Dipartimento di Impresa e Management

Corso di Laurea in Economia e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

INTRODUZIONE ALLA VALUTAZIONE DI OPZIONI EUROPEE SU AZIONE: DAL MODELLO BINOMIALE AL MODELLO DI BLACK-SCHOLES

RELATORE:

Ch.mo Prof. Carlo Domenico MOTTURA

CANDIDATO:

PIETRO ANTONIO MARINI,

MATRICOLA n. 188991

ANNO ACCADEMICO 2016 / 2017

"In my view, derivatives are financial weapons of mass destruction, carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal. Unless derivatives contracts are collateralized or guaranteed, their ultimate value also depends on the creditworthiness of the counter-parties to them. But before a contract is settled, the counter-parties record profits and losses – often huge in amount – in their current earnings statements without so much as a penny changing hands. Reported earnings on derivatives are often wildly overstated. That's because today's earnings are in a significant way based on estimates whose inaccuracy may not be exposed for many years"

Warren Buffett, 2003

Indice

Introduzione

Gli ultimi decenni sono stati caratterizzati da un crescente sviluppo dei mercati finanziari e da una molteplicità di avvenimenti che hanno profondamente cambiato tanto l'agire economico quanto quello umano. È evidente d'altronde che, per quanto il mondo finanziario si fondi su solide basi teoriche e astratte, l'ingerenza di questa sfera sugli avvenimenti giornalieri, ovvero sulla vita reale, sia palese. Difatti, è più che sorpassata la teoria che sosteneva una netta divisione tra l'economia finanziaria e quella reale.

La finanziarizzazione dell'economia è una realtà oramai tangibile che non accenna a cessare, sicché sono sempre più richieste profonde conoscenze in questo campo e in quelli affini. Tale affinità non si riscontra più esclusivamente in materie che trattano argomenti differenti seppur con radici comuni, bensì si invoca frequentemente il sostegno di scienze naturali fisiche e matematiche.

Si assiste quindi ad uno scenario finanziario dinamico; questa caratteristica, seppur in prima analisi favorevole, indice di concorrenzialità e quindi di efficienza, ha creato invece numerosi problemi. Tale situazione può essere rappresentata da una similitudine poco usuale: si pensi a due macchine, una in cui siede la Finanza e l'altra in cui vi è il Regolatore, che viaggiano ad una stessa velocità. Inaspettatamente la macchina-finanza, coadiuvata da un incremento delle prestazioni inizia a procedere ad una velocità superiore e irraggiungibile per la macchina-regolatore. È questo, spiegato in maniera poco ortodossa, ciò che è avvenuto negli ultimi decenni: il mondo finanziario ha subito uno sviluppo a cui la regolamentazione non ha saputo rispondere di pari misura. Solo un evento tanto eccezionale quanto disastroso, come un incidente nel caso di una macchina, o una crisi finanziaria nel caso dei mercati finanziari, può dare, e ha dato, una scossa significativa al mondo della regolamentazione.

In maniera progressiva quindi si è concretizzata una risposta decisa da parte del Legislatore, sia a livello nazionale sia sovranazionale, al fine di scongiurare la crisi e creare condizioni favorevoli ad uno sviluppo della finanza sano, trasparente e nel rispetto delle regole. In particolare, grande interesse è stato rivolto a contrastare il default e a prevenire la propagazione di rischi sistemici. Questo sviluppo dei mercati finanziari è dovuto anche alla globalizzazione dell'economia. Essa, tra l'altro, ha inciso sull'assetto legislativo-regolamentare, contribuendo di fatto ad abbandonare la dimensione puramente nazionale ed abbracciarne una orientata ad una cooperazione intranazionale e internazionale. Infatti, essendo ormai i collegamenti finanziari e le influenze che derivano da questi di portata globale, di pari forma devono essere gli organi addetti alla sorveglianza e regolamentazione.

Al centro dei mercati finanziari sono sorti, grazie all'ingegneria finanziaria, innumerevoli tipi di contratti che vengono racchiusi sotto il nome di derivati. È scopo di questo elaborato dunque illustrare le più significative tipologie di derivati e fornire gli strumenti per procedere ad una valutazione delle opzioni.

Come si esporrà in seguito, i benefici dei derivati risultato essere in parte compensati dagli svantaggi dovuti all'utilizzo di questi al punto che si può anche sostenere che i *derivatives* siano un'arma a doppio taglio, dato che, ad esempio, nel perseguire finalità di copertura si può incorrere in ingenti perdite che possono seriamente minare la stabilità economico-finanziaria delle imprese. In questo contesto, il *pricing*, il *risk management*, o i *modelli di previsione*, delle attività sottostanti il derivato, giocano un ruolo fondamentale nell'ottica di minimizzare l'incertezza dietro il reale valore di un'attività e calcolare il valore di tale attività a scadenza al tempo odierno.

Capitolo I

Mercati finanziari e strumenti derivati

1.1 Richiami dalla crisi dei mercati finanziari del 2007

La crisi dei mutui *subprime* iniziata nel 2007 ha alimentato un ampio dibattito sui rischi collegati al modello di intermediazione finanziaria *originate to distribuite* (OTD), ovvero la piattaforma sulla quale si sviluppano i prodotti strutturati.

I modelli classici di erogazione creditizia prevedono che i crediti siano inscritti in bilancio come una semplice voce riguardante i prestiti alla clientela; nel caso del modello OTC essi vengono cartolarizzati e distribuiti ad un ampio gruppo di operatori.

Negli anni 90' si assiste ad un'esplosione dei mercati finanziari e ad una parallela assenza di un'adeguata regolamentazione, la quale contribuì a generare squilibri finanziari degli istituti di credito. Inoltre, la scarsa solidità di molte banche (soprattutto statunitensi) provocò conseguentemente una crisi di liquidità, primo elemento fondamentale verso il default di molti istituti.

Tale situazione apparì chiara esclusivamente nel 2006. Nella sostanza, numerosi istituti di credito concedettero prestiti a soggetti caratterizzati da un elevato rischio di insolvenza il quale, sorprendentemente, non si trasferì interamente sui tassi di interesse ma sui prodotti strutturati con la cartolarizzazione. Nel giro di poco tempo, i mutui *subprime* si deteriorarono pesantemente; svariate istituzioni finanziarie non poterono più esigere i loro crediti e, a causa del crollo di liquidità sul mercato dei prodotti strutturati, molte banche di investimento esposte su tali strumenti si trovarono in difficoltà. La crisi si diffuse rapidamente dal mercato dei prodotti strutturati all'intero sistema finanziario prima e all'economia reale poi.

A seguito di questi eventi, successive analisi della crisi mettono in luce molteplici elementi di criticità. Primo tra tutti che il modello OTD, a causa di una marcata facilità di accesso garantita ai numerosi operatori passivi del sistema creditizio, ha contribuito alla deresponsabilizzazione dei soggetti coinvolti negli scambi, determinando dunque l'esposizione bancaria e, in seguito, la crisi di liquidità. Inoltre risulta palese che le autorità preposte al controllo abbiano agito in modo largamente inefficiente.

I fattori di criticità dei mercati finanziari ante 2007 sono numerosi e tra questi si riportano:

- L'ingegneria finanziaria, che aveva creato tipologie di mutui estremamente complesse, finalizzate ad attirare investitori con un basso profilo di reddito ed alto profilo di rischio, di solito insolventi nel medio-lungo periodo;
- Il sistema creditizio, che garantiva la disponibilità di prodotti strutturati a breve scadenza e ad elevati rendimenti, attirando così sia investitori retail sia istituzionali. Questi ultimi, in particolare, avevano decisamente sottovalutato il vero rischio di tali strumenti, affidandosi così agli ingannevoli prospetti informativi offerti dagli emittenti;
- Gli istituti di credito, che avevano un basso standard del merito creditizio in quanto la massimizzazione dei volumi erogati era l'obiettivo principale per il management;
- Le agenzie di rating, che in numerosi casi avevano fornito valutazioni errate circa il rischio associato ai prodotti strutturati.

Si può dunque riscontrare che i prodotti strutturati non fossero standardizzati bensì, poiché risultavano sia assai complessi sia cartolarizzati, venivano scambiati in mercati di secondo ordine (*over the counter*). Tali mercati sono caratterizzati da una scarsa liquidità e dalla formazione del prezzo in condizioni di inefficienza informativa; proprio l'erronea determinazione del *pricing* fa sì che i valori di tali prodotti, inseriti nel bilancio delle banche, portino ad una sottovalutazione sia della volatilità e del rischio ad essi connesso sia della conseguente possibilità di default.

In queste circostanze il *pricing* dei prodotti strutturati gioca un ruolo fondamentale nella determinazione del valore; infatti ad una maggior precisione nella determinazione del prezzo dei prodotti finanziari corrisponde un miglior equilibrio tra attività e passività degli istituti creditizi.

È chiaro quindi il ruolo determinante delle agenzie di rating nella definizione del rischio e dunque anche del rendimento dei prodotti di finanza strutturata. Il compito si dimostra ancor più centrale di fronte a prodotti finanziari innovativi e con caratteristiche poco chiare, congiuntamente alla asimmetria informativa sulla valutazione degli stessi. Gli investitori hanno dato largo affidamento a queste agenzie e, parallelamente, hanno sottovalutato la maggior volatilità di tali prodotti rispetto ad un ordinario prestito obbligazionario. La volatilità delle misure di rating è una conseguenza del modello probabilistico di valutazione dei flussi di cassa futuri dei prodotti strutturati che, unitamente alle ipotesi formulate e sottostanti al modello e alle serie storiche adoperate, è stata causata anche da errori nella valutazione delle correlazioni tra le diverse probabilità di insolvenza relative alle attività sottostati[1].

L'attività di trasferimento del rischio ha alimentato ulteriore incertezza su come questo venga effettivamente ripartito tra i vari operatori finanziari. A riguardo, i mutui *subprime* hanno dimostrato come la vulnerabilità delle banche a seguito dell'insolvenza di un prenditore di fondi non risulti né attenuata né eliminata attraverso un'operazione di cartolarizzazione ma, contrariamente, il rischio si ripresenta alle banche tramite numerosi canali di trasmissione. In particolare, è possibile identificare la concessione di liquidità o la prestazione di garanzie alla società veicolo, ulteriori esposizioni verso soggetti colpiti dalla crisi (ad esempio l'*hedge fund*), il possesso diretto di titoli strutturati per finalità di trading o investimento. Tali canali, determinanti per il contagio e la propagazione della crisi, non hanno coinvolto solamente le banche ma anche un ampio gruppo di soggetti tra i quali, recentemente, i *monoline insurer.*

Si può certamente sostenere che la crisi finanziaria del 2007 abbia seriamente minato la stabilità dell'intero sistema bancario mondiale e la credibilità degli istituti di vigilanza eletti al controllo delle attività finanziarie e bancarie. I governi in tale periodo, a causa dei fallimenti di alcune importanti istituzioni finanziarie, si sono trovati costretti ad immettere, coadiuvati delle banche, ingenti quantità di liquidità nei mercati per frenare gli effetti dell'insolvenza dei mutui *subprime* ed evitare il default.

Nonostante la crisi sia stata causata da molti fattori concomitanti, si ritiene primariamente che la regolamentazione e la supervisione del settore finanziario non siano state in grado né di prevenire l'eccessiva propagazione dei rischi né di contenere la diffusione delle turbolenze finanziarie. Queste ragioni hanno spinto ad una modifica, necessaria, del patto sancito da Basilea 2; si effettuano quindi correzioni volte a tutelare la totalità degli agenti operanti nel circuito del credito mondiale. Nell'aprile del 2008 il G20 ha stabilito le linee guida del piano d'azione, approvate successivamente a Seul il settembre del 2010. Nasce così l'accordo Basilea 3 che, tuttavia, prevede tempi di attuazione lunghi (entrata a regime previsto solo nel 2019).

L'accordo stabilisce innanzitutto il rafforzamento delle regole prudenziali, attraverso un innalzamento quantitativo e qualitativo della soglia del capitale regolamentare, ovvero il capitale minimo che ogni istituto di credito deve garantire affinché la copertura di eventuali rischi di credito possa essere assicurata. Secondariamente, richiede un irrobustimento delle regole relative al controllo del rischio di liquidità e afferma che l'eterogeneità delle norme non ha agevolato la gestione integrata della liquidità per i gruppi cross-border (ovvero i gruppi *transfrontalieri),* danneggiandone quindi la

[1] Si richiama *La crisi e il futuro dei mercati dei capitali* di Giuseppe Vagas, http://www.consob.it/documents

mobilità, causando inefficienze e tensioni. Infine si ribadisce il principio secondo cui forme adeguate di controllo devono essere fornite a tutte le istituzioni finanziarie e infrastrutture di mercato sistematicamente rilevanti con la finalità di eliminare l'accumulazione di rischi sistemici e il gioco degli arbitraggi regolamentari[2].

In questo contesto, l'omogeneità delle regole risulta essere indispensabile. Il trade-off tra stabilità e trasparenza implica circostanze diverse in base a quali soggetti e a quali situazioni si fa riferimento. Infatti, il conflitto risulta esser meno netto per gli *stakeholder* di una grande banca rispetto ad una identica situazione per una di piccole dimensioni. Mentre gli investitori di titoli emessi da istituti medio-piccoli possono "fuggire" dal mercato mettendo in difficoltà la banca stessa a seguito di una svalutazione dei prodotti strutturati, banche di grandi dimensioni riscontrerebbero effetti che potrebbero contagiare l'intero sistema macro-economico. Nello specifico, istituzioni finanziarie medio-piccole, poiché hanno una scarsa attività transfrontaliera e raramente sperimentano effetti sistemici, fronteggiano un conflitto tra stabilità e trasparenza che si sintetizza principalmente in un conflitto tra esigenze di protezione dei depositanti rispetto a quelle di tutela dei proprietari di azioni ed altri strumenti finanziari e di prevenzione di abusi di mercato.

Il sopracitato trade-off si differenzia non soltanto per quali soggetti vengono coinvolti ma anche in base alle caratteristiche della crisi[3]. I prodotti strutturati coinvolgono una molteplicità di soggetti, da coloro che realizzano il prodotto (*originator*) agli investitori finali; la numerosità delle persone interessate indebolisce considerevolmente la capacità di valutare tali prodotti, accentuando sia una scarsa valutazione del merito creditizio e delle garanzie (la *consistenza*) fornite per coprire il rischio di credito, sia una conseguente e inevitabile dispersione di informazioni. Proprio quest'ultima o, generalmente parlando, l'*inefficienza informativa* danneggia la capacità di valutazione di un prodotto strutturato; capacità che tra l'altro si è dimostrata limitata anche per le agenzie di rating.

Si assiste quindi ad uno scenario in cui la valutazione dei prodotti strutturati, come anche quella degli attivi sottostanti, risulta essere sempre più ardua e quindi il *pricing* gioca un ruolo fondamentale al fine di assicurare una stabilità dei mercati finanziari e, di conseguenza, di quelli reali.

[2] Per maggiori approfondimenti si consulti *https://www.bancaditalia.it/pubblicazioni*

[3] Nel breve periodo, se si manifestano turbolenze imputabili a fattori congiunturali e macroeconomici, indipendenti dal livello di rischio e dunque dalle scelte delle banche, l'incremento del livello di disclosure, oltre ad avere limiti oggettivi circa la difficoltà di valutazione di informazioni incomplete e l'effettiva disponibilità di appropriati sistemi di rilevazione dei dati, potrebbe generare destabilizzazione. Di contro, nel caso in cui banche diverse sperimentino effetti eterogenei della crisi, la propagazione di informazioni nel mercato agevola investitori e depositanti a distinguere quali banche versano in una situazione di difficoltà e quali no.

1.2 Derivati: definizione e finalità

Gli anni 2000, finanziariamente parlando, si incentrano sul *risk management*; esso è sempre più di vitale importanza grazie alla sua capacità di misurare e controllare i vari tipi di rischio, principalmente quelli legati alla volatilità dei tassi d'interesse che, di fatto, ha determinato l'insolvenza dei debitori. Gli intermediari finanziari dunque si trovano a ricoprire un ruolo essenziale: essi dedicano gran parte della loro attività alla ricerca e allo sviluppo di modelli matematici specializzati nella previsione di eventi futuri, così da garantire un'ottimale gestione dei rischi finanziari.

Strumenti finanziari chiamati a svolgere il compito di copertura del rischio sono senza dubbio *i derivati*, ovvero un'attività finanziaria il cui valore dipende dalla *performance* di un'altra attività sottostante[4] o di natura finanziaria o di natura reale. Oltre alla funzione di copertura dei rischi (*hedging*), i derivati vengono anche utilizzati o in via puramente speculativa (*trading*) oppure per sfruttare le opportunità di arbitraggio generate dalle imperfezioni di mercato.

L'*hedging* prevede operazioni di segno opposto sui mercati a pronti e a termine, in modo da compensare le eventuali perdite subite su uno dei due mercati. Solitamente, la copertura del rischio si attua attraverso due tipologie:

- *Short hedge*, operazione finanziaria nella quale si vende a termine un'attività del proprio portafoglio. Così facendo si fissa anticipatamente il prezzo a scadenza dell'operazione stessa e si prevengono eventuali ribassi delle quotazioni sul mercato;
- *Long hedge*, operazione finanziaria nella quale si acquista a termine un'attività del proprio portafoglio. In questo modo si copre il rischio di un possibile rialzo delle quotazioni di mercato rispetto a quelle esistenti nel momento dell'acquisto.

I derivati utilizzati per finalità di *hedging* prevedono una analisi legata ad una valutazione congiunta sia del grado di copertura dell'oggetto che si vuole immunizzare sia dei rendimenti dell'operazione nel futuro[5].

Se utilizzati per finalità di *trading*, l'unico fine dell'operazione di compravendita è realizzare un profitto speculativo, il quale poggia prevalentemente su valutazioni soggettive dell'investitore. A titolo esemplificativo, un soggetto che ipotizza un rialzo dei prezzi nel futuro, acquista contratti a termine (*posizione long*) e attende il momento per rivenderli ad un prezzo maggiore; specularmente

[4] Per attività sottostante si intende ogni tipo di operazione finanziaria tra le quali: azioni e obbligazioni, titoli di Stato, indici di borsa, valute, ecc.

[5] Di solito, i derivati presentano un rischio minore rispetto al prodotto immunizzato; di conseguenza, essendo il rischio minore, minore sarà anche il rendimento in quanto i costi sostenuti per la copertura del derivato sono maggiori.

chi crede in una diminuzione dei prezzi vende a termine (*short position*) e aspetta per riacquistare il momento in cui i prezzi saranno minori.

L'attività sottostante, elemento comune a ogni tipo di derivato, determina il valore di mercato del prodotto e poiché tali attività, così come i tipi contrattuali stipulati, possono essere le più svariate, è chiaro quanto sia ampio e variegato il mondo dei derivati. Essi infatti potranno avere diverse sfaccettature contrattuali, diversa attività sottostante (*reale* o *finanziaria*) e diverse caratteristiche strutturali. Sono già stati enunciati quali sono i vantaggi principali dei derivati (ovvero *hedging* e *trading*); tuttavia un ulteriore elemento a loro favore è il basso costo che l'operazione comporta. Difatti il versamento del denaro necessario, rispetto al valore nominale del contratto, è nettamente inferiore e dunque si può aprire una posizione nominale sostanziosa con un esborso notevolmente inferiore[6].

In genere il successo dei derivati è dovuto al fatto che consentono la riduzione del rischio di credito, l'economicità delle operazioni di copertura e un più efficiente funzionamento dei mercati finanziari. Nonostante i numerosi effetti positivi, elevati sono anche gli aspetti negativi. In primo luogo, a fronte di un tentativo di riduzione del rischio per imprese e istituzioni, non sempre tale obbiettivo vieni pienamente raggiunto; in secondo luogo tali strumenti tendono a gonfiare l'attivo e il passivo del bilancio di imprese produttive e finanziarie, sicché è richiesta un'ulteriore e maggiore attenzione alla gestione del rischio complessivo. Nella pratica, essi offuscano la chiarezza e la stabilità dei valori riportati in bilancio e, per di più, molti rendiconti finanziari appaiono accresciuti, dando avvio ad azioni speculative irregolari da parte di soggetti incuranti delle regole nella più totale assenza di norme e regolamenti. Infine, lo sviluppo prolungato nel tempo dei derivati ha arrecato alle banche emittenti non pochi problemi, tra i quali l'omissione dell'aspetto quantitativo, ovvero un'incuranza dell'ammontare offerto, e qualitativo, dovuta alla loro crescente complessità e offerta.

1.3 Tipologie di derivati

Il valore dei derivati dipende direttamente dal valore dell'attività sottostante che, come già ribadito, spazia da azioni o obbligazioni, a titoli di Stato o altri derivati.

