



Dipartimento di Economia e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

La struttura per scadenza dei tassi di interesse.

Il modello BCE.

RELATORE

Prof. Carlo Domenico Mottura

CANDIDATA

Matilde Calabresi

Matricola 188881

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>pag. 3</b>
<b>BCE: struttura, funzioni, strumenti</b>	<b>pag. 4</b>
<b>I titoli obbligazionari sul mercato</b>	<b>pag. 11</b>
<b>Principali definizioni</b>	<b>pag. 14</b>
<b>La struttura per scadenza dei tassi di interesse</b>	<b>pag. 16</b>
<b>Misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse</b>	<b>pag. 20</b>
<b>Struttura dei tassi di interesse: il modello BCE</b>	<b>pag. 27</b>
<b>Grafici e tabelle</b>	<b>pag. 33</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>pag. 38</b>

## Introduzione

In questa tesi di laurea introduco i modelli di stima della struttura per scadenza dei tassi di interesse (ovvero la cosiddetta struttura per scadenza dei rendimenti, o curva dei rendimenti), in particolare il modello utilizzato dalla Banca Centrale Europea (BCE).

La curva dei rendimenti è la curva che descrive la relazione che lega il rendimento di un titolo a cedola nulla alla scadenza dello stesso.

I tassi d'interesse sono grandezze finanziarie non direttamente quotate sui mercati finanziari.

Tra i molti modelli proposti negli ultimi anni per stimare la curva dei rendimenti, alcuni sono basati direttamente sul prezzo di titoli con flusso futuro noto (titoli a cedola nulla e titoli a cedola nota) e scadenza (maturity) in funzione di alcuni parametri (cross-sectional dimension), come ad esempio il modello di Nelson-Siegel (1987) e la sua estensione: il modello di Svensson (1994)

L'obiettivo di questa tesi è descrivere il modello utilizzato dalla banca Centrale Europea (BCE) per la stima della curva dei rendimenti, che è - appunto - il modello di valutazione di Nelson - Siegel - Svensson.

## **BCE: struttura, funzioni, strumenti**

La Banca Centrale Europea (BCE) è la Banca centrale incaricata dell'attuazione della politica monetaria per i 19 Paesi dell'Unione Europea aderenti alla moneta unica, l'Euro, i quali formano la cosiddetta "*zona euro*": Austria, Belgio, Cipro, Estonia, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Lettonia, Lituania, Lussemburgo, Malta, Paesi Bassi, Portogallo, Slovacchia, Slovenia, Spagna.

Presieduta dall'italiano Mario Draghi dal 2011, la BCE è stata istituita sulla base del Trattato di Maastricht, o Trattato dell'Unione europea (TUE), in vigore dal 1993, il quale fissa regole politiche e parametri socio-economici inderogabili per poter fare ingresso nella suddetta Unione.

La data del 1 gennaio 1999 ha segnato il momento in cui la BCE è divenuta funzionale e in cui sono stati sanciti irrevocabilmente i tassi di conversione delle monete nazionali rispetto all'euro.

La Banca Centrale Europea fa parte, insieme alle banche centrali nazionali di tutti i 28 Stati membri dell'Unione europea, del Sistema europeo delle banche centrali (SEBC).

Esclusivamente i governatori delle banche nazionali dei paesi aderenti alla *Eurozona* prendono parte al processo deliberativo e attuativo della politica

monetaria dell'euro all'interno dell'*Eurosistema*. Il citato *Eurosistema* è il meccanismo che sottende alla politica monetaria dell'Euro, esso è composto dalla BCE e dalle banche centrali nazionali dei paesi che hanno introdotto la moneta unica al loro interno.

La funzione della Banca Centrale Europea, in base allo Statuto del SEBC e della BCE, è quella di assicurare che i compiti assegnati dai Trattati alla SEBC vengano assolti: definire e attuare la politica monetaria per l'area dell'euro, svolgere le operazioni sui cambi, detenere e gestire le riserve ufficiali dei paesi dell'area dell'euro, promuovere il regolare funzionamento dei sistemi di pagamento.

L'obiettivo prioritario del SEBC è il controllo dell'andamento dei prezzi - deve assicurare che il tasso di inflazione di medio periodo sia inferiore ma prossimo al 2% -. Gli altri obiettivi del SEBC e quindi della BCE possono essere perseguiti solo se non compromettono l'obiettivo di controllo dell'inflazione. Fra tali obiettivi vi sono: promuovere la pace, i suoi valori e il benessere dei suoi popoli, lo sviluppo sostenibile dell'Europa, basato su una crescita economica equilibrata e sulla stabilità dei prezzi, su un'economia sociale di mercato fortemente competitiva, che mira alla piena occupazione e al progresso sociale, e su un elevato livello di tutela e di miglioramento della qualità dell'ambiente, il progresso scientifico e tecnologico, combattere l'esclusione sociale e le discriminazioni e

promuovere la giustizia e la protezione sociali, la parità tra donne e uomini, la solidarietà tra le generazioni e la tutela dei diritti del minore.

Scopo principale della Banca è quello di mantenere sotto controllo l'andamento dei prezzi mantenendo il potere d'acquisto nell'area dell'euro. La BCE esercita, infatti, il controllo dell'inflazione badando a contenere, tramite opportune politiche monetarie - controllando la base monetaria o fissando i tassi a breve -, il tasso di inflazione di medio periodo ad un livello inferiore o prossimo al 2%. La regola adottata della BCE è una regola flessibile: l'obiettivo inflazionistico non è definito come un valore preciso ma inferiore o vicino al 2% inoltre, deve essere raggiunto nel medio periodo. La reazione della banca centrale risponde alle determinanti della variabile obiettivo e non alla variabile obiettivo stessa e ciò determina una maggiore efficienza della politica monetaria. I vantaggi di questa flessibilità sono: distinguere tra shock da domanda e shock da offerta sui prezzi, limitando le oscillazioni delle variabili reali dei tassi di interesse e lascia maggiori spazi per politiche anticicliche senza compromettere la fiducia dei mercati nella stabilità dei prezzi.

