



Dipartimento di Economia e Finanza - Cattedra di Teoria e Politica Monetaria

Aspettative razionali, apprendimento adattivo e politica monetaria

RELATORE

Prof. Giorgio Di Giorgio

CANDIDATO

Matr. 667191

CORRELATORE

Prof. Paolo Paesani

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Indice	
Introduzione.....	4
Capitolo I – Le aspettative e la razionalità in economia.....	6
1.1 – Le aspettative e la razionalità negli individui.....	6
1.2 – I modelli di aspettativa.....	8
1.2.1 – Le aspettative estrapolative.....	8
1.2.2 – Le aspettative adattive.....	9
1.2.3 – Le aspettative razionali.....	10
1.3 – Politica monetaria e aspettative razionali.....	24
1.4 – Nuova Macroeconomia Classica e critica alle aspettative razionali.....	33
Appendice al capitolo I – Legge debole dei grandi numeri per successioni IID.....	41
Capitolo II – Apprendimento adattivo e politica monetaria.....	44
2.1 – Introduzione.....	44
2.2 – Risoluzione di un problema di politica monetaria sotto aspettative razionali e sotto apprendimento adattivo.....	46
2.2.1 – Il modello.....	46
2.2.2 – Risoluzione con aspettative razionali.....	48
2.2.3 – Risoluzione con apprendimento adattivo.....	50
2.2.4 – Conclusione sul confronto fra apprendimento adattivo e aspettative razionali.....	61
2.3 – Convergenza dell’apprendimento adattivo alle aspettative razionali.....	61
2.3.1 – Il modello.....	62
2.3.2 – Convergenza dell’apprendimento adattivo attraverso le diverse regole di politica monetaria.....	66
2.3.2.1 – Contemporaneous data.....	66
2.3.2.1.1 – Equilibrio determinato.....	66
2.3.2.1.2 – Apprendimento adattivo.....	67
2.3.2.2 – Lagged data.....	69
2.3.2.2.1 – Equilibrio determinato.....	69

2.3.2.2.2 – Apprendimento adattivo.....	70
2.3.2.3 – Forward looking rules.....	73
2.3.2.3.1 – Equilibrio determinato.....	73
2.3.2.3.2 – Apprendimento adattivo.....	74
2.3.2.4 – Contemporaneous expectations.....	76
2.3.2.4.1 – Equilibrio determinato.....	76
2.3.2.4.2 – Apprendimento adattivo.....	76
2.3.3 – Conclusione sull’analisi della convergenza.....	77
2.4 – Velocità di convergenza dell’apprendimento adattivo alle aspettative razionali.....	78
2.4.1 – Il modello.....	78
2.4.2 – Apprendimento adattivo.....	79
2.4.2.1 – Ottimalità delle politiche discrezionali.....	83
2.4.2.2 – Aggiustamento della velocità di convergenza.....	87
2.4.3 – Conclusione sulla velocità di convergenza del processo di apprendimento adattivo.....	90
2.5 – Apprendimento della Banca Centrale.....	90
Conclusione.....	94
Indice delle figure e delle tabelle.....	96
Bibliografia.....	97

## Introduzione

Le previsioni servono a formulare un quadro delle possibili evoluzioni del presente. Con riferimento alla teoria economica, esse stabiliscono il possibile valore che le variabili oggetto di interesse possono assumere e a seconda del grado di complessità con cui si strutturano risultano più o meno accurate. La capacità previsiva del modello con cui si sviluppa una teoria è uno dei due importanti aspetti con cui si convalida o meno la teoria stessa. In altri termini il modello deve prevedere il futuro oggetto di interesse con un ragionevole grado di accuratezza. L'altro aspetto importante è che il modello deve descrivere il presente e le osservazioni passate in modo corretto e usando un ristretto numero di variabili. Questi due aspetti, che devono essere assolutamente presenti in modo completo per una teoria che descrive una scienza esatta, sono più elastici nella modellistica economica, nel senso che anche se nella realtà venissero riscontrati aspetti non d'accordo con la teoria essa può sopravvivere ed essere usata comunque.

Anche se la modellistica economica ha una resistenza maggiore alla prova dell'evidenza empirica, l'aspetto previsivo deve comunque essere ben definito. Le più semplici aspettative formulate hanno ad oggetto i valori passati delle variabili di interesse e sono definite backward-looking. Esse sono una media dei valori osservati e funzionano guardando esclusivamente all'indietro nel tempo. Hanno caratteristiche di questo tipo le aspettative estrapolative e adattive. Nel 1961 Muth pubblica un paper dove definisce un'evoluzione del modello di aspettativa, cambiando la natura backward-looking del processo previsivo e definendo una struttura che guarda in avanti nel tempo. Si tratta del modello di aspettative razionali, che sostanzialmente definisce le aspettative come la speranza matematica della variabile di interesse. Il modello si sviluppa attraverso un'analisi sui prezzi, e viene confrontato, una volta definito, con un altro modello ideato per determinare i cicli dei prezzi, il cobweb theorem o modello della ragnatela. Successivamente Lucas sarà il primo ad usare le aspettative razionali all'interno di un modello macroeconomico-econometrico. Nell'ambito della politica e del controllo monetario l'uso delle aspettative razionali evidenzia quali siano i risultati conseguibili qualora il settore privato abbia effettivamente una piena conoscenza del sistema economico. Un modello monetario che ha questa caratteristica funziona come punto di riferimento per gli altri modelli.

Le ipotesi alla base delle aspettative razionali hanno fatto sì che esse non fossero esenti da critiche. La principale riguarda la conoscenza perfetta da parte del settore privato del modello teorico che sintetizza il sistema economico. Questo punto insieme ad altri ha innescato la ricerca di differenti modelli previsivi che fossero tuttavia in grado di sfruttare il framework delle aspettative razionali e il loro impianto analitico. In ambito economico, soprattutto monetario, una nuova modellistica previsiva si è formata tramite l'apprendimento adattivo. Esso prevede che gli operatori economici aggiornino continuamente le loro previsioni sul sistema economico in base a quanto ipotizzato e quanto effettivamente osservato. L'apprendimento parte da una limitazione della razionalità degli agenti, carenza espressa tramite la non perfetta conoscenza del modello economico. Questa mancanza viene ad attenuarsi con il trascorrere dei periodi e sotto opportune condizioni può portare l'apprendimento ad evolversi in aspettative razionali. Inoltre per come formulato l'apprendimento può sfruttare i risultati raggiunti dalle aspettative razionali ed essere comparato con esse.

L'elaborato si articola in due capitoli, il primo dedicato alle aspettative e il secondo all'apprendimento e alla politica monetaria.

Nel primo capitolo si discute dei vari modelli di aspettative ideati con particolare accento sulle aspettative razionali, esponendo l'intero modello. Si osserva poi come un semplice modello di politica monetaria raggiunga risultati di efficienza se risolto con aspettative razionali. Si chiude il capitolo esponendo le principali critiche fatte al modello di aspettative razionali.

Nel secondo capitolo si discute dell'apprendimento adattivo. Attraverso la politica monetaria esso è presentato inizialmente in confronto con le aspettative razionali. Successivamente si discute delle condizioni per la convergenza dell'apprendimento alle aspettative razionali, analisi che viene svolta attraverso quattro diversi tipi di regole di politica monetaria. Si prosegue parlando della velocità di convergenza del processo di apprendimento. Si conclude accennando alla possibilità dell'estensione dell'apprendimento al policy maker.

## CAPITOLO I – Le aspettative e la razionalità in economia

### 1.1 – Le aspettative e la razionalità negli individui

Il concetto di aspettativa viene inteso come l'idea, di un agente economico, circa il futuro valore di una o più variabili rilevanti. In funzione di questa idea l'agente sarà portato ad assumere un certo comportamento, che potrà essere modificato a seguito di una nuova formulazione circa il futuro ammontare della variabile. Così comportamento e aspettativa sono legati fra loro, e una modifica di uno di essi potrebbe corrispondere a una variazione dell'altro, in modo più o meno immediato. Ad esempio i manager di un'impresa potrebbero sospendere l'ulteriore sviluppo di un progetto avviato se nuova una informazione facesse pensare a una forte diminuzione della sua remuneratività, oppure un'aspettativa di inflazione potrebbe modificare l'ammontare di liquidità detenuto da un'istituzione finanziaria a vantaggio di posizioni meno sensibili agli aumenti di prezzo.

J.M. Keynes, nella sua opera di maggior prestigio, "Teoria generale dell'occupazione dell'interesse e della moneta", fu forse uno dei primi economisti a introdurre il concetto di aspettativa. La sua nozione di aspettativa riguarda principalmente il collegamento fra produzione e occupazione. Parte dal sostenimento dei costi dell'imprenditore e termina con il raggiungimento dei ricavi per la vendita dei prodotti. È lo sfasamento temporale fra questi due flussi che porta l'imprenditore a dover formulare delle aspettative circa l'ammontare corretto dei costi da sostenere e il corrispondente incasso dei ricavi. Keynes formula due tipi di aspettative. Le prime sono fondate sulla presunzione dell'imprenditore di incassare un certo prezzo per la vendita dei prodotti, esse vertono su un orizzonte temporale non lungo e sono difatti denominate aspettative a breve termine; le seconde invece hanno come oggetto modifiche strutturali dell'impresa, come le decisioni relative all'ampliamento degli impianti, e sono basate, ancora come le precedenti, sui possibili ricavi che ci si attende di incassare in futuro, ma questa volta in ragione di modifiche atte a perdurare, come il raggiungimento di un nuovo tipo di clientela per il lancio di un prodotto o la penetrazione in un nuovo mercato geografico. Queste ultime sono definite aspettative a lungo termine. Il collegamento con l'occupazione è semplice. Difatti è su queste prospettive di produzione che verrà effettuata una certa domanda di occupazione. Generalizzando, è sulla base delle previsioni degli imprenditori che viene determinato il livello di occupazione del sistema economico. Si ha che l'occupazione verrà modificata (con una tempistica differente) solo a seguito di cambiamenti circa le aspettative (per i futuri livelli produttivi), a breve e lungo termine, dei produttori. Dato che riguardano importi futuri, è chiaro come le aspettative vadano formulate in base a questa idea. Ossia il ragionamento è da fare in ottica prospettica. L'osservazione del passato è sicuramente una guida, ma basarsi su dati passati per prevedere il futuro potrebbe non essere una soluzione adeguata. Tuttavia c'è un punto da sottolineare, con riferimento all'occupazione, per quanto riguarda soprattutto le aspettative a lungo termine. Si è detto che l'aspettativa a lungo termine è espressione dell'aspettativa di un periodo più breve. Modificazioni che si ritiene possano avvenire in un periodo contenuto (riguardo ad esempio i ricavi per l'anno successivo) potranno generare, se ritenute durevoli, una modifica dell'assetto produttivo con una conseguente variazione, in un tempo ritenuto da Keynes più lungo, dell'occupazione. Questo punto viene spiegato sostenendo che esiste un livello di occupazione per ogni differente stato dell'aspettativa di lungo periodo. Se lo stato dell'aspettativa rimarrà per un

periodo di tempo sufficientemente lungo da far raggiungere all'occupazione il livello analogo, allora ci sarà una perfetta corrispondenza tra aspettativa (da cui dipende la produzione) e occupazione. Tuttavia la continua modificazione delle aspettative potrebbe fare in modo che l'adeguamento all'occupazione concordante non avvenga. Questo perché, in un dato momento, l'occupazione che verrà raggiunta sarà quella di uno stadio dell'aspettativa che ormai non esiste più. Precedentemente si è detto che le aspettative sono da considerarsi in un'ottica futura. Ossia nella loro formulazione è da valutarsi il futuro valore che si ritiene potranno avere le variabili. Ma l'ammontare presente di variabili come l'occupazione è a questo punto da considerarsi, data l'analisi fatta, funzione dell'aspettativa passata e presente. Questo perché la modifica reale di grandezze come l'occupazione avviene in modo più lento rispetto al recepimento della nuova informazione che determina il cambiamento di variabili da cui tali grandezze sono dipendenti, e anche se l'aspettativa è soggetta a continue variazioni per la diffusione di nuove notizie, l'adeguamento delle grandezze collegate ad essa in modo indiretto deve scontare dapprima la conoscenza passata (questo, in linea teorica, non dovrebbe avvenire per variabili che possono modificarsi quasi immediatamente per il presentarsi di nuova informazione, come i prezzi delle azioni quotate). specularmente la produzione può essere data dall'aspettativa futura circa le variabili di mercato. Questo perché il livello di produzione è stabilito da quanto ci si aspetta di vendere, e se il passato serve a stabilire un livello di produzione abbastanza costante all'interno di un intervallo frutto dell'esperienza precedente, il futuro serve a determinare quanto muoversi all'interno della banda, oppure stabilire quando potrebbe essere lecito uscirne. Tale argomentazione può essere generalizzata. Il susseguirsi di eventi e le derivanti fluttuazioni sono frutto, in economia, di differenti stati dell'aspettativa. Dato che essa è soggetta a continue variazioni, il mutamento innescato in un dato momento sarà spesso lontano dall'essersi portato a compimento; il sistema economico sarà dunque sempre soggetto a un certo dinamismo e i cambiamenti saranno sovrapposti gli uni agli altri, così da creare un complesso di eventi frutto del passato e del presente, ma mossi dal prossimo cambiamento futuro.

L'analisi di Keynes sulle aspettative tuttavia si ferma qui. Non viene preso in esame il modo in cui gli operatori formulano le proprie previsioni riguardo il futuro ammontare delle variabili in esame. Il tema delle aspettative è stato sviluppato successivamente da vari studiosi. A seconda del periodo di formulazione e dell'orientamento verso il passato o più verso il futuro, si possono distinguere tre tipi di aspettativa.

Le aspettative estrapolative (analizzate nel prossimo paragrafo) presumono che il valore futuro di una grandezza sia ricavabile dai valori passati che tale grandezza ha assunto. Il passato guida così il futuro con una natura iterativa, ipotizzando il ripetersi degli eventi.

Le aspettative adattive ruotando intorno alla stessa logica prevedono tuttavia la possibilità che i vari operatori abbiano effettuato ipotesi in passato, ossia che in passato essi abbiano avuto aspettative.

Le aspettative razionali sono invece formulate in modo prospettico. Gli agenti fanno ipotesi sul futuro ammontare delle variabili rilevanti e agiscono di conseguenza. Viene ipotizzato che essi siano razionali, e, come passaggio successivo, che essi riusciranno, in media, a fare considerazioni corrette circa il futuro ammontare delle grandezze. Quindi a livello di sistema economico ci sarà un modello di previsione efficiente. Il punto chiave di questa ipotesi di aspettativa è senza dubbio la razionalità dei soggetti. In economia generalmente segue un comportamento razionale, chi, sulla base di un'attenta analisi di rischi e benefici, massimizza il risultato delle proprie scelte

economiche, oppure tenta di farlo. Di conseguenza dato un opportuno set informativo, che consente di svolgere l'analisi sopracitata, verranno prese decisioni volte a ottenere il miglior risultato possibile. Questo concetto si collega in modo diretto alla definizione di razionalità data da A. Smith, secondo cui è razionale l'individuo che persegue il proprio interesse; ed è espressione dell'equilibrio competitivo citato nell'economia del benessere, secondo cui, appunto, i consumatori hanno come obiettivo la massimizzazione dell'utilità e i produttori/imprenditori del profitto.

Effettivamente l'ipotesi di razionalità e il fine economico unicamente volto ad accrescere il benessere dell'individuo hanno sempre fatto parte della teoria economica. Non a caso le prime scuole di pensiero economico nascono con il tentativo di disciplinare lo scambio, elemento cardine alla base della teoria economica. Gli attori del mercantilismo, quali mercanti, imprenditori e banchieri erano giudicati uomini d'affari, e viene descritto che, nelle loro decisioni, si comportavano con razionalità e senso pratico. A parte le minori regole a cui dovevano sottostare e il più piccolo complesso di merci che potevano commerciare, non sono molto diversi dagli uomini di affari di oggi; di conseguenza il comportamento razionale è riconosciuto da tempo. Se ne trova anche traccia nella teoria classica, lo 'stadio successivo' del mercantilismo. La definizione di uomo razionale secondo A. Smith è stata citata qualche riga fa. H. Simon pone un ridimensionamento al concetto classico di razionalità, presentando l'idea che i soggetti, pur cercando di comportarsi in modo razionale, non riescono a comprendere appieno il mutare delle variabili economiche, e di conseguenza sono incapaci di prendere decisioni ottime.

## 1.2 – I modelli di aspettativa

I modelli di aspettativa vengono formulati nell'ipotesi che gli individui facciano le proprie previsioni nei modi citati al paragrafo precedente. Ora vengono analizzati i modelli singolarmente, insieme alle relative congetture.

### 1.2.1 – Le aspettative estrapolative

Probabilmente questo è il primo modello teorizzato per la formulazione di previsioni sul futuro comportamento delle variabili economiche.

L'idea è che i soggetti osservino il comportamento della variabile nel corso della sua evoluzione. Il valore nel tempo successivo è dato da una funzione dei valori precedenti. Una possibile formulazione può essere:

$$X_t^E = X_{t-1} + a(X_{t-1} - X_{t-2}) + b(X_{t-2} - X_{t-3}) \quad (1.1)$$

Dove:

$X_t^E$  è il valore atteso per la variabile  $X$  al tempo  $t$ ;

$X_{t-i}$  con  $i \geq 1$  è il valore della variabile  $X$  osservato a un tempo precedente;

$a, b$  sono due parametri che modulano l'intensità con cui le variabili relative alle differenze tra il tempo  $(t-1)$  e  $(t-2)$  e tra il tempo  $(t-2)$  e  $(t-3)$  pesano su  $X_t^E$ . Possono essere stimate con una regressione.

Una formulazione più generale della (1.1) è fornita dalla seguente equazione:

$$X_t^E = f(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots, X_{t-n}) \quad (1.2)$$

dove  $f$  è una funzione dei valori assunti da  $X$ .

Si osserva come l'ipotesi estrapolativa fornisca esclusivamente un valore dell'aspettativa dato dalle misure passate assunte dalla variabile di riferimento. Questa ipotesi, per come è formulata presenta un limite evidente: la previsione non potrà in alcun modo tenere conto di shock futuri. Se e quando gli shock si presenteranno verranno inglobati nel valore passato della variabile, e questo sarà l'unico modo in cui potranno influenzare l'aspettativa per il periodo successivo.

### 1.2.2 – Le aspettative adattive

Sulla stessa linea delle estrapolative ma con qualche leggera modifica, l'ipotesi di adattività fu formulata da M. Nerlove. Egli introdusse il concetto di ritardi distribuiti, e sostenne che sono da considerarsi nella formulazione di aspettative anche i valori ipotizzati precedentemente dagli operatori. Il modello è dato dalla seguente formula:

$$X_t^E = X_{t-1}^E + a(X_{t-1} - X_{t-1}^E) \quad (1.3)$$

Tale scrittura è una media ponderata. Infatti una formulazione alternativa è data da:

$$X_t^E = aX_{t-1} + (1-a)X_{t-1}^E \quad (1.4)$$

La scelta di un valore del parametro  $a$  elevato darà maggiore peso al valore passato di  $X$ ; viceversa un valore basso di  $a$  darà più peso al valore di aspettativa passato di  $X$ .

Questa formula ha una natura iterativa. Sostituendo ad esempio tre volte il valore di aspettativa passato si ottiene:

$$X_t^E = aX_{t-1} + a(1-a)X_{t-2} + a(1-a)^2X_{t-3} + (1-a)^3X_{t-3}^E$$

Continuando a sostituire si ottiene:

$$X_t^E = a \sum_{i=1}^{\infty} (1-a)^{i-1} X_{t-i} \quad (1.5)$$

Questa è la formula dei 'ritardi distribuiti' di M. Nerlove. Si vede subito come in un orizzonte infinito non compaiano più espressioni sotto aspettativa, di conseguenza  $X_t^E$  risulta solo funzione di valori effettivi passati. La (1.5) non è altro che una possibile formulazione della (1.2); risulta così come in realtà le aspettative adattive siano un caso particolare delle aspettative estrapolative, e come siano anch'esse esclusivamente date dai valori passati della variabile di interesse.

### 1.2.3 – Le aspettative razionali

L'analisi prosegue ora con l'ultimo metodo 'classico' di formulazione delle aspettative pensato dagli economisti. Il concetto di aspettative razionali parte dall'idea di razionalità degli individui, e in un certo senso la estende. L'ipotesi propone di spiegare, come peraltro hanno tentato di fare gli altri modelli, le fluttuazioni nel mercato e nell'economia, tentando di occupare un posto fisso come input di dinamicità da inserire all'interno di un qualsiasi modello economico/econometrico. Gli sviluppatori del concetto di aspettativa razionale partono dall'idea che gli operatori abbiano un set informativo adeguato con cui prevedere il futuro ammontare delle variabili economiche. Quindi, questo tipo di aspettativa è 'inedito', e si differenzia dai precedenti per l'ottica prospettica che fornisce la base su cui formulare le ipotesi. J.M. Muth ipotizza che il sistema economico (inteso come insieme degli operatori che interagiscono fra loro) non sprechi informazione, e che le aspettative dipendano dalla struttura di esso. In particolare emergono due osservazioni da studi riguardo i dati sulle aspettative (quelle presenti prima dell'introduzione delle aspettative razionali) che conducono all'ipotesi di aspettative razionali. La prima è che: - in media le aspettative spiegano meglio il comportamento dell'industria nel suo complesso, e sono più accurate di un generico modello economico per quanto riguarda la previsione; la seconda ipotesi è che generalmente le aspettative dei singoli individui sottostimano un possibile cambiamento di una variabile di interesse.

Queste ipotesi conducono alla conclusione che, in media, le aspettative degli individui sono in grado di prevedere il vero comportamento dell'economia. Questo equivale a dire che, statisticamente parlando, il modo in cui le aspettative vengono formulate singolarmente è corretto. Tale spiegazione è in contrapposizione al secondo punto relativo alle osservazioni fatte, tuttavia si deve considerare che esse derivano dalla raccolta di dati, mentre la correttezza della singola previsione è semplicemente un risultato statistico teorico derivato dalle proprietà dei valori medi. Queste ipotesi portano alla seguente conclusione: la distribuzione di probabilità che i soggetti formulano in riferimento a una certa variabile di interesse (che si comporta quindi come una variabile casuale) è la stessa che la variabile ha in realtà. La conclusione è molto forte. Conoscere l'esatta distribuzione di una variabile significa poter fare inferenza statistica, ossia test di ipotesi e dare una probabilità agli eventi. La probabilità del singolo accadimento (ad esempio un valore della grandezza minore di una certa costante) è a questo punto esatta, non più approssimata da una probabilità di una distribuzione standard. Di conseguenza le probabilità sono da considerarsi oggettive.

Sulla base di quanto detto vengono fatte tre ipotesi: - l'informazione all'interno del sistema economico non è molta, e di conseguenza viene previsto che la poca a disposizione non venga sprecata; - il modo di formulazione delle aspettative è dato in funzione del sistema economico; - l'informazione pubblica non ha sostanziali effetti sulla modificazione delle aspettative, che in media non ne risente. Questo perché le aspettative razionali già 'scontano' le notizie di pubblico dominio, e una loro variazione è conseguenza solo di un tipo di informazione privato (tale punto viene ripreso successivamente dalla teoria dei mercati efficienti).

Di seguito viene riportato il modello di Muth,, usato per analizzare l'ipotesi di aspettative razionali. Nella formulazione matematica iniziale del modello vengono fatte alcune assunzioni di base. In particolare l'autore compone un sistema di equazioni che presenta alcune caratteristiche:

- Il termine di disturbo, che compare inizialmente nell'equazione di domanda, è normalmente distribuito;
- Per le variabili previste esistono determinate equivalenze (come si vedrà relativamente al prezzo atteso);
- Le equazioni del sistema sono lineari.

Poi si aggiunge il riferimento a un breve periodo di variazione dei prezzi e un mercato isolato e con una produzione fissa. Il sistema presenta le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t \\ P_t &= \gamma p_t^E + u_t \\ P_t &= C_t \end{aligned} \tag{1.6}$$

La prima equazione è di domanda, la seconda di offerta e la terza rappresenta l'equilibrio sul mercato. Mentre i termini hanno il seguente significato:

$P_t$  è il numero di unità prodotte nel periodo considerato;

$p_t$  è il prezzo di mercato nel periodo considerato;

$p_t^E$  è il prezzo di mercato atteso per il periodo considerato, in base all'informazione dei t-1 periodi precedenti;

$u_t$  è un termine di errore.

Risolvendo la prima equazione per  $p_t$  si ottiene :

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E - \frac{1}{\beta} u_t \tag{1.7}$$

Se il termine di errore non è serialmente correlato risulta  $E(u_t) = 0$  e di conseguenza calcolando il valore atteso di  $p_t$  si ottiene :

$$E(p_t) = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E \tag{1.8}$$

Si noti la differenza fra  $E(p_t)$  e  $p_t^E$ .

$E(p_t)$  è il valore atteso risultante dall'applicazione della formula, mentre  $p_t^E$  è il prezzo atteso dagli operatori dato dal loro set informativo. Si nota che le singole aspettative differiscono dall'aspettativa media del mercato il base al fattore  $-\frac{\gamma}{\beta}$ . Secondo la (1.7) possono esistere

opportunità di profitto perché il prezzo atteso dagli operatori (come produttori e imprenditori) differisce da prezzo predetto dalla teoria. Non esisteranno opportunità di profitto se risulta:

$$E(p_t) = p_t^E \tag{1.9}$$

Quest'ultimo risultato racchiude l'assunzione di razionalità, ed è derivato sotto l'ipotesi che non è possibile prevedere il termine di errore. Si suppone solo che il suo valore atteso sia pari a zero.

Se altrimenti si ritiene di poter prevedere parte dello shock in base all'osservazione passata risulterà  $E(u_t) \neq 0$ , ossia si avrà una correlazione seriale fra i termini di errore. Mettendo la (1.7) sotto valore atteso si avrà così:

$$E(p_t) = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E - \frac{1}{\beta} E(u_t) \quad (1.10)$$

e sostituendo nella (1.9) si ottiene:

$$p_t^E = -\frac{1}{\gamma + \beta} E(u_t) \quad (1.11)$$

che indica il prezzo atteso dagli operatori come funzione lineare del valore atteso del termine di errore.

Se si ipotizza correlazione seriale fra gli errori si possono fare considerazioni più generali. Il termine  $u_t$  può essere scritto come combinazione lineare di una variabile casuale  $\varepsilon_t$  con media 0 e varianza  $\sigma^2$ . Si ha che:

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.12)$$

dove  $w_i$  sono dei pesi. La struttura di autocorrelazione di  $\varepsilon_t$  è data da :

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$p_t$  è anch'esso dato da una combinazione lineare di  $\varepsilon_t$  :

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.13)$$

dove:

$$W_0 = -\frac{1}{\beta} w_0$$

$$W_i = -\frac{1}{\gamma + \beta} w_i$$

Il prezzo atteso dagli operatori ha la stessa formulazione di  $p_t$  nella (1.13). Sostituendo la (1.12) nella (1.11) si ha:

$$p_t^E = -\frac{1}{\gamma + \beta} E\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i}\right) \quad (1.14)$$

e tenendo conto che  $E(\varepsilon_t) = 0$  si ottiene :

$$p_t^E = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.15)$$

I termini  $\varepsilon_{t-i}$  con  $i \geq 1$  non vengono annullati dal valore atteso perché sono noti al tempo  $t$ , di conseguenza sono costanti e non entrano nell'aspettativa.

Considerando la (1.1) e sostituendo gli ultimi risultati si arriva a scrivere:

$$-\beta p_t = \gamma p_t^E + \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i}$$

da cui:

$$p_t + \frac{\gamma}{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i}$$

e infine sostituendo la (1.13) si ottiene

$$W_0 \varepsilon_t + \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.16)$$

Questa equazione è valida per ogni  $\varepsilon$ .

La (1.15) e la (1.16) danno una forma esplicita per il prezzo atteso. Tuttavia esso viene scritto in funzione degli shock precedenti osservati nel sistema.

Il modo migliore per chiudere l'analisi sarebbe scrivere il prezzo atteso come combinazione lineare dei prezzi passati, cioè una forma del tipo:

$$p_t^E = \sum_{j=1}^{\infty} V_j p_{t-j} \quad (1.17)$$

Sostituendo  $p_t^E$  e  $p_{t-j}$  si ottiene :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} &= \sum_{j=1}^{\infty} V_j \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i-j} \\ \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^i V_j W_{i-j} \right) \varepsilon_{t-i} \end{aligned} \quad (1.18)$$

ossia deve risultare:

$$W_i = \sum_{j=1}^i V_j W_{i-j} \quad (1.19)$$

I pesi  $W_i$  sono una combinazione lineare dei loro stessi valori passati. Hanno una forma che si avvicina molto a quella autoregressiva, ossia il valore del peso corrente è espresso come

composizione dei pesi passati. Se si assume che gli errori  $\varepsilon$  sono indipendentemente e identicamente distribuiti IID,  $w_0 = -\frac{1}{\beta}$  e  $w_i = 0$  con  $i \geq 1$  la (1.15) e la (1.16) implicano che:

$$p_t^E = 0$$

$$p_t = -\frac{1}{\beta} \varepsilon_t$$

Supponendo che uno shock esogeno cambi le future condizioni di offerta, inteso come ad esempio il cambiamento tecnologico e  $w_i = 1$  con  $i \geq 0$ , allora i pesi si modificano nel seguente modo :

$$W_0 = -\frac{1}{\beta}$$

$$W_i = -\frac{1}{\beta + \gamma}$$

e il prezzo atteso si modifica così:

$$p_t^E = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \right)^j p_{t-j} \quad (1.20)$$

tale formula esprime come il prezzo atteso possa essere scritto come media mobile geometrica ponderata dei prezzi passati.

Il modello presentato può essere approfondito introducendo una nuova componente di domanda definita inventory speculation. Tale forma di domanda ha per oggetto generalmente materie prime e semilavorati che, nel momento in cui vengono acquistati dall'impresa, entrano a far parte del magazzino. Questo tipo di scorte si differenzia da quello classico perché esso rappresenta le risorse con cui l'impresa ha intenzione di fronteggiare cambiamenti improvvisi nella domanda dei consumatori. La inventory speculation (IS) influenza il prezzo ed è ad esso legata, così come è correlata al prezzo atteso. Essa verrà determinata, tra le altre, sulla base del prezzo atteso e una volta effettuata concorrerà a formare il prezzo di equilibrio. Un'impresa che serve una domanda abbastanza elastica dovrà essere in grado di anticipare i cambiamenti nella domanda del prodotto ed essere in grado di farvi fronte. La IS serve esattamente a questo: avere sempre le risorse sufficienti a mantenere in funzione il ciclo produttivo data la natura della domanda (dei consumatori). Per la verità, visto il funzionamento di queste scorte, si può ben comprendere come esse offrano maggiormente una protezione del tipo assicurativa rispetto a fungere come investimento meramente speculativo. Difatti, data la definizione, si può legittimamente supporre che se la domanda dei consumatori fosse soggetta a una variabilità minima, allora la IS probabilmente non verrebbe effettuata, consentendo così all'impresa di non dover sostenere tutti i costi legati ad essa (come lo stoccaggio e il trasporto). Si coglie dunque la natura preventiva della IS, che è così predisposta ad evitare situazioni in cui l'impresa potrebbe non riuscire a far fronte alla domanda di mercato, con tutte le complicazioni a questa fattispecie collegate, come la perdita di quote di mercato.

La IS presenta le caratteristiche per influenzare il prezzo dei beni, essendo una domanda di materie prime ed essendo collegata alla domanda del pubblico, o più precisamente alla sua variabilità. Influenza il prezzo in quanto la maggior richiesta di materie prime tenderà a colpire il prezzo del prodotto finale. Analizzare le implicazioni che la IS ha sul prezzo è un'utile strumento per poter spiegare una parte della variabilità di esso, di conseguenza una sua formulazione analitica può ben essere aggiunta nel modello finora presentato per un suo ulteriore sviluppo.

Il prezzo atteso viene modificato come segue:

$$p_t^E = \lambda p_{t-1} \quad (1.21)$$

Si pone ora l'attenzione sulla IS. Vengono trascurati costi di transazione e tasse.

Sia  $\Pi_t$  il profitto realizzabile alle fine del periodo t e sia  $I_t$  la domanda di scorte determinata all'inizio del periodo t. Semplicisticamente  $\Pi_t$  sarà pari a :

$$\Pi_t = I_t(p_{t+1} - p_t) \quad (1.22)$$

Dove al tempo t la variabile  $p_{t+1}$  è sconosciuta; di conseguenza, perlomeno all'inizio del periodo t, anche  $\Pi_t$  sarà sconosciuto.

La domanda di scorte è formulata in base all'utilità che essa può recare in termini di maggiori guadagni, ma anche di possibili ulteriori costi. Di conseguenza l'utilità attesa di un possibile guadagno (perdita) sarà determinante nella formulazione di  $I_t$ . Formalizzando il concetto di utilità attesa in un'espressione, essa può essere scritta in forma analitica come funzione di  $\Pi_t$ .

Un'approssimazione intorno a zero della funzione di utilità scelta assume la seguente formulazione generale <sup>1</sup>:

$$u_t = \phi(\Pi_t) = \phi(0) + \phi'(0)\Pi_t + \frac{1}{2}\phi''(0)\Pi_t^2 + \dots \quad (1.23)$$

L'utilità attesa sarà evidentemente data dal valore atteso della precedente scrittura. Dato che essa interessa tutti i momenti dall'origine-zero di  $\Pi_t$ , per poterla usare, sarà necessario conoscerli. In altre parole serve conoscere la funzione di distribuzione di  $\Pi_t$ .

Per prima cosa si calcola il valore atteso della (1.23):

$$E(u_t) = \phi(0) + \phi'(0)E(\Pi_t) + \frac{1}{2}\phi''(0)E(\Pi_t^2) + \dots \quad (1.24)$$

Si noti che si può fare un'operazione del genere perché il valore atteso è una trasformazione lineare. Utilizzando la (1.22) e la (1.24) si possono determinare i primi due momenti dall'origine-zero di  $\Pi_t$ , che sono :

$$E(\Pi_t) = I_t(p_{t+1}^E - p_t) \quad (1.25)$$

<sup>1</sup> Si usa un'espansione in serie perché la funzione di utilità può essere di difficile trattabilità analitica

$$E(\Pi_t^2) = I_t^2 [(\sigma_t^2 + (p_{t+1}^E - p_t)^2)] \quad (1.26)$$

Il primo dei due è il valore atteso per  $\Pi_t$ .  $\sigma_t^2$  rappresenta la varianza condizionata, mentre  $p_{t+1}^E$  è il prezzo atteso dagli operatori.

Scrivendo l'utilità attesa in funzione dei primi due momenti esplicitati si ottiene:

$$E(u_t) = \phi(0) + \phi'(0)I_t(p_{t+1}^E - p_t) + \frac{1}{2}\phi''(0)I_t^2[(\sigma_t^2 + (p_{t+1}^E - p_t)^2)] + \dots \quad (1.27)$$

Questa espressione è derivabile rispetto a  $I_t$  e soddisfa la seguente condizione :

$$\frac{dE(u_t)}{dI_t} = \phi'(0)(p_{t+1}^E - p_t) + \phi''(0)I_t [(\sigma_t^2 + (p_{t+1}^E - p_t)^2)] + \dots = 0 \quad (1.28)$$

Un'ulteriore espressione per la domanda di scorte si ha a questo punto esplicitando la (1.28) per  $I_t$ ; questo si può fare se si tiene conto che i termini di ordine superiore tendono a zero molto velocemente e possono essere ignorati. Si ha così:

$$I_t = -\frac{\phi'(0)(p_{t+1}^E - p_t)}{\phi''(0)[(\sigma_t^2 + (p_{t+1}^E - p_t)^2)]} \quad (1.29)$$

Se si considera che l'espansione in serie data dalla (1.23) è valida solamente per piccole variazioni, allora si possono fare ulteriori assunzioni sulla forma e sulla distribuzione della varianza e del prezzo. In particolare la varianza condizionata è indipendente dal prezzo atteso, ipotesi valida anche osservando che i prezzi sono normalmente distribuiti; inoltre il quadrato del prezzo atteso è relativamente piccolo rispetto alla varianza. Puntualizzati questi altri concetti si ha che la (1.29) può essere sostituita da un'espressione più semplice, data da:

$$I_t = \alpha(p_{t+1}^E - p_t) \quad (1.30)$$

Dove  $\alpha = -\frac{\phi'(0)}{\phi''(0)\sigma_t^2}$

Si può ora osservare come la domanda di scorte dipenda sia dalla varianza condizionata dei prezzi, che fa parte di  $\alpha$ , sia dalla differenza tra il prezzo atteso e il prezzo corrente, come peraltro si ha già avuto modo di notare in precedenza.

A questo punto la (1.30) può essere usata come strumento per rappresentare la domanda di scorte a fini speculativi. Essa può essere paragonata a una sorta di assicurazione. Munendosi di scorte adeguate le imprese si preparano così a possibili cambiamenti nella domanda per i loro prodotti. Strategicamente essa si basa sull'anticipazione della possibilità che i prezzi possano diventare troppo elevati sul mercato delle materie prime. In questo modo, se si dovessero avere costi elevati a effettuare un rifornimento nel continuo, l'impresa sarebbe così momentaneamente al sicuro sul lato degli approvvigionamenti, e questo potrebbe anche tradursi in un vantaggio competitivo sui concorrenti, nel senso che, dopo un eventuale shock sul mercato delle materie prime e dei semilavorati, l'impresa potrebbe mantenere i propri prezzi di vendita costanti e guadagnare quote di mercato sulla concorrenza, che invece sarebbe costretta a caricare sulle vendite un'ulteriore quota di costo.

Eventualmente è da considerarsi nella speculative inventory demand una componente di stagionalità, per le imprese il cui business, appunto, può essere definito attivo solo in particolari periodi dell'anno. In questo senso quando le imprese saranno 'a riposo' sul lato delle vendite, nel senso che non hanno relazioni con i clienti, potranno effettuare gli approvvigionamenti necessari in attesa che arrivi il periodo in cui dovranno far fronte alla domanda di mercato.

Alla luce di quanto appena spiegato è quindi da considerarsi domanda speculativa una strategia imprenditoriale volta ad anticipare e prevenire i bisogni degli utenti finali e finalizzata a dotare l'impresa fin da subito di fattori che permettano di poter svolgere il processo produttivo in molte situazioni, con attenzione particolare a un futuro presagio di aumento di prezzo delle materie prime. In questa sede si considera esclusivamente la domanda di materie prime, che può essere sintetizzata dalla (1.30).

Si può ora continuare l'analisi, modificando alcune equazioni precedenti per tenere conto delle ultime assunzioni fatte e delle conseguenze che ne derivano. In particolare le modifiche vanno inserite all'interno dell'offerta e della domanda usate all'inizio di questo paragrafo, sintetizzate dal sistema (1.6). Inserendo la domanda di scorte nel sistema esso cambia nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 C_t &= -\beta p_t && \text{(domanda)} \\
 P_t &= \gamma p_t^E + u_t && \text{(offerta)} \\
 I_t &= \alpha(p_{t+1}^E - p_t) && \text{(domanda speculativa di scorte)}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Dato il nuovo sistema, una condizione di equilibrio è fornita da:

$$C_t + I_t = P_t + I_{t-1} \tag{1.32}$$

Questa equazione può essere esplicitata in funzione dei prezzi. Facendo le dovute sostituzioni si può scrivere:

$$-(\alpha + \beta)p_t + \alpha p_{t+1}^E = (\alpha + \gamma)p_t^E - \alpha p_{t-1} + u_t \tag{1.33}$$

Le condizioni di cui sopra possono essere integrate alle relazioni esplicitate precedentemente per trovare i pesi  $W_i$  e  $V_i$ . Sostituendo la (1.12), la (1.13) e la (1.15) nella (1.33) si ottiene la seguente uguaglianza :

$$-(\alpha + \beta) \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t+1-i} = (\alpha + \gamma) \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-1-i} + \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i} \tag{1.34}$$

Perché quest'equazione sia valida per ogni  $\varepsilon$ , i coefficienti devono essere uguali.