Principalmente si mira, tramite questi, a ridurre una serie di rischi quali: il rischio di cambio, il rischio di interesse, il rischio di oscillazione dei prezzi delle materie prime e il rischio di credito. Più complessa risulta essere la valutazione di derivati che hanno come attività sottostante tassi di interesse

[6] Tale peculiarità viene chiamata "effetto leva"; essa è da un lato elemento di efficienza dei derivati, dall'altro base del suo rischio intrinseco. Infatti il derivato si distingue per poter generare elevati guadagni o ingenti perdite.

o obbligazioni, soprattutto nel caso di *corporate bonds* che pagano cedole periodicamente. Ai derivati che prendono a riferimento queste due attività corrisponde una maggior complessità dei processi stocastici per descrivere la dinamica dei tassi d'interesse.

I *derivatives* si dividono in: *swap, future* e *forward, opzioni*.

I contratti *swap* vengono stipulati tra due controparti che presentano situazioni finanziarie distinte (ovvero, diversi livelli di tasso di interesse o diverse posizioni valutarie). Tramite questo contratto si può scambiare un tasso di interesse fisso con uno variabile, o un importo di una valuta con l'importo di un'altra[7].

I *future* sono contratti a termine standardizzati con oggetto costituito dall'acquisto o la vendita di merci, valute, attività finanziarie ad una data futura. Si conosce con certezza la data di scambio e le quantità ma non il prezzo futuro di scambio (il prezzo è *marked to market daily*).

I *forward* sono contratti a termine non standardizzati e, a differenza dei *future*, è nota la data di scambio, le quantità e anche il prezzo futuro di scambio delineato dalla struttura dei prezzi all'epoca di contrattazione. A causa della loro specificità possono essere negoziati esclusivamente con una trattativa privata e, quindi, non sono commerciati in borsa. Alla scadenza daranno origine all'obbligo di acquistare (posizione lunga) o di vendere (posizione corta) l'attività sottostante al prezzo prestabilito.

L'*opzione* garantisce il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un determinato sottostante entro una certa data o ad una certa data ad un prezzo prefissato. Esistono due tipologie di opzioni: le opzioni call, che danno il diritto di comprare un'attività, e le opzioni put, che danno il diritto di venderla.

Da questi si specificano ulteriori prodotti derivati, tra i quali: *forward rate agreement, interest rate cap, interest rate floor, interest rate collar*.

I *Forward Rate Agreement* (F.R.A) [8] sono un contratto su tassi di interesse. In tali tipi di contratti due controparti si impegnano a scambiarsi ad una data futura stabilita un certo ammontare di liquidità. L'ammontare può essere calcolato in base a: un tasso di interesse fisso predeterminato al momento della stipula, un tasso di interesse variabile rilevato puntualmente alla data futura prestabilita, un ammontare nominale di riferimento il quale non è oggetto di trasferimento materiale e rappresenta

[7] Ad esempio, considerando un'impresa europea che esporta merci in Giappone con un pagamento in Yen a 3 mesi, potrebbe accadere che lo Yen si deprezzi nei confronti dell'euro. Si può eliminare tale rischio scambiando questo importo con un'impresa giapponese che abbia esportato merci in Europa con un pagamento in euro, sempre a 3 mesi. È poco probabile che le due imprese entrino in contatto, quindi è fondamentale un intermediario.

[8] Tratto da *Futures, Opzioni e Swap* di Degregori and Partners.

l'importo sul quale verrà calcolato l'ammontare di liquidità da scambiare. Al fine di mantenere l'equivalenza finanziaria[9], dato che l'importo nominale viene liquidato all'inizio del periodo di riferimento, il suo valore sarà oggetto di attualizzazione. Il F.R.A consente di tutelarsi dal rialzo dei tassi di interesse; infatti i tassi di interesse variabili futuri di breve-medio periodo, fino a 24 mesi, da incerti diventano certi.

L'*Interest Rate Cap*[10] è un contratto che garantisce il diritto, attraverso una serie di opzioni su tasso di interesse (anche in questo caso, di solito Euribor), all'acquirente del *Cap* di incassare il tasso variabile rilevato puntualmente e di pagare il tasso fisso; permette quindi, a seguito del pagamento di un premio, di trarre un profitto dalla differenza positiva tra il livello del tasso variabile ed il livello di *Cap* predeterminato. Sono fondamentali e dunque fissati il tasso fisso (*strike*), il tasso variabile di riferimento a cui è parametrato il *Cap*, la frequenza con la quale verrà rilevato puntualmente (*fixing*) il tasso variabile e l'ammontare nominale di riferimento sul quale si calcolano gli interessi dovuti all'acquirente.

L'*Interest Rate Floor*[11] è un contratto che garantisce il diritto, attraverso una serie di opzioni su tasso di interesse (di solito Euribor), all'acquirente del *Floor* di incassare il tasso fisso predeterminato e di pagare il tasso variabile; consente quindi, a seguito del pagamento di un premio, di trarre un profitto dalla differenza positiva tra il *Floor* predeterminato ed il livello del tasso variabile. Sono fondamentali e dunque fissati il tasso fisso (*strike*), il tasso variabile di riferimento a cui è parametrato il *Floor*, la frequenza con la quale verrà rilevato puntualmente (*fixing*) il tasso variabile e l'ammontare nominale di riferimento sul quale, tra l'altro, si calcolano gli interessi dovuti all'acquirente.

L'*Interest Rate Collar*[12] prevede un simultaneo acquisto (vendita) di un *Cap* e vendita (acquisto) di un *Floor* di egual durata, periodicità, tasso variabile e ammontare nominale di riferimento. Il fine è quello di delimitare le oscillazioni di un tasso variabile all'interno di un predeterminato *range* e di ridurre il costo dell'acquisto di un *Cap* (*Floor*) fino alla determinazione di uno "*Zero Cost Collar*".

Nei paragrafi che seguono verranno analizzati nello specifico alcuni dei contratti più importanti proposti fino a questo punto.

[9]Le caratteristiche di un F.R.A sono evidenziate con due numeri; il primo indica il periodo tra la stipula del contratto e la data di rilevazione del tasso variabile di riferimento (*fixing*), il secondo indica il periodo tra la stipula del contratto e la data di scadenza dell'operazione. Il differenziale tra il secondo e il primo rappresenta il periodo di riferimento del tasso variabile.
[10] Tratto da *Futures, Opzioni e Swap* di Degregori and Partners.
[11] Tratto da *Futures, Opzioni e Swap* di Degregori and Partners.
[12] Tratto da *Futures, Opzioni e Swap* di Degregori and Partners.

1.3.1 Contratto di future

I motivi che spingono alla stipula di un contratto *future* posso essere fondamentalmente tre:

- Garantirsi una *copertura dal rischio* di oscillazione del prezzo del titolo (o strumento finanziario posseduto);
- Speculazione;
- Arbitraggio, ovvero si sfruttano le imperfezioni di mercato per trarre profitto.

Nel *future* le parti interessate si impegnano a scambiare, versare o riscuotere determinate attività economiche quantificabili in importi certi basandosi sull'andamento di un titolo di riferimento; il prezzo dell'operazione è determinato a scadenza mentre lo scadenzario è stabilito a priori[13].

Esistono le seguenti tipologie di *future:*

- *Interest rate future*, in cui le parti si impegnano ad acquistare o a vendere in futuro una quantità standardizzata di un titolo finanziario quale un titolo di stato oppure un tasso di interesse a breve termine applicato al capitale nozionale; lo scadenzario è stabilito anticipatamente. Se si conosce il *cheapest to deliver* (ovvero, il titolo "più conveniente da consegnare") di un contratto *future* su titoli di stato, il valore teorico di tale contratto risulta pari a:

$$F = (B - I)e^{rT} \tag{1.1}$$

  in cui B è il prezzo a pronti del *cheapest to deliver*, I è il valore attuale delle cedole pagate dal titolo durante la vita del contratto *future*, r è il tasso di interesse di mercato e T la durata residua del contratto[14].
- *Currency future*, in cui le parti si impegnano ad acquistare o a vendere in futuro una quantità standardizzata di valuta estera ad uno scadenziario determinato e ad un prezzo stabilito a priori;
- *Stock index financial future*, in cui le parti si impegnano a liquidare i differenziali relativi ad un acquisto ipotetico e commisurati alle variazioni della Borsa.

[13] Consideriamo il titolo X con valore nominale 100 al tempo 0 e due soggetti A e B. Il primo ritiene che il valore al tempo 1 di X sia $X \geq 100$, mentre, specularmente, B ritiene che il valore al tempo 1 di X sia $X \leq 100$. Allora, A si impegna ad acquistare da B al tempo 1 il titolo X ad un prezzo pari a 100; in base a quale sarà il valore del titolo (minore o maggiore di 100) ci sarà un profitto positivo per A o B.

[14] *http://www.borsaitaliana.it*

1.3.2 Contratti di swap

Il contratto di *swap* si propone sia di gestire i rischi connessi alle operazioni di natura finanziaria sia di ridurre i costi derivanti dal finanziamento stesso; con questo si usufruisce della temporanea condizione di arbitraggio che si realizza in alcuni settori del mercato del credito. È previsto dunque che le parti si scambino su uno scadenzario certo, anche in più di una data, somme di denaro derivanti dall'applicazione di parametri differenti su un ammontare di riferimento; normalmente sono o un tasso di interesse fisso contro un tasso di interesse variabile oppure l'importo di una determinata valuta contro quello di un'altra valuta. Per ogni scadenza colui che al netto risulta aver "vinto" un profitto riceve un pagamento dalla controparte, che ha subito quindi una perdita.

Le principali tipologie di *swap* sono:

- *Interest rate swap*, in cui le parti si impegnano a pagare o a ricevere, ad uno scadenzario prefissato, gli importi determinati in base al differenziale generato dall'applicazione del tasso di interesse fisso e variabile al capitale nozionale, il quale non è oggetto di scambio;
- *Currency swap*, in cui le parti si impegnano a scambiare due serie di pagamenti denominati in diverse valute. I pagamenti dipendono dai flussi di interesse ma anche all'ammontare stesso del capitale[15];
- *Domestic currency swap*, in cui alla scadenza viene corrisposto il differenziale tra l'importo alla data della stipula e quello alla data di scadenza, calcolati entrambi in valuta nazionale. Il capitale non è oggetto di scambio;
- *Swap di indici*;
- *Swap di merci.*

1.3.3 Contratto di option

Nel contratto di *option* una parte paga un iniziale premio alla controparte contro il diritto (e non l'obbligo) di acquistare o vendere una determinata quantità di titoli finanziari ad una scadenza (o entro una scadenza) e ad un prezzo predeterminati a priori. Così facendo si possono prevenire molteplici rischi. La facoltà di acquistare viene detta *call option*, mentre quella di vendere *put option*. Le principali tipologie di contratti option sono:

[15] Nei contratti interest *rate swap* il capitale non viene scambiato tra le parti, mentre nei *currency swap* il capitale può essere scambiato. Per questo motivo i primi sono più utilizzati dei secondi, poiché non prevedono un ingente esborso di denaro.

- *Stock options*, nei mercati dei titoli azionari;
- *Index options*, applicate sugli indici finanziari;
- *Bond options*, sui titoli obbligazionari e del debito pubblico;
- *Interest rate cap*, in cui il compratore, a seguito del pagamento di un premio, ottiene il diritto di ricevere dal venditore, per l'intera durata del contratto e ad uno scadenzario prestabilito, un importo pari al prodotto tra il capitale di riferimento (o convenzionale) e il differenziale positivo tra il tasso di mercato (determinato a priori) e il tasso fissato nel contratto (*strike rate* o *cap rate*). La cifra finale viene poi attualizzata moltiplicandola per la frazione di giorni (su un totale di 360) del periodo di riferimento;
- *Interest rate floor*, in cui il compratore, a seguito del pagamento di un premio, ottiene il diritto di ricevere dal venditore, per l'intera durata del contratto e ad uno scadenzario prestabilito, un importo pari al prodotto tra il capitale di riferimento (o convenzionale) e il differenziale positivo tra il tasso fissato nel contratto (*strike rate* o *floor rate*) e il tasso di mercato (determinato a priori). La cifra viene poi attualizzata moltiplicandola per la frazione di giorni (su un totale di 360) del periodo di riferimento.

1.3.4 Credit derivatives

Questo tipo di derivato ha come obbiettivo sia quello di proteggere dal rischio di credito i portafogli finanziari sia di ridurre i costi connessi alla gestione del portafoglio. Inoltre, esso consente di speculare sugli arbitraggi sul profilo creditizio di terzi. Nei *Credit derivatives* una delle parti, dietro il pagamento di un premio, ottiene l'attenuazione o l'eliminazione del rischio di credito su alcune o tutte le attività del proprio portafoglio finanziario; l'altra parte ottiene un rendimento certo per assumere l'esposizione a una perdita incerta predeterminata stocasticamente.

Le principali categorie di *Credit derivatives* sono:

- *Default products (credit default swap e credit default option)*[16], nei quali il rischio di credito relativo a un'attività sottostante viene trasferito. Il *payoff* viene quantificato e corrisposto nel caso in cui si verifichi il *credit event* [17] determinato al momento della stipula del contratto;

[16] Tratto da *Le tutele nei rapporti con la banca. Risparmio e investimenti, anatocismo, usura, obbligazioni, prodotti derivati* di Rosanna Cafaro, Antonio Tanza.

[17] Il *credit event* si concretizza in caso di fallimento, insolvenza di una delle parti, amministrazione controllata, oppure qualora vi sia difficoltà a rispettare gli obblighi di pagamento determinati nel contratto.

- *Replication products* (*total rate of return swap e credit spread products*)[18], nei quali si dispone la creazione sintetica di una o più attività sensibili al rischio di credito. Essi consentono di trasferire sia il rischio di credito sia quello di mercato; il *payoff* dipende dal verificarsi del *credit event*, dai flussi di cassa e dall'andamento del prezzo della *reference obbligation*;
- *Credit linked notes* e *warrant*[19], sono titoli strutturati da una obbligazione ordinaria ed uno o più strumenti derivati.

1.3.5 Swaption

Un contratto *Swaption* (*Swap* Option) è un'opzione europea che a fronte del pagamento di un premio, garantisce il diritto all'acquirente di stipulare un *Interest Rate Swap* il cui tasso fisso è rappresentato dal tasso *strike* della *Swaption*. Esistono due tipologie di *Swap Option,* incassare fisso e pagare variabile o incassare variabile e pagare fisso. Da queste due tipologie base ne derivano ulteriori quali:

- *Receiver Swaption,* in cui il titolare dell'opzione ha il diritto alla data di scadenza di stipulare un I.R.S. in cui incasserà un tasso fisso (il tasso *strike* della *Swaption*) e pagherà un tasso variabile;
- *Payer Swaption*, in cui il titolare dell'opzione ha il diritto alla data di scadenza di stipulare un I.R.S. in cui pagherà un tasso fisso (il tasso *strike* della *Swaption*) e incasserà un tasso variabile.

[18] Tratto da *Le tutele nei rapporti con la banca. Risparmio e investimenti, anatocismo, usura, obbligazioni, prodotti derivati* di Rosanna Cafaro, Antonio Tanza.
[19] Tratto da *Le tutele nei rapporti con la banca. Risparmio e investimenti, anatocismo, usura, obbligazioni, prodotti derivati* di Rosanna Cafaro, Antonio Tanza

Capitolo II

La valutazione di opzioni europee su azione: modello binomiale e modello di Black-Scholes

2.1 Concetti introduttivi

Il modello più comune per determinare il pricing delle options è quello di *Black e Scholes* il quale ha influenzato non solo le problematiche di pricing per la valutazione degli strumenti derivati, ma anche quelle relative all'*hedging*, ovvero la definizione di una strategia finanziaria volta alla copertura dei rischi. In questo contesto, verrà analizzato il modello nell'ottica del *pricing* delle opzioni *call* e *put*.

Un'opzione call europea è un contratto derivato che conferisce al titolare il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare un dato strumento finanziario (sottostante) ad una data scadenza futura (data di esercizio), ad un prezzo che viene concordato a priori (prezzo d'esercizio, *strike price*) con l'obbligo della controparte di vendere lo strumento finanziario alle condizioni imposte dal contratto qualora si eserciti il diritto[20]. Un'opzione put europea, invece, è un contratto derivato che conferisce all'acquirente il diritto (ma non l'obbligo) di vendere uno strumento finanziario ad una data futura e a un dato prezzo, con l'obbligo della controparte di acquistare lo strumento finanziario alle condizioni imposte dal contratto qualora si eserciti il diritto[21]. In gergo, chi vende un'opzione ha una "posizione corta" (*short position*), chi l'acquista una "posizione lunga" (*long position*) e lo strumento finanziario alla base dell'option viene chiamato "sottostante" (generalmente un'azione, un tasso d'interesse, un tasso di cambio ecc.). Il prezzo a cui verrà scambiato il sottostante viene fissato a priori in entrambi i casi, e prende il nome di *Strike Price* o prezzo d'esercizio.

Le options si dividono in due differenti tipologie, in base all'epoca in cui si può esercitare il diritto acquisito. Quindi, si parlerà di options "Americane" se il diritto può essere esercitato in qualsiasi momento entro la data di scadenza, mentre di options "Europee" se il diritto può essere esercitato solo alla data di scadenza.

Le options consentono di intraprendere strategie finanziarie sia speculative sia di copertura. Nel primo caso, il vantaggio per gli speculatori consiste nel fatto che la perdita massima è data dal prezzo pagato per l'opzione, cioè l'investimento iniziale, generalmente molto basso se paragonato al valore del

[20] Tratto da *Opzioni, Futures e altri derivati* di John C. Hull.
[21] Tratto da *Opzioni, Futures e altri derivati* di John C. Hull.

sottostante; per il venditore invece la perdita massima non può essere calcolata a priori. Occorre precisare che la speculazione attraverso le option ha un orizzonte temporale piuttosto limitato. Profitti sistematici possono essere ottenuti solo qualora si fosse in grado di saper leggere le condizioni di mercato e individuare quali saranno gli sviluppi futuri dello stesso; inoltre, i profitti dovranno essere tali da coprire gli elevati costi di transazione.

Una delle caratteristiche principali delle opzioni è la danarosità (*moneyness*). Le opzioni, infatti, vengono classificate in tre diverse categorie: *out of the money*, *at the money*, *in the money*. Le differenze tra queste derivano dal confronto tra il prezzo di esercizio e il prezzo di mercato del sottostante[22] al momento della valutazione:

- Un'opzione si dice *out of the money* quando il suo esercizio non risulta conveniente: nel caso della call quando il prezzo di esercizio è superiore al valore corrente del sottostante, mentre nel caso della put quando il prezzo di esercizio è inferiore al valore corrente del sottostante. Le opzioni out of the money hanno valore intrinseco nullo poiché quest'ultimo è dato dal massimo tra zero e il valore che l'opzione avrebbe se venisse esercitata immediatamente. Sebbene un'opzione sia out of the money in un qualsiasi momento precedente la scadenza, ciò non significa che essa abbia valore di mercato nullo. Il suo prezzo, infatti, dipende non soltanto dal valore intrinseco, ma anche dal valore temporale.
- Un'opzione si dice *at the money* quando il possessore è indifferente tra esercitarla oppure no, ossia quando il prezzo di esercizio è esattamente pari al valore corrente del sottostante, sia nel caso della call che della put. Le opzioni at the money hanno valore intrinseco pari a zero poiché quest'ultimo è definito come il massimo tra zero e il valore che l'opzione avrebbe se venisse esercitata immediatamente. Anche in questo caso, valgono le considerazioni delineate in precedenza per le opzioni out of the money circa il valore di mercato.
- Un'opzione si dice *in the money* quando il suo esercizio risulta conveniente: nel caso della call quando il prezzo di esercizio è inferiore al valore corrente del sottostante, nel caso della put quando il prezzo di esercizio è superiore al valore corrente del sottostante. Le opzioni in the money hanno valore intrinseco positivo poiché quest'ultimo è dato dal massimo tra zero e il valore che l'opzione avrebbe se venisse esercitata immediatamente.

A titolo esemplificativo, una possibile strategia speculativa consiste in una put lunga "out of the money" tale da costringere il venditore ad acquistare il sottostante ad un prezzo basso nella speranza di rivenderlo ad un prezzo più elevato nel futuro.