Il processo decisionale all'interno dell'Eurosistema è centralizzato a livello degli organi direttivi della BCE; l'organizzazione della BCE, i quali sono: un comitato esecutivo, a cui capo siede il presidente della BCE, e dal Consiglio Direttivo costituito dai membri del Comitato Esecutivo e dai

rappresentanti delle altre banche appartenenti all'Eurosistema; esiste un terzo organo decisionale, il Consiglio Generale.

Il Comitato Esecutivo comprende il Presidente e il Vicepresidente della BCE e quattro altri membri; le funzioni principali del Comitato Esecutivo comprendono:

- l'attuazione della politica monetaria conformemente agli orientamenti e alle decisioni del Consiglio dei governatori e, nell'ambito di tale quadro, impartire alle Banche centrali nazionali le necessarie istruzioni;
- l'esercizio dei poteri delegati da parte del Consiglio direttivo;
- la gestione corrente della BCE.

In secondo luogo, le principali funzioni del Consiglio Direttivo consistono in:

- definire l'orientamento generale della politica della banca e prendere le decisioni necessarie al raggiungimento degli obiettivi conferiti all'Eurosistema;
- definire la politica monetaria dell'area dell'euro compresi gli obiettivi monetari intermedi, i tassi di interesse di riferimento e l'offerta delle riserve monetarie in seno all'Eurosistema e la definizione degli indirizzi necessari alla loro esecuzione.

Infine, il Consiglio Generale è composto dal presidente e dal vicepresidente della BCE e dai governatori delle BCN dei 28 paesi membri. Il Consiglio Generale è però un organo di transizione dal momento che verrà sciolto nel momento in cui tutti gli stati membri dell'UE avranno introdotto la moneta unica. Il Consiglio Generale svolge i compiti in precedenza affidati all'Istituto Monetario Europeo, e gli ulteriori compiti di:

- assolvere le funzioni consultive della BCE;
- raccogliere le informazioni statistiche;
- redigere il rapporto annuale della BCE;
- redigere le disposizioni per l'uniformazione delle procedure contabili delle banche centrali nazionali.

Gli strumenti classici della BCE, tramite i quali regola l'offerta di moneta, sono i seguenti:

- fissazione dei tassi d'interesse di policy;
- operazioni di mercato aperto;
- operazioni su iniziativa delle controparti, per la gestione giornaliera della liquidità;
- modifiche del coefficiente di riserva obbligatorio delle banche.

Per quanto concerne la strategia di politica monetaria adottata dalla BCE, essa ha scelto di implementarne una propria definita «*strategia di politica monetaria orientata alla stabilità*», la quale include caratteristiche di due



diverse strategie per attuare la politica monetaria: il *monetary targeting* e l'*inflation targeting*.

L'approccio di *monetary targeting* fa riferimento al metodo eseguito da alcune banche centrali nazionali, dagli anni settanta, in cui per controllare l'inflazione e l'attività economica si fa riferimento al tasso di crescita di uno o più aggregati monetari. L'*inflation targeting* è inteso come l'obiettivo della banca centrale di mantenere entro un certo intervallo l'inflazione, senza l'imposizione a priori di quali strumenti debba utilizzare.

La strategia adottata dalla BCE si basa pertanto su due pilastri: il primo è la quantità di moneta. Il Consiglio direttivo della BCE ha individuato un valore di riferimento per la crescita della moneta, che però non è vincolante, riferito all'aggregato monetario M3. Il secondo pilastro è invece una «*valutazione di ampio respiro delle previsioni dell'andamento dei prezzi nell'area euro [...]. Questa valutazione verrà compiuta facendo riferimento a un ampio ventaglio di indicatori economici*». Questi ultimi sono: indicatori dell'attività economica reale, costo del lavoro, tassi di cambio e prezzi esteri, prezzi delle attività finanziarie e aspettative di imprese e consumatori.



*Situazione aggiornata a giugno 2014:*

- **Zona euro**
- UE non appartenenti all'AEC II
- UE appartenenti all'AEC II con opt-out
- UE non appartenenti all'AEC II con opt-out
- Non UE che usano bilateralmente l'euro
- Non UE che usano unilateralmente l'euro

## I titoli obbligazionari sul mercato

Un'obbligazione (bond) è uno strumento di credito emesso da istituzioni pubbliche o da compagnie private, e consente a chi ha acquistato il titolo, l'investitore, di ottenere in un certo periodo di tempo un flusso di denaro a seguito del suo investimento.

La principale fonte di insicurezza per un investitore che compra le obbligazioni è quella di non ricevere il pagamento dovuto nel periodo specificato (rischio di insolvenza, *default risk*).

Quando di un'obbligazione si conosce in anticipo la quantità di denaro che deve essere corrisposta all'investitore e il periodo di tempo che intercorre tra ogni pagamento, l'obbligazione entra nella categoria delle obbligazioni con reddito fisso (*fixed-income bonds*).

Tutte le obbligazioni emesse hanno una scadenza o maturità (*maturity* o *redemption*) prefissata, che corrisponde al "tempo di vita" dell'obbligazione stessa.

Le obbligazioni si dividono in due categorie: le obbligazioni che pagano cedole e quelle che non prevedono cedole, comunemente chiamate titoli a cedola nulla o Zero Coupon Bond.

Le obbligazioni con cedole sono obbligazioni che consentono all'investitore di riscuotere una parte prestabilita degli importi a lui dovuti (corrispondenti agli interessi sul valore nominale) ad istanti di tempo prefissati. Questi pagamenti vengono fatti tramite delle cedole, dette *coupons*, la cui frequenza di pagamento varia, anche se di solito è semestrale o annuale. Quando l'obbligazione giunge alla sua maturità, l'investitore oltre a ricevere l'ultima cedola, riceve anche il valore di rimborso dell'obbligazione stessa.