In particolare i pesi  $w_i$  hanno la seguente forma :

$$\begin{aligned}
 w_0 &= -(\alpha + \beta)W_0 + \alpha W_1 \\
 w_i &= \alpha W_{i-1} - (2\alpha + \beta + \gamma)W_i + \alpha W_{i+1}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

I pesi  $W_i$  saranno dati come soluzione, se tale soluzione esiste, di questo sistema omogeneo. Avranno una forma del tipo:

$$W_k = c\lambda_1^k \quad (1.36)$$

Dove  $\lambda_1$  è la più piccola radice che risolve la seguente equazione caratteristica :

$$\alpha - (2\alpha + \beta + \gamma)\lambda + \alpha\lambda^2 = 0 \quad (1.37)$$

Il sistema omogeneo dato dalla (1.35) ha soluzione unica e reale se e solo se le radici che risolvono l'equazione caratteristica sono reali. In questo modo i prezzi e le quantità variabili saranno dinamicamente stabili. Perché questo accada basta osservare che devono valere le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \alpha &> 0 \\ \beta + \gamma &> 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

$\alpha > 0$  indica che la speculazione avviene in un'ottica di futuro guadagno, come è lecito attendersi. La seconda condizione caratterizza una condizione di equilibrio di Walras. Questa tuttavia non è l'unica forma che possono avere i coefficienti affinché vi sia equilibrio. La ragione per cui si usano i coefficienti dati dalla (1.38) è più economica che matematica. Altre forme che garantiscono lo stesso stabilità sono  $-\frac{1}{4} < \frac{\alpha}{\beta + \gamma} < 0$ , oppure se  $\alpha = 0$ ,  $(\beta + \gamma)$  può assumere un valore qualsiasi.

Si supponga ora che gli effetti che colpiscono il mercato siano IID. Si può considerare come prima che i coefficienti assumano la forma  $w_0 = 1$  e  $w_i = 0$ . Combinando le equazioni (1.35) e (1.36) si ottiene un'espressione per i pesi:

$$W_k = -\frac{1}{(\alpha + \beta) - \alpha\lambda_1} \lambda_1^k$$

I pesi  $V_k$  possono essere trovati attraverso la (1.19) oppure osservando che seguono un processo di Markov. In questo tipo di processo stocastico la distribuzione della variabile in un qualsiasi istante di tempo non dipende dal sentiero temporale che ha seguito fino a quel momento; la distribuzione probabilistica della variazione di valore in un periodo di lunghezza  $T$  è  $N(0, T)$  e in un periodo di lunghezza  $\Delta t$  è  $N(0, \Delta t)$ .

I pesi sono dati da:

$$V_k = \begin{cases} \lambda_1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k>1 \end{cases}$$

Questa forma dei coefficienti  $V_k$  fa notare come il prezzo atteso dipenda solo ed esclusivamente dall'ultimo prezzo osservato. In altre parole, come già sottolineato, la serie storica dei prezzi non ha alcuna rilevanza per l'aspettativa. Questo si può osservare esplicitando  $V_k$  nel prezzo atteso dato dalla (1.17), ottenendo così :

$$p_t^E = \lambda_1 p_{t-1} \quad (1.39)$$

Dove il valore di  $\lambda_1$  è compreso fra 0 e 1. L'ammontare di questo parametro, in senso economico, è espressione del comportamento delle imprese riguardo alla domanda di scorte speculative. In

particolare se sarà uno dei fattori determinanti che guideranno la formazione dei prezzi, il parametro tenderà a uno,  $\lambda_1 \rightarrow 1$ , e i prezzi avranno una correlazione seriale positiva; mentre se la domanda sarà abbastanza trascurabile per i prezzi allora il parametro tenderà a zero,  $\lambda_1 \rightarrow 0$ .

Tenendo conto della (1.39) per un'ulteriore (e ultima) forma per il prezzo atteso, si può, utilizzando il sistema descritto dalla (1.31) ottenere il nuovo sistema:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t \\ P_t &= \gamma \lambda_1 p_{t-1} + \varepsilon_t \\ I_t &= -\alpha(1 - \lambda_1) p_t \end{aligned} \tag{1.40}$$

La domanda, intesa come quantità complessivamente domandata, è data da:

$$Q_t = C_t + I_t \tag{1.41}$$

L'offerta è pari a <sup>2</sup> :

$$Q_t = P_t + I_{t-1} \tag{1.42}$$

Usando la (1.40) e queste ultime due uguaglianze si esplicita un sistema che ha per oggetto la quantità domandata e offerta:

$$\begin{aligned} Q_t &= -[\beta + \alpha(1 - \lambda_1)] p_t \\ Q_t &= [\gamma \lambda_1 - \alpha(1 - \lambda_1)] p_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{1.43}$$

L'inserimento della domanda di scorte chiude questa prima parte di analisi sui prezzi determinati in ipotesi di aspettative razionali, e la lascia aperta a successive considerazioni da concretizzarsi in ulteriori formule da inserire alla teoria di base per modificarla e anche per renderla più reattiva in risposta a variabili che si ritiene possano avere un ruolo primario per il contesto esaminato. Con riferimento sempre alla domanda di scorte, si possono ora fare alcune considerazioni se l'aspettativa sul prezzo è razionale. In particolare la speculazione riduce la varianza dei prezzi, tuttavia questa conseguenza dipende dalla forma che assumono i coefficienti. Se  $\alpha < \beta + \gamma$  allora tale effetto è trascurabile. La varianza del prezzo atteso prima cresce insieme ad  $\alpha$  e poi decresce per la minor variabilità del prezzo effettivo. Inoltre, parlando di produttori e consumatori, si ha che, se  $\alpha$  aumenta, i profitti dei produttori aumentano così come le spese dei consumatori; queste ultime inizialmente crescono in modo un po' più veloce rispetto ai guadagni degli imprenditori. Date queste ultime osservazioni, non è chiaro quale sia l'effetto della speculazione sul benessere generale, in termini di surplus come definito dalla microeconomia.

\* \* \*

Le prossime righe saranno dedicate all'interazione tra il comportamento razionale e il cobweb theorem, o modello della ragnatela, una teoria economica che ha come obiettivo spiegare le fluttuazioni dei prezzi usando, storicamente, come campo di analisi, principalmente il settore

---

<sup>2</sup> L'indice di  $I$  è differente nell'offerta perché comprende quanto è stato domandato dalle imprese nel periodo precedente, di conseguenza nel periodo in corso la stessa quantità diventa parte di quanto può essere offerto

agricolo. Secondo F. Muth ci sono buone ragioni per ipotizzare un comportamento razionale da parte degli agenti. Egli, con riferimento alle aspettative razionali, sostiene che:

- sono applicabili a problemi di natura dinamica, quindi si adattano perfettamente al contesto economico;
- se non viene formulata l'ipotesi di razionalità allora esisterebbero opportunità di speculazione tra le materie prime e i soggetti sarebbero in grado di comprare e vendere informazione (cosa che in teoria avviene);
- offrono soluzioni a modelli economici esistenti che, magari pur formulando le assunzioni nel modo corretto, non sono in grado di raggiungere gli obiettivi principali, ossia descrivere il comportamento dell'economia e effettuare previsioni su di essa. La teoria esposta fin qui propone di colmare queste lacune.

L'autore, alla luce di questi punti di forza, propone una rapida comparazione del suo modello con il precedentemente citato cobweb theorem. Questo modello si propone di spiegare come piccoli shocks che colpiscono costantemente il sistema economico possano trasformarsi in veri e propri squilibri che rappresentano le cause che guidano le fluttuazioni dei prezzi. La logica alla base è che i produttori reagiscono agli eventi a cui sono esposti e variano i prezzi che di norma applicano. Altri produttori/imprenditori, che sono soggetti in tutto o in parte ai prezzi variabili si comporteranno di conseguenza, modificando anch'essi i prezzi finali. Il risultato è un concatenamento di reazioni/azioni volte a spingere sempre più i prezzi verso l'alto. Il modo di fare delle imprese amplia gli shocks perché, secondo questo modello, l'informazione a loro disposizione è scarsa oppure mal interpretata, di conseguenza non consente di ben intendere le turbolenze del mercato, che esse non riescono ad anticipare. Il prezzo di vendita, tenendo conto delle spiegazioni fornite, è dato da una media dei prezzi osservati nei periodi precedenti per le quantità domandate. È un metodo di determinazione del prezzo che ricorda di più le aspettative estrapolative ed adattive discusse nei paragrafi precedenti che non quelle razionali; tuttavia il cobweb theorem rappresenta, osservando la letteratura economica, un buon modello per imporre dinamicità in un sistema economico, anche se bisogna dire che le sue conclusioni raramente trovano riscontro in realtà.

Sostanzialmente, il principale risultato del cobweb theorem analiticamente è dato da:

$$E(p_t | p_{t-1}, p_{t-2}, \dots) = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E \quad (1.45)$$

Ossia, diversamente dalla (1.8), qui  $E(p_t)$  è sostituito dalla sua aspettativa condizionata.

Dati provenienti dall'evidenza empirica sono a supporto delle ipotesi di razionalità, piuttosto di quelle che hanno portato alla teorizzazione del cobweb theorem. Ad esempio in Heady and Kaldor (1954) e successivamente di Modigliani and Weingarther (1958) si può osservare come i cicli di prezzo vadano maggiormente d'accordo con le aspettative razionali piuttosto che con aspettative di natura estrapolativa/adattiva come previsto dal modello della ragnatela. Tuttavia spesso appare che le aspettative, nonostante siano razionali, sottovalutino i cambiamenti che avvengono in realtà. Ulteriori studi hanno provato a combinare le due cose (aspettativa e cambiamento effettivo) usando l'equazione:

$$p_t^E = bp_t + v_t' \quad (1.46)$$

Dove  $v_t'$  è l'errore casuale. Effettivamente questa equazione è quello che le aspettative razionali sostengono, ossia che la differenza fra valore ipotizzato dagli agenti e valore atteso è solamente data da un errore casuale; errore che si perde quando si considerano le aspettative in media.

Contrariamente alle richieste del cobweb theorem la stima del parametro  $b$  è sempre stata positiva,  $< 1$  ma significativamente diversa da zero (il teorema richiede un coefficiente negativo). Un dato che potrebbe essere preso come supporto al teorema è l'osservazione che le fluttuazioni dei prezzi di un gran numero di materie prime sono cicliche. Di conseguenza l'ipotesi di prendere un prezzo atteso come media dei prezzi passati potrebbe essere una possibile soluzione. Tuttavia c'è almeno una considerazione da fare. La lunghezza del ciclo, che può essere identificata da analogie tra le fluttuazioni osservate, è estesa. Ad esempio i dati sul bestiame (Ezekiel 1938) parlano di cicli abbastanza lunghi, all'incirca dai cinque ai sette anni. Il cobweb theorem non prevede cicli di lunghezza così elevata tra le fluttuazioni dei prezzi. Pur riconoscendo la ciclicità, la differenza temporale è troppa massiccia per fare delle considerazioni corrette sulla distribuzione delle variazioni di prezzo. La conclusione è che una teoria che preveda un'aspettativa costruita con dati forward- looking è da preferirsi a un modello che principalmente risolve l'incertezza economica usando dati presi dal passato, pur dovendo spiegare variabili che presentano natura ciclica.

\* \* \*

Quella fin qui proposta è la teoria delle aspettative razionali originariamente sviluppata dal pionieristico lavoro di F. Muth. Essa, come già sottolineato, e come del resto una qualsiasi nuova teoria, introduce elementi inediti per raggiungere differenti risultati rispetto al passato; ossia un tipo di aspettativa forward looking in contrapposizione ad un'aspettativa essenzialmente di stampo estrapolativo. Tuttavia la teoria espone solo quello che è il suo oggetto, le aspettative razionali, ed esse vengono solo rapportate, in termini di possibili differenti risultati raggiungibili, unicamente al cobweb theorem. Non viene effettuata una loro analisi in un modello macroeconomico. In altri termini, se i modelli classici sostenevano i vari equilibri nei mercati, come il mercato del lavoro e quello dei beni con salari e prezzi pienamente flessibili, e l'esistenza di un tasso naturale di disoccupazione come differenza tra l'occupazione totale e l'occupazione strutturale, veniva assunto per affermare questo che gli agenti effettuassero le loro decisioni usando un tipo di formulazione adattivo, quindi esclusivamente in base a dati passati. Tale ipotesi prevedeva dunque che gli operatori commettevano errori sistematici di previsione. Il primo a introdurre un tipo di aspettativa razionale nel comportamento degli agenti all'interno di un modello macroeconomico/econometrico, per altro da egli stesso teorizzato, fu R. Lucas. Inizialmente la sua pubblicazione non venne particolarmente accettata, probabilmente per i contenuti troppo analitici, di conseguenza egli decise di fornire una semplificazione della teoria originaria (Lucas, 1972) in un articolo successivo, di cui l'output principale è rappresentato dalla curva di offerta à la Lucas. La presentazione formale del modello va oltre gli scopi di questo elaborato. Gli unici punti di cui si discute, per altro in modo breve, riguardano le due principali innovazioni che caratterizzano il modello di Lucas rispetto ai precedenti, e i risultati raggiunti dal modello.

La prima novità, come si avrà avuto modo di intendere, ha per oggetto le aspettative razionali, e il loro inserimento per la prima volta in un modello economico/econometrico. Lucas infatti sostiene che gli agenti siano influenzati, nelle loro scelte, dal comportamento dell'autorità di politica monetaria. Nella formalizzazione di un modello che tenga conto di questo, c'è bisogno che i

parametri non siano non indipendenti dalla politica economica. Infatti, se gli operatori utilizzano aspettative razionali, nell'epoca corrente formuleranno aspettative per il periodo futuro sulla base di quello che si aspettano l'autorità farà in termini di politica monetaria. Le autorità, d'altro canto, agiranno anche in base a quello che gli agenti si aspetteranno da loro. Così in periodi di inflazione, i gestori della politica economica potranno alzare i tassi di interesse, e aspettarsi che gli operatori si attendano una mossa di questo tipo; oppure in caso di bilancia dei pagamenti squilibrata, agiranno, se possibile, sul tasso di cambio per favorire le esportazioni o le importazioni. In questo tipo di formulazione delle aspettative dunque, il governo, o chi per lui, è a conoscenza della qualità delle previsioni dei privati, e agirà in modo consapevole. Tenendo conto di questo modo di formulazione delle ipotesi i decisori della politica economica non potranno più stimare i parametri delle equazioni che descrivono il sistema come previsto dalla teoria classica. Infatti, precedentemente, tali parametri erano esclusivamente estrapolati da dati passati. Così in una banale equazione che descrive il consumo o l'investimento, il parametro che modula la variabile indipendente è stimato attraverso regressioni o procedimenti statistici simili. Ad esempio in una versione semplificata di un'equazione di investimento, del tipo  $I = \alpha Y$ , con  $I$  ammontare dell'investimento e  $Y$  reddito disponibile, il parametro  $\alpha$  viene stimato esclusivamente osservando gli investimenti passati. Secondo Lucas questo rappresenta un errore, perché i parametri 'nuovi' saranno così sempre 'vecchi'. Infatti le decisioni future verranno sempre prese in base, tra le altre, al comportamento passato degli agenti. In un modello di questo tipo (come del resto in nessuno prima di allora) non sono dunque previsti shock. Questo non significa che non se ne verifichino in realtà, ma che il modello non è in grado di tenerne conto. A tal proposito, bisogna considerare la possibilità che gli agenti effettuino aspettative attraverso dati di previsione, e che l'autorità ne sia a conoscenza.

La seconda novità proposta da Lucas concerne quella che è definita microfondazione del modello. Tale termine sta ad indicare che il modello poggia su fondamenti microeconomici, come i prezzi decisi dagli imprenditori. Dato che, fino a quel momento, nella maggior parte dei modelli macroeconomici, le componenti relative ai singoli operatori, che poi andavano a comporre gli aggregati macro come la domanda, l'offerta o un indice di prezzo medio, non venivano analizzati in profondità, il modello di Lucas presenta da questo punto di vista una sostanziale novità che, unita alla sua critica ai modelli correnti e passati, segna sostanzialmente una rottura con il modo di modellizzare l'economia sperimentata fino a quel momento storico. La microfondazione può essere sintetizzata dalla seguente equazione:

$$y_{ct}^{(z)} = (1 - \alpha)\gamma[p_{t(z)} - P_t^*] + \lambda y_{ct-1(z)}$$

Dove i termini hanno il seguente significato:

$y_{ct}^{(z)}$  rappresenta una componente ciclica della produzione relativamente a una singola impresa (l'impresa  $z$ );

$\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  sono coefficienti;

$p_{t(z)}$  è il prezzo del bene prodotto dalla singola impresa, che può essere scomposto ulteriormente nelle sue determinanti attraverso l'equazione :  $p_{t(z)} = P_t + \varepsilon_{t(z)}$ , con  $P_t$  prezzo medio o, più propriamente livello generale dei prezzi,  $\varepsilon_{t(z)}$  disturbo stocastico che colpisce il prezzo praticato dall'impresa  $z$ . Infine :

$P_t^*$  valore atteso per il livello generale dei prezzi.

L'inserimento della componente stocastica fa sì che, seppur analiticamente non cambi nulla, l'equazione di produzione sia differente da impresa a impresa. Le equazioni di produzione delle singole imprese confluiscono nella produzione totale per il sistema economico, o offerta aggregata:

$$Y_t^s = Y_{nt} + (1-\alpha)\gamma Z[P_t - P_t^*] + \lambda[Y_{t-1} - Y_{nt-1}]$$

Tale equazione può essere ottenuta sommando la produzione di ogni impresa.  $Y_{nt}$  identifica una componente produttiva aggregata di trend, che può essere ottenuta sommando le singole componenti di trend delle imprese,  $y_{nt}$ . L'ultimo termine esprime la componente persistente dell'offerta aggregata. È ottenuta come differenza tra il valore passato della produzione totale e della componente di trend del periodo precedente. Il modello fornisce come risultato finale un'espressione per il livello generale dei prezzi e un'espressione per la produzione aggregata. Queste due grandezze sono date analiticamente da:

$$P_t = -\lambda\beta + \frac{(1-\alpha)\delta\gamma}{1+(1-\alpha)\gamma} + \frac{1}{1+(1-\alpha)\gamma} X_t + \frac{(1-\alpha)\gamma}{1+(1-\alpha)\gamma} X_{t-1} - \lambda Y_{t-1} - (1-\lambda)Y_{nt}$$

$$Y_t = \lambda\beta - \frac{(1-\alpha)\delta\gamma}{1+(1-\alpha)\gamma} + \frac{(1-\alpha)\gamma}{1+(1-\alpha)\gamma} \Delta X_t - \lambda Y_{t-1} - (1-\lambda)Y_{nt}$$

Tali output possono essere interpretati nel seguente modo: dato  $\Delta X_t$ , variazione nominale dell'output si osserva come la politica monetaria abbia effetti sulla produzione aggregata. A livelli di prezzi più elevati, espressi dalla loro variazione a intervalli discreti, si ha un aumento della produzione. Tuttavia questo è valido solo in un breve periodo. Infatti la somma dei coefficienti che esprimono l'ammontare nominale della produzione è uno per l'equazione dei prezzi e zero per l'equazione dell'output. Questo significa che nel lungo periodo un aumento dei prezzi resta tale, e non si traduce in un maggior livello produttivo. Inoltre anche la curva di Phillips è soggetta a limiti, dati dall'ammontare dei coefficienti. In particolare se  $\alpha=1$  variazioni di politica monetaria si scaricheranno interamente sul livello dei prezzi, dato che la maggior varianza di  $\Delta X_t$  ridurrà il trade-off per incrementare la produzione a disposizione delle autorità. Quindi anche secondo Lucas la moneta è neutrale nel lungo periodo, l'eventuale non neutralità nel breve periodo è da ascrivere alle percezioni distorte degli operatori, che non sanno distinguere variazioni nei prezzi generali ( $P_t$ )

da variazioni nei prezzi relativi ( $\frac{P_{t(z)}}{P_t}$ ). Quest'argomentazione è inoltre usata nella trattazione formale del modello per derivare la microfondazione.

\* \* \*

Le aspettative razionali sono sostanzialmente la 'naturale' estensione dell'assioma sulla razionalità individuale per la raccolta di informazioni. Si riportano ora brevemente quelle che sono le determinanti qualitative di questa teoria:

- Le aspettative razionali implicano che i soggetti economici formino le proprie aspettative usando in modo efficiente tutta l'informazione disponibile, di conseguenza non si affidano solo a quella presente e passata, ma anche a quella attesa;

- Le informazioni sono trattate in modo dettagliato, ottimale ed efficiente per arrivare a ottenere una stima ponderata sul futuro valore della variabile economica di interesse;
- Nelle informazioni disponibili sono incluse la conoscenza da parte degli agenti del modello che descrive il sistema economico e il comportamento effettivo dell'autorità di politica monetaria. Inoltre i singoli operatori sono a conoscenza che tutti i loro corrispondenti hanno accesso alla medesima informazione.

Con riferimento a  $I_{t-1}$ , il set informativo, si ha che:

- Tale set è rappresentato dall'insieme di equazioni che descrivono il sistema economico, più in particolare il sistema economico corretto, come esposto dalla teoria dell'equilibrio di Walras;
- Contiene tutti i valori passati delle variabili endogene del modello teorico;
- Contiene il valore dei parametri;
- Contiene la distribuzione di probabilità degli errori.

Il fatto di utilizzare il concetto di aspettativa matematica è necessario date le ipotesi fatte sulle variabili economiche. Infatti esse sono stocastiche, e il loro valore dipende dal realizzarsi di disturbi che caratterizzano l'aleatorietà. Tali espressioni stocastiche, proprie della Nuova Macroeconomia Classica, consentono così di usare molte proprietà e teoremi della statistica e della matematica e di adattarli all'analisi in questione. Così l'aspettativa, sarà esprimibile come attesa al tempo corrente del valore di una variabile al tempo futura, e formalmente essa sarà data da :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Dove  $x$  è una variabile aleatoria e  $f(x)$  è la sua funzione di densità; mentre un disturbo  $\varepsilon$  che colpisce la produzione sarà esprimibile attraverso la sua distribuzione :

$$\varepsilon \sim \psi(\mu, \sigma^2)$$

Dove  $\psi$  sta ad indicare la funzione di distribuzione standard che caratterizza  $\varepsilon$ .

### 1-3 – Politica monetaria e aspettative razionali

Dopo aver presentato la teoria delle aspettative razionali così come originariamente sviluppata, si possono ora illustrare alcune sue applicazioni a problemi reali di politica monetaria. Dati infatti i problemi cui essa (la politica monetaria) va incontro, parlando di equilibri da perseguire con attori che tendono a comportarsi in modo opposto nella maggior parte dei casi, un approccio che preveda un comportamento razionale degli agenti può sembrare opportuno e preferibile ad altri.

Un lungo dibattito che da sempre esiste in macroeconomia, con riferimento alla politica monetaria, concerne il modo in cui essa andrebbe condotta, cioè se adottare una politica discrezionale e decisa di volta in volta dal buon senso e dalla professionalità di chi la conduce, oppure sottostare a una serie di regole che, se non altro per serietà operativa, dovrebbero essere abbastanza rigide e modificate solo in casi eccezionali.

Storicamente, questi modi di conduzione opposti nel prendere le decisioni di natura monetaria sono stati propri di due scuole dell'economia: i monetaristi e i keynesiani.

Milton Friedman, capostipite dei monetaristi, sosteneva che le autorità competenti avrebbero dovuto seguire delle regole precise nella conduzione della loro attività. In particolare, l'offerta di moneta doveva crescere di un determinato ammontare percentuale annuo in modo perpetuo. Solo in questo modo la produzione e l'occupazione avrebbero beneficiato del lavoro svolto dalla politica monetaria. Limitando così l'intervento delle autorità a pochi casi precisi, i monetaristi ritenevano che il mercato, nel lungo periodo, potesse raggiungere un equilibrio e garantire così una corretta allocazione delle risorse.

Gli economisti Keynesiani, sul lato opposto, erano convinti che il mercato fosse inefficiente, e dunque non capace, neanche nel lungo termine, di offrire una giusta ripartizione delle disponibilità. Occorreva dunque che lo stato rivedesse costantemente la propria politica ed effettuasse interventi continui, così da adattarli al caso della congiuntura economica corrente. Quindi una regola fissa sarebbe stata incoerente e non utilizzabile in un contesto di produzione e occupazione mutevole come quello reale.

D'accordo con i monetaristi, anche i seguaci di Muth, ossia i sostenitori delle aspettative razionali, sono per un limitato intervento dello stato nell'economia di mercato e dell'adozione di regole fisse per determinare l'offerta di moneta; tuttavia le ragioni di entrambi sono differenti.

Per i monetaristi l'intervento statale fa tardare la corretta allocazione dei beni. Quindi, dato che in ogni caso è l'autorità che si deve occupare della politica monetaria, è preferibile circoscrivere il suo raggio d'azione a interventi prefissati, e adottare delle regole precise su come effettuare l'offerta di moneta rappresenta la soluzione ideale.

I fautori delle aspettative razionali fanno un ragionamento differente, pur arrivando alle medesime conclusioni. In particolare essi ritengono che la politica monetaria non sia adeguata per offrire un supporto stabilizzante al mercato, e sia quindi, nonostante la grande struttura richiesta per essere messa in atto, da considerarsi infruttuosa. Gli effetti reali, che possono essere intesi come conseguenze dirette della politica monetaria, espansiva o restrittiva che sia, effetti come variazioni nell'occupazione o nella produzione, sono dunque da considerarsi frutto di shocks che colpiscono i possibili equilibri di allocazione; hanno per giunta natura stocastica e quindi imprevedibile.

Nel precedente paragrafo si è esposta la teoria secondo la quale in presenza di aspettative razionali è ipotizzabile sostenere che in media gli agenti conoscano la vera funzione di distribuzione delle principali variabili economiche, e, sulla base di ciò, assumano, nel gestirle, un comportamento ponderato e abbiano a disposizione un buon grado di informazione. Questo equivale a dire che in un modello che prevede aspettative razionali, gli operatori si comportano in modo ottimale in condizioni di incertezza.

Se gli shocks sono sostanzialmente imprevedibili e gli agenti riescono, in media, a valutare correttamente quello che avviene nel sistema economico, allora, secondo questa corrente di pensiero, ogni intervento dell'autorità sarà inutile perché gli agenti lo avranno già previsto. L'inefficacia della politica monetaria è in ogni caso accompagnata (perché essa si manifesta pur sempre con delle azioni) dai disturbi destabilizzanti che, anche per i sostenitori delle aspettative razionali, alla fine risulteranno determinanti per le variazioni dell'economia. Si può ben capire a questo punto perché si è detto che le conclusioni di questi due gruppi di persone sono le medesime.

Di conseguenza la soluzione proposta da entrambi è sostanzialmente analoga, ed è far sottostare la politica monetaria a una regola, spiegata agli agenti e vincolante per l'autorità competente. In questo modo dunque, teoricamente, l'equazione o le equazioni che descrivono la politica monetaria in funzione della regola, non dovrebbero più essere completate inserendo il disturbo di natura stocastica. Se questo può essere considerato come l'inizio di una ipotetica soluzione al problema, la parte fondamentale è a questo punto lo sviluppo della regola, ossia la forma che dovrebbe avere.

Due economisti, Kydland e Prescott, in uno dei loro lavori più celebri (Kydland e Prescott 1977), hanno analizzato le diverse implicazioni che possono sorgere dall'applicazione di una regola di politica monetaria del tipo state contingency with feedback. Una regola di questo tipo non è di natura statica. Essa funziona come correttore di una serie di variabili obiettivo. Tali variabili identificano lo stato di salute di un sistema economico, e l'applicazione della regola prevede che vengano intraprese delle azioni volte alla modifica di queste variabili. Kydland e Prescott, nel lavoro che gli è valso il Nobel nel 2004, dimostrano, fra le altre, come una decisione di questo tipo sia subottimale, e, per le implicazioni che comporta, la definiscono dinamicamente incoerente.

Questa definizione deriva da un comportamento, piuttosto probabile, che l'autorità potrebbe assumere nel formulare le proprie decisioni future. Si considerino a tal proposito i due seguenti esempi, il primo molto semplice e il secondo leggermente più analitico.

\* \* \*

La banca centrale di un certo stato sovrano è investita di piena autorità e autonomia nell'organizzare e implementare la politica monetaria. A tal proposito la banca decide di condurre le proprie azioni nel breve-medio termine attraverso una regola che prevede l'immissione sul mercato di una determinata quantità di moneta, crescente ogni anno per un ammontare percentuale costante e da farsi per cinque anni. Verso la fine del terzo anno, per una serie di motivi che possono essere collegati ai diversi tempi di aggiustamento delle variabili economiche, si registra un modesto incremento produttivo e occupazionale e un livello molto maggiore, in termini percentuali e in rapporto a queste due grandezze, dei prezzi. Di conseguenza, almeno al terzo anno, praticamente il solo effetto della politica è stato quello di inflazionare l'economia. Sotto una forte pressione dell'opinione pubblica, la banca potrebbe decidere di deviare dalla politica precedentemente annunciata all'anno zero e tentare così di far scendere il livello generale dei prezzi nei rimanenti due anni entro cui aveva pianificato l'intervento, ma anche nell'ottica di affrontare gli anni successivi. Se agisse in questo modo, la banca andrebbe contro la serie di politiche ottimali decise in partenza, e l'azione risulterebbe dinamicamente incoerente, anche tenendo conto che, la produzione e l'occupazione potrebbero aggiustarsi negli anni successivi, anche se, tuttavia l'effetto dell'inflazione si sconta subito (questo è un caso che potrebbe essere generalizzato attraverso un grande problema della finanza, ossia l'osservazione che da un'azione con un'ottica di medio- lungo termine talvolta si generano nel breve termine conseguenze totalmente opposte in termini di obiettivi e spesso insostenibili). Gli agenti con aspettative razionali sono a conoscenza del probabile comportamento della banca centrale, e perciò all'anno zero terranno conto di questa possibile deviazione nelle loro decisioni.

\* \* \*

Si consideri<sup>3</sup> ora un gioco fra due parti: il settore privato, rappresentato dagli agenti e operatori economici destinatari della politica monetaria e il policymaker, che può essere identificato con il governo sovrano. Essi interagiscono fra di loro in base alla determinazione di una variabile, l'inflazione  $\pi$ . Se gli agenti hanno aspettative razionali vale:

$$\pi_t^E = E(\pi_t)$$

Si ipotizzi che l'obiettivo del governo sia minimizzare la seguente funzione di perdita, che può essere considerata come il costo che deriva dall'avere un sistema caratterizzato da inflazione e disoccupazione:

$$L = \frac{1}{2}[\beta\pi^2 + (u - \bar{u})^2] \quad (1.46)$$

Dove  $\beta$  è un parametro,  $u$  è il tasso di disoccupazione corrente e  $\bar{u}$  è il tasso di disoccupazione obiettivo.

In termini qualitativi, la minimizzazione della funzione di perdita equivale a dire che il governo vorrebbe raggiungere un tasso di inflazione il più basso possibile (tendente a zero) e un livello di disoccupazione il più vicino a quella desiderata. Per illustrare le modalità operative, si introducono alcuni concetti.

L'inflazione considerata,  $\pi$  è pari a quella risultante dalla curva di Phillips modificata per le aspettative :

$$\pi = \pi^E - (\dot{u} - \bar{u})$$

Dove  $\dot{u}$  è il tasso di disoccupazione così come determinato dall'offerta di lavoro totale e l'occupazione strutturale. Una formulazione per  $u$  è quindi data da :

$$u = \bar{u} - (\pi - \pi^E) \quad (1.47)$$

Inserendo la (1.47) nella (1.46) si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \beta\pi^2 + [(\dot{u} - \bar{u}) - (\pi - \pi^E)]^2 \right\} \quad (1.48)$$

Per la minimizzazione di questa espressione basta determinare le FOC's:

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} = \beta\pi - (\dot{u} - \bar{u}) + (\pi - \pi^E) = 0$$

$$\pi = \frac{1}{1 + \beta} (\dot{u} - \bar{u}) + \frac{1}{1 + \beta} \pi^E \quad (1.49)$$

Se il governo all'inizio del periodo di competenza fa un annuncio sul livello a cui vuole portare l'inflazione, potrebbe essere portato a non mantenere la promessa.

<sup>3</sup> L'esempio è preso da: E. Colombo, M. Lossani – Economia monetaria internazionale

Attraverso la definizione del livello di inflazione che fa parte dell'annuncio, la situazione ipotizzata può essere dimostrata attraverso il modello in modo molto semplice. Se il governo promettesse inflazione nulla nel periodo successivo, o in un altro dopo, e gli agenti si fidassero dell'annuncio si arriverà ad avere una situazione in cui si può fissare  $\pi^E = 0$ . Per cui la (1.49) diverrebbe:

$$\pi = \frac{1}{1+\beta} (\dot{u} - \bar{u}) \quad (1.49a)$$

È da sottolineare che questa espressione per l'inflazione può avvenire solamente in caso di aspettative non razionali. Infatti, una fissazione di  $\pi^E = 0$  da parte degli agenti non può corrispondere a un'ipotesi di comportamento razionale. Il motivo è che essi fisserebbero le proprie aspettative solo ed esclusivamente in base all'annuncio del governo, prescindendo così dal loro set informativo. Dato che la raccolta e l'utilizzo di informazioni è una particolare ipotesi che caratterizza le aspettative razionali, se essa non sussiste non si può parlare di un loro utilizzo. Infatti in caso di comportamento razionale si avrebbe che la (1.49) corrisponderebbe esattamente all'inflazione attesa dagli agenti:

$$\begin{aligned} \pi^E = E(\pi) &= \frac{1}{1+\beta} (\dot{u} - \bar{u}) + \frac{1}{1+\beta} \pi^E \\ \pi = \pi^E = E(\pi) &= \frac{\dot{u} - \bar{u}}{\beta} \end{aligned} \quad (1.49b)$$

Rispetto alla precedente questa ipotesi è dinamicamente coerente. C'è da sottolineare che, tenendo conto della forma della funzione di perdita e delle aspettative razionali degli operatori, il governo non annuncerà mai una politica che prevede inflazione nulla. Questo perché sa che in ogni caso l'aspettativa di inflazione corrisponderà alla (1.49b).

Si possono considerare quindi tre casi di livello di inflazione e ammontare della funzione di perdita, differenze che possono essere tutte ascritte al tipo di aspettativa degli agenti e al comportamento del governo.

- 1- Inflazione promessa nulla, aspettative diverse dalle razionali e politica del governo coerente con l'annuncio:

$$\begin{aligned} \pi^E &= 0 \\ \pi &= 0 \\ L &= \frac{1}{2} (\dot{u} - \bar{u})^2 \quad (a) \end{aligned}$$

- 2- Inflazione promessa nulla, aspettative diverse dalle razionali e politica del governo non coerente con l'annuncio:

$$\begin{aligned} \pi^E &= 0 \\ \pi &= \frac{1}{1+\beta} (\dot{u} - \bar{u}) \\ L &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{1+\beta} (\dot{u} - \bar{u})^2 \quad (b) \end{aligned}$$

- 3- Aspettative razionali degli agenti

$$\pi^E = \pi$$

$$\pi = \frac{\dot{u} - \bar{u}}{\beta}$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta}{\beta} (\dot{u} - \bar{u})^2 \quad (c)$$

Risulta che: (c) > (a) > (b)

La perdita maggiore è subita in caso di aspettative razionali. Il governo è a conoscenza di questa situazione, e una soluzione di cui dispone è fissare una regola accompagnata da un vincolo legale per il suo rispetto. In questo modo, probabilmente, non si verificherà una situazione descritta dalla (c).

\* \* \*

Sembra quindi che sia abbastanza difficile per l'autorità far accettare al pubblico la propria strategia di politica monetaria. Una soluzione può essere usare una regola vincolante dal punto di vista legale, introducendola quindi all'interno di una legge o un atto dello stesso stampo.

Tuttavia, anche attraverso una regola potrebbe non raggiungersi un equilibrio ottimale. Si consideri a tal proposito la regola di M. Friedman. Secondo questa soluzione, andrebbe immessa nel sistema una quantità di moneta dell'  $x\%$  annuo, dove  $x$  è fissato all'inizio del ciclo e non deve variare. Dato che l'offerta di moneta è uno strumento a disposizione dell'autorità per raggiungere una stabilità nel sistema, essa può essere considerata come elemento per controllare una certa variabile di interesse. La variabile in questione (per semplicità sarà una sola),  $y_t$  può essere definita dalla seguente espressione analitica :

$$y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \beta m_t + u_t \quad (1.50)$$

Dove  $u_t$  è un disturbo stocastico IID con media 0 e varianza  $\sigma_u^2$  ;  $m_t$  è il tasso di crescita percentuale dell'offerta di moneta;  $\alpha$  ,  $\beta$  e  $\lambda$  sono parametri stimabili ad esempio con una regressione. Un possibile modo per fissare la regola di feedback,  $m_t$  , è esprimerla in funzione del valore passato della variabile obiettivo,  $y_{t-1}$ . La variabile  $y_t$  in generale identifica la variazione percentuale tra il PIL reale e il PIL potenziale, raggiungibile in ottica di pieno impiego dei fattori produttivi . La regola di feedback è:

$$m_t = g_0 + g_1 y_{t-1} \quad (1.51)$$

Sostituendo la regola dentro l'espressione per  $y_t$  si ottiene :

$$y_t = (\alpha + \beta g_0) + (\lambda + \beta g_1) y_{t-1} + u_t \quad (1.52)$$

Il valore atteso di quest'espressione per ogni t (steady-state mean) è pari a:

$$E(y) = \frac{(\alpha + \beta g_0)}{[1 - (\lambda + \beta g_1)]} \quad (1.53)$$

In questo contesto, la regola di politica monetaria viene scelta in modo da minimizzare la varianza di  $y_t$ , e far convergere il valore di  $y_t$  verso un valore obiettivo,  $y^*$ , valore per altro caratterizzato da un livello di variabilità minimo. La varianza di  $y$  è data da :

$$VAR(y) = \frac{\sigma_u^2}{[1 - (\lambda + \beta g_1)^2]} \quad (1.54)$$

Si può notare immediatamente che  $VAR(y)$  assume valore minimo quando  $\lambda + \beta g_1 = 0$ . Risulta così  $VAR(y) = \sigma_u^2$ .

Per quanto riguarda i parametri della regola, essi sono scelti in modo da raggiungere alcuni risultati.

In particolare viene scelto  $g_0$  in modo da avere  $E(y) = y^*$  e  $g_1$  per ottenere la varianza minima per  $y$ .

Dalla condizione di varianza minima deriva  $g_1 = -\frac{\lambda}{\beta}$ ; mentre il valore di  $g_0$  è dato da

$$g_0 = \frac{y^* - \alpha}{\beta}.$$

Attraverso questi parametri, la regola di politica monetaria prevede un valore del tasso di crescita dell'offerta di moneta pari a:

$$m_t = \frac{y^* - \alpha}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta} y_{t-1} \quad (1.55)$$

Tale è il valore della (1.51) esplicitando i parametri. Sostituendo questa formulazione della regola nell'equazione iniziale della variabile obiettivo, la (1.50), si ha che  $y_t$  assume la semplice forma :

$$y_t = y^* + u_t \quad (1.56)$$

Dunque minimizzando la varianza di  $y$  e applicando la regola di fissazione dell'offerta di moneta, si ottiene che la variabile obiettivo è pari al suo valore potenziale a cui va addizionato un termine stocastico. L'applicazione della regola elimina ogni tipo di correlazione seriale per  $y$ , dato che questo è il modo per minimizzare  $VAR(y)$ . Inoltre è da sottolineare che applicando la regola, in ogni istante temporale discreto, l'autorità si aspetta di raggiungere il valore potenziale della variabile obiettivo. Infatti, ad esempio, si ha che risulta:

$$y_t^E = \alpha + \lambda y_{t-1} + \beta m_t$$

Tale previsione è fatta in  $t-1$ , ma può essere estesa come detto a ogni istante temporale, in ogni caso dall'applicazione della regola in poi.

Sostituendo  $m_t$  si ha che il risultato è pari a :

$$y_t^E = y^* \quad (1.57)$$

L'autorità si aspetta in questo modo di raggiungere il livello potenziale della variabile obiettivo. La regola di politica monetaria per questo scopo è quella data dalla (1.55), dove il valore dei parametri  $g_0$  e  $g_1$  è esplicitato.