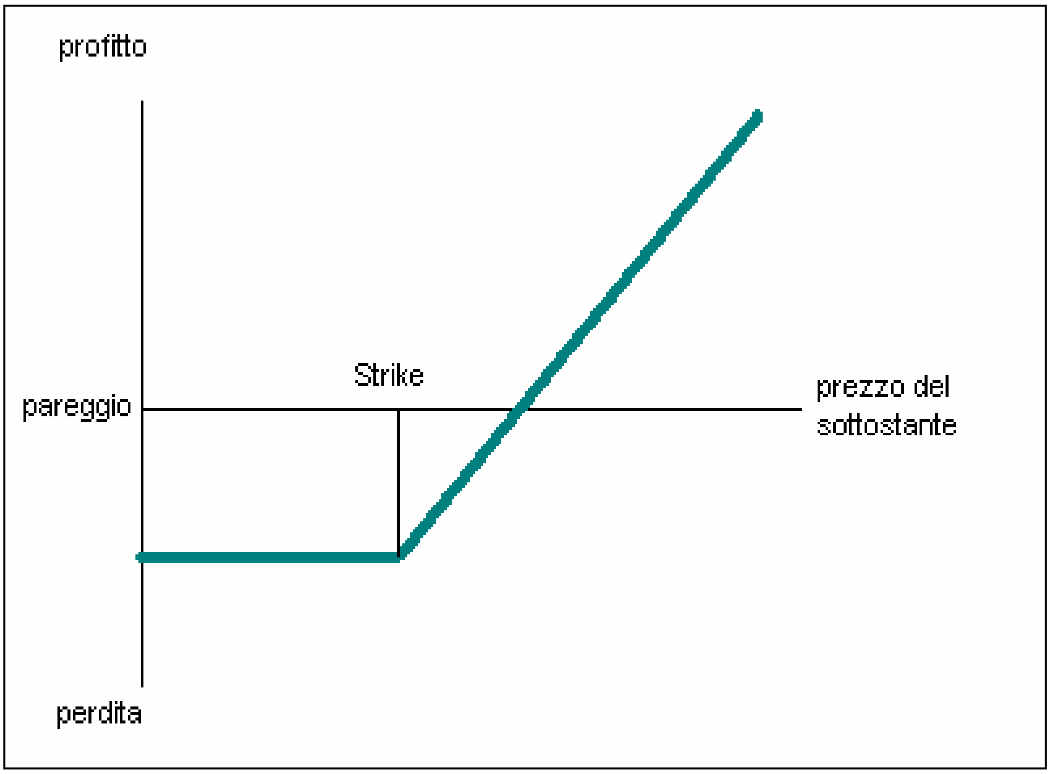
[22] www.borsaitaliana.it

In merito alla copertura dei rischi (*hedging*), le option sono spesso adoperate per fronteggiare fasi recessive dei mercati.

Una strategia sistematica di acquisto di opzioni risulta poco redditizia qualora non si verifichi la caduta del mercato. Chi detiene titoli azionari può strategicamente vendere opzioni call *out of the money*: se i prezzi di mercato non salgono, le opzioni non vengono esercitate e il venditore realizza il premio incassato che aumenta la redditività del portafoglio. Al contrario, se i prezzi di mercato dovessero salire vengono esercitate le option dagli acquirenti e l'emittente ottiene un rendimento minore di quello che avrebbe realizzato se non avesse venduto le opzioni. La compravendita delle opzioni, quindi, si fonda sulle diverse aspettative che gli agenti di mercato manifestano circa il valore del sottostante. Il venditore di una call option prevede che il mercato non salirà sufficientemente per garantire un profitto al compratore. Se le previsioni sono corrette, i venditori incasseranno il premio; nel caso in cui siano errate, le perdite potranno essere piuttosto ingenti.

Le opzioni possono essere rappresentate con un grafico che evidenzia il profitto o la perdita a scadenza in funzione del prezzo del sottostante determinato, a sua volta, dalle dinamiche di mercato. La *figura 1* mostra una posizione lunga sulla call option. Il compratore paga un premio all'emittente e, se il prezzo del sottostante è inferiore allo *strike price*, non eserciterà il diritto e avrà una perdita pari al prezzo della call, generalmente molto basso se paragonato al prezzo del sottostante.

Figura 1: Funzione di profitto della call lunga



Tuttavia, se il prezzo del sottostante dovesse superare la soglia delimitata dallo *strike price*, l'acquirente *in the money* eserciterà la call e otterrà un profitto crescente al crescere del prezzo di mercato. Per il compratore di un'opzione call, quindi, a fronte di una perdita limitata (premio) si apre una prospettiva di profitto potenzialmente illimitato nel caso di rialzo dei prezzi.

In altri termini:

$$C(T) = \begin{cases} S(T) - K \; se \; S(T) > K \\ 0 \qquad\quad se \; S(T) \leq K \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$C(T) = max\{S(T) - K, 0\}. \qquad [2.1']$$

Se consideriamo anche la *posizione netta* si ha:

$$max\,\{S_T - K, 0\} - C(t)^{23}, \qquad [2.1'']$$

in cui:

- S_T= prezzo del sottostante;
- K = strike price;
- $C(t)$ = prezzo della call (premio).

In altri termini:

$$P \,\&\, L = max\,\{0;\, S_0 - Ke^{-rT}\} - c, \qquad [2.1''']$$

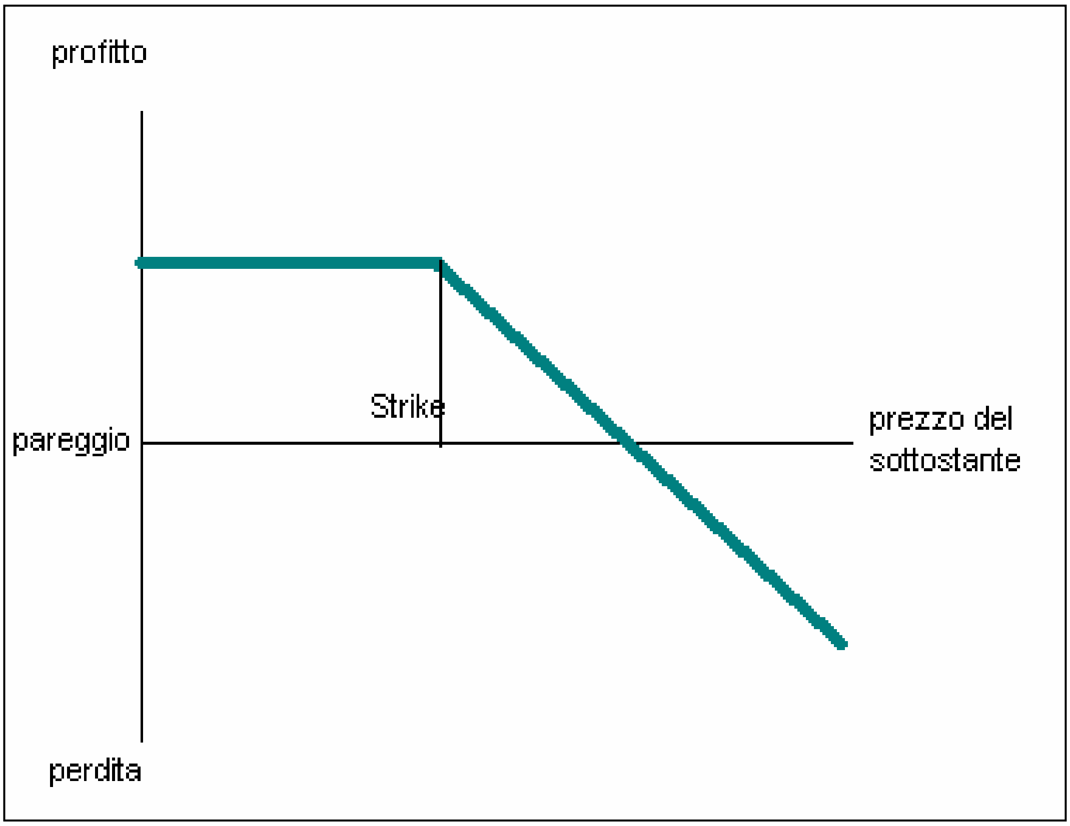
in cui:

- P & L = profitto o perdita (*Payoff*);
- S_t= prezzo del sottostante (alla scadenza per le opzioni Europee);
- K = strike price;
- r = tasso risk free;
- c = prezzo della call (premio)

Va sottolineato che, al contrario del compratore, il venditore ha sempre l'obbligo di rispettare l'impegno sottoscritto nella posizione corta sulla call. Il suo profitto sarà costante e pari al prezzo della call fino a quando il prezzo del sottostante è inferiore allo *strike price*, mentre sarà decrescente in caso contrario, come mostrato dalla *figura 2*:

[23] Nella definizione di questa variabile di assume (implicitamente) che il tasso di interesse sia uguale a zero.

Figura 2: Funzione di profitto della call corta



Dalla *figura 2* si evince che il venditore dell'opzione si aspetta che il prezzo del sottostante sia minore o uguale allo *strike price:* a fronte di un profitto immediato limitato, la perdita è potenzialmente illimitata.

L'opzione put, invece, attribuisce al possessore il diritto di vendere il sottostante allo *strike price.* L'opzione verrà esercitata solo se il prezzo del sottostante è inferiore al prezzo d'esercizio. Più il prezzo del sottostante si avvicina allo *strike*, minore sarà il profitto realizzato (*figura 3*).

In altri termini:

$$P(T) = \begin{Bmatrix} K - S(T) \; se \; S(T) < K \\ 0 \qquad\qquad se \; S(T) \geq K \end{Bmatrix}$$

Si ha quindi:

$$P(T) = max\{K - S(T) - ,0\}. \qquad [2.2']$$

Se consideriamo anche la *posizione netta* si ha:

$$max\,\{K - S_T\ ,0\} - P(t)^{24}. \qquad [2.2'']$$

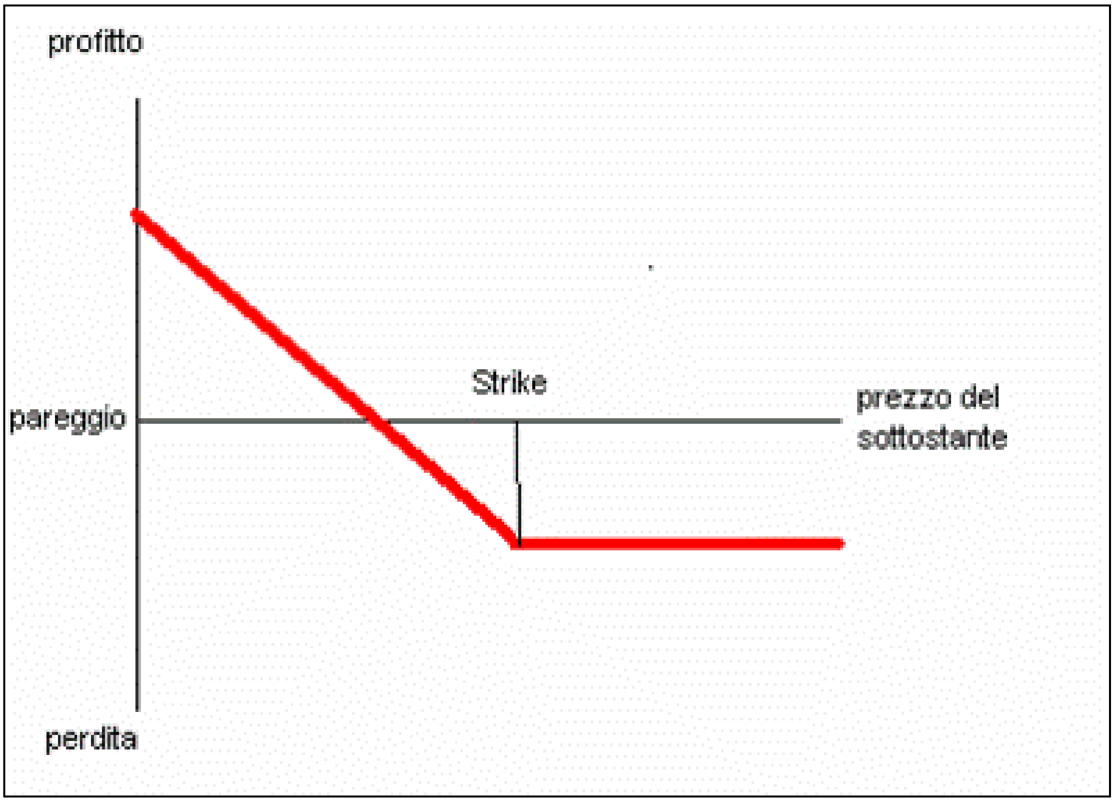
La simbologia è identica a quella adoperata per la [2.1''], $P(t)$ è il prezzo della put.

In altri termini:

$$P\ \&\ L\ = \ max\,\{Ke^{-rT} - S_0;\ 0\}\ -\ p\ . \qquad [2.2''']$$

La simbologia è identica a quella adoperata per la [2.1'''], p è il prezzo della put.

Figura 3: Funzione di profitto della put lunga

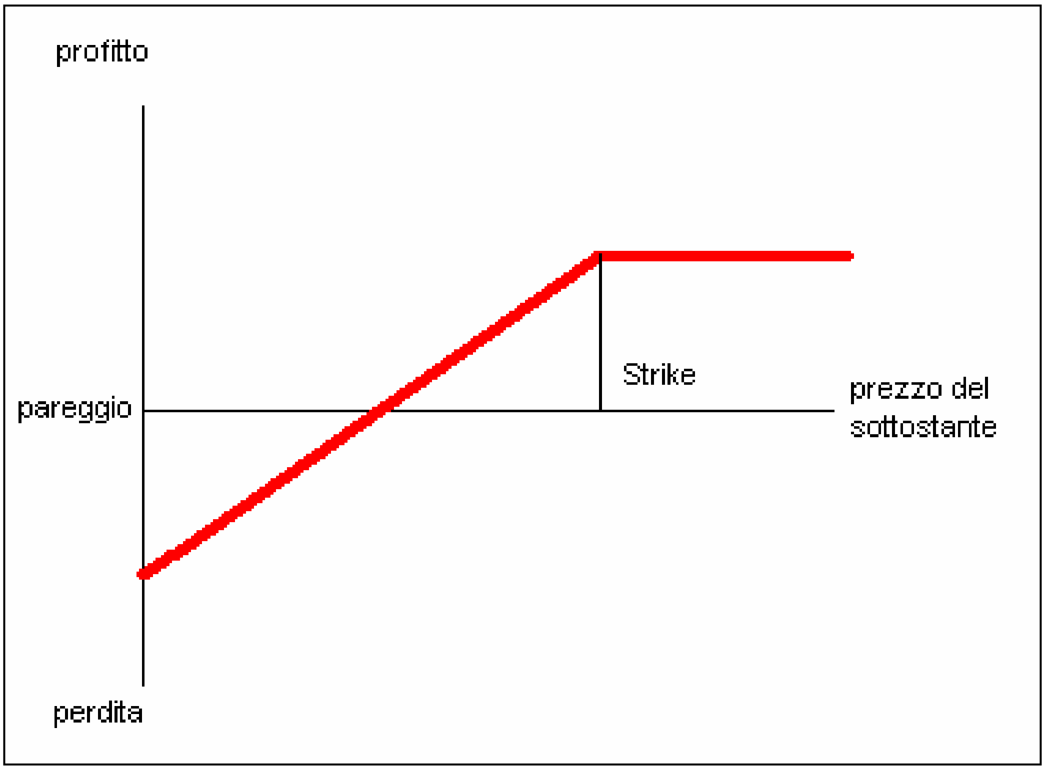


Chi assume una posizione lunga sulla put spera in un ribasso dei prezzi del sottostante. Le put option rappresentano una protezione contro i ribassi di mercato, in quanto viene garantito un guadagno in conto capitale sul titolo in caso di risalita dei prezzi di mercato e, al tempo stesso, si evitano perdite se il mercato dovesse manifestare prezzi in diminuzione[25]. Nel caso di chi assuma una posizione corta sulla put, si otterranno profitti crescenti fino a quando il prezzo del sottostante sarà inferiore

[24] Nella definizione si questa variabile si assume (implicitamente) che il tasso di interesse sia uguale a zero.
[25] Questa strategia, chiamata *put protective strategy* è utilizzata per evitare che il valore del portafoglio diminuisca al di sotto di una soglia minima, e rappresenta una possibile assicurazione contro il ribasso con un costo pari al premio pagato per l'acquisto della put. Da notare che lo stesso profilo di ritorni si avrebbe con l'acquisto di un'opzione call con sottostante, strike e scadenza uguali.

allo *strike price*, per poi stabilizzarsi sul premio incassato dalla vendita della put in caso contrario (*figura 4*).

Figura 4: Funzione di profitto della put corta



2.2 Modelli di pricing delle opzioni

Il pricing delle opzioni può essere effettuato attraverso l'utilizzo di diversi modelli. Tra questi, i più diffusi sono il modello *binomiale*[26] nel *tempo discreto* e il modello di *Black e Scholes*[27] nel *tempo continuo*. Nel tempo discreto è rilevante anche il modello di *Cox, Ross e Rubinstein*[28].

Qualsiasi sia il modello utilizzato, risulta significativa l'individuazione dei fattori che incidono sulla determinazione del prezzo[29]:

- *Vita residua* (*Maturity*): rappresenta la distanza temporale tra l'istante di valutazione e la scadenza dell'opzione. L'opzione, generalmente, è caratterizzata da un prezzo decrescente

[26] Tratto da *Manuale di Finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati* di Gilberto Castellani, Massimo De Felice, Franco Moriconi.
[27] Tratto da *Manuale di Finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati* di Gilberto Castellani, Massimo De Felice, Franco Moriconi
[28] Cox J., Ross S., Rubinstein M., *Option pricing: a simplified approach, Journal of Financial Economics*, 1979.
[29] Tratto da *Opzioni, Futures e altri derivati* di John C. Hull

all’avvicinarsi della scadenza poiché sono poco probabili variazioni significative del prezzo del sottostante dal prezzo corrente.

- *Volatilità*: il prezzo dell’opzione è una funzione crescente della volatilità del sottostante. La volatilità, infatti, misura la variabilità del prezzo del sottostante, cioè una distanza media tra il prezzo effettivo e il prezzo medio. Più alta è la volatilità maggiore sarà la probabilità che il prezzo del sottostante manifesti delle variazioni significative. In tali circostanze aumentano i margini di profitto derivanti dalle options ma non quelli di perdita, grazie alla natura stessa degli strumenti oggetto d’analisi.
- *Prezzo del sottostante e prezzo d’esercizio*: il prezzo delle call options è una funzione crescente del prezzo del sottostante e decrescente del prezzo d’esercizio. Il prezzo delle put options è una funzione decrescente del prezzo del sottostante e crescente del prezzo d’esercizio.
- *Tasso d’interesse*: all’aumentare del tasso d’interesse corrisponde un aumento del prezzo delle call options e una diminuzione del prezzo delle put options.
- *Dividendi* attesi durante la vita dell’opzione: essi fanno diminuire il prezzo dell’azione nel giorno di stacco. Hanno un impatto negativo sul valore di una call e positivo su quello di una put.

La *tabella 1* riassume quanto detto riguardo all’influenza dei fattori principali sul prezzo delle opzioni europee:

Tabella 1: Effetto dei fattori principali sul prezzo delle opzioni Europee

Variabile	**Opzioni Europee**	
	call	**put**
Prezzo sottostante	+	-
Prezzo d’esercizio	-	+
Vita residua	**?**	**?**
Volatilità	+	+
Tasso d’interesse (r)	+	-
Dividendi	-	+

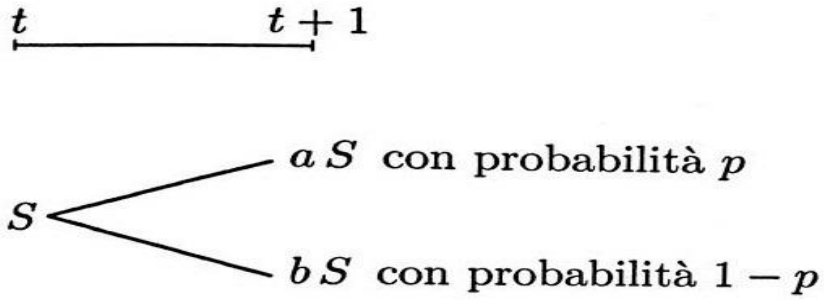
2.2.1 *Pricing: modello binomiale*

Il modello binomiale è rappresentato da un albero in cui vengono ipotizzati i diversi sentieri che il prezzo del sottostante può seguire nel corso del tempo. Il modello presenta un’impostazione *discreta*;

il tempo che manca alla scadenza dell'opzione è ripartito in periodi all'interno dei quali il prezzo del titolo sottostante può assumere solo due valori alternativi, uno favorevole e uno sfavorevole.

Si ipotizzi quindi che le contrattazioni si svolgano su istanti *discreti* $t, t+1, t+2, \ldots$e che il prezzo S del sottostante segua un *processo stocastico binomiale moltiplicativo*. Data la quotazione in $t = 0$ del prezzo del sottostante, l'analisi statica di quest'ultimo ipotizza che alla scadenza di ogni periodo il prezzo S possa assumere due diversi valori: aS in caso di rialzo con probabilità p oppure bS in caso di ribasso con probabilità $1-p$ (*figura* 5). Inizialmente si tratterà il modello binomiale *uniperiodale*, ovvero con scadenza nel prossimo istante $t+1$.