Le obbligazioni Zero Coupon invece retribuiscono tutto il valore degli interessi in un unico pagamento coincidente con la propria maturità. Uno zero coupon bond, ovvero un'obbligazione a cedola nulla, è un'obbligazione che non paga cedole e viene venduta con uno sconto rispetto al suo valore nominale.

Un investitore può acquistare nuove obbligazioni direttamente dalle istituzioni che le emettono nel cosiddetto mercato primario, oppure acquistare da altri investitori obbligazioni già emesse nel mercato secondario.

Le obbligazioni sono caratterizzate dall'aver un prezzo che è determinato dalle transazioni che avvengono tra i partecipanti al mercato. Infatti il prezzo di vendita di un'obbligazione aumenta notevolmente nel momento

in cui ci sono molte richieste da parte degli investitori, mentre viceversa diminuisce quando pochi la comprano.

Alla luce di quanto abbiamo visto fino ad ora, un'obbligazione è completamente caratterizzata da una scadenza, dalle cedole di pagamento degli interessi, e dal suo prezzo di mercato. Questa caratteristica rende le obbligazioni un utile strumento per misurare i tassi di interesse del mercato.

## Principali definizioni

Nell'approccio assiomatico, la funzione valore (o funzione di sconto) è quella relazione di equivalenza finanziaria intertemporale attraverso la quale è possibile determinare l'importo  $v(t,T,s)$  che concordato al tempo  $t$  (stipula) deve essere versato in  $T$  (valuta) per ricevere alla scadenza del contratto  $s$  una posta unitaria. La differenza  $(s - T)$  è la durata del contratto. Se la data di stipula coincide con la data di valuta ( $t = T$ ) il contratto si definisce a pronti e la funzione valore si indica con  $v(t,s)$ , mentre se ( $t \neq T$ ) il contratto si definisce a termine e la funzione valore è espressa da  $v(t,T,s)$ .

Nell'approccio di mercato,  $v(t,T,s)$  è il prezzo a termine pattuito in  $t$ , da pagare in  $T$  per ricevere in  $s$  una posta unitaria e  $v(t,s)$  è il prezzo a pronti, pattuito e pagato in  $t$  per ricevere in  $s$  una posta unitaria.

Pertanto il valore attualizzato, ovvero il valore  $x_t$  al tempo  $t$  di un importo  $x_s$  disponibile al tempo  $s$  sarà:

$$x_t = x_s \cdot v(t,s)$$

Allo stesso tempo possiamo affermare che  $x_t$  è la quantità di denaro da versare al tempo  $t$  per avere una quantità di denaro  $x_s$  disponibile al tempo  $s$ .

Il valore al tempo  $t$   $V(t;\mathbf{x})$  del vettore dei flussi  $\mathbf{x}$ , dato da un titolo che paga cedole costanti di importo  $c$  e che rimborsa a scadenza il valore nominale  $C$  con scadenza  $m$ , su un vettore di tempi  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  sarà

$$V(t;\mathbf{x}) = c \cdot v(t, t_1) + c \cdot v(t, t_2) + \dots + (c+C) \cdot v(t, t_m)$$

Il tasso d'interesse a pronti  $i(t,s)$  è dato dalla seguente relazione

$$i(t,s) = (v(t,s))^{t-s} - 1$$

Il rendimento a scadenza  $h(t,s)$  è definito dalla seguente relazione

$$v(t,s) = \exp(-(s-t) \cdot h(t,s)) \Leftrightarrow h(t,s) = -\frac{1}{s-t} \ln v(t,s)$$

Un'altra grandezza fondamentale è l'intensità istantanea d'interesse  $\delta(t,s)$ , che è definita dalla seguente relazione

$$v(t,s) = \exp\left(-\int_t^s \delta(t,u) du\right) \Leftrightarrow \delta(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln v(t,s)$$

Dato un insieme di titoli obbligazionari, con diverse scadenze e cedole, si possono stimare i rendimenti per le varie scadenze. In questo modo si avrà un insieme di coppie ordinate, in cui l'ascissa è data dalla scadenza e l'ordinata dal relativo rendimento; la curva che se ne ottiene prende il nome di curva dei rendimenti.

## La struttura per scadenza dei tassi di interesse

La struttura per scadenza dei tassi di interesse (o curva dei rendimenti) rappresenta la relazione tra i tassi di remunerazione di mercato (interessi) e il tempo rimanente fino alla scadenza dei titoli di debito. Ogni titolo è caratterizzato da una maturità (o termine), cioè il periodo di tempo durante il quale il titolo promette di effettuare pagamenti al possessore. Titoli con maturità diverse sono caratterizzati da determinati prezzi e rendimenti a scadenza diversi.

La struttura per scadenza dei tassi di interesse descrive il mercato obbligazionario all'istante  $t$  di rilevazione. Il contenuto informativo di una curva dei rendimenti riflette il processo di determinazione dei prezzi sui mercati finanziari. Durante l'acquisto e la vendita di obbligazioni, gli investitori includono le loro aspettative sull'inflazione futura, sui tassi di interesse reali e sulla loro valutazione dei rischi.

La conoscenza della struttura a termine dei tassi di interesse è utile alla gestione di strumenti finanziari basati sui tassi di interesse.

Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti tipologie:

- crescente (normale);



- piatta (flat);
- decrescente (invertita);
- campanulare (humped);
- a S o a cucchiaio.

I tre andamenti più significativi sono: crescente, piatta e decrescente. L'inclinazione della curva è influenzata dalle aspettative sull'andamento dei futuri tassi di interesse a breve.

Curva crescente dei rendimenti (andamento normale della curva): le obbligazioni con scadenze brevi hanno rendimenti più bassi perché il rischio associato è considerato inferiore. Se aumenta il numero di anni, si creano maggiore incertezza e un rischio ulteriore. Il maggiore rischio delle obbligazioni con scadenza più lunga è dovuto ad una volatilità più elevata e ad un rischio di inflazione. Gli obbligazionisti vengono premiati per questo rischio maggiore sotto forma di più elevati tassi d'interesse. Il rendimento addizionale sulle obbligazioni di lungo termine viene chiamato premio di liquidità. Aspettative di un rialzo dei tassi sono associate ad un andamento crescente della curva.

