mensile o annuale. Il grafico sottoriportato è tratto dal sito del *Sole24ore* e descrive l'andamento del valore delle azioni ordinarie emesse da Apple-Inc negli ultimi cinque anni. Partendo da questi dati è possibile calcolare valore medio, varianza, deviazione standard. In ogni caso è bene ricordare che sono innumerevoli i fattori che incidono sui prezzi dei titoli azionari. Alcuni di questi, come la diffusione di informazioni relative alla stabilità e profittabilità dell'emittente, non sono totalmente prevedibili. Si noti quindi che il risultato ottenuto non necessariamente troverà rispondenza nella realtà e che, per ridurre il margine di errore, è necessario aumentare il numero di osservazioni analizzate. Dall'analisi dell'andamento storico delle quotazioni del sottostante, è possibile trarre conclusioni circa la sua distribuzione. Da queste deduzione ha origine la simulazione Montecarlo. Affinchè il risultato della simulazione sia attendibile, infatti, è necessario che i valori generati per l'evelouzione futura del sottostante siano verosimili. L'obiettivo non è ottenere valori totalmente casuali, ma pseudo-casuali. Questo perché, una volta compreso il tipo di distribuzione assunto dal sottostante, le osservazioni generate devono essere coerenti con questa ipotesi. I moderni software offrono la possibilità di generare numeri, appunto pseudocasuali, la cui distribuzione coincide con quella imposta. Una volta generati questi *n* possibili scenari del sottostante, si calcola il contestuale valore della call in ogni scenario possibile con la nota formula Max(S-K;0). L'attualizzazione del rendimento medio, utilizzando il tasso privo di rischio r_f, rappresenta il valore atteso dell'opzione call E(C), e quindi il suo prezzo equo.

Grafico 2.3. Andamento quotazioni azioni ordinarie Apple-Inc: 4 Giugno 2012-22 Maggio 2017. Fonte: Il Sole24ore.

2.5 Simulazione Montecarlo e Microsoft Excel

Tra i programmi disponibili, Excel non è quello con maggiore potenza di calcolo. È tuttavia utile descrivere le modalità operative per realizzare la simulazione in Excel[36] a causa della notevole semplicità di utilizzo rispetto agli altri programmi.

Prioritariamente è necessario scegliere l'opzione da analizzare e di conseguenza il relativo sottostante. Come evidenziato in precedenza, per esigenze di semplicità si consideri un'opzione europea call con sottostante costituito da un generico indice azionario. La fase centrale e critica della simulazione è la generazione di *n* possibili scenari per l'andamento del sottostante. È necessario che i valori generati siano verosimili, e che cioè non si discostino eccessivamente dalle serie storiche, che devono essere preventivamente analizzate[37]. Una volta analizzati questi dati, è necessario considerarne la distribuzione, il valore minimo e massimo, la media, la varianza e la deviazione standard, in modo tale da valutare quali risultati considerare accettabili. Sarà quindi generata con Excel una successione di *n* numeri pseudo-casuali. Tali valori sono pseudo-casuali poiché, con il fine di rendere affidabile la stima, è possibile controllarne la distribuzione. Utilizzeremo la funzione CASUALE(.). Con tale funzione, infatti, si generano dei numeri casuali all'interno dell'intervallo 0;1, la cui distribuzione è uniforme. Una variabile casuale uniforme assume sempre valori compresi nell'intervallo $(\vartheta_1; \vartheta_2)$ e ha una funzione di densità costante in tale intervallo[38].



Foglio di calcolo 2.1. Funzione di generazione di numeri casuali compresi tra 0;1, CASUALE(.).

Quando è stata scelta la distribuzione che più verosimilmente approssima l'evoluzione del sottostante, va scelto quanti possibili numeri pseudo-casuali generare. Questa decisione è di fondamentale importanza poiché, all'aumentare

---

36 La versione utilizzata in questa sede è Microsoft Excel 2011.

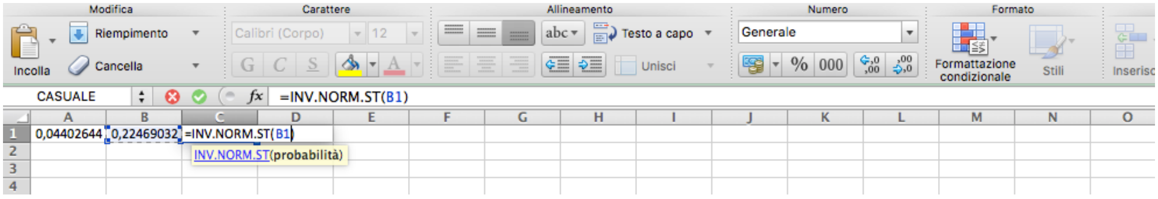
37 È chiaro che, nel caso in cui si ritenga che eventi significativi per il mercato facciano variare, in aumento o in riduzione, il valore dell'indice, è possibile che la distribuzione di discosti dai suoi valori storici.

38 *Introduzione alla statistica, A.C.Monti, Edizioni Scientifiche Italiane, 2008.*

dei valori considerati, da un lato la simulazione diviene più complessa, dall'altro, però, si migliora la stima, riducendo l'errore.
Il Teorema del Limite Centrale, infatti, afferma che la somma o la media di un gran numero di variabili aleatorie identicamente distribuite e indipendenti è approssimativamente normale, indipendentemente dalle distribuzioni soggiacenti[39]. In questa sede, le implicazioni di questo teorema sono fondamentali. Il Teorema del Limite Centrale, infatti, permette di affermare che, per un numero di osservazioni sufficientemente grande, la media campionaria è approssimativamente normale. Di conseguenza all'aumentare del numero n di osservazioni aumenta la probabilità che la distribuzione del campione coincida con la distribuzione della variabile aleatoria di riferimento. È ovvio che non è possibile definire in modo assoluto quando n è sufficientemente grande. Normalmente, in statistica si considerano tali i campioni superiori alle 30 o 50 unità. In questa sede, comunque, è possibile considerare campioni più numerosi, nell'ordine delle 200 unità o più. Si ipotizzi che l'indice azionario in esame (sottostante) assuma ragionevolmente una distribuzione approssimativamente Normale con media μ, varianza σ^2 e deviazione standard σ. I parametri della distribuzione vengono stimatiti a partire dalle serie storiche. L'assunzione di Normalità dipende da esigenze di semplicità della trattazione. Tuttavia i software mettono a disposizioni strumenti in grado di generare valori pseudo-casuali derivanti anche da distribuzioni diverse, come χ^2 o *t-Student.* Per generare numeri normalmente distribuiti con Excel è necessario passare attraverso alcune fasi. In primo luogo si generano n valori da una distribuzione Uniforme, compresi tra 0;1. Tali valori rappresentano la probabilità, quindi l'area sottesa dalla curva delle Normale Standard. Si procederà con la trasformazione di questa probabilità nel corrispondente valore della Normale Standard. La Normale Standard è una variabile casuale continua con media nulla e varianza unitaria[40]. Per svolgere questo calcolo si utilizza la funzione INV.NORM.ST(probabilità). Il calcolo va chiaramente ripetuto per ogni scenario della variabile casuale uniforme generato. L'operazione svolta con questa funzione coincide con quella svolta dagli studenti di un corso di Statistica che consultano le tavole della Normale Standard. Conoscendo il valore p della probabilità, infatti, si conosce l'area sottesa dalla curva della Normale Standard e un punto. Con il ricorso alla funzione INV.NORM.ST(probabilità) non si fa altro che trovare il valore di quel punto. Il calcolo attraverso le tavole, infatti, oltre che non abbastaza preciso, sarebbe eccessivamente lungo senza l'ausilio di un programma:

$$z = N^{-1}(p)$$

[39] *Introduzione alla statistica, A.C.Monti, Edizioni Scientifiche Italiane, 2008.*
[40] *Introduzione alla statistica, A.C.Monti, Edizioni Scientifiche Italiane, 2008.*



Foglio di calcolo 2.2. Trasformazione valori v.c. uniforme in Normale Standard. Funzione INV.NORM.ST(p).

A questo punto, però, ci troviamo in contrasto con l'ipotesi originaria secondo cui la distribuzione dell'indice è Normale, ma non Normale Standard. Per ottenere il corrispondente valore distribuito Normalmente è sufficiente moltiplicare ogni z per lo scarto quadratico medio σ della distribuzione del sottostante e aggiungervi la media μ. Tali valori sono stati dedotti dalle serie storiche dei rendimenti dell'indice sottostante in un momento precedente rispetto alla realizzazione della simulazione:

$$r = F^{-1}(p) = \mu + z\sigma$$

Ciò che si è ottenuto sono i tassi di variazione del sottostante in ogni scenario, elevando questi decimali al numero di Nepero e moltiplicandoli per il valore originario del sottostante S_0 si ottengono gli n valori che esso potrà assumere in T. Per calcolare il valore corrispondente dell'opzione call in T è sufficiente applicare la nota formula:

$$\mathrm{Max}(S - K; 0)$$

K è noto poichè è un elemento essenziale del contratto di opzione, S, invece, rappresenta il valore del sottostante. L'operazione di calcolo del valore dell'opzione verrà quindi ripetuta per ogni scenario del sottostante simulato. Si ottengono quindi n possibili valori dell'opzione call al tempo T. Calcolando il loro valor medio con la funzione MEDIA(num) si ottiene il valore atteso dell'opzione in esame al tempo T:

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ci$$

L'obiettivo, però, era stimare il valore attuale atteso dell'opzione. Per calcolare il valore dell'opzione in 0 è sufficiente attualizzare $\bar{C}$ utilizzando il tasso risk-free r_f. Si è infatti sottolineato che la simulazione Montecarlo insiste su un contesto di individui neutrali al rischio. Il valore dell'opzione in 0 è quindi pari a:

$$C = \frac{\bar{C}}{(1+r_f)^{\wedge}T}$$

Si noti che la simulazione presuppone che ogni scenario generato sia equamente probabile.

La Simulazione Montecarlo offre degli strumenti molto duttili per il calcolo del valore di opzioni di ogni tipo. Tuttavia le stime fornite non sono sempre affidabili, per questi motivi sono normalmente implementate delle tecniche per la riduzione del margine di errore, come i metodi per la riduzione della varianza[41].

2.6 Simulazione Montecarlo e Microsoft Excel: un esempio pratico

Si consideri un'opzione call europea con scadenza pari a 1 anno. Si ipotizzi che il valore dell'opzione sia influenzato solo dal sottostante, costituito da un generico indice azionario la cui distribuzione dei rendimenti è approssimativamente Normale con media μ=0,1% , deviazione standard σ=1,1% e varianza $\sigma^2 = 0{,}0121\%$. Alla data di valutazione il sottostante S_0 ha un valore pari a 100, l'opzione C_0 vale 10. Da ciò si può dedurre che lo strike price K è pari a 90. Riassumendo analiticamente i dati:

Distribuzione	Normale
S_0	100
C_0	10
K	90
μ	0,1%
σ	1,1%
σ^2	0,0121%

Si ipotizzi, inoltre, che il tasso di interesse annuale privo di rischio r_f sia pari a 0,25%[42].

Si generino con la funzione CASUALE() di Microsoft Excel *n=100* possibili valori di una variabile casuale uniformemente distribuita con estremi (0;1)[43]. Una volta generati, essi vanno trasformati nei corrispondenti valori della variabile casuale Normale Standard con la funzione INV.NORM.ST(p). Per ottenere la

41 Tali tecniche verranno descritte nel paragrafo 2.7.
42 Si noti, comunque, che l'assunzione di un tale tasso di interesse risulta essere fortemente irrealistica. Normalmente si utilizza come tasso di interesse privo di rischio il rendimento di titoli di Stato di analoga scadenza. In questo specifico caso, quindi, sarebbe necessario utilizzare il tasso di rendimento dei BOT a 12 mesi. Tuttavia, com'è noto, negli ultimi anni tali rendimenti sono risultati negativi (nello specifico il rendimento dei BOT a 12 mesi emessi il 12/05/2017 è stato mediamente pari a -0,304%). Per esigenze di semplicità di calcolo il tasso di interesse risk-free è stato supposto positivo.
43 È necessario copiare e incollare i valori ottenuti. In caso contrario, infatti, questi si modificheranno in seguito ad ogni azione su qualsiasi cella del foglio di calcolo.

corrispondente distribuzione normale si moltiplica ciascun valore per la deviazione standard σ e si aggiunge la media μ. Per ottenere i possibili valori del sottostante al tempo T S_T è necessario elevare il numero di Nepero ai valori della distribuzione Normale, utilizzando la funzione EXP(r). Tali decimali verranno poi moltiplicati per 100, ovvero S_0. Per calcolare i corrispondenti possibili scenari del valore dell'opzione C_T si sottrae a ciascun S_T 90, che corrisponde allo strike price. Si presentano quindi i calcoli svolti:

	A	C	D	E	F	G	H
1	scenario	p	v	r	e^r	S1	C1
2	1	0,168820	-0,9588383	-0,00954722149	0,99049821	99,0498209	9,04982085
3	2	0,73778213	0,63652278	0,00800175056	1,00803385	100,803385	10,803385
4	3	0,68978123	0,49523033	0,00644753364	1,00646836	100,646836	10,6468364
5	4	0,17547334	-0,9327546	-0,00926030085	0,99078244	99,0782444	9,07824437
6	5	0,23787151	-0,713166	-0,00684482649	0,99317855	99,3178546	9,3178546
7	6	0,93348786	1,50228203	0,01752510233	1,01767957	101,767957	11,7679568
8	7	0,30655509	-0,5056389	-0,00456202761	0,99544836	99,5448363	9,54483626
9	8	0,24531254	-0,689315	-0,00658246468	0,99343915	99,3439152	9,34391523
10	9	0,08645818	-1,3628926	-0,01399181855	0,98610561	98,6105612	8,6105612
11	10	0,20987531	-0,806854	-0,00787539377	0,99215554	99,2155536	9,21555359
12	11	0,45987005	-0,1007611	-0,00010837222	0,99989163	99,9891634	9,98916337
13	12	0,24412424	-0,6930973	-0,00662407039	0,99339782	99,339782	9,33978204
14	13	0,76275354	0,71518793	0,00886706725	1,0089065	100,89065	10,8906496
15	14	0,83292127	0,96577366	0,01162351023	1,01169133	101,169133	11,1691326
16	15	0,53615376	0,09074843	0,00199823274	1,00200023	100,200023	10,2000231
17	16	0,60460894	0,26529511	0,00391824624	1,00392593	100,392593	10,3925933
18	17	0,23420625	-0,7250645	-0,00697570897	0,99304856	99,3048565	9,30485648
19	18	0,0032827	-2,7181197	-0,02889931703	0,97151427	97,1514274	7,15142745
20	19	0,67095063	0,44253967	0,00586793633	1,00588519	100,588519	10,5885186
21	20	0,27625715	-0,5939967	-0,00553396389	0,99448132	99,448132	9,44813203
22	21	0,90541048	1,31301162	0,01544312781	1,01556299	101,556299	11,5562989
23	22	0,78130681	0,77661428	0,00954275709	1,00958843	100,958843	10,9588434
24	23	0,9264567	1,4498993	0,01694889227	1,01709334	101,709334	11,709334
25	24	0,83744434	0,98400854	0,01182409389	1,01189427	101,189427	11,1894275
26	25	0,92558991	1,44371139	0,01688082534	1,01702411	101,702411	11,7024112
27	26	0,01940494	-2,0661971	-0,02172816837	0,97850619	97,8506188	7,85061878
28	27	0,9941131	2,51885267	0,02870737942	1,02912341	102,912341	12,9123408
29	28	0,40165409	-0,249068	-0,00173974804	0,99826176	99,8261764	9,82617644
30	29	0,2385373	-0,7110156	-0,00682117113	0,99320204	99,320204	9,32020403
31	30	0,60772544	0,27339563	0,00400735188	1,00401539	100,401539	10,4015392
32	31	0,58698037	0,21978415	0,00341762562	1,00342347	100,342347	10,3423472
33	32	0,7574607	0,69815766	0,00867973421	1,00871751	100,871751	10,8717512

	A	C	D	E	F	G	H
33	32	0,7574607	0,69815766	0,00867973421	1,00871751	100,871751	10,8717512
34	33	0,8635306	1,09631991	0,01305951904	1,01314517	101,314517	11,3145167
35	34	0,53751703	0,09418029	0,00203598316	1,00203806	100,203806	10,2038057
36	35	0,03730178	-1,782894	-0,01861183405	0,9815603	98,1560297	8,15602966
37	36	0,84567918	1,01807643	0,01219884077	1,01227355	101,227355	11,227355
38	37	0,13273892	-1,1135371	-0,01124890793	0,98881412	98,8814124	8,88141245
39	38	0,72529089	0,59863214	0,00758495352	1,00761379	100,761379	10,7613792
40	39	0,62640358	0,32234303	0,00454577328	1,00455612	100,455612	10,4556121
41	40	0,00157987	-2,9517551	-0,03146930609	0,9690207	96,9020699	6,9020699
42	41	0,79330768	0,81795193	0,00999747119	1,01004761	101,004761	11,0047613
43	42	0,77241413	0,7468208	0,00921502885	1,00925762	100,925762	10,9257618
44	43	0,90004236	1,28179297	0,01509972270	1,0152143	101,52143	11,5214299
45	44	0,88298492	1,19004129	0,01409045424	1,01419019	101,419019	11,4190193
46	45	0,84800919	1,02793241	0,01230725647	1,0123833	101,23833	11,2383302
47	46	0,43572803	-0,1618093	-0,00077990193	0,9992204	99,9220402	9,92204021
48	47	0,25687624	-0,6530059	-0,00618306479	0,99383601	99,3836011	9,3836011
49	48	0,89935686	1,27789551	0,01505685059	1,01517078	101,517078	11,5170776
50	49	0,68361403	0,47782896	0,00625611855	1,00627573	100,627573	10,6275729
51	50	0,618878	0,30253533	0,00432788865	1,00433727	100,433727	10,4337267
52	51	0,12311872	-1,1595368	-0,01175490484	0,98831391	98,8313914	8,83139141
53	52	0,83731393	0,98347821	0,01181826029	1,01188837	101,188837	11,1888372
54	53	0,76545446	0,72395871	0,00896354581	1,00900384	100,900384	10,9003839
55	54	0,54905738	0,12328017	0,00235608186	1,00235886	100,235886	10,235886
56	55	0,50947526	0,02375319	0,00126128510	1,00126208	100,126208	10,1262081
57	56	0,18140386	-0,910028	-0,00901030838	0,99103016	99,1030163	9,10301628
58	57	0,88942969	1,22350073	0,01445850802	1,01456354	101,456354	11,4563538
59	58	0,75059333	0,67635804	0,00843993847	1,00847566	100,847566	10,8475655
60	59	0,09781039	-1,2941292	-0,01323542164	0,98685178	98,6851781	8,68517814
61	60	0,59460795	0,23941461	0,00363356074	1,00364017	100,364017	10,364017
62	61	0,62446355	0,31722498	0,00448947483	1,00449957	100,449957	10,4499568
63	62	0,50778911	0,01952565	0,00121478214	1,00121552	100,121552	10,121552
64	63	0,5831312	0,2099104	0,00330901439	1,0033145	100,33145	10,3314495
65	64	0,86765401	1,11536983	0,01326906817	1,01335749	101,335749	11,3357493

	A	C	D	E	F	G	H
65	64	0,86765401	1,11536983	0,01326906817	1,01335749	101,335749	11,3357493
66	65	0,80567411	0,86206494	0,01048271436	1,01053785	101,053785	11,053785
67	66	0,84116859	0,99927224	0,01199199466	1,01206419	101,206419	11,2064187
68	67	0,6295669	0,3307065	0,00463777145	1,00464854	100,464854	10,4648543
69	68	0,85116585	1,04144666	0,01245591331	1,01253381	101,253381	11,2533811
70	69	0,46255963	-0,0939873	-0,00003386000	0,99996614	99,9966141	9,99661406
71	70	0,31549703	-0,4803282	-0,00428361001	0,99572555	99,5725552	9,57255516
72	71	0,78018086	0,77280418	0,00950084602	1,00954612	100,954612	10,9546122
73	72	0,13096864	-1,121824	-0,01134006393	0,98872399	98,8723992	8,87239922
74	73	0,46409773	-0,0901155	0,00000872977	1,00000873	100,000873	10,000873
75	74	0,4037243	-0,2437188	-0,00168090699	0,9983205	99,8320505	9,83205049
76	75	0,35730346	-0,3656759	-0,00302243509	0,99698213	99,6982128	9,69821279
77	76	0,60998112	0,27926982	0,00407196806	1,00408027	100,408027	10,408027
78	77	0,80450893	0,8578376	0,01043621358	1,01049086	101,049086	11,0490861
79	78	0,81304842	0,88918593	0,01078104518	1,01083937	101,083937	11,083937
80	79	0,16649602	-0,9681048	-0,00964915248	0,99039725	99,0397251	9,03972512
81	80	0,10674944	-1,2440019	-0,01268402058	0,98739608	98,7396083	8,73960826
82	81	0,59247263	0,23391013	0,00357301142	1,0035794	100,35794	10,3579402
83	82	0,58114838	0,20483219	0,00325315412	1,00325845	100,325845	10,3258451
84	83	0,53508324	0,0880543	0,00196859727	1,00197054	100,197054	10,1970536
85	84	0,66054062	0,41393903	0,00555332937	1,00556878	100,556878	10,5568778
86	85	0,61397102	0,28968406	0,00418652468	1,0041953	100,41953	10,41953
87	86	0,23276661	-0,729766	-0,00702742604	0,99299721	99,2997209	9,29972086
88	87	0,07936358	-1,4093653	-0,01450301865	0,98560164	98,5601644	8,56016435
89	88	0,0047844	-2,5910345	-0,02750137928	0,97287334	97,2873341	7,28733407
90	89	0,49328761	-0,0168263	0,00081491104	1,00081524	100,081524	10,0815243
91	90	0,78509828	0,78952806	0,00968480862	1,00973186	100,973186	10,9731858
92	91	0,69904333	0,521651	0,00673816103	1,00676091	100,676091	10,6760914
93	92	0,35367115	-0,3754278	-0,00312970622	0,99687519	99,6875186	9,68751862
94	93	0,83906378	0,99061741	0,01189679154	1,01196784	101,196784	11,196784
95	94	0,12173596	-1,1663526	-0,01182987868	0,98823982	98,8239819	8,82398192
96	95	0,18673305	-0,8899996	-0,00878999570	0,99124852	99,1248523	9,12485234
97	96	0,61238478	0,28554003	0,00414094032	1,00414953	100,414953	10,4149526
98	97	0,70075773	0,52658107	0,00679239173	1,00681551	100,681551	10,6815512
99	98	0,22328282	-0,7611531	-0,00737268394	0,99265443	99,2654428	9,26544276
100	99	0,17736045	-0,9254711	-0,00918018236	0,99086183	99,0861827	9,08618269
101	100	0,46202111	-0,0953432	-0,00004877542	0,99995123	99,9951226	9,99512258

Fogli di calcolo 2.3-4-5. Calcolo del valore attuale di un'opzione call in ipotesi di sottostante distribuito normalmente.

Calcolando la media dei vari C_T si ottiene il valore atteso dell'opzione al tempo 1. Tale valore è pari a 10,1461. Per ottenere il valore attuale dell'opzione, ovvero il suo prezzo equo è suffiente attualizzare questa quantità utilizzando il tasso di interesse privo di rischio r_f. Il valore ottenuto risluta pari a 10,121.