Figura 5: Evoluzione albero binomiale uniperiodale del prezzo del sottostante alla scadenza



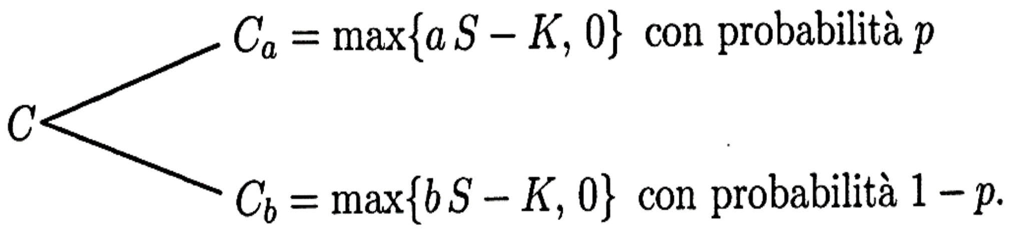
I fattori di rialzo ($a > 1$) e di ribasso ($b < 1$) sono intesi come i due possibili montanti in caso di rialzo o ribasso. Si supponga che le azioni non paghino dividendi e che siano rispettate le ipotesi di mercati perfetti (ovvero, sono consentite vendite allo scoperto e il mercato non è frizionale, gli agenti sono *price taker* e massimizzatori di profitto, sono esclusi arbitraggi privi di rischio). I tassi di interesse periodali sono prevedibili e costanti al livello i e, per evitare arbitraggi privi di rischio, vale la seguente relazione:

$$a > m > b,$$

in cui $m = 1 + i$ è il montante unitario non rischioso nel generico periodo $[t+j, t+j+1]$.

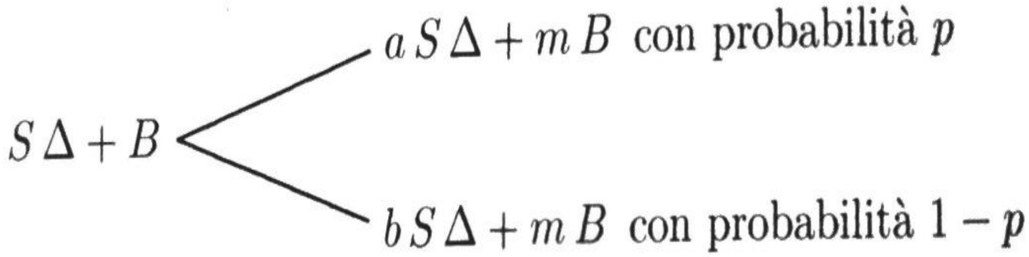
Si consideri un'opzione call che scade nel prossimo istante $t+1$; si ha la seguente situazione (*Figura 6)*:

Figura 6: Albero binomiale uniperiodale di un'opzione call



Assumendo di costruire un portafoglio composto da Δ azioni sottostanti e da un investimento di B euro al tasso i, in base a quanto mostrato sopra, l'evoluzione del portafoglio $S\Delta + B$ sarà come in *figura 7*:

Figura 7: Evoluzione del portafoglio



In assenza di arbitraggio, si può calibrare il portafoglio in modo da replicare il payoff aleatorio garantito dalla call, assumendo il valore C_a in caso di rialzo e C_b in caso di ribasso:

$$\begin{Bmatrix} aS\Delta + mB = C_a \\ bS\Delta + mB = C_b \end{Bmatrix}. \qquad [2.3]$$

Dal precedente sistema si capisce che è ammessa un'unica soluzione; si può quindi calcolare Δ e B:

$$\Delta = \frac{C_a - C_b}{S_a - S_b} \qquad [2.4]$$

e

$$B = \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)m} \qquad [2.5]$$

La [3.4] dimostra che il Δ si trova attraverso il rapporto tra il differenziale del prezzo del derivato al tempo T e il differenziale del prezzo del sottostante alla stessa epoca. Data questa composizione, varrà la *legge del prezzo unico* al fine di evitare arbitraggi: il prezzo in t della call dovrà essere uguale al prezzo in t del portafoglio replicante:

$$C = S\Delta + B \qquad [2.6]$$

Il termine C può essere espresso anche in maniera più diretta, ovvero, sostituendo nell'espressione [2.6] i termini Δ e B indicati nella [2.4] e [2.5] e definendo il termine $q = \frac{m-b}{a-b}$, si ottiene:

$$C = \frac{1}{m}[qC_a + (1-q)C_b]. \qquad [2.7]$$

Δ indica la "variazione relativa" di prezzo cioè il rapporto tra la possibile variazione di prezzo della call nei due stati possibili di mercato e la corrispondente variazione di prezzo del sottostante. Tale definizione trova un diretto collegamento nei modelli di option pricing definiti sul tempo *continuo*, infatti nel modello Black e Scholes il delta di una call è definito come la derivata del prezzo C rispetto al prezzo S del sottostante.

Il payoff di una call, $C(T) = max\{S(T) - K, 0\}$, è una funzione non decrescente del valore a scadenza $S(T)$ del sottostante. Il valore di C_a e C_b sono in linea generale prevedibili, infatti, solitamente il primo sarà maggiore di zero e del secondo ($a > b$); di conseguenza la differenza tra il primo e il secondo è positiva. Nel caso in cui non sussista questa condizione, ad esempio qualora C_a fosse uguale a zero, l'opzione avrebbe un valore nullo. Inoltre, la differenza tra i due valori non può essere maggiore di uno. Considerato quanto detto relativamente al valore di C_a e C_b e tralasciando i passaggi algebrici, si afferma con certezza che:

$$0 \leq \Delta \leq 1. \qquad [2.8]$$

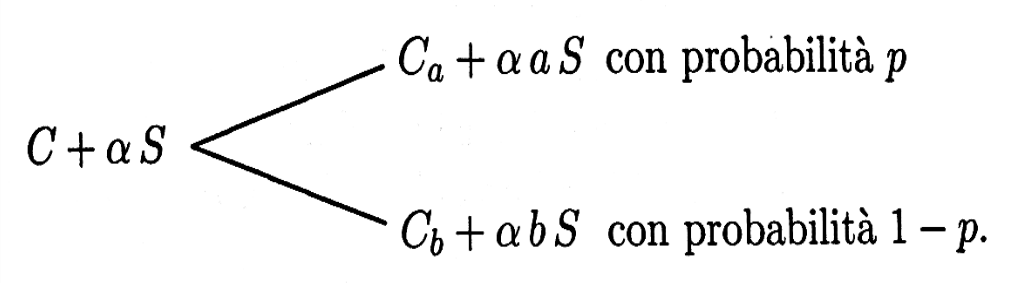
$\Delta = 0$ si avrà solo se l'opzione è *out of the money*; mentre se $\Delta = 1$ allora vorrà dire che l'opzione è *in the money* in caso di rialzo e *at the money* in caso di ribasso.

Un'osservazione differente vale invece per B, il valore dell'investimento obbligazionario. Alla luce dell'equazione [2.5] e del fatto che se $C_a = C_b = 0$ allora $B = 0$, se $C_a > 0$ e $C_b = 0$ (ovvero, il caso più significativo) allora $B < 0$, se $C_b > 0$ e $C_a > 0$ allora $B < 0$ se $K > 0$ e $B = 0$ se $K = 0$, il valore dell'investimento obbligazionario B non può essere positivo.

Basandosi su quanto detto riguardo a Δ e B il *portafoglio replicante* di una call, poiché come già detto il payoff è una funzione non decrescente del valore a scadenza $S(T)$ del sottostante, consiste in una posizione di acquisto del sottostante e una posizione debitoria a tasso fisso; nel caso in cui i sia a tasso fisso e si faccia riferimento alla compravendita di ZCB unitari che scadono in $t+1$, il portafoglio è replicato acquistando Δ unità dello stock sottostante e vendendo allo scoperto $|B|m$ ZCB unitari.

Quanto è stato dimostrato circa il pricing di un'opzione call può essere raggiunto attraverso *un'argomentazione di hedging*; nello specifico si costruisce un portafoglio formato da quote dell'opzione e dello stock sottostante e si calibra in modo da produrre un *payoff non rischioso*. Per evitare arbitraggi il rendimento del portafoglio sarà identico ad uno *risk free*. Il portafoglio è composto da una call e da α unità di sottostante; la sua evoluzione è delineata dalla *figura 8*:

Figura 8: Portafoglio con payoff non rischioso



La condizione di non rischiosità impone l'uguaglianza tra i valori del payoff nei due stati, ovvero:

$$C_a + \alpha a S = C_b + \alpha b S \ . \tag{2.9}$$

Tale uguaglianza presuppone che il numero di azioni acquistate α^*sia identico a $-\Delta$, ovvero che:

$$\alpha^* = \frac{C_a - C_b}{S_a - S_b} = -\Delta. \tag{2.10}$$

Dato che $\alpha = -\Delta$, il payoff considerato nella *figura 8* (cioè $C_a + \alpha a S$ o $C_b + \alpha b S$) è *deterministico*. Per evitare arbitraggi il suo prezzo in t deve coincidere col suo valore attuale al tasso i . Si dovrà avere quindi che:

$$C - \Delta S = \frac{1}{m}(C_a - \Delta a S). \tag{2.11}$$

Sostituendo il delta tra parentesi con l'espressione [2.4] si ottiene:

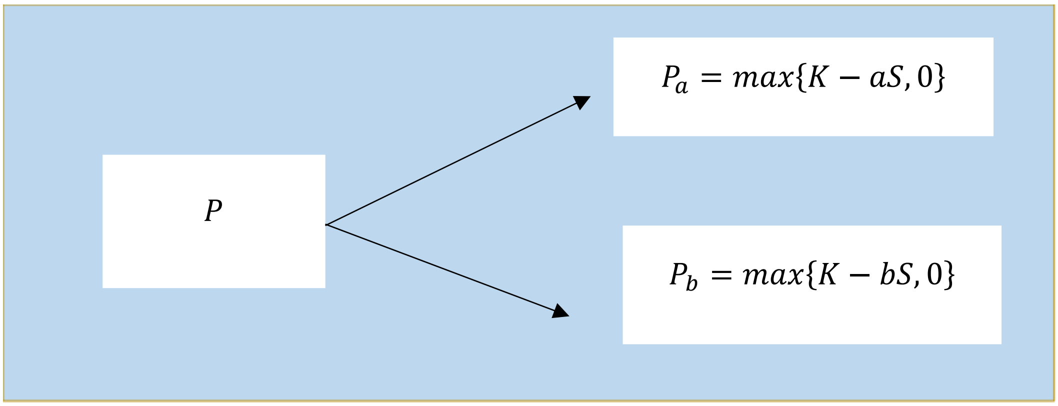
$$C - \Delta S = \frac{1}{m}\left(\frac{aC_b - bC_a}{a-b}\right) = B \ . \tag{2.12}$$

Si ricava quindi l'espressione iniziale $C = S\Delta + B$, come già riportato nella [2.6]. Tale espressione si può ottenere quindi acquistando una unità dell'opzione call e vendendo allo scoperto Δ unità di sottostante (*hedge portfolio*).

Le argomentazioni esposte finora posso essere estese anche al *caso della put* e al *caso generale*.

Nel caso di un'opzione put si ha la seguente situazione (*Figura 9*):

Figura 9: Albero binomiale uniperiodale di un'opzione put



Valgono le simili relazioni che sono state delineate precedentemente. In maniera sintetica si ricordano:

$\Delta = \frac{P_a - P_b}{S_a - S_b}$, $B = \frac{aP_b - bP_a}{(a-b)m}$, $P = \Delta\text{S} + \text{B} = \frac{1}{m}[qP_a + (1-q)P_b]$.

Per quanto riguarda il *portafoglio replicante* di un'opzione put, poiché il payoff è una funzione non-crescente del valore $S(T)$ del sottostante, si ha una situazione speculare al caso della call. Infatti, in base alla *put-call parity* (illustrata nel *paragrafo 2.3*) che prevede la seguente uguaglianza:

$$C(T) - P(T) = S(T) - K,$$

si ottiene che:

$$\Delta_c = \Delta_p + 1, \quad [2.13]$$

ovvero che il delta della call è uguale al delta della put incrementato di 1, e che:

$$B_c = B_p - K/m. \quad [2.14]$$

Da ciò deriva che:

$$-1 \leq \Delta \leq 0\ , \quad [2.15]$$

in cui se $\Delta = -1$ si avrà un'opzione *in the money* o *at the money* in caso di rialzo e *in the money* in caso di ribasso, mentre se $\Delta = 0$ allora vorrà dire che l'opzione scadrà di certo *out of the money*.

Contrariamente a quanto detto per il valore dell'investimento obbligazionario B nella call, nel caso della put esso non è negativo. Dall'espressione [2.14] si ricava che, dato che se $P_a = P_b = 0$ allora $B = 0$, se $P_a = 0$ e $P_b > 0$ (ovvero, il caso più significativo) allora $B > 0$, se $P_b > 0$ e $P_a > 0$

allora $B > 0$ se $K > 0$ e $B = 0$ se $K = 0$, il valore dell'investimento obbligazionario B non può essere negativo.

Il *portafoglio replicante* di una put consiste in una posizione di vendita sul sottostante e un investimento a tasso fisso; nel caso in cui i sia a tasso fisso e si faccia riferimento alla compravendita di ZCB unitari che scadono in $t + 1$, il portafoglio è replicato vendendo allo scoperto $|\Delta|$ unità dello stock sottostante e acquistando Bm ZCB unitari.

La costruzione di un portafoglio non rischioso con payoff $m\,B$ in $t + 1$, secondo *l'argomentazione di hedging*, prevede l'acquisto di un'opzione put e $|\Delta|$ unità del sottostante, cioè una posizione long sia sul derivato sia sul sottostante.

Nel caso generale, ovvero il caso di un generico *contratto derivato* avente S come sottostante, si ha che il payoff del derivato è:

$$Y(t + 1) = f[S(t + 1)]. \qquad [2.16]$$

Nel caso di una call si ha che $f(x) = max\{x - K, 0\}$, mente nel caso di una put $f(x) = \{K - x, 0\}$. In maniera analoga sussistono le seguenti relazioni:

$$\Delta = \frac{Y_a - Y_b}{S_a - S_b}, \qquad B = \frac{aY_b - bY_a}{(a-b)m}, \qquad Y = \Delta S + B = \frac{1}{m}[qY_a + (1-q)Y_b].$$

Per quanto riguarda il *portafoglio replicante*, poiché la funzione di payoff f può avere una forma molto generale, non si possono ricavare indicazioni sul segno di Δ e B. In via approssimativa, il portafoglio potrà essere costituito da posizioni *opposte* di stock e bond, o da posizioni *long* o *short* su entrambe le componenti.

La costruzione di un portafoglio non rischioso, secondo *l'argomentazione di hedging*, si effettua calibrando una posizione sul sottostante e sul derivato; se f è monotona non-decrescente in S le posizioni saranno di segno opposto sul derivato e sul sottostante, mentre se f è monotona non-crescente in S le posizioni saranno di segno uguale.

Un'assunzione fondamentale nel modello binomiale è la *valutazione neutrale verso il rischio*. Quando si valuta un derivato si presume che gli investitori siano neutrali al rischio e quindi è irrilevante il grado effettivo di propensione al rischio di compratori e venditori. Le implicazioni fondamentali di tale implicazione sono che: il tasso di rendimento atteso delle azioni (o altra attività) è pari al tasso d'interesse privo di rischio e il tasso utilizzato per l'attualizzazione del payoff atteso del derivato è pari al tasso d'interesse privo di rischio. Risulta interessante quindi notare che, in un mondo neutrale verso il rischio, la valutazione delle opzioni non dipende dalle probabilità di rialzo p e di ribasso

$1 - p$ del prezzo del sottostante, ma solo dal tasso risk free utilizzato per l'attualizzazione, in quanto tali probabilità sono implicitamente contenute nel prezzo del sottostante al tempo T. Introducendo un ragionamento più analitico, nella formula di *pricing* delineata per le opzioni call nella [2.7], come per le analoghe formule nelle opzioni put e nel caso di un generico derivato, la probabilità p di rialzo non gioca alcun ruolo nella determinazione del prezzo, non essendo quindi presente nella formula [2.6] o nella [2.7], o nelle identiche formule per il caso della put o per il caso generico. Inoltre, non viene considerata nemmeno l'avversione al rischio degli agenti di mercato.

Nel caso si ipotizzi che gli agenti di mercato siano massimizzatori di profitto ed avversi al rischio, la loro funzione di utilità sarà *monotona crescente* e *concava*. Per valutare il payoff aleatorio $Y(T)$ esigibile in $T = t + 1$ si utilizza un criterio che poggia sull'attualizzazione al tasso di interesse privo di rischio i dell'equivalente certo di $Y(t + 1)$:

$$\bar{\bar{Y}}(t+1) = u^{-1}\{E_t[u(Y(t+1))]\} = u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)], \qquad [2.17]$$

Si ottiene quindi, in notazione compatta, che:

$$Y(t) = \frac{\bar{\bar{Y}}(t+1)}{m}. \qquad [2.18]$$

A causa dell'avversione al rischio l'equivalente certo non può essere maggiore del valore atteso di $Y(t + 1)$, e quindi:

$$\bar{\bar{Y}}(t+1) \leq E_t[Y(t+1)], \qquad [2.19']$$

o in altri termini:

$$u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)] \leq pY_a + (1-p)Y_b\ . \qquad [2.19'']$$

La disuguaglianza è conseguenza diretta della concavità dell'utilità $u(x)$. L'uguaglianza tra equivalente certo e valore atteso (escludendo il caso in cui $Y_a = Y_b$) si verificherà solo nel caso di *indifferenza al rischio* (*risk neutral),* ovvero nel caso di funzione di utilità lineare:

$$Y(t) = \frac{E_t[Y(t+1)]}{m}. \qquad [2.20]$$

Nella formula [2.21] che è stata riportata già precedentemente e che viene indicata nuovamente

$$Y = \Delta\mathrm{S} + \mathrm{B} = \frac{1}{m}[qY_a + (1-q)Y_b] \qquad [2.21]$$

non compare nulla riguardo la probabilità p e la funzione di utilità. Il coefficiente q $(q = \frac{m-b}{a-b})$ può essere interpretato come una probabilità (*probabilità risk-neutral)*; assumendo, infatti, la disuguaglianza di arbitraggio citata sopra $a > m > b$, q risulta compreso tra 0 e 1. Riesaminando la formula [2.21] sotto questa ipotesi, il fattore tra parentesi quadre può essere interpretato come una aspettativa in t del payoff aleatorio $Y(t+1)$ calcolata con le probabilità q e $1-q$, e quindi:

$$E_t^Q[Y(t+1)] = qY_a + (1-q)Y_b \quad . \qquad [2.22]$$

In questo caso E_t^Q indica l'aspettativa calcolata in t secondo la probabilità q.

La [2.22] può essere riscritta come:

$$Y(t) = \frac{E_t^Q[Y(t+1)]}{m}\,, \qquad [2.23]$$

che indica il prezzo del generico derivato come il valore attuale, calcolato al tasso i risk free, del valore atteso del payoff a scadenza calcolato con probabilità q.

In definitiva, in un mondo neutrale verso il rischio ci si aspetta che il prezzo dell'azione cresca in base al tasso risk free; secondo il principio di neutralità verso il rischio, la valutazione dei derivati può essere vista come il valore atteso del loro payoff attualizzato al tasso risk free. Il prezzo dell'opzione, quindi, non dipendendo dalle probabilità di rialzo e di ribasso del prezzo del sottostante, porta alla conseguenza che anche il tasso di rendimento dell'azione risulta irrilevante nel pricing. Tale assunzione deriva dalla circostanza che, in un mondo neutrale verso il rischio, gli investitori non richiedono premi per il rischio e di conseguenza il tasso di rendimento del sottostante coincide con il tasso risk free.

Rispetto al valore aleatorio $S(t+1)$ assunto dal sottostante a fine periodo, è sempre possibile calcolare il rendimento atteso in t, definito come:

$$\mu_S = \frac{E_t[S(t+1)]}{S(t)} - 1 \quad . \qquad [2.24]$$

Il termine μ_S è determinato dalle probabilità naturali che specificano la distribuzione $S(t+1)$, per cui:

$$\mu_S = (a-1)p + (b-1)(1-p) = ap + b(1-p) - 1. \qquad [2.25]$$

Nel mercato operano agenti avversi al rischio, sicché il rendimento atteso μ_S deve essere maggiore del tasso risk free i. Si crea dunque un differenziale $\delta_S = \mu_S - i$ che corrisponde al premio per il rischio. Bisogna notare che il rendimento atteso di S, basandosi sulle probabilità *risk-neutral* risulta:

$$\widehat{\mu_S} = \frac{E_t^Q[S(t+1)]}{S(t)} - 1 = m - 1, \qquad [2.26]$$

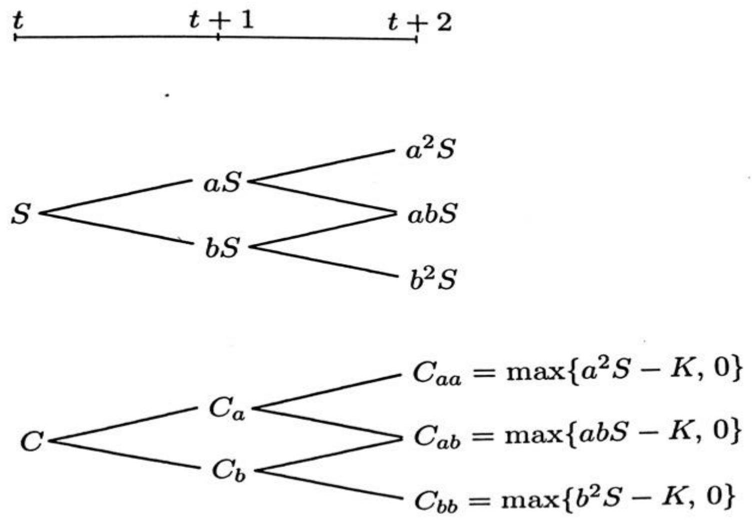
e quindi:

$$\widehat{\mu_S}=\text{i}. \qquad [2.27]$$

È evidente quindi che, calcolando il rendimento atteso con la probabilità risk neutral, esso risulta pari al tasso di interesse risk free i e il premio per il rischio è nullo.