La regola di Friedman fissa invece un valore dei parametri differente. In particolare il valore di  $g_1$  è posto uguale a zero. Questa fissazione dei parametri differente rende questa regola sub-ottimale rispetto a quella data dalla (1.55) se non si fissa  $\lambda$  uguale a 0. Per capirne il motivo si deve osservare la varianza di  $y$ , data dalla (1.54). Se si pone  $g_1 = 0$  la varianza non raggiungerà il livello minimo, a meno di non porre anche  $\lambda = 0$ .

Dunque una regola che pone i parametri a un livello fisso potrebbe non essere ottimale. La non flessibilità può dunque essere un problema. Definire una regola dove il cambiamento nel valore dei parametri permette di raggiungere un livello migliore di risultati può sembrare più opportuno. In termini pratici si può intendere questo come la modulazione dell'intensità degli strumenti a disposizione dell'autorità, come il controllo dell'offerta di moneta.

Insieme alla Friedman  $x\%$  rule's, il monetarismo sostiene che l'autorità dovrebbe ignorare altre variabili, come ad esempio i tassi di interesse, e concentrarsi esclusivamente sulla crescita monetaria da farsi con un processo come quello appena descritto, oppure con altre opportune modifiche. Una visione in contrasto con questa è che l'autorità monetaria dovrebbe controllare ogni variabile rilevante e rispondere in modo adeguato ad ogni tipo di shock come descritto in Kareken, Muench e Wallace (1973). In particolare gli autori suggeriscono di tenere conto dei seguenti fattori per condurre la politica monetaria in modo adeguato:

- a) La struttura economica è caratterizzata da interazioni tra variabili. Quando avvengono shock che interessano una singola variabile, le variazioni che si registrano in altre sono caratterizzate da simultaneità. Questo non vale per tutte, solo per quelle che sono caratterizzate da una certa volatilità nel breve termine.
- b) Nel sistema sono tuttavia presenti dei ritardi in termini di aggiustamento fra le variabili. Questo significa che gli effetti dei disturbi sono distribuiti nel tempo, e presentano correlazione seriale.
- c) La struttura dei ritardi (che può essere evidenziata da modelli autoregressivi o simili) è costante nel tempo e non dipende dall'autorità monetaria.

Queste considerazioni permettono di fare ulteriori supposizioni, e operare alcune correzioni al modello presentato. Se l'autorità è in grado di osservare delle variabili in modo frequente o addirittura nel continuo, come i tassi di interesse o i prezzi quotati, esse possono essere usate per formulare o modificare ipotesi riguardo altre variabili, osservabili queste ultime solo a intervalli più prolungati. Infatti indicatori come il tasso di variazione del PIL o quello di occupazione/disoccupazione non sono disponibili con frequenza elevata, e, dato che è la loro determinazione e il loro controllo il fine ultimo di una qualunque politica economica, poterle supporre tramite altre variabili è sicuramente un buon risultato. Se i meccanismi di trasmissione generati dagli shocks funzionano correttamente allora si deve tenere conto di questa opportunità. Con riferimento al modello, si ha che una delle assunzioni della regola  $x\%$  di Friedman è che i parametri della forma ridotta,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  sono indipendenti da  $g_0$  e  $g_1$  nella regola di feedback. Come inoltre sostenuto da R. Lucas, la stima dei parametri risente del periodo storico all'interno dei

quali sono stati calcolati. Questo è in realtà è un problema di ogni modello statistico che calcola i parametri con un approccio backward looking; si pensi ad esempio al beta delle azioni. Tuttavia, evidentemente, il periodo usato da Friedman ha fatto risentire parecchio la congiuntura economica nei dati.

Per superare questi limiti, sia qualitativi, per includere altri effetti rilevanti di cui il modello deve tenere conto, sia quantitativi, che prevedono un valore diverso dei parametri utilizzati, le precedenti equazioni possono essere corrette nel modo che viene ora illustrato.

Si consideri una versione modificata della (1.50), data da:

$$y_t = \xi_0 + \xi_1(m_t - E_{t-1}m_t) + \xi_2 y_{t-1} + u_t \quad (1.58)$$

Come prima  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono parametri fissi. La regola di politica monetaria è leggermente differente dalla precedente, in particolare viene inserito al suo interno un disturbo stocastico  $\varepsilon_t$ , IID con media nulla e varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ . Si ha così che la nuova feedback rule è:

$$m_t = g_0 + g_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.59)$$

Il nuovo modello si completa inserendo un'equazione che determina l'aspettativa degli agenti per la politica monetaria. Tale equazione è necessaria perché nella feedback rule è inserito un processo stocastico, di conseguenza il suo risultato non è più esclusivamente deterministico. Questa aspettativa viene formulata dagli agenti in t-1. Si ha dunque:

$$E_{t-1}m_t = g_0 + g_1 y_{t-1} \quad (1.60)$$

Le precedenti equazioni, che insieme formano un sistema, possono essere scritte insieme nella seguente forma ridotta:

$$y_t = (\xi_0 - \xi_1 g_0) + (\xi_2 - \xi_1 g_1) y_{t-1} + \xi_1 m_t + u_t \quad (1.61)$$

Si nota immediatamente che quest'ultima equazione è uguale alla (1.50) con  $\alpha = (\xi_0 - \xi_1 g_0)$ ,  $\lambda = (\xi_2 - \xi_1 g_1)$  e  $\beta = \xi_1$ . Nella (1.61) i coefficienti sono funzioni dirette dei parametri di controllo. Di conseguenza cambiamenti nei parametri della feedback rule avranno ripercussioni immediate nei parametri della (1.61).

Si supponga ora che le autorità vogliano comporre una feedback rule per minimizzare la varianza di  $y$ . Se il pubblico non conosce la regola di politica monetaria data dalla (1.59), perché è stata spiegata male dall'autorità oppure per qualche altro motivo esogeno al modello, ma forma le sue aspettative in base alla (1.60), gli viene riconosciuto il comportamento razionale. Infatti in questo modo gli agenti saranno in grado di stimare correttamente il parametri  $g$  osservando il modo in cui l'autorità si è comportata precedentemente nella conduzione della politica monetaria. In questo modo, anche se la regola non sarà nota, essi riusciranno lo stesso a stimarla.

Sostituendo il valore di  $m_t$  nella forma ridotta e semplificando si arriva a scrivere :

$$y_t = \xi_0 + \xi_2 y_{t-1} + u_t + \xi_1 \varepsilon_t \quad (1.62)$$

Come si può vedere il processo stocastico non interessa  $g_0$  e  $g_1$ . Inoltre se i parametri assumono valori differenti (sono sotto il controllo dell'autorità monetaria), per indicare ad esempio una contrazione di moneta piuttosto che un'espansione, anche gli agenti formuleranno in modo differente le loro aspettative. I parametri della forma ridotta dipendono sia dal modo in cui le aspettative degli agenti sono correlate con i disturbi stocastici, sia dal modo in cui gli agenti pensano si comporterà l'autorità monetaria. Il fatto di creare della dipendenza fra i parametri fa in modo che le aspettative riescano a catturare le possibili variazioni nella politica monetaria.

La (1.60) descrive dunque l'aspettativa razionale degli agenti e la sua aggiunta modifica il modello rispetto al precedente, dove gli agenti prendono ogni regola come data. La relazione che sussiste fra la (1.59) e la (1.60) fa in modo che gli agenti riescano sempre (in media) a prevedere la regola di politica monetaria; dunque ogni modifica nei parametri  $g_0$  e  $g_1$  della (1.59) verrà riflessa negli stessi parametri della (1.60).

#### 1.4 – Nuova macroeconomia classica e critiche alle aspettative razionali

La teoria delle aspettative razionali è inserita all'interno della Nuova Macroeconomia Classica. È infatti questa teoria il primo filone di pensiero a ipotizzare la fluttuazione delle variabili economiche, sia nel breve che nel lungo periodo. Essa nasce da una sostanziale rottura con il pensiero economico dell'epoca, intorno al 1970, (l'articolo di Muth sulle aspettative razionali è tuttavia del 1961) avvenuta con la famosa critica di Lucas. Essa, come si ha avuto modo di discutere precedentemente, è sostanzialmente rivolta ai modelli econometrici, e al loro modo di stima dei parametri.

Lucas, con Sargent e Wallace, tutti economisti premio Nobel, sono i principali esponenti di questa teoria economica. Nei paragrafi precedenti si sono usate molte ipotesi della NMC senza tuttavia presentare la teoria, e ora, prima di proseguire con la parte che riguarda la critica al modello di aspettative razionali, pare opportuno presentare, seppur brevemente, la teoria economica all'interno della quale le aspettative razionali occupano un ruolo di primo piano.

Le ipotesi della NMC su cui si basa la teoria sono le seguenti:

*Efficienza dei mercati:* i prezzi sono di per sé la principale delle fonti informative disponibili e sono perfettamente flessibili. Data la piena flessibilità i prezzi si adattano sempre per uguagliare domanda e offerta, di conseguenza per ogni prezzo esisteranno quantità di domanda e offerta di equilibrio e non si creeranno eccessi di quantità (questo è vero per i mercati finanziari liquidi come le borse, dove, a meno di transazioni eccessivamente elevate, un ordine di acquisto o vendita verrà sempre eseguita a un prezzo di equilibrio a meno di un bid-ask spread minimo).

*Il sistema è caratterizzato da agenti con aspettative razionali:* le scelte di tali agenti verranno effettuate condizionatamente alla massimizzazione di una funzione di utilità. In questo senso i consumatori minimizzeranno la spesa per ogni livello di utilità desiderabile e gli imprenditori minimizzeranno i costi al fine di raggiungere il massimo profitto.

Un'ulteriore ipotesi, che consente di usare strumenti analitici differenti dal passato, è l'introduzione di disturbi stocastici. Tali termini di errore, che sono interpretabili come possibili deviazioni dagli equilibri teorici a cui arriverebbe un modello prettamente deterministico, vengono usati sia per perfezionare la trattazione analitica della politica monetaria, e quindi qualsiasi modifica che può avvenire all'interno del livello dei prezzi nominale, sia per introdurre shocks nella produzione.

L'utilizzo di processi stocastici influenza la trattazione degli equilibri, facendo in modo che non possano raggiungersi situazioni di pieno utilizzo dei fattori produttivi o periodi in cui l'occupazione sia perfettamente uguale al suo tasso naturale. Questo perché a livelli di prezzo differenti si avranno situazioni in cui domanda e offerta si incontreranno da sole, in funzione dell'efficienza dei mercati e del modo in cui gli operatori processeranno l'informazione. Dunque si può così parlare di equilibri continui, non di lungo periodo o di piena occupazione. La discriminante di questa nuova ipotesi (equilibri continui) è quindi l'osservazione di prezzi perfettamente flessibili. La flessibilità garantirà sempre un equilibrio, ma proprio per la natura stocastica delle variazioni di prezzo, esse saranno soggette a variabilità, e di conseguenza a continue mutazioni. L'incontro tra domanda e offerta è tuttavia dato dall'informazione di cui dispongono gli agenti, che coscienziosamente attribuiscono a una particolare transazione (di consumo, di investimento) un controvalore monetario. Gli equilibri si modificano in seguito all'interpretazione dei segnali di mercato o di altro da parte degli agenti, che faranno così cambiare le schede di domanda e di offerta degli operatori, dando tuttavia vita a nuove situazioni di stabilità. Gli shocks stocastici sono introdotti proprio per trattare questo aspetto di variabilità intorno a un valore di convergenza possibile dato da una trattazione analitica deterministica. Se ci può essere consenso unanime sulle relazioni di causa-effetto tra le variabili economiche, i processi stocastici modulano gli effetti dei possibili risultati ottenibili in una condizione di incertezza, condizione che è doverosa ipotizzare in un sistema composto da un complesso concatenamento di relazioni fra grandezze macro e grandezze micro, dove, dopotutto, l'aspetto psicologico umano ha un ruolo di primo ordine.

Un'altra ipotesi della NMC, usata peraltro da Lucas nel suo modello che ripercorre il paradigma delle isole di Phelps, è quella dell'esistenza di imperfetta informazione. In tale contesto gli imprenditori sono a conoscenza del prezzo che applicano essi alla propria produzione ( $p_{t(z)}$  del modello di Lucas), tuttavia non conoscono il prezzo applicato dai concorrenti e di conseguenza il livello dei prezzi generale. Essi sono tuttavia in grado di stimarlo. Questa ipotesi può essere oggetto di discussione. Infatti tenendo conto dell'efficienza dei mercati e di come sono state presentate le aspettative razionali nella sezione precedente, l'esistenza di asimmetria informativa (che nel modello di Lucas genera confusione tra gli imprenditori per quanto riguarda il prezzo da applicare, portando così la politica monetaria ad avere effetti reali nel breve periodo) può essere vista in contrasto con questa assunzione. Infatti le aspettative razionali presumono l'esistenza di un set informativo efficiente e costoso, con cui gli agenti stimano le variabili non osservabili, o osservabili solo in un periodo a posteriori, e quindi di manifestazione successiva alla loro utilità. Probabilmente la NMC presume la non perfetta conoscenza di alcune variabili (asimmetria informativa in questo senso) tipo il livello generale dei prezzi, da parte degli agenti, ma essi tuttavia risolvono questo problema con il comportamento razionale; quindi, in media, riusciranno a ottenere il valore corretto della variabile oggetto di stima. La non osservazione del prezzo dei concorrenti e il concetto di mercati efficienti, dove per definizione i prezzi sono disponibili e racchiudono informazione, possono essere forse fatte coesistere offrendo una spiegazione nei seguenti termini: nel modello di

Lucas i prezzi sono fissati dagli imprenditori in modo simultaneo e periodo per periodo. Di conseguenza gli imprenditori possono osservare i prezzi concorrenti una volta fissato anche il loro, che a quel punto sarà dato e non mutabile fino al prossimo periodo. Per il futuro invece, quello che è importante sarà il prezzo medio atteso, che gli imprenditori sono in grado di stimare a meno di un errore. La produzione totale sarà a quel punto scambiata al prezzo medio, e questo vale per qualsiasi epoca. In generale per l'epoca successiva il prezzo medio verrà stimato sulla base di quello corrente e di un termine di errore. Anche per i mercati efficienti vale questa ipotesi. Infatti se il prezzo corrente è rappresentativo dell'informazione corrente e passata ed è equo, il prezzo futuro potrà essere stimato sulla base di quello corrente e di un disturbo stocastico.

Conclude la costruzione delle fondamenta della NMC l'ipotesi di aspettative razionali, di cui si è ampiamente discusso.

Queste sono le basi concettuali che hanno dato vita alla NMC, e che, soprattutto grazie al contributo di Lucas, hanno fatto in modo che dagli anni '70 in avanti, un modello macroeconomico abbia un'adeguata microfondazione.

\* \* \*

La letteratura successiva produce una serie di modelli che hanno tre caratteristiche principali:

- 1- Gli operatori economici risolvono l'incertezza con l'utilizzo di aspettative razionali;
- 2- Le equazioni che descrivono le variabili aggregate, come domanda e offerta, sono derivate come soluzioni di problemi economici micro, come quello del consumo per le famiglie e quello del profitto per le imprese (questa è l'evoluzione naturale della microfondazione à la Lucas);
- 3- Gli output interessano l'intero sistema economico, con equilibri che comprendono tutti i mercati.

Tali modelli della NMC sono noti come modelli economici del ciclo reale (RBC). Le idee alla base della loro strutturazione sono che i mercati riescono a raggiungere un equilibrio, che la moneta è neutrale e che le fluttuazioni seppur stocastiche seguono cicli, e sono causate principalmente da cambiamenti nella produttività dei fattori. Successivamente ai modelli RBC, conservando alcune ipotesi ma assegnando un ruolo diverso alla politica monetaria, sono i modelli della nuova macroeconomia keynesiana. In particolare questa serie di modelli tenta di dimostrare, fra le altre, come cambiamenti nella politica monetaria possano avere effetti reali se diverse tipi di agenti effettuano aggiustamenti di prezzo differenti; in particolare se gruppi di operatori effettuano aggiustamenti di prezzo gradualmente e altri gruppi non effettuano variazioni ai prezzi praticati.

I modelli principali di questi due nuovi filoni di pensiero sono il modello di Real Business Cycle di base e il Modello Neokeynesiano Dinamico (DNK). L'obiettivo comune fra i due è spiegare la maggior parte delle fluttuazioni cicliche che caratterizzano i sistemi economici. Tali modelli si differenziano dai precedenti perché, tra le altre ipotesi, prevedono l'uso di aspettative razionali e di disturbi stocastici. In entrambi i modelli gli operatori, imprese e consumatori, operano in condizioni di incertezza e la risolvono attraverso le aspettative razionali. Inoltre essi massimizzano le loro funzioni di utilità: una funzione di consumo per le famiglie e una funzione di profitto per le imprese. Tali modelli si sono dimostrati in grado di spiegare la volatilità della produzione (King, Rebelo 2000) e le caratteristiche dinamiche del ciclo economico, e nel caso del DNK, anche la relazione fra output, politica monetaria e inflazione; tuttavia mostrano anche alcuni limiti, come

l'eccessiva semplicità del sistema economico, la Pareto-efficienza delle fluttuazioni, e alcune implicazioni relative alla delega o meno del potere monetario a un banchiere centrale indipendente

\* \* \*

Anche se il RBC è un modello degli anni '80, il DNK degli anni '90 e si è incominciato a parlare di aspettative razionali già nel 1961, il fatto che questa 'nuova' classe di modelli abbia tra le sue assunzioni fondamentali l'uso di aspettative razionali per offrire una trattazione sia qualitativa che analitica del comportamento degli agenti, ha reso opportuno richiamare in modo breve quelli che sono stati i principali prodotti della NMC, spiegando come la predetta teorie sulle aspettative si sia potuto inserire all'interno di modelli macroeconomici generali coesistendo con altre ipotesi relative alla trattazioni delle principali variabili macroeconomiche utilizzate. Tuttavia la teoria delle aspettative razionali, seppur superando gran parte dei precedenti limiti riscontrati dalle precedenti adattive, come la produzione di previsioni esclusivamente sviluppate in modo backward-looking, non è stata esente da critiche, che non l'hanno mai resa una teoria totalmente accettata dalla comunità economica, anche se la maggior parte dei nuovi modelli presenta traccia di un suo utilizzo. Di seguito si discute delle principali critiche mosse alla teoria, che possono a grandi linee dividersi in critiche alle proprietà statistiche del modello e critiche all'effettivo comportamento degli agenti.

\* \* \*

Un primo punto riguarda il set informativo. Come si è detto, il set è costruito avendo come riferimento il vero modello dell'economia, ossia la modellizzazione teorica esatta del sistema economico. Il set informativo degli agenti contiene tutti i valori passati delle variabili del modello, le equazioni che lo descrivono, i parametri e la distribuzione di probabilità degli errori. Esso può essere inteso come un complesso e completo database in continuo aggiornamento. Inoltre dato che gli agenti sono razionali e volti alla massimizzazione delle proprie funzioni di utilità e sono in grado di stimare il vero modello in modo corretto, avranno tutti lo stesso set informativo. Una conclusione analoga si trova peraltro nell'ambito dell'asset pricing nel Capital Asset Pricing Model, dove, alla luce delle assunzioni teoriche fatte, tutti gli investitori si trovano a detenere il medesimo portafoglio di asset. Dato che questa della costruzione del set 'perfetto' è un'ipotesi teorica, essa è criticata nelle applicazioni pratiche, supponendo che cosa potrebbe succedere se gli agenti non avessero la medesima quantità e qualità di informazioni, cosa molto probabile in realtà. Dato che la costruzione del set presume da un lato costi, monetari e di dotazione di tempo, e dall'altro un'esperienza degli agenti tale da 'filtrare' quello che può essere importante ai fini dell'analisi da quello che invece può essere scartato, è normale assumere che l'informazione a disposizione degli agenti sia differente. Inoltre è probabile che gli operatori non siano d'accordo fra loro su quella che è definibile 'informazione rilevante'. Di conseguenza quella che per una persona può essere una buona fonte informativa per trovare soluzioni a un particolare problema, per un'altra può essere poco chiara e non funzionale all'analisi, di conseguenza essere scartata; oppure può essere riconosciuta la validità dell'informazione o di un modello ma preferire altro. Alla luce di ciò è lecito presumere che i set informativi possano essere differenti. Questo punto è stato storicamente affrontato attraverso quello che è definito apprendimento razionale. I sostenitori delle aspettative razionali ammettono che sia possibile che sorgano problemi, come quelli sopracitati, per la costruzione del set. Tuttavia essi ritengono che, e questo è semplice da supporre, quei particolari operatori economici che non saranno riusciti a definire un set informativo adeguato, in termini di efficienza, saranno costretti a

commettere sistematici errori di previsione. Detto ciò, una volta essersi resi conto delle errate ipotesi, essi rivedranno il loro set e effettueranno le opportune modifiche affinché le previsioni possano risultare corrette. In questo modo si avrà apprendimento razionale, e le aspettative saranno in media corrette.

Proseguendo, si pone il problema della difficile prevedibilità del futuro, intesa proprio come una misura di incertezza sul comportamento dell'economia con cui gli operatori devono scontrarsi nella realtà. Questo punto è risolto dalla teoria economica usando concetti come comportamento razionale, massimizzazione dell'utilità, efficienza del set informativo, e percezione corretta dei fenomeni economici; tuttavia gli strumenti a disposizione degli agenti per agire in modo corretto possono essere molto più limitati del previsto. Il problema dell'incertezza è affrontato, sul piano metodologico, usando la statistica e in particolare le serie storiche. Infatti dato che l'aspettativa razionale altro non è che il momento primo condizionato dal set informativo,  $E(x|I_{t-1})$ , la conoscenza di questo risultato presuppone la conoscenza del processo stocastico di  $x$ . Dato che un processo stocastico può essere inteso come l'insieme della variabili casuali che caratterizzano la distribuzione di  $x$  indicizzate dal tempo, conoscere un'aspettativa condizionata può rivelarsi abbastanza complicato. Quindi dopo una prima questione mossa alle possibile composizione che potrebbe avere il set informativo,  $I_{t-1}$ , ora il problema (risolto per il set solo con un'argomentazione teorica) si sposta all'altra componente dell'aspettativa condizionata, ossia la variabile da stimare,  $x$ . Il problema è serio, ed è relativo alla possibilità di fare inferenza statistica su variabili estraibili unicamente da serie storiche. La questione nasce dalla differenza che sussiste tra l'inferenza statistica comune, cioè quella fatta su dati cross-section, e l'inferenza statistica (più complicata e non sempre possibile) fatta sulle serie storiche. La spiegazione tra i due diversi tipi di dati è la seguente: i dati cross-section sono caratteri, qualitativi e/o quantitativi, raccolti con riferimento a una particolare popolazione. Generalmente i caratteri non sono molto numerosi in rapporto alla popolazione, possono arrivare al massimo a qualche decina, mentre la popolazione può contare migliaia di unità. Le serie storiche invece sono numerose osservazioni di una o di un gruppo di variabili. Sono le manifestazioni passate di una o più variabili identificate.

Fare inferenza statistica equivale a fare test di ipotesi, ossia verificare con quanta probabilità l'ipotesi può trovare riscontro nella realtà. Una caratteristica fondamentale per fare inferenza è avere campioni casuali, ossia gruppi di riferimento dove le caratteristiche delle unità siano fra loro indipendenti. Statisticamente significa riscontrare IID, acronimo già usato in precedenza come indipendenza e identica distribuzione. È chiaro che caratteri come il colore degli occhi, il sesso o il numero dei componenti del nucleo familiare possano essere giudicati IID in una popolazione di individui; tuttavia è molto più difficile asserire che le variazioni trimestrali del PIL o le variazioni annuali del livello generale dei prezzi siano fra loro indipendenti. Dato che le aspettative hanno come oggetto variabili che sono la manifestazione del concetto teorico che ha originato la disciplina delle serie storiche, è opportuno evidenziare come possa farsi una loro stima corretta, o almeno imporre dei limiti teorici e accontentarsi a questo punto di approssimazioni.

Un'estrazione di una variabile da una serie storica non ha probabilmente la stessa distribuzione (si pensi alla distribuzione del rischio di credito in un periodo di crisi rispetto a un periodo normale) della stessa variabile in un altro periodo e potrebbe anche avere una qualche dipendenza da altre estrazioni, se non altro quelle temporalmente più vicine. Questo significa che le singole estrazioni possono far riferimento a processi diversi fra loro (e sconosciuti) e anche avere una qualche forma

di dipendenza. Queste considerazioni rendono impossibile, alla luce della teoria probabilistica, poter ricostruire il processo stocastico teorico che genera la variabile di interesse. Non conoscendo il processo che genera  $x$  è alquanto improbabile pensare di ottenere la sua aspettativa condizionata,  $E(x|I_{t-1})$ . Al contrario, se  $x$  fosse IID si potrebbe usare una versione della legge dei grandi numeri per ottenere la sua aspettativa (dimostrazione riportata in appendice al capitolo). Tuttavia se un processo presenta caratteristiche di stazionarietà, ossia se le manifestazioni della variabile oscillano tutte intorno a un valore centrale, alcuni risultati dell'inferenza statistica possono essere usati anche dalle serie storiche. Analiticamente un processo stocastico è stazionario (in senso debole) se l'aspettativa è identica per tutte le manifestazioni,  $E(x_t) = E(x) = \mu$  e l'autocovarianza è finita per ogni osservazione e indipendente dal tempo,  $COV(x_t, x_{t-j}) < \infty$  per ogni  $j \geq 0$ . Tuttavia in questo caso lo stimatore sarebbe solo non distorto, e potrebbe essere non consistente. La consistenza si può spiegare dicendo che, aumentando la numerosità campionaria, le caratteristiche del campione possono essere estese alla popolazione. Con riferimento ai processi stocastici, la consistenza dello stimatore ha a che fare con una proprietà definita ergodicità. Più precisamente un processo stocastico è ergodico a un dato istante temporale se la sua stima temporale converge in media quadratica a un certo parametro, e la correlazione seriale converge a zero al crescere delle manifestazioni temporali. In altri termini aumentando le osservazioni viene ad annullarsi l'autocorrelazione. Non avere autocorrelazione non è sinonimo di non avere dipendenza seriale, tuttavia è sempre meglio di niente (la correlazione presume una forma di legame lineare, la dipendenza di qualsiasi legame). Di conseguenza l'ergodicità prevede che l'autocorrelazione venga rimossa col crescere delle osservazioni, quindi con il passare del tempo.

In questo contesto, a differenza di altri casi dove è preferibile avere una non distorsione dello stimatore, la proprietà ricercata è quella della consistenza. Si ha dunque consistenza dello stimatore solo se il vero processo stocastico seguito dalla variabile di interesse, rappresentata da una o più variabili casuali a seconda dell'istante temporale di osservazione (di fatto la definizione di processo stocastico) è ergodico. Pertanto l'ergodicità è una condizione sufficiente affinché si possano derivare aspettative corrette dal punto di vista statistico, tuttavia, si sottolinea nuovamente, è necessario conoscere il 'vero' processo teorico seguito dalla variabile di interesse. Avere stazionarietà è una condizione necessaria ma non sufficiente, dato che non implica non correlazione seriale.

Il fatto che l'utilizzo del modello di aspettative razionali possa produrre stimatori, e quindi aspettative degli eventi, non consistenti, pone problemi sul piano computazionale. Una volta definito il comportamento della variabile di interesse, è necessario che possa essere approssimato da un processo statisticamente trattabile. Successivamente devono essere verificate le condizioni sulla sua autocorrelazione, che deve decadere temporalmente. Con riferimento a variabili economiche reali, questo potrebbe essere osservabile in intervalli di tempo limitati, nel senso che l'autocorrelazione potrebbe gradualmente azzerarsi, tuttavia per poi presentarsi nuovamente in condizioni macroeconomiche differenti. Si pensi ad esempio all'occupazione in un sistema economico che ha conosciuto un'espansione dovuta a un'innovazione tecnologica o a qualche manovra di politica monetaria, come magari una svalutazione competitiva. Successivamente all'espansione il sistema potrebbe trovarsi in un periodo di stazionarietà, dove le principali variabili economiche hanno una crescita modesta, e quelle monetariamente misurabili una crescita perlopiù nominale. In quest'ottica l'occupazione, o meglio la variazione percentuale del tasso di occupazione, potrebbe muoversi intorno a zero, e avere un'aspettativa tendente a un valore nullo.

Le ragioni della disoccupazione esistente nel sistema potrebbero essere collegate interamente alle motivazioni intrinseche dei soggetti, come ad esempio il non lavorare per la mancanza di un impiego ricercato date le competenze, oppure per un problema di retribuzioni; in ogni caso la disoccupazione non dipenderebbe in modo significativo dalla congiuntura economica. In questa stilizzazione della realtà si può ragionevolmente supporre che il tasso di occupazione presenti un'autocorrelazione prossima a zero, dato che il disturbo non sistematico (che cattura la specificità dei singoli soggetti) è tendente a zero con il crescere della numerosità delle osservazioni. Se si prendesse come periodo temporale dunque il periodo economicamente stazionario, si sarebbe portati a concludere che il processo stocastico seguito dall'occupazione ha natura ergodica, e quindi sarebbe idoneo per produrre stimatori non distorti. Tuttavia, successivamente, il sistema potrebbe attraversare una fase di stagnazione, innescata ad esempio, da una stretta creditizia bancaria dovuta ad adeguamenti nel patrimonio delle istituzioni finanziarie imposti da un insieme di nuove regole. In quest'ottica, date le strette relazioni che il sistema del credito ha con l'economia in generale, la disoccupazione potrebbe salire gradualmente, mostrando chiari segnali di una correlazione seriale. Si comprende come dell'inferenza fatta su questo campione temporale produca risultati differenti dal uso del campione precedente, questo perché a questo punto l'occupazione risulterà meglio approssimata da altre distribuzioni, con parametri diversi rispetto a quelle utilizzabili per descriverla in un periodo stazionario.

Un altro punto che merita una citazione è il fatto che le aspettative razionali eguagliano un evento soggetto a incertezza a un evento possibile e statisticamente trattabile. In altre parole presumono che a qualsiasi evento (in un contesto economico) possa essere assegnata una probabilità oggettiva. Probabilmente il primo, se non altro per la documentazione diffusa, a mettere in luce questo punto fu Keynes. Egli sosteneva che gli eventi possibili sono quelli per cui è nota la probabilità oggettiva, per cui all'insieme delle manifestazioni di un evento è possibile assegnare una distribuzione di probabilità. Questi eventi sono quelli come il lancio di un dado, l'estrazione di una pallina da un'urna o il gioco della roulette. Gli eventi incerti sono invece quelli per cui non è conoscibile a priori una probabilità. Essi raggruppano, tra gli altri, il comportamento umano e la prevedibilità delle variabili economiche. Per questi accadimenti, anche una ragionevole quantità di dati può non fornire un'adeguata probabilizzazione degli eventi futuri. Si pensi al prezzo delle azioni. Le serie storiche non consentono ai cultori dell'analisi tecnica di fare profitti superiori alla media. Se ciò fosse possibile, molti strumenti derivati non avrebbero mercato. Dato che in economia il comportamento dei soggetti muta proprio in risposta alla prevedibilità di queste categorie di fenomeni, è per sua natura incerto, e una sua eventuale modellizzazione dovrebbe tenere conto di così tante variabili (la maggioranza che tengano conto delle caratteristiche intrinseche dei soggetti) da essere impossibile dal punto di vista computazionale. Scrive Keynes nel 1972 e successivamente nel 1979 in difesa alla teoria generale:

*“Se [...] la nostra conoscenza del futuro fosse calcolabile e non soggetta a improvvisi cambiamenti [...] si potrebbe ragionevolmente supporre che sia di regola impiegato l'intero volume delle risorse disponibili e le condizioni richieste dalla teoria ortodossa sarebbero soddisfatte [...].*

*La teoria ortodossa considera che noi si abbia un tipo di conoscenza del futuro completamente diversa da quella che abbiamo in realtà. Questa erronea considerazione (razionalizzazione) segue le linee del calcolo di Bentham: l'ipotesi di un futuro calcolabile conduce ad un'erronea interpretazione dei principi del comportamento. [...] Il risultato è stato una teoria errata incapace*

*di studiare il caso generale nel quale il livello dell'occupazione è soggetto a fluttuazioni". [...] In un mondo di incertezza, l'equilibrio statico in verità non esiste".*

L'equilibrio statico in quest'ultima frase (di un altro intervento del 1979) è riferita a processi economici che si presentano in modo ergodico. Keynes sostiene quindi che uno dei principali strumenti di cui si avvalgono le aspettative razionali non si trovi nella realtà.

\* \* \*

Un modo per tentare di dare una maggior veridicità alle previsioni è quello di limitare l'incertezza, e, in questo contesto, diminuire la variabilità delle determinanti dell'economia. Una soluzione al problema proposta dagli stessi economisti della NMC è quella di incrementare il grado di razionalità degli agenti economici. Questo significa aumentare ancora di più l'informazione, i metodi per la ricerca di quella qualitativamente migliore e diffondere standard riconosciuti per determinare quale tipo può servire all'analisi e quale invece può essere scartato. Inoltre sviluppare ulteriormente la ricerca nei campi collegati, su cui poggia la gran parte della teoria, come la statistica e altre discipline quantitative. In questa idea di maggior sviluppo forse si riuscirà a costruire stimatori corretti della realtà e utilizzabili con il minimo margine di errore. Diversamente, presupponendo che questo grado di informazione e razionalità non è possibile in realtà e forse neanche approssimabile dai modelli, un modo per limitare l'incertezza è quello di accrescere i poteri e i campi di azione delle istituzioni. In questa differente soluzione di chiaro stampo keynesiano, il controllo degli strumenti e il coordinamento degli interventi da parte delle autorità preposte potrebbe influire sul comportamento degli agenti, facendo in modo che essi riescano ad agire in contesti a incertezza minima. Tuttavia in quest'ottica si porrebbe nuovamente il problema di un interventismo discrezionale e lasciato alla capacità dei governanti o delle istituzioni da essi costruite, o imposto da regole che circoscrivano le aree di azione, le tempistiche e gli strumenti da utilizzare, in modo che gli agenti riescano a farsi un'idea di come potrebbero venir affrontati i problemi.

Queste sono le principali critiche mosse alla teoria delle aspettative razionali. Le prime furono mosse da autori quali Keynes, Hicks, Simon e altri e la resero fin da subito, poco dopo il suo sviluppo, una teoria non universalmente accettata, anche se ritenuta da altri economisti (principalmente quelli legati alla sua diffusione) una buona teoria che occupa un posto centrale nella teoria economica.

APPENDICE AL CAPITOLO I – Legge debole dei grandi numeri per successioni IID<sup>4</sup>

Enunciato:

Se  $\{z_j\}$  con  $j=1,2,\dots,n$  è una successione IID e si ha  $E(z) < \infty$  allora risulta che

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j \xrightarrow{p} E(z)$$

Dimostrazione:

Sia  $S_n = \sum_{j=1}^n z_j$  e si consideri  $E(e^{itS_n})$  con  $i \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e sia  $E(e^{itS_n}) = \Phi_{S_n}(t)$  funzione caratteristica di  $S_n$  (funzione di  $t$ ).

Per le proprietà di indipendenza e identica distribuzione si può scrivere

$$E(e^{it \sum_{j=1}^n z_j}) = E\left(\prod_{j=1}^n e^{itz_j}\right) = \prod_{j=1}^n E(e^{itz_j}) = \prod_{j=1}^n \Phi_{z_j}(t) = \left[\Phi_{z_j}(t)\right]^n$$

Usando il logaritmo:

$$n \ln \Phi_z(t) = \ln \Phi_{S_n}(t)$$

Si consideri ora lo sviluppo in serie di una generica funzione intorno a zero. La generica funzione  $f(t)$  si può scrivere come:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt^n} f(t) \Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!}$$

Si usi la funzione  $\ln \Phi_z(t)$  espandendola in serie solo per i primi due termini:

$$\ln \Phi_z(t) = \ln \Phi_z(t) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} \ln \Phi_z(t) \Big|_{t=0} t + o(t)$$

L'ultimo termine, "o piccolo di t" è un valore che converge a zero velocemente, e lo si può usare per rappresentare i termini della serie dal terzo compreso in poi.

Secondo le proprietà della funzione caratteristica vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{d}{dt^n} \Phi_x(t) = i^n E(x^n) \quad n=0,1,\dots$$

I termini che interessano assumono dunque i seguenti valori:

<sup>4</sup> Dimostrazione interamente basata sulle lezioni di *Serie storiche* dell'anno accademico 2014/2015, LUISS Guido Carli

$$n=0 \quad \Phi_z(t)|_{t=0} = E(e^{iz})|_{t=0} = 1$$

$$n=1 \quad \frac{d}{dt} \Phi_z(t) = iE(z)$$

sostituendo nell'espansione di  $\ln \Phi_z(t)$  :

$$\ln \Phi_z(t) = \ln(1) + iE(z)t + o(t)$$

Dato che interessa  $n \ln \Phi_z(t)$  si ha:

$$n \ln \Phi_z(t) = niE(z)t + no(t)$$

Si vuole ora determinare una nuova funzione tale per cui valga la seguente scrittura:

$$x \xrightarrow{\lim} \infty \quad f\left(\frac{t}{x}\right) < \infty \quad \text{ossia occorre che il limite di questa funzione sia finito.}$$

Usando  $n$  al posto di  $x$  e  $\ln \Phi_{S_n}$  al posto di  $f$  si ottiene:

$$n \xrightarrow{\lim} \infty \quad \ln \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) < \infty$$

In base a quanto appena scritto e dato che  $n \ln \Phi_z(t) = \ln \Phi_{S_n}(t)$  si può scrivere:

$$\ln \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = niE(z)\frac{t}{n} + no\left(\frac{t}{n}\right)$$

Il cui limite è:

$$n \xrightarrow{\lim} \infty \quad \ln \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = iE(z)t$$

Togliendo il logaritmo si ha (si noti la somiglianza fra l'ultimo termine e l'argomento della funzione caratteristica):

$$n \xrightarrow{\lim} \infty \quad \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{iE(z)t}$$

Dato che per la definizione di funzione caratteristica si ha:

$$\Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = E\left(e^{iS_n \frac{t}{n}}\right)$$

e che considerando il limite si ha

$$n \xrightarrow{\lim} \infty \quad E\left(e^{iS_n \frac{t}{n}}\right) = e^{iE(z)t}$$

Da questa scrittura si può ricavare agevolmente che:

$$n \xrightarrow{\text{lim}} \infty \frac{S_n}{n} = E(z)$$

E ricordando che  $S_n = \sum_{i=1}^n z_i$

Si ha che:

$$n \xrightarrow{\text{lim}} \infty \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = E(z) \text{ nel limite con } n \text{ molto grande}$$

Assumendo che  $n$  sia grande a sufficienza si può scrivere che:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \xrightarrow{p} E(z)$$

Cioè che la sommatoria della successione divisa il numero degli elementi della successione *converge in probabilità* al momento primo di popolazione, ossia il valore di aspettativa.

## CAPITOLO II – Apprendimento adattivo e politica monetaria

### 2.1 – Introduzione

Nei problemi di politica monetaria studiati e approfonditi dalla letteratura economica le aspettative del settore privato spesso hanno un ruolo. Esistono diversi tipi di regole di politica monetaria a seconda dell'orientamento del policy maker, e sovente le aspettative hanno caratterizzato le variabili dipendenti, condizionando così le scelte del policy maker. Nella sezione precedente si è vista un'applicazione delle aspettative razionali alla politica monetaria, dove Kareken, Muench e Wallace hanno sviluppato un semplice modello sulla base della sub-ottimalità della regola di Friedman. Usando le aspettative razionali essi hanno risolto alcuni punti lasciati in sospeso, come la simultaneità nella determinazione delle variabili e la capacità di stima della policy rule da parte degli agenti.