Curva piatta dei rendimenti. In caso di curva piatta dei rendimenti, si otterrà più o meno lo stesso tasso di interesse su obbligazioni di breve, medio o lungo termine. Non è inusuale che si crei in questo caso una curva

dei rendimenti crescente per i primi dieci anni e poi una curva più piatta nei venti anni successivi. In questo caso, di solito ha senso acquistare le obbligazioni che scadono prima che la curva si appiattisca, perché dopo non si riceverà alcuna ricompensa per aver acquistato titoli più a lungo termine.

Curva decrescente dei rendimenti (cosiddetta “invertita”): le obbligazioni con una scadenza a breve hanno un rendimento più elevato delle obbligazioni di lungo periodo. Se la curva è inclinata negativamente i mercati attendono una riduzione dei tassi a breve. Questa curva è poco frequente e a volte indica che sta avvenendo un cambiamento economico significativo come per esempio una recessione. È più difficile prendere una decisione di acquisto in queste condizioni. Comprando obbligazioni di lungo periodo non si viene ripagati del rischio. Si può ottenere il rendimento più elevato grazie a quello che sembra essere il percorso più sicuro, comprando obbligazioni di breve termine. Tuttavia, questa strategia potrebbe avere un risultato non positivo nel caso in cui la curva dei rendimenti decrescente non duri molto a lungo. Il rendimento di breve termine potrebbe declinare rapidamente e si perderebbe l'opportunità di bloccare dei rendimenti più elevati.

La BCE pubblica diverse curve dei rendimenti. La BCE stima la curva dei rendimenti a pronti (spot) degli zero coupon bond per l'area dell'euro e da

questa ricava la curva dei rendimenti a termine (forward) e la curva di parità (par).

La curva dei rendimenti a pronti degli zero coupon bond rappresenta il rendimento su titoli a cedola nulla ipotetici, in quanto non sono direttamente osservabili sul mercato per una vasta gamma di scadenze. I rendimenti devono pertanto essere stimati dalle obbligazioni a cedola nulla e dai titoli obbligazionari fissi o dai rendimenti obbligazionari.

La curva dei tassi a termine (forward) mostra i tassi di interesse a termine uniperiodali per i futuri periodi impliciti nella curva a pronti.

I tassi di parità sono dei rendimenti ipotetici, definiti come quei tassi di interesse che i titoli avrebbero reso se fossero quotati alla pari (cioè a 100).

## **Misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse**

I prezzi a pronti (funzione valore), i tassi a pronti e i tassi a termine non sono direttamente osservabili nel mercato, che fornisce invece solamente le quotazioni correnti delle obbligazioni scambiate dagli investitori. Risulta tuttavia che tali quotazioni sono legate linearmente ai fattori di sconto che possono quindi essere solo stimati usando le informazioni che il mercato fornisce. Da un punto di vista matematico, risulta che tale problema può essere formulato come un problema di regressione lineare. Questo tipo di approccio è comunemente chiamato cross-sectional in quanto, fissati i prezzi giornalieri delle obbligazioni considerate, produce una stima giornaliera delle curve di interesse, diversamente dall'approccio basato su modelli che descrivono l'evoluzione nel tempo dei tassi considerati.

In generale, la situazione dei mercati finanziari conferma soltanto con un certo grado di significatività le ipotesi teoriche caratteristiche dei modelli; in particolare, nella rivelazione empirica delle strutture per scadenza si incontrano solitamente diversi ordini di problemi, generati da incompletezze e imperfezioni di vario genere.

L'ostacolo più rilevante a una diretta misurazione della struttura per scadenza è costituito dalla non disponibilità di titoli senza cedola su un

ampio spettro di scadenza. In particolare, sul mercato italiano non esistono, almeno per quantità significative, titoli a cedola nulla con vita e scadenza superiore a due anni (la scadenza del più lungo dei BOT emessi dal ministero del tesoro è un anno e i CTZ sono emessi con scadenza di due anni), mentre lo spettro delle scadenze che caratterizzano i titoli con cedola fissa (i BTP) si estende fino a 30 anni. Dato che, nelle ipotesi di mercato perfetto, un titolo con cedola può essere considerato come un portafoglio di titoli a cedola nulla unitari con diversa scadenza, per ricavare una determinazione della struttura per scadenza che sia abbastanza estesa e significativa per l'utilizzazione pratica bisogna estrarre informazioni sui prezzi (non osservati) di questi titoli a cedola nulla elementari dai prezzi osservati dei titoli a cedola fissa.

Questo problema di stima può essere affrontato con vari gradi approssimazione e con diversi livelli di raffinatezza metodologica.

Esistono vari metodi di stima della struttura per scadenza dei tassi a pronti, che possono essere:

- metodi basati sul tasso interno di rendimento;
- misurazione della struttura per scadenza come problema di algebra lineare
  - metodi basati sui prezzi dei titoli a cedola fissa;
  - metodi basati su tassi di parità

- il bootstrapping  
(utilizzando i tassi swap come tassi di parità, con la tecnica del bootstrapping, si ottiene la cosiddetta *struttura zero-coupon swap*);
- metodi di riduzione dello scadenziario;
- metodi basati sulla stima di un modello
  - modelli basati sulla dinamica di mercato;
  - modelli basati su spline.