2.7 Tecniche di riduzione della varianza

È stato più volte evidenziato come, per migliorare la stima ottenuta, sia necessario aumentare il numero di valori generati. Questo è diretta conseguenza del Teorema del Limite centrale. Tuttavia tale esigenza ha dei costi significativi in termini di potenza richiesta dal software generatore di numeri. Per questo motivo sono state elaborate in letteratura delle tecniche che hanno il fine di ridurre l'errore di approssimazione senza aumentare il numero di campioni richiesti. Tali modalità si incentrano sulla riduzione della varianza degli stimatori. La varianza, infatti, rappresenta lo scostamento della distribuzione dal suo valor medio, riducendola aumenta la probabilità che il valor medio si verifichi. Tra le tecniche più utilizzate si ricordano[44]:

- Tecnica delle variabili antitetiche
- Tecnuca della variabile di controllo
- Tecnica del campionamento stratificato
- Tecnica di campionamento Latin Hypercube
- Tecnica del campionamento degenere
- Tecnica del matching tra momenti

2.7.1 Tecnica delle variabili antitetiche

Tale tecnica risulta particolarmente conveniente poiché non richiede di aumentare il numero di valori generati ma semplicemente che si considerino sia i valori originari che il loro opposto (ovvero è necessario cambiare il segno positivo in negativo e viceversa). Lo stimatore che si ottiene, quindi, è dato dalla combinazione di due stimatori diversi, uno proprio della distribuzione originaria e il secondo riferito alla distribuzione su cui è stata applicata la variazione di segno. È chiaro, però, che le due distribuzioni sono in qualche modo dipendenti. La seconda, infatti, viene ottenuta dalla prima e questo mina le fondamenta del metodo di simulazione Montecarlo, il cui presupposto è l'indipendenza delle estrazioni. Affinchè, con tale metodo di combinazione di stimatori sia possibile ridurre la varianza è necessario che i due stimatori siano negativamente correlati. All'aumentare del grado di correlazione (negativa) aumenta il grado di riduzione della varianza.

2.7.2 Tecnica della variabile di controllo

Il principio alla base di tale metodo è che se non si conoscono i parametri della distribuzione da stimare è possibile analizzare una variabile "simile" la cui distribuzione è conosciuta. Tale variabile si definisce variabile di controllo. Il suddetto metodo è molto utlizzato per la valutazione di strumenti finanziari che

[44] La trattazione segue il working paper *Metodi Montecarlo per la valutazione di opzioni finanziarie, R.Casarin, M.Gobbo,2012.*

dipendono da numerosi parametri, esempio tipico sono le opzioni esotiche. In questi casi, infatti, si può valutare uno strumento che presenta le stesse caratteristiche in termini di scadenza, rishiosità, duration, ma per cui è disponibile una formula di valutazione precisa. La simulazione Montecarlo viene poi utilizzata per stimare di quanto il valore dell'oggetto da valutare si discosta dalla variabile di controllo. Indichiamo con Z la variabile casuale di cui si vuole conoscere il valore atteso e con W la variabile di controllo, il cui valore atteso si suppone noto. L'applicazione di questa tecnica presuppone che il valore atteso di Z (ovvero il parametro che deve essere stimato) venga sostituito con la quantità:

$$Z - (W - E(W))$$

Utlizzando la simulazione Montecarlo descritta in precedenza è possibile calcolare uno stimatore di Z a partire dallo stimatore di *E(Z),* correggendolo attraverso una stima dell'errore ($\overline{W}$ - E(W)), che rappresenta la quantità di controllo.
Lo stimatore di Z così calcolato è indicato con $\bar{V}$. Analiticamente:

$$\bar{V} = \bar{Z} - (\overline{W} - \mathrm{E(W)})$$

È ovvio che, nella scelta della variabile di controllo debbano essere considerati due aspetti. In primo luogo la variabile selezionata deve avere una distribuzione nota e il suo valore deve essere calcolabile con certezza facendo ricorso a una formula che fornisce una soluzione in forma chiusa. In secondo luogo non deve essere perso di vista l'obiettvio principe, ovvero quello di riduzione della varianza. La variabile di controllo, indipendentemente dal suo legame con il parametro da stimare, deve essere in grado di ridurre il valore della varianza.

2.7.3 Tecnica del campionamento stratificato

La denominazione di questa tecnica deriva dal concetto di campionamento informatico. Una volta definito l'intervallo di variazione della variabile da stimare, lo stesso deve essere suddiviso in *n sottointervalli.* La ratio è quella di ottenere sottointervalli equiprobabili. Ciò significa che la probabilità che la variabile aleatoria cada in ogni sottointervallo deve essere uguale. Il funzionamento della simulazione Montecarlo deve essere ripetuto per ogni sottointervallo, devono essere cioè estratti *m* campioni per ciascun sottointervallo. In tal modo il numero totale di simulazioni (*N*):

$$N = nm$$

Numero simulazioni = numero sottointervalli x numero estrazioni a sottointervallo

Per migliorare l'efficienza di questo metodo, e quindi ottenere il minor valore possibile per la varianza, è necessario aumentare il numero di sottointervalli considerati. Si noti, inoltre, che il risultato migliora quando il numero di sottointervalli (*n)* coincide con il numero di simulazioni (*N*).

2.7.4 Tecnica di campionamento Latin Hypercube

Tale tecnica costituisce un'estensione di quella precedente al caso *d*-dimensionale. Le modalità di funzionamento sono analoghe: è necessario suddividere l'insieme di valori che la variabile casuale può assumere in sottointervalli, da ciascuno di essi vanno poi estratti dei campioni. Anche qui è evidente la vicinanza con le tecniche utilizzate nell'informatica. Definiti gli *n* sottoinsiemi e le *d* dimensioni, si generano n^d ipercubi. Si tratta quindi di un metodo molto più complesso rispetto a quello precedente a causa dell'elevato numero di ipercubi che devono essere computati.

2.7.5 Tecnica del campionamento degenere

La tecnica del campionamento degenere presenta delle analogie con i due metodi appena esposti, poiché permette che l'insieme di valori della variabile casuale da stimare siano espressi in maniera più efficiente. Tuttavia è conveniente paragonarla più alla tecnica informatica della quantizzazione che a quella di campionamento. Come nei casi precedenti, infatti, è necessario suddividere l'insieme di possibili valori della variabile casuale di riferimento in sottointervalli. Per ciascun sottointervallo, però, non vanno entratti dei campioni, ma va individuato un valore rappresentativo del sottoinsieme. È evidente, quindi, che il problema posto da questa tecnica sia quello di individuazione di un valore significativo per ciascun sottointervallo. Normalmente vengono valutati tutti i punti dell'intervallo in base alla loro densità. Il valore rappresentativo sarà quindi dato da una media ponderata di tutti i valori, con pesi pari alla densità di ciascuno. È comunque possibile utilizzare come valore rappresentativo l'estremo (superiore o inferiore) o la media aritmetica dei valori, ignorandone le densità.

2.7.5 Tecnica del matching tra momenti

La tecnica del matching tra momenti prevede, come quella delle variabili antitetiche, delle modifiche ai campioni raccolti per mezzo della simulazione. Un certo numero di osservazioni va infatti modificato in modo tale che coincida con i valori previsti per la variabile teorica (*matching*).

Capitolo 3

Simulazione Montecarlo e ValueAtRisk (VaR)

I moderni intermediari finanziari devono gestire i propri portafogli in modo tale da contrastare il rischio di mercato. Parte crescente dei loro attivi, infatti, è oggi costituita da strumenti finanziari destinati al *trading*. Questo genere di titoli è mantenuto in bilancio finquando non si trovano sul mercato condizioni favorevoli che permettono di generare profitti di *capital gain.* Date queste premesse, è evidente che gli intermediari finanziari debbano disporre di efficienti strumenti che permettano di monitorare giornalmente il livello di rischio delle proprie esposizioni. Andamenti avversi del mercato, infatti, possono generare delle perdite consistenti minando la stabilità dell'intermediario stesso. Quando ci si riferisce ad attività il cui scopo è il trading il rischio più significativo cui queste posizioni espongono è il rischio di mercato. Per rischio di mercato si intende il rischio che il valore di mercato di attività e passività cambi a seguito di mutamenti nei tassi di interesse, di cambio e altri prezzi[45]. Rischio di interesse e di cambio sono rischi tipici dell'attività di intermediazione ma questi assumono una rilevanza ancor più significativa quando si combinano per dal luogo al rischio di mercato. Inidipentemente dalla finalità per cui sono detenute, attività e passività dei bilanci degli intermediari sono esposte a vari rischi, tra cui quelli di interesse e cambio[46]. Quando, però, le attività fanno parte del trading book sono destinate ad essere cedute e acquistate molto frequentemente, spesso su orizzonti giornalieri, e ciò genera dei rischi addizionali collegati all'andamento del mercato di negoziazione. È quindi necessario distinguere, all'interno del bilancio di un intermediario, tra attività riferibili al trading book (Held for Trading) e quelle destinate all'investimento (Held to Maturity). I principali driver su cui si basa la distinzione sono l'orizzonte temporale di riferimento e il livello di liquidità. Nel trading book si individuano attività, passività e contratti derivati destinati ad essere facilmente e frequentemente negoziati su mercati regolamentati, e perciò detenuti per brevi periodi. Il banking book, invece, ovvero il portafoglio di investimento, contiene attività normalmente poco liquinde e destinate ad essere mantenute fino a scadenza. Data questa distinzione, è evidente che il rendimento

[45] *Economia degli intermediari finanziari, A.Saunders, M. Millon Cornett, M.Anolli, B.Alemanni, IV Edizione, McGraw Hill, 2015.*

[46] Per *rischio di interesse* si intende il rischio affrontato da un intermediario finanziario quando le scadenze di attività e passività sono disallineate tra loro e i tassi di interesse sono volatili. Il *rischio di cambio,* invece, è il rischio che varizioni nei tassi di cambio possano influenzare il valore di attività e passività denominate in valuta di un intermediario. *Economia degli intermediari finanziari, A.Saunders, M. Millon Cornett, M.Anolli, B.Alemanni, IV Edizione, McGraw Hill, 2015.*

delle attività contenute nel trading book possa essere molto volatile, in base all'andamento del mercato.
A partire dal secolo scorso si è assistito a un aumento della complessità delle attività svolte dagli intermediari e alla crescita dell'importanza assunta dalle attività di trading rispetto a quelle di investimento. Tale dato è evidente se si considerano i bilanci bancari in cui le voci relative alle attività detenute per la vendita e ai contratti derivati risultano preponderanti rispetto a quelle detenute per finalità di investimento.
Gli intermediari finanziari in generale, e le banche in particolare, hanno manifestato la necessità di ricorrere a strumenti avanzati in grado di valutare il grado di rischio di mercato che le proprie esposizioni comportano e soprattutto le perdite cui si può incorrere in caso di deterioramento delle condizioni di mercato. I metodi fino ad allora disponibili, infatti, come la Duration, permettevano una stima della sensibilità dei singoli strumenti al rischio di interesse, senza consentire di valutare il livello complessivo di esposizione al rischio di un portafoglio. Per questi motivi, negli anni Ottanta del secolo scorso, è stata implementata dalla società americana J.P. Morgan la metodologia del VaR (ValueAtRisk).

3.1 Componenti principali

L'obiettivo del VaR è quello di fornire un indicatore sintetico del livello di rischio connesso ad un portafoglio di attività o passività. Al fine di definire in modo preciso un indicatore di rischio e le caratteristiche che deve possedere per essere tale, è necessario definire il concetto di rischio finanziario, prescindendo dallo specifico tipo (rischio di interesse, di liquidità, di cambio, di credito, sovrano, ecc..). Per rischio finanziario si intende la possibilità che il valore di un'attività o passività, durante l'orizzonte di investimento o finanziamento, possa subire una modifica di valore rispetto a quello stimato *ex ante*. Un parametro ρ, al fine di essere utilizzato come indicatore di rischio deve soddisfare alcune condizioni[47]:

- Il rischio connesso ad un portafoglio privo di asset è nullo; ρ(0)=0.
- Se, dati due portafogli P_1e P_2, P_2 ha in ogni possibile scenario valore maggiore di P_1 allora il rischio complessivo del portafoglio P_2 deve essere inferiore a quello del portafoglio P_1. Se $P_{2;i} > P_{1;i}$ ∀ *i,* allora $\rho(P_1) > \rho(P_2)$.
- Un indicatore di rischio deve godere della proprietà della sub-additività. Ciò vuol dire che, dati due portafogli P_1e P_2 e i rispettivi parametri di rischio $\rho(P_1)$ e $\rho(P_2)$, il portafoglio somma, costituito dai titoli di entrambi i portafogli $P^* = P_1 + P_2$, ha un livello di rischio al massimo pari alla somma degli indicatori di rischio dei due portafogli considerati speratamente: $\rho(P_1 + P_2) \leq \rho(P_1) + \rho(P_2)$.
- L'indicatore di rischio deve essere una funzione omogenea di grado 1, per cui ∀ α > 0; $\rho(\alpha P) = \alpha\, \rho(P)$.

[47] *Coherent measures of risk, P.Artzner, F.Delbaen, J.Eber, D.Heath, 1998*

- Dati due portafogli, P a rendimento esposto al rischio e B a rendimento garantito pari a β, costruendo un portafoglio pari alla somma di P e B, il rischio complessivo del nuovo portafoglio è pari alla differenza tra il parametro di rischio di P e il rendimento garantito β. $\rho(P+B) = \rho(P) - \beta$.

I sei principali tipi di rischio finanziario indivuati dalla letteratura e dalla regolamentazione sono:

1. Rischio *delta,* la sensitività del prezzo di un derivato al mutamento del prezzo del sottostante;
2. Rischio *gamma,* la sensibilità del *delta* rispetto al prezzo del sottostante, ovvero la derivata seconda del prezzo del derivato rispetto a quello del sottostante;
3. Rischio *vega* (o rischio volatilità), la sensibilità del prezzo di un derivato rispetto a variazioni della volatilità del prezzo del sottostante;
4. Rischio *theta* (o time decay risk), la sensibilità del prezzo di un titolo al tempo;
5. Rischio di correlazione (o base risk), connesso all'attività di copertura. Deriva dalla possibilità che i valori dell'attività di copertura e di quella oggetto di copertura possano non coincidere;
6. Rischio *rho* (o discount rate risk), sensibilità del prezzo di un derivato alla variazione del tasso di interesse privo di rischio, utilizzato per scontare il valore futuro[48].

Nello specifico, il VaR indica il livello di massima perdita potenziale connesso alle posizioni aperte presenti nel bilancio dell'intermediario che effettua la valutazione. Il VaR può essere definito come una misura probabilistica basata sull'orizzonte temporale e su un particolare livello di confidenza che restituisce l'ammontare di capitale investito rimanente nel caso del verificarsi di un evento negativo possibile[49]. Indicando con V_0 il valore del capitale investito e con $V_{a,t}$ il valore del capitale nel caso in cui si verifichi la perdita massima il VaR risulta pari a:

$$V_0 - V_{a,t}$$

Data la definizione di VaR, due parametri appaiono immediatamente come molto rilevanti: l'orizzonte temporale e l'intervallo di confidenza. Tali parametri, infatti, dipendono dalle scelte del soggetto che effettua la valutazione e, al loro variare, cambia anche il corrispondente livello di VaR.
Come notato in precedenza, a causa della crescente rilevanza sistemica assunta dagli intermediari finanziari, e in particolare dalle banche, le autorità di viglanza hanno imposto delle metodologie standardizzate per il calcolo del VaR in modo tale da preservare la stabilità delle istituzioni finanziarie. Dopo la crisi del 2007, infatti, è risultato evidente lo stretto legame esistente tra il settore finanziario e quello dell'economia reale. Poiché il VaR rappresenta la metodologia principe per il calcolo della massima perdita potenziale, è stato oggetto di attenzione da parte

---
48 *www.borsaitaliana.it*
49 *www.borsaitaliana.it*

delle autorità di viglianza per via della sua incidenza nella valutazione dei requisiti minimi di capitale previsti per gli intermediari finanziari. Si ritiene, infatti, che il capitale sia il migliore strumento per la copertura delle perdite connesse all'attività di gestione.
Per quanto riguarda il livello di confidenza, questo viene normalmente stabilito dall'autorità di viglianza. Nel caso italiano, sono stati recepiti gli accordi di Basilea III[50], relativi all'attività bancaria, che prevedono un livello di confidenza del 99%. Le banche più evolute, che dispongono di strumenti interni di valutazione ritenuti idonei dall'autorità di vigilanza, possono scegliere un percentile diverso. Il livello di confidenza prescelto è sempre compreso tra il 95% e il 99%, al suo aumentare aumenta il grado di avversione al rischio della banca, poiché aumenta la perdita massima potenziale e quindi il capitale da accantonare necessario a coprirla. È per questo consentito alle banche di utilizzare un livello di confidenza più elevato rispetto a quello imposto dalla normativa. Oltre al rischio di mercato, che è quello rilevante in questa sede, lo strumento del VaR è utilizzato anche per la stima della perdita potenziale connessa al rischio di credito e operativo. In questi ultimi casi l'intervallo di confidenza imposto dalla regolamentazione è pari al 99,93%.
Per quanto riguarda, invece, l'orizzonte temporale sui cui viene calcolato il VaR, gli accordi di Basilea impongono, relativamente al rischio di mercato, un orizzonte di 10 giorni. È bene, però, notare che l'orizzonte da considerare dipende dalle esposizioni contenute nel portafoglio. È necassario valutare la perdita massima nel periodo in cui può ragionevolmente manifestarsi in virtù della qualità e caratteristiche degli strumenti contenuti in portafoglio. Per questo motivo la regolamentazione permette deroghe, che vanno, però, opportunamente motivate. Per il rischio di credito e operativo l'orizzonte prescritto è, invece, pari ad un anno.

3.2 VaR: significato economico

Il calcolo del VaR consente di mettere in correlazione l'entità di perdite e profitti con la loro frequenza. Calcolare il VaR vuol dire quindi computare la distribuzione di probabilità per i profitti e le perdite potenziali connesse al portafoglio oggetto di analisi. Per descrivere il concetto di VaR è possibile analizzarne il grafico. Sull'asse delle ascisse si pone il valore di profitti e perdite, ordinate in modo crescente. Sull'asse verticale, invece, si pone la frequenza connessa a profitti e perdite. La curva osservabile rappresenta la relazione tra il

[50] Il Comitato di Basilea fu istituito nel 1974 dalle Banche Centrali dei dieci paesi più industrializzati del Mondo. La finalità perseguita è quella di raggiungere la stabilità del settore bancario a livello globale, emettendo delle linee guida che armonizzino l'attività di regolamentazione del settore bancario. È comunque importante sottolineare che la disciplina bancaria consacrata dal Comitato di Basilea non è in alcun modo vincolante ed è rimessa alla volontà degli Stati l'eventuale ratifica delle prescrizioni emesse dal Comitato. Non è prevista alcuna sanzione formale in caso di mancata ratifica.

valore di ciascun profitto/perdita e la sua frequenza. L'area sottesa dalla curva rappresenta la probabilità. Normalmente la relazione tra profitti/perdite e frequenze è paragonabile a quella descritta nel grafico 3.1. Agli estremi della distribuzione, infatti, si trovano profitti e perdite di grande entità ma con frequenza piuttosto bassa. I valori intermedi, invece, rappresentano valori contenuti di profitti o perdite, ma con elevata frequenza. Scelto un ammontare di profitto, è possibile calcolare la probabilità che questo sia minore o maggiore di tale valore semplicemente calcolando l'area sottesa dalla curva a destra (maggiore) o sinistra (minore) del punto in esame. Il grafico rappresenta perdite e profitti calcolati dato l'orizzonte temporale di riferimento. Per il calcolo del VaR, come evidenziato in precedenza, è necessario scegliere anche il livello di confidenza. Calcolare il VaR dato un certo livello di confidenza, 99% nel caso in cui si rispetti la prescrizione regolamentare, vuol dire trovare quel valore tale per cui l'area sottesa dalla curva a destra del punto è esattamente pari al 99%. Ciò implica che, nel 99% dei casi, la perdita sarà al massimo pari al valore individuato. Nell'1%, invece, la perdita potrà superare tale ammontare. Dati questi presupposti, è evidente quanto la scelta del livello di confidenza sia rilevante al fine di calcolare la perdita massima connessa al portafoglio di valutazione. Al diminuire del percentile prescelto, infatti, diminuisce la perdita massima, ma diminuisce necessariamente anche la probabilità che si verifichi[51]. È proprio per questo motivo che le autorità di viglianza impongono agli intermediari finanziari l'adozione di livelli di confidenza piuttosto prudenti.

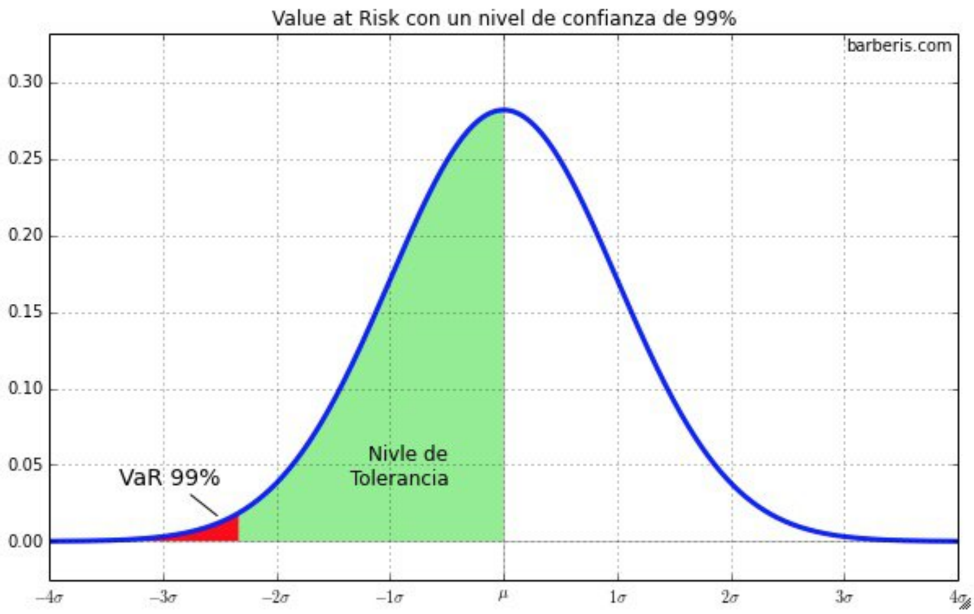


Grafico 3.1. Esplicazione grafica del concetto di VaR[52].

[51] Aumenta invece la probabilità che si verifichi una perdita maggiore al valore calcolato.
[52] Il grafico è tratto da *www.barberis.com*

3.3 Modalità di calcolo

Nella letteratura e nella regolamentazione si fa normalmente riferimento a tre modalità alternative di calcolo del VaR. Tali modalità si fondano su presupposti e assunzioni nettamente differenziati, perciò i risultati ottenuti con l'applicazione dell'una o dell'altra tecnica possono sensibilmente discostarsi. In ogni caso, indipendentemente dalla soluzione operativa scelta per il calcolo, il VaR presenta sempre l'evidente vantaggio di essere in grado di valutare il rischio di mercato complessivo del portafoglio prendendo in esame tutti gli specifici fattori di rischio.
Le tre modalità di calcolo del VaR sono:

1. Metodo analitico
2. Metodo storico
3. Simulazione Montecarlo

3.3.1 Il metodo analitico[53]

Alla base di questo metodo vi è l'assunzione che i rendimenti del portafoglio seguano una particolare distribuzione statistica di cui si conoscono i parametri. In questo modo è possibile calcolare la perdita massima associata all'intervallo di confidenza prescelto.
Il metodo analitico è stato per lungo tempo quello più utilizzato dagli intermediari per la stima del VaR a causa della semplicità connessa al suo calcolo. Tuttavia tale tecnica si basa su ipotesi restrittive e spesso non verosimili, che portano a una sottostima della massima perdita potenziale. Nonostante ciò, questo strumento è ancor oggi molto sviluppato, grazie soprattutto all'implementazione da parte di J.P. Morgan della banca dati RiskMetrics, strumento irrinunciabile per molti intermediari finanziari per il calcolo del VaR.
I modelli analitici si basano sull'analisi distinta e puntuale di tutti gli elementi costitutivi del portafoglio, in particolare della loro volatilità, al fine di ottenere un indicatore sintetico. L'analisi di portafoglio può essere realizzata seguendo due approcci altermativi:

- Metodi asset-normal, in cui si valutano singolarmente le posizioni contenute nel portafoglio;
- Metodi delta-normal, in cui si valutano i fattori di rischio[54] del portafoglio.