Le aspettative razionali hanno occupato un posto centrale dagli anni settanta in poi, e sono un punto di riferimento nella teoria economica. Esse rappresentano una modellizzazione delle ipotesi fatte dagli agenti economici e sono date analiticamente dalla speranza matematica delle variabili su cui operano. Esse compongono un framework utilizzabile in diverse applicazioni economiche, soprattutto nella macroeconomia e nella risoluzione di problemi di politica monetaria. Tuttavia dati alcuni limiti di cui soffrono, diversi autori, anche tra i principali rappresentanti della Nuova Macroeconomia Classica, hanno fornito diverse chiavi di lettura delle aspettative razionali e modalità alternative di formulare ipotesi, attribuendo agli agenti economici una razionalità più limitata. L'oggetto in cui la limitazione trova estrinsecazione è principalmente un set informativo ridimensionato per il contenuto e per la capacità di costruzione di esso. Si riconosce come nella realtà gli operatori economici siano condizionati da numerosi limiti e costi nella fase di ricerca e costruzione del set informativo. Questi costi, sia monetari che cognitivi influenzano il processo di aspettativa condizionando l'esito finale, allontanandolo da quella che è una percezione esatta dell'evento in questione (Sargent 1999, Evans and Honkapohja 2001, Sims 2001). I costi monetari sono evidenti, e sono rappresentati principalmente dal tempo di ricerca e tutti quelli che concernono l'ottenimento dell'informazione. I costi cognitivi sono da ricercare nel modo in cui gli agenti processano l'informazione e nella difficoltà in cui possono incorrere nella loro estrapolazione dal mondo circostante; su questo punto centrali sono i lavori dell'economista-psicologo H. Simon e il paradigma della razionalità limitata (Simon 1956, 1985, 1987, 2000). Lo stesso Muth e successivamente Lucas e Prescott hanno sottolineato come le aspettative razionali siano da considerare una relazione di equilibrio che porta il sistema economico all'*equilibrio di aspettative razionali* (Rational Expectations Equilibrium, REE). Esse rappresenterebbero una condizione successiva non il punto di partenza, e andrebbero interpretate come il risultato di un non specificato processo di apprendimento messo in pratica dagli agenti economici (Muth 1961, Lucas and Prescott 1971, Lucas 1975). Tuttavia inizialmente si riconosce solo questa possibilità, non è formalizzato un vero e proprio modello che dimostri la convergenza di un processo di apprendimento verso le aspettative razionali. Townsend (1978) dimostra che in linea teorica una economia dove gli operatori economici seguono un metodo di apprendimento adattivo converge, sotto opportune

condizioni, ad una economia con aspettative razionali. Nel suo modello viene usata l'inferenza di Bayes, e tramite le informazioni passate vengono stimati i parametri incogniti, permettendo così di raggiungere REE. Successivamente diversi autori si occuperanno di apprendimento adattivo e di convergenza a REE (Evans and Honkapohja 1993, 2000, 2008 Orphanides 2000, 2002 Bullard and Mitra 2000 et al.).

Dunque in realtà le linee guida per una potenziale deviazione, intesa come limitazione, dalla razionalità, vengono fornite dagli stessi economisti e ricercatori che hanno definito e sostenuto le aspettative razionali. L'esistenza della possibilità di una forma di razionalità limitata ha dato origine ad una ricerca di possibili alternative. Il precedentemente citato paradigma della razionalità limitata si colloca tra la disciplina economica e psicologica, così come la produzione letteraria "Heuristic and Biased" ad opera degli psicologi Kahneman and Tversky, basata su una serie di risultati sperimentali che hanno dato origine al ramo conosciuto come Economia Comportamentale. In campo esclusivamente economico l'apprendimento adattivo è una delle ipotesi di maggior interesse per quanto riguarda la deviazione dalla razionalità. Anche in questo caso è più corretto definire "limitazione" della razionalità, dato che gli agenti economici sono potenzialmente razionali e sotto opportune condizioni il loro apprendimento converge alle aspettative razionali e dunque il sistema economico raggiungerà il REE. Se le teorie economico-psicologiche sviluppano metodi differenti dalle aspettative razionali con conseguente impossibilità di sfruttare l'impianto analitico in cui esse trovano fondamento, (ci si riferisce principalmente a metodologie euristiche, i.e. Euristiche Adattive, Gigerenzer 1997) l'apprendimento adattivo essendo definito da una serie di relazioni matematiche è in grado di usare i risultati raggiunti dalle aspettative razionali e svilupparne ulteriori sulla stessa linea. La motivazione logica che è alla base dell'apprendimento è semplice e intuitiva: gli agenti economici inizialmente sono incapaci di avere aspettative razionali date le distorsioni cognitive e i costi monetari e non in cui incorrono. Essi sono in grado di stimare (inizialmente in modo non efficiente) il modello che l'economia segue, e formulare ipotesi previsionali sulla base del loro modello. Con il passare dei periodi gli agenti commetteranno meno errori nella stima, e saranno in grado di aggiornare in modo più realistico le variabili di interesse. Sotto opportune condizioni il continuo aggiornamento porterà gli agenti ad avere aspettative razionali. Tuttavia non necessariamente l'apprendimento converge alle aspettative razionali. Diversi autori (Evans and Honkapohja 1993, 2000, 2008; Bullard and Mitra 2000; Orphanides 2002 et al.) sostengono come siano da prediligere politiche monetarie che portano il sistema economico all'REE. Diversamente l'apprendimento può procedere anche in modo perpetuo<sup>5</sup>. Interessante è analizzare una politica monetaria sotto aspettative razionali e sotto apprendimento, e le condizioni che portano un sistema economico dove gli operatori usano algoritmi di apprendimento per la formulazione delle ipotesi a raggiungere REE. L'apprendimento adattivo si presenta dunque come uno strumento ulteriore per la formulazione delle ipotesi. Nei paragrafi successivi si effettueranno diversi tipi di analisi, ad oggetto apprendimento, aspettative razionali e politica monetaria.

---

<sup>5</sup> Generalmente in un modello di apprendimento a minimi quadrati la differenza fra la variabile osservata e quella ipotizzata vengono pesate per un termine, definito gain sequence, che decresce temporalmente e che può essere interpretato come l'invecchiamento dell'informazione. Definito in questo modo il termine di guadagno può garantire la convergenza alle aspettative razionali. Dal lato opposto si può definire il termine di guadagno con una costante che pesa l'informazione sempre nello stesso modo, se gli agenti ricavano un vantaggio ad agire così. Si parla in questo caso di apprendimento perpetuo e non convergente alle aspettative razionali.

## 2.2 – Risoluzione di un problema di politica monetaria sotto aspettative razionali e sotto apprendimento adattivo

### 2.2.1 – Il modello

Le aspettative razionali implicano la perfetta conoscenza degli agenti del modello statistico-matematico attraverso il quale è rappresentato il sistema economico. Un modello di politica monetaria risolto con aspettative razionali (da parte del settore privato) implica una politica efficiente e non sub-ottimale. I modelli di politica monetaria considerati in questa parte sono leggermente differenti da quelli visti in quella precedente, dove non è considerata una funzione che esprime le preferenze del policy maker, quadratiche o lessicografiche. Per effettuare un'analisi raffronto completo i modelli saranno risolti con aspettative razionali e con apprendimento. Come detto l'apprendimento implica che il set informativo è incompleto, e lo sviluppo di un modello che lo prevede deve specificare un modo attraverso il quale il settore privato opera la stima dei parametri incogniti. Generalmente viene usato un modello a minimi quadrati, e lo scopo è minimizzare la differenza fra il parametro ricercato e quello ipotizzato.

Il rilassamento dell'ipotesi di perfetta informazione ha importanti effetti sulla politica monetaria. Potenzialmente la combinazione di apprendimento e controllo crea numerose dinamiche che possono spiegare gli shocks che colpiscono il sistema economico previsti dalle relazioni analitiche e osservate negli spostamenti grafici. L'ipotesi dell'apprendimento è stata prevista e sviluppata anche per un altro importante motivo: la politica monetaria messa in pratica usando aspettative razionali è inefficiente quando la conoscenza degli agenti non è perfetta. La conseguenza è logica: se viene svolta un'analisi ma un input fondamentale viene a mancare allora i risultati della stessa non saranno quelli previsti.

In caso di conoscenza limitata un punto su cui la ricerca è d'accordo è che nelle regole di politica monetaria i coefficienti delle variabili dipendenti, soprattutto quello riferito all'inflazione, devono essere compresi in un certo intervallo di valori. È stato osservato che la performance della politica monetaria è migliore se si occupa di stabilizzare l'inflazione e le aspettative sull'inflazione, mentre risulta sub-ottimale se viene dato un peso elevato alla stabilizzazione dell'output. Un policy maker che è in grado di trovare il giusto trade-off fra inflazione e output consentirà alla propria politica il raggiungimento di risultati efficienti anche senza che il settore privato abbia aspettative razionali.

Si consideri il seguente modello, basato su Orphanides (2002), che dà luogo ad un trade-off fra inflazione e disoccupazione. L'inflazione è determinata nel seguente modo:

$$\pi_{t+1} = \phi\pi_{t+1}^E + (1-\phi)\pi_t + \alpha y_{t+1} + e_{t+1} \quad e \sim IID(0, \sigma_e^2) \quad (2.1)$$

dove  $\pi$  è il tasso di inflazione;  $\pi^E$  rappresenta l'aspettativa di inflazione del settore privato basata sull'informazione disponibile al tempo corrente  $y$  rappresenta l'output gap;  $\phi \in (0,1)$ ;  $\alpha > 0$ ;  $e$  è un disturbo definito come sopra.

Dalla formulazione si nota come il parametro  $\phi$  rivesta un'importanza centrale per il modello). Un modello definito in questo modo attribuisce un ruolo alla persistenza dell'inflazione. Questa persistenza è necessaria per produrre un trade-off più permanente fra inflazione e output gap. Se il parametro  $\phi$  fosse vicino a zero allora, a parità di altre condizioni, l'inflazione del periodo successivo sarebbe in larga parte determinata da quello del periodo corrente. Diversamente il peso maggiore sarebbe dato dalle aspettative sull'inflazione. L'output gap è dato dalla differenza fra output reale e output potenziale, in termini percentuali. Una relazione analitica che esprima l'output gap può essere fornita in diversi modi, quella di seguito è solo una delle possibili alternative:

$$y_{t+1} = -\xi(r_t - r^*) + u_{t+1} \quad u \sim IID(0, \sigma_u^2) \quad (2.2)$$

dove  $r$  è il tasso reale di interesse a breve termine;  $r^*$  è il tasso reale di interesse a breve termine di equilibrio;  $\xi > 0$ ;  $u$  è un disturbo definito come sopra. Dalla (2.2) si può notare che il tasso di interesse corrente influenza l'output gap per il periodo futuro, questa relazione inter-periodale è caratteristica dell'interazione fra politica monetaria e produzione aggregata.

La performance della politica monetaria che il policy maker mette in pratica generalmente viene misurata da una perdita potenziale, che diventa elevata quando la politica è inefficiente e minima quando la politica è ottimale. La perdita potenziale è definita da una relazione analitica che esprime le preferenze del policy maker e può assumere diverse formulazioni. In questo paragrafo se ne userà una che considera le varianze delle variabili di interesse, data da:

$$L = (1 - \omega)Var(y) + \omega Var(\pi - \pi^*) \quad (2.3)$$

dove  $Var(x)$  esprime la varianza incondizionata della variabile  $x$ ;  $\omega$  è il peso che il policy maker attribuisce alla stabilizzazione dell'inflazione, e risulta  $\omega \in (0, 1]$ .

Il policy maker (usato come sinonimo di Banca Centrale e di Autorità Monetaria) fissa il tasso di interesse a breve dopo che il settore privato ha formulato le proprie aspettative sull'inflazione per il periodo successivo, ma prima che si realizzino gli shocks. Si ipotizza che il policy maker abbia perfetta conoscenza dei parametri strutturali del modello:  $\alpha, \phi, \xi, r^*$ . Attraverso questa assunzione si possono riscrivere gli strumenti a disposizione del policy maker in relazione alla scelta corrente e all'output gap nel periodo successivo in assenza di disturbo:  $x_t = -\xi(r_t - r^*)$ . Si può quindi scrivere:

$$y_{t+1} = x_{t+1} + u_{t+1} \quad (2.4)$$

Attraverso questa ultima equazione, a livello strutturale il modello è completo. Nel prossimo paragrafo verrà aggiunta la parte che interessa le aspettative, e il modello verrà risolto ipotizzando la conoscenza perfetta degli agenti.

### 2.2.2 – Risoluzione con aspettative razionali

Risolvere un problema di politica monetaria con aspettative razionali serve, fra le altre cose, a comprendere quanto può essere efficace una politica che non prevede la piena razionalità del settore privato. La risoluzione con aspettative razionali non è esclusivamente fine a sé stessa, è necessaria come metro di paragone. Molta letteratura si è occupata di applicare le aspettative razionali alla politica monetaria, e questa è la principale ragione per cui si è presentato il modello per intero nel capitolo precedente; in questo capitolo si applicheranno i risultati di quel modello. Risolvere attraverso aspettative razionali problemi di politica monetaria rappresenta la naturale applicazione delle stesse. Da una parte chiude il ciclo delle aspettative razionali perché fornisce un loro utilizzo, dall'altra serve come confronto con altri metodi di ipotesi, potendo un problema di politica monetaria risolto con aspettative razionali interpretarsi come un benchmark e dunque un punto di riferimento per altre metodologie di risoluzione.

Se il settore privato ha aspettative razionali si comporta come se conoscesse il vero modello del sistema economico. Attribuendo agli agenti perfetta conoscenza il percorso evolutivo che segue l'economia può essere rappresentato attraverso due variabili: il livello obiettivo di inflazione e il suo livello corrente. Insieme a shocks serialmente incorrelati l'inflazione target e quella corrente determinano la formazione delle aspettative e di conseguenza la politica monetaria. La regola di politica monetaria può essere scritta osservando l'inflation gap:

$$x_t = -\theta(\pi_t - \pi^*) \quad (2.5)$$

con  $\theta > 0$  che misura la risposta del *real rate gap* all'inflation gap.

Considerando la regola di politica monetaria le aspettative di inflazione sono date da:

$$\pi_{t+1}^E = \frac{\alpha\theta}{1-\phi} \pi^* + \frac{1-\phi-\alpha\theta}{1-\phi} \pi_t \quad (2.6)$$

Il parametro  $\theta$ , misurando il gap sul tasso di interesse reale in risposta al gap sull'inflazione, stima dunque la risposta della Banca Centrale al gap del livello dei prezzi. Dalla relazione (2.6) si osserva come le aspettative del settore privato dipendano dal livello corrente e target di inflazione e da parametri sotto il controllo della Banca centrale.

La soluzione ad aspettative razionali si ottiene sostituendo la relazione (2.6) nella (2.1):

$$\pi_{t+1} = \frac{\alpha\theta}{1-\phi} \pi^* + \left(1 - \frac{\alpha\theta}{1-\phi}\right) \pi_t + e_{t+1} + \alpha u_{t+1} \quad (2.7)$$

Dalla soluzione sotto aspettative razionali si nota che l'autocorrelazione del primo ordine del tasso di inflazione, fornita dal termine in parentesi, è decrescente in  $\theta$  ed è indipendente dal valore dell'inflazione target.

\* \* \*

Finora si è assunto che il parametro  $\theta$  fosse fissato. Per un sistema economico con perfetta conoscenza  $\theta$  può essere ottenuto in via analitica. Il parametro rappresenta la politica monetaria ottimale ed è dato da<sup>6</sup>:

$$\theta^P = \frac{\omega}{2(1-\omega)} \left( -\frac{\alpha}{1-\phi} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1-\phi}\right)^2 + \frac{4(1-\omega)}{\omega}} \right) \quad \text{per } 0 < \omega < 1 \quad (2.8)$$

La risposta della politica ottimale è tanto più elevata quanto più alto è il grado di inerzia dell'inflazione, misurato da  $1-\phi$ . Inoltre il valore ottimale di  $\theta$  dipende positivamente dal rapporto  $\frac{1-\phi}{\alpha}$ ; tale è il valore che viene assunto dalla politica ottima se  $\omega = 1$ .

Se la Banca Centrale sceglie di porre un peso alto,  $\omega$ , sulla stabilizzazione dell'inflazione allora sarà elevata la risposta all'inflation gap e bassa l'autocorrelazione del primo ordine per l'inflazione (termine  $1 - \frac{\alpha\theta}{1-\phi}$ ). Differenziando la (2.8) si può osservare la relazione che sussiste fra

l'autocorrelazione dell'inflazione e  $\omega$ . La Banca centrale deve scegliere il giusto valore di  $\omega$ . Se è troppo basso, allora verranno impiegate troppe risorse per la stabilizzazione dell'output e il tasso di inflazione diventerà una passeggiata aleatoria. Diversamente non si registrerà correlazione seriale nel tasso di inflazione. È interessante osservare le due seguenti figure, riportanti la frontiera ottimale e la risposta ottimale all'inflazione:

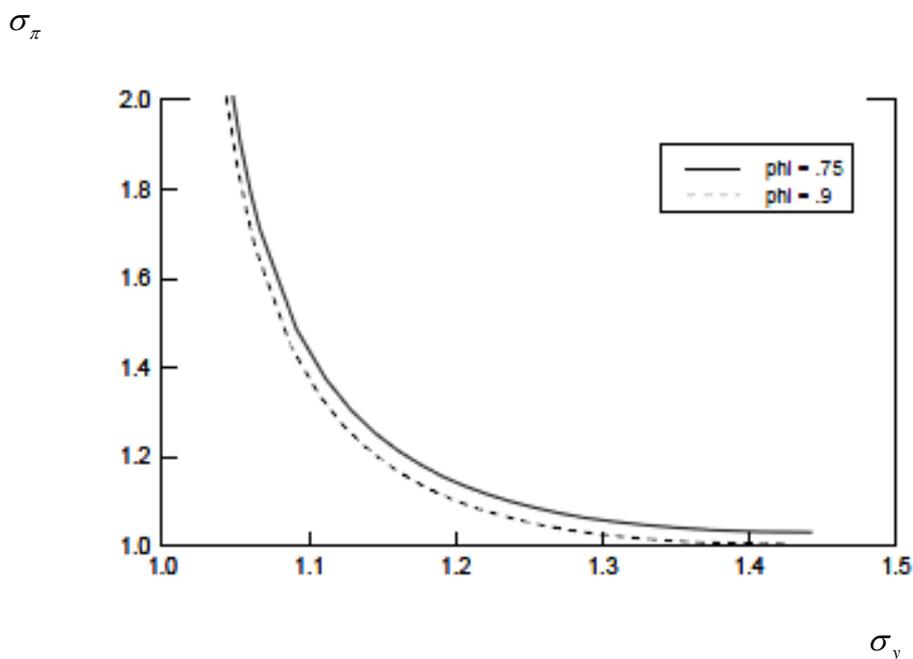
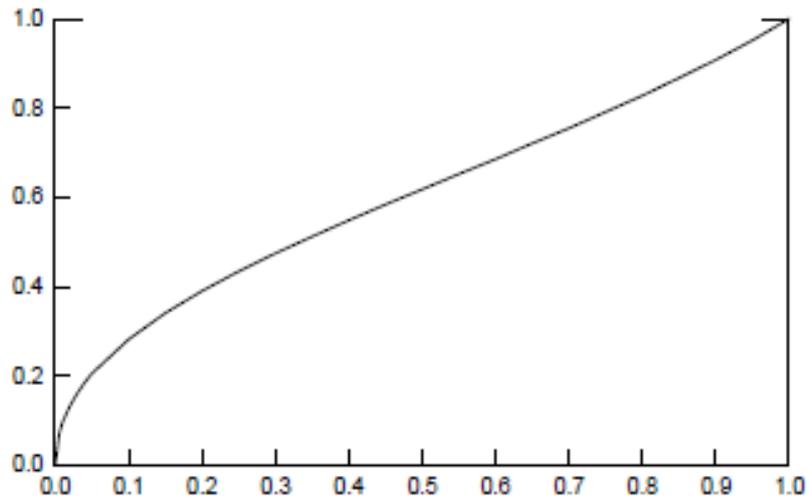


Figura 1 – Frontiera efficiente  $\sigma_\pi / \sigma_y$  (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

<sup>6</sup> Si veda Clark, Goodhart, and Huang (1999) and Orphanides and Wieland (2000) per la derivazione.

$\theta$



$\omega$

Figura 2 – Politica monetaria in funzione della stabilizzazione dell'inflazione (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

La prima figura riporta la frontiera efficiente (in termini di deviazioni standard) per differenti tipi di politica monetaria. Come si può osservare la riduzione della deviazione standard dell'inflazione incrementa la deviazione standard sull'output e viceversa. Non c'è una grande differenza in corrispondenza dei due diversi valori di  $\phi$  considerati, (0,75 e 0,9) infatti sotto aspettative razionali le due frontiere associate sono molto simili fra loro. La seconda figura rappresenta la relazione Risposta della Politica/Risposta all'Inflazione. Come si può vedere maggiore è la risposta all'inflazione, più aggressiva è la risposta della politica. Il massimo valore della politica si registra in corrispondenza del massimo valore del peso sull'inflazione.

### 2.2.3 – Risoluzione con apprendimento adattivo

In questa sezione si abbandona l'ipotesi di una perfetta conoscenza degli agenti dei parametri strutturali e delle preferenze del policy maker riguardo la politica monetaria. Si suppone che gli agenti agiscano come econometrici; essi formano le proprie aspettative osservando dati storici. Per certi versi questa ipotesi equivale a fare un passo indietro, cancellando la natura forward-looking peculiare delle aspettative razionali. Tuttavia l'apprendimento adattivo si presenta come un metodo che può portare gli operatori economici ad avere aspettative razionali. Questa caratteristica dell'apprendimento verrà esaminata in dettaglio nei paragrafi successivi, dove si discuterà delle condizioni per la convergenza e della velocità della convergenza. In questo paragrafo si confronta esclusivamente una politica monetaria con aspettative razionali e una con apprendimento. L'idea

dell'apprendimento rappresenta un elemento di avvicinamento tra la politica monetaria e le capacità degli agenti. Essi imparano periodicamente la politica monetaria, grazie al modello che mettono in pratica per stimarla.

Come base delle ipotesi sull'apprendimento si assume generalmente che gli agenti siano in grado di identificare il modello statistico-matematico che sintetizza il sistema economico; tuttavia abbiano complicazioni a stimarne correttamente i parametri. Si assume inoltre che essi aggiornino i coefficienti del loro algoritmo di previsione usando un modello a minimi quadrati. Inizialmente si ipotizza che il modello sia a memoria finita, ossia arrivi fino a un certo punto del passato. La scelta per il metodo a minimi quadrati è fatta per ragioni di semplicità del modello e alcune sue caratteristiche, come proprietà che garantiscono la convergenza dei parametri. L'uso della memoria finita è giustificato dall'importanza decrescente che assumono i parametri strutturali: dati sempre più vecchi saranno meno interessanti per la stima delle variabili future. Dal lato opposto se si usa un modello con memoria infinita si presuppone che gli agenti abbiano un guadagno nell'applicarlo, probabilmente per calibrare meglio le ipotesi. I modelli a memoria finita e infinita sono stati usati da Sargent (1999) e da Evans and Honkapohja (2001); nel seguito della trattazione si useranno alcuni risultati raggiunti da questi autori. L'algoritmo di apprendimento a minimi quadrati prevede di applicare pesi alle osservazioni che decrescono geometricamente, partendo dalle osservazioni più recenti e proseguendo indietro nel tempo. Un metodo di questo genere è correlato all'uso di campioni di dati di lunghezza fissa che slittano temporalmente, una rolling-window. Un termine che verrà usato nel modello è il guadagno degli agenti derivato dall'uso dei dati storici, indicato con  $\kappa$ . Una rolling-window di lunghezza  $l$  comporta un guadagno  $\kappa$  di  $2/l$ . Il vantaggio di questo metodo è che l'algoritmo funziona, i.e. è in grado di fare previsioni, attraverso un numero limitato di variabili.

\* \* \*

Si considera un modello a minimi quadrati con memoria finita. Un ruolo importante hanno nel caso di imperfetta conoscenza il livello target e il livello di inflazione corrente. I coefficienti sono quelli dati dall'equazione (2.6). Per quanto riguarda la politica ottimale la (2.8) mostra come conti il peso che la Banca Centrale pone sulla stabilizzazione dell'inflazione. Il modello a minimi quadrati ha la seguente forma:

$$\pi_t = c_{0,t} + c_{1,t}\pi_{t-1} + u_t \quad (2.9)$$

Usando la notazione matriciale si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$c_t = c_{t-1} + \kappa_t R_t^{-1} X_t (\pi_t - X_t' c_{t-1}) \quad (2.10)$$

$$R_t = R_{t-1} + \kappa_t (X_t X_t' - R_{t-1}) \quad (2.11)$$

con

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi_{t-1} \end{pmatrix}; c_t = \begin{pmatrix} c_{0,t} \\ c_{1,t} \end{pmatrix}$$

Nel caso di modello a memoria infinita,  $\kappa_t = 1/t$ . Per formalizzare l'apprendimento perpetuo, (ossia un modello di apprendimento con cui gli agenti stimano la politica monetaria all'infinito) è necessario sostituire il termine di guadagno decrescente con una costante dal valore piccolo e maggiore di zero.

Nel caso di conoscenza non perfetta le ipotesi sono basate su quella che viene definita Legge del Moto Percepita (Perceived Law of Motion PLM) la cui descrizione e il cui funzionamento, insieme alla Legge del Moto Attuale (Actual Law of Motion ALM), si forniranno quando si parlerà della convergenza dell'apprendimento. Per ora il modello è formato dalle equazioni (2.1), (2.2), (2.5) e da un'ulteriore equazione che esprime la previsione per il periodo successivo (one-step-ahead forecast) dell'inflazione:

$$\pi_{t+1}^E = c_{0,t} + c_{1,t}\pi_t \quad (2.12)$$

Nel limite, ovvero con informazione completa  $\kappa \rightarrow 0$ , l'equazione sopra converge alle aspettative razionali e i coefficienti stocastici diventano valori finiti:

$$c_0^P = \frac{\alpha\theta}{1-\phi}\pi^*; \quad c_1^P = \frac{1-\phi-\alpha\theta}{1-\phi}$$

Si nota che la formazione delle aspettative è endogena al modello, e si aggiusta in base ai cambiamenti della politica o strutturali.

Ora si usa la modellistica introdotta per valutare in che maniera l'apprendimento agisce sul sistema economico, in particolar modo osservando l'inflazione, le aspettative sull'inflazione e l'output. I risultati che si espongono provengono da simulazioni che comparano gli esiti derivanti dall'assunzione di perfetta e imperfetta conoscenza e prendono come riferimento gli Stati Uniti negli anni settanta.

Ogni periodo corrisponde a 6 mesi. Si utilizzano valori di  $\kappa$  pari a 0,025; 0,05; 0,1 ; il che equivale e usare 40, 20, 10 anni di dati. Sono scelti 2 valori di  $\phi$ , il parametro che misura il trade-off fra inflazione e aspettative sull'inflazione, rispettivamente di 0,75 e 0,9; dove il primo valore segue le stime di Buiter and Jawitt (1981), Fuhrer and Moore (1995), Brayton et al. (1997) mentre il secondo è consistente con le stime di Gali and Gertler (2000) et al. Per semplificare si fissa  $\alpha$  rispettivamente a 0,25 e a 0,1, consistente con una politica ottima sotto perfetta conoscenza per entrambi i valori di  $\phi$ . Per ipotesi si fissa  $\sigma_u, \sigma_e = 1$ .

Per quanto riguarda il valore della politica monetaria,  $\theta$ , si considerano 3 valori: 0,1; 0,6; 1. Tali valori rappresentano, come precedentemente per  $\phi$  e  $\alpha$ , la politica ottimale sotto perfetta conoscenza per valori di  $\omega$  pari a 0,01; 0,5; 1 e sono scelti perché rappresentano le preferenze del policy maker per il peso dato a inflazione e output (rappresentato appunto da  $\omega$ ). Per  $\theta=0,1$  si ha una netta preferenza per la stabilizzazione dell'output,  $\omega=0,01$ ; per  $\theta=0,6$  si ha una divisione equa tra stabilizzazione dell'inflazione e dell'output,  $\omega=0,5$ ;  $\theta=1$  rappresenta la preferenza per la totale stabilizzazione dell'inflazione,  $\omega=1$ .

Si espongono ora i dati relativi alle simulazioni con gli input appena forniti. Il processo di apprendimento è in grado di generare, in assenza di shocks che colpiscono la struttura economica, variazioni temporali nella formazione dell'inflazione, delle aspettative sull'inflazione e sull'output. Se vengono usati campioni di dati di lunghezza sempre più breve questo effetto cresce ( $\kappa$  incrementa). La tabella successiva riporta le statistiche dei coefficienti delle stime dell'inflazione degli agenti relativamente a  $\phi = 0,75$  :

	$\kappa$			
	0 (PK)	,025	,05	,10
<b><math>\theta = 0,1</math></b>				
Mean	,00	,02	,01	-,01
SD	-	,37	,68	1,40
Mean	,90	,86	,83	,79
SD	-	,11	,17	,25
Median	,90	,89	,88	,87
<b><math>\theta = 0,6</math></b>				
Mean	,00	,01	,01	,00
SD	-	,25	,38	,59
Mean	,40	,37	,35	,31
SD	-	,20	,27	,37
Median	,40	,39	,38	,36
<b><math>\theta = 1</math></b>				
Mean	,00	,01	,01	,01
SD	-	,24	,35	,52
Mean	,00	-,02	-,03	-,06
SD	-	,21	,29	,39
Median	,00	-,02	-,03	-,06

Tabella 1 – Principali statistiche per diversi valori di  $\theta$  (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

La prima colonna (PK) indica i valori in corrispondenza di perfetta conoscenza. Si può notare come la deviazione standard, SD, aumenti al crescere di  $\kappa$ . Nella tabella sono riportate le principali statistiche relative a media e deviazione standard, per quanto riguarda altri valori non si registra correlazione contemporanea fra  $c_0$  e  $c_1$ , mentre ognuno dei valori stimati presenta una autocorrelazione alta. Aumenti di  $\kappa$  fanno diminuire la correlazione seriale dei parametri solo in maniera leggera. Si osserva come una politica aggressiva,  $\theta$  crescente, riduca la variabilità di  $c_0$  mentre aumenti quella di  $c_1$ . La tabella successiva riporta le statistiche relative all'errore quadratico medio:

	$\phi =,75 ; \alpha =,25$			$\phi =,9 ; \alpha =,1$		
	,025	,05	,10	0,025	,05	,10
PK	1,03	1,03	1,03	1,01	1,01	1,01
<b><math>\theta = 0,1</math></b>						
LS finite memory	1,04	1,04	1,08	1,03	1,18	2,12
LS infinite	1,05	1,06	1,12	1,05	1,70	6,21

memory						
$\theta = 0,6$						
LS finite memory	1,04	1,04	1,05	1,01	1,01	1,04
LS infinite memory	1,06	1,09	1,14	1,10	1,19	1,43
$\theta = 1$						
LS finite memory	1,04	1,04	1,05	1,01	1,01	1,02
LS infinite memory	1,06	1,10	1,18	1,11	1,27	1,85

Tabella 2 – Errore quadratico medio (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

Dalla tabella si osserva come il modello a memoria finita abbia una performance ottima, dato che l'errore quadratico medio è molto vicino, per i diversi valori dei parametri, al minimo teorico del caso di perfetta conoscenza. La performance del modello a memoria finita è migliore di quello a memoria infinita, e questo risultato è più pronunciato maggiore è il peso,  $\phi$ , che si dà alle aspettative di inflazione. Infatti se per  $\phi = 0,75$  la differenza dell'errore è contenuta, per  $\phi = 0,9$  è più elevata.

La correlazione seriale dell'inflazione cresce al crescere di  $\kappa$ . Il risultato è anche intuitivo: se si prendono in considerazione periodi sempre più brevi allora è probabile che l'inflazione corrente sia in parte causata da quella passata. La seguente tabella riporta questo risultato:

		$\phi = ,75 ; \alpha = ,25$				$\phi = ,9 ; \alpha = ,1$		
$\theta$	$\kappa$	0	,025	,05	,10	,025	,05	,10
0,1	→	,90	,97	,98	,99	1,00	1,00	1,00
0,6		,40	,48	,55	,66	,62	,79	,93
1		,00	,03	,06	,12	,09	,18	,28

Tabella 3 – Correlazione seriale dell'inflazione (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

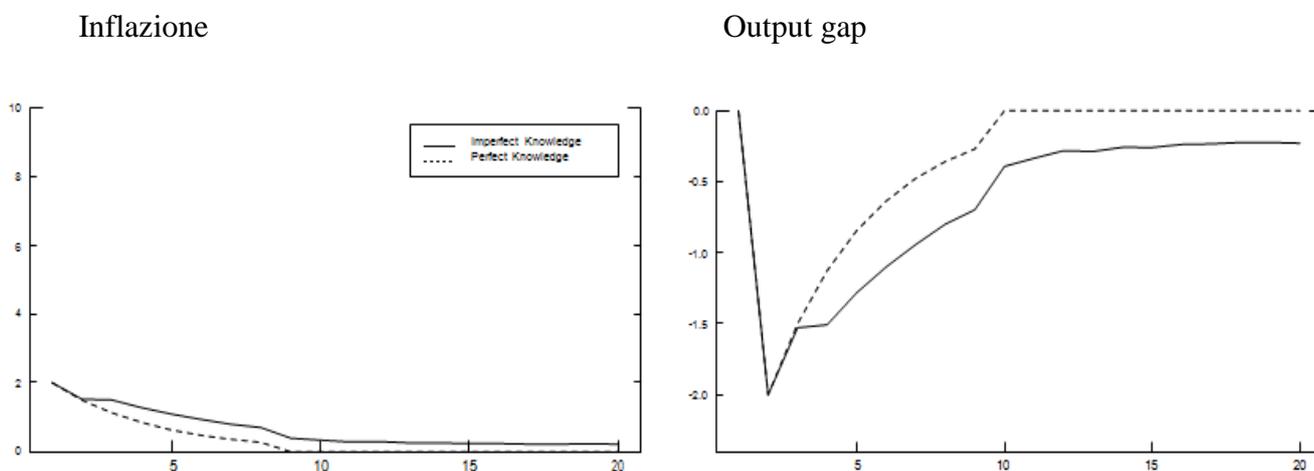
Quando  $\theta = 0,1$ ,  $\omega = 0,01$  e l'inflazione presenta una notevole autocorrelazione. La politica è quasi esclusivamente a sostegno della stabilizzazione dell'output, e l'inflazione viene causata in gran parte causata da quella del periodo precedente. Per  $\phi = 0,9$  e  $\alpha = 0,1$  l'autocorrelazione è massima per ogni valore di  $\kappa$ . Quando il policy maker pone eguale peso sulla stabilizzazione dell'inflazione e dell'output l'autocorrelazione cresce al crescere di  $\kappa$  ed è positiva e intorno a 0,5 per  $\phi = 0,75$   $\alpha = 0,25$ , mentre cresce fino ad essere 0,93 quando  $\phi = 0,9$  e  $\alpha = 0,1$ . Se il peso è tutto posto sulla stabilizzazione dell'inflazione, l'autocorrelazione è molto bassa. Cresce leggermente quando  $\phi = 0,9$  e  $\alpha = 0,1$ , e come si poteva supporre è uguale a 0 nel caso di perfetta conoscenza.

\* \* \*

Si considera ora come si comporta il modello quando si verificano degli shocks che portano l'inflazione ad avere variazioni non consuete. Nel modello la causa dello shock non è importante, è trattato come un disturbo stocastico e la sola cosa rilevante è che sposta l'inflazione (e l'output gap) dal suo percorso temporale. Quando si verifica uno shock, il ritorno dell'inflazione al livello target dipende da come è impostata la politica monetaria.

Si considera ora l'inflazione sperimentata negli anni settanta dagli Stati Uniti a seguito degli shocks energetici<sup>7</sup>. Nel seguito viene riportata la risposta media del modello a 1000 simulazioni, ognuna delle quali inizia da condizioni di stato stazionario. I risultati sono esposti attraverso grafici e commentati. Per i prossimi 6 grafici, per l'inflazione e per l'output varrà:  $\phi = 0,75$  e  $\alpha = 0,25$ . La linea tratteggiata corrisponde al caso di perfetta conoscenza, la linea continua al caso di imperfetta conoscenza. Sull'asse delle ascisse è misurato il tempo, sull'asse delle ordinate sono misurati di volta in volta inflazione e output gap.

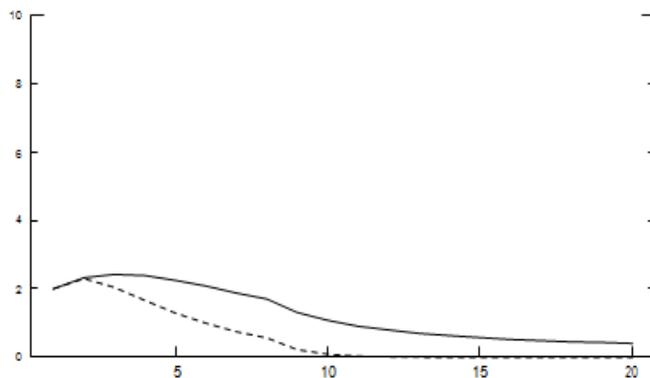
$$\theta = 1$$



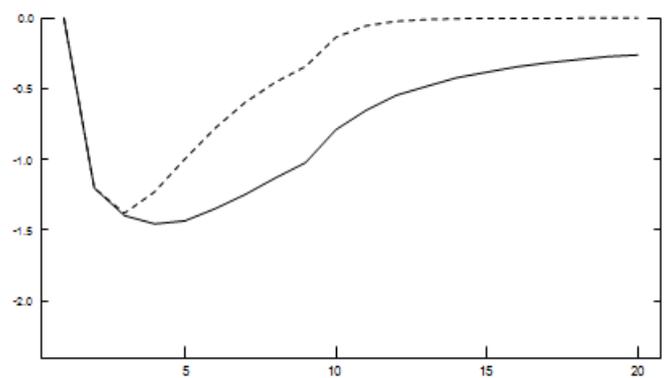
<sup>7</sup> Con il termine 'crisi energetiche degli anni settanta' si fa riferimento a due periodi particolari di aumento del prezzo del petrolio, che passarono alla storia perché contestualmente aumentarono anche l'inflazione e la disoccupazione (ci si riferisce agli aumenti avvenuti negli USA). Durante la prima crisi, tra il 1973 e il 1975, il prezzo del petrolio aumentò di 2,5 volte, e durante la seconda, tra il 1979 e il 1981, il prezzo aumentò di 6 volte se si considera come valore il prezzo del 1970. Le cause degli aumenti del prezzo del petrolio furono guerre; la guerra del Kippur fra Egitto, Siria e Israele per il primo aumento e la guerra tra Iran e Iraq per il secondo aumento.