Supponendo che alla data  $t$  siano osservabili sul mercato  $n$  titoli obbligazionari, si indica:

$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  lo scadenziario comune a tutti i titoli (ottenuto come insieme unione degli  $n$  scadenziari caratteristici dei singoli titoli)

$\mathbf{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\}$  il flusso di pagamenti definito dal  $j$ -esimo titolo, ridefinito sullo scadenziario comune aggiungendo poste nulla sulle date di  $\mathbf{t}$  che non rientrano tra le scadenze specifiche del titolo

$V_j = V(t; \mathbf{x}_j) ; j=1, 2, \dots, n$  i prezzi degli  $n$  titoli osservati sul mercato al tempo  $t$

$v_k = v(t, t_k) ; k=1, 2, \dots, m$  i prezzi a pronti al tempo  $t$  per le  $m$  scadenze

(fattori di sconto)

$\mathbf{X} = \{x_{jk}; j=1, \dots, n; k=1, \dots, m\}$  la matrice a  $m$  righe e  $n$  colonne delle  
poste pagate dai titoli

$\mathbf{V} = \{V_j; j=1, \dots, n\}$  il vettore degli  $n$  prezzi dei titoli

$\mathbf{v} = \{v_k; k=1, \dots, m\}$  il vettore degli  $m$  fattori di sconto

Il problema di stima consiste nel ricavare gli  $m$  prezzi a pronti (fattori di sconto)  $v_k$ , tali che:

$$V_j = \sum_{k=1}^m x_{jk} v_k \quad j=1, 2, \dots, n$$

Ovvero, in forma matriciale:

$$\mathbf{X} \mathbf{v} = \mathbf{V}$$

Con i metodi basati sulla stima di un modello, si può cercare di determinare  $\mathbf{V}$  come l'insieme dei prezzi che produce la migliore approssimazione (best fit)  $\tilde{\mathbf{V}}$  dei prezzi osservati  $\mathbf{V}$  sulla base di un criterio opportunamente prescelto. I criteri di approssimazione più usati sono basati sull'utilizzazione di un modello parametrico per la funzione di sconto definito nel tempo continuo. Si assume cioè come valida una specifica forma funzionale, che si indicherà con:

$$v(t,s;\mathbf{a}), \quad t \leq s,$$

per rappresentare il fattore di sconto sull'orizzonte  $[t,s]$ , inteso come funzione di  $s$  fissata in  $t$  e dipendente da un vettore di  $p$  parametri  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ . Si possono allora definire, per gli  $n$  titoli che formano la matrice  $\mathbf{X}$ , i prezzi di modello:

$$\tilde{V}_j(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m x_{jk} v(t, t_k; \mathbf{a})$$

che sono quindi delle funzioni di forma nota (perché assegnata) dei parametri  $\mathbf{a}$ . A questo punto il problema del fitting dei prezzi prodotti dal modello ai prezzi effettivamente osservati viene di solito affrontato ricercando il vettore di parametri  $\mathbf{a}$  che rende minima la somma dei quadrati degli scarti tra i prezzi teorici e i prezzi di mercato. Si ricerca  $\mathbf{a}$  come soluzione del problema:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \sum_{j=1}^n [\tilde{V}_j(\mathbf{a}) - V(j)]^2$$

essendo  $\mathbf{A}$  un opportuno insieme di variazione dei parametri.

Il modello di Nelson e Siegel specifica direttamente la forma funzionale dell'intensità istantanea di interesse (invece che quella dei fattori di



sconto), data da:

$$\delta(t, t + \tau) := \alpha + \beta_1 e^{-\tau/\vartheta} + \beta_2 \frac{\tau}{\vartheta} e^{-\tau/\vartheta}$$

Il vettore dei parametri è quindi:

$$\mathbf{a} = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \vartheta\}$$

con  $\alpha > 0$ ,  $\beta_1 > -\alpha$ ,  $\vartheta > 0$

Il corrispondente fattore di sconto ha la forma:

$$v(t, t + \tau; \mathbf{a}) = e^{-\alpha\tau - \beta_1\vartheta(1 - e^{-\tau/\vartheta}) - \beta_2[\vartheta(1 - e^{-\tau/\vartheta}) - \tau e^{-\tau/\vartheta}]}$$

Delle cinque forme di curve dei tassi che si osservano in pratica:

- crescente (normale);
- piatta (flat);
- decrescente (invertita);
- campanulare (humped);
- a S o a cucchiaio.

La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme. Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson.

Il modello di Svensson estende il modello di Nelson e Siegel definendo l'intensità istantanea di interesse nella forma:

$$\delta(t, t + \tau) := \alpha + \beta_1 e^{-\tau/\vartheta} + \beta_2 \frac{\tau}{\vartheta} e^{-\tau/\vartheta} + \beta_3 \frac{\tau}{\vartheta'} e^{-\tau/\vartheta'}$$

Il vettore dei parametri è:

$$\mathbf{a} = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \vartheta, \vartheta'\}$$

## **Struttura dei tassi di interesse: il modello BCE**

La Banca Centrale Europea utilizza il modello di Nelson – Siegel – Svensson per la stima delle curve dei rendimenti riferite all'euro mercato. La BCE pubblica giornalmente sul suo sito le curve dei rendimenti stimate con il modello di Nelson – Siegel – Svensson dal 6 settembre 2004, calcolate a partire dalle quotazioni sull'Euro MTS (Mercato dei Titoli di Stato). La BCE stima quotidianamente a fine giornata due curve dell'area euro. Quella principale è stimata sui prezzi di titoli di Stato con rating (Fitch) AAA, che assume il significato della struttura per scadenza risk-free dell'area euro. Un'altra curva è calcolata a partire dai prezzi di tutti i titoli di Stato dell'area euro.

In entrambi i casi vengono considerati solo titoli denominati in euro, con poste deterministiche (titoli senza cedola e titoli con cedola fissa), maturity da 3 mesi a 30 anni, nominale emesso di almeno 5 miliardi di euro ed effettivamente scambiati nella giornata.

La curva dei rendimenti dell'area dell'euro indica separatamente i titoli di stato centralizzati dell'area euro AAA e tutti i titoli di Stato dell'area dell'euro (compresi i rating AAA). Viene aggiornata ogni giorno lavorativo a mezzogiorno (12:00 CET).

Le curve di rendimento giornaliero sono disponibili a partire dal 6 settembre 2004 e sono calcolate e rilasciate quotidianamente.