L'ipotesi più restrittiva alla base di entrambi gli approcci è che la distribuzione dei rendimenti degli asset del portafoglio (nel primo caso) e dei fattori di rischio (nel secondo) sia normale. Tale assunzione permette certamente delle semplificazioni nel calcolo, ma spesso può risultare irrealistica. Diretta conseguenza dell'ipotesi

53 Anche noto in letteratura come metodo parametrico o varianza-covarianza.
54 In questa sede per fattori di rischio si intende tutti i parametri di mercato o altri strumenti finanziari la cui variazione di valore influenza il valore del titolo o portafoglio di cui si vuole stimare il VaR.

di normalità è, infatti, la possibilità di calcolare i parametri della distribuzione dei rendimenti del portafoglio sulla base dei paramentri dei rendimenti degli asset o dei fattori di rischio di mercato. Per la proprietà riproduttiva della variabile casuale normale, infatti, cominazioni lineari di variabili casuali normali indipendenti generano variabili casuali la cui distribuzione è ancora normale. Tale assunzione risulta fortemente restrittiva perché si respinge la possibilità che i rendimenti di titoli diversi o i fattori di rischio possano essere distribuite diversamente rispetto al caso normale[55].
Nel caso limite di un portafoglio costituito da un solo strumento finanziario, secondo il modello asset-normal, il VaR risulta pari a:

$$VaR=\alpha \ VM \ \sigma$$ [56]

VM rappresenta il valore di mercato al momento della valutazione dell'unico strumento costitutivo del portafoglio. Tale valore è direttamente osservabile nel caso in cui lo strumento sia negoziato sui mercati regolamentati. In caso contrario dovrà essere stimato sulla base delle quotazioni di strumenti analoghi sui mercati regolamentati, in modo tale da ottenere un prezzo di negoziazione verosimile.
"α" rappresenta, invece, il livello di confidenza e, come notato in precedenza, è stabilito sulla base delle indicazioni dell'autorità di regolamentazione e del grado di avversione al rischio dell'intermediario che effettua la valutazione.
"σ" rappresenta lo scarto quadratico medio (o deviazione standard) della distribuzione dei rendimenti del titolo. È quindi un indicatore della variabilità dei rendimenti, come la varianza. Il vantaggio del suo utilizzo deriva dal fatto che è espresso nella stessa unità di misura dei valori oggetto di esame. La deviazione standard assume quindi il ruolo di indicatore del grado di incertezza connesso alla distribuzione dei rendimenti.
Essendo un prodotto, è evidente che il VaR aumenti all'aumentare di ciascuno di questi tre fattori, nello specifico:

- VM; all'aumentare del valore di mercato dello strumento aumenta necessariamente la perdita massima cui si può incorrere, essendo questa espressa come percentuale del valore totale.
- "α"; all'aumentare del livello di confidenza aumenta la prudenza della stima, e di conseguenza aumenta l'entità della massima perdita possibile.
- "σ"; all'aumentare della variabilità dei rendimenti aumenta la massima perdita possibile. Per ipotesi, infatti, la curva dei rendimenti è distribuita normalmente. Ciò implica che all'aumentare della variabilità la curva si appiattisca e quindi le code sono caratterizzate da valori più elevati.

Come appare evidente dalla descrizione, il metodo asset-normal non presenta difficoltà di carattere operativo, tuttavia, quando si passa dall'analisi della singola

---

[55] Queste limitazioni possono essere superate facendo risorso ai metodi storici o simulativi, che verranno discussi nei prossimi paragrafi.

[56] *Modelli parametrici di stima del rischio di mercato, A.DiClemente, Università degli studi di Roma La Sapienza.*

posizione a quella complessiva di portafoglio, è più frequente l'applicazione del metodo delta-normal.
Il modello delta-normal si basa sull'ipotesi che la distribuzione dei fattori di rischio che influenzano la posizione (o il portafoglio) sia normale. Il VaR relativo a una singola posizione, stimato con il metodo delta-normal, sarà pari a:

$$VAR = \alpha \; VM \; \sigma \; \delta$$ [57]

Come visto in precendenza α rappresenta il livello di confidenza prescelto e VM il valore di mercato al momento della valutazione dello strumento di cui si calcola il VaR.
"δ" rappresenta un indice di sensibilità del valore di mercato dello strumento al fattore di rischio in esame, è quindi la derivata prima del valore rispetto all'elemento rischioso.
"σ" è un indice di volatilità del fattore di rischio; analticamente coincide con il σ visto nel modello asset-normal (la deviazione standard della distribuzione dei rendimenti dello strumento). In questo caso, però, σ è la deviazione standard della distribuzione dei fattori di rischio.

La formula appena descritta introduce un solo elemento innovativo rispetto a quella asset-normal, ovvero l'indice di sensitività δ. Tuttavia è bene notare che la versione proposta rappresenta un caso semplificato del modello delta-normal. Si è, infatti, implicitamente ipotizzato che il fattore di rischio da cui il valore della posizione dipende sia solo uno. All'aumentare degli elementi rischiosi è necessario considerare singolarmente il loro σ (variazione starndad) e l'incidenza che la loro variazione ha sul valore di mercato della posizione. Per la maggior parte degli strumenti finanziari è verosimile supporre l'esistenza di una molteplicità di fattori di rischio. Di conseguenza il modello univariato si basa su assunzioni inverosimili.

Quando si passa dall'analisi di una singola posizione a quella di portafoglio sono necessarie delle complicazioni analitiche derivanti dalla valutazione della correlazione esistente tra i diversi fattori di rischio. È bene notare che, a seconda del portafoglio analizzato e degli strumenti che lo costituiscono, varieranno i fattori di rischio considerati[58].
Per calcolare il VaR di un portafoglio si supponga che questo sia costituito da *n* strumenti con un relativo valore di mercato VM che, per esigenze di semplicità, si considera dato. Tali strumenti sono esposti a delle fluttuazioni di valore poiché

---

[57] *Il value at risk per la gestione del rischio di mercato: metodi di calcolo e procedure di backtesting, S.Furlan, Università degli studi di Padova, 2004.*
[58] A titolo esemplificativo, si può notare che per titoli azionari si può considerare come fattore di rischio l'indice azionario di riferimento. Per i titoli di Stato, invece, si possono considerare i tassi di interesse ufficiali (LIBOR, EURIBOR) e altri fattori come il livello del debito pubblico.

influenzati da *m* fattori di rischio denominati con q. Riassumendo i dati fin ora disponibili, si ha che:

- VM_i con i=1,2,…,n
- q_j con j=1,2,…,m

Sarà poi necessario calcolare, come in precedenza, la deviazione standard di ciascun fattore di mercato σ e la sensitività di ciascuno strumento a ciascun fattore di mercato (δ). In aggiunta ai modelli precedenti, poi, è necessario calcolare il coefficiente di correlazione tra i fattori di rischio, valutati a coppie (ρ_{ij}). Il VaR di portafoglio, calcolato secondo l'approccio delta-normal,nel caso semplificato in cui i fattori di mercato siano solo due risulta essere pari a:

$$\mathrm{VaR}= \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{VM}_i\, \delta_i \sigma_i\,)(\,\mathrm{VM}_j \delta_j \sigma_j)\, \rho_{ij}}$$

All'aumentare dei fattori di rischio e strumenti finanziari considerati la soluzione analitica applicando la formula appena descritta risulta piuttosto complicata, per tale motivo spesso si fa ricorso a matrici e vettori. Prioritariamente è necessario calcolare il VaR di ciascuna posizione. Dalla combinazione di tali valori si ottiene il vettore $\bar{V}$:

$$\bar{V} = \begin{matrix} \mathrm{VaR}_1 \\ \dots \\ \mathrm{VaR}_n \end{matrix}$$

Successivamente è necessario stimare i coefficienti di correlazione tra i vari fattori di mercato, la relativa matrice è:

$$\mathrm{R}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \cdots & \rho_{2,n} \\ \rho_{n,1} & \cdots & \rho_{n,n} \end{bmatrix}$$

Il VaR di portafoglio può quindi essere calcolato come[59]:

$$\mathrm{VaR}= \sqrt{\bar{V} R} \bar{V}^T$$

L'approccio analitico parametrico presenta il chiaro vantaggio della semplicità di calcolo. Per questo motivo è stato per lungo tempo lo strumento principe per il calcolo del VaR presso le istituzioni finanziarie. È tuttavia doverso sottolinearne i limiti, che derivano in modo significativo dalle restrittive assunzioni di fondo, con

59 *Il value at risk per la gestione del rischio di mercato: metodi di calcolo e procedure di backtesting, S.Furlan, Università degli studi di Padova, 2004.*

il fine di introdurre i modelli storici e simulativi. Tali modelli sono certamente più complessi e richiedono delle infrastrutture software notevoli agli intermediari che le adottano, ma consentono di risolvere i problemi insiti nell'approccio analitico. Come è stato più volte sottolineato, il limite principale dell'approccio analitico, sia per quanto riguarda il modello asset-normal che delta-normal, è l'ipotesi di normalità dei rendimenti degli strumenti di portafoglio o dei fattori di rischio. Tale assunzione, infatti, risulta inverosimile nella maggior parte dei contesti e porta ad una sottostima significativa della perdita massima potenziale, con serie conseguenze in termini di stabilità per l'intermediario. L'ipotesi di normalità porta necessariamente ad ignorare due fenomeni : il *fat tail* e la *negative skewness.* Le distribuzioni dei rendimenti degli strumenti finanziari presentano spesso un *fat tail*, ovvero code più significative di quanto presentino le distribuzioni normali. Ciò implica che la probabilità che un valore si discosti dalla media aumenta, da cui deriva un incremento di parametri quali volatilità e deviazione standard. Il modello analitico è stato oggetto di critiche soprattutto a causa dell'impossibilità di prendere in considerazione tale fenomeno, con la conseguente sottostima della massima perdita potenziale. Per ovviare a tale problematica sono stati proposti modelli analitici modificati[60], che tuttavia non sono stati in grado di proporre alternative valide. Altro fenomeno di interesse è quello della *negative skewness.* Tale concetto implica che la distribuzione (dei rendimenti delle attività o dei fattori di rischio) non sia simmetrica, ma presenti una coda a sinistra, provocando un'asimmetria negativa. Anche in questo caso, la probabilità che si verifichino valori significativamente inferiori rispetto alla media aumenta. Ciò implica che l'ipotesi di normalità porti ad una sottostima del VaR effettivo. Ulteriore critica mossa dalla letteratura al modello analitico riguarda un particolare fattore di rischio in grado di influenzare soprattutto i Titoli di Stato, i tassi di interesse del mercato monetario, in particolare il segmento interbancario. Tali tassi sono uno strumento fondamentale della politica monetaria delle Banche Centrali (BC). Le BC, infatti, sono in grado di incidere in maniera diretta sui tassi del mercato interbancario attraverso le operazioni di mercato aperto. La distribuzione di questi tassi, quindi, tende a non essere normale, poiché interventi inattesi della BC possono modificare sensibilmente la distribuzione. Ultimo elemento oggetto di critica è l'ipotesi di dipendenza lineare tra i fattori di rischio e il valore degli strumenti. Tale ipotesi risulta fortemente irrealistica poiché è difficile che fra uno strumento e un fattore di rischio esista una relazione di tipo preciso e totalmente prevedibile come quella lineare. Nel caso dei titoli azionari, ad esempio, la relazione tra il valore del titolo e le condizioni dell'emittente (o il valore dell'indice azionario di riferimento) non è di tipo lineare. Parimenti la relazione esistente tra valore di un'obbligazione e tassi di rendimento (atteso o effettivo) non è lineare. L'assunzione di linearità è accettabile solamente nel caso di variazioni infinitesime dei fattori di rischio. All'aumentare dei fattori di rischio considerati, inoltre, la complessità del modello aumenta sensibilmente soprattutto a causa dell'esigenza di calcolare i numerosi coefficienti di correlazione. I costi in

[60] Un esempio sono i modelli che utilizzano l'ipotesi di distribuzione *t-Student.*

termini di perdita di precisione della stima non sono, quindi, più compensati dal beneficio della semplicità nella computazione.

Al di là di questi limiti, comunque, è bene notare che i maggiori intermediari finanziari, possiedono portafogli molto diversificati e con un elevato numero di titoli. Data questa condizione, l'applicazione del modello è conveniente, poiché è verosimile ipotizzare che la distribuzione dei fattori di rischio complessivi del portafoglio sia normale.

3.3.2 Il metodo storico

I modelli storici rientrano in una più ampia categoria di modelli per i calcolo del VaR, quelli simulativi[61]. I metodi simulativi includono i modelli storici e quelli condotti con il ricorso alla simulazione Montecarlo. Tali tecniche risolvono le problematiche insite nel modello analitico, poiché per il calcolo del VaR non è necessario formulare alcuna assunzione relativamente alla distribuzioni dei rendimenti degli strumenti di portafoglio o fattori di rischio. I modelli simulativi comportano degli algoritmi di calcolo più complessi, ma sono in grado di fornire stime più accurate. Alla base di tali modelli vi è la generazione di numerosi possibili valori dei vari fattori di rischio al momento della valutazione. La differenza tra simulazioni storiche e di tipo Mentecarlo sta nel fatto che, nel caso delle simulazioni storiche, i possibili valori vengolo generati sulla base dell'andamento storico dei fattori di rischio, osservati su un orizzonte che di solito è superiore all'anno, ma comunque a discrezione del soggetto che effettua la valutazione. Nell'approoccio Montecarlo, invece, i valori generati sono pseudo-casuali, poiché conoscendo o approssimando la distribuzione di ogni fattore di rischio, si generano, per mezzo di software di calcolo, dei valori tali per cui i paramentri della distribuzione siano quelli imposti. I modelli simulativi, quindi, si basano sull'assunzione che siano molti i possibili scenari alla data di valutazione. Sia i modelli storici che quelli basati sul metodo Montecarlo presentano tre caratteristiche comuni[62]:

- Full valuation; tale concetto implica che, una volta generati *n* possibili valori per i vari fattori di rischio, il valore complessivo del portafoglio venga puntualmente calcolato per ogni possibile scenario. Questa procedura implica che sia nota la relazione esistente tra il singolo fattore di rischio e il singolo titolo, e che siano quindi disponibili dei modelli atti a rappresentare queste relazioni. La caratteristica della full valuation segna un tratto distintivo dei metodi simulativi rispetto a quelli analitici. Nei modelli parametrici, infatti, non viene calcolato il valore del portafoglio in corrispondenza dei mutamenti dei fattori di rischio, ma semplicemente si valuta, attraverso dei coefficienti, l'impatto di tali variazioni sul valore complessivo del portafoglio. Non è invece previsto un ricalcolo puntuale del valore di tutte le posizioni in corrispondenza di ogni possibile scenario. Nei modelli simulativi a ciasun possibile scenario per i fattori di rischio corrisponde

[61] I modelli simulativi sono noti anche come modelli non parametrici.
[62] *Rischio e valore nelle banche, A.Resti, A.Sironi, Egea, 2008.*

un diverso valore del portafoglio. Per ogni scenario si calcola il profitto o la perdita del portafoglio. Ordinando in modo crescente i profitti e le perdite si ottiene la distribuzione di probabilità di Profit&Loss sulla base della quale si calcola il VaR.

- Principio del percentile; una volta effettuato l'ordinamento dei Profit&Loss si ottiene una distribuzione che non necessariamente ha caratteri normali ed è possibile stabilire l'ammontare preciso di perdita massima una volta scelto il percentile[63]. È importante notare che, una volta calcolato il valore del portafoglio per ogni possibile scenario del fattore di rischio, la conoscenza del valore assunto dal fattore di rischio diventa irrilevante. Ciò che importa agli organi di risk management è la conoscenza del corrispondente valore del portafoglio.
- Maggiore flessibilità (rispetto ai modelli analitici); i modelli simulativi sono considerati più flessibili rispetto a quelli analitici poiché non impongono alcun tipo di distribuzione dei fattori di rischio. Questo permette la soluzione dei problemi sopradescritti quali fat tail e skewness, poiché la distribuzione che si ottiene è quella che verosimilmente verrà assunta dai fattori di rischio. La stima della perdita massima è quindi più attendibile e precisa.
Quanto appena esposto vale in particolare per le simulazioni di tipo storico. Nell'approccio Montecarlo, infatti, per generare i possibili valori assunti dal fattore di rischio è necessario imporre una particolare forma della distribuzione. Si introduce quindi un ulteriore elemento di errore, che deriva dalla stima empirica della distribuzione dei fattori di rischio. Per ovviare a queste problematiche, normalmente gli intermediari più evoluti effettuano degli stress test (talvolta imposti dalla regolamentazione) per verificare la reazione del patrimonio dell'intermediario a scenari particolarmente avversi. In tal modo si pone rimedio al rischio di sottostima della perdita massima.[64]

L'ipotesi alla base del metodo storico è che la distribuzione dei fattori di rischio sia costante nel tempo e che quindi l'analisi storica consenta di prevedere puntualmente i movimenti futuri dei fattori di rischio. Tale assunzione è verosimile nella maggior parte dei contesti, ma non si adatta a situazioni eccezionali, come ad esempio la recene crisi, in cui i fattori di rischio assumono andamenti non riflessi dalle serie storiche. A titolo di esempio si consideri un portafoglio semplificato costituito da sole obbligazioni. La maggior parte dei titoli rischiosi hanno un tasso di rendimento che dipende, indirettamente, dal rendimento dei titoli risk-free, ovvero i Titoli di Stato. Le curve dei tassi di rendimento dei Titoli di Stato tendono ad essere relativamente stabili nel tempo, e quindi le serie storiche sono, in linea generale, uno strumento attendibile per la previsione dell'evoluzione futura. Tuttavia la crisi finanziaria iniziata nel 2007 è stata, soprattutto in Europa, anche una crisi dei debiti sovrani. L'elevato grado di indebitamento di Stati quali Italia, Grecia, Cipro e Portogallo ha portato ad un aumento dei tassi richiesti dagli investitori, a fronte di Titoli che venivano

---

[63] Come sottolineato in apertura del capitolo, il percentile è di solito compreso tra 95% e 99%. Normalmente esso è imposto dalle Autorità di vigilanza.

[64] Per una trattazione dettagliata si rimanda al paragrafo sulla simulazione Montecarlo.

percepiti come più rischiosi rispetto agli altri Titoli di Stato. Questo mutamento di tendenza ha portato a degli errori nelle stime della maggior parte degli intermediari finanziari. Tale dato, aggiunto agli ulteriori fattori di instabilità insiti nel sistema bancario, ha portato a forti esigenze di ricapitalizzazione. Si riporta il grafico dei rendimenti dei BTP italiani decennali, uno dei titoli di Stato più diffusi. È evidente l'andamento crescente delle quotazioni a partire dal 2006-2007. Si noti, inoltre, che, a partire dal 2011-2012, periodo di inasprimento della crisi dei debiti sovrani, i rendimenti abbiano raggiunto dei picchi senza precedenti.

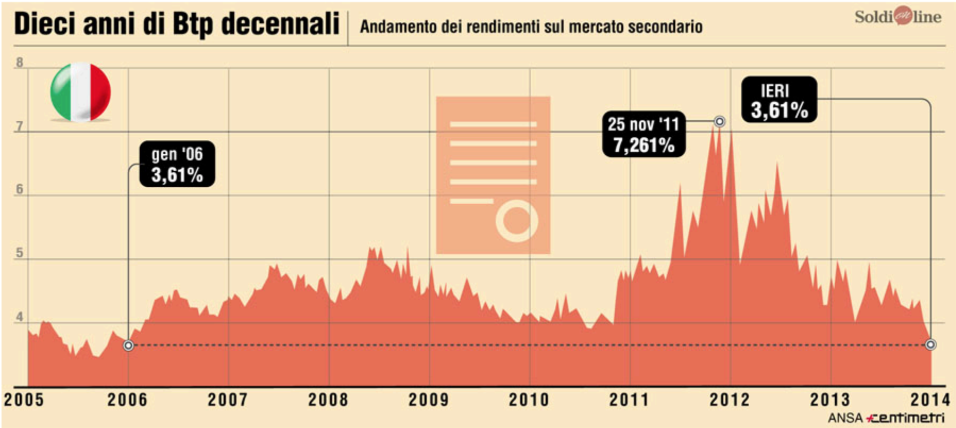


Grafico 3.2. Rendimento BTP decennali sul mercato secondario 2005-2014. Fonte:www.soldionline.it

L'analisi più rilevante nel contesto del modello storico è l'individuazione dei fattori di rischio che influenzano il portafoglio. Una volta individuati, è necessario analizzare la loro evoluzione nel passato. Normalmente l'andamento dei rendimenti dei fattori di mercato viene valutato su base giornaliera per periodi che raramente eccedono l'anno. In ogni caso il periodo di valutazione varia a seconda del tipo di fattore. Per i fattori più volatili è necessaria un'analisi più approfondita. Definito l'andamento storico di tutti i fattori di rischio che influenzano il portafoglio, il valore complessivo del portafoglio viene puntualmente ricalcolato per ogni possibile scenario. È evidente che i portafogli più diversificati presenteranno un valore grossomodo costante, indipendentemente dallo scenario e quindi dal valore assunto dai fattori di rischio. Un portafoglio si definisce diversificato quando è costituito da attività negativamente correlate. Questa caratterisica del portafoglio è garanzia di stabilità perché implica che le attività costitutive del portafoglio stesso siano sensibili in maniera opposta ai medesimi fattori di rischio. La riduzione del valore di un'attività dovuta al mutamento di uno dei fattori di rischio è più che compensata dall'aumento del valore di un'altra attività derivante dalla medesima causa. Gli intermediari di più grandi dimensioni sono normalmente in grado di diversificare i portafogli in maniera più efficiente, grazie soprattutto alla numerosità dei mercati cui possono accedere. La capacità di diversificazione è un grande beneficio per gli intermediari creditizi e investitori, poiché riduce il grado di volatilità di attivi e passivi, contribuendo sensibilmente alla stabilità della situazione patrimoniale e finanziaria.

Una volta rivalutato il portafoglio alla luce di ogni valore assunto dai fattori di rischio, non è più rilevante quale valore dei fattori abbia portato a ciascuna capitalizzazione del portafoglio. Le unità di risk management, infatti, devono focalizzarsi esclusivamente sui valori assunti dal portafoglio. Tali valori devono essere ordinti partendo dalla perdita più elevata per arrivare al massimo profitto. In base ai dati ottenuti con la stima empirica per ogni scenario (in termini statistici, per ogni modalità di manifestazione del carattere) si calcola la frequenza attesa. Mettendo in relazione frequenze e modalità si ottiene la distribuzione di probabilità dei payoff di portafoglio. Una volta ottenuta la distribuzione questa va "tagliata" in corrispondenza del percentile prescelto. Il valore che si ottiene è la massima perdita.

Il calcolo del VaR attraverso la simulazione storica si presenta come speculare rispetto al metodo analitico. Come descritto nel paragrafo precedente, infatti, il metodo analitico è caratterizzato da calcoli piuttosto semplici cui però seguono interpretazioni complesse, che richiedono che i soggetti incaricati dell'analisi del rischio possiedano specifici requisiti in termini finanziari e matematici. La simulazione storica, invece, è facilmente comprensibile in termini interpretativi, ma richiede delle procedure complesse, derivanti dalla rivalutazione del portafoglio per ogni scenario di rischio. La scelta tra le metodologie, quindi, deriva dalle circostanze in cui l'intermediario opera, non essendo possibile eleggerne una come superiore rispetto all'altra in termini assoluti. I vantaggi e svantaggi connessi a ciascuna tecnica devono sempre essere valutati in termini relativi. È, in questa direzione, fondamentale sottolineare le differenti ipotesi alla base di entrambi i modelli. Il modello analitico si basa sull'ipotesi di normalità della distribuzione dei rendimenti degli strumenti/fattori di rischio. È stato più volte sottolineato quanto questa ipotesi possa essere restrittiva e possa portare gli intermediari ad optare per un'altra tecnica. Il rischio più significativo, infatti, è quello di sottostima della massima perdita. Non va dimenticato, però, che anche la simulazione storica si basa su una particolare ipotesi circa la distribuzione dei rendimenti, ipotesi che può essere in determinati contesti, al pari del modello analitico, incompatibile con il dominio di riferimento. Per applicare la simulazione storica è necessario imporre che la distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato coincida con quella storicamente osservabile. È chiaro che questo implichi l'impossibilità di adozione della suddetta tecnica nel caso in cui i fattori di mercato seguano un andamento indipendente da quello storico.
A minare la possibilità di applicazione di tale metodo vi è poi la scarsità di dati storici disponibili per alcuni fattori di rischio. In assenza di dati attendibili e puntuali, la simulazione storica non può essere applicata poiché non è possibile generare un valore attendibile per ogni scenario. Per correggere i problemi insiti nella simulazione storica è possibile adottare il Metodo Montecarlo.