Il modello binomiale nel caso di due periodi ($T = t + 2$) è illustrato nella *figura 10*.

Figura 10: *Evoluzione dell'albero binomiale a due periodi e del prezzo dell'opzione*



Il pricing del modello a due periodi, in linea con il principio di neutralità verso il rischio, può essere effettuato attraverso le analoghe considerazioni evidenziate nel modello uniperiodale, le quali portano alla relazione del caso generale:

$$Y = \frac{1}{m^2}[q^2Y_{aa} + 2q(1-q)Y_{ab} + (1-q)^2Y_{bb}], \qquad [2.28]$$

e alla relazione del caso della call:

$$C = \frac{1}{m^2}[q^2C_{aa} + 2q(1-q)C_{ab} + (1-q)^2C_{bb}], \qquad [2.29]$$

in cui la probabilità di rialzo è sempre $q = \frac{m-b}{a-b}$.

Se si assume che i movimenti al rialzo o al ribasso del sottostante siano eventi *indipendenti* ed *equiprobabili* e che q sia la probabilità di un movimento al rialzo, valgono le seguenti definizioni:

- q^2 è la probabilità, in t, di trovarsi nello stato aa in $t + 2$;
- $2q(1-q)$ è la probabilità, in t, di trovarsi nello stato ab in $t + 2$;
- $(1-q)^2$ è la probabilità, in t, di trovarsi nello stato bb in $t + 2$;

e quindi si ha che:

$$q^2 + 2q(1-q) + (1-q)^2 = [q + (1-q)]^2 = 1. \qquad [2.30]$$

Tramite questa interpretazione, la [2.28] e [2.29] esprimono ancora il prezzo della call o del generico derivato come il valore atteso scontato del suo valore a scadenza:

$$C(t) = \frac{1}{(1+i)^2} E_t^Q[max\{S(t+2) - K, 0\}], \qquad [2.31]$$

e

$$Y(t) = \frac{1}{(1+i)^2} E_t^Q[f(Y(t+2))]. \qquad [2.32]$$

Il valore atteso E_t^Q è calcolato utilizzando le probabilità *risk-neutral* e quindi le probabilità naturali e le preferenze rispetto al rischio non hanno alcuno spazio nel pricing.

Il *portafoglio replicante*, nel caso di una call o nel caso di generale, costituito alla data t non può essere lasciato inalterato alla data $t+1$. Infatti in t il delta sarà uguale a:

$$\Delta(t) = \frac{C_a - C_b}{(a-b)S} \quad \text{e} \quad \Delta(t) = \frac{Y_a - Y_b}{(a-b)S},$$

mentre in $t+1$ sarà:

$$\Delta_a(t+1) = \frac{C_{aa} - C_{ab}}{(a-b)aS} \quad \Delta_b(t+1) = \frac{C_{ab} - C_{bb}}{(a-b)bS} \quad \text{e} \quad \Delta_a(t+1) = \frac{Y_{aa} - Y_{ab}}{(a-b)aS} \quad \Delta_b(t+1) = \frac{Y_{ab} - Y_{bb}}{(a-b)bS},$$

a seconda che si sia nello stato a o nello stato b.

I valori di delta implicano sempre una composizione del portafoglio replicante costituita, nel caso di una call, con una posizione long in stock e con una posizione short in bond; tuttavia si tratta di valori di delta diversi tra loro. La replicazione quindi non sarà effettuata con un portafoglio statico, ma con un portafoglio con le caratteristiche di una *strategia dinamica*, consistente nel rispondere a ogni cambiamento del prezzo del sottostante ristrutturando il portafoglio, cambiando dunque opportunamente la composizione di bond e stock. Questa strategia è detta di *delta hedging*.

È interessante notare che tale strategia è *autofinanziante*, ovvero che l'importo C o Y investito in t è sufficiente a replicare i possibili payoff C_{aa}, C_{ab}, C_{bb} o Y_{aa}, Y_{ab}, Y_{bb} nell'istante $t+2$ senza bisogno di ulteriori finanziamenti in $t+1$.

In generale, il modello binomiale può essere adoperato anche nel caso di scadenza dopo n periodi, ad esempio in $T = t+3$, ovvero su un arco di tempo *multiperiodale*.

Si espone di seguito un esempio del modello binomiale:

Esempio: In $t = 0$ si ha il titolo azionario $S = 100$ e un'opzione call che ha come sottostante S con scadenza in $T = 1$ e prezzo strike $K = 100$. Il tasso d'interesse *risk-free* è $i = 0.03$ e il titolo azionario può assumere i valori $aS(= 120)$ o $bS(= 83.33)$ con probabilità $a = 1.2$ e $b\ =\ 1/1.2$.

La probabilità *risk-neutral* è pari a:

$$q = \frac{m-b}{a-b} = \frac{1.03-0.833333}{1.2-0.833333} = 0.536364 \qquad\qquad 1-q = 0.463636.$$

Il prezzo della call è:

$$C = \frac{1}{m}[qC_a + (1-q)C_b] = \frac{1}{1.03}[0.536364 * 20 + 0.463636 * 0] = 10.41483.$$

Il portafoglio replicante è:

$$\Delta = \frac{C_a - C_b}{S_a - S_b} = \frac{20-0}{120-83.33} = 0.545455 \text{ e } \quad B = \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)m} = \frac{1.2*0-0.83*20}{(1.2-0.83)1.03} = -44{,}13063\ .$$

Il prezzo della call può essere espresso anche come:

$$C = S\Delta + B = 100 * (0.545455) - 44.13063 = 10.41483.$$

Nel modello di Cox, Ross e Rubinstein[30] i fattori a e b sono illustrati nella formula [2.33] e [2.34]:

$$a\ = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad [2.33]$$

$$b\ = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{a}. \qquad [2.34]$$

Essendo σ la volatilità del prezzo del sottostante nell'intervallo di tempo Δt.

Le relazioni elencate in questo paragrafo, finora, sono relative ad opzioni Europee che non pagano dividendi[31]. Alla data di dichiarazione la società annuncia la distribuzione del dividendo calcolato o come percentuale del prezzo dell'azione osservato nel giorno dello stacco (*dividend yield* discreto) o come somma di importo fisso (dividendo discreto). Dopo l'epoca di dichiarazione t_D, il titolo azionario viene negoziato al netto del dividendo. All'epoca di registrazione, che usualmente coincide con la data ex-dividendo, vengono ufficialmente identificati i possessori dei titoli che riceveranno il dividendo; esclusivamente i proprietari dei titoli che vengono registrati hanno diritto a riscuoterlo. La

[30] Cox J., R. S. (1979). *Option pricing: a simplified approach*

[31] Il *payout ratio* esprime in termini percentuali la porzione di utili distribuiti. Il termine "dividendo" va inteso come "riduzione attesa nel prezzo dell'azione".

data del pagamento effettivo avviene qualche giorno dopo la data ex-dividendo. Per ragioni di semplicità, generalmente nei modelli finanziari si suppone che l'epoca di pagamento coincida con la data ex-dividendo.

Si consideri una call Europea scritta su un titolo che paga dividendi una volta l'anno: la posizione netta descritta (o $P\&L$) per una opzione che non paga dividendi può essere rielaborata dalla [2.1'''] come segue, indicando con D i dividendi annui dell'azione sottostante[32]:

$$max\{0; S_0 - Ke^{-rT} - De^{-rt_D}\} - c \qquad [2.35]$$

mentre per la put Europea che paga dividendi, la [2.2'''] diventa:

$$max\{Ke^{-rT} - S_0 + De^{-rt_D}; 0\} - p \qquad [2.36]$$

2.2.2 *Pricing: modello di Black e Scholes*

Nel modello di Black e Scholes si prevede che i rendimenti siano distribuiti tra infiniti stati della natura secondo una legge statistica normale. Il modello permette di definire e valutare una opzione a partire dalla conoscenza di cinque variabili fondamentali che sono:

- $S(t)$ = Valore dell'attività sottostante
- K = prezzo "strike" dell'opzione
- T = scadenza dell'opzione
- r = tasso d'interesse risk free corrispondente alla vita dell'opzione
- σ = volatilità del sottostante

Il modello si basa sul principio di assenza di arbitraggi e sull'argomentazione di hedging; l'evoluzione dei prezzi è descritta tramite un *processo stocastico* definito nel *tempo continuo* che non considera il rischio del tasso d'interesse. Risulta possibile, come anche nel modello binomiale, creare un portafoglio equivalente all'opzione, costituito da unità del sottostante e da obbligazioni prive di rischio. Il processo stocastico che descrive la dinamica del prezzo del sottostante è un *moto browniano geometrico*.

Si consideri al tempo t un'opzione con scadenza in $T \geq t$ e prezzo $Y(t)$ scritta su un titolo azionario $S(t)$ che non paga dividendi entro T. Il modello è basato su cinque ipotesi fondamentali:

- Il mercato è aperto con continuità

[32] Tratto da *Opzioni su titoli che pagano dividendi: proprietà e tecniche di valutazione* di Nardon M.

- Il mercato è perfetto (ovvero, non ci sono costi di transazione e gravami fiscali, i titoli sono infinitamente divisibili, sono consentite le vendite allo scoperto, gli agenti sono massimizzatori di profitto e price-taker)
- Non esistono arbitraggi non rischiosi
- Sul mercato esistono ZCB *default-free* con scadenza qualsiasi, la struttura a scadenza dei tassi di interesse è piatta e deterministica ad un livello di intensità istantanea di interesse r. L'ipotesi di struttura piatta e deterministica implica, considerato una ZCB unitario con prezzo $v(t,s)$ e $s \geq t$, che:
    i. il rendimento a scadenza $r(t,s) = -\frac{\log v(t,s)}{s-t}$ soddisfi la proprietà $r(t',s) = r$ con r costante;
    ii. il prezzo della ZCB considerato sia espresso come $v(t,s) = e^{-r(s-t)}$;
    iii. sia escluso dal modello il rischio di tasso d'interesse. Ciò implica che in t i prezzi futuri $v(t',s)$ siano perfettamente prevedibili, ovvero $v(t',s) = \frac{v(t,s)}{v(t,t')}$;
    iv. Alla luce di quanto detto al punto (ii.) si ha $v(t',s) = e^{-r(s-t\prime)}$
    v. Il rendimento a scadenza può essere calcolato come per un ZCB con vita a scadenza infinitesima (*currently maturing ZCB*) avente prezzo $v(t,t+dt)$, ovvero: $r(t) = -\lim_{\tau \to 0} \frac{\log v(t,t+\tau)}{\tau}$.
- Il processo di prezzo $S(t)$ del sottostante è un moto Browniano geometrico descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t) \quad , \qquad [2.39']$$

con μ e σ costanti.

Se si dividono entrambi i membri della [2.39'] per $S(t)$ si ottiene:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t), \qquad [2.39'']$$

che esprime l'evoluzione degli incrementi percentuali infinitesimi dS/S come un moto browniano con parametri μ e σ. Prendendo l'aspettativa in t della [2.39''] si ha:

$$E_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right] = \mu dt + \sigma E_t[dZ(t)] = \mu\, dt,$$

poiché $Z(t)$ ha media nulla.

Si ottiene dunque l'espressione:

$$\mu = \frac{E_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right]}{dt},$$

ovvero, che μ è il rendimento istantaneo (intensità di rendimento) atteso dell'investimento rischioso nel titolo azionario.

La varianza di dS/S è:

$$Var_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right] = \sigma^2 Var_t[dZ(t)] = \sigma^2\, dt,$$

poiché $Z(t') - Z(t)$ ha varianza $t' - t$.

Si ottiene dunque l'espressione:

$$\sigma^2 = \frac{Var_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right]}{dt},$$

quindi la volatilità σ esprime la deviazione standard del rendimento istantaneo dell'investimento in S. Come è stato già detto, agenti avversi al rischio pretendono che μ sia maggiore di r; il differenziale positivo tra i due rappresenta il premio per il rischio richiesto sull'investimento azionario.

Il modello prevede l'assunzione di neutralità verso il rischio; tale caratteristica è riscontrabile nell'equazione esposta in seguito [2.54] (caso di una call) in cui non compare alcuna variabile che richiami la *propensione al rischio degli investitori* (ad esempio, non vi è traccia del tasso di rendimento atteso dell'azione). La naturale conseguenza è che il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è uguale al tasso d'interesse risk free.

In maniera sintetica si riportano le implicazioni della neutralità verso il rischio: la media dei rendimenti valutati nel continuo non compare nelle formule di Black e Scholes, le equazioni non dipendono dalle variabili influenzate dalla propensione al rischio, si assume che il tasso di rendimento atteso dell'azione coincida con il tasso risk free, l'attualizzazione del nozionale a scadenza avviene attraverso il tasso risk free. Fissati questi elementi introduttivi, si affronta il problema della *valutazione di una call europea.*

Si ipotizzi al tempo t un'opzione call di tipo europeo, con tempo di esercizio $T = t + \tau$ e prezzo di esercizio K, scritta su un titolo azionario $S(t)$. Si può esprimere il prezzo $C(t)$ dell'opzione come funzione di S e t, ovvero:

$$C(t) = C(S_t, t). \qquad [2.40]$$

Il prezzo $C(t)$ rappresenta quindi un processo a traiettorie continue, il cui differenziale può essere espresso utilizzando il lemma di Ito.

Si ha quindi:

$$dC(t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz \,. \qquad [2.41']$$

Esprimendo $C(t)$ secondo l'equazione differenziale stocastica si ha:

$$dC(t) = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dZ(t) \,, \qquad [2.41'']$$

in cui il coefficiente di *drift* a e il coefficiente di *diffusione* b^2sono definiti come:

$$a(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \qquad [2.42]$$

$$b(S_t, t) = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S}. \qquad [2.43]$$

La [2.41''] può essere espresse anche in modo differente:

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = a'(S_t, t)dt + b'(S_t, t)dZ(t), \qquad [2.41''']$$

e i termini $a'(S_t, t)$ e $b'(S_t, t)$:

$$a'(S_t, t) = \frac{a(S_t,t)}{C(t)}, \qquad b'(S_t, t) = \frac{b(S_t,t)}{C(t)}.$$

Dalla [2.41'''] si ricava:

$$E_t = \left[\frac{dC(t)}{C(t)}\right] = a'(S_t, t),$$

e quindi:

$$a'(S_t, t) = \frac{E_t\left[\frac{dC(t)}{C(t)}\right]}{dt},$$

e per la varianza:

$$Var_r\left[\frac{dC(t)}{C(t)}\right] = b'^2(S_t, t)Var_t[dZ(t)] = b'^2(S_t, t)dt,$$

e quindi:

$$b'^2(S_t, t)dt = \frac{Var_r\left[\frac{dC(t)}{C(t)}\right]}{dt}.$$

Si capisce quindi che i valori a' e b' sono il valore atteso e la deviazione standard del tasso istantaneo di rendimento ottenuto investendo nell'opzione. Si costruisce un portafoglio composto da una opzione call e da α unità del sottostante il cui valore al tempo t risulta essere:

$$W(t) = C(t) + \alpha S(t). \quad [2.44]$$

La sua dinamica stocastica sarà descritta dall'equazione differenziale stocastica:

$$dW = (a + \alpha\mu S)dt + (b + \alpha\sigma S)dZ. \quad [2.45]$$

Per la quota:

$$\alpha^* = -\frac{1}{S}\frac{b}{\sigma}, \quad [2.46]$$

il portafoglio ha valore:

$$W^* = C + \alpha^* S, \quad [2.47]$$

e dinamica descritta da:

$$dW^* = (a + \alpha^*\mu S)dt. \quad [2.48]$$

Il portafoglio è caratterizzato dunque dall'essere *istantaneamente* non rischioso, ovvero il valore $W^*(t + dt)$ del portafoglio è prevedibile in t. Per evitare arbitraggi non rischiosi l'incremento di valore dW^* realizzato detenendo l'*hedge portfolio* da t a $t + dt$ dovrà essere uguale all'incremento di valore di W^*da t a $t + dt$ al tasso non rischioso r. In altri termini dovrà sussistere:

$$dW^* = W^* r dt. \quad [2.49]$$

Sostituendo alla [2.49] la formula [2.47] e [2.48], si ricava:

$$(a + \alpha^*\mu S)dt = W^* r\, dt = (C + \alpha^* S)r\, dt, \quad [2.50']$$

e, esplicitando α^*, si ottiene:

$$\frac{a - rC}{b} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad , \quad [2.50'']$$

o seguendo quanto delineato circa le espressioni $a'(S_t, t)$ e $b'(S_t, t)$:

$$\frac{a' - r}{b'} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad . \quad [2.51]$$

La [2.51] sostiene che per evitare arbitraggi il prezzo del rischio dell'investimento sull'opzione e quello dell'investimento sul titolo sottostante devono coincidere.

La [2.50''] può essere riscritta anche nel seguente modo:

$$a - b\frac{\mu - r}{\sigma} = rC \quad . \quad [2.52]$$

Esplicitando le espressioni riportate nella [2.42] e [2.43] nella [2.52] si ha:

$$a - b\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad . \quad [2.53]$$

Il termine con la derivata prima rispetto a S e che contiene il drift μ si elimina e si sostituisce con un termine identico che ha come coefficiente il tasso non rischioso r. Riordinando le derivate e uguagliandole al termine rC si ottiene *l'equazione generale di valutazione* del modello Black e Scholes:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} = rC. \qquad [2.54]$$

La [2.54] deve essere soddisfatta dal prezzo $C(t)$ dell'opzione call in ogni istante $t \leq T$. Il pricing si concretizza nel risolvere la [2.54] sotto la condizione a contorno:

$$C(T) = max\{S(T) - K, 0\}. \qquad [2.55]$$

Prendendo a riferimento le formule sopracitate [2.54] e [2.55] si giunge alla *formula di prezzo della call*:

$$C(t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r\,\tau}N(d_2), \qquad [2.56]$$

in cui:

$$d_1 = \frac{\log\left[\frac{S(t)}{K}\right] + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \qquad [2.57]$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \qquad [2.58]$$

$N(x)$ indica la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard (cioè, con media nulla e varianza unitaria), ossia, la funzione di ripartizione della variabile nel punto x. I coefficienti $N(d_1)$ e $N(d_2)$ individuano la struttura del portafoglio replicante; il primo esprime il numero di unità di sottostante da acquistare, il secondo il numero di ZCB con scadenza in T e nominale K da vendere allo scoperto. Siccome $N(x) = P[\epsilon < x]$(ϵ è la variabile aleatoria normale standard) i valori $N(d_1)$ e $N(d_2)$ sono positivi e compresi tra 0 e 1. Essendo $N(x)$ funzione monotona crescente di x si deve avere che $N(d_1) > N(d_2)$, e quindi, se $\sigma\sqrt{\tau} > 0$, $d_1 > d_2$.

La [2.46], sotto le ipotesi del lemma di Ito, viene espressa come:

$$\alpha^* = -\frac{1}{S}\frac{b}{\sigma} = -\frac{\partial C}{\partial S} \;. \qquad [2.59]$$

La derivata $\frac{\partial C}{\partial S}$ risulta compresa tra 0 e 1 e, poiché coincide col coefficiente di S nell'equazione di Black e Scholes, essa sarà uguale a $N(d_1)$, ovvero:

$$\frac{\partial c}{\partial s} = N(d_1).$$

Il portafoglio non-rischioso si costruisce acquistando una quantità unitaria della call e vendendo allo scoperto una quantità di sottostante uguale a $\frac{\partial c}{\partial s}$ indicata con Δ, per cui:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial s}. \qquad [2.60]$$

In base a quanto detto, il valore dell'*hedged portafoglio* potrà essere espresso come:

$$W^* = C - S\Delta, \qquad [2.61]$$

o dal punto di vista di chi ha venduto l'opzione call, vendendo quest'ultima si potrà costruire un *portafoglio replicante*:

$$C = S\Delta + W^*. \qquad [2.62]$$

Attraverso la formula [2.62] e [2.56] si ricava che:

$$W^* = -Ke^{-r\tau}N(d_2)\ , \qquad [2.63]$$

e quindi il portafoglio replicante una call option nell'istante t si ottiene acquistando Δ unità dell'azione sottostante e vendendo allo scoperto $KN(d_2)$ ZCB unitari con scadenza in $T = t + \tau$. È importante ribadire che quanto è stato detto circa il portafoglio replicante o non-rischioso è valido istantaneamente e quindi gli stessi richiedono una ricalibratura, teoricamente, continua.