Sono utilizzate le seguenti fonti di dati:

- le informazioni sulle obbligazioni e sui prezzi sono fornite da EuroMTS Ltd. [www.euromts-ltd.com](http://www.euromts-ltd.com)
- le valutazioni sono fornite da Fitch Ratings. [www.fitchratings.com](http://www.fitchratings.com)

Al fine di selezionare le obbligazioni, vengono applicati i seguenti criteri:

- sono selezionate solo obbligazioni emesse in euro da parte del governo centrale dell'area dell'euro;
- le obbligazioni con caratteristiche particolari, incluse quelle con specifici provvedimenti istituzionali, sono escluse;
- sono selezionate solo obbligazioni a cedola fissa con scadenza finita e obbligazioni zero coupon, tra cui STRIPS (trading separato di interessi e capitale). Le obbligazioni a cedola variabile, comprese le obbligazioni indicizzate all'inflazione e le obbligazioni perpetue, non sono incluse;
- sono selezionati solo titoli obbligazionari governativi negoziati attivamente con un massimo spread denaro-lettera di tre punti base. I prezzi / rendimenti sono quelli di chiusura del mercato al giorno di riferimento.
- per riflettere una sufficiente profondità di mercato, il margine temporale di scadenza residua è stato fissato da un minimo di tre mesi fino ad un massimo di 30 anni.

Un meccanismo di rimozione degli *outliers* viene applicato ai bond che

hanno superato i criteri di selezione di cui sopra. Le obbligazioni vengono rimosse se i loro rendimenti scenderanno al di sotto del doppio della deviazione standard dalla resa media nella stessa fascia di maturità. Successivamente, la stessa procedura viene ripetuta.

Le curve di rendimento e la loro corrispondente serie temporale sono calcolate utilizzando due set di dati diversi che riflettono diversi livelli di rischio di credito:

- un set contiene titoli di Stato "euro AAA", ossia titoli di debito pubblico con la valutazione del rischio di credito più favorevole.
- un secondo set di dati contiene tutti i titoli di Stato centralizzati in euro (AAA e altri).

Nello specifico, il metodo adottato dalla BCE per calcolare prezzi e rendimenti è il seguente.

La stima della curva avviene mediante un algoritmo di modellazione che minimizza la somma della differenza quadratica tra i rendimenti che possono essere calcolati dalla curva e i rendimenti effettivamente misurati. I rendimenti sono calcolati, se possibile, secondo la formula della International Securities Market Association per un prestito obbligazionario fisso interamente rimborsato con una data di rimborso unica fissata.

Per un'obbligazione a cedola fissa, che paga  $h$  volte l'interesse per anno, con una data di rimborso unica fissata, l'equazione la cui incognita è il tasso di rendimento del titolo mantenuto fino a scadenza può essere scritta – utilizzando la notazione della BCE - come segue:

$$P = v^{f_1} \cdot \left( k + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g}{h} \cdot v^i \right) + \left( C + \frac{g}{h} \cdot f_2 \right) \cdot v^{m+f_1+f_2-1}$$

dove

$P$  = prezzo lordo del titolo alla chiusura del giorno lavorativo precedente

$g$  = tasso cedolare annuale in percentuale

$k$  = prima o successiva cedola in percentuale

$h$  = numero di cedole nell'anno

$m$  = numero di pagamenti cedola al rimborso

$f_1$  = frazione del numero di giorni di calendario dalla data di valuta al primo / successivo pagamento di interessi

$f_2$  = frazione del numero di giorni di calendario dall'ultima data coupon normale al rimborso

$C$  = valore di riscatto

$v$  = fattore di sconto.  $v = 1 / (1 + i)$ , dove  $i$  = tasso effettivo di rendimento a scadenza.

La legge di equivalenza intertemporale è la capitalizzazione composta su uno scadenziario continuo (legge esponenziale).

I calcoli utilizzati per determinare i flussi di cassa sono basati sulle date di regolamento in base alle pratiche di mercato delle singole obbligazioni.

Il conteggio dei giorni viene fatto utilizzando pratiche di mercato come  $\text{eff}/360$ ,  $\text{act}/\text{act}$  o è basato sulla convenzione  $30/360$ , a seconda del tipo di obbligazioni e della residenza dell'emittente.

Non sono apportati adeguamenti per effetti fiscali o cedolari.

I valori dei parametri del giorno TARGET precedente vengono utilizzati come valori di partenza per i calcoli successivi di TARGET.

Numerosi modelli sono stati proposti negli ultimi anni per stimare la curva dei rendimenti, alcuni basati direttamente sul prezzo di titoli a reddito certo (titoli a cedola nulla e titoli a cedola certa) e maturity (scadenza) in funzione di alcuni parametri (cross-sectional dimension), ad esempio il modello di Nelson-Siegel (1987) e il modello di estensione di Svensson (1994).