3.4 Misurazione del VaR con il Metodo Montecarlo

La Simulazione Montecarlo applicata al calcolo del VaR consente di risolvere le problematiche connesse all'utilizzo di simulazioni storiche, in particolare la scarsità di dati. Alla base del metodo Montecarlo vi sono comunque le serie storiche dei rendimenti dei fattori mercato. Queste devono essere analizzate per valutane la distribuzione e i relativi parametri. Sarà quindi possibile generare dei valori per i fattori di rischio coerenti con la distribuzione. Tali valori sono per questo definiti numeri pseudo-casuali. Gli step successivi sono poi analoghi a quelli del metodo storico, poiché deve essere calcolato il valore del portafoglio per ogni scenario e, una volta ottenuta la curva, tagliarla in corrispondenza del percentile prescelto.
Il vantaggio rispetto al metodo storico risiede nel fatto che è sufficiente la conoscenza generica della distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio, senza disporre di dati puntuali. Questo vantaggio è significativo soprattutto se si considera che per alcuni fattori tali dati non sono disponibili. Nel caso in cui le osservazioni disponibili siano poche per rappresentare verosimilmente tutti i possibili scenari, ma sufficienti per dedurre i parametri di distribuzione del fattore, la tecnica più adatta è la simulazione Montecarlo. L'applicazione della simulazione di tipo storico porterebbe ad una stima non sufficientemente attendibile.

3.4.1 Ipotesi di base

Al pari degli altri metodi, è necessario porre delle ipotesi che legittimino l'applicazione della simulazione Montecarlo al calcolo del VaR. Nello specifico, le ipotesi avanzate sono analoghe a quelle viste nel caso del pricing delle opzioni. La simulazione Montecarlo, infatti, fa la sua prima comparsa nell'Universo finanziario proprio con il fine di valutare i derivati. L'applicazione nel calcolo del VaR è successiva e derivante dalla crescente complessità dei nuovi strumenti, mercati e intermediari finanziari. Nello specifico è necessario ipotizzare che il prezzo di uno strumento finanziario coincida, in tutti i mercati in cui è negoziato (*legge del prezzo unico*), con il valore attuale, calcolato utilizzando il tasso risk-free, del valore atteso dei suoi payoff. Questa assunzione coincide con quella accettata nel contesto del pricing delle opzioni, in cui si era dimostrato che il valore in 0 dell'opzione coincide con:

$$\frac{\rho Cu + (1-\rho)Cd}{(1+r_f)\hat{}T}$$

il numeratore rappresenta il valore atteso dei payoff connessi al possesso dell'opzione, mentre al denominatore come tasso di interesse per l'attualizzazione si utilizza quello risk-free. In un contesto di simulazione di tipo Montecarlo, per il calcolo del valore atteso è necessario generare *n* possibili valori della variabile da stimare. Aull'aumentare del numero di campioni generati, il valore medio di questi rappresenta una stima attendibile del valore atteso della distribuzione reale. Ciò implica che, conoscendo la distribuzione del parametro di mercato di cui si vuole stimare l'evoluzione, è possibile generare numerosi valori, la cui media approssima quella della variabile che si intende analizzare.

3.4.2 Un contesto semplificato: calcolo del VaR di una singola posizione

La metodologia di calcolo del VaR che fa ricorso alla simulazione Montecarlo è operativamente la più complessa. Come nei casi precedenti, è necessario identificare i fattori di mercato e la legge che li lega ai rendimenti di portafoglio. In un contesto semplificato in cui è necessario valutare il VaR di una signola posizione influenzata dal rendimento di un solo fattore di mercato (*r*), il calcolo del VaR si articola in cinque fasi[65]:

1. In primo luogo è necessario identificare il fattore di rischio, il cui valore influenza quello della posizione di cui va calcolato il VaR. Una volta identificato, è necessario analizzarne le serie storiche per definirne la distribuzione di densità di probabilità. A tal fine non è necessario disporre di una quantità di osservazioni paragonabile a quella necessaria per realizzare una simulazione di tipo storico. Ciò che è necessario comprendere è esclusivamente l'andamento della distribuzione. Alla fine di questa fase si ottiene la distribuzione di probabilità dei rendimenti del fattore di rischio *f(r)*. Possono tuttavia presentarsi casi particolarmente complessi in cui non sono disponibili dati sull'andamento storico del fattore di mercato. In questi contesti non è possibile dedurre i trend storici della distribuzione e sarà quindi necessario ipotizzare una particolare distribuzione per il fattore. È bene notare che, comunque, la stima ottenuta sarà soggetta ad un errore più significativo, derivante dall'impossibilità di conoscere la distribuzione effettiva del rendimento del fattore di rischio.
2. Una volta definita la distribuzione dei rendimenti del fattore di mercato è necessario studiarne i parametri. I più importanti parametri da analizzare sono:

- Media $\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$
- Varianza $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \, p(x_i)$
- Deviazione standard $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$.

3. Analizzati i parametri di distribuzione, è possibile generare *n* valori pseudo-casuali della distribuzione. Tali valori sono generati con software che permettono che i valori così ottenuti rispettino i parametri di distribuzione stessi. Come nel caso dell'evoluzione del valore del sottostante delle opzioni, anche qui è necessario scegliere quanti campioni generare. Come notato nel paragrafo precedente, all'aumentare dei campioni generati aumenta l'accuratezza della stima, perché aumenta la probabilità che il valore atteso della distribuzione generata coincida con il valore atteso della distribuzione "effettiva" o "reale". Bisogna comunque considerare che esiste un trade off. I generatori di numeri casuali, infatti, sono software complessi e sofisticati che possiedono elevate

[65] La trattazione segue *Rischio e valore nelle banche, A.Resti, A.Sironi, Egea, 2008.*

capacità di calcolo. All'aumentare dei valori generati, però, aumenta la complessità della simulazione e la difficoltà di gestire le operazioni condotte su questi numeri. Quando viene operata la scelta è necessario considerare questi fattori e selezionare un numero di valori che renda la stima attendibile, senza per questo condizionare l'accuratezza delle operazioni effettuate.

4. In accordo con il principio della "full valuation", una volta definito lo scenario di evoluzione dei rendimenti del parametro di mercato, è necessario calcolare i corrispondenti valori del portafoglio o, in questo caso, della singola posizione. Sulla base della funzione definita nella fase 1., che descrive la relazione tra il rendimento del parametro di mercato e la posizione, va calcolato il valore della posizione per ogni possibile scenario. Si otterranno quindi tanti valori della posizione quanti scenari sono stati calcolati. Tali valori vanno poi ordinati crescentemente, dalla massima perdita al massimo profitto. Arrivati a questo stadio, non è più rilevante la distribuzione del parametro di mercato e il suo legame con la distribuzione di profitti/perdite. Per ogni valore di profitti e perdite va poi calcolata la frequenza in modo tale da ottenere la distribuzione di probabilità. Ciò che ne risulta è una curva, non necessariamente distribuita secondo una distribuzione "tipica", come Normale, t-Student, chi quadrato. Sull'asse orizzontale avremo le entità di profitti/perdite in ordine crescente. Su quello verticale le frequenze. L'area sottesa dalla curva rappresenta, invece, la probabilità.
5. Utilizzando l'output della fase 4., si può osservare la probabilità che ciascuna perdita si verifichi. Per calcolare il VaR è sufficiente "tagliare" la ditribuzione in corrispondenza del livello di confidenza prescelto, analogamente a quanto visto per gli altri due modelli di calcolo.

Dall'analisi delle fasi necessarie per l'implementazione del metodo Montecarlo è evidente la vicinanza con le simulazioni storiche. Si tratta, infatti, in entrambi i casi, di tecniche di tipo simulativo, la cui ratio è quella di produrre degli scenari verosimili di evoluzione per il rendimento dei fattori di mercato. La differenza sostanziale sta nel modo in cui in questi valori sono generati. Nelle simulazioni storiche si assume che l'andamento sia coincidente con quello registrato in periodi passati. Nell'approccio Montecarlo, invece, si accettano solamente i trend generali dell'andamento del fattore di mercato. I valori precisi vengono calcolati in modo, appunto, simulativo, imponendo solamente che i parametri della distribuzione vengano rispettati. Le modalità analitiche del calcolo del valore della posizione corrispondente a ciascuno scenario, prima, e del VaR, poi, sono pienamente coincidenti. L'applicazione dell'una o dell'altra tecnica dipende certamente da considerazioni circa il fattore di mercato che incide sulla posizione, a seconda che esso abbia un trend ciclico nel tempo o meno, ma anche da valutazioni di tipo economico, come i costi connessi all'implementazione di tecniche sufficientemente raffinate da poter realizzare una simulazione come quella Montecarlo. A differenza della simulazione storica, inoltre, il metodo Montecarlo impone che venga avanzata un'ipotesi circa la distribuzine di probabilità dei fattori di rischio. Questa assunzione non è necessaria nei modelli storici, in cui, invece, l'andamento del fattore di rischio viene valutato puntualmente sulla base dei dati raccolti, presupponendo che tali dati rispecchino l'evoluzione futura del fattore in esame. L'assunzione di una particolare forma di distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio avvicina sensibilmente la simulazione Montecarlo agli approcci analitici. L'affidabilità della stima, tuttavia, è maggiore nel caso di modello Montecarlo, grazia alla numerosità degli scenari ipotizzati.

I momenti più delicati dell'implementazione di tale metodo sono quelli in cui è necessario valutare la distribuzione dei rendimenti del fattore di rischio e l'incidenza di questi sulla posizione (fase 1.). Le altre fasi, infatti, sono sostanzialmente meccaniche e svolte automaticamente dagli elaboratori. Degli errori in queste stime possono portare a dei risultati distorti della massima perdita, con conseguenze gravi in termini di stabilità dell'intermediario.

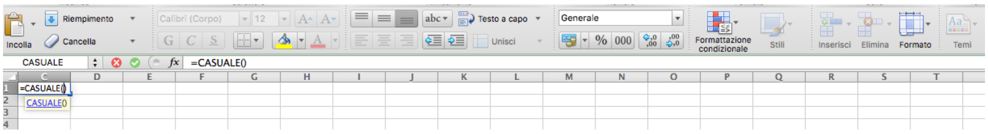
3.4.3 Calcolo del VaR di una posizione con Microsoft Excel

Riprendendo il paragrafo precedente si considera una generica opzione call sull'indice di mercato FTSE MIB, con scadenza ad 1 anno. L'unico parametro di mercato in grado di influenzare l'opzione è l'indice sottostante. Per semplicità si ipotizzi che, in T_0, il valore dell'indice (S_0) sia 100 e il valore dell'opzione (C_0) 10. Poiché, com'è noto, il valore di un'opzione call è pari a C = Max(S-K,0), dove K rappresenta il prezzo di esercizio, conoscendo C ed S, risulta che lo strike price K=S-C=90.
Si supponga, inoltre, di aver analizzato la distribuzione storica dell'indice FTSE MIB e di ritenere che la sua distribuzione sia normale con media μ= 0,1% e deviazione standard σ= 1,1%. La varianza, invece, σ^2=0,0121%.
Riassumendo i dati disponibili risultano essere:

S_0	100
C_0	10
K	90
μ	0,1%
σ	1,1%
σ^2	0,0121%

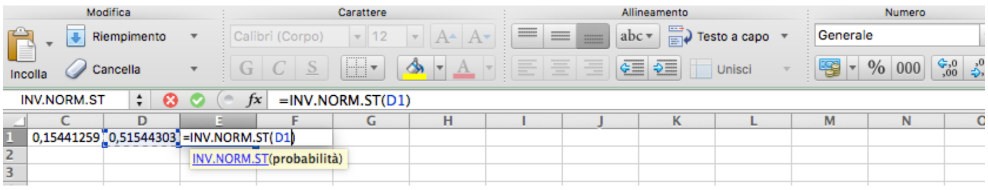
Dopo aver determinato la distribuzione del fattore di mercato, i suoi legami con la posizione, e i suoi parametri (fasi 1. e 2.) si deve procedere con la generazione di valori pseudo-casuali, che il fattore di rischio può assumere alla data di valutazione. La terza fase è il momento più complesso poiché bisogna accertarsi che, con la generazione dei possibili valori, non vengano violate la distribuzione e i suoi parametri. Un errore in questa sede porta all'inattendibilità della stima ottenuta. Data la complessità, analitica e concettuale, di questa fase è possibile procedere per gradi.
In primo luogo va scelto quanti campioni generare, ricordando il trade-off tra accuratezza della stima e costi di calcolo descritti in precedenza. In questa sede,

per esigenze di brevità, i campioni generati saranno n=100. Definita l'ampiezza del campione, si generano n valori da una distribuzione uniforme compresa tra 0;1. Ciò che si ottiene sono le probabilità che poi verranno applicate alla distribuzione Normale Standard. Come visto in merito alle opzioni, Excel consente di generare valori casuali compresi nell'intervallo 0;1 con la funzione CASUALE(.). Sarà necessario copiare e incollare solo i valori poiché essi si modificano in seguito a qualsiasi azione sul foglio di calcolo.



Foglio di calcolo 3.1. Generazione di numeri casuali da una distribuzione uniforme compresa tra 0;1.Funzione CASUALE.(.)

I valori così ottenuti rappresentano le probabilità[66]*(p)*. A tali probabilità va associato il corrispondente valore della distribuzione, a seconda della distribuzione che si ritiene il fattore di mercato abbia. In questo caso si è optato per una distribuzione normale. Il problema potrebbe essere risolto manualmente attraverso le tavole della Normale Standardizzata, che evidenzia la probabilità che la funzione assuma un valore maggiore di z. Manualmente, però, sono necessarie approssimazioni significative, non accetabili in questa sede. Si procederà, quindi, per due stadi. Prioritariamente verrà calcolato il valore corrispondente a ciascuna probabilita per la funzione Normale Standardizata[67]. Tale valore verrà indicato con $z=N^{-1}(p)$. In Excel è sufficiente utilizzare la funzione INV.NORM.ST(probabilità). L'operazione va ripetuta per ogni scenario generato.



Foglio di calcolo 3.2. Calcolo valore inverso normale standardizzata con imput probabilità.Funzione INV.NORM.ST(p)

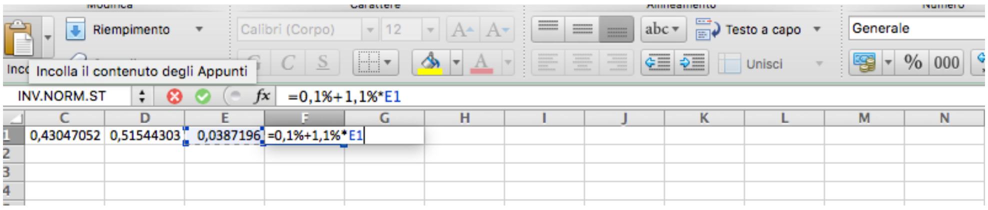
Una volta calcolato il valore corrispondente a ciascuna probabilita nel caso di ipotesi di Normale Standard, è necessario convertire tali valori nei corrispondenti propri della distribuzione scelta come rappresentativa del fattore di mercato. In questo caso la distribuzione è stata ipotizzata essere normale. Si avrà quindi che $r=F^{-1}(p)=\mu+z\sigma$. Per risolvere questo calcolo è sufficiente impostare la formula

---

66 Graficamente rappresentano l'area sottesa tra il punto e la curva che rappresenta la distribuzione.

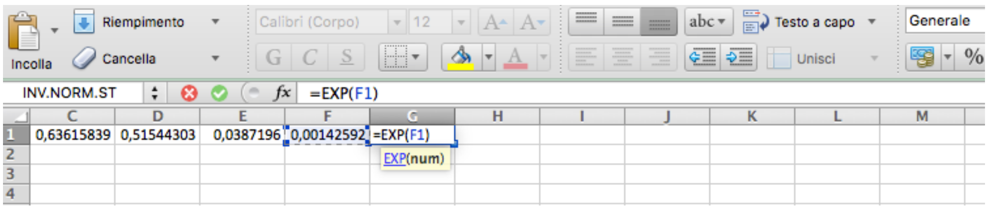
67 Si ricorda che la variabile casuale Normale Standardizzata Z ha media nulla e varianza unitaria. Z ~ N(0;1). La sua funzione di densità risulta $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5z^2}$, mentre la funzione di ripartizione $\Phi(z)=P(Z\le z)$.

su Excel, bloccando le celle relative a deviazione standard σ e media μ. Anche qui il calcolo va ripetuto per ogni possibile scenario.



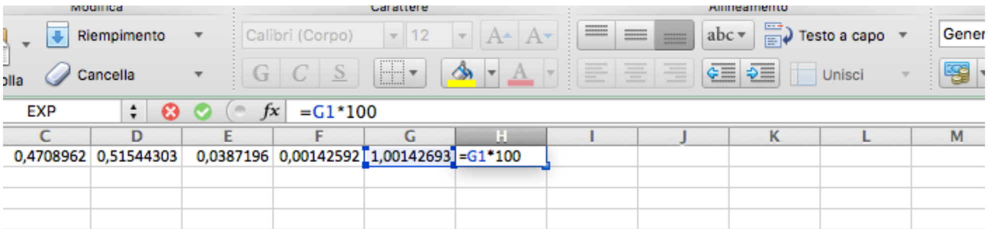
Foglio di calcolo 3.3. Calcolo valori corrispondenti Normale.

Ciò che è stato appena calcolato non rappresenta altro che il tasso di variazione del parametro di mercato, FTSE MIB, per ogni possibile scenario. Per calcolare il valore dell'opzione in ogni scenario è , però, necessario conoscere il valore del sottostante. Ricordando che nel caso dei derivati si utilizza la capitalizzazione nel continuo, il valore dell'indice FTSE MIB in ogni scenario risulta essere S_1=S_0e^r. Per lo svolgimento del calcolo su Excel è preferibile scomporlo in due componenti distinte. Prioritariamente, su una colonna, si calcola il valore di *e* elevato a ciascun possibile valore del tasso di variazione *r*. La funzione da utilizza è EXP(*r*).



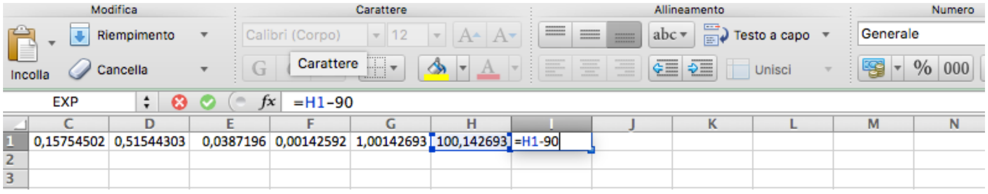
Foglio di calcolo 3.4. Elevazione del numero di Nepero per ogni scenario di r.

Una volta conclusi questi calcoli, per computare S_1, è sufficiente moltiplicare ciascun valore ottenuto per il valore di FTSE MIB in 0 (S_0), in questo caso 100.



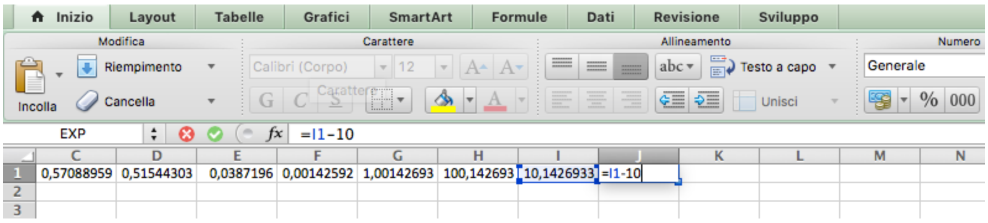
Foglio di calcolo 3.5. Computazione valore del sottostante per ogni scenario possibile.

Calcolato il valore dell'indice per ogni scenario, si può procedere con il calcolo del corrispondente valore dell'opzione. Ricordando che il valore di un'opzione call è pari a C_1= Max(S_1-K,0), per calcolare il valore dell'opzione in ogni scenario è sufficiente sottrarre al valore del sottostante lo strike price K, che è costante (in questo caso pari a 90).



Foglio di calcolo 3.6. Calcolo valore call per ogni scenario possibile.

Per concludere, è necessario calcolare la variazione intervenuta nel valore della call in ciascuno scenario, rispetto a C_0=10. ΔC=C_1-C_0, ricordando che C_0=10.



Foglio di calcolo 3.7. Calcolo variazione valore call per ogni scenario possibile.