Si ricorda la relazione trovata prima $\frac{\partial c}{\partial s} = N(d_1)$. Il prezzo della call è una funzione decrescente del prezzo strike K e funzione crescente della vita a scadenza τ, della volatilità σ e del tasso di interesse r. Da queste considerazioni si possono ricavare ulteriori relazioni quali:

$$\frac{\partial c}{\partial K} < 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} > 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} > 0.$$

Per l'attuazione della strategia di *delta hedging* è utile analizzare la dipendenza di *delta* dal prezzo corrente del sottostante, infatti questo andamento definisce la velocità (cioè la frequenza) con cui è necessario effettuare le operazioni di ricalibratura del portafoglio replicante.

Il *gamma* è indicato come la derivata del delta rispetto ad S, e si esprime come $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S(0)\sigma\sqrt{\tau}}$ mentre la derivata del prezzo dell'opzione rispetto a σ è nota come *vega*, la derivata del prezzo dell'opzione rispetto a r è nota come *rho*, la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al tempo è nota come *theta*. *Delta, gamma, theta, rho e vega* sono le *lettere greche* dell'opzione.

Tramite queste espressioni la [2.54] si indica come:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta + \Theta = rC.$$

La soluzione dell'equazione differenziale [2.54] con la relativa condizione a contorno si può esprimere alternativamente utilizzando la rappresentazione in *forma integrale*; essa ha forma di aspettativa ed espressione:

$$C(t) = e^{-r\tau} E_t^Q[max\{S(T) - K, 0\}],$$

in cui E_t^Q è l'operatore di media condizionata calcolata secondo una distribuzione di probabilità lognormale con parametri $(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau$ e $\sigma\sqrt{\tau}$. In sostanza, si ricava il valore atteso del payoff a scadenza $C(t)$ utilizzando per il processo del prezzo S del sottostante la dinamica dell'equazione differenziale stocastica:

$$dS = rS\,dt + \sigma S\,d\hat{Z},$$

in cui $\hat{Z}(t)$ è un moto browniano standard secondo la misura di probabilità modificata Q. Come già detto, il parametro di drift μ viene sostituito dal rendimento risk free r. La distribuzione individuata dai parametri r e σ è la distribuzione *risk neutral*; vi è un effetto di *neutralizzazione del rischio*.

Si passa ora al problema della *valutazione di una put europea.*

Per ricavare la formula di Black e Scholes per la put europea si può: o sostituire $C(t)$, fornito nell'equazione [2.56], adoperando la call-put parity, o, agendo come per la call europea, risolvere la [2.54] sotto la condizione a scadenza. Per quanto riguarda la prima alternativa, si ricorda la relazione [2.56]. Isolando il valore di $P(t)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P(t) &= S(t)N(d_1) - Ke^{-r\,\tau}N(d_2) - S(t) + Ke^{-r\,\tau} \\ &= Ke^{-r\,\tau}[1 - N(d_2)] - S(t)[1 - N(d_1)]. \end{aligned} \qquad [2.64]$$

In questo caso varrà la simmetria della distribuzione normale standard, secondo cui $1 - N(x) = N(-x)$, quindi la [2.64] può essere riscritta come:

$$P(t) = Ke^{-r\,\tau}N(-d_2) - S(t)N(-d_1). \quad [2.65]$$

La seconda alternativa consiste, come già detto, nel risolvere la [2.54] sotto la condizione a scadenza, ovvero:

$$P(T) = max\{K - S(T), 0\}. \quad [2.66]$$

La soluzione è identica alla [2.65]. Dato che $d_1 > d_2$, per i coefficienti $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$ vale la seguente relazione:

$$N(-d_1) < N(-d_2). \quad [2.67]$$

Tali valori risultano sempre compresi tra 0 e 1. Anche nella put, come per la call, si ritrovano espressioni simili tra cui la derivata di P rispetto ad S:

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial S}{\partial S} = N(d_1) - 1 = -N(-d_1). \quad [2.68]$$

Dalla [2.65] si ricava che la [2.68] è il delta della put, ovvero la quantità di sottostante da acquistare per replicare il portafoglio:

$$\Delta = -N(-d_1) = \frac{\partial P}{\partial S}. \quad [2.69]$$

Il delta è negativo e compreso tra -1 e 0.

Per replicare l'opzione put si deve vendere allo scoperto $-\Delta$ unità dell'azione sottostante e investire:

$$W^* = Ke^{-r\tau}N(-d_2), \quad [2.70]$$

al tasso risk free r, acquistando ad esempio $KN(-d_2)$ ZCB unitari con scadenza $t + \tau$. Si giunge ad una simile espressione indicata anche nella call riguardo al *portafoglio replicante*, ovvero:

$$P = S\Delta + W^* \quad [2.71]$$

in cui Δ e W^* sono i valori trovati nella [2.69] e [2.70].

Si ricorda la relazione trovata prima $\frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1)$. Il prezzo della put è una funzione crescente del prezzo strike K e della volatilità σ , una funzione decrescente del tasso di interesse r,mentre il segno della derivata rispetto alla vita a scadenza τ non è determinato. Da queste considerazioni si possono ricavare ulteriori relazioni quali:

$$\frac{\partial P}{\partial K} > 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\Theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} > 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} < 0.$$

Quanto detto circa il problema delle valutazioni dell'opzione put e call può essere esteso a *payoff più generali*, nello specifico, al calcolo del prezzo Y di un contratto derivato scritto sul sottostante S il cui payoff sia definito, invece che dalle relazioni riportate nella [3.55] e [3.66], come una più generale funzione del prezzo assunto da S alla scadenza.

Fissata la scadenza T, il payoff senza dividendi sarà:

$$Y(T) = f[S(T)]. \qquad [2.71]$$

Si ipotizzi che il contratto non consenta al possessore di liquidare il derivato in $t < T$ ad un prezzo superiore al valore di mercato $Y(t)$. Come nella [2.40] nel caso della call, si può indicare il prezzo $Y(t)$ dell'opzione come funzione di S e t, ovvero:

$$Y(t) = Y(S_t, t), \qquad [2.72]$$

e l'equazione differenziale stocastica:

$$dY(t) = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dZ(t)\ , \qquad [2.73]$$

in cui il coefficiente di drift a e il coefficiente di diffusione b^2sono definiti dalla [2.42] e [2.43].

Si richiamano per analogia le relazioni indicate per il caso put e call adattate al caso di un contratto derivato generale, ovvero:

$$\frac{a-rY}{b} = \frac{\mu-r}{\sigma};\ \frac{a'-r}{b'} = \frac{\mu-r}{\sigma}\quad ;\quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY;\ \alpha^* = -\frac{\partial Y}{\partial S};\ \ \Delta = \frac{\partial Y}{\partial S};$$

$$Y = S\Delta + W^*;\quad W^* = Y + \alpha^* S;\quad a'(S_t, t) = \frac{a(S_t,t)}{Y(t)};\quad b'(S_t, t) = \frac{b(S_t,t)}{Y(t)}.$$

Anche nel caso di un generico derivato il *portafoglio replicante* è costituito da stock e bond, ovvero da un componente a tasso fisso W^* e un componente costituito da Δ unità di sottostante. Essendo un caso generico, non si può specificare il segno di queste due operazioni.

Come per il caso della call, la soluzione dell'equazione differenziale si può esprimere alternativamente utilizzando la rappresentazione in *forma integrale*:

$$Y(t) = e^{-r(T-t)} E_t^Q [Y(T)],$$

in cui $Y(T)$ è il payoff delineato dalla [2.71] e la misura risk neutral Q è una distribuzione di probabilità lognormale con parametri $(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau$ e $\sigma\sqrt{\tau}$.

Per procedere alla valutazione del generico derivato, poiché la forma della funzione f che specifica la condizione a scadenza [2.71] non consente l'esistenza di un'espressione in forma chiusa del prezzo $Y(t)$ del derivato e quindi non è sempre disponibile una formula esplicita del prezzo come per la call o la put, si adoperano *metodi numerici* per risolvere il problema differenziale corredato con le opportune condizioni al contorno. Nella pratica, si usano *schemi alle differenze*, ottenuti trasformando l'equazione differenziale $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY$ in una equazione alle differenze finite e risolvendo per via ricorsiva il corrispondente problema discreto specificato dalle condizioni al contorno. In alternativa, si utilizza un metodo di valutazione numerico che si basa sull'espressione in forma integrale della soluzione dell'equazione differenziale.

Si espone di seguito un esempio del modello Black & Scholes.

Esempio:

In $t = 0$ si ha il titolo azionario con payoff in $T: max\{S(T) - K, 0\}$. Si sa che $S(0) = 100$, $T = 6$ mesi e prezzo strike $K = 102$. Si assume che $S(t)$ segue un moto browniano con volatilità $\sigma = 0.2$ su base annua e l'intensità istantanea d'interesse *risk-free* è $r = 0.05$.

$C(0) = S(0)N(d_1) - Ke^{-r\,\tau}N(d_2) = 100N(d_1) - 102e^{-0.05\,x\,0.5}N(d_2)$.

$Ke^{-r\,\tau} = 102\;x\;e^{-0.05\,x\,0.5} = 99.482$

$d_1 = \frac{log\left[\frac{S(0)}{K}\right]+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{log\left[\frac{100}{102}\right]+\left(0.05+\frac{0.04}{2}\right)*0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.010746$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.010746 - 0.2\sqrt{0.5} = -0.03396$

Quindi:

$N(d_1) = 0.542789$

$N(d_2) = 0.486455$

$C(0) = 100\;x\;0.542789 - 99.482\;x\;0.486455 = 5.886$

$Y(0) = 99.482 + 5.886 = 105.368$

2.2.3 Il modello di Black e Scholes come limite del modello binomiale

Il modello di Black e Scholes può essere interpretato come il limite del modello binomiale. Riassumendo brevemente quanto è stato detto riguardo ai due modelli, entrambi si pongono come finalità la valutazione di opzioni; ciò che differisce concettualmente è il tempo di valutazione, uno discreto e l'altro continuo. Nell'ambito del processo di valutazione secondo la Black Scholes formula il sottostante $S(t)$ segue un moto browniano geometrico con coefficiente di drift $\mu S(t)$ e coefficiente di diffusione $\sigma^2 S^2(t)$. Il valore futuro di $S(t)$, conosciuto $S(0)$, presenta una distribuzione log-normale con media:

$$E_0[S(t)] = S(0)e^{\mu t}, \tag{2.74}$$

e varianza:

$$Var_0[S(t)] = S^2(0)e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right). \tag{2.75}$$

Il modello presuppone, come già detto, che i tassi siano deterministici e costanti su tutte le scadenze, ad un livello di intensità di interesse pari a r. L'argomentazione di hedging dimostra che il pricing deve essere svolto con un adeguato parametro che indichi la probabilità aggiustata per il rischio; si passa quindi a sostituire il drift μ con il valore del rendimento istantaneo risk free r. Il modello di Black e Scholes può essere ottenuto come passaggio al limite del modello binomiale. Frazionando l'intervallo di tempo $[0, T]$ in n intervalli di lunghezza $\Delta t = \frac{T}{n}$ e ponendo

$$a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad , \ b = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad , q = \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}, \tag{2.76}$$

il processo binomiale moltiplicativo S_n con probabilità *risk neutral* q, al divergere di n e tenendo fermo T, tende al moto browniano geometrico con parametro di drift r e di diffusione σ^2. Tale movimento è interpretato sulla base del *teorema centrale di convergenza*.

Quanto detto riguardo al processo binomiale, può essere applicato anche alle probabilità binomiali. Sotto le identiche ipotesi, esprimendo queste secondo la funzione di ripartizione complementare

$$C = S\Phi(h; n, q') - K(1+i)^{-n}\Phi(h; n, q), \tag{2.77}$$

tendono alle probabilità normali della Black Scholes formula:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(h; n, q') = N(d_1), \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi(h; n, q) = N(d_2). \tag{2.78}$$

2.3 *Call-put parity*

Una delle relazioni fondamentali per il pricing delle option è la relazione tra i due prezzi definita come *call-put parity*. Tale relazione determina il valore di una call Europea scritta su un'azione attraverso la conoscenza del valore di una put Europea scritta sulla medesima azione, e viceversa. Qualora la *call-put parity* non fosse rispettata, nel mercato delle option ci sarebbero opportunità di arbitraggio, in quanto il prezzo delle opzioni sarebbe superiore al limite superiore di prezzo oppure inferiore al limite inferiore di prezzo.

Il limite inferiore di prezzo di una call Europea, scritta su una azione che non paga dividendi è

$$c \geq max(S_0 - Ke^{-rT}, 0). \qquad [2.79]$$

L'analogo limite per una put Europea scritta sullo stesso sottostante è:

$$p \geq max(Ke^{-rT} - S_0, 0). \qquad [2.80]$$

Si considerino ora due portafogli: il primo costituito da una call Europea scritta su un'azione più il valore attuale dello *strike price* in denaro, il secondo costituito da una put Europea scritta su un'azione più l'azione stessa. Alla scadenza i due portafogli devono avere lo stesso valore pari al valore massimo tra il prezzo dell'azione e il prezzo d'esercizio. A parità di tasso di attualizzazione ne segue che la *call-put parity*, espressa dalla relazione [2.81], è:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0, \qquad [2.81']$$

o in altri termini:

$$C(t) + v(t,T)K = P(t) + S(t), \qquad [2.81'']$$

da cui:

$$C(t) - P(t) = S(t) - v(t,T)K. \qquad [2.81''']$$

Tale relazione può essere estesa alle opzioni Europee scritte su una azione che paga dividendi:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0, \qquad [2.82']$$

In altri termini:

$$C(t) - P(t) = S(t) - D(t,T) - v(t,T)K. \qquad [2.82'']$$

Capitolo III

Opzioni Europee su azione e strategie di gestione

Le opzioni sono spesso adoperate per creare combinazioni di prodotti finanziari anche finalizzati alla ricerca del profitto derivante da speculazione nei mercati, i cui rendimenti derivano dalle aspettative soggettive dell'operatore. Nei profitti delle strategie seguenti si trascurerà per semplicità il valore temporale del denaro; i profitti verranno indicati come differenza tra il valore finale (non attualizzato) e costo iniziale. Negli esempi che seguono il sottostante è rappresentato da un'azione che non paga dividenti, inoltre le linee tratteggiate nei grafici mostrano la relazione tra profitto e prezzo dell'azione per ciascun contratto mentre la linea continua mostra le stesse relazioni per l'intero portafoglio. Attraverso l'utilizzo delle opzioni si possono intraprendere i seguenti tipi di strategie:

- *Hedge*
- *Spread*
- *Combinazioni*

Prima di passare alla trattazione delle strategie, si ricorda graficamente il *payoff* di una posizione *forward long* e *short* (*figura 1*) e il *payoff* di una posizione *long* su azione (*figura 2*).

Figura 1: Forward long e short position

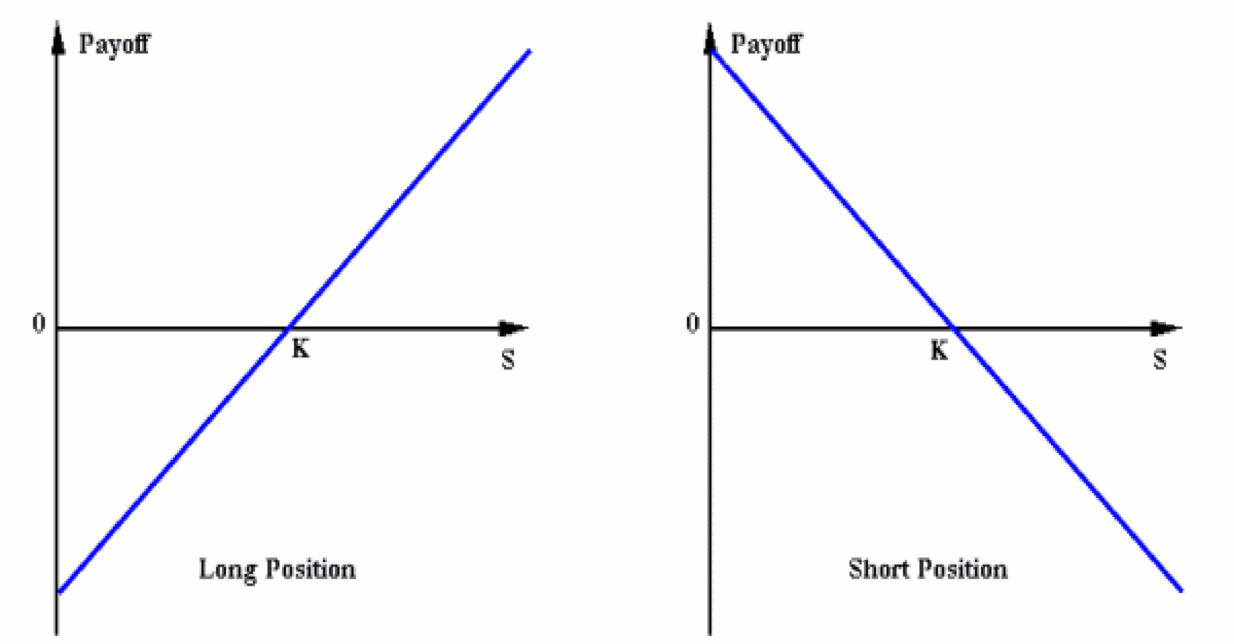
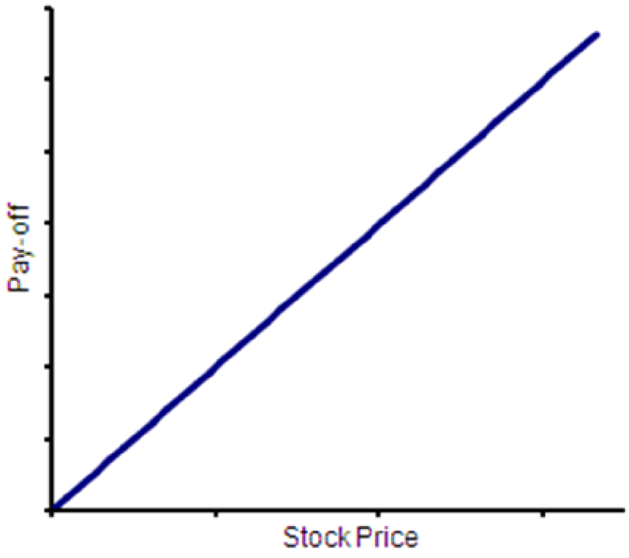


Figura 2: Long position su azione

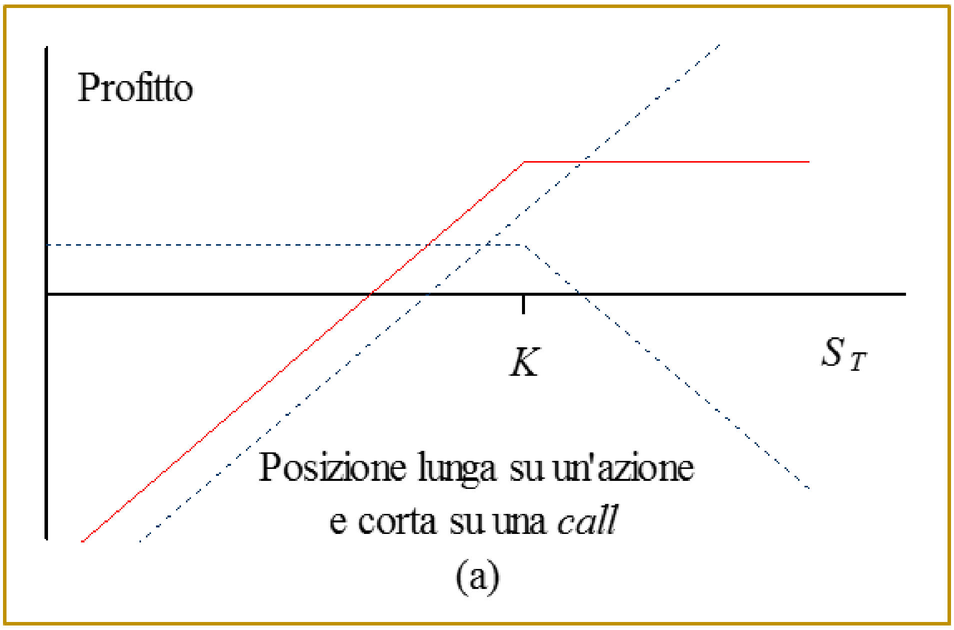


3.1 Strategia "Hedge"

Una posizione costruita su un'azione e su un'opzione è detta di *hedge*.

Nella *figura 3* sono riportati i profili di profitto di un portafoglio composto da una posizione lunga sul sottostante (acquisto *forward* dell'azione *S*) e una posizione corta sulla call (*writing a covered call*); la posizione lunga assunta sull'azione copre l'investitore dalla possibilità di un forte rialzo del prezzo dell'azione.