$\theta = 0,6$

Inflazione

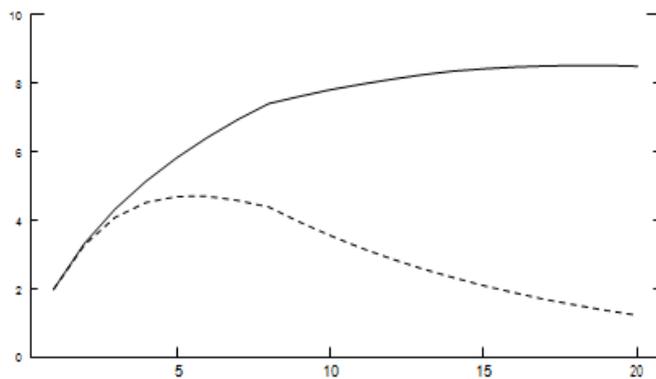


Output gap



$\theta = 0,1$

Inflazione



Output gap

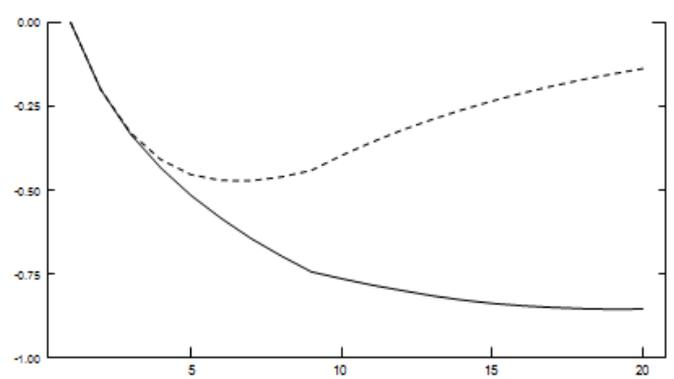


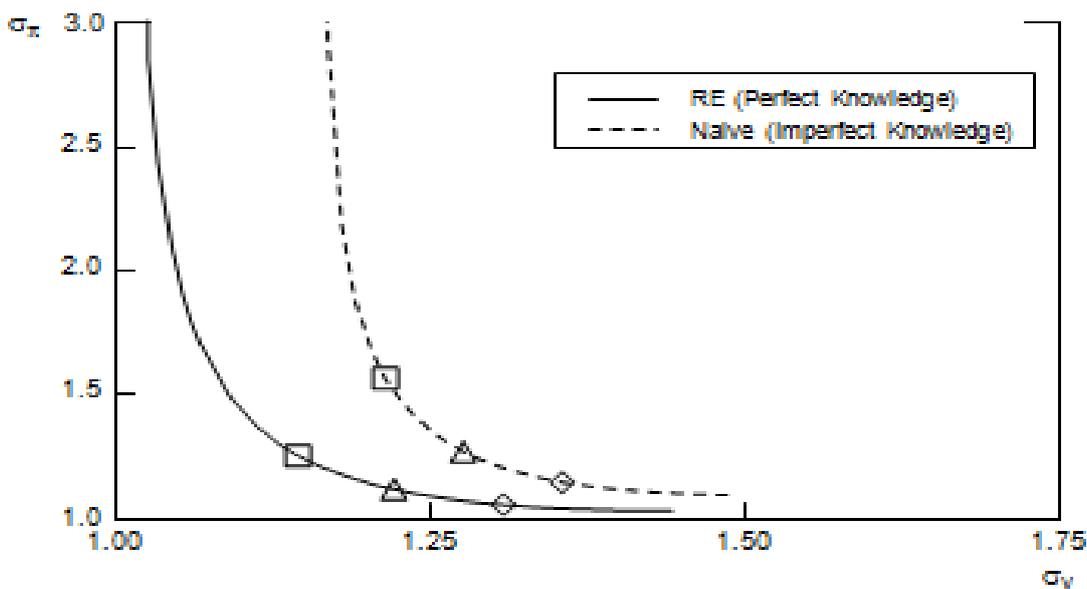
Figura 3 – Simulazioni su inflazione e output gap (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

Nel caso  $\theta = 1$  sia per l'inflazione, sia per l'output gap, il percorso di aggiustamento temporale è sostanzialmente simile. Per l'inflazione, sotto perfetta conoscenza, lo shock praticamente non ha effetto, perché immediatamente dopo la politica monetaria riesce ad abbassarla e portarla a 0 intorno all'ottavo periodo. Sotto imperfetta conoscenza il percorso dell'inflazione è leggermente diverso, restando sopra all'incirca di mezzo punto percentuale per i primi 10 periodi per poi abbassarsi gradualmente, ma non arrivando a 0. Per l'output gap i due casi sono simili per quanto riguarda il percorso di aggiustamento, tuttavia dal quarto periodo in poi si apre una forbice fra i valori che arriva ad essere di un punto percentuale; dopo di che il percorso temporale è quasi parallelo.

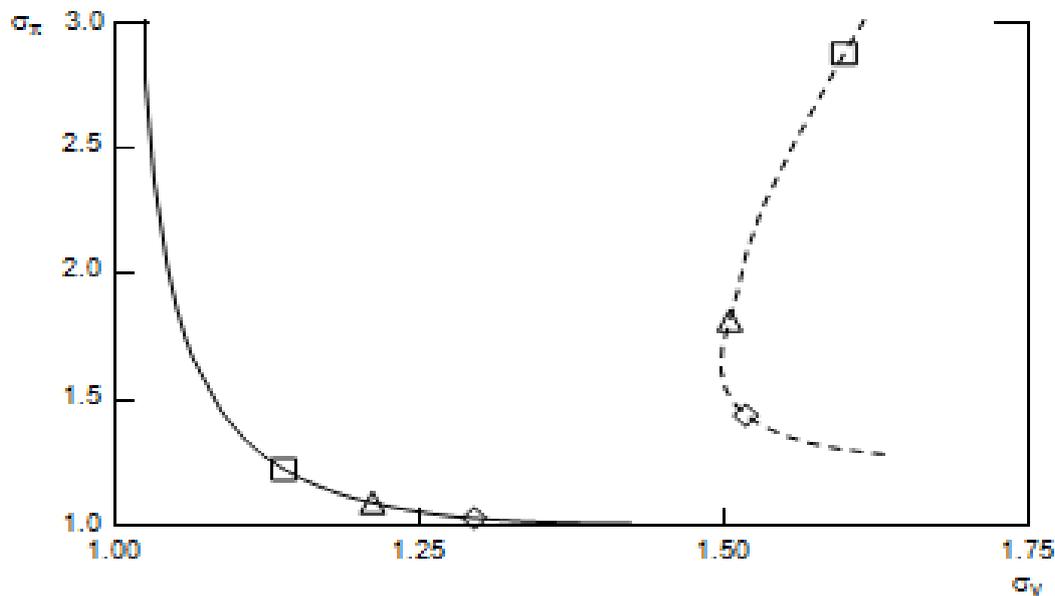
Quando  $\theta = 0,6$  l'inflazione presenta un aggiustamento un po' più lento. Sotto perfetta conoscenza va a 0 dopo 10 periodi, mentre sotto apprendimento resta fino sopra tra 1 punto e 1 punto e mezzo fino al decimo periodo per poi abbassarsi gradualmente, chiudendo a circa mezzo punto sopra lo 0. L'output gap è simile al caso  $\theta = 1$  ma il picco iniziale è meno brusco.

Infine per  $\theta = 0,1$  inflazione e output gap hanno un percorso temporale che risente dello shock; sotto imperfetta conoscenza l'andamento è quasi esplosivo. L'inflazione sotto perfetta conoscenza risente dello shock fino a portarsi sopra al 4 per cento dopo 5 periodi; successivamente si abbassa molto gradualmente. Sotto imperfetta conoscenza l'andamento è molto simile, solo per la parte positiva, alla funzione  $\ln x$ . Dopo 20 periodi l'inflazione sembra essersi stabilizzata, intorno all'8 per cento, ma non è escluso che aumenti ancora. L'output gap sotto perfetta conoscenza ha un andamento simile all'output gap sotto imperfetta conoscenza con  $\theta = 0,6$ ; tuttavia il picco iniziale è meno accentuato. Sotto imperfetta conoscenza decresce fino al ventesimo periodo ed è poco superiore a  $-0,75$  punti percentuali.

Si cerca ora di identificare una politica monetaria efficiente sotto imperfetta conoscenza. Per fare ciò si presuppone che il policy maker pensi che il settore privato abbia perfetta conoscenza e che le sue ipotesi coincidano con le aspettative razionali; in realtà la conoscenza del settore privato è imperfetta ed effettua le sue previsioni in base all'algoritmo di apprendimento descritto. Il policy maker opera tramite le equazioni (2.5) e (2.9). Questo scenario è descritto dalle seguenti figure che rappresentano la frontiera efficiente nei diversi casi:



Quadrato =  $\omega = 0,25$   
 Triangolo =  $\omega = 0,5$   
 Rombo =  $\omega = 0,75$   
 $\phi = 0,75$  ;  $\alpha = 0,25$



Quadrato =  $\omega = 0,25$

Triangolo =  $\omega = 0,5$

Rombo =  $\omega = 0,75$

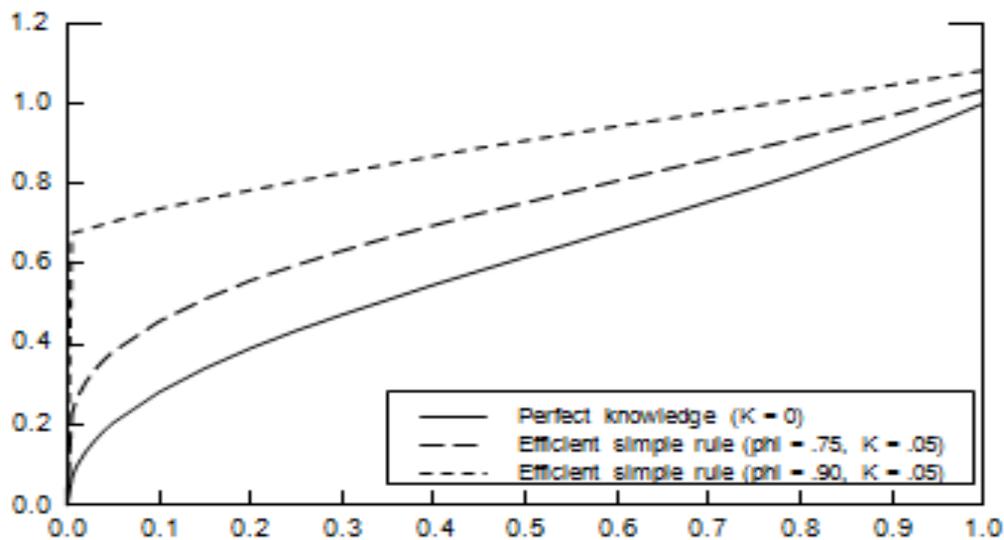
$\phi = 0,9$ ;  $\alpha = 0,1$

Figura 4 – Frontiera efficiente  $\sigma_{\pi}/\sigma_y$  con ipotesi del policy maker di perfetta conoscenza (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

Il confronto è svolto fra perfetta e imperfetta conoscenza perché di fatto nel sistema gli agenti usano un algoritmo di apprendimento per effettuare le proprie ipotesi. Questa è tuttavia una situazione temporanea, dato che dopo qualche periodo il policy maker si accorgerà della imperfetta conoscenza degli agenti. Gli aumenti di variabilità descritti dal passaggio da una frontiera all'altra sono considerati come un deterioramento di performance; questo è dovuto, fra le altre cose, al fatto che l'apprendimento introduce errori casuali nella formazione delle aspettative e conseguente deviazione dal valore che esse dovrebbero assumere se fossero aspettative razionali. Questo abbassamento di performance è definito un costo per la stabilizzazione. Il peggioramento è maggiormente pronunciato quando il policy maker pone un basso peso sulla stabilizzazione dell'inflazione (quadrato= $\omega=0,25$ ); quando  $\phi=0,9$ ;  $\alpha=0,1$  si ha un elevato incremento di entrambe le deviazioni standard.

Ora si prende in considerazione il caso di imperfetta conoscenza degli agenti noto al policy maker. L'abilità del decisore è quella di comprendere come non possa applicare una politica identica ad un caso di perfetta conoscenza, altrimenti la variabilità di inflazione e output gap diverrebbe quella esposta nei due grafici precedenti. La regola di politica monetaria è data dalla (2.5) con  $\theta = \theta^s$  che indica la risposta efficiente all'inflazione e all' output gap. Tale risposta efficiente deve essere più aggressiva contro le deviazioni dell'inflazione dal suo target rispetto al caso di perfetta conoscenza. La seguente figura mostra le diverse scelte efficienti di  $\theta$  per diversi valori del peso sulla stabilizzazione dell'inflazione, per comparazione è mostrato anche il caso di perfetta conoscenza:

$\theta$

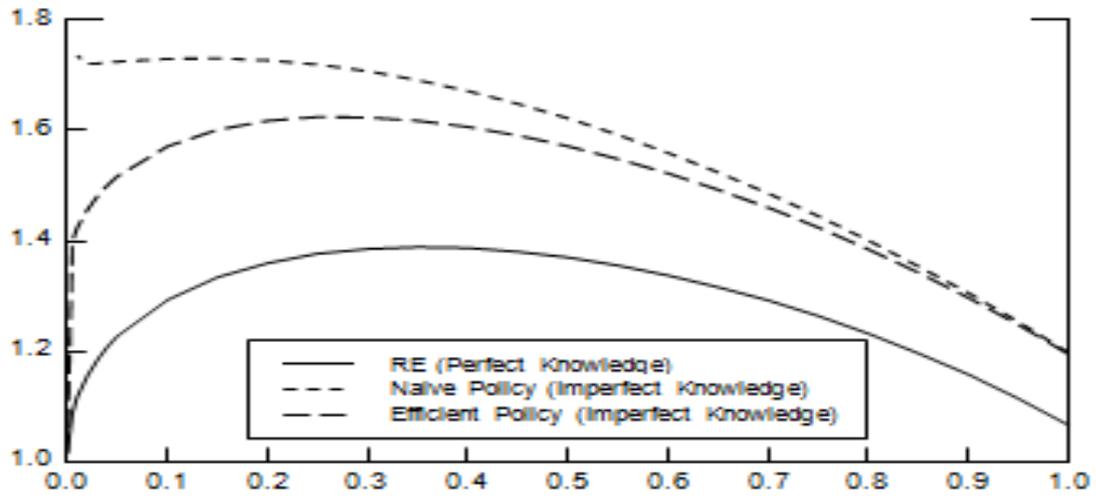


$\omega$

Figura 5 – Valore della politica efficiente in funzione della stabilizzazione dell'inflazione (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

Ogni punto lungo le relazioni funzionali indica un valore di  $\theta$  che comporta una politica efficiente. A seconda dei diversi casi,  $\theta$  non può essere fissato sotto un certo valore se si desidera efficienza. Ad esempio nel caso di imperfetta conoscenza per  $\phi = 0,9$  non è mai efficiente fissare  $\theta$  sotto 0,65. Come detto il riconoscimento del metodo con cui gli agenti fissano le proprie aspettative da parte del policy maker può migliorare molto la performance della politica monetaria qualora il policy maker adotti una politica che tenga conto dell'imperfetta conoscenza. Le seguenti figure evidenziano la perdita riscontrata dal policy maker per diversi valori di  $\omega$ :

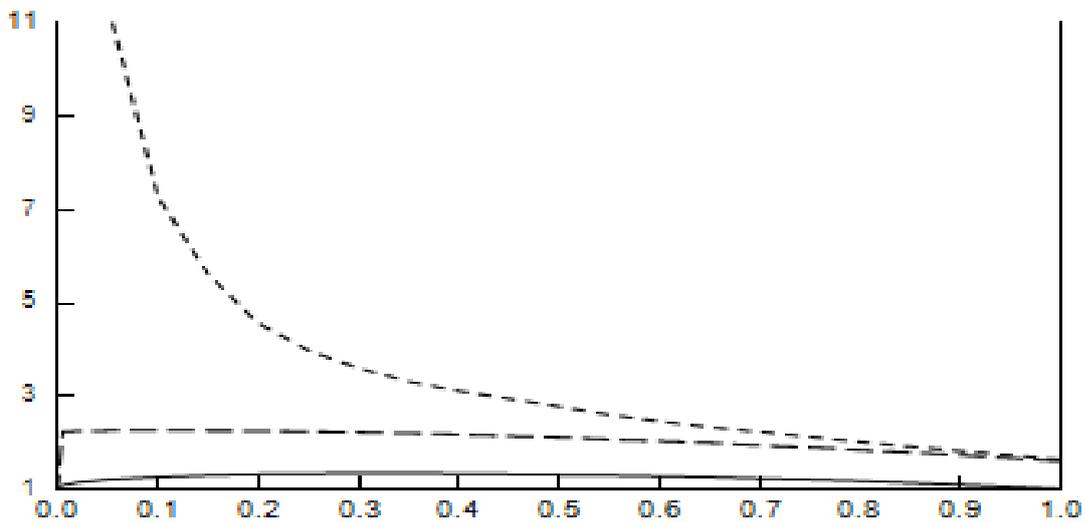
L



$\omega$

$\phi = 0,75$   
 $\alpha = 0,25$

L



$\omega$

$\phi = 0,9$   
 $\alpha = 0,1$

Figura 6 – La perdita del policy maker (Fonte: Orphanides and Williams 2002)

Questi due grafici si devono leggere insieme al terzultimo, in modo da valutare che impatto ha  $\omega$  sul valore della politica efficiente e sulla perdita del policy maker. Si nota come valori elevati di  $\omega$  causino le minori perdite e comportino valori elevati della politica efficiente. La funzione di perdita è sempre decrescente in  $\omega$ , di conseguenza valori elevati di  $\omega$  comportano le perdite minori; questo causa una politica aggressiva, dato che per alti valori  $\omega$ ,  $\theta$  è elevato. Una chiave di lettura è che una politica efficiente può essere accompagnata spesso da una imperfetta conoscenza del settore privato, opportunamente compresa dal policy maker e sfruttata attraverso la scelta dei parametri. Di conseguenza anche senza aspettative razionali la politica monetaria può raggiungere lo stesso risultati convincenti.

#### 2.2.4 – Conclusione sul confronto fra apprendimento e aspettative razionali

Si è fatta finora una breve analisi ad oggetto una leggera deviazione dalle aspettative razionali che interessa la politica monetaria. Tale deviazione risulta in un algoritmo di apprendimento usato per fare ipotesi. Si è solo accennato che l'algoritmo possa garantire la convergenza alle aspettative razionali, per il resto l'analisi è stata svolta in parallelo fra apprendimento e aspettative razionali; dunque il meccanismo di apprendimento è stato ipotizzato perpetuo. Un risultato rilevante di questa analisi è che una politica monetaria ottimale sotto aspettative razionali può raggiungere risultati peggiori sotto apprendimento, se il policy maker ipotizza la perfetta conoscenza degli agenti. Il policy maker deve quindi prendere le sue decisioni tenendo conto della perdita in cui incorrerebbe in caso sbagliasse sulle ipotesi del settore privato, e sviluppare una politica che accompagni l'apprendimento.

Nel paragrafo successivo si effettuerà un'analisi sulle condizioni per la convergenza di un algoritmo di apprendimento alle aspettative razionali. La conclusione che risulterà è che il policy maker dovrebbe privilegiare l'applicazione di politiche monetarie che garantiscano la convergenza del sistema economico al REE. Questa conclusione verrà ulteriormente specificata quando a conclusione del paragrafo successivo si discuterà della velocità di convergenza dell'algoritmo ricorsivo.

#### 2.3 – Convergenza dell'apprendimento adattivo alle aspettative razionali

La maggior parte dei recenti lavori macroeconomici raggiunge le proprie conclusioni usando modelli dove le aspettative del settore privato hanno una funzione importante. Dato il ruolo di input primario che le aspettative hanno, spesso i risultati previsivi dei modelli sono fortemente ancorati alla forma che le aspettative assumono, di conseguenza è importante che le ipotesi alla base del modello di aspettative usato siano verificate.

Nuove ricerche hanno appurato come alcune regole di politica monetaria possono causare indeterminatezza del sistema economico, i.e. non raggiungere un equilibrio di aspettative razionali.

Nel caso di apprendimento visto nel paragrafo precedente lo scopo era osservare le potenzialità del modello in rapporto ai risultati raggiungibili e in confronto al modello con aspettative razionali; ora lo scopo è analizzare quando l'apprendimento può raggiungere il REE del sistema economico e quando esso non fa raggiungere alcuna sorta di equilibrio.

L'idea alla base è che il sistema possa raggiungere REE, e dunque gli agenti siano potenzialmente razionali. Inizialmente si assume che gli agenti non siano in grado di usare aspettative razionali e che facciano le loro ipotesi usando algoritmi di apprendimento a minimi quadrati. Se l'apprendimento rispetta particolari condizioni, convergerà ad aspettative razionali.

Alcuni autori si sono occupati di determinare le condizioni per la convergenza di un algoritmo di apprendimento. Marcent and Sargent (1989) e Evans and Honkapohja (1994, 1999, 2000) hanno mostrato come un equilibrio del tipo REE può governare la convergenza locale di algoritmi di apprendimento ricorsivi in una varietà di modelli macroeconomici-econometrici. In questo paragrafo si segue principalmente Bullard and Mitra (2000) che si basa sui risultati raggiunti da Marcent and Sargent ed Evans and Honkapohja. La conclusione degli autori è che devono essere implementate esclusivamente politiche che possano favorire il passaggio ad un REE, e i policy makers che non adottano questo metodo di implementazione commettono un errore non trascurabile.

### 2.3.1 – Il modello

Generalmente un modello di politica monetaria prevede che il policy maker/banca centrale aggiusti il tasso di interesse nominale in risposta a deviazioni dell'inflazione/output da quello che è il target deciso. A seconda di come sono trattate le variabili dipendenti, una regola di politica monetaria può appartenere a uno dei seguenti gruppi:

- *Contemporaneous data specification* - raggruppa regole che prevedono che il tasso di interesse nominale sia fissato dalla banca centrale in risposta a deviazioni dal valore corrente di inflazione e output;
- *Lagged data specification* – raggruppa regole che prevedono che il tasso di interesse nominale reagisca in base a valori passati di inflazione e output;
- *Forward looking rules* – comprende regole basate sui valori futuri di previsione di inflazione e output;
- *Contemporaneous expectations* – le regole sono basate su valori correnti in aspettativa di inflazione e output.

L'obiettivo è valutare che tipo di situazione queste regole sono il grado di raggiungere con un metodo di previsione basato su un algoritmo ricorsivo a minimi quadrati.

Un risultato ricorrente nella letteratura macroeconomica (Taylor, 1993) è che regole di politica che reagiscono alle deviazioni correnti di inflazione e output possono facilmente introdurre, sotto alcune condizioni, un equilibrio determinato nel sistema. Tuttavia regole di questo tipo sono di difficile applicazione, perché richiedono che il policy maker sia in possesso di informazioni su inflazione e

output non disponibili nell'immediato e che si rendono note esclusivamente con il passare del tempo. Ciò nonostante queste regole sono le più desiderabili per avere convergenza di algoritmi ricorsivi, e qualora la BC riuscisse ad ottenere informazioni correnti in un tempo funzionale allo svolgimento dei suoi compiti dovrebbe sicuramente adottare regole di questo tipo. Per contro regole che rispondono a dati passati o a previsioni future non hanno le stesse proprietà, anche se sono le più realistiche per le applicazioni pratiche. Per finire le regole appartenenti alla classe Contemporaneous expectations garantiscono proprietà simili alle regole che sfruttano dati correnti, tuttavia è importante la forma che le aspettative assumono e soprattutto i dati che esse rappresentano per poter raggiungere risultati apprezzabili.

Nella trattazione successiva si definiranno le condizioni di convergenza per regole di politica monetaria appartenenti a ognuno dei gruppi citati. Si introduce ora la modellistica di base usata durante l'analisi.

La struttura del modello di è quella usata da Woodford (1999). Le equazioni per output gap e inflazione sono le seguenti:

$$z_t = z_{t+1}^E - \sigma^{-1}(r_t - r_t^n - \pi_{t+1}^E) \quad (2.13)$$

$$\pi_t = \kappa z_t + \beta \pi_{t+1}^E \quad (2.14)$$

dove  $z_t$  è l'output gap ;  $\pi_t$  è l'inflazione ;  $r_t$  è la deviazione del tasso di interesse a breve termine dal valore che avrebbe in stato stazionario ossia con inflazione al livello target e output gap al livello target;  $\sigma, \kappa, \beta$  sono parametri strutturali e  $\beta$  è definito in modo che  $\beta^{-1} - 1$  è il tasso di interesse reale in un sistema economico in stato stazionario;  $r_t^n$  è il tasso di interesse naturale e segue il seguente processo stocastico:

$$r_t^n = \rho r_{t-1}^n + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

dove  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$  ;  $0 \leq \rho < 1$  parametro che rappresenta la correlazione seriale.

La regola di politica monetaria è la seguente:

$$r_t = r^* + \varphi_\pi (\pi_t - \pi^*) + \varphi_z (z_t - z^*) \quad (2.16)$$

Descrizione termini:

$\pi^*, r^*, z^*$  sono i valori target e si ipotizza che siano tutti valori costanti uguali a zero. Di conseguenza il valore di  $r_t$  nella (2.16) e nella (2.13) è il medesimo;  $\varphi_\pi, \varphi_z$  sono i pesi assegnati alla stabilizzazione dell'output gap e dell'inflazione e dipendono dal comportamento del policy maker.

La regola data dalla (4) è applicata osservando i valori correnti di output e inflazione. Tale è stata criticata da McCallum (1993, 1998, 1999), sostenendo che le informazioni per applicare la regola non sono disponibili al policy maker, e che sono disponibili solo in periodi discreti.

A seconda del tipo di dati considerati si possono avere 4 tipi di regole:

$$r_t = \varphi_\pi \pi_t + \varphi_z z_t \quad (2.17)$$

$$r_t = \varphi_\pi \pi_{t-1} + \varphi_z z_{t-1} \quad (2.18)$$

$$r_t = \varphi_\pi \pi_{t+1}^E + \varphi_z z_{t+1}^E \quad (2.19)$$

$$r_t = \varphi_\pi \pi_t^E + \varphi_z z_t^E \quad (2.20)$$

Per ognuna delle analisi considerate, il modello è ogni volta composto dalla (2.13), (2.14), (2.15) e da una delle regole di politica monetaria.

Inizialmente gli agenti non hanno aspettative razionali. Essi formano le loro ipotesi estrapolando dati dal sistema di cui fanno parte usando un algoritmo a minimi quadrati. Come mostrato da Evans and Honkapohja (2000) se sussiste stabilità delle aspettative, E-stability, un algoritmo di apprendimento adattivo a minimi quadrati converge localmente a un REE; diversamente se non si ha E-stability non ci sarà convergenza dell'algoritmo.

Si considerino le seguenti espressioni:

$$y_t = \alpha + BE_t y_{t+1} + \delta y_{t-1} + \chi \omega_t \quad (2.21)$$

$$\omega_t = \phi \omega_{t-1} + e_t \quad (2.22)$$

dove  $y_t$  è un vettore ( $n \times 1$ ) di variabili endogene;  $\alpha$  è un vettore ( $n \times 1$ ) di costanti;  $B, \delta, \chi, \phi$  sono matrici ( $n \times n$ ) di coefficienti;  $\omega_t$  è un vettore ( $n \times 1$ ) di variabili esogene che seguono un processo autoregressivo.

Seguendo McCallum (1983) la forma della soluzione del sistema (2.21)-(2.22), chiamata Minimal State Variable MSV, assume la seguente forma:

$$y_t = a + b y_{t-1} + c \omega_t \quad (2.23)$$

Dove  $a, b, c$  sono calcolati con il metodo dei coefficienti indeterminati. La forma delle aspettative è la seguente:

$$E_t y_{t+1} = a + b y_t + c \phi \omega_t \quad (2.24)$$

La MSV solution soddisfa le seguenti equazioni:

$$(I - Bb - B)a = \alpha \quad (2.25)$$

$$Bb^2 - b + \delta = 0 \quad (2.26)$$

$$(I - Bb)c - Bc\phi = \chi \quad (2.27)$$

La (11) rappresenta anche Perceived Law of Motion PLM degli agenti. Tenendo conto della (2.24) e delle condizioni successive si ottiene la Actual Law of Motion ALM:

$$y_t = (I - Bb)^{-1}[\alpha + Ba + \delta y_{t-1} + (Bc\phi + \chi)\omega_{t-1}] \quad (2.28)$$

Il mapping dalla PLM alla ALM assume la seguente forma:

$$T(a, b, c) = ((I - Bb)^{-1}(\alpha + \beta a), (I - Bb)^{-1}\delta, (I - Bb)^{-1}(Bc\phi + \chi))$$

Differenziando:

$$\frac{d}{dT}(a, b, c) = T(a, b, c) - (a, b, c) \quad (2.29)$$

I punti fissi di questa matrice forniscono la MSV solution. Una soluzione particolare  $(a^*, b^*, c^*)$  è E-stable se la (2.29) è localmente asintoticamente stabile nel punto. Per una discussione più dettagliata si rimanda a Evans and Honkapohja (2000).

Sotto apprendimento in tempo reale la PLM si modifica e assume una forma con coefficienti time dependent:

$$y_t = a_{t-1} + b_{t-1}y_{t-1} + c_{t-1}w_t \quad (2.30)$$

I coefficienti sono aggiornati attraverso un algoritmo ricorsivo a minimi quadrati sui dati correnti, e questo genera a sua volta una ALM time dependent.

La E-stability della soluzione particolare come derivata dalla (2.29) governa la stabilità sotto apprendimento adattivo.

Per ora sembra che la E-stability risolva il problema della convergenza dell'algoritmo; tuttavia bisogna determinare, nella pratica, quanta informazione viene effettivamente ottenuta tramite le aspettative. Questa informazione viene direttamente dalla capacità degli agenti di "leggere" la politica monetaria. Il modello che si è presentato e le condizioni per la E-stability presuppongono che l'informazione sia molta e utile, e aggiornata in modo corretto. Inoltre nel modello si è supposto che la PLM coincida con la MSV solution. Questo significa che si fornisce agli agenti la corretta specificazione del vettore autoregressivo di cui necessitano per arrivare all'REE. Poi la natura locale del procedimento impone che le aspettative iniziali degli agenti, non razionali per definizione, si collochino nelle immediate vicinanze dell'equilibrio.

L'analisi che si intende svolgere prende in esame le quattro classi di differenti regole di politica monetaria. Prima di proseguire si discute brevemente dei parametri comparsi nelle equazioni e dei loro valori. Il valori sono basati sulle calibrazioni e sulle stime fatte da Woodford (1999), Rotemberg and Woodford (1998, 1999), e sono riassunti nella seguente tabella:

Parameter	Controls	Value or range
$\sigma$	Intertemporal substitution	.157
$\kappa$	Price stickiness	.024
$\beta$	Discount factor	.99
$\rho$	Serial correlation of shock	.35
$\sigma_e$	Variance of shock	3.72
$\varphi_\pi$	Policymakers' reaction to inflation	$0 \leq \varphi_\pi \leq 4$
$\varphi_z$	Policymakers' reaction to the output gap	$0 \leq \varphi_z \leq 4$

Tabella 4 – Calibrazione parametri (Fonte: Bullard and Mitra 2000)

L'attività del policy maker dipende fortemente dagli ultimi due parametri, in particolare dal penultimo, quello che rappresenta la reazione all'inflazione. Si parla di regola attiva quando  $\varphi_\pi > 1$ , altrimenti se  $\varphi_\pi \leq 1$  si parla di regola passiva.

### 2.3.2 – Convergenza dell'apprendimento adattivo attraverso le diverse regole di politica monetaria

#### 2.3.2.1 – Contemporaneous data

##### 2.3.2.1.1 – Equilibrio determinato

Il modello considerato è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.17). Il policy maker nel decidere la politica monetaria dispone di dati correnti. Sostituendo la (2.17) nella (2.13), si può scrivere l'intero modello nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma^{-1}\varphi_z & \sigma^{-1}\varphi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.31)$$

Dal sistema si ricava la seguente matrice, determinante per la ricerca dell'unicità del REE:

$$B = \frac{1}{\sigma + \varphi_z + \kappa\varphi_\pi} \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \beta\varphi_\pi \\ \kappa\sigma & \kappa + \beta(\sigma + \varphi_z) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

La matrice B è importante per i suoi autovalori. Se nel sistema (2.31) né il valore di  $z_t$  né quello di  $\pi_t$  sono forniti, allora è necessario per avere un equilibrio determinato che entrambi gli autovalori di

B siano dentro il cerchio unitario. Formalmente la condizione per avere equilibrio determinato (unico) è la seguente:

- Sia  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) \neq 0$ . Sotto una regola di politica monetaria che usa dati contemporanei la condizione necessaria e sufficiente per un equilibrio unico di aspettative razionali (UREE) è che risulti:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) > 0 \quad (2.33)$$

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix A. Si noti che la condizione risulta soddisfatta in corrispondenza di una regola attiva.

### 2.3.2.1.2 – Apprendimento adattivo

Moltiplicando il sistema (2.31) per l'inversa della prima matrice che compare nel sistema stesso si ottiene:

$$y_t = \alpha + B y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.34)$$

Descrizione termini

$$y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix}; \alpha = 0; B \text{ si veda eq. (2.32)}; \chi = \frac{1}{\sigma + \varphi_z + \kappa\varphi_\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

La MSV solution della (2.34) assume la forma  $y_t = \alpha^* + c^* r_t^n$  con  $\alpha^* = 0$  e  $c^* = (I - \rho B)^{-1} \chi$ . In base a quanto stabilito prima gli agenti hanno una PLM che corrisponde alla MSV solution, che è quindi data da:

$$y_t = \alpha + c r_t^n \quad (2.35)$$

Al tempo corrente il set informativo è dato da  $\begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ r_t^n \end{bmatrix}$ . L'aspettativa diventa  $E_t y_{t+1} = a + c \rho r_t^n$ , che

sostituita nella (2.34) fa ottenere la seguente ALM per  $y_t$ :

$$y_t = Ba + (Bc\rho + \chi)r_t^n \quad (2.36)$$

Il mapping dalla PLM alla ALM assume la seguente forma:

$$T(a, c) = (Ba, Bc\rho + \chi) \quad (2.37)$$

Differenziando:

$$\frac{d}{dT}(a, c) = T(a, c) - (a, c) \quad (2.38)$$

I punti fissi della (2.38) forniscono la MSV solution.

Una soluzione particolare  $(a^*, c^*)$  è E-stable se la (2.38) è localmente asintoticamente stabile nel punto.

Il fatto di considerare  $a = 0$  è una semplificazione, il modello può avere  $a \neq 0$  e la forma della PLM non cambierebbe.

Si considerano ora le condizioni affinché un punto della (2.34) sia E-stable. Questo è un importante risultato perché, come si vedrà, le condizioni che garantiscono la E-stability sono le medesime che garantiscono UREE nel caso precedente.

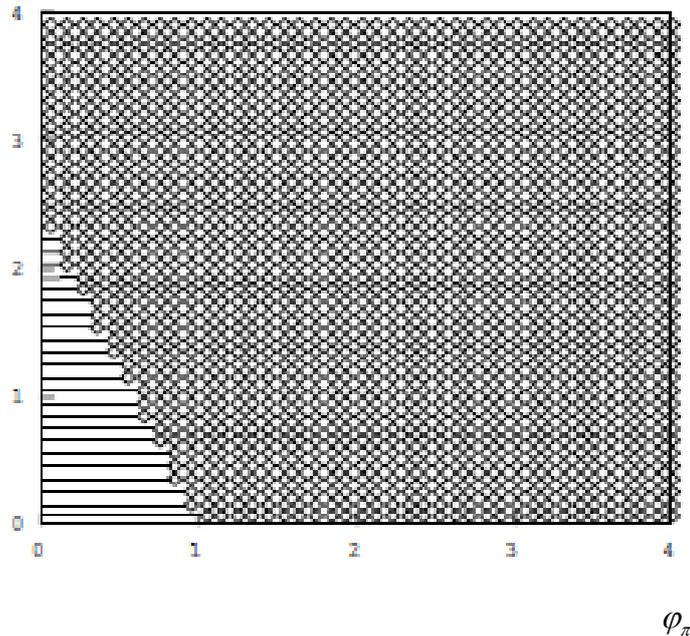
- Sia  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) \neq 0$ . Si supponga che il set informativo a disposizione degli agenti al tempo corrente sia  $\begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ r_t^n \end{bmatrix}$ . Sotto una regola di politica monetaria che usa dati contemporanei

la condizione necessaria e sufficiente affinché una MSV solution della (2.34),  $(0, c^*)$ , sia E-stable è che risulti:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) > 0 \quad (2.39)$$

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix B.

La E-stability della MSV solution come definita è compatibile con ogni parametrizzazione nella PLM degli agenti. La seguente figura mostra le regioni di determinatezza ed E-stability ottenute quando i parametri assumono i valori esposti nella tabella precedente, ad esclusione di  $\varphi_z$  e  $\varphi_\pi$  che sono variabili:

$\varphi_z$ 

Rombo: equilibrio determinato, E-stable

Linea: equilibrio indeterminato, non E-stable

Figura 7- Spazio dei parametri con Contemporaneous data (Fonte: Bullard and Mitra 2000)

Come di può osservare una grande parte dello spazio dei parametri è caratterizzata da determinatezza ed E-stability. . Una regione così vasta non si ritroverà con nessuna altro tipo di dati. La regione caratterizzata da REE soddisfa la condizione data dalla disequazione (2.39). Analiticamente significa che nello spazio dei parametri la MSV solution risulta E-stable. Nell'altra regione l'equilibrio corrispondente alla MSV solution risulta sempre E-unstable.

### 2.3.2.2 – Lagged data

#### 2.3.2.2.1 – Equilibrio determinato

Si prende in esame ora una regola di politica monetaria che considera dati ritardati. L'informazione che perviene al policy maker su inflazione e output è quella relativa al trimestre passato. Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.18). Per l'analisi si considera la regola di politica monetaria traslata un periodo in avanti. L'intero modello può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sigma^{-1} \\ -\kappa & 1 & 0 \\ \varphi_z & \varphi_\pi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \\ r_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.40)$$

Dal sistema si ricava la seguente matrice:

$$B = \frac{1}{(\varphi_z + \kappa\varphi_\pi)} \begin{bmatrix} 0 & -\beta\varphi_\pi & 1 \\ 0 & \beta\varphi_z & \kappa \\ \sigma(\varphi_z + \kappa\varphi_\pi) & \varphi_z + (\kappa + \beta\sigma)\varphi_\pi & -\sigma \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Le variabili libere sono  $z_t, \pi_t$  mentre  $r_t$  è fissata. Seguendo Farmer (1991, 1999) per avere UREE è necessario che due degli autovalori di B siano dentro il cerchio unitario. Questo si ottiene se la risposta del policy maker a inflazione e output è sufficientemente aggressiva. Oppure formalmente vale la seguente definizione:

- Con dati ritardati, condizioni sufficienti per avere UREE sono:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0 \quad (2.42)$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + \varphi_z < 2\sigma(1 + \beta) \quad (2.43)$$

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix C.

Dalla definizione si osserva come una regola attiva con una modesta risposta all'output può servire allo scopo.

### 2.3.2.2.2 – Apprendimento adattivo

Sostituendo la (2.18) nella (2.13) si può scrivere il sistema nella seguente forma:

$$y_t = \beta_1 y_{t+1}^E + \delta y_{t-1} + \chi r_t^n \quad (2.44)$$

Descrizione termini:

$$y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix}; \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ \kappa & \kappa\sigma^{-1} + \beta \end{bmatrix}; \delta = \begin{bmatrix} -\varphi_z\sigma^{-1} & -\varphi_\pi\sigma^{-1} \\ -\kappa\varphi_z\sigma^{-1} & -\kappa\varphi_\pi\sigma^{-1} \end{bmatrix}; \chi = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ \kappa\sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

Si assume che le aspettative siano formulate nel periodo precedente, e che l'informazione cui ha accesso il pubblico e la banca centrale è la medesima. La MSV solution della (2.44) ha la seguente forma:

$$y_t = a^* + b^* y_{t-1} + c^* r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t \quad (2.45)$$

I coefficienti assumono i seguenti valori:

$$a^* = 0; b^* = (I - \beta_1 b^*)^{-1} \delta; c^* = \rho(I - \beta_1 b^* - \rho\beta_1)^{-1} \chi$$

Dato che  $b^*$  è una matrice quadrata, ci possono essere diverse soluzioni. Il caso determinato si presenta quando la soluzione per  $b^*$  è unica, e questo si ottiene quando i suoi autovalori sono all'interno del cerchio unitario.