Una volta calcolato l'ammontare di profitti e perdite, i valori vanno ordinati, partendo dalla perdita più grande. Per ogni valore, poi, si calcola la frequenza, che, accettando la definizione classica di probabilità, è data dal rapporto tra casi favorevoli e possibili (100). A causa dell'esiguità del campione e del livello di approssimazione utilizzato, nel caso in esame ciascun valore non si ripete più di una volta. Per il calcolo del VaR è sufficienta tagliare la distribuzione in corrispondenza del livello di confidenza α prescelto. Nel caso di un livello di confidenza del 95% il VaR è pari a 1,62105, se, invece, il livello di confidenza è pari a 99% il VaR è 2,51804. Da un punto di vista pratico questo vuol dire che, nel 95%(99%) dei casi la massima perdita sarà pari a 1,62105(2,51804). I calcoli svolti risultano come segue:

C	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
scenario n	p	z	r	e^r	S1	C1	ΔC		ΔC ordinati		liv confidenza
1	0,51544303	0,0387196	0,00142592	1,00142693	100,142693	10,1426933	0,14269327		-2,5580244	0,01	100%
2	0,23660082	-0,7172795	-0,0068901	0,99313361	99,3133607	9,31336073	-0,6866393		-2,5180352	0,01	99%
3	0,53040184	0,07628003	0,00183908	1,00184077	100,184077	10,1840772	0,18407725		-2,3101445	0,01	98%
4	0,00799058	-2,4093456	-0,0255028	0,97481965	97,4819648	7,48196482	-2,5180352		-2,0413071	0,01	97%
5	0,96701143	1,83857894	0,02122437	1,02145121	102,145121	12,1451207	2,14512072		-1,6881366	0,01	96%
6	0,58433537	0,21299707	0,00334297	1,00334856	100,334856	10,3348562	0,33485617		-1,6210461	0,01	95%
7	0,63428159	0,34321488	0,00477536	1,00478678	100,478678	10,4786784	0,47867839		-1,5686931	0,01	94%
8	0,99324457	2,47001205	0,02817013	1,02857066	102,857066	12,8570663	2,85706629		-1,5341846	0,01	93%
9	0,37166823	-0,3274382	-0,0026018	0,99740156	99,7401561	9,74015614	-0,2598439		-1,4838045	0,01	92%
10	0,16978729	-0,9550062	-0,0095051	0,99053996	99,0539963	9,05399626	-0,9460037		-1,4808213	0,01	91%
11	0,97920516	2,03760281	0,02341363	1,02368988	102,368988	12,3689882	2,36898817		-1,4773474	0,01	90%
12	0,15130364	-1,0308583	-0,0103394	0,98971383	98,9713827	8,9713827	-1,0286173		-1,4107964	0,01	89%
13	0,9845965	2,15955664	0,02475512	1,02506408	102,506408	12,5064075	2,50640752		-1,2192186	0,01	88%
14	0,56278773	0,15804094	0,00273845	1,0027422	100,27422	10,2742203	0,27422034		-1,1498419	0,01	87%
15	0,63178376	0,3365814	0,0047024	1,00471347	100,471347	10,4713469	0,47134691		-1,1307418	0,01	86%
16	0,07353902	-1,44993	-0,0149492	0,98516195	98,5161955	8,51619547	-1,4838045		-1,1049482	0,01	85%
17	0,30544376	-0,508807	-0,0045969	0,99541367	99,5413673	9,54136725	-0,4586327		-1,0784725	0,01	84%
18	0,07392365	-1,4471772	-0,0149189	0,98519179	98,5191787	8,51917873	-1,4808213		-1,0286173	0,01	83%
19	0,361224	-0,355189	-0,0029071	0,99709714	99,7097142	9,70971424	-0,2902858		-0,9703687	0,01	82%
20	0,64815112	0,38033364	0,00518367	1,00519713	100,519713	10,5197129	0,51971285		-0,9460037	0,01	81%
21	0,57110902	0,17919834	0,00297118	1,0029756	100,29756	10,29756	0,29756001		-0,8522312	0,01	80%
22	0,07437346	-1,4439717	-0,0148837	0,98522653	98,5226526	8,52265257	-1,4773474		-0,8348226	0,01	79%
23	0,84476833	1,0142503	0,01215675	1,01223095	101,223095	11,2230947	1,2230947		-0,7611803	0,01	78%
24	0,48190902	-0,0453629	0,00050101	1,00050113	100,050113	10,0501133	0,05011334		-0,7466997	0,01	77%
25	0,0574366	-1,5766625	-0,0163433	0,98378954	98,3789539	8,37895389	-1,6210461		-0,7406128	0,01	76%
26	0,28202272	-0,5768431	-0,0053453	0,99466899	99,4668986	9,46689862	-0,5331014		-0,7338269	0,01	75%
27	0,31307454	-0,4871542	-0,0043587	0,99565079	99,565079	9,56507895	-0,434921		-0,6866393	0,01	74%
28	0,59062097	0,22914264	0,00352057	1,00352677	100,352677	10,3526773	0,35267735		-0,5835847	0,01	73%
29	0,79361213	0,81901872	0,01000921	1,01005947	101,005947	11,0059466	1,00594656		-0,5331014	0,01	72%
30	0,56627615	0,1669013	0,00283591	1,00283994	100,283994	10,2839939	0,28399393		-0,4958423	0,01	71%
31	0,30703912	-0,5042606	-0,0045469	0,99546345	99,5463454	9,54634544	-0,4536546		-0,4855339	0,01	70%
32	0,75840416	0,7011784	0,00871296	1,00875103	100,875103	10,8751031	0,87510308		-0,4843946	0,01	69%
33	0,11388912	-1,2061018	-0,0122671	0,98780781	98,7807814	8,78078143	-1,2192186		-0,4674262	0,01	68%
34	0,1968229	-0,8530243	-0,0083833	0,99165177	99,1651774	9,16517738	-0,8348226		-0,4586327	0,01	67%
35	0,59223548	0,23329925	0,00356629	1,00357266	100,357266	10,3572659	0,35726585		-0,4536546	0,01	66%
36	0,70291746	0,53281004	0,00686091	1,0068845	100,68845	10,68845	0,68845004		-0,434921	0,01	65%
37	0,19242767	-0,868985	-0,0085588	0,99147769	99,1477688	9,14776876	-0,8522312		-0,4049528	0,01	64%
38	0,41498722	-0,2147343	-0,0013621	0,99863885	99,8638849	9,86388494	-0,1361151		-0,2902858	0,01	63%
39	0,89423928	1,24939282	0,01474332	1,01485254	101,485254	11,485254	1,48525399		-0,288453	0,01	62%
40	0,36185005	-0,353518	-0,0028887	0,99711547	99,711547	9,71154697	-0,288453		-0,2598439	0,01	61%
41	0,13035554	-1,124712	-0,0113718	0,98869258	98,8692582	8,86925825	-1,1307418		-0,2189929	0,01	60%
42	0,72005097	0,58299293	0,00741292	1,00744047	100,744047	10,7440466	0,7440466		-0,2089778	0,01	59%
43	0,76750165	0,73064389	0,00903708	1,00907804	100,907804	10,907804	0,90780405		-0,2017198	0,01	58%
44	0,05063996	-1,63868	-0,0170255	0,98311863	98,3118634	8,31186342	-1,6881366		-0,1361151	0,01	57%
45	0,266644	-0,6229947	-0,0058529	0,99416415	99,4164153	9,41641532	-0,5835847		-0,1280591	0,01	56%
46	0,2936351	-0,5427961	-0,0049708	0,99504158	99,5041577	9,50415766	-0,4958423		-0,1028617	0,01	55%
47	0,41784834	-0,207401	-0,0012814	0,99871941	99,8719409	9,87194092	-0,1280591		-0,0246398	0,01	54%
48	0,87407785	1,1458812	0,01360469	1,01369766	101,369766	11,3697658	1,36976582		0,05011334	0,01	53%
49	0,38932158	-0,2810877	-0,002092	0,99791022	99,7910222	9,79102223	-0,2089778		0,14269327	0,01	52%
50	0,64819967	0,38046447	0,00518511	1,00519858	100,519858	10,5198575	0,51985752		0,17166148	0,01	51%
51	0,22348259	-0,7604842	-0,0073653	0,99266173	99,2661731	9,26617309	-0,7338269		0,18407725	0,01	50%
52	0,29724602	-0,5323378	-0,0048557	0,99515605	99,5156054	9,51560539	-0,4843946		0,25926659	0,01	49%
53	0,71142948	0,55756562	0,00713322	1,00715872	100,715872	10,7158724	0,71587239		0,27422034	0,01	48%
54	0,91342927	1,36217878	0,01598397	1,01611239	101,611239	11,6112394	1,61123936		0,28399393	0,01	47%
55	0,81541518	0,89802984	0,01087833	1,01093771	101,093771	11,0937712	1,09377124		0,29756001	0,01	46%
56	0,7183721	0,57801232	0,00735814	1,00738527	100,738527	10,7385273	0,73852731		0,31145378	0,01	45%
57	0,65938154	0,41077582	0,00551853	1,00553379	100,553379	10,5533789	0,55337892		0,33485617	0,01	44%
58	0,60202089	0,25858143	0,0038444	1,00385179	100,385179	10,3851795	0,38517949		0,35267735	0,01	43%
59	0,86694103	1,11204699	0,01323252	1,01332045	101,332045	11,3320454	1,33204541		0,35726585	0,01	42%
60	0,78040901	0,7735753	0,00950933	1,00955469	100,955469	10,9554686	0,95546856		0,38517949	0,01	41%
61	0,52591818	0,06501301	0,00171514	1,00171661	100,171661	10,1716615	0,17166148		0,39435035	0,01	40%
62	0,62236824	0,31170658	0,00442877	1,00443859	100,443859	10,4438594	0,44385939		0,44385939	0,01	39%
63	0,02465825	-1,9658452	-0,0206243	0,97958693	97,9586929	7,95869295	-2,0413071		0,45527857	0,01	38%
64	0,68154592	0,47202609	0,00619229	1,0062115	100,62115	10,6211499	0,62114988		0,47134691	0,01	37%
65	0,76679818	0,72834302	0,00901177	1,0090525	100,90525	10,9052502	0,90525015		0,47867839	0,01	36%
66	0,84559955	1,01774135	0,01219515	1,01226982	101,226982	11,2269819	1,2269819		0,49021143	0,01	35%
67	0,29688577	-0,5333786	-0,0048672	0,99514466	99,5144661	9,5144661	-0,4855339		0,51971285	0,01	34%
68	0,45489173	-0,1133117	-0,0002464	0,9997536	99,9753602	9,97536019	-0,0246398		0,51985752	0,01	33%

69	0,90189094	1,29240153	0,01521642	1,01533278	101,533278	11,5332776	1,5332776		0,55337892	0,01	32%
70	0,12666963	-1,1422761	-0,011565	0,98850158	98,8501581	8,85015806	-1,1498419		0,56496375	0,01	31%
71	0,39185943	-0,274476	-0,0020192	0,9979828	99,7982802	9,79828016	-0,2017198		0,62114988	0,01	30%
72	0,97535179	1,96601904	0,02262621	1,02288412	102,288412	12,2884124	2,28841236		0,68845004	0,01	29%
73	0,1641929	-0,9773704	-0,0097511	0,99029631	99,0296313	9,02963127	-0,9703687		0,71587239	0,01	28%
74	0,32283153	-0,4597954	-0,0040577	0,99595047	99,5950472	9,59504718	-0,4049528		0,73852731	0,01	27%
75	0,60522161	0,2668862	0,00393575	1,0039435	100,39435	10,3943503	0,39435035		0,7440466	0,01	26%
76	0,81263798	0,88765932	0,01076425	1,0108224	101,08224	11,0822396	1,08223955		0,87510308	0,01	25%
77	0,63819899	0,35364891	0,00489014	1,00490211	100,490211	10,4902114	0,49021143		0,90525015	0,01	24%
78	0,30263454	-0,5168383	-0,0046852	0,99532574	99,5325738	9,53257378	-0,4674262		0,90780405	0,01	23%
79	0,42682323	-0,1844678	-0,0010291	0,99897138	99,8971383	9,89713831	-0,1028617		0,95546856	0,01	22%
80	0,06321933	-1,5282976	-0,0158113	0,98431307	98,4313069	8,43130686	-1,5686931		1,00594656	0,01	21%
81	0,38582708	-0,2902119	-0,0021923	0,99781007	99,7810071	9,78100708	-0,2189929		1,08223955	0,01	20%
82	0,00720962	-2,4466461	-0,0259131	0,97441976	97,4419756	7,44197558	-2,5580244		1,09377124	0,01	19%
83	0,08339619	-1,3825843	-0,0142084	0,98589204	98,5892036	8,58920365	-1,4107964		1,11871159	0,01	18%
84	0,88872844	1,21979362	0,01441773	1,01452217	101,452217	11,4522167	1,45221666		1,2230947	0,01	17%
85	0,21606903	-0,7855382	-0,0076409	0,9923882	99,2388197	9,23881971	-0,7611803		1,2269819	0,01	16%
86	0,87183469	1,1351067	0,01348617	1,01357752	101,357752	11,3577522	1,35775224		1,29179473	0,01	15%
87	0,98321947	2,12530626	0,02437837	1,02467795	102,467795	12,4677951	2,46779508		1,33204541	0,01	14%
88	0,13544871	-1,1009982	-0,011111	0,98895052	98,8950518	8,89505184	-1,1049482		1,35775224	0,01	13%
89	0,22163023	-0,7666991	-0,0074337	0,99259387	99,2593872	9,25938718	-0,7406128		1,36976582	0,01	12%
90	0,01335676	-2,2156787	-0,0233725	0,97689855	97,6898555	7,68985548	-2,3101445		1,45221666	0,01	11%
91	0,21997607	-0,772274	-0,007495	0,992533	99,2533003	9,25330032	-0,7466997		1,48525399	0,01	10%
92	0,57604692	0,1917907	0,0031097	1,00311454	100,311454	10,3114538	0,31145378		1,5332776	0,01	9%
93	0,66321334	0,42124892	0,00563374	1,00564964	100,564964	10,5649637	0,56496375		1,61123936	0,01	8%
94	0,62628926	0,3220412	0,00454245	1,00455279	100,455279	10,4552786	0,45527857		1,638399	0,01	7%
95	0,06727059	-1,4964318	-0,0154607	0,98465815	98,4658154	8,46581542	-1,5341846		2,14512072	0,01	6%
96	0,55744038	0,14448279	0,00258931	1,00259267	100,259267	10,2592666	0,25926659		2,28841236	0,01	5%
97	0,14081525	-1,0766638	-0,0108433	0,98921528	98,9215275	8,92152752	-1,0784725		2,36898817	0,01	4%
98	0,82133243	0,92045482	0,011125	1,01118712	101,118712	11,1187116	1,11871159		2,46779508	0,01	3%
99	0,91719899	1,38647461	0,01625122	1,01638399	101,638399	11,638399	1,638399		2,50640752	0,01	2%
100	0,85902056	1,0759293	0,01283522	1,01291795	101,291795	11,2917947	1,29179473		2,85706629	0,01	1%

Fogli di calcolo 3.8-9-10. Computazione VaR di una singola posizione esposta a un solo fattore di rischio.

3.4.4 Calcolo del VaR di portafoglio

Quando si passa dalla valutazione di una singola posizione a quella di un portafoglio di posizioni, la ratio della simulazione resta analoga. L'obiettivo è valutare il portafoglio in corrispondenza di ogni scenario simulato, in modo tale da individuare, dato il livello di confidenza prescelto, la massima perdita. Da un punto di vista concettuale, quindi, non si ravvisano mutamenti rispetto a quanto descritto nel precedente paragrafo. È evidente, però, che la complessità di un portafoglio comporti necessariamente delle complicazioni da un punto di vista analitico. In primo luogo sarà necessario valutare non uno, ma k posizioni per ogni scenario possibile, dove k rappresenta il numero di posizioni contenute le portafoglio. In secondo luogo, ed è questa la complicazione più rilevante, bisogna riconoscere che il portafoglio non è influenzato da un solo fattore di rischio, ma da m fattori, il cui impatto sul portafoglio deve essere valutato in ogni scenario. È, inoltre, piuttosto inverosimile ritenere che i fattori di rischio siano tra di loro indipendenti. Come già notato, infatti, i mercati finanziari sono oggi fortemente integrati e questo fa sì che i fattori critici di rischio tendano a muoversi nella stessa direzione (correlazione positiva) o in direzioni opposte (correlazione negativa). Nell'analisi dell'impatto dei fattori di rischio sul portafoglio è necessario tenere in considerazione tali correlazioni. La comparsa delle matrici di correlazione, quindi, accomuna il VaR Montecarlo con quello parametrico. Le correlazioni sono invece ignorate nel modello di simulazione storica. Tale omissione è motivata dal fatto che, utilizzando gli andamenti storici dei fattori di rischio come una previsione puntuale del comportamento futuro, non è necessario esplicare i coefficienti di correlazione, essendo questi implicitamente contenuti negli andamenti stessi.

L'intuizione economica alla base della più importante differenza tra metodo Montecarlo per una singola posizione e per il portafoglio è piuttosto semplice. Nella pratica, però, non è sufficiente riconoscere l'esistenza di correlazione (positiva o negativa) tra i fattori di rischio. È necessario studiarla e quantificarla in modo tale da ottenere degli scenari che verosimilmente approssimano l'andamento futuro di tali fattori. Poiché nel modello descritto per la singola posizione non vi era necessità di stima dei fattori di correlazione, le cinque fasi allora proposte dovranno essere parzialmente modificate. Per comprendere l'importanza di questa modifica si introduce il concetto di correlazione e dell'indice deputato a misurarne l'intensità, il coefficiente di correlazione. Si parla di correlazione quando esiste un legame di tipo lienare tra due variabili aleatorie[68]. L'indice utilizzato per valutare il grado di correlazione tra due variabili è il coefficiente di correlazione ρ(x,y). Tale coefficiente può essere ottenuto come rapporto tra la covarianza e il prodotto degli scarti quadratici medi:

$$\rho(x,y)=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

Il coefficiente di correlazione assume sempre valori compresi tra (1;-1). Nel caso il cui il valore sia 1 vi è perfetta correlazione positiva tra le due variabili aleatorie. È il massimo grado di intensità del legame lineare tra le due variabili. Più il coefficiente è vicino all'unità, più il legame è forte. Di contro quando il valore è -1, vuol dire che le due variabili aleatorie sono negativamente correlate in modo perfetto. È possibile attribuire all'indice di correlazione un valore nullo solamente nel caso in cui le due variabili sono incorrelate. Tale situazione si verifica quando le due variabili sono indipendenti, in questo caso, infatti, la loro covarianza σ_{xy} è nulla.
Per come è stata descritta, è evidenta che la correlazione possa essere valutata considerando solamente due variabili aleatorie. È frequente, però, che i portafogli finanziari siano esposti a più di due fattori di rischio. Sarà quindi necessario calcolare l'intensità di correlazione tra tutti fattori di rischio, valutandoli a coppie, per poi costruire una matrice che racchiuda tutte le informazioni disponibili, analogamente a quanto esposto per il metodo analitico.

Definito il concetto di correlazione tra variabili aleatorie, è possibile procedere con la descrizione delle fasi necessarie per il calcolo del VaR di un portafoglio costituito da *k* posizioni ed esposto ad *m* fattori di rischio[69]:

1. Come nel caso univariato descritto in precedenza, è prioritaria l'identificazione dei fattori di rischio che influenzano il portafoglio. Si procede innanzitutto con la valutazione di ogni posizione presa singolarmente per identificare tutti i fattori che la influenzano. È probabile che, una volta terminata questa prima analisi, si pervenga alla conclusione che i fattori di rischio così individuati siano comuni a

68 In questa sede le variabili aleatorie sono i rendimenti dei fattori di rischio di mercato.
69 La trattazione segue *Rischio e valore nelle banche, A.Resti, A.Sironi, Egea, 2008.*

più strumenti del portafoglio[70]. Casi complessi si possono avere, poi, quando uno stesso fattore critico di mercato porta a variazioni di segno opposto di posizioni che appartengono allo stesso portafoglio. Il fine perseguito in questo caso dall'intermediario che costruisce il portafoglio è quello di *hedging*[71]. Una volta individuati i fattori di rischio sarà necessario valutarne la distribuzione sulla base delle serie storiche disponibili, analogamente a quanto visto nel caso univariato. Anche in questa sede, quindi, dovranno essere effettuate delle valutazioni in caso di assenza di dati storici. In ipotesi multivariata, però, sarà necessario considerare la possibilità che i fattori di rischio siano correlati in qualche modo tra loro. Nella prima fase è sufficiente accertare la sussistenza di una qualche relazione di correlazione tra i fattori. Il grado di tale correlazione verrà stimato nella successiva fase 2.. L'output di questa fase sarà la distribuzione di densità di probabilità congiunta dei rendimenti dei fattori di rischio individuati $f(r_1, r_2,\ldots, r_m)$.

2. Come nel caso univariato, si procede con la stima dei parametri della distribuzione di probabilità dei fattori di rischio. Analogamente a quanto visto nel paragrafo precedente è necessario analizzare singolarmente le distribuzioni dei rendimenti dei fattori di rischio per determinarne:

- Media $\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$
- Varianza $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^\wedge 2\, p(x_i)$
- Deviazione standard $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$.

Trovandoci nel caso multivariato, però, sarà in aggiunta necessario stimare il coefficiente di correlazione. Tale coefficiente va valutato per coppie di fattori di rischio e soltanto nel caso in cui si ipotizzi che le variabili non sono indipendenti[72]. Per la stima del coefficiente di correlazione è necessario conoscere la covarianza di ciascuna coppia di fattori di rischio:

$$\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)p_{ij}$$

oppure

[70] Un esempio possono essere i tassi di cambio. Il rischio di cambio è una particolare forma di rischio di mercato che sussiste laddove l'intermediario finanziario detenga attività o passività denominate in valuta estera. Un apprezzamento o deprezzamento di tale valuta rispetto a quella nazionale, infatti, può modificare il valore delle attività o passività dell'intermediario. Tale rischio è comune a posizioni di tipo diverso (sia derivati che azioni o obbligazioni denominate in valuta estera) che possono appartenere allo stesso portafoglio.

[71] Per hedging si intende l'acquisto di posizioni lunghe o corte da parte dell'intermediario con il fine di proteggersi dai rischi connessi ad un altro investimento. Protagonisti delle attività di hedging sono, di solito, i derivati. *www.borsaitaliana.it.*

[72] Come evidenziato in precedenza, infatti, in questo caso il coefficiente di correlazione è nullo.

$$\sigma_{xy} = \mu_{xy} - \mu_x \mu_y.$$

Il coefficiente di correlazione è invece pari a:

$$\rho(x,y)=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

3. Definiti i parametri e la distribuzione del rendimento di ciascun fattore di mercato si deve procedere con la generazione dei valori pseudo-casuali che ciascun fattore assume in ogni scenario. Si torna quindi, in questa fase, a valutare separatamente ciascun fattore di rischio. Restano valide tutte le osservazioni mosse nel contesto univariato. In particolare è fondamentale decidere quante osservazioni produrre in funzione del trade-off esistente tra ampiezza del campione e costi di implementazione da sostenere. In questa sede, inoltre, tali valutazioni sono ancor più rilevanti se si considera la complessità dei calcoli dovuta, non solo alla presenza di più fattori di rischio, ma anche di più posizioni che costituiscono il portafoglio.
4. Si può, a questo punto, procedere con la "full valuation". Tale concetto implica che ogni posizione venga rivalutata alla luce del valore assunto da ciascun fattore di mercato in ognuno dei possibili scenari. Il contesto si presenta come molto più complesso, sia dal punto di vista analitico che concettuale, rispetto a quello multivariato. Si dovrà infatti procedere a calcolare per ogni scenario il valore di ciascuna posizione, che deriva, però, dall'incidenza assunta da ciascun fattore di rischio. Il calcolo del valore rivalutato della singola posizione, quindi, non è immediato, poiché è necessario computare quanto ciascun fattore è in grado di incidere sulla singola posizione. Una volta conclusa questa computazione per ogni posizione e per ogni scenario, operando una somma algebrica, si ottiena il valore complessivo del portafoglio (o meglio la sua variazione rispetto all'istante 0), che costituisce l'output rilevante di questa fase e il punto di partenza per quella successiva.
5. La quinta fase coincide puntualmente con quella descritta nel contesto univariato. In questo caso, però, i valori su cui operare non sono le possibili variazioni della posizione, ma del portafoglio complessivo. Tali valori vanno ordinati crescentemente e a ciascuno va abbinata la relativa frequenza. Si ottiene così la nota funzione di densità di probabilità che verrà "tagliata" in corrispondenza del percentile prescelto per il calcolo del VaR.

Dalla descrizione proposta si evince immediatamente la maggiore complessità del calcolo del VaR di portafoglio rispetto a quello relativo alla singola posizione. Tale maggiore complessità è sia operativa che concettuale. La differenza sostanziale delle due situazioni, infatti, non deriva tanto dalla necessità di considerare più posizioni e più fattori di rischio, aspetto che, innegabilmente, complica la procedura in termini di calcoli da effettuare. La vera differenza consiste nell'esigenza di individuare e valutare l'intensità della correlazione esistente tra i vari fattori di rischio. La stima empirica di tale correlazione può risultare spesso ostica, a causa della possibilità che apparenti legami tra variabili di mercato siano esclusivamente temporanei o volatili. Tuttavia l'importanza di identificare queste correlazioni è essenziale, soprattutto quando si parla di portafogli diversificati o costruiti con finalità di hedging. Un intermediario diversificatore, infatti, decide di investire su attività e passività che, per definizione, presentano una correlazione negativa. Se, in sede di calcolo del VaR, le unità di risk-management non considerassero l'esistenza di questa correlazione, gli sforzi dell'intermediario in termini di ricerca della stabilità risulterebbero inutili. Il risultato sarebbe, infatti, una perdita massima superiore rispetto a quella effettivamente possibile, proprio perché non viene considerato il beneficio derivante dalla diversificazione[73]. Per comprendere l'importanza della valutazione della correlazione verranno presentati due esempi. Nel primo caso, quello semplificato, si valuterà un portafoglio esposto a due fattori di rischio senza valutarne la correlazione. Nel secondo, invece, si valuterà l'intensità della correlazione tra i due parametri.

3.4.5 Calcolo del VaR di portafoglio con Microsoft Excel in ipotesi di indipendenza[74]

Si consideri un portafoglio semplificato costuito da due sole posizioni:

- posizione lunga su un'opzione call europea sull'indice FTSE MIB, scadenza un anno;
- posizione lunga su un'opzione put europea sull'indice SBF 120, scadenza un anno.

Per semplicità si ipotizzi che la distribuzione e i parametri dell'opzione call sull'indice FTSE MIB siano analoghi a quelli presentati nel paragrafo 2.3.3. Si supponga di aver analizzato la distribuzione storica dell'indice SBF 120 e di ritenere che la sua distribuzione sia normale con media μ= 0,12% e deviazione standard σ= 1,15%. La varianza, invece, σ^2=0,0132%. Per quanto riguarda l'opzione su FTSE MIB si ipotizzi che, in T_0, il valore dell'indice (F_0) sia 100 e il valore dell'opzione (C_0) 10. Poiché, com'è noto il valore di un'opzione call è pari a C = Max(S-K,0), dove K rappresenta il prezzo di esercizio, conoscendo C ed S, risulta che lo strike price K=S-C=90. Per l'opzione su SBF 120 si ipotizza sempre un valore iniziale dell'indice pari a 100 (S_0) e un valore dell'opzione (P_0) pari a 10. Poiche per una put il valore è dato da P = Max(K-S,0), lo strike price è pari a K=S+P=110. Si ipotizza che ciascuna posizione sia influenzata esclusivamente dal valore del proprio sottostante.