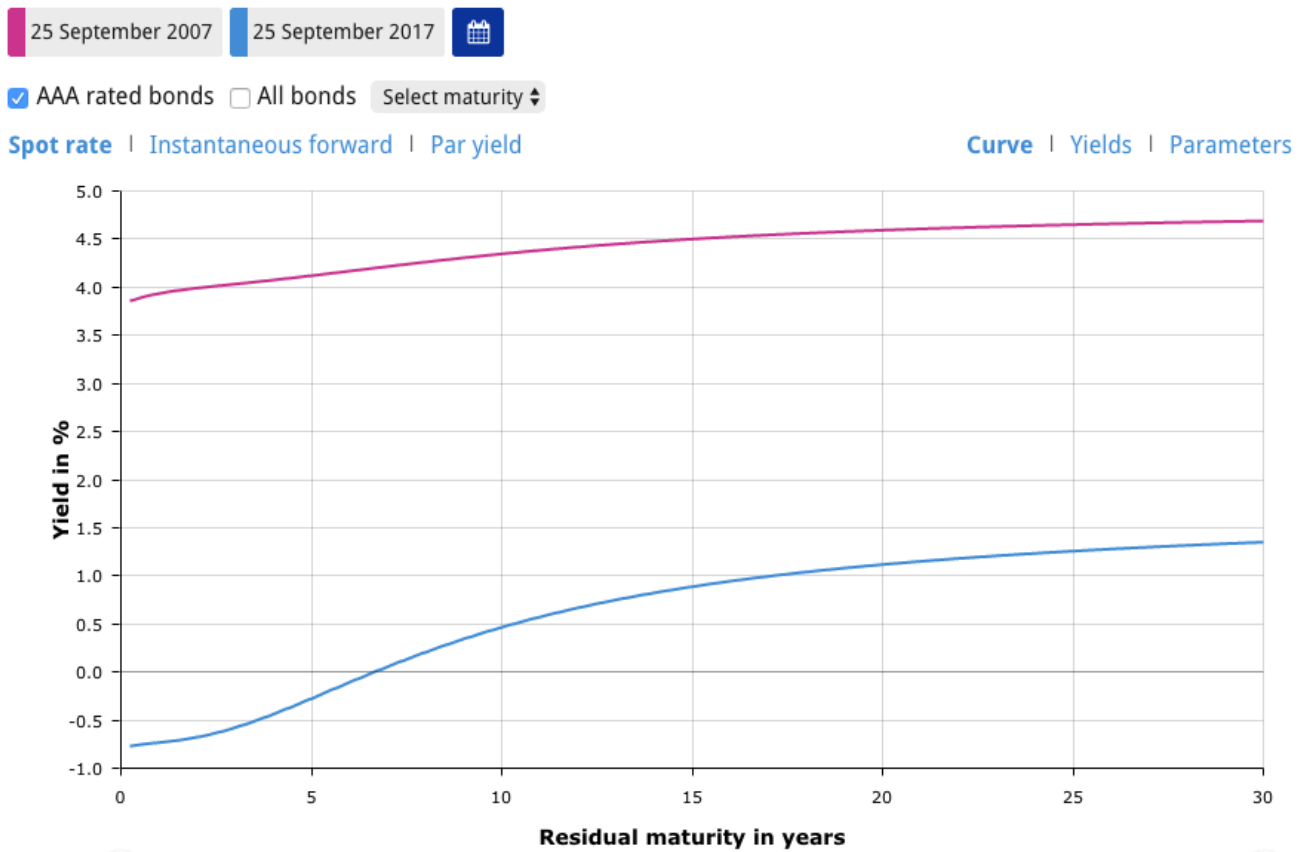
La metodologia utilizzata dalla BCE è il cosiddetto modello di Svensson per la stima delle curve dei rendimenti riferite all'euro mercato. Tale modello, è di tipo parametrico e specifica una forma funzionale per il tasso spot, come vista in precedenza.

Dalla struttura per scadenza dei tassi a pronti si ricava quella implicita dei tassi a termine.



## Grafici e tabelle

Andamento delle curve dei tassi di interesse a pronti di rating AAA negli anni 2007 e 2017 a confronto.



AAA rated bonds  All bonds Select maturity ▾

[Spot rate](#) | [Instantaneous forward](#) | [Par yield](#)

Maturity	25 September 2007	25 September 2017
3 months	3.857683	-0.770145
6 months	3.888614	-0.755054
9 months	3.913637	-0.743532
1 year	3.934171	-0.733234
2 years	3.990751	-0.677888
3 years	4.032567	-0.577982
4 years	4.074459	-0.438307
5 years	4.119571	-0.276426
6 years	4.166956	-0.108502
7 years	4.214716	0.054298
8 years	4.261167	0.205589
9 years	4.305139	0.342496
10 years	4.345966	0.464400
11 years	4.383368	0.571957
12 years	4.417330	0.666458
13 years	4.448002	0.749418
14 years	4.475620	0.822354
15 years	4.500465	0.886672

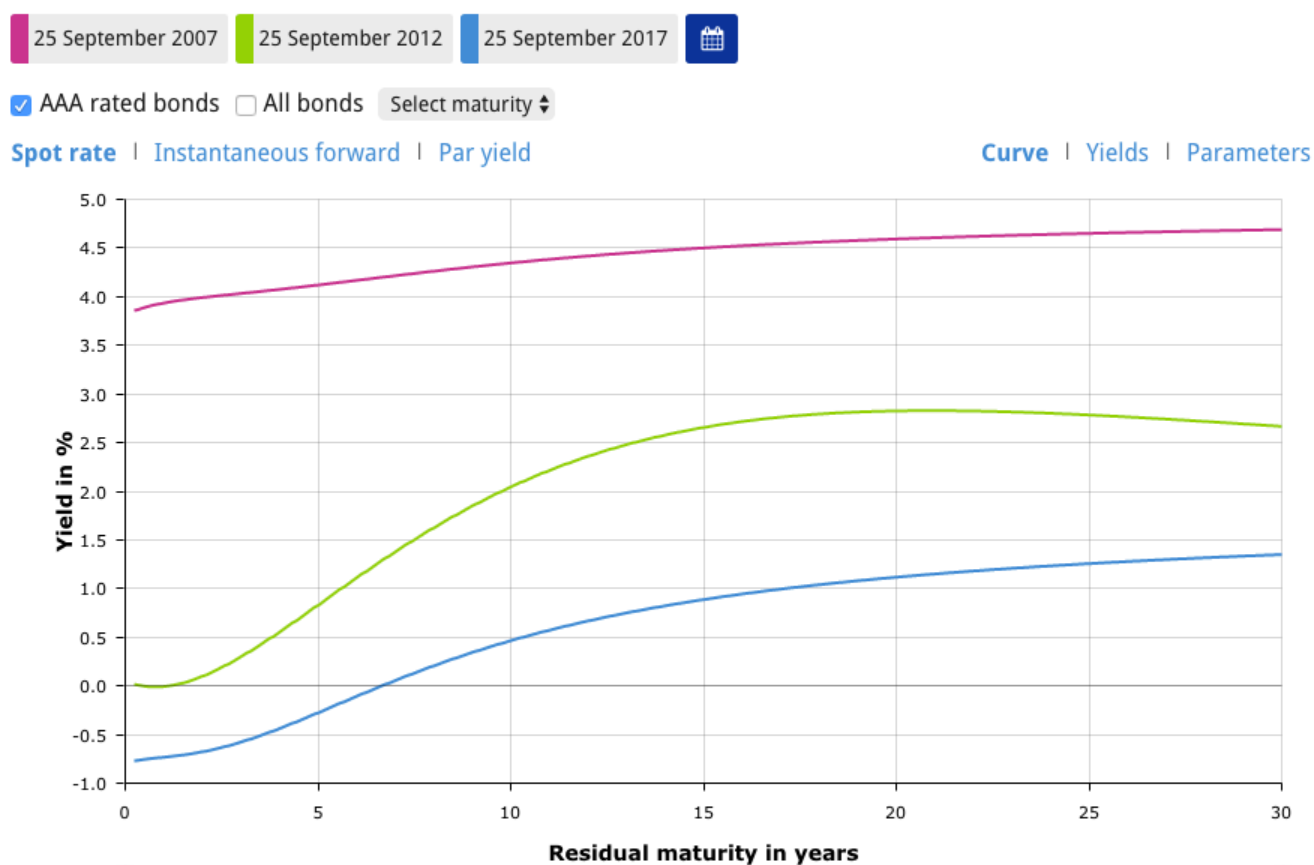
AAA rated bonds  All bonds Select maturity ▾