Si assuma che gli agenti abbiano una PLM con la seguente forma:

$$y_t = a + by_{t-1} + cr_{t-1}^n + \chi\varepsilon_t \quad (2.46)$$

Di conseguenza la ALM è data da:

$$y_t = (\beta_1 + \beta_1 b)a + (\beta_1 b^2 + \delta)y_{t-1} + (\beta_1 bc + \rho\beta_1 c + \rho\chi)r_{t-1}^n + \chi\varepsilon_t \quad (2.47)$$

Il mapping dalla PLM alla ALM assume la forma:

$$T(a, b, c) = ((\beta_1 + \beta_1 b)a, \beta_1 b^2 + \delta, \beta_1 bc + \rho\beta_1 c + \rho\chi) \quad (2.48)$$

Differenziando:

$$\frac{d}{dT}(a, b, c) = T(a, b, c) - (a, b, c) \quad (2.49)$$

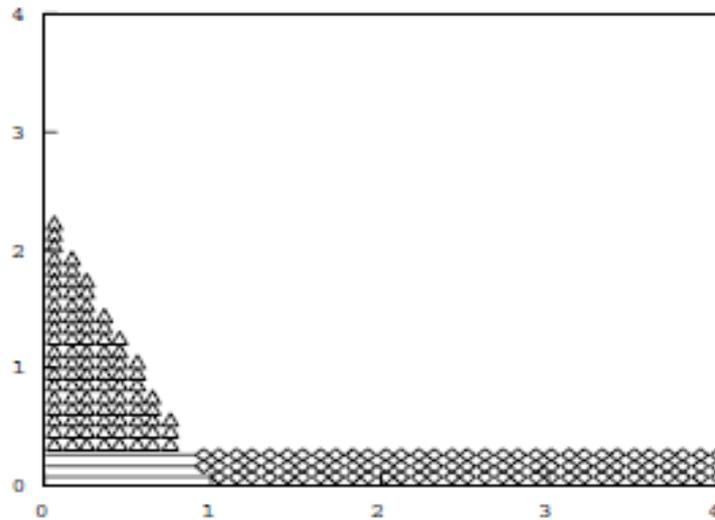
I punti fissi della (2.49) forniscono la MSV solution  $(a^*, b^*, c^*)$ . La soluzione particolare è E-stable se la (2.49) è localmente asintoticamente stabile nel punto. Inoltre si può considerare la E-stability di ogni MSV solution. Si devono in questo caso considerare gli autovalori delle tre seguenti matrici:

$$b^* \otimes \beta_1 + I \otimes \beta_1 b^* \quad (2.50)$$

$$\rho\beta_1 + \beta_1 b^* \quad (2.51)$$

$$\beta_1 + \beta_1 b^* \quad (2.52)$$

Gli autovalori devono avere parte reale minore di 1. Diversamente la MSV solution non è E-stable. La seguente figura compara i diversi casi per valori di  $\varphi_\pi$  e  $\varphi_z$  per una regola che usa dati ritardati:

$\varphi_z$  $\varphi_\pi$ 

Rombo: equilibrio determinato, E-stable

Linea: equilibrio indeterminato, non E-stable

Triangolo: equilibrio determinato, non E-stable

Regione vuota: dinamiche esplosive

Figura 8- Spazio dei parametri con Lagged data (Fonte: Bullard and Mitra 2000)

La tabella espone i risultati che le varie combinazioni di  $\varphi_z$  e  $\varphi_\pi$  raggiungono. Il caso determinato ed E-stable si ottiene quando c'è un'unica soluzione per la matrice  $b^*$  con entrambi gli autovalori all'interno del cerchio unitario; nel caso determinato ma non E-stable uno o tutti gli autovalori sono fuori dal cerchio unitario; il caso indeterminato si ha quando la MSV solution non è E-stable (gli autovalori delle matrici (2.50), (2.51), (2.52) hanno parte reale maggiore di 1); per finire le dinamiche esplosive si hanno quando non si ottiene alcuno dei casi precedenti. Come si può osservare la maggior parte dello spazio dei parametri è caratterizzato da dinamiche esplosive, di conseguenza solamente in pochi casi una regola che usa dati ritardati può condurre ad REE.

### 2.3.2.3 – Forward looking rules

#### 2.3.2.3.1 – Equilibrio determinato

La regola di politica monetaria fissa il tasso di interesse in risposta alle previsioni di inflazione e output. Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.19). La regola di politica monetaria può essere spiegata in diversi modi, tre nello specifico. Primo: la banca centrale potrebbe usare come target le previsioni del settore privato (Hall and Mankiw 1994); secondo: la banca centrale può prendere come riferimento le previsioni di inflazione implicite nei prezzi degli assets (Svensson 1997); da ultimo la banca centrale si basa sulle proprie previsioni di inflazione. Nel primo caso la BC agisce da follower, basandosi esclusivamente sulle previsioni del settore privato; nei due casi successivi c'è un duplice caso di apprendimento perché sia il settore privato che la BC agiscono in base alle loro previsioni. Si suppone che il modello usato da entrambe le parti sia identico. Per quanto riguarda l'analisi dell'equilibrio determinato si procede come nei casi precedenti.

Il modello assume la seguente forma matriciale, previa sostituzione della regola di politica monetaria:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^{-1}\varphi_z & \sigma^{-1}(1 - \varphi) \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.53)$$

Dal sistema si ottiene la seguente matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^{-1} & \sigma^{-1}(1 - \varphi_\pi) \\ \kappa(1 - \sigma^{-1}\varphi_z) & \beta + \kappa\sigma^{-1}(1 - \varphi_\pi) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Dato che  $z_t, \pi_t$  sono libere serve che entrambi gli autovalori di B siano dentro il cerchio unitario per avere UREE. Formalmente vale la seguente proposizione:

- Con dati previsivi le condizioni necessarie e sufficienti per avere UREE sono:

$$\varphi_z < \sigma(1 + \beta^{-1}) \quad (2.55)$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 + \beta)\varphi_z < 2\sigma(1 + \beta) \quad (2.56)$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 + \beta)\varphi_z > 0 \quad (2.57)$$

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix D.

I pesi assegnati alle relative stabilizzazioni sono importanti. Un valore alto di  $\varphi_z$  porta ad avere indeterminatezza, qualunque sia il valore di  $\varphi_\pi$ . Una risposta eccessivamente aggressiva a inflazione e output porta ad avere equilibri multipli. Con una regola attiva e una modesta risposta all'output è possibile avere UREE.

Una regola che risponde all'inflazione attesa e all'output corrente (Clarida, Gali and Gelter 2000) dimostra di avere meno condizioni per l'equilibrio determinato rispetto alle tre richieste dall'ultima proposizione. La regola in questione ha una forma del tipo:

$$r_t = \varphi_\pi \pi_{t+1}^E + \varphi_z z_t \quad (2.58)$$

In questo caso la condizione per avere REE è esclusivamente

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) - (1 + \beta)\varphi_z < 2\sigma(1 + \beta) \quad (2.59)$$

Questa volta i pesi dati alle stabilizzazioni creano situazioni differenti dalla regola con entrambe le variabili indipendenti in forma previsiva. Ad esempio una risposta aggressiva all'output porta all'equilibrio determinato. Concettualmente, minore è la presenza di variabili attese nella regola, minori sono le condizioni da rispettare per raggiungere REE. Di conseguenza analiticamente risulta più vantaggiosa l'applicazione della (2.58) rispetto alla (2.19). Tuttavia come detto disporre di dati correnti è più difficoltoso, dato che i calcoli per la determinazione dell'output la rendono a tutti gli effetti una variabile di stock, e quindi discreta. Allo stesso tempo l'applicazione della (2.58) è più facile di quella della (2.17), dove entrambe le variabili sono correnti. Complessivamente una banca centrale che investisse risorse per ottenere informazione al fine di operare con una regola come la (2.58) potrebbe ottenere risultati migliori. Infatti se essa tentasse di operare con una regola come la (2.17) è probabile che gli elevati costi per ottenere informazione valida su dati correnti peserebbero molto sul bilancio finale, rendendo particolarmente costoso l'REE. Al contrario se gli sforzi della BC fossero concentrati sull'ottenimento di informazione corrente esclusivamente sull'output gap, è probabile che la strategia risulterebbe maggiormente perseguibile e il risultato di equilibrio determinato E-stable più alla sua portata.

### 2.3.2.3.2 – Apprendimento adattivo

Per l'analisi della E-stability sotto apprendimento si moltiplica la (2.53) per l'inversa della prima matrice che compare nell'equazione stessa, ottenendo:

$$y_t = \alpha + B y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.60)$$

Descrizione termini:

$$y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix}; \alpha = 0; \chi = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ \kappa \sigma^{-1} \end{bmatrix}; B \text{ è definito dall'equazione (2.54).}$$

La MSV solution ha la consueta forma  $y_t = \alpha^* + c^* r_t^n$  con  $\alpha^* = 0$  e  $c^* = (I - \rho B)^{-1} \chi$ ; il resto dell'analisi continua come nella sezione dedicata alla regola con dati contemporanei, compresa la forma della PLM degli agenti. Formalmente vale la seguente proposizione:

- Si ipotizzi che al tempo corrente il set informativo sia dato da  $\begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ r_t^n \end{bmatrix}$ . Sotto dati con ipotesi

future, condizione necessaria e sufficiente per la MSV solution  $(0, c^*)$  della (2.60) di essere E-stable è:

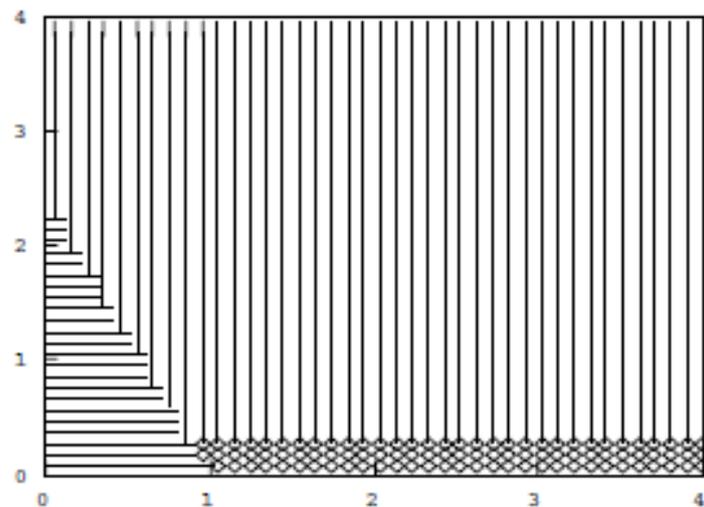
$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0 \quad (2.61)$$

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix E.

Le ultime due proposizioni mostrano che sotto dati con ipotesi future se un

MSV solution è unica, allora è E-stable; tuttavia questo non implica che l'equilibrio sia determinato, può essere anche indeterminato. Al di là di questo si trova comunque un legame fra regole attive ed E-stability, ossia regole attive garantiscono E-stability. La seguente figura mostra i tipi di equilibrio in funzione dei pesi dati alle stabilizzazioni:

$\varphi_z$



$\varphi_\pi$

Rombo: equilibrio determinato, E-stable  
 Linea orizzontale: equilibrio indeterminato, non E-stable  
 Linea verticale: equilibrio indeterminato, E-stable

Figura 9 – Spazio dei parametri con Forward looking rules (Fonte: Bullard and Mitra 2000)

Dalla figura si apprende come l'equilibrio determinato è sempre E-stable. Si nota come si consegue determinatezza ed E-stability solo se il peso dato all'output gap è molto basso (inferiore a 0,5). Il

rimanente spazio è dato da combinazioni di parametri che conducono ad un equilibrio indeterminato.

### 2.3.2.4 – Contemporaneous expectations

#### 2.3.2.4.1 – Equilibrio determinato

Si assume che l'informazione a disposizione del policy maker e del settore privato sia la medesima, ed arrivi fino al periodo precedente. Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.20). Sostituendo la regola di politica si può scrivere il modello in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma^{-1}\varphi_z & -\sigma^{-1}\varphi_\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t^E \\ \pi_t^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.62)$$

Si può ulteriormente semplificare scrivendo il modello nella seguente forma:

$$y_t = B_0 y_t^E + B_1 y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.63)$$

Descrizione termini:

$$y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix}; \quad \chi = \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ \kappa\sigma^{-1} \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} -\varphi_z\sigma^{-1} & -\varphi_\pi\sigma^{-1} \\ -\kappa\varphi_z\sigma^{-1} & -\kappa\varphi_\pi\sigma^{-1} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ \kappa & \beta + \kappa\sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

La situazione è molto simile al caso di regola con dati contemporanei. La condizione necessaria e sufficiente affinché vi sia REE è la medesima, ossia:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) > 0$$

Il resto dell'analisi è identico.

#### 2.3.2.4.2 – Apprendimento adattivo

Il modello è fornito dalla (2.63). La MSV solution ha la forma  $y_t = a^* + c^* r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t$  con  $a^* = 0$  e  $c^* = \rho(I - B_0 - \rho B_1)^{-1} \chi$ . Si assume che la PLM degli agenti sia data dalla seguente equazione:

$$y_t = a + c r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t \quad (2.64)$$

Le aspettative per il periodo corrente e per quello successivo sono date da:

$$E_{t-1}y_t = a + cr_{t-1}^n$$

$$E_{t-1}y_{t+1} = a + cE_{t-1}r_t^n = a + c\rho r_{t-1}^n$$

Sostituendo dentro la (2.63) si ottiene la ALM:

$$y_t = (B_0 + B_1)a + (B_0c + B_1c\rho + \chi\rho)r_{t-1}^n + \chi\varepsilon_t \quad (2.65)$$

Il mapping dalla PLM alla ALM ha la seguente forma:

$$T(a, c) = ((B_0 + B_1)a, (B_0c + B_1c\rho + \chi\rho))$$

Differenziando:

$$\frac{d}{dT}(a, c) = T(a, c) - (a, c)$$

Per la E-stability vale la seguente proposizione:

- Sotto una regola che usa aspettative contemporanee la condizione necessaria e sufficiente per la MSV solution della (2.63) di essere stabile è la medesima fornita dalla disequazione (48),  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0$ .

Per la dimostrazione si veda Bullard and Mitra (2000), Appendix F.

La soluzione è inoltre E-stable sotto altre parametrizzazioni della PLM, come ad esempio  $a^* = b^* = c^* = 0$ .

La (2.61) è condizione necessaria e sufficiente, sotto aspettative contemporanee, per avere UREE. Anche in questo caso si trova una stretta connessione tra regole attive ed E-stability. La relazione tra i parametri di stabilizzazione è la medesima del caso con dati contemporanei, e può essere osservata nella stessa figura.

### 2.3.4 – Conclusione sull'analisi della convergenza

Si è visto come una regola di politica che risponde a dati contemporanei sia preferibile per i risultati conseguiti analiticamente, ma difficilmente perseguibile nella realtà. Gli altri tipi di regole offrono un'alternativa di più facile applicazione, anche se, per dati ritardati e per dati previsivi la convergenza ad REE è più condizionata. La regola che usa dati correnti in aspettativa offre gli stessi risultati di quella che usa dati correnti, e sicuramente è l'alternativa migliore considerando l'intera analisi presentata, ma è necessario che le aspettative usate offrano un sufficiente grado di informazione.

Complessivamente non si può sostenere con certezza se e quando una regola è superiore ad un'altra. Infatti anche se i risultati raggiungibili da regole che usano dati contemporanei o dati in aspettativa sembrano essere superiori in termini di efficienza, si deve verificare quanto effettivamente le regole

sono applicabili. In questo caso particolare le regole funzionerebbero sostenendo un costo elevato per l'ottenimento dell'informazione sia che si usino dati normali o in aspettativa.

## 2.4 – Velocità di convergenza dell'apprendimento adattivo alle aspettative razionali

Si è valutato sotto quali condizioni un equilibrio di aspettative razionali è apprendibile dagli agenti. Compito del policy maker è implementare una politica comprensibile e convergente al REE; non si è tuttavia specificato in quanto tempo la regola converga al REE, tempo che potrebbe interessare pochi o molti periodi. In questa sezione si esporrà un'analisi sulla velocità di convergenza di un modello ad apprendimento adattivo al REE. Data la peculiarità dell'analisi il modello sarà sviluppato dall'inizio, considerando che diversi elementi vengono qui introdotti per la prima volta.

### 2.4.1 – Il modello

Il framework base usato per questa analisi è un modello di equilibrio generale dinamico con rigidità dei prezzi temporale. Le imprese operano in concorrenza monopolistica, i prezzi sono scaglionati e il settore privato ha una funzione di utilità intertemporale. Il modello è rappresentato dalla seguente curva IS intertemporale:

$$x_t = E^* x_{t+1} - \varphi(i_t - E^* \pi_{t+1}) + g_t \quad (2.66)$$

E dalla seguente curva di offerta aggregata, AS:

$$\pi_t = \alpha x_t + \beta E^* \pi_{t+1} \quad (2.67)$$

Nelle due relazioni precedenti  $x_t$  è l'output gap, misurato in deviazione logaritmica;  $\pi_t$  è l'inflazione del periodo corrente;  $E^* \pi_{t+1}$  è il livello di inflazione atteso dagli agenti per il periodo  $t+1$ ;  $E^* x_{t+1}$  è il livello di output gap atteso dagli agenti per il periodo  $t+1$ ;  $i_t$  è il tasso di interesse nominale a breve termine;  $g_t = \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_{gt}$  denota uno shock di domanda e segue un processo autoregressivo del primo ordine con  $0 \leq |\rho_g| < 1$  indicante la correlazione seriale e  $\varepsilon_{gt} \sim N(0, \sigma_g^2)$  termine di disturbo;  $\varphi > 0$ . Si noti che  $E^*$  indica un tipo di aspettativa non razionale non meglio specificata, come nella sezione precedente gli agenti inizialmente non sono razionali.

Il modello si completa definendo lo strumento a disposizione della politica monetaria, il tasso di interesse  $i_t$  che rappresenta la regola di politica monetaria. È dato dalla seguente formula (si noti che appartiene alla classe di regole *contemporaneous expectations* analizzati nella sezione precedente):

$$i_t = \gamma + \gamma_x E^* x_{t+1} + \gamma_\pi E^* \pi_{t+1} + \gamma_g g_t \quad (2.68)$$

Attraverso questa regola il sistema economico può essere descritto dalla seguente equazione matriciale:

$$Y_t = Q + FE_t^* Y_{t+1} + Sg_t \quad (2.69)$$

Descrizione termini:

$$Y_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ x_t \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} -\alpha\varphi\gamma \\ -\varphi\gamma \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \beta + \alpha\varphi(1-\gamma_\pi) & 0 \\ \varphi(1-\gamma_\pi) & 0 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}; \alpha, \beta > 0; \gamma_x = 1/\varphi; \gamma_g = 0$$

Sotto aspettative razionali il sistema descritto dalla (2.69) è non esplosivo se risulta (condizione necessaria e sufficiente):

$$\gamma_\pi \in S_1 = \left\{ \gamma_\pi; 1 - \left( \frac{1-\beta}{\alpha\varphi} \right) < \gamma_\pi < 1 + \left( \frac{1+\beta}{\alpha\varphi} \right) \right\} \quad (2.70)$$

Se  $\rho_g = 0$  allora l'equilibrio di aspettative razionali REE può essere scritto come:

$$\pi_t = a_\pi^* + \alpha g_t; x_t = a_x^* + g_t \quad (2.71)$$

E le aspettative (razionali) sono date da:

$$E_t \pi_{t+1} = a_\pi^*; E_t x_{t+1} = a_x^* \quad (2.72)$$

#### 2.4.2 – Apprendimento adattivo

Per analizzare la velocità di convergenza si procederà direttamente con un modello di apprendimento, non per confronto con un modello ad aspettative razionali come nelle sezioni precedenti.

Il settore privato effettua le sue aspettative attraverso un modello a minimi quadrati, con cui aggiorna le stime. Si studia il caso  $\gamma_\pi \in S_1$  preoccupandosi della convergenza del sistema economico all'REE dato dalla (2.71). Si assume che gli agenti non conoscano il valore reale di  $\alpha_\pi^*$  e lo stimino dall'informazione passata. Le aspettative sono date da:

$$E_t^* \pi_{t+1} = a_{\pi,t} \quad (2.73)$$

La forma di  $a_{\pi,t}$  è la seguente:

$$a_{\pi,t} = a_{\pi,t-1} + t^{-1}(\pi_{t-1} - a_{\pi,t-1}) \quad (2.74)$$

La previsione corrente è data dalla previsione precedente a cui si aggiunge l'errore di previsione del periodo precedente pesato per un termine noto come *gain sequence*. Reiterando la (2.74) si arriva a scrivere la previsione corrente in funzione dell'inflazione passata e del coefficiente di guadagno:

$$a_{\pi,t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \pi_{i-1} \quad (2.75)$$

Dato che il valore di aspettativa razionale è dato da  $a_{\pi}^*$ , l'analisi è focalizzata sulla convergenza e sul tempo impiegato da  $a_{\pi,t}$  per diventare uguale a  $a_{\pi}^*$ .

In generale, come già discusso, la convergenza di un modello di apprendimento ad REE è possibile esclusivamente in presenza di E-stability; al riguardo vale quanto detto nella sezione precedente. La stabilità di un equilibrio derivante dall'apprendimento è affrontata studiando il passaggio dai parametri stimati tramite il modello, la PLM, al vero valore dei parametri del modello, la ALM. In un sistema economico descritto dalla (2.69) con aspettative degli agenti descritte dalla (2.73) la ALM è rappresentata dalla seguente espressione:

$$\pi_t = T(a_{\pi,t}) + \alpha g_t \quad (2.76)$$

Dove il mapping dalla PLM alla ALM è dato da:

$$T(a_{\pi,t}) = -\alpha\phi\gamma + [\beta + \alpha\phi(1 - \gamma_{\pi})]a_{\pi,t} \quad (2.77)$$

Le dinamiche descritte dalle equazioni (2.74), (2.76), (2.77) possono essere studiate in termini dell'*ordinay difference equation* ODE associato:

$$h(a_{\pi}) = E[T(a_{\pi}) + \alpha g_t - a_{\pi}] \quad (2.78)$$

L'ODE va derivato rispetto ad  $a_{\pi}$ : se la derivata è minore di zero allora si ha E-stability. Questo è equivalente ad avere pendenza di  $T(a_{\pi})$  minore di uno; inoltre se sono conosciuti i parametri  $\alpha, \beta, \phi$  la E-stability risulta se si ha  $\gamma_{\pi} > 1 - [(1 - \beta) / \alpha\phi]$ .

Dopo una breve introduzione ove si sono ripresi argomenti già discussi si parla ora dell'argomento principale del paragrafo, la velocità di convergenza dell'algoritmo iterativo.

Le politiche che implicano equilibrio determinato ed E-stable (partendo da un algoritmo ricorsivo) sono da preferirsi. Inoltre il policy maker dovrebbe studiare, a seconda del sistema economico, quali sono le velocità relative alle diverse politiche implementabili, e tenerne conto nell'applicazione effettiva. Non è detto che regole di politica che presuppongono velocità superiore del modello ricorsivo associato siano migliori di regole che prevedono una convergenza più lenta e graduale. Detto questo la seguente figura rappresenta il mapping analiticamente descritto dall'equazione (2.77):

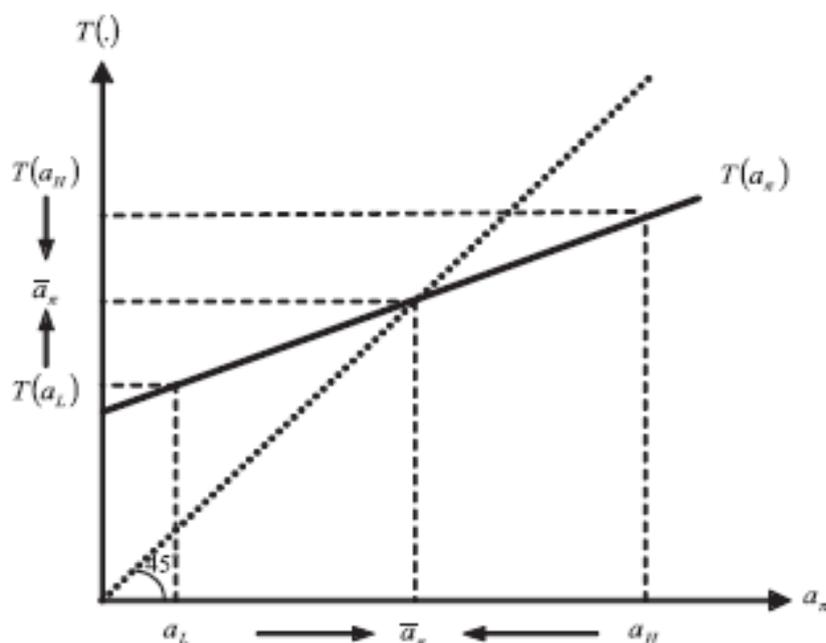


Figura 10 – Mapping dalla PLM alla ALM (Fonte: Ferrero 2007)

La figura mostra il passaggio del sistema economico da un'inflazione percepita  $a_L < a_\pi^*$  o  $a_H > a_\pi^*$  all'inflazione di equilibrio  $a_\pi^*$ . Le analisi presentate nelle sezioni precedenti possono spiegare le condizioni affinché nel sistema economico la pendenza della funzione  $T(a_\pi)$ , la linea nera nel grafico, si modifichi e diventi uguale alla linea treggiata, la ALM del sistema economico. Se la pendenza iniziale di  $T(a_\pi)$  fosse un particolare valore piuttosto che un altro nulla cambierebbe ai fini dell'analisi sulla convergenza esposta precedentemente. In questi termini politiche differenti sarebbero considerate in modo equivalente se garantissero il raggiungimento dell'REE. Lo scopo dell'analisi che si presenta è mettere in discussione questo punto, asserendo che le politiche vanno ulteriormente analizzate sulla base della velocità di convergenza.

In letteratura la velocità di convergenza di un modello ricorsivo è stata analizzata da Benveniste et al. (1990) attraverso procedure numeriche e modelli di simulazione. Di importanza centrale è l'ODE associato al modello, in questo caso l'equazione (2.78). A seconda del peso dato alla stabilizzazione dell'inflazione, di fatto il policy maker sceglie, consapevolmente o meno, la velocità alla quale il sistema converge ad REE.

Sia:  $S_2 = \left\{ \gamma_\pi : 1 - \left( \frac{0,5 - \beta}{\alpha \varphi} \right) < \gamma_\pi < \left( \frac{1 + \beta}{\alpha \varphi} \right) \right\}$  l'insieme di politiche sotto le quali la derivata della (2.78) è minore di -0,5. Il successivo enunciato dimostra come scegliendo il parametro di stabilizzazione viene definita la velocità alla quale la distanza fra l'inflazione stimata e quella reale si azzerava; per una discussione più dettagliata sul punto si veda Marcent and Sargent (1995).

- Con la regola di politica monetaria data dall'equazione (2.68) se  $\gamma_\pi \in S_2$  vale la seguente convergenza in distribuzione:

$$\sqrt{t}(a_{\pi,t} - a_{\pi}^*) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_a^2) \quad (2.79)$$

Dove:

$$\sigma_a^2 = \frac{\alpha^2 \sigma_g^2}{[1 - \beta - \alpha \varphi (1 - \gamma_{\pi})]} \quad (2.80)$$

Per la dimostrazione si veda Ferrero (2007), Appendix B.

Si noti che per le proprietà della distribuzione normale e della convergenza in distribuzione, il valore atteso della distribuzione normale di arrivo è pari all'inflazione reale del sistema; infatti la (2.79) è equivalente a  $\sqrt{t}a_{\pi,t} \xrightarrow{d} N(a_{\pi}^*, \sigma_a^2)$ . Il tempo per la convergenza è pari a  $\sqrt{t}$ . Inoltre sotto le stesse condizioni dell'enunciato appena esposto, più basso è il valore dato alla stabilizzazione dell'inflazione maggiore è il valore della varianza della distribuzione limite. Al di là del valore di  $\sqrt{t}$ , quanto detto significa che un'economia dove  $\gamma_{\pi}$  è basso subirà, a parità di altre condizioni, uno shock che interessa l'inflazione in modo particolarmente intenso, allontanandosi maggiormente dall'REE rispetto ad un'economia dove  $\gamma_{\pi}$  è più elevato. Dato questo meccanismo, l'apprendimento degli agenti sarà più lento.

Prima si è stabilito l'intervallo di valori di  $\gamma_{\pi}$  affinché la derivata dell'ODE sia minore di -0,5, da cui dipende il primo enunciato sulla velocità di convergenza. Questa condizione si traduce in una pendenza della funzione  $T(\cdot)$  derivante dalla (2.77) minore di 0,5. Se la derivata o la pendenza non rispettano queste condizioni, allora non vale quanto stabilito sulla velocità di convergenza. Questo si può osservare definendo il seguente set di politiche  $S_3 = \left\{ \gamma_{\pi} : 1 - \left( \frac{1 - \beta}{\alpha \varphi} \right) < \gamma_{\pi} \leq \left( \frac{0,5 - \beta}{\alpha \varphi} \right) \right\}$  che implica una pendenza di  $T(\cdot)$  minore di 1 e maggiore o uguale a 0,5. Si può calcolare, ad esempio usando il metodo Monte Carlo, che se  $\gamma_{\pi} \in S_3$  allora  $a_{\pi,t}$  converge a  $a_{\pi}^*$  ad una velocità differente da  $\sqrt{t}$ ; in questo caso in particolare la velocità è minore. Usando una procedura sviluppata in Marcent and Sargent (1995) è possibile ottenere una stima del tasso di convergenza di  $a_{\pi,t}$  a  $a_{\pi}^*$  quando  $\gamma_{\pi} \in S_3$ . Il tasso di convergenza  $\delta$  è definito in modo da avere:

$$t^{\delta}(a_{\pi,t} - a_{\pi}^*) \xrightarrow{d} F(0, \sigma_F^2) \quad (2.81)$$

Per  $t \rightarrow \infty$  si ha che  $\sigma_F^2 = E \left[ t^{\delta}(a_{\pi,t} - a_{\pi}^*) \right]^2$ . Grazie a questo risultato e all'equazione (2.81) si può ottenere una stima del tasso di convergenza:

$$\delta = \frac{1}{2 \log k} \log \frac{E \left[ t(a_{\pi,t} - a_{\pi}^*) \right]^2}{E \left[ (tk)^{\delta}(a_{\pi,tk} - a_{\pi}^*) \right]^2}$$

La distribuzione limite è rappresentata dalla distribuzione F, con  $k$  che è un parametro maggiore di zero.

La figura successiva mette a confronto il mapping dalla PLM alla ALM per  $\gamma_\pi$  appartenente a ognuno dei due insiemi precedentemente introdotti:

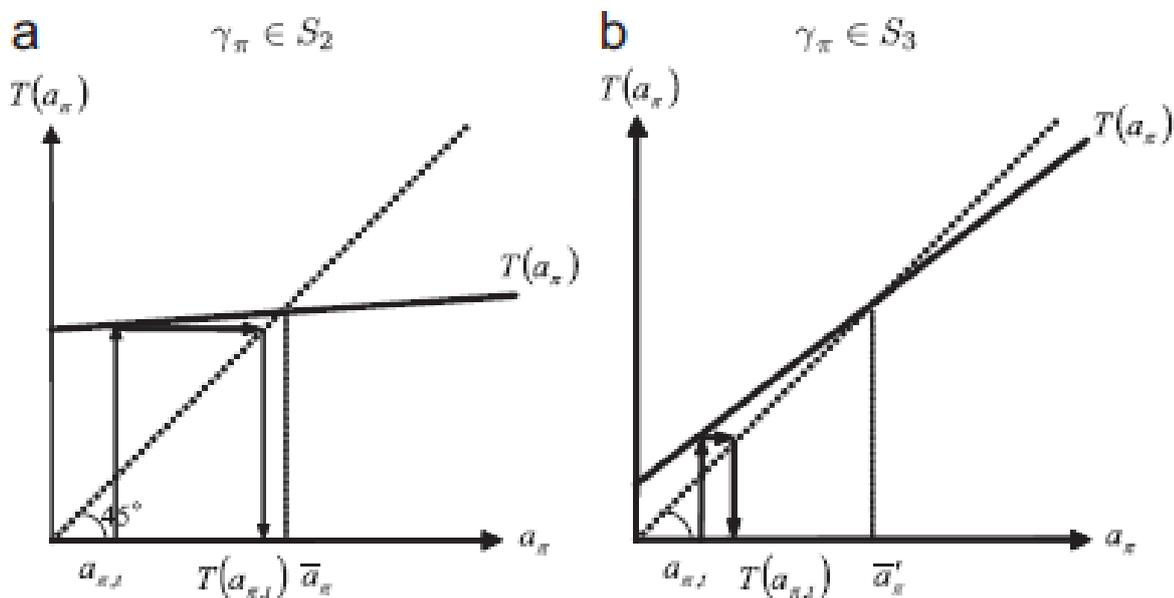


Figura 11 – Mapping dalla PLM alla ALM con  $\gamma_\pi$  appartenente a due diversi insiemi (Fonte: Ferrero 2007)

L'algoritmo dei minimi quadrati fa in modo che il nuovo valore stimato,  $a_{\pi,t+1}$ , sia una media tra  $a_{\pi,t}$  e  $T(a_{\pi,t})$  a cui si aggiunge un termine di errore. Quando  $\gamma_\pi \in S_2$  la risposta all'inflazione è aggressiva, e  $T(a_{\pi,t})$  è vicino a  $a_\pi^*$ ; dal lato opposto quando  $\gamma_\pi \in S_3$  il coefficiente di stabilizzazione dell'inflazione è basso e  $T(a_{\pi,t})$  è lontano da  $a_\pi^*$ . Da questo risulta la differente velocità di convergenza dell'algoritmo ricorsivo.

### 2.3.2.1 – Ottimalità delle politiche discrezionali

In questo paragrafo si considerano le politiche monetarie discrezionali. Il problema del policy maker è quello di risolvere un algoritmo di ottimizzazione scegliendo lo strumento  $i_t$  e il suo percorso temporale per risolvere la seguente funzione obiettivo:

$$\text{Max}_{x_t, \pi_t} - E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(\pi_t, x_t)$$

Con  $L(\pi_t, x_t) = \frac{1}{2} [\pi_t^2 + \lambda(x_t - x^*)^2]$ , date le equazioni (2.66), (2.67) e le aspettative degli agenti (non razionali). La soluzione del problema (derivata in Evans and Honkapohja 2003) è lo strumento di politica monetaria, e la sua forma è:

$$i_t = \gamma^* + \gamma_x^* E_t^* x_{t+1} + E_t^* \pi_{t+1} + \gamma_g^* g_t \quad (2.82)$$

con:

$$\gamma^* = -(\lambda / (\lambda + \alpha^2)) \varphi x^*; \gamma_x^* = \gamma_\pi^* = 1 / \varphi; \gamma_\pi^* = 1 + \alpha \beta / (\lambda + \alpha^2) \varphi$$

Questa è la regola ottimale derivata da Evans and Honkapohja, e nella trattazione seguente sarà indicata con *EH policy*. Si mostrerà ora che tale regola non è necessariamente ottimale sotto apprendimento. Sotto aspettative razionali l'equilibrio ha la forma:

$$\pi_t = E_t \pi_{t+1} = a_\pi^*; x_t = E_t x_{t+1} = a_x^* \quad (2.83)$$

Sotto apprendimento gli agenti non conoscono i valori veri delle variabili e li stimano attraverso l'algoritmo ricorsivo descritto, mentre la funzione che caratterizza il mapping dalla PLM alla ALM è data dalla seguente espressione:

$$T(a_{\pi,t}, a_{x,t}) = (\Phi^* + \Gamma^* a_{\pi,t}, \Phi^* \alpha^{-1} - (\beta - \Gamma^*) \alpha^{-1} a_{\pi,t}) \quad (2.84)$$

Con:

$$\Gamma^* = \frac{\lambda \beta}{(\lambda + \alpha^2)}; \Phi^* = \frac{\lambda \alpha}{(\lambda + \alpha^2)} x^*$$

Pur essendo la (2.84) funzione anche dell'output gap atteso, nella parte destra non compare alcun termine relativo all'output, di conseguenza si può evitare di studiarne le dinamiche.

Per  $0 < \Gamma^* < 1$  le condizioni necessarie e sufficienti per la determinatezza e per la E-stability, rispettivamente  $-1 < \Gamma^* < 1$  e  $\Gamma^* < 1$ , sono soddisfatte dalla EH policy; tuttavia sotto apprendimento sorgono altri problemi. Per mettere in risalto questi problemi l'autore ha effettuato delle simulazioni del modello di apprendimento sotto la EH policy usando la calibrazione dei parametri determinata in Clarida, Gali and Gertler (2000). Uno dei principali risultati è che la differenza fra l'inflazione corrente e quella prevista dall'REE è significativamente diversa da zero per diversi periodi. La seguente figura offre una rappresentazione della differenza periodale:

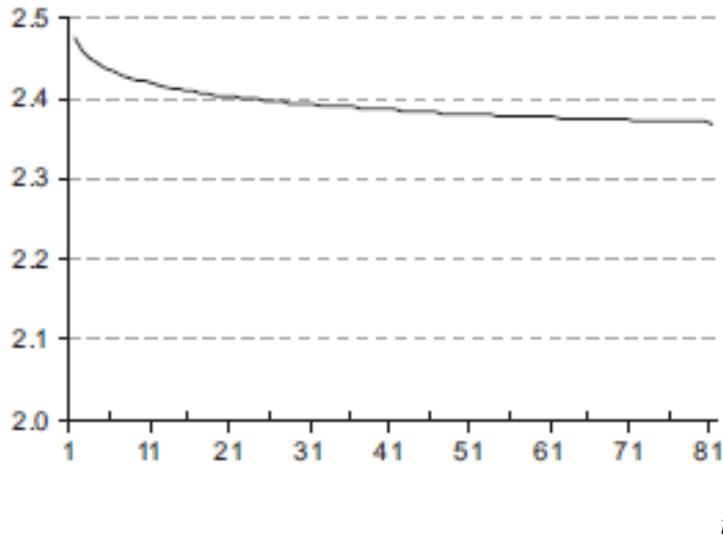
$\pi_t$ 

Figura 12 – Decrescita del tasso di inflazione con EH policy (Fonte: Ferrero 2007)

Le simulazioni riguardano l'evoluzione dell'inflazione percepita sotto apprendimento. La politica perseguita presenta  $\lambda = 0,1$ ,  $x^* = 0,0044$  ed è calibrata attraverso CGG (2000) per i rimanenti valori. Sotto REE l'inflazione periodale è dello 0,5 percento e quella annuale intorno al 2 percento. Considerando inizialmente un'inflazione annuale del 2,5 percento si osserva come dopo 81 periodi (20 anni e 1 trimestre) ci sia ancora un'inflazione percepita di 0,37 punti percentuali sopra quella in REE.

Sotto la EH policy la relazione tra le decisioni di politica, la pendenza di  $T(\cdot)$ , e la velocità di convergenza possono essere studiati analiticamente per ogni valore di  $\lambda$  e  $t$ . Quando  $a_{\pi,t}$  è stimato ricorsivamente, l'equazione (2.83) e la (2.84) possono essere analizzate in termini della seguente equazione differenziale deterministica che descrive il percorso temporale del gap sull'inflazione:

$$a_{\pi,t} - a_{\pi}^* = ((1 - t^{-1}) + t^{-1}\Gamma^*)(a_{\pi,t-1} - a_{\pi}^*) \quad (2.85)$$

Se un'economia è caratterizzata dalla stesse PLM e ALM (deterministiche) ma da un differente valore dei parametri  $(\alpha, \beta, \lambda)$ , si può definire come segue la velocità di convergenza:

- Siano A e B due sistemi economici con le stesse deterministiche PLM e ALM e il sistema sia descritto in termini dell'equilibrio dalle equazioni (2.83), (2.84), (2.85); siano  $(\alpha, \beta, \lambda)$  e  $(\alpha^*, \beta^*, \lambda^*)$  i set di parametri che descrivono A e B; siano  $a_{\pi}^*$ ,  $a_{\pi}^{*\bullet}$  gli REE e siano  $a_{\pi,t}$ ,  $a_{\pi,t}^{\bullet}$  le stime degli agenti risultanti dall'algoritmo ricorsivo. Il sistema economico A con set  $(\alpha, \beta, \lambda)$  convergerà più velocemente ad REE del sistema B con set  $(\alpha^*, \beta^*, \lambda^*)$  se risulta

$$\left| \frac{a_{\pi,t} - a_{\pi}^*}{a_{\pi,t-1} - a_{\pi}^*} \right| < \left| \frac{a_{\pi,t}^{\bullet} - a_{\pi}^{*\bullet}}{a_{\pi,t-1}^{\bullet} - a_{\pi}^{*\bullet}} \right| \text{ per ogni } t \text{ intero positivo.}$$

Inoltre indicando con  $T_{\alpha,\beta,\lambda}(a_{\pi,t})$  il mapping associato al set di parametri  $(\alpha,\beta,\lambda)$  vale il seguente risultato:

$$\left| \frac{\partial T_{\alpha,\beta,\lambda}(a_{\pi,t})}{\partial a_{\pi,t}} \right| < \left| \frac{\partial T_{\alpha^*,\beta^*,\lambda^*}(a_{\pi,t}^*)}{\partial a_{\pi,t}^*} \right|$$

L'economia con il set  $(\alpha,\beta,\lambda)$  ha una convergenza più veloce all'REE rispetto all'economia con il set  $(\alpha^*,\beta^*,\lambda^*)$ . Per la dimostrazione si veda Ferrero 2007, Appendix E.