---

73 Se il portafoglio diversificato è stato costruito in maniera corretta, infatti, la variazione di un parametro di mercato porterà all'aumento del valore di una posizione, ma contestualmente alla riduzione del valore di un'altra, fornendo così benefici in termini di copertura dai rischi. La diversificazione dei rischio è uno degli aspetti chiave attenzionati dalle unità di risk-management.

74 La trattazione segue *Rischio e valore nelle banche, A.Resti, A.Sironi, Egea, 2008.*

Si presentano riassuntivamente i parametri della distribuzione per ciascun sottostante:

sottostante	SBF 120	FTSE MIB
tipo	put	call
distribuzione	Normale	Normale
μ	0,12%	0,1%
σ^2	0,0132%	0,0121%
σ	1,15%	1,1%
S_0/F_0	100	100
C_0/P_0	10	10
K	110	90

In ipotesi di indipendenza dei rendimenti dei fattori di rischio, si procede analogamente a quanto visto nel caso di una singola posizione. In primo luogo si sceglie quanti campioni generare, in questo caso come nel precedente *n=100*, per esigenze di brevità. Si generano quindi dei numeri casuali derivanti da una distribuzione uniforme con la funzione CASUALE(.). L'operazione va ripetuta per entrambi i fattori di rischio *n* volte. I valori così ottenuti, che rappresentano le probabilità *p*, vanno convertiti nel corrispondente valore della Normale Standard utilizzando la funzione INV.NORM.ST(*p*). Anche qui l'operazione va ripetuta per entrambi i fattori di rischio. Essendosi ipotizzato che la distribuzione dei rendimenti dei due indici sia Normale, ma non Normale Standard, vanno convertiti i valori ottenuti con la funzione INV.NORM.ST(*p*) in valori di una Normale che sia distribuita rispettando i parametri stimati empiricamente. Per far ciò è sufficiente trasformare i valori della Normale Standard applicando la formula $r=F^{-1}(p)=\mu+z\sigma$ per ognuno dei fattori di rischio. Sono stati quindi ottenuti i tassi di variazione dei due indici per ogni possibile scenario. Per calcolare il valore di ciascuna opzione e quindi del portafoglio, però, è necessario calcolare il valore del sottostante in ogni scenario possibile. Per calcolarlo basterà applicare la formula $S_1=S_0e^r$ nel caso dell'indice SBF 120 e $F_1=F_0e^r$ nel caso dell'indice FTSE MIB. Per calcolare il valore delle due opzioni in ogni scenario:

- C_1= Max(F_1-K,0), nel caso della call;
- P_1= Max(K-S_1,0), nel caso della put.

Si calcola poi la variazione del valore di ciascuna opzione rispetto all'epoca 0 per ogni scenario possibile. Sommando algebricamente le variazioni del valore delle due posizioni si ottiene la variazione complessiva del portafoglio. Ordinando tali valori con le rispettive frequenze e tagliando la distribuzione in corrispondenza del percentile prescelto si ottiene il VaR di portafoglio in ipotesi di indipendenza dei fattori critici di mercato. I calcoli relativi all'opzione sull'indice FTSE MIB:

	A	C	D	E	F	G	H	I
1	scenario	p1	z1	r1	e^r	F1	C1	ΔC
2	1	0,0098964	-2,3302525	-0,0246328	0,97566813	97,5668133	7,56681331	-2,4331867
3	2	0,68770629	0,48935919	0,00638295	1,00640337	100,640337	10,6403366	0,64033655
4	3	0,04703752	-1,6742828	-0,0174171	0,98273369	98,2733691	8,27336907	-1,7266309
5	4	0,3040022	-0,5129241	-0,0046422	0,99536859	99,5368593	9,53685929	-0,4631407
6	5	0,26016298	-0,642843	-0,0060713	0,99394712	99,394712	9,39471198	-0,605288
7	6	0,48748814	-0,0313677	0,00065495	1,00065517	100,065517	10,0655169	0,06551694
8	7	0,62450225	0,317327	0,0044906	1,00450069	100,450069	10,4500695	0,45006948
9	8	0,99201729	2,40970511	0,02750676	1,02788856	102,788856	12,788856	2,78885597
10	9	0,54838461	0,1215811	0,00233739	1,00234013	100,234013	10,2340126	0,23401259
11	10	0,39389591	-0,2691792	-0,001961	0,99804095	99,8040951	9,80409508	-0,1959049
12	11	0,8634106	1,09577146	0,01305349	1,01313905	101,313905	11,3139055	1,31390548
13	12	0,04125157	-1,7363434	-0,0180998	0,98206304	98,206304	8,206304	-1,793696
14	13	0,17119324	-0,9494604	-0,0094441	0,99060039	99,060039	9,06003904	-0,939961
15	14	0,17812081	-0,9225503	-0,0091481	0,99089366	99,0893663	9,08936632	-0,9106337
16	15	0,98233026	2,10444684	0,02414892	1,02444286	102,444286	12,4442862	2,44428617
17	16	0,42924639	-0,1782931	-0,0009612	0,99903924	99,9039237	9,90392374	-0,0960763
18	17	0,2141143	-0,7922265	-0,0077145	0,99231519	99,2315188	9,23151885	-0,7684812
19	18	0,63434131	0,34337366	0,00477711	1,00478854	100,478854	10,4788539	0,47885388
20	19	0,25610378	-0,6554042	-0,0062094	0,99380979	99,3809793	9,38097929	-0,6190207
21	20	0,41410885	-0,216988	-0,0013869	0,99861409	99,8614093	9,86140933	-0,1385907
22	21	0,0915814	-1,3310796	-0,0136419	0,98645075	98,6450753	8,64507526	-1,3549247
23	22	0,84134333	0,99999415	0,01199994	1,01207222	101,207222	11,2072224	1,20722238
24	23	0,74747437	0,66656309	0,00833219	1,008367	100,8367	10,8367003	0,83670033
25	24	0,74307678	0,65286015	0,00818146	1,00821502	100,821502	10,8215021	0,82150213
26	25	0,77076332	0,74136302	0,00915499	1,00919703	100,919703	10,9197028	0,91970283
27	26	0,24357146	-0,6948602	-0,0066435	0,99337856	99,3378557	9,3378557	-0,6621443
28	27	0,271283	-0,6089373	-0,0056983	0,99431789	99,4317894	9,43178941	-0,5682106
29	28	0,82800605	0,9463151	0,01140947	1,0114748	101,14748	11,1474802	1,14748023
30	29	0,58932107	0,22579886	0,00348379	1,00348986	100,348986	10,3489863	0,34898629
31	30	0,76944769	0,73702916	0,00910732	1,00914892	100,914892	10,9148919	0,91489186
32	31	0,06178168	-1,5399876	-0,0159399	0,9841865	98,4186503	8,41865032	-1,5813497
33	32	0,86848498	1,11925811	0,01331184	1,01340084	101,340084	11,3400836	1,34008362
34	33	0,89217338	1,23816944	0,01461986	1,01472726	101,472726	11,4727257	1,47272568
35	34	0,55725276	0,14400759	0,00258408	1,00258743	100,258743	10,2587425	0,25874251
36	35	0,24486126	-0,6907502	-0,0065983	0,99342347	99,3423468	9,34234683	-0,6576532

	A	C	D	E	F	G	H	I
37	36	0,40637524	-0,2368792	-0,0016057	0,99839562	99,8395617	9,83956168	-0,1604383
38	37	0,63010476	0,33213082	0,00465344	1,00466428	100,466428	10,4664283	0,46642831
39	38	0,02325293	-1,9907728	-0,0208985	0,97931836	97,9318359	7,93183592	-2,0681641
40	39	0,07713127	-1,4246357	-0,014671	0,9854361	98,5436102	8,54361024	-1,4563898
41	40	0,32269948	-0,4601634	-0,0040618	0,99594644	99,5946441	9,59464407	-0,4053559
42	41	0,07718521	-1,4242628	-0,0146669	0,98544014	98,5440144	8,54401442	-1,4559856
43	42	0,90808552	1,32905765	0,01561963	1,01574226	101,574226	11,5742258	1,57422582
44	43	0,41449399	-0,2159997	-0,001376	0,99862495	99,862495	9,86249496	-0,137505
45	44	0,33934011	-0,4142647	-0,0035569	0,99644941	99,6449406	9,64494061	-0,3550594
46	45	0,88176864	1,18387456	0,01402262	1,0141214	101,41214	11,4121398	1,41213983
47	46	0,75225313	0,68159712	0,00849757	1,00853378	100,853378	10,8533775	0,85337751
48	47	0,28845984	-0,5578897	-0,0051368	0,99487638	99,4876384	9,48763835	-0,5123616
49	48	0,06294248	-1,5305325	-0,0158359	0,98428887	98,428887	8,42888699	-1,571113
50	49	0,72923672	0,61050615	0,00771557	1,00774541	100,774541	10,7745409	0,77454094
51	50	0,0947755	-1,3119085	-0,013431	0,9866588	98,66588	8,66587995	-1,33412
52	51	0,36429388	-0,3470047	-0,0028171	0,99718691	99,7186912	9,71869119	-0,2813088
53	52	0,32208786	-0,4618684	-0,0040806	0,99592776	99,5927762	9,5927762	-0,4072238
54	53	0,50818853	0,02052703	0,0012258	1,00122655	100,122655	10,1226549	0,12265489
55	54	0,04723928	-1,6722321	-0,0173946	0,98275586	98,2755859	8,27558591	-1,7244141
56	55	0,91866442	1,39614392	0,01635758	1,0164921	101,64921	11,6492101	1,64921009
57	56	0,41864117	-0,2053709	-0,0012591	0,99874171	99,8741712	9,87417122	-0,1258288
58	57	0,76669977	0,72802143	0,00900824	1,00904893	100,904893	10,9048932	0,9048932
59	58	0,30272633	-0,5165753	-0,0046823	0,99532862	99,5328617	9,53286168	-0,4671383
60	59	0,30379117	-0,5135275	-0,0046488	0,99536199	99,5361986	9,5361986	-0,4638014
61	60	0,64283242	0,36604009	0,00502644	1,00503909	100,503909	10,5039095	0,50390947
62	61	0,1134261	-1,2085073	-0,0122936	0,98778168	98,7781677	8,77816773	-1,2218323
63	62	0,45805569	-0,1053332	-0,0001587	0,99984135	99,9841347	9,98413469	-0,0158653
64	63	0,78774464	0,79862011	0,00978482	1,00983285	100,983285	10,9832849	0,9832849
65	64	0,85811157	1,0718735	0,01279061	1,01287276	101,287276	11,2872758	1,28727582
66	65	0,53859469	0,09689393	0,00206583	1,00206797	100,206797	10,2067969	0,20679686
67	66	0,48908681	-0,0273587	0,00069905	1,0006993	100,06993	10,0699298	0,06992984
68	67	0,59974088	0,25267646	0,00377944	1,00378659	100,378659	10,3786592	0,37865921
69	68	0,87922022	1,17109759	0,01388207	1,01397888	101,397888	11,3978877	1,39788769
70	69	0,80371137	0,85495284	0,01040448	1,0104588	101,04588	11,0458796	1,04587961
71	70	0,64796215	0,3798245	0,00517807	1,0051915	100,51915	10,5191499	0,51914989
72	71	0,24533326	-0,6892491	-0,0065817	0,99343987	99,3439872	9,3439872	-0,6560128

	A	C	D	E	F	G	H	I
74	73	0,17681072	-0,9275878	-0,0092035	0,99083876	99,0838757	9,08387566	-0,9161243
75	74	0,25313337	-0,6646619	-0,0063113	0,99370859	99,3708593	9,3708593	-0,6291407
76	75	0,77786828	0,76501363	0,00941515	1,00945961	100,945961	10,9459612	0,94596118
77	76	0,28371387	-0,5718439	-0,0052903	0,99472369	99,4723686	9,47236861	-0,5276314
78	77	0,66419929	0,42395116	0,00566346	1,00567953	100,567953	10,5679531	0,56795305
79	78	0,76573612	0,72487655	0,00897364	1,00901403	100,901403	10,9014026	0,90140259
80	79	0,92353454	1,42925514	0,01672181	1,0168624	101,68624	11,6862398	1,68623985
81	80	0,51742502	0,04369196	0,00148061	1,00148171	100,148171	10,1481708	0,14817082
82	81	0,3096693	-0,4967879	-0,0044647	0,99554528	99,5545285	9,55452845	-0,4454715
83	82	0,07378079	-1,4481983	-0,0149302	0,98518072	98,5180721	8,51807208	-1,4819279
84	83	0,13310822	-1,1118179	-0,01123	0,98883282	98,8832824	8,88328237	-1,1167176
85	84	0,224954	-0,7555684	-0,0073113	0,99271541	99,271541	9,27154096	-0,728459
86	85	0,98404119	2,14544078	0,02459985	1,02490492	102,490492	12,4904921	2,49049213
87	86	0,29261049	-0,5457745	-0,0050035	0,99500898	99,5008978	9,50089775	-0,4991022
88	87	0,74995136	0,6743367	0,0084177	1,00845323	100,845323	10,8453232	0,84532322
89	88	0,6815534	0,47204705	0,00619252	1,00621173	100,621173	10,6211731	0,62117308
90	89	0,39146111	-0,2755129	-0,0020306	0,99797142	99,7971418	9,79714184	-0,2028582
91	90	0,07739469	-1,4228164	-0,014651	0,98545582	98,5455823	8,54558231	-1,4544177
92	91	0,49896594	-0,002592	0,00097149	1,00097196	100,097196	10,097196	0,09719599
93	92	0,65379749	0,39559338	0,00535153	1,00536587	100,536587	10,5365872	0,53658722
94	93	0,00103557	-3,0798363	-0,0328782	0,96765641	96,7656413	6,76564132	-3,2343587
95	94	0,40223251	-0,2475727	-0,0017233	0,99827818	99,8278184	9,8278184	-0,1721816
96	95	0,53157939	0,07924064	0,00187165	1,0018734	100,18734	10,18734	0,18733997
97	96	0,69651434	0,51440148	0,00665842	1,00668063	100,668063	10,6680633	0,66806328
98	97	0,4308129	-0,174305	-0,0009174	0,99908307	99,9083066	9,90830659	-0,0916934
99	98	0,52679258	0,0672096	0,00173931	1,00174082	100,174082	10,1740819	0,1740819
100	99	0,67266233	0,44727664	0,00592004	1,0059376	100,59376	10,5937601	0,59376011
101	100	0,51849018	0,04636461	0,00151001	1,00151115	100,151115	10,1511151	0,15111513

Fogli di calcolo 3.11-12-13. Computazione scenari possibili per opzione call in ipotesi di indipendenza.

Quelli relativi all'opzione put:

scenario	p2	z2	r2	e^r	S1	P1	ΔP
1	0,09170251	-1,3303438	-0,014099	0,98599997	98,5999971	11,4000029	1,40000289
2	0,08368745	-1,380688	-0,0146779	0,98542928	98,5429283	11,4570717	1,45707167
3	0,88695257	1,21047973	0,01512052	1,01523541	101,523541	8,47645897	-1,523541
4	0,20091845	-0,8383451	-0,008441	0,99159456	99,1594556	10,8405444	0,84054439
5	0,23781183	-0,713359	-0,0070036	0,99302084	99,302084	10,697916	0,69791597
6	0,11331191	-1,2091016	-0,0127047	0,9873757	98,7375695	11,2624305	1,26243049
7	0,1338437	-1,1084039	-0,0115466	0,98851976	98,8519761	11,1480239	1,14802386
8	0,90731149	1,32437956	0,01643036	1,01656609	101,656609	8,34339143	-1,6566086
9	0,16822917	-0,9611866	-0,0098536	0,99019474	99,0194742	10,9805258	0,98052583
10	2,8782E-05	-4,0225781	-0,0450596	0,95594046	95,594046	14,405954	4,40595395
11	0,69999923	0,5243983	0,00723058	1,00725678	100,725678	9,27432158	-0,7256784
12	0,46734731	-0,0819398	0,00025769	1,00025773	100,025773	9,97422741	-0,0257726
13	0,88645798	1,20790441	0,0150909	1,01520534	101,520534	8,47946567	-1,5205343
14	0,03333989	-1,8338263	-0,019889	0,98030748	98,0307479	11,9692521	1,96925211
15	0,70979422	0,55278366	0,00755701	1,00758564	100,758564	9,24143616	-0,7585638
16	0,54221076	0,10600487	0,00241906	1,00242198	100,242198	9,75780157	-0,2421984
17	0,54722274	0,11864764	0,00256445	1,00256774	100,256774	9,74322611	-0,2567739
18	0,80874713	0,87328868	0,01124282	1,01130626	101,130626	8,86937422	-1,1306258
19	0,61176911	0,28393293	0,00446523	1,00447521	100,447521	9,55247873	-0,4475213
20	0,21964987	-0,7733763	-0,0076938	0,99233569	99,2335695	10,7664305	0,76643053
21	0,19034547	-0,8766239	-0,0088812	0,99115815	99,1158146	10,8841854	0,88418542
22	0,5411821	0,10341223	0,00238924	1,0023921	100,23921	9,76079029	-0,2392097
23	0,17451681	-0,9364654	-0,0095694	0,99047629	99,0476288	10,9523712	0,95237117
24	0,03301005	-1,8382872	-0,0199403	0,98025719	98,025719	11,974281	1,97428101
25	0,0455452	-1,6896737	-0,0182312	0,98193394	98,1933936	11,8066064	1,80660638
26	0,47252475	-0,0689248	0,00040737	1,00040745	100,040745	9,95925518	-0,0407448
27	0,16178949	-0,9871299	-0,010152	0,98989936	98,9899364	11,0100636	1,0100636
28	0,88502375	1,20048125	0,01500553	1,01511868	101,511868	8,48813174	-1,5118683
29	0,38033206	-0,3046088	-0,002303	0,99769965	99,7699649	10,2300351	0,23003512
30	0,13558063	-1,1003922	-0,0114545	0,98861084	98,8610842	11,1389158	1,13891577
31	0,23445196	-0,7242636	-0,007129	0,99289632	99,289632	10,710368	0,71036802
32	0,50829512	0,02079429	0,00143913	1,00144017	100,144017	9,85598296	-0,144017
33	0,59903359	0,25084646	0,00408473	1,00409309	100,409309	9,59069118	-0,4093088
34	0,20146051	-0,8364158	-0,0084188	0,99161656	99,1616557	10,8383443	0,83834432
35	0,27524798	-0,5970171	-0,0056657	0,99435032	99,4350323	10,5649677	0,56496771

36	0,49011774	-0,0247737	0,0009151	1,00091552	100,091552	9,90844785	-0,0915522
37	0,83492237	0,97380121	0,01239871	1,0124759	101,24759	8,75241034	-1,2475897
38	0,16827138	-0,9610187	-0,0098517	0,99019665	99,0196654	10,9803346	0,98033461
39	0,13969556	-1,0816882	-0,0112394	0,98882351	98,8823512	11,1176488	1,11764876
40	0,17919408	-0,9184408	-0,0093621	0,99068162	99,0681619	10,9318381	0,93183809
41	0,87171404	1,13453091	0,01424711	1,01434908	101,434908	8,56509209	-1,4349079
42	0,52915036	0,07313426	0,00204104	1,00204313	100,204313	9,79568716	-0,2043128
43	0,08160957	-1,3943261	-0,0148348	0,98527474	98,5274742	11,4725258	1,47252576
44	0,78126568	0,77647489	0,01012946	1,01018094	101,018094	8,98190621	-1,0180938
45	0,11961202	-1,1769285	-0,0123347	0,98774108	98,7741082	11,2258918	1,22589179
46	0,26521653	-0,6273451	-0,0060145	0,99400358	99,4003582	10,5996418	0,59964177
47	0,49505752	-0,0123893	0,00105752	1,00105808	100,105808	9,89419174	-0,1058083
48	0,23367507	-0,7267973	-0,0071582	0,99286739	99,286739	10,713261	0,71326104
49	0,94010418	1,55564878	0,01908996	1,01927334	101,927334	8,07266607	-1,9273339
50	0,29466927	-0,5397948	-0,0050076	0,99500488	99,5004877	10,4995123	0,49951231
51	0,25050875	-0,6728896	-0,0065382	0,9934831	99,3483097	10,6516903	0,65169031
52	0,64513221	0,37221123	0,00548043	1,00549547	100,549547	9,45045258	-0,5495474
53	0,62410436	0,31627831	0,0048372	1,00484892	100,484892	9,51510813	-0,4848919
54	0,30054899	-0,5228222	-0,0048125	0,99519911	99,5199106	10,4800894	0,48008943
55	0,14090843	-1,0762469	-0,0111768	0,98888539	98,888539	11,111461	1,11146103
56	0,02038897	-2,0457808	-0,0223265	0,97792091	97,7920912	12,2079088	2,20790875
57	0,88405525	1,19550574	0,01494832	1,0150606	101,50606	8,49393991	-1,5060601
58	0,76840585	0,73360699	0,00963648	1,00968306	100,968306	9,03169393	-0,9683061
59	0,60594845	0,26877464	0,00429091	1,00430013	100,430013	9,56998725	-0,4300128
60	0,06518864	-1,5126158	-0,0161951	0,98393535	98,3935354	11,6064646	1,60646464
61	0,90047401	1,2842572	0,01596896	1,01609714	101,609714	8,3902857	-1,6097143
62	0,09785786	-1,2938544	-0,0136793	0,98641381	98,6413811	11,3586189	1,35861889
63	0,57052239	0,17770429	0,0032436	1,00324887	100,324887	9,67511345	-0,3248866
64	0,70945377	0,55178968	0,00754558	1,00757412	100,757412	9,24258791	-0,7574121
65	0,80882489	0,87357414	0,0112461	1,01130958	101,130958	8,86904222	-1,1309578
66	0,21365502	-0,7938031	-0,0079287	0,99210261	99,2102613	10,7897387	0,78973866
67	0,99623719	2,67264349	0,0319354	1,03245081	103,245081	6,7549193	-3,2450807
68	0,10297727	-1,2647679	-0,0133448	0,98674382	98,6743817	11,3256183	1,32561834
69	0,64344564	0,36768421	0,00542837	1,00544313	100,544313	9,45568712	-0,5443129
70	0,03844667	-1,7690032	-0,0191435	0,98103854	98,1038537	11,8961463	1,89614634
71	0,36789576	-0,3374317	-0,0026805	0,99732313	99,7323125	10,2676875	0,26768749

71	0,36789576	-0,3374317	-0,0026805	0,99732313	99,7323125	10,2676875	0,26768749
72	0,16329175	-0,9810187	-0,0100817	0,98996893	98,9968935	11,0031065	1,00310652
73	0,85943912	1,07780283	0,01359473	1,01368756	101,368756	8,63124389	-1,3687561
74	0,23268483	-0,7300336	-0,0071954	0,99283044	99,2830439	10,7169561	0,71695612
75	0,26530275	-0,627082	-0,0060114	0,99400659	99,400659	10,599341	0,59934101
76	0,97242528	1,91769705	0,02325352	1,02352599	102,352599	7,6474013	-2,3525987
77	0,47612929	-0,0598707	0,00051149	1,00051162	100,051162	9,94883827	-0,0511617
78	0,01304455	-2,2248829	-0,0243862	0,97590879	97,5908787	12,4091213	2,40912132
79	0,74454221	0,65741272	0,00876025	1,00879873	100,879873	9,12012704	-0,879873
80	0,37103536	-0,3291124	-0,0025848	0,99741855	99,7418545	10,2581455	0,2581455
81	0,67255845	0,44698887	0,00634037	1,00636051	100,636051	9,36394853	-0,6360515
82	0,15470314	-1,0164686	-0,0104894	0,98956543	98,9565433	11,0434567	1,04345675
83	0,88777972	1,21480477	0,01517025	1,01528591	101,528591	8,47140927	-1,5285907
84	0,22821215	-0,7447476	-0,0073646	0,99266245	99,2662455	10,7337545	0,73375454
85	0,84688051	1,02314567	0,01296618	1,0130506	101,30506	8,69493994	-1,3050601
86	0,87686304	1,15944726	0,01453364	1,01463977	101,463977	8,53602296	-1,463977
87	0,23271774	-0,7299259	-0,0071941	0,99283167	99,2831668	10,7168332	0,7168332
88	0,36844759	-0,3359678	-0,0026636	0,99733992	99,7339915	10,2660085	0,2660085
89	0,67901777	0,46495391	0,00654697	1,00656845	100,656845	9,34315517	-0,6568448
90	0,29364056	-0,5427802	-0,005042	0,99497072	99,4970717	10,5029283	0,50292833
91	0,01848849	-2,086018	-0,0227892	0,97746851	97,7468505	12,2531495	2,25314949
92	0,11765274	-1,1868026	-0,0124482	0,98762893	98,7628928	11,2371072	1,23710717
93	0,83749851	0,98422888	0,01251863	1,01259732	101,259732	8,74026818	-1,2597318
94	0,55747438	0,14456892	0,00286254	1,00286664	100,286664	9,71333564	-0,2866644
95	0,69470642	0,5092355	0,00705621	1,00708116	100,708116	9,2918838	-0,7081162
96	0,08138172	-1,3958375	-0,0148521	0,98525762	98,5257618	11,4742382	1,47423823
97	0,22695258	-0,7489204	-0,0074126	0,99261482	99,261482	10,738518	0,73851796
98	0,44723141	-0,1326593	-0,0003256	0,99967447	99,9674471	10,0325529	0,03255291
99	0,8820169	1,1851296	0,01482899	1,01493949	101,493949	8,50605146	-1,4939485
100	0,61367138	0,28890087	0,00452236	1,0045326	100,45326	9,54673986	-0,4532601

Fogli di calcolo 3.14-15-16. Computazione scenari possibili per opzione put in ipotesi di indipendenza.