Figura 3



Una situazione diversa è quella di un portafoglio costituito da una *short position* sul sottostante e una *long position* sulla call (*figura 4*), una *buying a protective put* in cui vi è una long position sia sul sottostante che su una put scritta sulla stessa azione (*figura* 5), la vendita di una put combinata con una posizione corta sull'azione (*figura 6*).

Figura 4

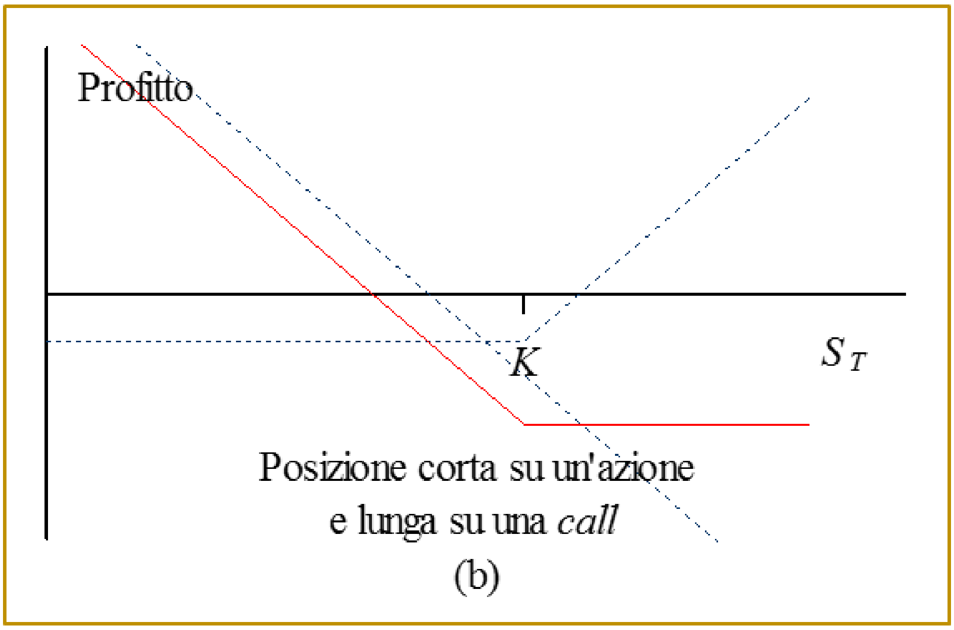


Figura 5

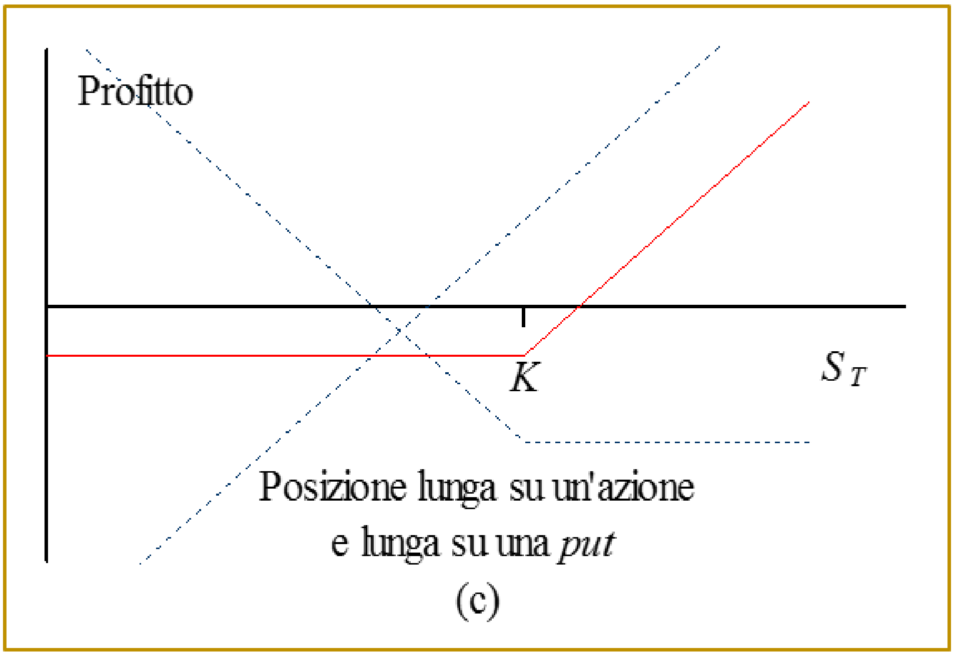
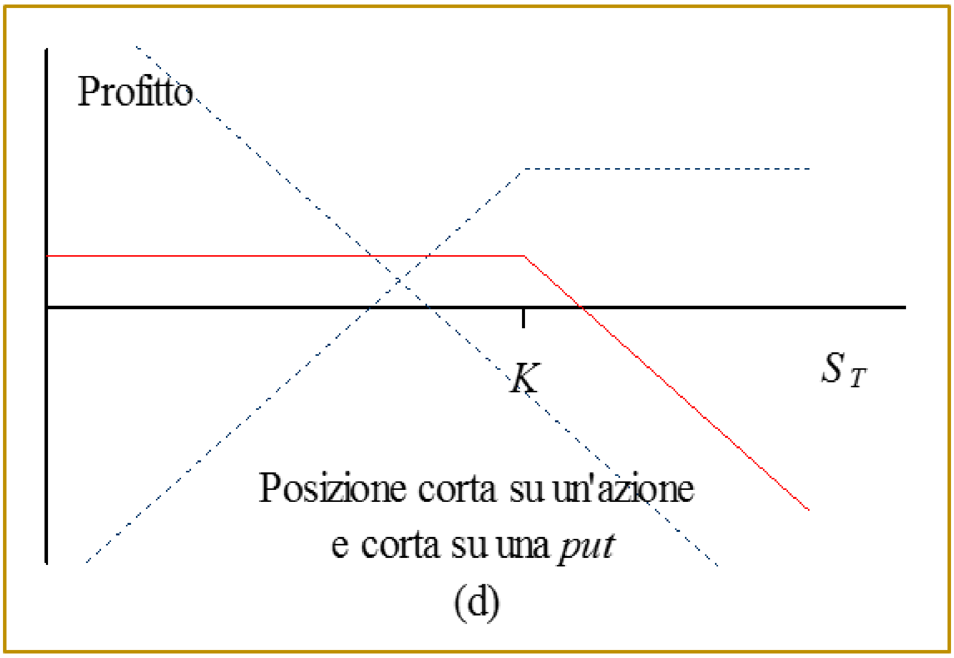


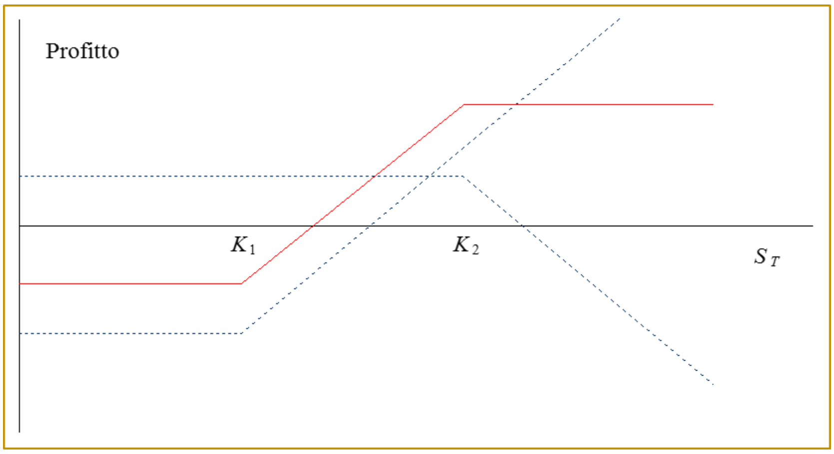
Figura 6



3.2 Strategia "Spread"

Quando si assumono posizioni attraverso portafogli costituiti da due o più call o put, la strategia operativa prende il nome di *spread*. Lo *spread al rialzo* (*bull-spread*) prevede una long position su una call con un determinato prezzo di esercizio (K_1) e una posizione corta su una call con prezzo d'esercizio maggiore al precedente (K_2). Tale strategia è attuata dagli investitori che prevedono la risalita del prezzo del sottostante. Nella *figura 7* le linee tratteggiate mostrano i profitti derivanti da ciascuna call, mentre la linea continua indica il profitto derivante dalla strategia *bull spread*. I profitti (e le perdite) mostrati nella *figura 7* sono stati calcolati sottraendo il costo iniziale dello spread al suo valore finale.

Figura 7: Bull spread mediante call



La *tabella 1* riassume i possibili profitti derivanti dallo spread al rialzo al variare del prezzo del sottostante. Poiché il prezzo di una call diminuisce sempre al crescere del prezzo d'esercizio, il valore dell'opzione venduta è sempre minore del valore dell'opzione comprata. Pertanto, uno spread al rialzo creato con le call richiede un investimento iniziale. Il valore finale è nullo se il prezzo del sottostante è minore del prezzo d'esercizio più basso, è pari a $S_T - K_1$ se il prezzo dell'azione è compreso tra i due prezzi d'esercizio, e pari a $K_2 - K_1$ se il prezzo dell'azione è maggiore del prezzo d'esercizio più alto.

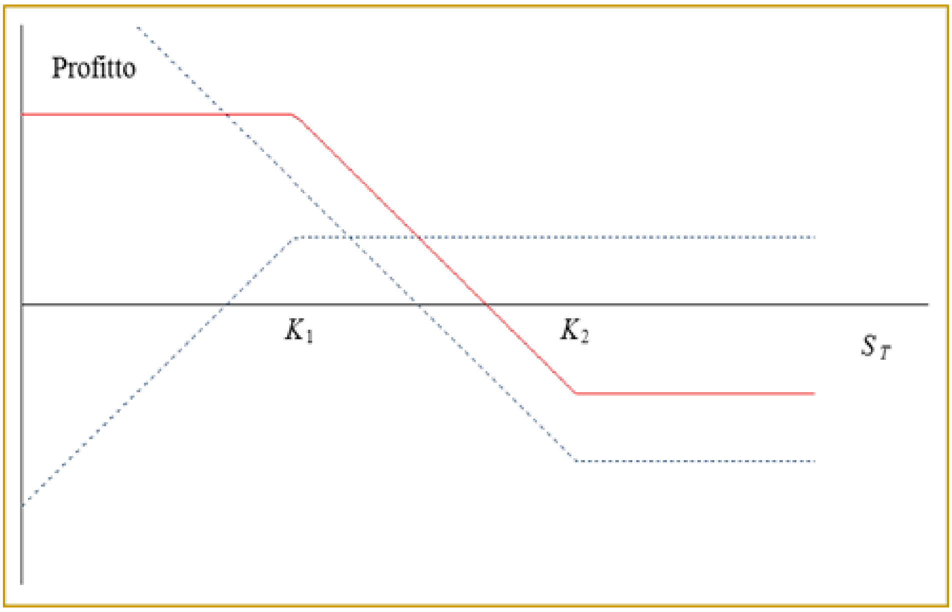
Tabella 1: Profitti bull spread mediante call

Prezzo del sottostante	Valore finale della call lunga	Valore finale della call corta	Valore finale complessivo
$S_T \leq K_1$	0	0	0
$K_1 < S_T \leq K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T$	$S_T - K_1$	$-(S_T - K_2)$	$K_2 - K_1$

Le strategie *bull spread* non garantiscono profitti molto elevati ma assicurano un'adeguata copertura in quanto limitano i profitti in caso di rialzo e le perdite in caso di ribasso del prezzo del sottostante. Gli spread al rialzo in cui entrambe le call sono *out of the money* rappresentano strategie molto aggressive ma poco costose, a fronte di un valore finale alto che si realizza con scarsa probabilità. La probabilità cresce quando vi è nella strategia una call *in the money* e l'altra *out of the money*, e ancor di più se entrambe le call sono *in the money*.

Lo spread al ribasso (*bear spread*) prevede l'acquisto di una put con prezzo d'esercizio K_1 e la vendita di una put con prezzo d'esercizio (K_2) minore. In questa strategia gli investitori presumono una caduta del prezzo del sottostante (*figura 8*).

Figura 8: Bear spread mediante put



Una strategia di spread al ribasso prevede un esborso immediato poiché il prezzo della put venduta è certamente più basso di quella acquistata. Il profitto alla scadenza dipende dal prezzo del sottostante sul mercato alla scadenza delle opzioni, ed è riassunto in *tabella 2*.

Tabella 2: Profitti bear spread mediante put

Prezzo del sottostante	Valore finale della put lunga	Valore finale della put corta	Valore finale complessivo
$S_T \leq K_1$	$K_2 - S_T$	$-K_1 + S_T$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T \leq K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$
$K_2 < S_T$	0	0	0

Gli spread al rialzo possono essere creati attraverso le put, così come quelli al ribasso possono essere realizzati mediante call. Nel primo caso l'investitore assume una posizione lunga su una put con *strike price* basso e una posizione corta su una put con strike price maggiore, nel secondo caso acquista una call con prezzo d'esercizio alto e vende un'altra call con prezzo d'esercizio più basso. A differenza degli spread al ribasso creati mediante put, gli spread al ribasso creati mediante call comportano, per l'investitore, un incasso iniziale. Le *figure 9* e *10* riassumono i profili di profitto delle strategie *bull spread* mediante put e *bear spread* mediante call.

Figura 9: Bull spread mediante put

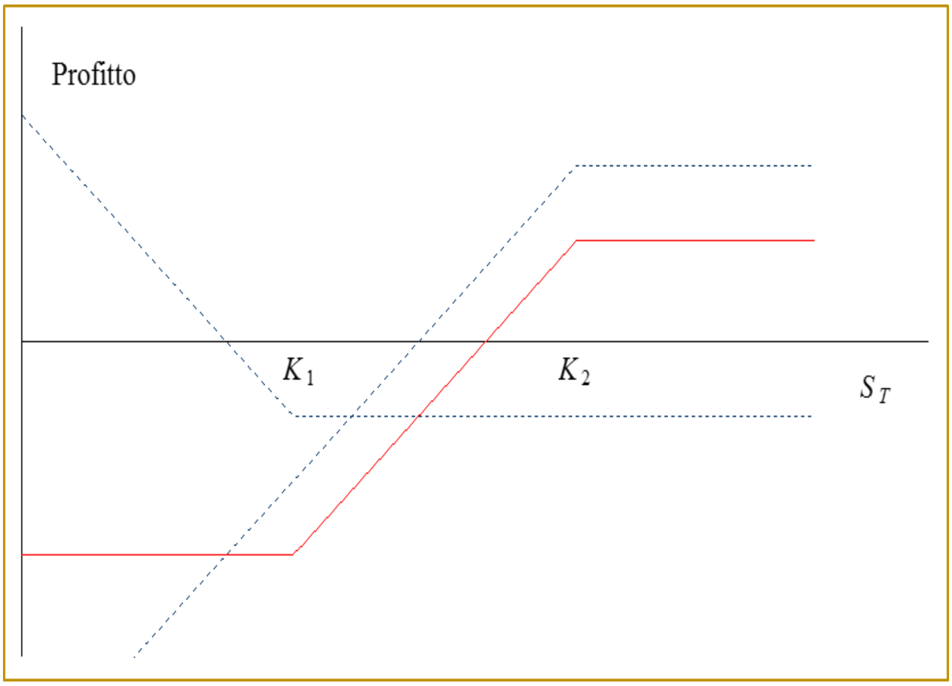
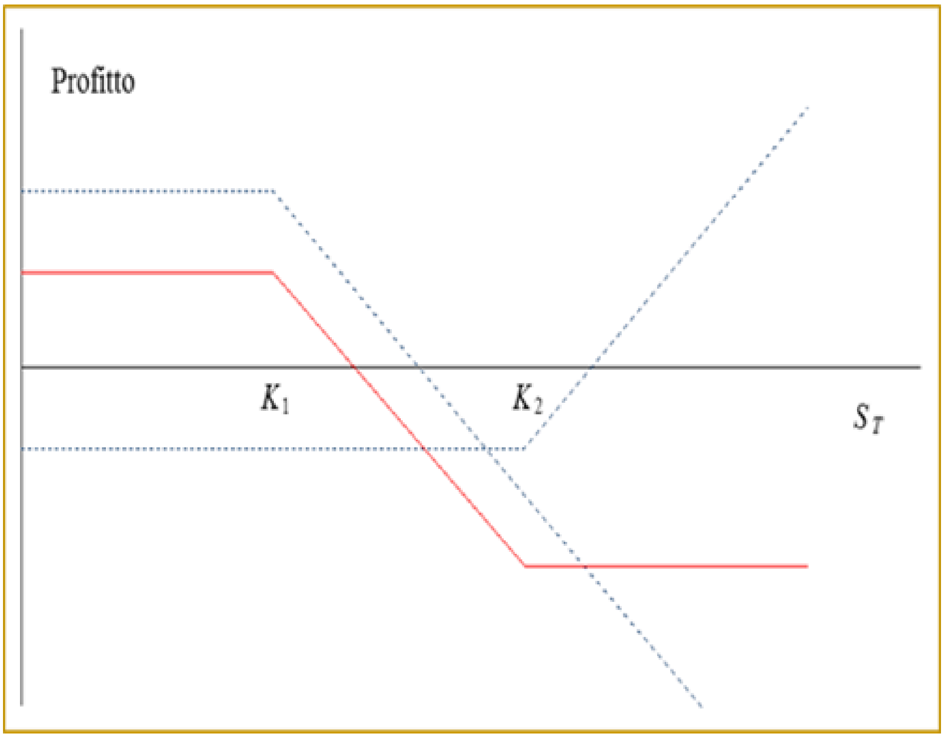
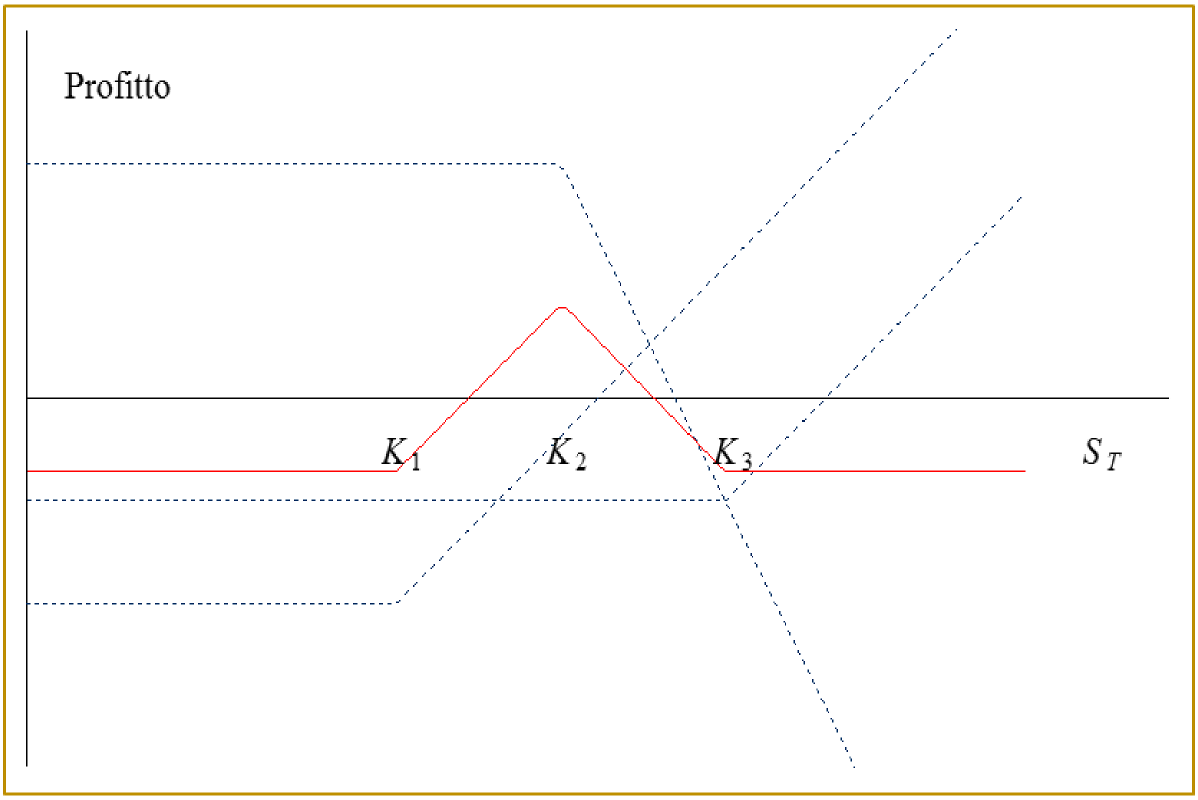


Figura 10: Bear spread mediante call



Finora sono stati descritte strategie operative generate attraverso l'acquisto o la vendita di due opzioni. Gli "spread a farfalla" (*butterfly spreads*) sono strategie che prevedono l'acquisto o la vendita di quattro opzioni; una long position su un'opzione con prezzo d'esercizio basso (K_1) e con prezzo d'esercizio alto ($K_3 > K_1$), e due short position su un'opzione con prezzo d'esercizio K_2 compreso tra i prezzi d'esercizio delle call lunghe ($K_1 < K_2 < K_3$). Gli spread a farfalla, al pari degli spread al rialzo e al ribasso, possono essere effettuati sia attraverso le call che tramite le put. Generalmente il prezzo d'esercizio delle options corte (K_2) è prossimo al valore di mercato del sottostante al tempo di contrattazione. Si creano profitti se il differenziale tra il prezzo del sottostante alla scadenza e K_2 è basso, ma si generano perdite crescenti al crescere del suddetto differenziale. L'investitore suppone aspettative stabili circa il prezzo dell'azione, come mostra la linea continua della *figura 11*.