Un ulteriore risultato derivante dalla EH policy è che per un dato set  $(\alpha,\beta)$  la velocità di convergenza dell'algorithmo iterativo dipende da  $\lambda$ , il peso relativo dell'output gap; in particolare la velocità di convergenza è funzione decrescente di  $\lambda$ . A tal proposito si può osservare la seguente figura, che mette in relazione la pendenza del mapping con  $\lambda$ :

$$\frac{\partial T(a_\pi)}{\partial a_\pi}$$

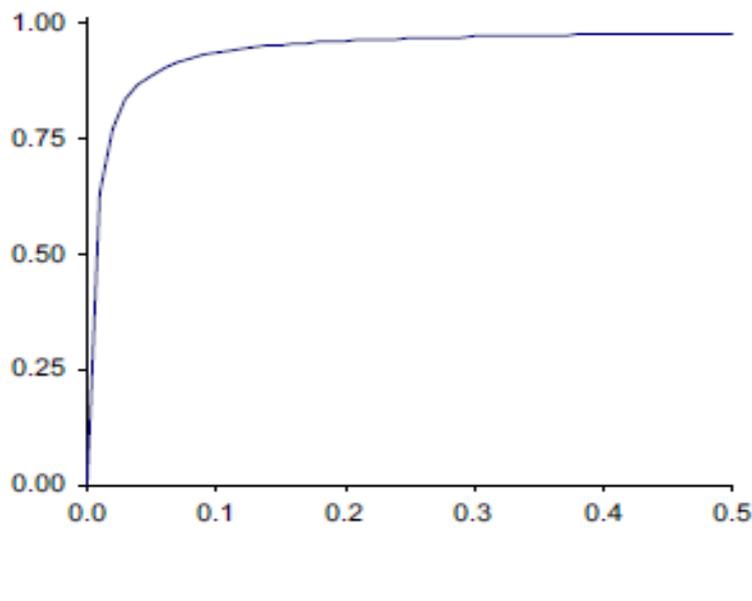


Figura 13 – Pendenza del mapping dalla PLM alla ALM in funzione di  $\lambda$  con EH policy (Fonte: Ferrero 2007)

Come si può osservare la pendenza incrementa al crescere di  $\lambda$ , anche se il salto è all'inizio, per valori di  $\lambda$  inferiori a 0,1. Come osservato precedentemente nel confronto fra valori del parametro di stabilizzazione dell'inflazione appartenenti rispettivamente a  $S_2$  e  $S_3$ , un incremento della pendenza del mapping diminuisce la velocità di convergenza.

### 2.4.2.2 – Aggiustamento della velocità di convergenza

Sotto aspettative razionali il problema della politica ottima discrezionale implica che il decisore non può influenzare le aspettative. Diversamente sotto apprendimento la politica influenzerà le previsioni future interessando l'intero processo, dato che esso si adatta alla politica. Se la PLM del sistema economico è correttamente specificata allora esiste un certo numero di politiche discrezionali ottimali che conducono al REE. Esse sono rappresentabili dal seguente insieme:

$$\Omega = \begin{cases} \gamma_\pi, \gamma, \gamma_g, \gamma_x : \gamma_g = \frac{1}{\varphi}, \gamma = \frac{\lambda x^*}{((\beta-1)\lambda - \alpha^2)} (\gamma_x(1-\beta) + (\gamma_\pi - 1)\alpha) \\ \gamma_x < \frac{1+\beta}{\varphi\beta}, 1 - \frac{(1-\beta)}{\alpha} \gamma_x < \gamma_\pi < 1 + 2 \frac{(1+\beta)}{\varphi\alpha} - \frac{(1+\beta)}{\alpha} \gamma_x \end{cases}$$

Tutte le politiche  $(\gamma_\pi, \gamma, \gamma_g, \gamma_x) \in \Omega$  presuppongono REE sotto aspettative razionali; sono caratterizzate da E-stability sotto apprendimento. Per la dimostrazione si veda Ferrero (2007), Appendix G.

Se tutte queste politiche nel lungo periodo raggiungono la stessa ottimalità, l'analisi sulla velocità di convergenza è rilevante nella scelta dell'applicazione di una regola piuttosto che di un'altra.

Si mostra ora come il policy maker può aggiustare la velocità di convergenza del processo di apprendimento. Il seguente insieme è composto da politiche coerenti con REE, e che permettono di aggiustare shocks di domanda e movimenti dell'output gap. La sigla ALS è per Adjusted Learning Speed, per indicare che sono appunto politiche che modificano la capacità degli agenti di apprendere.

$$\Omega^{ALS} = \begin{cases} \gamma_\pi^{ALS}, \gamma^{ALS}, \gamma_g^{ALS}, \gamma_x^{ALS} : \gamma_g^{ALS} = \frac{1}{\varphi} \\ \gamma^{ALS} = -\frac{\Phi^*(1-\tilde{\Gamma})}{(1-\Gamma^*)\alpha\varphi}, \gamma_\pi^{ALS} = \left(1 + \frac{\beta-\tilde{\Gamma}}{\alpha\varphi}\right) \end{cases} \quad (2.86)$$

Questo insieme di politiche è definito  $ALS-\tilde{\Gamma}$  policy rules, ed è un sottoinsieme di  $\Omega$ . Per questo tipo di regole, il mapping dalla PLM alla ALM è dato da:

$$T_{ALS-\tilde{\Gamma}}(a_{\pi,t}) = \left( \frac{(1-\tilde{\Gamma})}{(1-\Gamma^*)} \Phi^* + \Gamma^* a_\pi, \frac{\Phi^*(1-\tilde{\Gamma})}{(1-\Gamma^*)\alpha} - \frac{(\beta-\Gamma^*)}{\alpha} a_{\pi,t} \right) \quad (2.87)$$

Come si può osservare la (2.87) non dipende dall'output gap percepito, di conseguenza come prima ci si può focalizzare esclusivamente sul mapping dall'inflazione percepita a quella attuale. Il policy maker che sceglie un'appropriata combinazione tra  $\gamma_\pi^{ALS}$  e  $\gamma^{ALS}$  è in grado di determinare la stessa inflazione e lo stesso output gap sotto EH policy e può scegliere  $\tilde{\Gamma}$  e dunque la velocità di convergenza che preferisce. La risposta all'inflazione attesa,  $\gamma_\pi^{ALS}$ , se aggressiva appiattisce la

funzione  $T_{ALS-\tilde{\Gamma}}(\cdot)$  e dunque fa aumentare la velocità di convergenza. Da questo deriva che se gli agenti apprendono adattivamente e l'inflazione percepita inizialmente è la stessa sotto  $ALS-\tilde{\Gamma}$  e EH policies, se  $\gamma_{\pi}^{ALS} > \gamma_{\pi}^*$  lungo la transizione all'REE l'inflazione percepita e attuale sotto  $ALS-\tilde{\Gamma}$  sarà più vicina a quella da REE rispetto a quella sotto EH. Vale il viceversa con  $\gamma_{\pi}^{ALS} < \gamma_{\pi}^*$ .

La seguente figure descrive il mapping  $T_{ALS-\tilde{\Gamma}}(a_{\pi,t})$ :

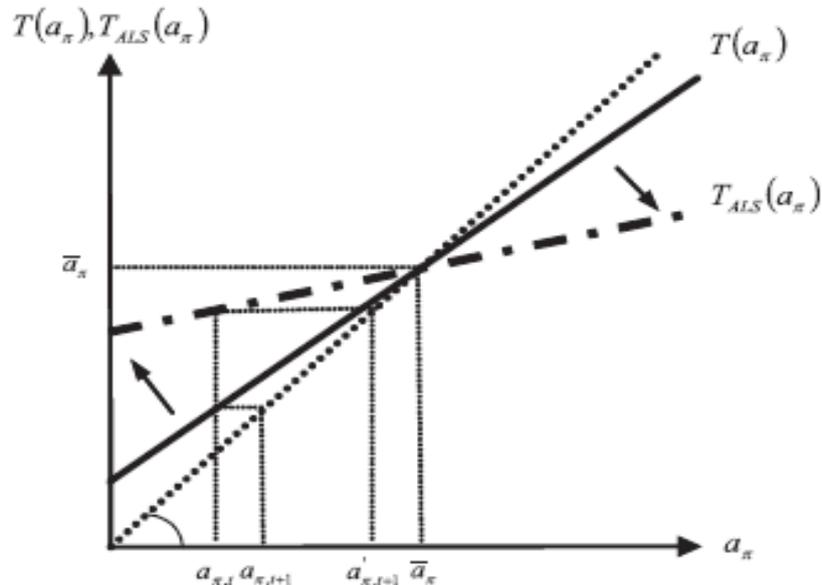


Figura 14 – Confronto fra le pendenze dei mapping di  $ALS-\tilde{\Gamma}$  policy e EH policy (Fonte: Ferrero 2007)

Si noti che il punto fisso è lo stesso sotto  $ALS-\tilde{\Gamma}$  e EH policies, ma le intercette e le pendenze sono differenti. Inoltre un importante risultato conseguito dalla  $ALS-\tilde{\Gamma}$  policy è che sotto di essa la velocità di convergenza non dipende dal peso dato all'output gap: infatti dato che la pendenza del mapping è data da  $\tilde{\Gamma} = (1 - \gamma_{\pi}^{ALS})\alpha\varphi + \beta$  e non compare  $\lambda$ , la convergenza non è interessata dal parametro.

Considerando la EH policy, se i parametri  $\alpha, \varphi, \beta$  sono dati, allora la convergenza è interamente determinata dal peso attribuito all'output gap. Diversamente sotto  $ALS-\tilde{\Gamma}$  policy la velocità di apprendimento e la stabilizzazione dell'output sono tra loro indipendenti. È interessante studiare le due politiche considerando la stessa distanza di partenza dal REE  $|a_{\pi,0} - a_{\pi}^*| > 0$  valutando quanti periodi occorrono a ognuna affinché risulti  $|\pi_t - a_{\pi}^*| < 0$ .

Usando la calibrazione esposta in Clarida, Gali and Gertler (2000) si ipotizza che l'inflation target sia caratterizzato da  $\lambda = 0,1$  e  $x^* = 0,0044$ . La seguente figura compara i risultati ottenuti a seguito di una simulazione per la EH e la  $ALS-\tilde{\Gamma}$  con  $\gamma_{\pi}^{ALS} = 2,6$ . Il REE per l'inflazione annuale è pari al 2 per cento, mentre  $a_{\pi,0}$  è pari a 2,5 per cento

$\pi_t$

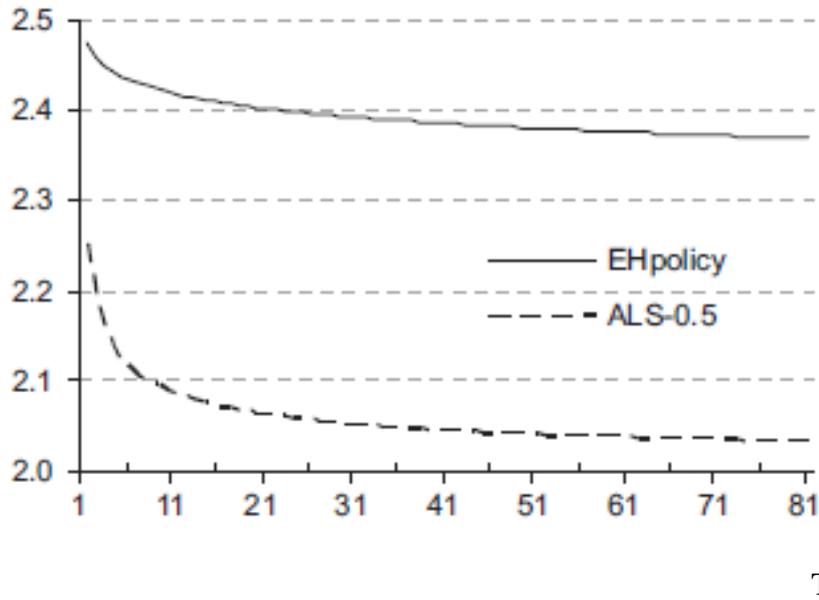


Figura 15 – Decrescita del tasso di inflazione sotto  $ALS - \tilde{\Gamma}$  policy e sotto EH policy (Fonte: Ferrero 2007)

Come si può osservare la politica che prevede un aggiustamento dell'apprendimento sembra più efficiente. Dopo 1 trimestre la percentuale di inflazione sopra l'REE per la  $ALS - \tilde{\Gamma}$  è dimezzata, per la EH è quasi uguale. Dopo 4 trimestri sotto  $ALS - \tilde{\Gamma}$  l'eccedenza è di 0,1, per la EH è 0,45. La seguente tabella calcola il numero trimestri per cui si registrano differenze  $\pi_t - \pi_{REE}$  di diverso ammontare in funzione di  $\gamma_{\pi}^{ALS}$  :

Quarters needed in order to have $(\pi_t - \bar{\pi}_{REE})$ smaller than					
$\gamma_{\pi}^{ALS}$	$\Gamma'$	0.4%	0.3%	0.2%	0.1%
3.6	0.2	1	1	1	2
3.0	0.4	1	1	2	4
2.6	0.5	1	1	2	8
2.3	0.6	1	2	4	22
1.6	0.8	2	7	50	> 1000
1.3	0.9	6	98	> 1000	> 1000
1.2 <sup>a</sup>	0.94	24	> 1000	> 1000	> 1000
1.03	0.98	> 1000	> 1000	> 1000	> 1000

Tabella 5 – Persistenza delle differenze  $\pi_t - \pi_{REE}$  positive (Fonte: Ferrero 2007)

Si può osservare come per diversi valori di  $\gamma_{\pi}^{ALS}$ , a cui corrispondono precisi valori di  $\tilde{\Gamma}$ , i trimestri di persistenza della differenza  $\pi_t - \pi_{REE}$  si modifichino. Per valori alti di  $\gamma_{\pi}^{ALS}$  le differenza permane per un unico o per pochi trimestri. Confrontando la persistenza della differenza per diversi valori di

$\gamma_{\pi}^{ALS}$  si osserva come conti considerevolmente il peso dato alla stabilizzazione dell'inflazione. Per quanto riguarda una differenza di 0,2 percento, una politica con un peso alla stabilizzazione dell'inflazione di 1,6 impiega 50 volte il tempo per ottenere la differenza rispetto a una politica con  $\gamma_{\pi}^{ALS} = 3,6$ ; mentre per  $\gamma_{\pi}^{ALS} = 1,2$  si ha un tempo superiore a 1000 volte.

#### 2.4.3 – Conclusione sulla velocità di convergenza del processo di apprendimento

Si è visto il peso che le regole di politica monetaria hanno nel determinare la velocità di convergenza dell'algoritmo di apprendimento. L'analisi è stata interamente presentata concentrandosi sul mapping dall'inflazione percepita all'inflazione attuale, ed è stato osservato come sia importante la pendenza assunta da questa relazione. In termini di velocità di convergenza, si è ulteriormente raffinata l'analisi tra apprendimento adattivo, aspettative razionali e politica monetaria, evidenziando come sotto apprendimento una valida politica monetaria deve prevedere la convergenza del processo in un tempo apprezzabile. Dunque il policy maker nella scelta della regola da implementare, se ritiene che il settore privato non abbia aspettative razionali, deve curarsi dei costi connessi all'informazione, della possibile convergenza al REE e, da ultimo, della velocità di convergenza all'REE. Una politica scelta sulla base di questi criteri consentirà di raggiungere risultati validi. Tra le politiche presentate sono molto interessanti quelle che prevedono l'aggiustamento dell'apprendimento. Si è osservato come siano in grado di reagire molto bene a shocks inflattivi e ad avvicinare l'inflazione post-shocks a quella prevista dall'REE solo dopo pochi periodi. Inoltre esse non dipendono dal peso relativo dato all'output gap, di conseguenza il policy maker si può concentrare separatamente sui due obiettivi di stabilizzazione raggiungendo risultati apprezzabili.

#### 2.5 – Apprendimento della Banca Centrale

In questo capitolo si è dato molto spazio all'apprendimento, osservando il suo funzionamento attraverso modelli statistico-matematici. L'apprendimento è l'argomento centrale del capitolo e si è visto il suo comportamento sia come modello a sé stante sia come modello di transizione che presuppone l'evoluzione in aspettative razionali. La chiave alla base dell'apprendimento è che ad ogni periodo gli agenti abbiano una PLM che usano per fare previsioni su inflazione e output gap e che produce l'equilibrio temporaneo, la ALM. In base alla ALM gli agenti aggiornano le loro previsioni per il periodo successivo, in un meccanismo iterativo. Questa modalità di fare previsioni è d'accordo con la critica di Lucas, infatti la formazione delle aspettative è in questo modo endogena al modello, di conseguenza si aggiusta in base a cambiamenti della politica o dei parametri strutturali.

Una questione che emerge dalla politica monetaria e dai modelli previsivi usati per le aspettative è in quale modo l'interazione tra settore privato e policy maker/banca centrale influenzi il benessere

della collettività. Finora si è attribuita primaria importanza alle aspettative del settore privato, e l'efficienza della politica monetaria è stata collegata esclusivamente a questo dato; nulla è stato detto sul modo in cui la BC processa l'informazione, a parte un accenno quando si è discusso delle *forward data rules*. Si segue una linea di pensiero molto recente che ipotizza che anche la BC segua un algoritmo ricorsivo di apprendimento. Attraverso questa ipotesi si chiude l'analisi sull'apprendimento, attribuendo anche al decisore della politica monetaria la stessa assunzione che è valsa per gli operatori economici privati. In questo paragrafo alla banca centrale è attribuito lo stesso ruolo dell'agente privato: ha una imperfetta conoscenza del sistema economico e stima i parametri strutturali dell'economia con un algoritmo ricorsivo.

Quanto stabilito nei paragrafi precedenti è valido, (a parte, come si vedrà, i risultati sulla velocità di convergenza) in questo paragrafo si discute solamente dell'apprendimento della BC. Si definiscono ora alcune equazioni per comprendere l'analisi.

$$y = \alpha(\pi - \pi^E) + \varepsilon$$

La relazione esprime una curva di Phillips che restituisce l'output gap  $y$  in funzione della sorpresa sull'inflazione  $(\pi - \pi^E)$ ;  $\pi, \pi^E$  sono l'inflazione e l'inflazione attesa;  $\varepsilon$  è un termine di disturbo IID uniformemente distribuito nell'intervallo  $[-\mu, \mu]$ .

Il termine  $\varepsilon$  è inosservabile sia dal settore privato che dalla BC, tuttavia un segnale  $z$  collegato al disturbo  $\varepsilon$  è osservabile dalla BC successivamente alla manifestazione delle aspettative del settore privato.

$\alpha$  è una variabile casuale che rappresenta il trade-off fra output e inflazione.  $\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}$  con  $\alpha \sim IID(\bar{\alpha}, \sigma_\alpha^2)$ ; ossia  $\alpha$  è dato dal suo valore atteso a cui si somma un termine di disturbo  $\tilde{\alpha}$ ;  $\alpha$  è indipendente da ogni altro termine nel modello.

Per formalizzare l'apprendimento si ipotizza che  $\bar{\alpha}$  e  $\sigma_\alpha^2$  siano sconosciuti alla BC, di conseguenza è sconosciuta la distribuzione di  $\alpha$ . Grazie al segnale  $z$  e al valore osservabile ogni periodo di  $y, \pi$  la BC può procedere alla stima di entrambi i parametri.

Il modello ad apprendimento duplice è formalizzato dalle seguenti equazioni:

$$a_{pt} = a_{pt-1} + \frac{1}{t}(\pi_{t-1} - a_{pt-1})$$

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \frac{1}{t} R_{\pi,t-1}^{-1} (\pi_{t-1} - a_{pt-1}) \left[ \left( y_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right) - \hat{\alpha}_{t-1} (\pi_{t-1} - a_{pt-1}) \right]$$

$$R_{y,t} = R_{y,t-1} + \frac{1}{t} \left[ \left( y_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right)^2 - R_{y,t-1} \right]$$

$$R_{\pi,t} = R_{\pi,t-1} + \frac{1}{t} \left[ \left( \pi_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right)^2 - R_{\pi,t-1} \right]$$

Descrizione termini ed equazioni:

$a_{pt}$  esprime il modo in cui gli agenti apprendono adattivamente. Se usano un modello ricorsivo a minimi quadrati, la prima equazione del sistema descrive il modo in cui le aspettative si sviluppano.  $\frac{1}{t}$  è il *gain parameter* ed è funzione decrescente del tempo. Le altre tre equazioni descrivono il comportamento della banca centrale.  $\hat{a}_t$  è una stima del valore atteso del trade-off fra inflazione e output;  $R_{y,t}$  misura la varianza non condizionata di  $y - \frac{z}{2}$ . Dato che  $E(\varepsilon|z) = \frac{z}{2}$  il termine  $y - \frac{z}{2}$  fornisce una stima non distorta della parte di output gap non riconducibile a  $\varepsilon$  ma dipendente dalla sorpresa sull'inflazione.  $R_{\pi,t}$  rappresenta il secondo momento della distribuzione della sorpresa sull'inflazione.

La BC usa  $R_{\pi,t}$  e  $R_{y,t}$  come dati di input per ottenere la risposta ottimale al segnale  $z$ . La ricorsività di  $R_{\pi,t}$  dà luogo alla stima della varianza della sorpresa sull'inflazione. La ricorsività di  $\hat{a}_t$  può essere spiegata introducendo un'equazione con l'output, cui vengono aggiunte nuove componenti rispetto alla vecchia:

$$y - \frac{z}{2} = \bar{\alpha}(\pi - a_p) + \left[ \varepsilon - \frac{z}{2} + \tilde{\alpha}(\pi - a_p) \right]$$

I termini sono tutti conosciuti a meno di  $a_p$ , che rappresenta il punto fisso dell'ODE associato al mapping dalla PLM alla ALM nel caso di apprendimento del settore privato e coincide con l'equilibrio unico di aspettative razionali<sup>8</sup>. Il segnale  $z$  è osservato e  $\bar{\alpha}$  può essere ottenuto attraverso una regressione su  $(\pi - a_p)$ . Usare  $y - \frac{z}{2}$  come variabile dipendente nella regressione è efficace dal momento che  $\varepsilon - \frac{z}{2}$  è ortogonale a  $z$ . Dato che  $\alpha$  è indipendente da ogni altro disturbo si ha che la regressione di  $y - \frac{z}{2}$  su  $(\pi - a_p)$  è uno stimatore consistente di  $\bar{\alpha}$ .

Anche la ricorsività di  $R_{y,t}$  necessita di spiegazioni. Uno stimatore distorto di  $E(\alpha^2)$ , il momento secondo del trade-off inflazione/output, si può ottenere dalla media dei quadrati dell'output gap e dal secondo momento della sorpresa sull'inflazione:

$$\frac{E\left(y - \frac{z}{2}\right)^2}{E(\pi - a_p)^2} = \frac{E(\alpha^2)E(\pi - a_p)^2 + E\left(\varepsilon - \frac{z}{2}\right)^2}{E(\pi - a_p)^2} = \bar{\alpha}^2 + \sigma_\alpha^2 + \frac{2\mu^2}{3E(\pi - a_p)^2}$$

---

<sup>8</sup> Per la derivazione di  $a_p$  si veda Locarno (2006)

La distorsione dipende da  $E(\pi - a_p)^2$  e da altri parametri ricavabili. Dato che  $v_t = \frac{R_{y,t} - 2\frac{\mu^2}{3}}{R_{\pi,t}}$  è lo stimatore di  $\bar{\alpha}^2 + \sigma_\rho^2$ ,  $R_{y,t}$  rappresenta un passaggio intermedio nel calcolo dello stimatore<sup>9</sup>.

La convergenza dell'intero sistema ad REE dipende dall'ODE associato. Nel caso la BC usi una funzione di perdita quadratica (il caso di preferenze lessicografiche è molto simile) si ha che:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_p \\ \frac{d}{dt} \hat{\alpha} \\ \frac{d}{dt} R_y \\ \frac{d}{dt} R_\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\frac{R_y - 2\mu^2/3}{R_\pi} + \beta} + \frac{\hat{a}}{\frac{R_y - 2\mu^2/3}{R_\pi} + \beta} \frac{\mu}{6} \\ R_\pi^{-1} E(\pi - a_p)^2 (\bar{\alpha} - \hat{\alpha}) \\ E\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 - R_y \\ E(\pi - a_p)^2 - R_\pi \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Per quanto riguarda la convergenza dovuta alla ricorsività delle varie espressioni si ha che  $R_\pi \rightarrow E(\pi - a_p)^2$  e  $R_\pi^{-1} E(\pi - a_p)^2 \rightarrow I$ ; la stessa cosa accade per  $y$ . La convergenza di  $R_y$  e  $R_\pi$  implica che la stabilità di  $\hat{\alpha}$  possa essere studiata in modo indipendente, concentrandosi esclusivamente sull'equazione differenziale.

Le condizioni per l'apprendimento dell'REE in un modello con due agenti, settore privato e banca centrale sono riassunte nella seguente proposizione:

- Si assuma che il sistema economico sia composto da un settore privato e da una banca centrale che apprendono adattivamente usando un modello ricorsivo a minimi quadrati. Il comportamento asintotico del sistema è descritto dalla (2.88) e l'equilibrio di aspettative razionali è unico e E-stable. La stima  $(\hat{\alpha}_t, v_t)$  converge localmente a  $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2 + \sigma_\alpha^2)$  e le aspettative del settore privato convergono al valore di aspettative razionali. Per la dimostrazione si veda Locarno 2006, Appendix Proposition 5.

<sup>9</sup> Il termine  $\bar{\alpha}^2 + \sigma_\rho^2$  ha a che fare con l'estrazione di informazione dal segnale  $z$ . Nel modello per esteso la BC fissa

il tasso di inflazione nel seguente modo:

$$\pi = \begin{cases} \pi^E - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + \sigma_\alpha^2} \left( \frac{z}{2} - k \right) = \pi^E - \frac{z}{\phi} + \frac{2k}{\phi} \text{ con } z \geq 2k + \phi(\pi^E - \bar{\pi}) \\ \bar{\pi} \end{cases}$$

dove  $\phi^{-1} \equiv \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + \sigma_\alpha^2} \frac{1}{2}$

Da questa proposizione non si ricava quale sia la velocità di convergenza degli algoritmi ricorsivi. Nel caso di apprendimento doppio, l'imperfetta conoscenza della BC rappresenta un ulteriore elemento di interazione tra la politica monetaria e l'output complicando le dinamiche evolutive del modello, di conseguenza rendendolo difficile da studiare solo osservando la distribuzione asintotica dei parametri. Quando l'algoritmo di apprendimento è disturbato da diversi shocks, solo per alti valori di  $t$  l'ODE diventa una buona approssimazione dell'algoritmo ricorsivo. Inoltre quando ci sono equilibri multipli la situazione è problematica, questo perché se le stime sono basate su pochi gradi di libertà, degli shocks particolarmente elevati possono portare  $\theta_t = \begin{bmatrix} a_{pt} & \hat{\alpha}_t & R_{y,t} & R_{\pi,t} \end{bmatrix}$  fuori dal dominio di attrazione dell'ODE complicando la stabilità degli equilibri.

Al di là di queste complicazioni anche in un modello con apprendimento doppio si può avere la convergenza ad REE. Tuttavia l'interazione fra i due tipi di apprendimento non rende particolarmente evidente su come condurre un'analisi sulla velocità di convergenza, quindi non è chiaro quanto quello detto nei precedenti paragrafi si possa applicare qui.

Sviluppare questa linea di pensiero secondo la quale anche il decisore della politica monetaria non ha perfetta conoscenza dell'economia può essere importante per risolvere le problematiche relative al controllo monetario, e ipotizzare che anche le banche centrali seguano modelli di apprendimento può essere un approccio plausibile.

## Conclusione

Le aspettative razionali rappresentano un punto fisso nella teoria economica e sono una guida per lo sviluppo di modelli previsivi di applicazione economica. Grazie ad esse i modelli economici hanno raffinato le capacità previsive, introducendo nel loro funzionamento la modalità forward-looking. Un modello economico risolto con aspettative razionali descrive il corretto modo di funzionamento del sistema corrente e descrive come il sistema si comporterà in futuro in modo ottimale; rappresenta la realtà nel caso il settore pubblico e quello privato si comportino in modo pienamente razionale, nel comportamento corrente e nelle azioni future. Puntualizzando la loro natura di punto di arrivo, gli economisti che le hanno ideato e sostenuto le aspettative razionali hanno aperto la strada per lo sviluppo di procedimenti che giustifichino la natura della conoscenza perfetta del sistema economico. L'apprendimento è stata una delle risposte. Diversamente dalle aspettative razionali che nascono come un metodo a sé stante e successivamente vengono applicate nei modelli macroeconomici e nella risoluzione di problemi di politica monetaria, l'apprendimento adattivo è fin da subito definito come un metodo di stima della politica monetaria da parte degli agenti. La natura del metodo ricorsivo usato per la stima di quanto rilevante serve per comprendere se la politica monetaria stabilizza le aspettative (ovvero se è congegnata in modo da permettere la transizione verso le aspettative razionali, se l'algoritmo è definito in modo corretto. Inoltre quasi sotto le stesse condizioni per la convergenza si sono potute fare considerazioni sulla velocità del processo di apprendimento, processo che principalmente riguarda i parametri usati per la stabilizzazione delle variabili di interesse. Le proprietà di convergenza del processo di apprendimento permettono al policy maker di scegliere con cura la politica monetaria da applicare

al sistema economico. Se il settore privato apprende in modo adattivo, allora a seconda dei dati che il policy maker usa, la convergenza del processo di apprendimento può essere più o meno difficile e la scelta dei parametri di stabilizzazione è importante. Come si è visto, i casi più difficili da trattare per la convergenza sono rispettivamente i *lagged data* e le *forward data rules* anche se probabilmente sono i casi più realistici di condotta di politica monetaria più facili. Un'ulteriore osservazione da fare per il policy maker è quanto tempo le politiche convergenti impiegano per modificare l'algoritmo ricorsivo degli agenti evolvendolo in aspettative razionali. L'analisi permette di valutare con attenzione le politiche implementabili, permettendo di scegliere il tempo per la convergenza alle aspettative razionali, e dunque all'REE del sistema economico. Graficamente la velocità si può osservare tracciando il mapping dalla PLM alla ALM e osservando l'inclinazione della retta che rappresenta graficamente il mapping. Introducendo l'apprendimento della banca centrale la situazione si complica. Anche se è possibile la convergenza all'REE l'interazione fra i due diversi tipi di apprendimento complicano l'analisi sulla stabilità degli equilibri e rendono difficile fare considerazioni sulla velocità del processo adattivo.

L'apprendimento adattivo rappresenta senza dubbio un metodo di stima più vicino alla realtà. La perfetta conoscenza non disponibile subito e la possibile transizione verso le aspettative razionali lo rendono un metodo facilmente applicabile e desiderabile per le sue proprietà. Inoltre esso è compatibile con ognuna delle diverse classi di regole di politica monetaria, il che lo rende un metodo versatile e adattabile a diverse situazioni. L'analisi sull'apprendimento può essere arricchita e migliorata introducendo incertezza – e quindi apprendimento – anche da parte della banca centrale.

## Indice delle figure e delle tabelle

Figura 1 – Frontiera efficiente $\sigma_\pi / \sigma_y$ .....	49
Figura 2 – Politica monetaria in funzione della stabilizzazione dell'inflazione.....	50
Figura 3 – Simulazioni su inflazione e output gap.....	56
Figura 4 – Frontiera efficiente $\sigma_\pi / \sigma_y$ con ipotesi del policy maker di perfetta conoscenza.....	58
Figura 5 – Valore della politica efficiente in funzione della stabilizzazione dell'inflazione.....	59
Figura 6 – La perdita del policy maker.....	60
Figura 7 – Spazio dei parametri con Contemporaneous data.....	69
Figura 8 – Spazio dei parametri con Lagged data.....	72
Figura 9 – Spazio dei parametri con Forward looking rules.....	75
Figura 10 – Mapping dalla PLM alla ALM.....	81
Figura 11 – Mapping dalla PLM alla ALM con $\gamma_\pi$ appartenente a due diversi insiemi.....	83
Figura 12 – Decrescita del tasso di inflazione con EH policy.....	85
Figura 13 – Pendenza del mapping dalla PLM alla ALM in funzione di $\lambda$ con EH policy.....	86
Figura 14 – Confronto fra le pendenze dei mapping di $ALS - \tilde{\Gamma}$ policy e EH policy.....	88
Figura 15 – Decrescita del tasso di inflazione sotto $ALS - \tilde{\Gamma}$ policy e sotto EH policy.....	89
Tabella 1 – Principali statistiche per diversi valori di $\theta$ .....	53
Tabella 2 – Errore quadratico medio.....	54
Tabella 3 – Correlazione seriale dell'inflazione.....	54
Tabella 4 – Calibrazione parametri.....	66
Tabella 5 – Persistenza delle differenze $\pi_t - \pi_{REE}$ positive.....	89

## Bibliografia

Bullard and Mitra – Learning about monetary policy rules, 2000

Cerulli – Predicibilità, incertezza radicale, istituzioni: un breve viaggio nella teoria economica delle decisioni, 2008

Colombo e Lossani – Economia monetaria internazionale, 2003

Di Giorgio – Economia e politica monetaria, 2013

Evans and Honkapohja – Learning, convergence and stability with multiple rational expectations equilibria, 1993

Evans and Honkapohja – Expectations, Learning and Monetary Policy: An Overview of Recent Research, 2008

Ezekiel – The cobweb theorem, 1938

Ferrero – Monetary policy, learning and the speed of convergence, 2007

Keynes – Teoria generale dell'occupazione, dell'interesse e della moneta, 1936

Kydland and Prescott – Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans, 1977

Locarno – Imperfect knowledge, adaptive learning and the bias against activist monetary policies, 2006

Lucas – Expectations and the Neutrality of Money, 1970

Muth – Rational Expectations and the Theory of Price Movements, 1970

Orphanides and Williams – Imperfect Knowledge, Inflation Expectations, and Monetary Policy, 2002

Sargent and Wallace – Rational expectations and the theory of economic policy, 1976





Dipartimento di Economia e Finanza - Cattedra di Teoria e Politica Monetaria

Aspettative razionali, apprendimento adattivo e politica monetaria  
(riassunto)

RELATORE

Prof. Giorgio Di Giorgio

CANDIDATO

Matr. 667191

CORRELATORE

Prof. Paolo Paesani

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

## Indice

Introduzione.....	4
Capitolo I – Le aspettative e la razionalità in economia.....	4
1.1 – Le aspettative e la razionalità negli individui.....	4
1.2 – I modelli di aspettativa.....	4
1.2.1 – Le aspettative estrapolative.....	4
1.2.2 – Le aspettative adattive.....	5
1.2.3 – Le aspettative razionali.....	5
1.3 – Politica monetaria e aspettative razionali.....	7
1.4 – Nuova Macroeconomia Classica e critica alle aspettative razionali.....	8
Capitolo II – Apprendimento adattivo e politica monetaria.....	9
2.1 – Introduzione.....	9
2.2 – Risoluzione di un problema di politica monetaria sotto aspettative razionali e sotto apprendimento adattivo.....	9
2.2.1 – Il modello.....	9
2.2.2 – Risoluzione con aspettative razionali.....	10
2.2.3 – Risoluzione con apprendimento adattivo.....	10
2.2.4 – Conclusione sul confronto fra apprendimento adattivo e aspettative razionali.....	11
2.3 – Convergenza dell'apprendimento adattivo alle aspettative razionali.....	11
2.3.1 – Il modello.....	11
2.3.2 – Convergenza dell'apprendimento adattivo attraverso le diverse regole di politica monetaria.....	12
2.3.2.1 – Contemporaneous data.....	12
2.3.2.1.1 – Equilibrio determinato.....	12
2.3.2.1.2 – Apprendimento adattivo.....	12
2.3.2.2 – Lagged data.....	13
2.3.2.2.1 – Equilibrio determinato.....	13
2.3.2.2.2 – Apprendimento adattivo.....	13

2.3.2.3 – Forward looking rules.....	14
2.3.2.3.1 – Equilibrio determinato.....	14
2.3.2.3.2 – Apprendimento adattivo.....	14
2.3.2.4 – Contemporaneous expectations.....	15
2.3.2.4.1 – Equilibrio determinato.....	15
2.3.2.4.2 – Apprendimento adattivo.....	15
2.3.3 – Conclusione sull’analisi della convergenza.....	15
2.4 – Velocità di convergenza dell’apprendimento adattivo alle aspettative razionali.....	15
2.4.1 – Il modello.....	15
2.4.2 – Apprendimento adattivo.....	16
2.4.2.1 – Ottimalità delle politiche discrezionali.....	17
2.4.2.2 – Aggiustamento della velocità di convergenza.....	17
2.4.3 – Conclusione sulla velocità di convergenza del processo di apprendimento adattivo.....	17
2.5 – Apprendimento della Banca Centrale.....	17
Conclusione.....	18

## RIASSUNTO

### Introduzione

L'elaborato considera i modelli previsivi di aspettative e apprendimento. Inizialmente i modelli di aspettative sono presentati a se stanti, successivamente vengono riproposti, principalmente come modelli di confronto, all'interno di un'analisi che ha ad oggetto l'apprendimento e la politica monetaria. L'elaborato si articola come segue: Nel primo capitolo si discute dei diversi modelli di aspettative ideati, esponendo in modo completo il modello ad aspettative razionali. Si osserva poi come un semplice modello di politica monetaria possa raggiungere risultati ottimali se risolto con aspettative razionali. Si chiude il capitolo esponendo le principali critiche fatte al modello di aspettative razionali. Nel secondo capitolo si discute dell'apprendimento adattivo. Attraverso la politica monetaria esso è presentato inizialmente in confronto con le aspettative razionali. Successivamente si discute delle condizioni per la convergenza dell'apprendimento alle aspettative razionali, analisi che viene svolta attraverso quattro diversi tipi di regole di politica monetaria. Si prosegue parlando della velocità di convergenza del processo di apprendimento. Si conclude accennando della possibilità dell'estensione dell'apprendimento adattivo al policy maker.

### CAPITOLO I – Le aspettative e la razionalità in economia

#### 1.1 – Le aspettative e la razionalità negli individui

Il concetto di aspettativa viene inteso come l'idea, di un agente economico, circa il futuro valore di una o più variabili rilevanti. In funzione di questa idea l'agente sarà portato ad assumere un certo comportamento, che potrà essere modificato a seguito di una nuova formulazione circa il futuro ammontare della variabile.

J.M. Keynes, nella sua opera di maggior prestigio, "Teoria generale dell'occupazione dell'interesse e della moneta", fu forse uno dei primi economisti a introdurre il concetto di aspettativa. La sua nozione di aspettativa riguarda principalmente il collegamento fra produzione e occupazione.

Si possono distinguere tre tipi di aspettative: Le aspettative estrapolative, che prevedono che il valore futuro di una grandezza sia ricavabile dai valori passati che tale grandezza ha assunto; le aspettative adattive sono simili alle estrapolative tuttavia considerano la possibilità che gli operatori economici abbiano effettuato ipotesi in passato; le aspettative razionali sono invece formulate in modo prospettico e si reggono su un set informativo completo riguardo il sistema economico.

#### 1.2 – I modelli di aspettativa

##### 1.2.1 – Le aspettative estrapolative

Il valore ipotetico nel tempo successivo è dato da una funzione dei valori precedenti. Una possibile formulazione può essere:

$$X_t^E = X_{t-1} + a(X_{t-1} - X_{t-2}) + b(X_{t-2} - X_{t-3})$$

Dove la variabile in ipotesi è funzione delle manifestazioni passate pesate con coefficienti. Questo tipo di aspettativa è backward-looking, ossia è funzione esclusivamente di dati passati.