Le variazioni di portafoglio e le relative frequenze, invece:

scenario	Δportafoglio	frequenze	
1	-4,4940905	0,01	100%
2	-3,250172	0,01	99%
3	-2,8908935	0,01	98%
4	-2,8802301	0,01	97%
5	-2,8664215	0,01	96%
6	-2,8315466	0,01	95%
7	-2,6453084	0,01	94%
8	-2,4604953	0,01	93%
9	-2,2848804	0,01	92%
10	-1,9630793	0,01	91%
11	-1,8194686	0,01	90%
12	-1,4354444	0,01	89%
13	-1,3731532	0,01	88%
14	-1,2443247	0,01	87%
15	-1,152793	0,01	86%
16	-1,0878295	0,01	85%
17	-1,081523	0,01	84%
18	-1,066542	0,01	83%
19	-1,0331838	0,01	82%
20	-1,025255	0,01	81%
21	-0,9567712	0,01	80%
22	-0,9514894	0,01	79%
23	-0,9241609	0,01	78%
24	-0,9001884	0,01	77%
25	-0,8938142	0,01	76%
26	-0,8709817	0,01	75%
27	-0,859703	0,01	74%
28	-0,857852	0,01	73%
29	-0,8346077	0,01	72%
30	-0,7811614	0,01	71%
31	-0,7028891	0,01	70%
32	-0,6517719	0,01	69%
33	-0,6181699	0,01	68%
34	-0,6011669	0,01	67%
35	-0,5207762	0,01	66%
36	-0,4707393	0,01	65%

37	-0,458846	0,01	64%
38	-0,4384712	0,01	63%
39	-0,3883253	0,01	62%
40	-0,364388	0,01	61%
41	-0,362237	0,01	60%
42	-0,338741	0,01	59%
43	-0,3382747	0,01	58%
44	-0,302145	0,01	57%
45	-0,2519905	0,01	56%
46	-0,0926855	0,01	55%
47	0,0052955	0,01	54%
48	0,08781542	0,01	53%
49	0,09262794	0,01	52%
50	0,20663481	0,01	51%
51	0,37038151	0,01	50%
52	0,37740368	0,01	49%
53	0,40631631	0,01	48%
54	0,44185302	0,01	47%
55	0,50156673	0,01	46%
56	0,51679133	0,01	45%
57	0,52648216	0,01	44%
58	0,52986372	0,01	43%
59	0,57902142	0,01	42%
60	0,58304947	0,01	41%
61	0,58822705	0,01	40%
62	0,62783986	0,01	39%
63	0,64682455	0,01	38%
64	0,65839835	0,01	37%
65	0,80636689	0,01	36%
66	0,8596685	0,01	35%
67	0,88718158	0,01	34%
68	0,96801266	0,01	33%
69	1,05861843	0,01	32%
70	1,06341686	0,01	31%
71	1,09708683	0,01	30%
72	1,1322474	0,01	29%
73	1,18543207	0,01	28%

72	1,1322474	0,01	29%
73	1,18543207	0,01	28%
74	1,19606658	0,01	27%
75	1,21453842	0,01	26%
76	1,32794743	0,01	25%
77	1,33502073	0,01	24%
78	1,34275358	0,01	23%
79	1,36991299	0,01	22%
80	1,45301928	0,01	21%
81	1,54530219	0,01	20%
82	1,56215641	0,01	19%
83	1,59809335	0,01	18%
84	1,68572233	0,01	17%
85	1,77369439	0,01	16%
86	1,7890715	0,01	15%
87	2,05380764	0,01	14%
88	2,08207997	0,01	13%
89	2,09740823	0,01	12%
90	2,11037411	0,01	11%
91	2,1423015	0,01	10%
92	2,35034548	0,01	9%
93	2,41529622	0,01	8%
94	2,63803161	0,01	7%
95	2,72350603	0,01	6%
96	2,72630922	0,01	5%
97	2,76067112	0,01	4%
98	2,79578314	0,01	3%
99	3,31052391	0,01	2%
100	4,21004903	0,01	1%

Fogli di calcolo 3.17-18-19. Computazione scenari possibili per variazione del valore del portafoglio e frequenza in ipotesi di indipendenza. La seconda colonna rappresenta il livello di VaR per ogni livello di confidenza scelto.

3.4.6 Calcolo del VaR di portafoglio con Microsoft Excel in ipotesi di correlazione

L'applicazione Montecarlo al caso multivariato, come appena descritto, non presenta difficoltà aggiuntive rispetto al caso univariato. Tuttavia il procedimento appena presentato comporta dei limiti in termini di attendibilità dei risultati. È necessario, infatti, tenere in considerazione l'esistenza di correlazione tra i due fattori di mercato. La correlazione può essere stimata sulla base dei dati storici. La maggior parte dei siti istituzionali dei mercati finanziari evidenzia l'esistenza di un certo grado di correlazione tra i rendimenti dei fattori di mercato. Per esemplificare concretamente tale concetto riprendiamo ancora il caso precedente di un portafoglio semplificato di due opzioni esposte a due fattori di rischio:

sottostante	SBF 120	FTSE MIB
tipo	put	call
distribuzione	Normale	Normale
μ	0,12%	0,1%
σ^2	0,0132%	0,0121%
σ	1,15%	1,1%
S_0/F_0	100	100
C_0/P_0	10	10
K	110	90

Si ipotizzi, inoltre, che il coefficiente di correlazione ρ assuma un valore pari a 0,6. Sulla base di quanto descritto in precedenza questo implica una correlazione positiva mediamente forte. All'aumentare del rendimento di uno dei due fattori, aumenta anche quello dell'altro. Il fenomeno della correlazione non può e non deve essere ignorato nella fase di generazione dei valori assunti da ciascun fattore di rischio. Per ottenere un risultato che tenga in considerazione dell'esistenza di tale correlazione è possibile utilizzare varie tecniche, quella per cui si opta in questa sede è la costruzione della matrice varianze e covarianze. In termini formali tale matrice è data da:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x,y}^2 \\ \sigma_{x,y}^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\, \sigma_y \sigma_x \\ \rho\, \sigma_y \sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Nel caso specifico, tale matrice è data da:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0121\% & 0{,}0076\% \\ 0{,}0076\% & 0{,}0132\% \end{bmatrix}$$

Questa matrice può essere scomposta in due matrici simmetriche attraverso la scomposizione di Cholesky. Data una matrice quadrata che sia simmetrica e definita positiva, la scomposizione di Cholesky prevede che questa possa essere scomposta in due matrici simmetriche triangolari nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{d - b^2/a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{d - b^2/a} \end{bmatrix}$$

Nel nostro specifico caso la scomposizione risulta quindi:

$$\text{VC}=\begin{bmatrix}0{,}0121\% & 0{,}0076\% \\ 0{,}0076\% & 0{,}0132\%\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{0{,}0121\%} & 0 \\ \frac{0{,}0076\%}{\sqrt{0{,}0121\%}} & \sqrt{0{,}0132\% - {0{,}0076\%^2}/{0{,}0121\%}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{0{,}0121\%} & \frac{0{,}0076\%}{\sqrt{0{,}0121\%}} \\ 0 & \sqrt{0{,}0132\% - {0{,}0076\%^2}/{0{,}0121\%}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1{,}1\% & 0 \\ 0{,}691\% & 0{,}918\%\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1{,}1\% & 0{,}691\% \\ 0 & 0{,}918\%\end{bmatrix}$$

La matrice varianze-covarianze (VC) risulta quindi essere pari al prodotto di due matrici triangolari, l'una simmetrica rispetto all'altra AA':

$$\text{VC}=\text{AA}'.$$

Si può adesso procedere con la costruzione del vettore delle medie M:

$$\text{M} =\begin{bmatrix}\mu_x \\ \mu_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}12\% \\ 0{,}1\%\end{bmatrix}.$$

A questo punto si può calcolare il VaR.

Le prime fasi coincidono con quelle descritte nelle metodologie precedenti. È sempre necessario generare n=100 valori a partire da una variabile casuale uniformemente distribuita U con la funzione CASUALE(.). Poiché, però, come in precedenza, non è verosimile supporre che la distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato sia uniforme, i valori ottenuti, denominati con p_j saranno trasformati nei corrispondenti valori distribuiti secondo una Normale Standard, alla luce della relazione z_j=$N^{-1}(p_j)$. La funzione da utilizzare è INV.NORM.ST(probabilità). Essendo, in questo contesto, i fattori di rischio due, è chiaro che tali operazioni dovranno essere ripetute per entrambi i fattori di rischio. L'output di questa prima parte della simulazione saranno due vettori: il vettore P, che è costituito da due *n-ple* di valori estratti da una distribuzione uniforme, e il vettore Z, costituito anch'esso da due *n-ple,* che presenta il valori corrispondenti al vettore P in caso di distribuzione di tipo Normale Standard. Procedendo con la fase successiva si noteranno tutte le differenze rispetto al contesto precedente, in cui non si prendeva in considerazione il fenomeno della correlazione. Nel caso in cui il fattore di rischio fosse stato solo uno, per calcolare *r* ovvero il valore assunto dal fattore di mercato in ogni scenario in ipotesi di distribuzione normale, si sarebbe semplicemente moltiplicato il valore assuno dalla Normale Standard per la deviazione standard, aggiungendo poi a questa quantita la media, secondo la formula $r=F^{-1}(p)=\mu+z\sigma$. È evidente, però, in questo nuovo contesto, che tale formula non possa più essere utilizzata. In ipotesi di fattori di rischio correlati, infatti, nel calcolo del valore assunto da ciascuno in ogni scenario, è necessario considerare anche la distribuzione dell'altro fattore. In questa sede il rendimento r di ciascun fattore di rischio sarà pari a:

$$r = A'z + M.$$

Tale calcolo va evidentemente ripetuto per ogni fattore di rischio e ogni scenario. Una volta definito il valore del sottostante in ogni scenario, si computa il valore del portafoglio analogamente a quanto visto nei casi precedenti.
Nello specifico i calcoli risultano:

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	P	Q	R
1	scenario	p1	z1	r1	e^r1	F1	C1	ΔC		p2	z2	r2	e^r2	S1	P1	ΔP
2	1	0,7742199	0,752816484	0,00120053	1,00120125	100,120125	10,1201246	0,120124621307		0,75132001	0,6786495	0,00120047354	1,001201	100,120119	9,87988056	-0,1201194
3	2	0,2465139	-0,685501032	-0,0000004783	0,99999952	99,9999522	9,99995217	-0,000047832317		0,55745288	0,14451445	0,00100010084	1,001001	100,10006	9,89993989	-0,1000601
4	3	0,04156835	-1,732769149	-0,0000012091	0,99999879	99,9998791	9,99987909	-0,000120907672		0,75954638	0,70484413	0,00000049182	1,000000	100,000049	9,99995082	-4,918E-05
5	4	0,79116868	0,810482984	0,0000005655	1,00000057	100,000057	10,0000566	0,000056553233		0,71255237	0,56085665	0,00000039135	1,000000	100,000039	9,99996086	-3,914E-05
6	5	0,59209002	0,232924593	0,0000001625	1,00000016	100,000016	10,0000163	0,000016252823		0,047551	-1,6690776	-0,00000116464	0,999999	99,9998835	10,0001165	0,00011646
7	6	0,50171423	0,004296958	0,0000000030	1	100	10,0000003	0,000000299830		0,85174804	1,04395995	0,00000072845	1,000001	100,000073	9,99992716	-7,284E-05
8	7	0,13158605	-1,118925079	-0,0000007808	0,99999922	99,9999219	9,99992192	-0,000078075406		0,38021882	-0,3049062	-0,00000021275	1,000000	99,9999787	10,0000213	2,1275E-05
9	8	0,05367801	-1,610191624	-0,0000011235	0,99999888	99,9998876	9,99988765	-0,000112354568		0,48134587	-0,046776	-0,00000003264	1,000000	99,9999967	10,0000033	3,2639E-06
10	9	0,62063138	0,307139444	0,0000002143	1,00000021	100,000021	10,0000214	0,000021431327		0,10977693	-1,2277153	-0,00000085667	0,999999	99,9999143	10,0000857	8,5666E-05
11	10	0,00557459	-2,537988179	-0,0000017709	0,99999823	99,9998229	9,99982291	-0,000177093501		0,18814607	-0,8847488	-0,00000061735	0,999999	99,9999383	10,0000617	6,1735E-05
12	11	0,55170536	0,129971117	0,0000000907	1,00000009	100,000009	10,0000091	0,000009069018		0,61240121	0,28558293	0,00000019927	1,000000	100,00002	9,99998007	-1,993E-05
13	12	0,22178699	-0,76617199	-0,0000005346	0,99999947	99,9999465	9,99994654	-0,000053461307		0,05498103	-1,5983637	-0,00000111529	0,999999	99,9998885	10,0001115	0,00011153
14	13	0,19485738	-0,860134782	-0,0000006002	0,9999994	99,99994	9,99993998	-0,000060017761		0,58419883	0,21264697	0,00000014838	1,000000	100,000015	9,99998516	-1,484E-05
15	14	0,65067104	0,387132762	0,0000002701	1,00000027	100,000027	10,000027	0,000027013036		0,33070581	-0,4379651	-0,00000030560	1,000000	99,9999694	10,0000306	3,056E-05
16	15	0,95288596	1,673504195	0,0000011677	1,00000117	100,000117	10,0001168	0,000116772472		0,10217337	-1,2692645	-0,00000088566	0,999999	99,9999114	10,0000886	8,8566E-05
17	16	0,89587172	1,258373918	0,0000008781	1,00000088	100,000088	10,0000878	0,000087805822		0,56133374	0,1543516	0,00000010770	1,000000	100,000011	9,99998923	-1,077E-05
18	17	0,50247715	0,006209328	0,0000000043	1,000	100	10,0000004	0,000000433269		0,16710032	-0,9656874	-0,00000067383	0,999999	99,9999326	10,0000674	6,7383E-05
19	18	0,97283815	1,924246453	0,0000013427	1,00000134	100,000134	10,0001343	0,000134268581		0,21248563	-0,7978264	-0,00000055670	0,999999	99,9999443	10,0000557	5,567E-05
20	19	0,73456718	0,626685158	0,0000004373	1,00000044	100,000044	10,0000437	0,000043728333		0,7918559	0,81287766	0,00000056720	1,000001	100,000057	9,99994328	-5,672E-05
21	20	0,04996361	-1,64520657	-0,0000011480	0,99999885	99,9998852	9,9998852	-0,000114797809		0,941554	1,56795345	0,00000109407	1,000001	100,000109	9,99989059	-0,0001094
22	21	0,25067536	-0,672365998	-0,0000004692	0,99999953	99,9999531	9,99995308	-0,000046915792		0,33053796	-0,4384282	-0,00000030592	1,000000	99,9999694	10,0000306	3,0592E-05
23	22	0,10732116	-1,240901036	-0,0000008659	0,99999913	99,9999134	9,99991341	-0,000086586537		0,96149921	1,76835502	0,00000123391	1,000001	100,000123	9,99987661	-0,0001234
24	23	0,99429816	2,530079401	0,0000017654	1,00000177	100,000177	10,0001765	0,000176541962		0,61678348	0,29704383	0,00000020727	1,000000	100,000021	9,99997927	-2,073E-05
25	24	0,22996645	-0,738957337	-0,0000005156	0,99999948	99,9999484	9,99994844	-0,000051562346		0,42822902	-0,1808848	-0,00000012622	1,000000	99,9999874	10,0000126	1,2622E-05
26	25	0,35578779	-0,369740855	-0,0000002580	0,99999974	99,9999742	9,9999742	-0,000025799471		0,89278974	1,24150156	0,00000086628	1,000001	100,000087	9,99991337	-8,663E-05
27	26	0,37626922	-0,315294007	-0,0000002200	0,99999978	99,999978	9,999978	-0,000022000324		0,17336462	-0,9409524	-0,00000065657	0,999999	99,9999343	10,0000657	6,5657E-05
28	27	0,94912042	1,636384385	0,0000011418	1,00000114	100,000114	10,0001142	0,000114182353		0,23296154	-0,7291285	-0,00000050877	0,999999	99,9999491	10,0000509	5,0877E-05
29	28	0,25575084	-0,656501234	-0,0000004581	0,99999954	99,9999542	9,99995419	-0,000045808794		0,53716881	0,09330359	0,00000006510	1,000000	100,000007	9,99999349	-6,51E-06
30	29	0,51918599	0,048110706	0,0000000336	1,00000003	100,000003	10,0000034	0,000003357029		0,97147971	1,90299971	0,00000132786	1,000001	100,000133	9,99986721	-0,0001328
31	30	0,19532789	-0,858428703	-0,0000005990	0,9999994	99,9999401	9,9999401	-0,000059898716		0,61901604	0,30289758	0,00000021135	1,000000	100,000021	9,99997886	-2,114E-05
32	31	0,08010644	-1,404355942	-0,0000009799	0,99999902	99,999902	9,99990201	-0,000097991949		0,87907011	1,1703509	0,00000081664	1,000001	100,000082	9,99991834	-8,166E-05
33	32	0,38782256	-0,284998715	-0,0000001989	0,9999998	99,9999801	9,99998011	-0,000019886405		0,76705652	0,72918751	0,00000050881	1,000001	100,000051	9,99994912	-5,088E-05
34	33	0,56993823	0,176216898	0,0000001230	1,00000012	100,000012	10,0000123	0,000012295919		0,52012109	0,0504575	0,00000003521	1,000000	100,000004	9,99999648	-3,521E-06
35	34	0,68618846	0,485075102	0,0000003385	1,00000034	100,000034	10,0000338	0,000033847178		0,8410056	0,99859938	0,00000069679	1,000001	100,00007	9,99993032	-6,968E-05
36	35	0,69043165	0,497074239	0,0000003468	1,00000035	100,000035	10,0000347	0,000034684445		0,97401202	1,94333281	0,00000135600	1,000001	100,000136	9,9998644	-0,0001356
37	36	0,92996241	1,475511099	0,0000010296	1,00000103	100,000103	10,000103	0,000102957057		0,53243558	0,08139373	0,00000005679	1,000000	100,000006	9,99999432	-5,679E-06