Figura 11: Spread a farfalla tramite call



Anche gli spread a farfalla possono essere costruiti tramite le put; l'investitore compra una put con *strike price* basso e una con *strike price* alto, e vende due put con strike price intermedio, sperando comunque nella stabilità del prezzo del sottostante.

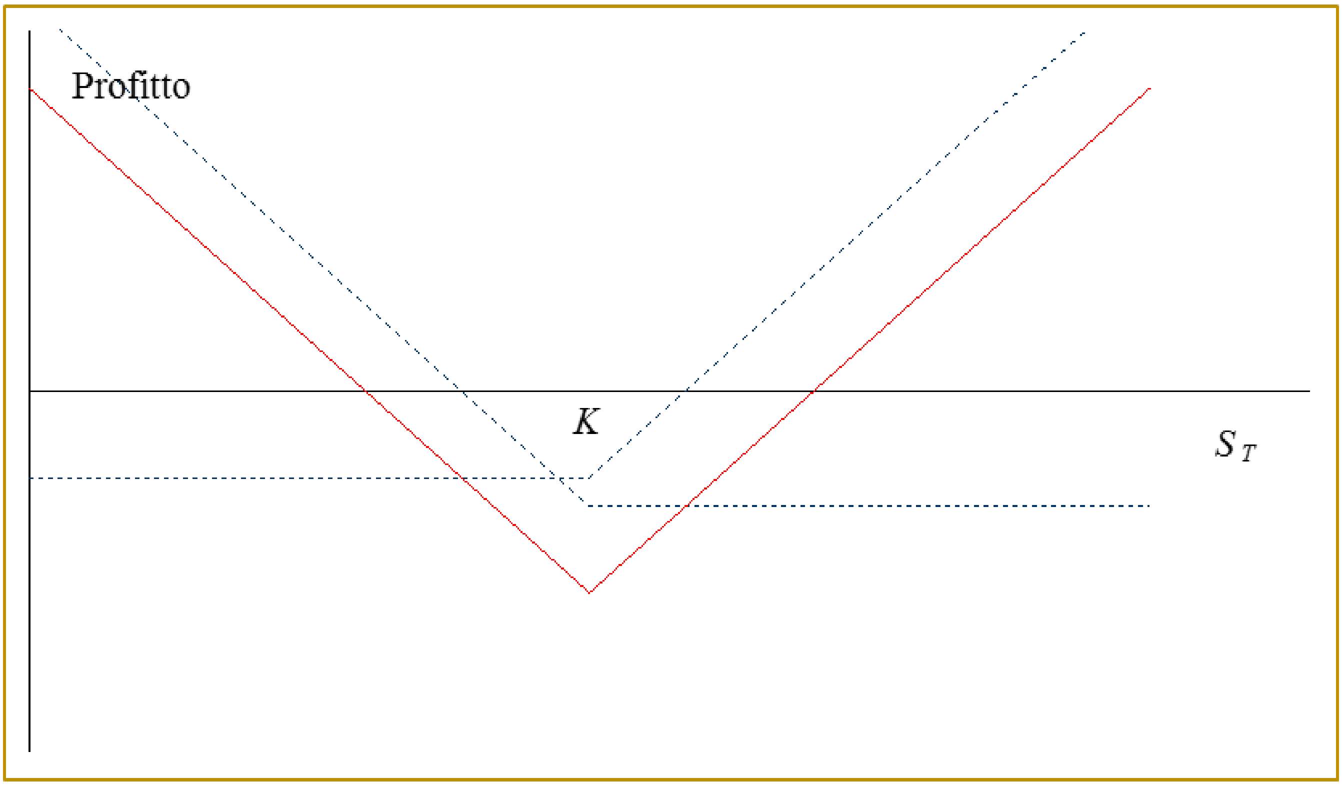
Un'ulteriore strategia operativa può essere costituita dagli spread di calendario (*calendar spreads*), in cui l'operatore vende una call e acquista una call con identico prezzo d'esercizio ma con durata più lunga. Il prezzo della opzione con scadenza maggiore sarà più alto di quello con scadenza minore, imponendo all'investitore un investimento iniziale. I profili di profitto derivanti da tale strategia sono simili a quelli degli spread a farfalla, sia in caso di call sia di put: si genera un profitto se alla scadenza dell'opzione più breve il prezzo dell'azione è prossimo a quello d'esercizio, mentre si subirà una perdita in caso contrario. Lo spread di calendario viene detto “al rialzo” quando il prezzo strike è più alto di quello di mercato all’epoca di contrattazione, “al ribasso” in caso contrario, mentre viene definito “neutrale” quando il prezzo d’esercizio coincide (o si avvicina molto) al prezzo di mercato.

3.3 Strategia “Combinazioni”

L’ultima tipologia di strategia attuabile attraverso le opzioni è rappresentata dalle combinazioni, cioè l’utilizzo congiunto di call e di put scritte sullo stesso titolo sottostante.

La combinazione più diffusa è lo “*straddle*” in cui l’investitore compra una call e una put scritta sullo stesso titolo, con stessa scadenza e prezzo d’esercizio (*bottom straddle*). Se alla scadenza il prezzo del sottostante è vicino allo *strike price*, l’investitore subisce una perdita limitata, mentre il profitto cresce al crescere del differenziale tra il prezzo d’esercizio e il prezzo a scadenza, qualsiasi sia il segno (*figura 12*).

Figura 12: Profitto della combinazione straddle



Gli investitori attuano questa strategia se non ritengono equo il prezzo del sottostante e percepiscono una forte diminuzione o aumento dello stesso nel corso del tempo. La *tabella 3* mostra i possibili profili di profitto derivanti dallo straddle.

Tabella 3: Profilo di profitto dello straddle

Prezzo del sottostante	Valore finale della call	Valore finale della put	Valore alla scadenza dello straddle
$S_T \leq K$	0	$K - S_T$	$K - S_T$
$S_T < K$	$S_T - K$	0	$S_T - K$

Lo *straddle* è una strategia logica che si basa su ipotesi di discontinuità del prezzo del sottostante. Ipotizzando un'offerta pubblica d'acquisto rivolta verso le azioni di una società, o altre tipologie di eventi esogeni all'impresa, costruire uno *straddle* equivale a generare quasi certamente un profitto nell'immediato futuro, fattore che determina con certezza l'incremento del valore delle opzioni, e quindi del prezzo[33].

Quando lo *straddle* prevede una posizione corta sia sulla call che sulla put (*top straddle*), la strategia è molto rischiosa; ipotizzando, infatti, un prezzo d'esercizio vicino al prezzo di mercato alla scadenza, il profitto sarà significativo, ma la perdita potenziale in caso contrario è illimitata.

Altre tipologie di strategie operative basate sulle combinazioni sono gli *strips* e gli *straps*. Per i primi si assumono posizioni lunghe su una call e due put con stesso prezzo d'esercizio e stessa scadenza; le aspettative degli investitori prevedono una forte variazione del prezzo del sottostante, ma con i ribassi più probabili dei rialzi. Gli *straps*, invece, si costruiscono comprando due call e una put con stessa scadenza e stesso prezzo d'esercizio; gli operatori presentano aspettative di rialzo più probabili rispetto a quelle di ribasso. Le *figure 13* e *14* mostrano i profili di profitto generati da tali combinazioni.

[33] Quando l'operatore cercherà di comprare le opzioni, le troverà significativamente più care di quelle scritte sui titoli per i quali non vi sono aspettative di discontinuità. Affinché lo straddle sia efficace, le aspettative dell'operatore devono essere diverse da quelle della maggior parte degli altri partecipanti al mercato.

Figura 13: Profilo di profitto strips

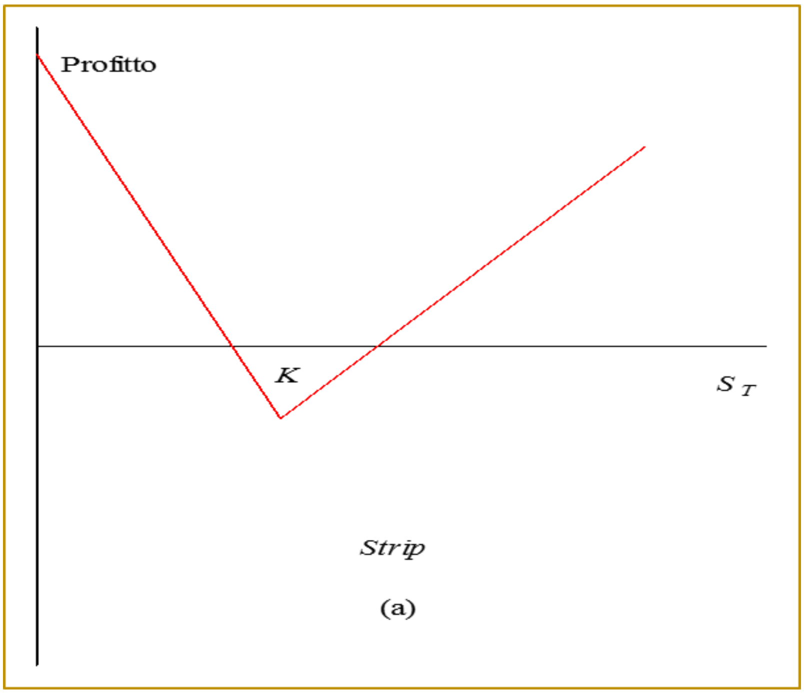
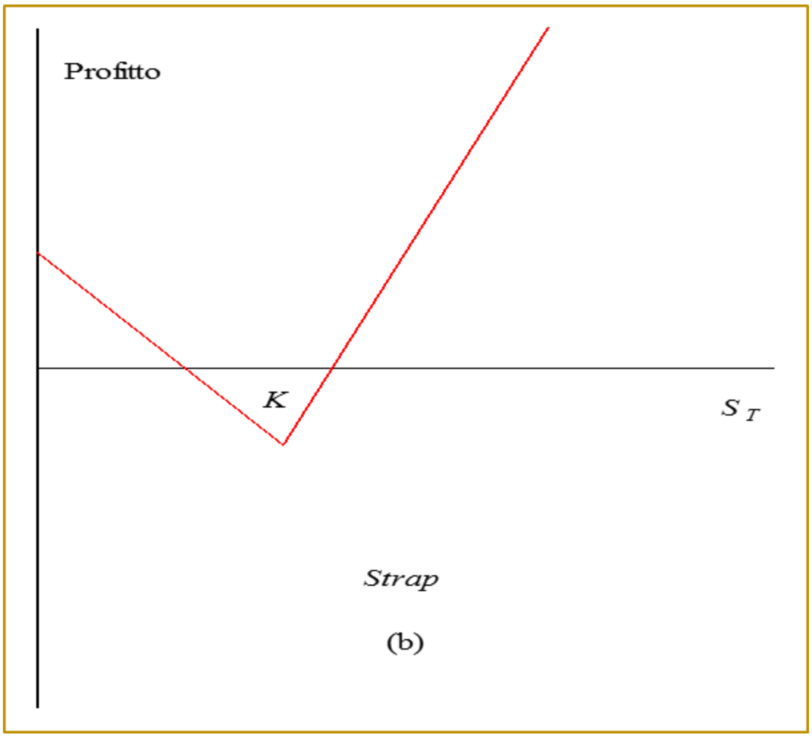
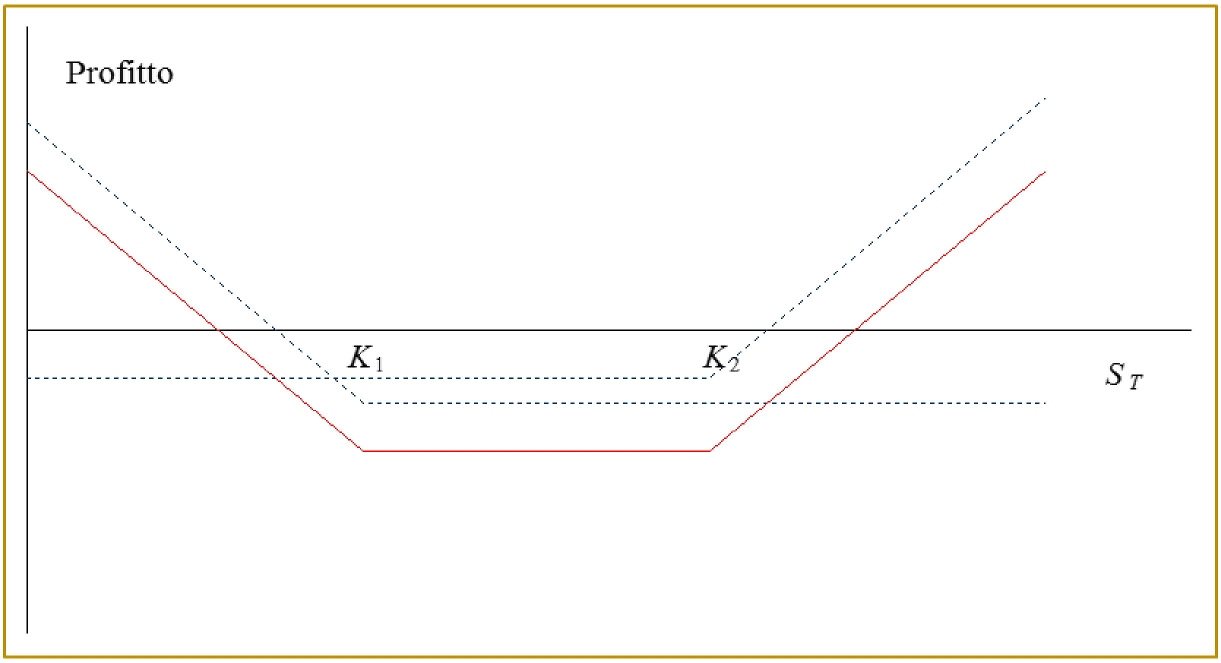


Figura 14: Profilo di profitto straps



Una combinazione molto simile allo *straddle* è lo "*strangle*", costruita attraverso una posizione lunga su una call e su una put scritte sullo stesso sottostante con la stessa scadenza ma con prezzi d'esercizio diversi. Lo strike price della call (K_2) è superiore rispetto a quello della put (K_1), limitando le perdite ma con profitti potenzialmente illimitati, come mostra la *figura 15*.

Figura 15: Profilo di profitto strangle



Come per lo *straddle*, l'operatore scommette su una forte variazione del prezzo del sottostante; tuttavia, non è certo se tale variazione sarà un rialzo o un ribasso. Quest'ultima strategia, se confrontata con lo *straddle*, prevede che la realizzazione di profitti avverrà se i prezzi si discosteranno molto di più dal valore dei prezzi d'esercizio delle due opzioni che compongono lo strumento finanziario; le perdite invece sono limitate in caso di piccole variazioni. I profitti (e le perdite) di uno *strangle* dipendono dal differenziale dei due prezzi d'esercizio. Al crescere di tale differenziale, decresce il *downside risk* ma la variazione del prezzo dell'azione deve essere più ampia per consentire un profitto. La vendita di uno *strangle* è anche detta "combinazione verticale superiore" (*top vertical combination*). Al pari della vendita di uno straddle, si tratta di una strategia rischiosa, dato che le possibili perdite sono illimitate.

Conclusioni

La finanza rappresenta al giorno d'oggi un elemento cardine, il suo progresso è evidente come anche l'aumento del numero di persone che si relazionano con essa. Quanto illustrato precedentemente si basa su principi generali, come quello di assenza di arbitraggi privi di rischio o di probabilità *risk neutral*, che contribuiscono a creare una visione idealizzata del mercato. Un mercato perfetto, che di fatto non trova una corrispondenza con la realtà fattuale. Dunque può essere azzardato ritenere tali modelli validi in assoluto perché, per quanto possa essere accurata l'analisi e si possano minimizzare le probabilità di errore attraverso ipotesi sempre più indirizzate a studiare e seguire l'andamento dei prezzi non in istanti discreti bensì in variazioni temporali che rasentano un arco di tempo infinitesimo, persistono comunque sfaccettature che sono imprevedibili, che non dipendono da alcuna variabile, o che non posso essere esaminate attraverso evidenze empiriche. Inoltre, in molti casi, si verificano anche operazioni di approssimazione le quali, qualora reiterate nel tempo o poste alla base della costruzione di un modello, possono condurre a marcate divergenze finali, ostacolando quindi la convergenza al *fair value*. Nonostante queste considerazioni, dotarsi di modelli idonei a valutare uno strumento finanziario risulta essere estremamente più conveniente che affidarsi esclusivamente a stime soggettive dell'agente.

La costruzione di modelli sta avendo sempre più successo tra le istituzioni economico-finanziarie; a tale popolarità hanno contribuito sostanziosamente anche gli accordi di Basilea che sanciscono la possibilità di creare propri strumenti di valutazione del rischio, in primis il rischio di credito e di mercato, e quindi di garantire una maggior libertà agli istituti finanziari circa la loro gestione patrimoniale. Il vantaggio risulta essere più evidente per i più grandi istituti finanziari, che hanno disponibilità economiche superiori e possono sfruttare le economie di scala, rispetto a quelli più piccoli che, in molti casi, rimangono ancorati ai parametri standard forniti dagli accordi.

L'utilizzo delle opzioni, in linea con gran parte degli strumenti finanziari, sta avendo un incremento rilevante. Tale avvenimento è dovuto anche alla facilità di accesso ai mercati, infatti molti sono gli intermediari finanziari che promuovono tale strumento, in particolare le opzioni binarie, tramite piattaforme online, promettendo in alcuni casi guadagni rilevanti a investitori che presentano a stento una sufficiente alfabetizzazione finanziaria. Gran parte del merito relativo alla agevolazione d'accesso è dovuta alla direttiva dell'Unione Europea 2004/39/CE (chiamata anche direttiva MiFID).

Come è possibile immaginare, dietro tali promesse, numerosi risultano essere i casi di frode e truffa. L'ambiente delle opzioni, e dei derivati in generale, è praticamente accessibile a tutti, ma solo una minore percentuale di agenti è in grado di comprendere i meccanismi che vi sono dietro e, quindi, di saper valutare in maniera professionale le azioni che si stanno compiendo. Per tale motivo, gli agenti regolamentatori stanno incrementando la protezione verso i soggetti più deboli nel rapporto contrattuale, pressando incessantemente su una maggior tutela della trasparenza, professionalità, buona fede e correttezza dei comportamenti.

In conclusione, nell’elaborato si sono delineate le condizioni finanziarie attuali circa i derivati e l’importanza che deve essere riservata agli stessi, i concetti fondamentali che vi sono dietro alla valutazione delle opzioni europee. È evidente che uno studio approfondito e sistematico di queste sia fondamentale per operare consapevolmente nei mercati finanziari e infatti, in accordo con l’incremento già esposto, sono in crescita i corsi universitari e post-universitari dedicati alla finanza e alla sua regolamentazione.

Bibliografia

Black F., S. M. (1973). *The pricing of option and corporate liabilities*;

Cox J., R. S. (1979). *Option pricing: a simplified approach*;

Hull J. C. (2015). *Opzioni, Futures e altri derivati;*

Nardon M., P. P. (2009). *Opzioni su titoli che pagano dividendi: proprietà e tecniche di valutazione;*

Salerno S. (2014). *Piano d'azione per le opzioni binarie;*

Cafaro R., Tanza A. (2006). *Le tutele nei rapporti con la banca. Risparmio e investimenti, anatocismo, usura, obbligazioni, prodotti derivati*;

Castellani G., De Felice M, Moriconi F. (2006). *Manuale di finanza III, Modelli stocastici e contratti derivati;*

Castellani G, De Felice M, Moriconi F. (2005). *Manuale di finanza I, Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni;*

Berk J, DeMarzo P. (2014). *Corporate Finance;*

Saunders A, Cornett M, Anolli M, Alemanni B. (2015). *Economia degli intermediari finanziari;*

Pellegrini M. (2012). *Elementi di diritto pubblico dell'economia;*

Vagas G. (2011). *La crisi e il futuro dei mercati dei capitali;*

Degregori and Partners (2017). *Futures, Opzioni e Swap.*

Sitografia

http://www.consob.it/documents

https://www.bancaditalia.it/pubblicazioni

http://www.borsaitaliana.it

http://www.mat.unimi.it

http://dse.univr.it