### 1.2.2 – Le aspettative adattive

Sulla stessa linea delle estrapolative ma con qualche leggera modifica, l'ipotesi di adattività fu formulata da M. Nerlove. Egli introdusse il concetto di ritardi distribuiti, e sostenne che sono da considerarsi nella formulazione di aspettative anche i valori ipotizzati precedentemente dagli operatori. Il modello è dato dalla seguente formula:

$$X_t^E = X_{t-1}^E + a(X_{t-1} - X_{t-1}^E)$$

La scelta di un valore del parametro  $a$  elevato darà maggiore peso al valore passato di  $X$ ; viceversa un valore basso di  $a$  darà più peso al valore di aspettativa passato di  $X$ .

Sostituendo in modo reiterativo il valore atteso della variabile si può notare come le aspettative adattive siano una variante delle aspettative estrapolative:

$$X_t^E = a \sum_{i=1}^{\infty} (1-a)^{i-1} X_{t-i}$$

### 1.2.3 – Le aspettative razionali

Gli sviluppatori del concetto di aspettative razionali partono dall'idea che gli operatori economici abbiano un set informativo adeguato con cui prevedere il futuro ammontare delle variabili economiche. Le aspettative razionali poggiano su tre capisaldi: - l'informazione all'interno del sistema economico non è molta, di conseguenza viene previsto che la poca a disposizione non venga sprecata; - il modo di formulazione delle aspettative è dato in funzione del sistema economico; - l'informazione pubblica non ha sostanziali effetti sulla modificazione delle aspettative, che in media non ne risente; questo perché le aspettative razionali già 'scontano' le notizie di pubblico dominio, e una loro variazione è conseguenza solo di un tipo di informazione privato.

Il modello di aspettative razionali è il modello di Muth e viene presentato e analizzato per intero nell'elaborato. Il modello si sviluppa tramite un'analisi sui prezzi dei beni e viene impostato in base alle seguenti equazioni:

$$C_t = -\beta p_t$$

$$P_t = \gamma p_t^E + u_t$$

$$P_t = C_t$$

La prima equazione è di domanda, la seconda di offerta e la terza rappresenta l'equilibrio sul mercato. I termini hanno il seguente significato:  $P_t$  è il numero di unità prodotte nel periodo considerato;  $p_t$  è il prezzo di mercato nel periodo considerato;  $p_t^E$  è il prezzo di mercato atteso per il periodo considerato, in base all'informazione dei t-1 periodi precedenti;  $u_t$  è un termine di errore.

Un risultato intermedio dell'analisi è il seguente tipo di forma che assume il prezzo atteso:

$$p_t^E = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \right)^j p_{t-j}$$

Esso viene scritto come media mobile geometrica ponderata dei prezzi passati.

L'analisi prosegue introducendo una nuova componente di domanda definita *inventory speculation*. Questo tipo di domanda di scorte si differenzia da quello classico perché rappresenta le risorse con cui l'impresa ha intenzione di fronteggiare cambiamenti improvvisi nella domanda dei consumatori. La *inventory speculation* influenza il prezzo ed è ad esso legata, così come è correlata al prezzo atteso. Essa verrà determinata, tra le altre, sulla base del prezzo atteso e una volta effettuata (dalle imprese) concorrerà a formare il prezzo di equilibrio.

Il nuovo sistema è rappresentato dalle seguenti equivalenze:

$$C_t = -\beta p_t$$

$$P_t = \gamma p_t^E + u_t$$

$$I_t = \alpha(p_{t+1}^E - p_t)$$

Dove la prima è una relazione di domanda, la seconda di offerta e la terza rappresenta la domanda speculativa di scorte nella sua forma ultima.

Per questo sistema una condizione di equilibrio è data da  $C_t + I_t = P_t + I_{t-1}$  che esprime l'uguaglianza fra domanda e offerta tenendo conto delle scorte speculative.

Attraverso l'esplicitazione dei coefficienti con cui ponderare la serie storica dei prezzi si arriva a scrivere che il prezzo atteso è semplicemente dato da:  $p_t^E = \lambda_1 p_{t-1}$ .

Tenendo conto dell'ultima formulazione del prezzo atteso si può ottenere un nuovo sistema che descrive l'economia, dato da:

$$C_t = -\beta p_t$$

$$P_t = \gamma \lambda_1 p_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$I_t = -\alpha(1 - \lambda_1) p_t$$

La quantità complessivamente domandata nell'economia è data da:

$$Q_t = C_t + I_t$$

Mentre la quantità complessivamente offerta è pari a:

$$Q_t = P_t + I_{t-1}$$

In base al sistema si ha che queste ultime due espressioni si possono scrivere nel seguente modo:

$$Q_t = -[\beta + \alpha(1 - \lambda_1)] p_t$$

$$Q_t = [\gamma \lambda_1 - \alpha(1 - \lambda_1)] p_{t-1} + \varepsilon_t$$

Queste ultime due espressioni chiudono il modello ad aspettative razionali, esponendo le quantità che portano il sistema ad essere in equilibrio. Il risultato importante è che sono quantità di equilibrio dovute alle aspettative razionali degli agenti economici.

La parte dedicata al modello ad aspettative razionali si chiude facendo un confronto fra il modello stesso e il cobweb theorem, o modello della ragnatela, una teoria economica che ha come obiettivo spiegare le fluttuazioni dei prezzi usando, storicamente, come campo di analisi, principalmente il

settore agricolo. Questo modello ipotizza che i piccoli shocks, sotto forma di aumenti di prezzo che colpiscono un produttore/settore, siano trasferiti ad altri produttori/settori, i clienti dei precedenti, che a loro volta aumentano il prezzo dei loro beni/servizi; il tutto si articola in una sequenza di reazioni/azioni che porta ad aumentare il prezzo percepito dal consumatore finale. Sostanzialmente, il principale risultato del cobweb theorem analiticamente è dato da:  $E(p_t | p_{t-1}, p_{t-2}, \dots) = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E$ ; differentemente dal modello ad aspettative razionali  $E(p_t)$  è sostituito dalla sua aspettativa condizionata (difatti per il modello ad aspettative razionali si ha che:  $E(p_t) = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^E$ ).

Tuttavia dati provenienti dall'evidenza empirica sono a supporto dell'ipotesi di razionalità, piuttosto che di quelle che hanno portato alla teorizzazione del cobweb theorem. Ad esempio studi di Heady e Kaldor e successivamente di Modigliani e Weingarther vanno maggiormente d'accordo con una aspettativa simile alla razionale piuttosto che con una di natura estrapolativa/adattiva come previsto dal modello della ragnatela.

### 1.3 – Politica monetaria e aspettative razionali

Il modello di Muth prende in considerazione i prezzi dei beni e determina le quantità di equilibrio in un sistema dove il prezzo atteso è dato dalle aspettative razionali. Un altro campo dove le aspettative razionali hanno una grande applicazione è quello della politica e del controllo monetario.

Un lungo dibattito che da sempre esiste in macroeconomia, con riferimento alla politica monetaria, concerne il modo in cui essa andrebbe condotta, cioè se adottare una politica discrezionale e decisa di volta in volta dal buon senso e dalla professionalità di chi la conduce, oppure sottostare a una serie di regole che, se non altro per serietà operativa, dovrebbero essere abbastanza rigide e modificate solo in casi eccezionali.

I fautori delle aspettative razionali sono per una regola di politica monetaria fissa, dato che ritengono che gli agenti economici sono in grado di comprendere e prevedere il funzionamento dell'economia attraverso la stima del modello economico. In questo modo ogni effetto della politica monetaria sarà destabilizzante; della stessa idea sono i monetaristi, ma solo per la funzione destabilizzante della politica monetaria dato che essi ritenevano che il mercato fosse in grado di arrivare all'equilibrio nel lungo periodo.

Tuttavia, anche attraverso una regola di politica monetaria fissa potrebbe non raggiungersi un equilibrio ottimale. La  $x\%$  Friedman rule's è un esempio. La regola prevede di inserire nel sistema una quantità di moneta dell'  $x\%$  annuo, dove  $x$  è fissato all'inizio del ciclo e non deve variare. Tale strategia mira a minimizzare la varianza della variabile obiettivo, ad esempio l'output. Tuttavia il modello mostra come la regola non minimizzi la varianza e sia dunque da considerarsi sub-ottimale.

Uno studio successivo (Kareken, Muench e Wallace 1973) risolve il problema della sub-ottimalità di una regola del tipo Friedman rule's usando le aspettative razionali. Il modello di Friedman è infatti inizialmente strutturato in modo che non ci siano le aspettative degli agenti economici. Nello studio gli autori sviluppano il lavoro intorno a tre punti principali:

- d) La struttura economica è caratterizzata da interazioni tra variabili. Quando avvengono shock che interessano una singola variabile, le variazioni che si registrano in altre sono

caratterizzate da simultaneità. Questo non vale per tutte, solo per quelle che sono caratterizzate da una certa volatilità nel breve termine.

- e) Nel sistema sono tuttavia presenti dei ritardi in termini di aggiustamento fra le variabili. Questo significa che gli effetti dei disturbi sono distribuiti nel tempo, e presentano correlazione seriale.
- f) La struttura dei ritardi (che può essere evidenziata da modelli autoregressivi o simili) è costante nel tempo e non dipende dall'autorità monetaria.

Introducendo le aspettative razionali si caratterizza il modello con la dipendenza fra i parametri. I cambiamenti nei parametri strutturali, quelli sotto il controllo dell'autorità monetaria, vengono osservati dagli agenti, che agiscono modificando le aspettative rendendo il modello ottimale.

#### 1.4 – Nuova macroeconomia classica e critiche alle aspettative razionali

La teoria delle aspettative razionali è inserita all'interno della Nuova Macroeconomia Classica NMC. Le ipotesi della NMC sul funzionamento dell'economia sono le seguenti:

*Efficienza dei mercati:* i prezzi sono di per sé la principale delle fonti informative disponibili e sono perfettamente flessibili. Data la piena flessibilità i prezzi si adattano sempre per uguagliare domanda e offerta, di conseguenza per ogni prezzo esisteranno quantità di domanda e offerta di equilibrio e non si creeranno eccessi di quantità.

*Il sistema è caratterizzato da agenti con aspettative razionali:* le scelte di tali agenti verranno effettuate condizionatamente alla massimizzazione di una funzione di utilità. In questo senso i consumatori minimizzeranno la spesa per ogni livello di utilità desiderato e gli imprenditori minimizzeranno i costi al fine di raggiungere il massimo profitto.

Un'ulteriore ipotesi è l'introduzione di disturbi stocastici sotto forma di shocks. Questa supposizione influenza l'analisi degli equilibri.

Le aspettative razionali, seppur superando gran parte dei limiti riscontrati dalle aspettative adattive, non sono state esente da critiche, che non le hanno mai rese totalmente accettate dalla comunità economica. Una prima critica riguarda il set informativo che, secondo la ipotesi alla base, dovrebbe contenere tutte le informazioni relative al modello con cui si sintetizza il funzionamento dell'economia. Proseguendo, si pone il problema della difficile prevedibilità del futuro, intesa proprio come una misura di incertezza sul comportamento dell'economia con cui gli operatori devono scontrarsi nella realtà. L'incertezza viene risolta usando la statistica e in particolare le serie storiche. Tuttavia diversi punti che hanno problemi sul piano metodologico non vengono affrontati. Il primo è che l'aspettativa, essendo espressa dalla speranza matematica, per essere correttamente calcolata deve presupporre la conoscenza del processo stocastico seguito dalla variabile obiettivo, e questo è difficile in realtà. Poi c'è il problema relativo al compiere inferenza statistica su variabili unicamente estraibili da serie storiche, e quasi sempre le variabili che su cui l'aspettativa deve operare sono di questo tipo. Questi punti possono far sì che le aspettative razionali producano stimatori non consistenti delle variabili considerate.

Un altro punto che merita una citazione è il fatto che le aspettative razionali eguagliano un evento soggetto a incertezza a un evento possibile e statisticamente trattabile. In altre parole presumono che a qualsiasi evento (in un contesto economico) possa essere assegnata una probabilità oggettiva, con cui calcolarne la possibile manifestazione.

Un modo per tentare di dare una maggior veridicità alle previsioni è quello di limitare l'incertezza diminuendo la variabilità delle determinanti dell'economia incrementando la razionalità dei soggetti.

Un'altra proposta è quella di accrescere i poteri e i campi di azione delle istituzioni. In questa soluzione il controllo degli strumenti e il coordinamento degli interventi da parte delle autorità preposte potrebbe influire sul comportamento degli agenti, facendo in modo che essi riescano ad agire in contesti a incertezza minima.

## CAPITOLO II – Apprendimento adattivo e politica monetaria

### 2.1 – Introduzione

Le aspettative razionali compongono un framework utilizzabile in diverse applicazioni economiche, soprattutto nella macroeconomia e nella risoluzione di problemi di politica monetaria. Tuttavia dati alcuni limiti di cui soffrono, diversi autori, anche tra i principali rappresentanti della Nuova Macroeconomia Classica, hanno fornito diverse chiavi di lettura delle aspettative razionali e proposto modalità alternative di formulazione delle ipotesi, attribuendo agli agenti economici una razionalità più limitata.

Lo stesso Muth e successivamente Lucas e Prescott hanno sottolineato come le aspettative razionali siano da considerare una relazione di equilibrio che porta il sistema economico all'*equilibrio di aspettative razionali* (Rational Expected Equilibrium, REE). Esse sarebbero il risultato di un non specificato processo di apprendimento attraverso il quale gli agenti imparano il modello economico.

Dagli anni ottanta in poi diversi autori si sono occupati di sviluppare questo processo di apprendimento, formalizzando l'apprendimento adattivo.

L'apprendimento è generalmente definito tramite un modello a minimi quadrati. Una sua importante proprietà è che l'algoritmo, sotto opportune condizioni, converge alle aspettative razionali. Questa e altre sue caratteristiche l'hanno portato ad essere un modello previsivo accettato dalla comunità economica. L'applicazione principale dell'apprendimento adattivo è nell'ambito della politica monetaria.

### 2.2 – Risoluzione di un problema di politica monetaria sotto aspettative razionali e sotto apprendimento adattivo

#### 2.2.1 – Il modello

Un modello di politica monetaria risolto con aspettative razionali (da parte del settore privato) implica una politica efficiente e non sub-ottimale. Lo scopo di questo paragrafo è effettuare un confronto fra un modello di politica monetaria risolto con aspettative razionali e risolto con apprendimento.

La struttura del modello è la seguente:

$$\pi_{t+1} = \phi\pi_{t+1}^E + (1-\phi)\pi_t + \alpha y_{t+1} + e_{t+1}$$

$$y_{t+1} = -\xi(r_t - r^*) + u_{t+1}$$

$$L = (1-\omega)\text{Var}(y) + \omega\text{Var}(\pi - \pi^*)$$

La prima equazione rappresenta l'inflazione del periodo successivo come funzione dell'inflazione attesa, di quella corrente, dell'output gap e di un disturbo IID; la seconda rappresenta l'output gap in funzione dell'interest rate gap e di un disturbo IID; la terza è una funzione di perdita, funzione della varianza dell'inflation gap e dell'output gap.

### 2.2.2 – Risoluzione con aspettative razionali

La risoluzione con aspettative razionali non è esclusivamente fine a se stessa, è necessaria come metro di paragone.

La regola di politica monetaria  $x_t = -\theta(\pi_t - \pi^*)$  è scritta osservando l'inflation gap. La regola porta

le aspettative di inflazione ad essere scritte nel seguente modo:  $\pi_{t+1}^E = \frac{\alpha\theta}{1-\phi}\pi^* + \frac{1-\phi-\alpha\theta}{1-\phi}\pi_t$

Sostituendo nella prima equazione del modello si ottiene la soluzione ad aspettative razionali per

l'inflazione del periodo successivo:  $\pi_{t+1} = \frac{\alpha\theta}{1-\phi}\pi^* + (1-\frac{\alpha\theta}{1-\phi})\pi_t + e_{t+1} + \alpha u_{t+1}$

Il parametro  $\theta$  rappresenta la politica monetaria, e per un sistema con perfetta informazione può essere ottenuto in via analitica. L'espressione è pari a:

$$\theta^P = \frac{\omega}{2(1-\omega)} \left( -\frac{\alpha}{1-\phi} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1-\phi}\right)^2 + \frac{4(1-\omega)}{\omega}} \right)$$

### 2.2.3 – Risoluzione con apprendimento adattivo

Si abbandona ora l'ipotesi di perfetta conoscenza degli agenti. Si suppone che essi agiscano come econometrici e che formino le proprie aspettative osservando dati storici. Con l'apprendimento gli agenti imparano periodicamente la politica monetaria, grazie al modello che mettono in pratica per stimarla.

Come base delle ipotesi sull'apprendimento si assume generalmente che gli agenti siano in grado di identificare il modello statistico-matematico che sintetizza il sistema economico; questa ipotesi è tuttavia accompagnata da una difficoltà degli agenti a stimare correttamente i parametri del modello.

Il modello a minimi quadrati ha la seguente forma:  $\pi_t = c_{0,t} + c_{1,t}\pi_{t-1} + v_t$ . I coefficienti sono stocastici; il modello può essere scritto in forma matriciale. Le aspettative sono date dalla seguente espressione:  $\pi_{t+1}^E = c_{0,t} + c_{1,t}\pi_t$ . Quando la quantità di informazione tende ad essere tutta quella

presente nel sistema i coefficienti dell'ultima espressione diventano valori finiti:  $c_0^P = \frac{\alpha\theta}{1-\phi}\pi^*$  ;

$c_1^P = \frac{1-\phi-\alpha\theta}{1-\phi}$  e l'algoritmo di apprendimento tende alle aspettative razionali.

Si nota che la formazione delle aspettative è endogena al modello, e si aggiusta in base ai cambiamenti della politica o strutturali.

Le simulazioni mostrano la performance del modello ad apprendimento in rapporto a quello ad aspettative razionali. Un risultato che emerge chiaro è che se il policy maker attribuisce la perfetta conoscenza agli agenti ma essi formulano ipotesi attraverso apprendimento adattivo la performance della politica monetaria è bassa.

#### 2.2.4 – Conclusione sul confronto fra apprendimento e aspettative razionali

Tenendo conto della bassa performance di una politica impostata con perfetta conoscenza quando essa non sussiste, il policy maker deve prendere le sue decisioni tenendo conto della perdita potenziale e sviluppare una politica che accompagni l'apprendimento.

#### 2.3 – Convergenza dell'apprendimento adattivo alle aspettative razionali

La maggior parte dei recenti lavori macroeconomici raggiunge le proprie conclusioni usando modelli dove le aspettative del settore privato hanno una funzione importante. Dato il ruolo di input primario che le aspettative hanno, spesso i risultati previsivi dei modelli sono fortemente ancorati alla forma che le aspettative assumono, di conseguenza è importante che le ipotesi alla base del modello di aspettative usato siano verificate.

Diversi autori si sono occupati di determinare le condizioni per la convergenza di un algoritmo di apprendimento alle aspettative razionali; in questa situazione il sistema economico raggiunge l'equilibrio di aspettative razionali REE. La conclusione degli autori è che devono essere implementate esclusivamente politiche che possano favorire il passaggio al REE, e i policy makers che non adottano questo metodo di scelta commettono un errore non trascurabile.

##### 2.3.1 – Il modello

A seconda di come sono trattate le variabili dipendenti, una regola di politica monetaria può appartenere a uno dei seguenti gruppi:

- *Contemporaneous data specification* – raggruppa regole che prevedono che il tasso di interesse nominale sia fissato dalla banca centrale in risposta a deviazioni dal valore corrente di inflazione e output;
- *Lagged data specification* – raggruppa regole che prevedono che il tasso di interesse nominale reagisca in base a valori passati di inflazione e output;
- *Forward looking rules* – comprende regole basate sui valori futuri di previsione di inflazione e output;
- *Contemporaneous expectations* – le regole sono basate su valori correnti in aspettativa di inflazione e output.

L'obiettivo è valutare che tipo di situazione queste regole sono il grado di raggiungere con un metodo di previsione basato su un algoritmo ricorsivo a minimi quadrati.

Le equazioni per output gap e inflazione sono le seguenti:

$$z_t = z_{t+1}^E - \sigma^{-1}(r_t - r_t^n - \pi_{t+1}^E) \quad (2.13)$$

$$\pi_t = \kappa z_t + \beta \pi_{t+1}^E \quad (2.14)$$

Dove  $r_t^n$  è il tasso di interesse naturale e segue il seguente processo stocastico:

$$r_t^n = \rho r_{t-1}^n + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

La regola di politica monetaria è la seguente:  $r_t = r^* + \varphi_\pi(\pi_t - \pi^*) + \varphi_z(z_t - z^*)$  ; con l'asterisco sono indicati i valori target delle variabili, e sono ipotizzati tutti uguali a zero.  $\varphi_\pi$  e  $\varphi_z$  sono rispettivamente i pesi che vengono dati alla stabilizzazione dell'inflazione e dell'output.

Dunque a seconda del tipo di dati osservati si possono avere quattro tipi di regole:

$$r_t = \varphi_\pi \pi_t + \varphi_z z_t \quad (2.17) \qquad r_t = \varphi_\pi \pi_{t-1} + \varphi_z z_{t-1} \quad (2.18)$$

$$r_t = \varphi_\pi \pi_{t+1}^E + \varphi_z z_{t+1}^E \quad (2.19) \qquad r_t = \varphi_\pi \pi_t^E + \varphi_z z_t^E \quad (2.20)$$

Per l'analisi sulla convergenza centrale è la Expectations Stability, E-stability; se sussiste, un algoritmo di apprendimento adattivo a minimi quadrati converge localmente al REE.

L'analisi sulla convergenza usa le calibrazioni e le stime parametriche fatte da Woodford (1999), Rotemberg and Woodford (1998, 1999).

### 2.3.2 – Convergenza dell'apprendimento adattivo attraverso le diverse regole di politica monetaria

#### 2.3.2.1 – Contemporaneous data

##### 2.3.2.1.1 – Equilibrio determinato

Il modello considerato è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.17). Può essere scritto nella

seguinte forma: 
$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma^{-1}\varphi_z & \sigma^{-1}\varphi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.31)$$

da cui si ottiene la seguente matrice:

$$B = \frac{1}{\sigma + \varphi_z + \kappa\varphi_\pi} \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \beta\varphi_\pi \\ \kappa\sigma & \kappa + \beta(\sigma + \varphi_z) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Formalmente la condizione per avere equilibrio determinato (unico) è la seguente:

- Sia  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) \neq 0$ . Sotto una regola di politica monetaria che usa dati contemporanei la condizione necessaria e sufficiente per un equilibrio unico di aspettative razionali è che risulti:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) > 0$$

##### 2.3.2.1.2 – Apprendimento adattivo

Moltiplicando il sistema (2.31) per l'inversa della prima matrice che compare nel sistema stesso si ottiene:

$$y_t = \alpha + B y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.34)$$

La Minimal State Variable solution, la soluzione che garantisce E-stability della (2.34) ha una forma del tipo  $y_t = \alpha^* + c^* r_t^n$  con  $\alpha^* = 0$  e  $c^* = (I - \rho B)^{-1} \chi$ . Un punto della (2.34) è E-stable, e il sistema raggiunge unicità dell'REE se vale la seguente proposizione:

- Sia  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) \neq 0$ . Si supponga che il set informativo a disposizione degli agenti al

tempo corrente sia  $\begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ r_t^n \end{bmatrix}$ . Sotto una regola di politica monetaria che usa dati contemporanei

la condizione necessaria e sufficiente affinché una soluzione della (2.34),  $(0, c^*)$ , sia E-stable è che risulti:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta) > 0$$

Dalle simulazioni si può osservare come la maggior parte delle combinazioni dei parametri di stabilizzazione conducano ad REE.

### 2.3.2.2 – Lagged data

#### 2.3.2.2.1 – Equilibrio determinato

Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.18). Può essere scritto nella seguente

$$\text{forma: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sigma^{-1} \\ -\kappa & 1 & 0 \\ \varphi_z & \varphi_\pi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \\ r_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.40)$$

da cui si ottiene la seguente matrice:

$$B = \frac{1}{(\varphi_z + \kappa\varphi_\pi)} \begin{bmatrix} 0 & -\beta\varphi_\pi & 1 \\ 0 & \beta\varphi_z & \kappa \\ \sigma(\varphi_z + \kappa\varphi_\pi) & \varphi_z + (\kappa + \beta\sigma)\varphi_\pi & -\sigma \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Formalmente le condizioni per avere equilibrio determinato (unico) sono le seguenti:

- Con dati ritardati, condizioni sufficienti per avere UREE sono:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + \varphi_z < 2\sigma(1 + \beta)$$

#### 2.3.2.2.2 – Apprendimento adattivo

Sostituendo la (2.18) nella (2.13) si può scrivere il sistema nella seguente forma:

$$y_t = \beta_1 y_{t+1}^E + \delta y_{t-1} + \chi r_t^n \quad (2.44)$$

La MSV solution della (2.44) ha la seguente forma:

$$y_t = a^* + b^* y_{t-1} + c^* r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t$$

con  $a^* = 0$ ,  $b^* = (I - \beta_1 b^*)^{-1} \delta$ ,  $c^* = \rho(I - \beta_1 b^* - \rho \beta_1)^{-1} \chi$ . Il caso determinato si ottiene quando la soluzione per  $b^*$  è unica. Il mapping dalla PLM (Perceived Law of Motion, ossia la stima dell'inflazione futura effettuata dagli agenti) alla ALM (Actual Law of Motion, ossia il reale percorso seguito dall'inflazione) è fornito da  $y_t = (\beta_1 + \beta_1 b) a + (\beta_1 b^2 + \delta) y_{t-1} + (\beta_1 b c + \rho \beta_1 c + \rho \chi) r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t$ ; differenziando si ottiene:  $\frac{d}{dT}(a, b, c) = T(a, b, c) - (a, b, c)$ . I punti fissi della differenziazione forniscono la MSV solution.

### 2.3.2.3 – Forward looking rules

#### 2.3.2.3.1 – Equilibrio determinato

Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.19). Può essere scritto nella seguente

$$\text{forma: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^{-1} \varphi_z & \sigma^{-1} (1 - \varphi) \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.53)$$

da cui si ottiene la seguente matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^{-1} & \sigma^{-1} (1 - \varphi_\pi) \\ \kappa (1 - \sigma^{-1} \varphi_z) & \beta + \kappa \sigma^{-1} (1 - \varphi_\pi) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Formalmente vale la seguente proposizione:

- Con dati previsivi le condizioni necessarie e sufficienti per avere UREE sono:

$$\varphi_z < \sigma(1 + \beta^{-1})$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 + \beta)\varphi_z < 2\sigma(1 + \beta)$$

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 + \beta)\varphi_z > 0$$

#### 2.3.2.3.2 – Apprendimento adattivo

Si moltiplica la (2.53) per l'inversa della prima matrice che compare nell'equazione stessa, ottenendo:

$$y_t = \alpha + B y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.60)$$

La MSV solution ha la consueta forma

$$y_t = \alpha^* + c^* r_t^n \text{ con } \alpha^* = 0 \text{ e } c^* = (I - \rho B)^{-1} \chi. \text{ Formalmente vale la seguente proposizione:}$$

- Si ipotizzi che al tempo corrente il set informativo sia dato da  $\begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ r_t^n \end{bmatrix}$ . Sotto dati con ipotesi

future, condizione necessaria e sufficiente per la MSV solution  $(0, c^*)$  della (2.60) di essere E-stable è:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0$$

### 2.3.2.4 – Contemporaneous expectations

#### 2.3.2.4.1 – Equilibrio determinato

Il modello è dato dalle equazioni (2.13), (2.14), (2.15), (2.20). Può essere scritto nella seguente

$$\text{forma: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^E \\ \pi_{t+1}^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma^{-1}\varphi_z & -\sigma^{-1}\varphi_\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t^E \\ \pi_t^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} r_t^n \quad (2.62)$$

La condizione per avere unicità dell'REE è la stessa del caso *contemporaneous data*.

#### 2.3.2.4.2 – Apprendimento adattivo

La (2.62) può essere riscritta come

$$y_t = B_0 y_t^E + B_1 y_{t+1}^E + \chi r_t^n \quad (2.63)$$

e la MSV solution ha la forma:  $y_t = a^* + c^* r_{t-1}^n + \chi \varepsilon_t$  con  $\alpha^* = 0$  e  $c^* = \rho(I - B_0 - \rho B_1)^{-1} \chi$ . Vale la seguente proposizione:

- Sotto una regola che usa aspettative contemporanee la condizione necessaria e sufficiente per la MSV solution della (2.63) di essere stabile è la medesima fornita dalla disequazione (2.33),  $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_z > 0$ .

### 2.3.4 – Conclusione sull'analisi della convergenza

Si è visto come una regola di politica che risponde a dati contemporanei sia preferibile per i risultati conseguiti analiticamente, ma difficilmente utilizzabile nella realtà. Gli altri tipi di regole offrono un'alternativa di più facile applicazione tuttavia per dati ritardati e per dati previsivi la convergenza al REE è più condizionata. La regola che usa dati correnti in aspettativa offre gli stessi risultati di quella che usa dati correnti, e sicuramente è l'alternativa migliore considerando l'intera analisi presentata, ma è necessario che le aspettative usate offrano un sufficiente grado di informazione.

### 2.4 – Velocità di convergenza dell'apprendimento adattivo alle aspettative razionali

Compito del policy maker è implementare una politica comprensibile e convergente al REE. Discutendo della convergenza, non si è tuttavia specificato in quanto tempo l'algoritmo converga al REE, tempo che potrebbe interessare pochi o molti periodi. Questo paragrafo è dedicato ad un'analisi della velocità di convergenza.

#### 2.4.1 – Il modello

Il framework base usato per questa analisi è un modello di equilibrio generale dinamico con rigidità dei prezzi temporale. Il modello dell'economia è descritto dalle seguenti equazioni:

$$x_t = E^* x_{t+1} - \varphi(i_t - E^* \pi_{t+1}) + g_t$$

$$\pi_t = \alpha x_t + \beta E^* \pi_{t+1}$$

$$i_t = \gamma + \gamma_x E_t^* x_{t+1} + \gamma_\pi E_t^* \pi_{t+1} + \gamma_g g_t \quad (2.68)$$

La prima è una curva IS intertemporale, che misura l'output gap in funzione delle aspettative sull'output gap, del tasso di interesse, delle aspettative di inflazione e di uno shock di domanda; la seconda esprime l'inflazione in funzione di output gap e aspettative di inflazione; la terza è la regola di politica monetaria. Il modello può essere scritto in forma matriciale:

$$Y_t = Q + FE_t^* Y_{t+1} + Sg_t \quad (2.69)$$

dove i termini che esprimono le tre precedenti equazioni. Il sistema descritto dalla (2.69) è non esplosivo se risulta  $\gamma_\pi \in S_1 = \left\{ \gamma_\pi; 1 - \left( \frac{1-\beta}{\alpha\phi} \right) < \gamma_\pi < 1 + \left( \frac{1+\beta}{\alpha\phi} \right) \right\}$ .

#### 2.4.2 – Apprendimento adattivo

Il settore privato effettua le sue aspettative attraverso un modello a minimi quadrati, con cui aggiorna le stime. Le aspettative del settore privato (non razionali) sono date da:  $E_t^* \pi_{t+1} = a_{\pi,t}$  con  $a_{\pi,t} = a_{\pi,t-1} + t^{-1}(\pi_{t-1} - a_{\pi,t-1})$ . Il valore di aspettativa razionale è dato da:  $E_t \pi_{t+1} = a_\pi^*$ . Dunque l'analisi interessa la velocità di convergenza di  $a_{\pi,t}$  ad  $a_\pi^*$ . Centrale per l'analisi è il mapping dalla PLM alla ALM. Con questo modello specifico è dato da:

$$T(a_{\pi,t}) = -\alpha\phi\gamma + [\beta + \alpha\phi(1-\gamma_\pi)]a_{\pi,t} \quad (2.77)$$

Di pari importanza è l'ODE associato al mapping. È dato da:

$$h(a_\pi) = E[T(a_\pi) + \alpha g_t - a_\pi] \quad (2.78)$$

A seconda del peso dato alla stabilizzazione dell'inflazione, di fatto il policy maker sceglie, consapevolmente o meno, la velocità alla quale il sistema converge al REE. Sia

$S_2 = \left\{ \gamma_\pi : 1 - \left( \frac{0,5-\beta}{\alpha\phi} \right) < \gamma_\pi < \left( \frac{1+\beta}{\alpha\phi} \right) \right\}$  l'insieme di politiche sotto le quali la derivata della (2.78) è

minore di -0,5. Il successivo enunciato dimostra come scegliendo il parametro di stabilizzazione viene definita la velocità alla quale la distanza fra l'inflazione stimata e quella reale si azzerava:

- Con la regola di politica monetaria data dall'equazione (2.68) se  $\gamma_\pi \in S_2$  vale la seguente convergenza in distribuzione:

$$\sqrt{t}(a_{\pi,t} - a_\pi^*) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_a^2)$$

Il tempo per la convergenza è pari a  $\sqrt{t}$ .

Quando il peso dato alla stabilizzazione non appartiene a  $S_2$  la velocità di convergenza è differente da  $\sqrt{t}$ . In tal caso si ha che  $t^\delta(a_{\pi,t} - a_\pi^*) \xrightarrow{d} F(0, \sigma_F^2)$ ; per  $t \rightarrow \infty$  si ha che

$\delta = \frac{1}{2 \log k} \log \frac{E[t(a_{\pi,t} - a_\pi^*)]^2}{E[(tk)^\delta(a_{\pi,tk} - a_\pi^*)]^2}$  ed è definito tasso di convergenza. In questo caso la velocità di

convergenza è data da  $t^\delta$ . Graficamente minore è l'inclinazione del mapping dalla PLM alla ALM e minore è la velocità di convergenza.

### 2.3.2.1 – Ottimalità delle politiche discrezionali

Il problema del policy maker è quello di risolvere un algoritmo di ottimizzazione scegliendo lo strumento  $i_t$  e il suo percorso temporale per risolvere la seguente funzione obiettivo:

$$\text{Max}_{x_t, \pi_t} - E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(\pi_t, x_t) \quad \text{con} \quad L(\pi_t, x_t) = \frac{1}{2} [\pi_t^2 + \lambda(x_t - x^*)^2].$$

La soluzione del problema è

$i_t = \gamma^* + \gamma_x^* E_t^* x_{t+1} + E_t^* \pi_{t+1} + \gamma_g^* g_t$  e prende il nome di EH policy. Tale regola non è ottimale sotto apprendimento. Le simulazioni mostrano che in un sistema con questa regola di politica monetaria e ad apprendimento degli agenti, un tasso di inflazione superiore a quello previsto dal REE permane per un lungo periodo (>80 trimestri). Per le politiche discrezionali e la velocità di convergenza, se due economie sono caratterizzate dalla stessa PLM e ALM ma da un differente valore dei parametri strutturali  $(\alpha, \beta, \lambda)$ , allora l'economia con set  $(\alpha, \beta, \lambda)$  convergerà più velocemente al REE

dell'economia con set  $(\alpha^*, \beta^*, \lambda^*)$  se risulta

$$\left| \frac{a_{\pi,t} - a_{\pi}^*}{a_{\pi,t-1} - a_{\pi}^*} \right| < \left| \frac{a_{\pi,t}^* - a_{\pi}^{*\bullet}}{a_{\pi,t-1}^* - a_{\pi}^{*\bullet}} \right|.$$

### 2.4.2.2 – Aggiustamento della velocità di convergenza

Sotto apprendimento la politica monetaria influenza le decisioni future influenzando l'intero processo. Se la politica monetaria è correttamente specificata allora esiste un numero di politiche discrezionali ottimali che conducono al REE. Esse rappresentano l'insieme  $\Omega$ . Il policy maker può inoltre aggiustare la velocità di convergenza del processo. Tali politiche sono comprese in un sottoinsieme di  $\Omega$ ,  $\Omega^{ALS}$  (la sigla è per Adjusted Speed Learning). Per queste politiche il policy maker che sceglie un'appropriata combinazione di  $\gamma_{\pi}^{ALS}$  e  $\gamma^{ALS}$  (parametri di stabilizzazione) è in grado di determinare la stessa inflazione e lo stesso output gap che si ottiene sotto EH policy. Inoltre il policy maker può stabilire la velocità di convergenza della politica Adjusted che preferisce (attraverso la scelta di un altro parametro,  $\tilde{\Gamma}$ ). I grafici mostrano che il mapping dalla PLM alla ALM per questo tipo di politiche è molto inclinato, di conseguenza avranno una convergenza più veloce della politica EH. Inoltre le simulazioni evidenziano che a seguito di uno shock inflattivo l'abbattimento dell'inflazione in eccesso rispetto a quella prevista dal REE è molto più rapida con una politica Adjusted rispetto alla politica EH.

### 2.4.3 – Conclusione sulla velocità di convergenza del processo di apprendimento

Al pari dell'analisi della convergenza anche quella sulla velocità è importante. Essa è un'ulteriore e utile strumento di scelta fra le varie politiche monetarie.

## 2.5 – Apprendimento della Banca Centrale

Finora si è esclusivamente ipotizzato che sia il settore privato ad apprendere. Si estende l'ipotesi di apprendimento anche alla Banca Centrale, il decisore della politica. Sia  $y = \alpha(\pi - \pi^E) + \varepsilon$  una curva di Phillips che caratterizza l'economia, che fornisce l'output gap in funzione della sorpresa

sull'inflazione.  $\varepsilon$  è un termine di disturbo IID uniformemente distribuito nell'intervallo  $[-\mu, \mu]$  non osservabile dalla BC che può unicamente osservare  $z$ , un segnale relativo a  $\varepsilon$ .  $\alpha$  è una variabile casuale che rappresenta il trade-off fra output e inflazione:  $\alpha = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}$  con  $\alpha \sim IID(\bar{\alpha}, \sigma_\alpha^2)$ ; ossia  $\alpha$  è dato dal suo valore atteso a cui si somma un termine di disturbo.  $\alpha$  è indipendente da ogni altro disturbo nel modello. Per formalizzare l'apprendimento si ipotizza che  $\bar{\alpha}$  e  $\sigma_\alpha^2$  siano sconosciuti alla BC, di conseguenza è sconosciuta la distribuzione di  $\alpha$ . Grazie al segnale  $z$  e al valore osservabile ogni periodo di  $y, \pi$  la BC può procedere alla stima di entrambi i parametri. Il modello è formato da quattro equazioni. La prima esprime il modo in cui il settore privato apprende adattivamente:  $a_{pt} = a_{pt-1} + \frac{1}{t}(\pi_{t-1} - a_{pt-1})$ ; la seconda è una stima del valore atteso del trade-off fra inflazione e output:  $\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \frac{1}{t}R_{\pi,t-1}^{-1}(\pi_{t-1} - a_{pt-1}) \left[ \left( y_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right) - \hat{\alpha}_{t-1}(\pi_{t-1} - a_{pt-1}) \right]$ ; la terza esprime la varianza condizionata di  $y - \frac{z}{2}$ :  $R_{y,t} = R_{y,t-1} + \frac{1}{t} \left[ \left( y_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right)^2 - R_{y,t-1} \right]$ ; la quarta è il momento secondo della sorpresa sull'inflazione:  $R_{\pi,t} = R_{\pi,t-1} + \frac{1}{t} \left[ \left( \pi_{t-1} - \frac{z_{t-1}}{2} \right)^2 - R_{\pi,t-1} \right]$ . Tramite lo Jacobiano del sistema composto da queste equazioni si può studiare la convergenza all'REE anche considerando l'apprendimento della BC.

Più problematico è studiare la velocità di convergenza; in linea di massima l'analisi del paragrafo precedente non è valida in questo caso.

## 2.6 – Conclusione

Le aspettative razionali rappresentano un punto fisso nella teoria economica e sono una guida per lo sviluppo di modelli previsivi di applicazione economica. Puntualizzando la loro natura di punto di arrivo, gli economisti che le hanno ideate e sostenute hanno aperto la strada per lo sviluppo di procedimenti che giustifichino la natura della conoscenza perfetta del sistema economico. L'apprendimento è stata una delle risposte. La natura del metodo ricorsivo usato per la stima di quanto rilevante serve per comprendere la politica monetaria ha permesso di definire il risultato di transizione verso le aspettative razionali, se l'algoritmo è definito in modo corretto. Inoltre le proprietà dell'apprendimento permettono lo studio della velocità di convergenza. Considerando l'apprendimento del decisore della politica monetaria, i risultati ottenuti mostrano che la strada è percorribile e può essere ulteriormente sviluppata.