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	P	Q	R
37	36	0,92996241	1,475511099	0,0000010296	1,00000103	100,000103	10,000103	0,000102957057		0,53243558	0,08139373	0,00000005679	1,000000	100,000006	9,99999432	-5,679E-06
38	37	0,16640037	-0,968487927	-0,0000006758	0,99999932	99,9999324	9,99993242	-0,000067578334		0,3337385	-0,4296133	-0,00000029977	1,000000	99,99997	10,00003	2,9977E-05
39	38	0,49605521	-0,009888273	-0,0000000069	0,99999999	99,9999993	9,99999931	-0,000000689976		0,69783428	0,51818179	0,00000036157	1,000000	100,000036	9,99996384	-3,616E-05
40	39	0,95713673	1,718384308	0,0000011990	1,0000012	100,00012	10,0001199	0,000119904083		0,71192786	0,55902557	0,00000039007	1,000000	100,000039	9,99996099	-3,901E-05
41	40	0,87569369	1,153725755	0,0000008050	1,00000081	100,000081	10,0000805	0,000080503762		0,49040854	-0,0240446	-0,00000001678	1,000000	99,9999983	10,0000017	1,6778E-06
42	41	0,55534581	0,139179419	0,0000000971	1,0000001	100,00001	10,0000097	0,000009711548		0,41541833	-0,2136286	-0,00000014906	1,000000	99,9999851	10,0000149	1,4906E-05
43	42	0,17937043	-0,917766999	-0,0000006404	0,99999936	99,999936	9,99993596	-0,000064039173		0,41505595	-0,214558	-0,00000014971	1,000000	99,999985	10,000015	1,4971E-05
44	43	0,69540635	0,511233884	0,0000003567	1,00000036	100,000036	10,0000357	0,000035672465		0,76470476	0,72151863	0,00000050346	1,000001	100,00005	9,99994965	-5,035E-05
45	44	0,64589206	0,3742533	0,0000002611	1,00000026	100,000026	10,0000261	0,000026114343		0,63706677	0,3506293	0,00000024466	1,000000	100,000024	9,99997553	-2,447E-05
46	45	0,47003648	-0,075178158	-0,0000000525	0,99999995	99,9999948	9,99999475	-0,000005245720		0,14552554	-1,0558187	-0,00000073672	0,999999	99,9999263	10,0000737	7,3672E-05
47	46	0,30966598	-0,496797364	-0,0000003467	0,99999965	99,9999653	9,99996533	-0,000034665113		0,31721994	-0,475487	-0,00000033178	1,000000	99,9999668	10,0000332	3,3178E-05
48	47	0,34395431	-0,401694852	-0,0000002803	0,99999972	99,999972	9,99997197	-0,000028029130		0,35812865	-0,3634654	-0,00000025362	1,000000	99,9999746	10,0000254	2,5362E-05
49	48	0,28924975	-0,555577825	-0,0000003877	0,99999961	99,9999612	9,99996123	-0,000038766646		0,90211883	1,29371947	0,00000090272	1,000001	100,00009	9,99990973	-9,027E-05
50	49	0,14556162	-1,055660718	-0,0000007366	0,99999926	99,9999263	9,99992634	-0,000073661001		0,35733442	-0,365593	-0,00000025510	1,000000	99,9999745	10,0000255	2,551E-05
51	50	0,52068473	0,051872189	0,0000000362	1,00000004	100,000004	10,0000036	0,000003619495		0,31114109	-0,4926185	-0,00000034374	1,000000	99,9999656	10,0000344	3,4374E-05
52	51	0,96280179	1,784167639	0,0000012449	1,00000124	100,000124	10,0001245	0,000124494264		0,21886486	-0,7760326	-0,00000054149	0,999999	99,9999459	10,0000541	5,4149E-05
53	52	0,91445459	1,368707178	0,0000009550	1,00000096	100,000096	10,0000955	0,000095504573		0,63539136	0,34616691	0,00000024155	1,000000	100,000024	9,99997585	-2,415E-05
54	53	0,29819066	-0,529611489	-0,0000003695	0,99999963	99,999963	9,99996305	-0,000036954789		0,99709519	2,75833742	0,00000192469	1,000002	100,000192	9,99980753	-0,0001925
55	54	0,80234785	0,850037402	0,0000005931	1,00000059	100,000059	10,0000593	0,000059313230		0,69407033	0,50742117	0,00000035406	1,000000	100,000035	9,99996459	-3,541E-05
56	55	0,94333001	1,583357627	0,0000011048	1,0000011	100,00011	10,0001105	0,000110482291		0,35219258	-0,3794077	-0,00000026474	1,000000	99,9999735	10,0000265	2,6474E-05
57	56	0,42542676	-0,188029506	-0,0000001312	0,99999987	99,9999869	9,99998688	-0,000013120168		0,03594302	-1,7998391	-0,00000125588	0,999999	99,9998744	10,0001256	0,00012559
58	57	0,50384947	0,009649343	0,0000000067	1,00000001	100,000001	10,0000007	0,000000673304		0,42209584	-0,1965347	-0,00000013714	1,000000	99,9999863	10,0000137	1,3714E-05
59	58	0,0087119	-2,37764078	-0,0000016591	0,99999834	99,9998341	9,9998341	-0,000165904931		0,7624748	0,71428591	0,00000049841	1,000000	100,00005	9,99995016	-4,984E-05
60	59	0,51226454	0,030747498	0,0000000215	1,00000002	100,000002	10,0000021	0,000002145474		0,71494778	0,56789768	0,00000039626	1,000000	100,00004	9,99996037	-3,963E-05
61	60	0,65792313	0,406801552	0,0000002839	1,00000028	100,000028	10,0000284	0,000028385469		0,42416573	-0,1912478	-0,00000013345	1,000000	99,9999867	10,0000133	1,3345E-05
62	61	0,988933	2,288060393	0,0000015965	1,0000016	100,00016	10,0001597	0,000159654529		0,3282866	-0,4446493	-0,00000031026	1,000000	99,999969	10,000031	3,1026E-05
63	62	0,43658688	-0,159628462	-0,0000001114	0,99999989	99,9999889	9,99998886	-0,000011138423		0,40067308	-0,2516053	-0,00000017556	1,000000	99,9999824	10,0000176	1,7556E-05
64	63	0,64830758	0,380755301	0,0000002657	1,00000027	100,000027	10,0000266	0,000026568035		0,99327781	2,47177585	0,00000172474	1,000002	100,000172	9,99982753	-0,0001725
65	64	0,58192248	0,206814118	0,0000001443	1,00000014	100,000014	10,0000144	0,000014430907		0,09473238	-1,3121641	-0,00000091559	0,999999	99,9999084	10,0000916	9,1559E-05
66	65	0,3880379	-0,284436628	-0,0000001985	0,9999998	99,9999802	9,99998015	-0,000019847184		0,87880349	1,16902633	0,00000081571	1,000001	100,000082	9,99991843	-8,157E-05
67	66	0,32641307	-0,449839549	-0,0000003139	0,99999969	99,9999686	9,99996861	-0,000031388530		0,84083412	0,99789195	0,00000069630	1,000001	100,00007	9,99993037	-6,963E-05
68	67	0,80013159	0,842091346	0,0000005876	1,00000059	100,000059	10,0000588	0,000058758777		0,08251891	-1,3883259	-0,00000096873	0,999999	99,9999031	10,0000969	9,6873E-05
69	68	0,67470325	0,452937841	0,0000003160	1,00000032	100,000032	10,0000316	0,000031604730		0,76454925	0,72101304	0,00000050310	1,000001	100,00005	9,99994969	-5,031E-05
70	69	0,35898992	-0,361160014	-0,0000002520	0,99999975	99,9999748	9,9999748	-0,000025200724		0,6924238	0,50273243	0,00000035079	1,000000	100,000035	9,99996492	-3,508E-05
71	70	0,36070524	-0,356574345	-0,0000002488	0,99999975	99,9999751	9,99997512	-0,000024880749		0,12383428	-1,1560308	-0,00000080665	0,999999	99,9999193	10,0000807	8,0665E-05
72	71	0,26720094	-0,621300564	-0,0000004335	0,99999957	99,9999566	9,99995665	-0,000043352592		0,11096316	-1,2214219	-0,00000085227	0,999999	99,9999148	10,0000852	8,5227E-05
73	72	0,66670144	0,430822939	0,0000003006	1,0000003	100,00003	10,0000301	0,000030061614		0,68674642	0,48664889	0,00000033957	1,000000	100,000034	9,99996604	-3,396E-05

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	P	Q	R
74	73	0,005596	-2,536645941	-0,0000017700	0,99999823	99,999823	9,999823	-0,000176999844		0,78014354	0,77267807	0,00000053915	1,000001	100,000054	9,99994608	-5,392E-05
75	74	0,6813445	0,471461783	0,0000003290	1,00000033	100,000033	10,0000329	0,000032897279		0,42697051	-0,1840923	-0,00000012845	1,000000	99,9999872	10,0000128	1,2845E-05
76	75	0,48577558	-0,035662881	-0,0000000249	0,99999998	99,9999975	9,99999751	-0,000002488455		0,35395829	-0,3746557	-0,00000026142	1,000000	99,9999739	10,0000261	2,6142E-05
77	76	0,08720938	-1,358141593	-0,0000009477	0,99999905	99,9999052	9,99990523	-0,000094767245		0,79914651	0,83857654	0,00000058514	1,000001	100,000059	9,99994149	-5,851E-05
78	77	0,57692413	0,194030827	0,0000001354	1,00000014	100,000014	10,0000135	0,000013538925		0,93341719	1,50173481	0,00000104787	1,000001	100,000105	9,99989521	-0,0001048
79	78	0,07202609	-1,460866118	-0,0000010194	0,99999898	99,9998981	9,99989806	-0,000101935066		0,01739658	-2,1107576	-0,00000147283	0,999999	99,9998527	10,0001473	0,00014728
80	79	0,12192994	-1,165393182	-0,0000008132	0,99999919	99,9999187	9,99991868	-0,000081317817		0,91466918	1,37008091	0,00000095600	1,000001	100,000096	9,9999044	-9,56E-05
81	80	0,80672387	0,865886775	0,0000006042	1,0000006	100,00006	10,0000604	0,000060419156		0,25680123	-0,6532386	-0,00000045581	1,000000	99,9999544	10,0000456	4,5581E-05
82	81	0,41840677	-0,205971033	-0,0000001437	0,99999986	99,9999856	9,99998563	-0,000014372077		0,28926555	-0,5555316	-0,00000038763	1,000000	99,9999612	10,0000388	3,8763E-05
83	82	0,94832205	1,628797435	0,0000011365	1,00000114	100,000114	10,0001137	0,000113652956		0,05111988	-1,634091	-0,00000114022	0,999999	99,999886	10,000114	0,00011402
84	83	0,89153065	1,234709327	0,0000008615	1,00000086	100,000086	10,0000862	0,000086154572		0,43499141	-0,1636803	-0,00000011421	1,000000	99,9999886	10,0000114	1,1421E-05
85	84	0,05047183	-1,640295876	-0,0000011446	0,99999886	99,9998855	9,99988554	-0,000114455155		0,56253011	0,15738711	0,00000010982	1,000000	100,000011	9,99998902	-1,098E-05
86	85	0,04325932	-1,714054942	-0,0000011960	0,9999988	99,9998804	9,9998804	-0,000119601849		0,46014436	-0,10007	-0,00000006983	1,000000	99,999993	10,000007	6,9826E-06
87	86	0,32726623	-0,447474562	-0,0000003122	0,99999969	99,9999688	9,99996878	-0,000031223508		0,19387561	-0,8637027	-0,00000060267	0,999999	99,9999397	10,0000603	6,0267E-05
88	87	0,6514038	0,389113226	0,0000002715	1,00000027	100,000027	10,0000272	0,000027151227		0,07490362	-1,4402127	-0,00000100494	0,999999	99,9998995	10,0001005	0,00010049
89	88	0,35178055	-0,380517779	-0,0000002655	0,99999973	99,9999734	9,99997345	-0,000026551454		0,89704552	1,26489501	0,00000088261	1,000001	100,000088	9,99991174	-8,826E-05
90	89	0,10517614	-1,252597353	-0,0000008740	0,99999913	99,9999126	9,9999126	-0,000087402673		0,73047766	0,61425825	0,00000042861	1,000000	100,000043	9,99995714	-4,286E-05
91	90	0,10416661	-1,258161886	-0,0000008779	0,99999912	99,9999122	9,99991221	-0,000087790950		0,78272459	0,78142798	0,00000054526	1,000001	100,000055	9,99994547	-5,453E-05
92	91	0,71518722	0,568603042	0,0000003968	1,0000004	100,00004	10,0000397	0,000039675525		0,99964057	3,38228604	0,00000236006	1,000002	100,000236	9,99976399	-0,000236
93	92	0,70617222	0,542236551	0,0000003784	1,00000038	100,000038	10,0000378	0,000037835745		0,36989556	-0,33213	-0,00000023175	1,000000	99,9999768	10,0000232	2,3175E-05
94	93	0,60139563	0,256961179	0,0000001793	1,00000018	100,000018	10,0000179	0,000017930028		0,86955394	1,12428506	0,00000078449	1,000001	100,000078	9,99992155	-7,845E-05
95	94	0,45250563	-0,119333356	-0,0000000833	0,99999992	99,9999917	9,99999167	-0,000008326745		0,97082895	1,89311856	0,00000132096	1,000001	100,000132	9,9998679	-0,0001321
96	95	0,91499796	1,372190678	0,0000009575	1,00000096	100,000096	10,0000957	0,000095747642		0,3137076	-0,4853682	-0,00000033868	1,000000	99,9999661	10,0000339	3,3868E-05
97	96	0,6677434	0,4336905	0,0000003026	1,0000003	100,00003	10,0000303	0,000030261705		0,50892549	0,02237476	0,00000001561	1,000000	100,000002	9,99999844	-1,561E-06
98	97	0,96005184	1,751287949	0,0000012220	1,00000122	100,000122	10,0001222	0,000122200009		0,52048994	0,05138327	0,00000003585	1,000000	100,000004	9,99999641	-3,585E-06
99	98	0,87530499	1,151832233	0,0000008037	1,0000008	100,00008	10,0000804	0,000080371637		0,61676872	0,29700518	0,00000020724	1,000000	100,000021	9,99997928	-2,072E-05
100	99	0,07361595	-1,449378563	-0,0000010113	0,99999899	99,9998989	9,99989887	-0,000101133498		0,01334022	-2,2161615	-0,00000154638	0,999998	99,9998454	10,0001546	0,00015464
101	100	0,46337942	-0,091923473	-0,0000000641	0,99999994	99,9999936	9,99999359	-0,000006414161		0,67974812	0,46699456	0,00000032586	1,000000	100,000033	9,99996741	-3,259E-05
102																

Fogli di calcolo 3.20-21-22. Computazione scenari possibili per variazione del valore di sottostante, opzioni e portafoglio in ipotesi di correlazione.

Δportafoglio			
0,000005181379	0,000227675	0,01	1%
-0,100107942889	0,000205338	0,01	2%
-0,000170089720	0,000190681	0,01	3%
0,000017418230	0,000189939	0,01	4%
0,000132716284	0,000178644	0,01	5%
-0,000072544778	0,000165059	0,01	6%
-0,000056799917	0,000155815	0,01	7%
-0,000109090669	0,000155632	0,01	8%
0,000107097803	0,000136956	0,01	9%
-0,000115358246	0,000132716	0,01	10%
-0,000010858155	0,000129615	0,01	11%
0,000058067944	0,000127645	0,01	12%
-0,000074855669	0,000118615	0,01	13%
0,000057572998	0,000112467	0,01	14%
0,000205338132	0,000107098	0,01	15%
0,000077035602	0,000106	0,01	16%
0,000067816189	0,00010599	0,01	17%
0,000189938640	9,75757E-05	0,01	18%
-0,000012991995	9,72776E-05	0,01	19%
-0,000224205239	8,21815E-05	0,01	20%
-0,000016323515	8,08968E-05	0,01	21%
-0,000209977440	7,70356E-05	0,01	22%
0,000155815079	7,135E-05	0,01	23%
-0,000038940719	6,84263E-05	0,01	24%
-0,000112427986	6,78162E-05	0,01	25%
0,000043656662	6,10108E-05	0,01	26%
0,000165058870	5,96475E-05	0,01	27%
-0,000052319256	5,80679E-05	0,01	28%
-0,000129429012	5,7573E-05	0,01	29%
-0,000081034057	5,57838E-05	0,01	30%
-0,000179655768	5,35039E-05	0,01	31%
-0,000070767066	4,57427E-05	0,01	32%
0,000008775137	4,53475E-05	0,01	33%
-0,000035832295	4,36567E-05	0,01	34%
-0,000100915931	4,18747E-05	0,01	35%
0,000097277632	4,17302E-05	0,01	36%

0,000097277632	4,17302E-05	0,01	36%
-0,000037601137	3,7993E-05	0,01	37%
-0,000036847246	2,90432E-05	0,01	38%
0,000080896848	2,87005E-05	0,01	39%
0,000082181523	2,4618E-05	0,01	40%
0,000024617951	2,43913E-05	0,01	41%
-0,000049067918	2,39068E-05	0,01	42%
-0,000014673083	2,3654E-05	0,01	43%
0,000001648416	1,74182E-05	0,01	44%
0,000068426302	1,43869E-05	0,01	45%
-0,000001486975	8,77514E-06	0,01	46%
-0,000002667546	6,41788E-06	0,01	47%
-0,000129038784	5,18138E-06	0,01	48%
-0,000048150958	1,64842E-06	0,01	49%
0,000037993019	-1,48698E-06	0,01	50%
0,000178643618	-2,66755E-06	0,01	51%
0,000071350019	-3,89538E-06	0,01	52%
-0,000229423981	-1,08582E-05	0,01	53%
0,000023906806	-1,2992E-05	0,01	54%
0,000136956285	-1,46731E-05	0,01	55%
0,000112467453	-1,63235E-05	0,01	56%
0,000014386939	-1,87055E-05	0,01	57%
-0,000215745800	-3,58323E-05	0,01	58%
-0,000037480833	-3,68472E-05	0,01	59%
0,000041730201	-3,74808E-05	0,01	60%
0,000190680900	-3,76011E-05	0,01	61%
0,000006417883	-3,89407E-05	0,01	62%
-0,000145905662	-3,89997E-05	0,01	63%
0,000105989979	-4,8151E-05	0,01	64%
-0,000101418577	-4,90679E-05	0,01	65%
-0,000101018641	-5,23193E-05	0,01	66%
0,000155632198	-5,67999E-05	0,01	67%
-0,000018705539	-6,028E-05	0,01	68%
-0,000060279981	-6,05194E-05	0,01	69%
0,000055783788	-7,07671E-05	0,01	70%
0,000041874747	-7,25448E-05	0,01	71%
-0,000003895379	-7,48557E-05	0,01	72%

0,000105989979	-4,8151E-05	0,01	64%
-0,000101418577	-4,90679E-05	0,01	65%
-0,000101018641	-5,23193E-05	0,01	66%
0,000155632198	-5,67999E-05	0,01	67%
-0,000018705539	-6,028E-05	0,01	68%
-0,000060279981	-6,05194E-05	0,01	69%
0,000055783788	-7,07671E-05	0,01	70%
0,000041874747	-7,25448E-05	0,01	71%
-0,000003895379	-7,48557E-05	0,01	72%
-0,000230915155	-8,10341E-05	0,01	73%
0,000045742722	-9,12479E-05	0,01	74%
0,000023653956	-0,000100916	0,01	75%
-0,000153280769	-0,000101019	0,01	76%
-0,000091247950	-0,000101419	0,01	77%
0,000045347536	-0,000109091	0,01	78%
-0,000176918245	-0,000112428	0,01	79%
0,000106000294	-0,000112619	0,01	80%
0,000024391345	-0,000114812	0,01	81%
0,000227675151	-0,000115358	0,01	82%
0,000097575721	-0,000125437	0,01	83%
-0,000125437184	-0,000129039	0,01	84%
-0,000112619243	-0,000129429	0,01	85%
0,000029043213	-0,000130264	0,01	86%
0,000127645157	-0,000140423	0,01	87%
-0,000114812300	-0,000142317	0,01	88%
-0,000130263891	-0,000145906	0,01	89%
-0,000142316806	-0,000153281	0,01	90%
-0,000196331135	-0,00017009	0,01	91%
0,000061010835	-0,000176918	0,01	92%
-0,000060519444	-0,000179656	0,01	93%
-0,000140423306	-0,000196331	0,01	94%
0,000129615259	-0,000209977	0,01	95%
0,000028700457	-0,000215746	0,01	96%
0,000118614630	-0,000224205	0,01	97%
0,000059647451	-0,000229424	0,01	98%
0,000053503884	-0,000230915	0,01	99%
-0,000038999730	-0,100107943	0,01	100%

Fogli di calcolo 3.23-24-25. Computazione scenari possibili per variazione del valore del portafoglio e frequenza in ipotesi di correlazione. La seconda colonna rappresenta il livello di VaR per ogni livello di confidenza scelto.

3.4.7 Calcolo del VaR con simulazione Montecarlo: considerazioni finali

Dalle pagine precedenti risulta subito evidente che il metodo di stima del VaR basato sull'implementazione della simulazione Montecarlo sia, quanto meno da un punto di vista concettuale, il più complesso. Tuttavia tale metodologia risulta sempre più diffusa tra gli intermediari perché fornisce, spesso, una stima più precisa rispetto alle altre due tecniche. La simulazione in esame, infatti, permette soprattutto di valutare un portafoglio considerando gli effetti di tutti i fattori che sono in grado di influenzarlo. Questa maggiore affidabilità della stima ha però dei costi. Tali costi sono connessi soprattutto alla necessità di dotarsi di strumentazioni adatte e personale qualificato che sia in grado di implementare la simulazione e analizzarne i risultati. Rispetto alla tecnica analitica, ad esempio, la simulazione Montecarlo presenta delle difficoltà e complessità di implementazione significatice. Il beneficio, però, è connesso alla possibilità di rappresentare le evoluzioni dei rendimenti dei fattori di mercato, indipendentemente dalla loro distribuzione. In ultima analisi non è possibile stabilire quale tecnica sia migliore o più attendibile. È possibile affermare, però, che la scelta è rimessa all'intermediario e costretta dalla sua complessità e dagli strumenti con cui opera. Le unità di risk-management dovranno essere in grado di valutare questi strumenti e scegliere quale metodologia implementare, con la consapevolezza dei benefici e costi connessi a ciascuna.

Conclusioni

Nel corso di questi capitoli si è descritto come la simulazione Montecarlo possa fornire degli strumenti utili per la risoluzione di problemi finanziari complessi da un punto di vista analitico, che non presentano soluzioni in forma chiusa. Si tratta, quindi, di uno strumento certamente molto utile, poichè, al di là delle difficoltà applicative, permette la risoluzione di problematiche analiticamente "impossibili" da elaborare. La letteratura sottolinea con forza il connubio esistente tra simulazione Monecarlo ed elaboratori elettronici. Tale metodo di soluzione, infatti, trova la sua ragion d'essere nel moderni calcolatori, in grado di generare l'elevato numero di valori casuali su cui la simulazione basa il suo funzionamento.
In questa riflessione conclusiva, però, è bene soffermarsi sul significato che assume il concetto di *casualità* in modo tale da delimitare con chiarezza l'ambito di applicazione della simulazione oggetto di analisi. La simulazione Montecarlo si basa su algoritmi di generazione di numeri pseudo-casuali. Ciò implica che si conosca la distribuzione statistica di denistà di probabiltà del carattere che deve essere stimato. Questa osservazione è di portata significativa, poichè permette di evidenziare il carattere distintivo della simulazione in esame. Questa, infatti, restituisce una stima attendibile soltanto in circostanze di piena conoscenza dei parametri da utilizzare come imput. Nello specifico, per il pricing di opzioni e altri derivati sarà necessario conoscere la distribuzione del sottostante. Nel caso del VaR, invece, è irrinunciabile la conoscenza di forma e parametri della distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio che influenzano il portafoglio.
La simulazione Montecarlo, quindi, non può e non deve essere considerata uno strumento in grado di sopperire all'assenza di conoscenze circa il parametro da stimare. Poichè i risultati ottenuti devono essere attendibili, sono necessari degli studi preparatori che permettano l'implentazione della simulazione con parametri di imput che siano il più verosimili possibile.
Un secondo aspetto rilevante, che è stato enfatizzato a più riprese nel corso dell'elaborato, sono i costi di implementazione. La simulazione Montecarlo, infatti, applicata a contesti reali in cui non è possibile imporre ipotesi restrittive come quelle avanzate in questa sede, presenta delle significative complessità applicative, che portano ad un aumento dei costi da sostenere per la sua utilizzazione. Emblematico, in questo senso, è il caso del calcolo del VaR. Qualora per stimare la perdita massima di un portafoglio, l'intermediario optasse per la tecnica di tipo simulativo-Montecarlo, sicuramente (a patto di una corretta e puntuale applicazione) le stime ottenute sarebbero verosimili e piuttosto precise, ma contemporaneamente sarebbero significativi i costi da sostenere per l'implementazione. Costi che sono connessi, in primo luogo, alle risorse umane che necessitano di competenze tecniche e accademiche, tali da consentirgli una piena comprensione di strategie e risultati. L'area di gestione dei rischi, infatti, è una delle aree più delicate dell'operatività bancaria, i cui errori possono portare a danni dal punto di vista della solvibilità e stabilità dell'intermediario stesso. Ingenti, però, sono anche i costi che l'intermediario sostiene per dotarsi delle infrastrutture software necessarie per la realizzazione della simulazione. La

complessità operativa è un ostacolo oggettivo che potrebbe rallentare l'applicazione delle tecniche Montecarlo.

Bibliografia

AA.VV(1997), *Enceclopedia delle Scienze Sociali Treccani;*

Alemanni B., Anolli M., Millon Cornett M., Saunders A.(2015), *Economia dei mercati e degli intermediari finanziari,* McGraw Hill;

Artzner P., Delbaen F., Eber J., Heath D.(1998), *Coherent measures of risk;*

Berk J., DeMarzo P.(2014), *Corporate Finance-global edition,* Pearson;

Betti F.(2001), *Value at risk: la gestione dei rischi finanziari e la creazione del valore, Il Sole 24 Ore,* Milano;

Boyle P.(1997),"*Options:a Montecarlo approach",* in *Journal of Financial Economics, 4;*

Boyle P. et al.(1997), *"Montecarlo methods for security pricing",* in *Journal of Economics Dynamics and Control;*

Casarin R., Gobbo M.(2012), *Metodi Montecarlo per la valutazione di opzioni finanziarie;*

Chiodi M., *Tecniche di simulazione statistica,* Università degli Studi di Palermo;

Consiglio A., Lacagnina V., Tumminiello M.(2015), *Integrazione numerica,* Università degli Studi di Palermo;

Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.(1979), *Option pricing: a simplified approach,* in *Journal of Financial Economics;*

Della Lunga G., *Introduzione al metodo Montecarlo,* Università degli Studi di Bologna;

Di Clemente A., *Modelli parametrici di stima del rischio di mercato,* Università degli studi di Roma La Sapienza;

Fabi S.(1998), *Un'introduzione all'analisi Montecarlo in Finanza;*

Furlan S.(2004), *Il value at risk per la gestione del rischio di mercato: metodi di calcolo e procedure di backtesting,* Università degli studi di Padova;

Groueff S.(1968), *Progetto Manhattan,* Mondadori;

Jackel P.(2002), *Monte Carlo methods in finance,* John Wiley & Sons, Chichester;

Lopez J.A.(1999), *Methods for Evaluating Value at Risk Estimates,* in *Economic Review;*

Metropolis M.(1987), *"The beginning of Montecarlo method", Los Alamos Science;*

Monti A.(2008), *Introduzione alla statistica,* Edizioni Scientifiche Italiane*;*

Nawrocki D.(2001), *"The problems with Montecarlo simulation",* in *Journal of Financial Planning;*

Pascucci A.(2008), *Calcolo stocastico per la finanza,* Springer;

Resti A.,Sironi A.(2008), *Rischio e valore nelle banche,* Egea.

Sitografia

www.baeberis.com

www.borsaitaliana.it

www.ilSole24Ore.it

www.soldionline.it