[Spot rate](#) | [Instantaneous forward](#) | [Par yield](#)

Maturity	25 September 2007	25 September 2017
13 years	4.448002	0.749418
14 years	4.475620	0.822354
15 years	4.500465	0.886672
16 years	4.522822	0.943615
17 years	4.542968	0.994256
18 years	4.561158	1.039507
19 years	4.577626	1.080134
20 years	4.592575	1.116782
21 years	4.606187	1.149988
22 years	4.618620	1.180203
23 years	4.630011	1.207808
24 years	4.640479	1.233122
25 years	4.650127	1.256417
26 years	4.659044	1.277923
27 years	4.667309	1.297838
28 years	4.674989	1.316331
29 years	4.682143	1.333550
30 years	4.688822	1.349621

Andamento delle curve dei tassi di interesse a pronti con rating AAA negli anni 2007, 2012 e 2017 a confronto.

La differenza con il primo grafico si può notare osservando la curva di rendimento dell'anno 2012, in cui si iniziano ad avere tassi di interesse negativi in crescente aumento fino ad oggi.



AAA rated bonds  All bonds Select maturity ▾

[Spot rate](#) | [Instantaneous forward](#) | [Par yield](#)

Maturity	25 September 2007	25 September 2012	25 September 2017
3 months	3.857683	0.015567	-0.770145
6 months	3.888614	-0.003598	-0.755054
9 months	3.913637	-0.010504	-0.743532
1 year	3.934171	-0.006425	-0.733234
2 years	3.990751	0.097606	-0.677888
3 years	4.032567	0.298648	-0.577982
4 years	4.074459	0.552851	-0.438307
5 years	4.119571	0.829712	-0.276426
6 years	4.166956	1.108566	-0.108502
7 years	4.214716	1.375935	0.054298
8 years	4.261167	1.623529	0.205589
9 years	4.305139	1.846756	0.342496
10 years	4.345966	2.043602	0.464400
11 years	4.383368	2.213812	0.571957
12 years	4.417330	2.358289	0.666458
13 years	4.448002	2.478654	0.749418
14 years	4.475620	2.576939	0.822354
15 years	4.500465	2.655365	0.886672

AAA rated bonds  All bonds Select maturity ▾

[Spot rate](#) | [Instantaneous forward](#) | [Par yield](#)

Maturity	25 September 2007	25 September 2012	25 September 2017
12 years	4.417330	2.358289	0.666458
13 years	4.448002	2.478654	0.749418
14 years	4.475620	2.576939	0.822354
15 years	4.500465	2.655365	0.886672
16 years	4.522822	2.716191	0.943615
17 years	4.542968	2.761618	0.994256
18 years	4.561158	2.793724	1.039507
19 years	4.577626	2.814425	1.080134
20 years	4.592575	2.825461	1.116782
21 years	4.606187	2.828388	1.149988
22 years	4.618620	2.824583	1.180203
23 years	4.630011	2.815251	1.207808
24 years	4.640479	2.801439	1.233122
25 years	4.650127	2.784048	1.256417
26 years	4.659044	2.763850	1.277923
27 years	4.667309	2.741500	1.297838
28 years	4.674989	2.717549	1.316331
29 years	4.682143	2.692461	1.333550
30 years	4.688822	2.666620	1.349621

## Bibliografia

Banfi Alberto, Biasin Massimo, Oriani Marco, Raggetti GiamMario, *Economia degli intermediari finanziari*, (ISEDI, 2014).

Brealey Richard, *Principi di finanza aziendale*, (McGraw-Hill Education, 2015).

Castellani Gilberto, De Felice Massimo, Moriconi Franco, *Manuale di Finanza. Tassi di interesse. Mutui e obbligazioni*, (Il Mulino, Bologna, 2015).

Cox John C., Ingersoll Jonathan E., Ross Stephen A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rate*. In *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1985).

D'Agostino Gabriella, Guglielmi Antonio, *Il modello matematico sottostante alla curva dei rendimenti della BCE* in *Matematicamente.it Magazine* (2011)

European Central Bank, Eurosystem,

<https://www.ecb.europa.eu/home/html/index.en.html>

European Central Bank, Eurosystem, *General description of ECB yield curves methodology*

[http://www.ecb.europa.eu/stats/financial\\_markets\\_and\\_interest\\_rates/euro\\_area\\_yield\\_curves/html/index.en.html](http://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html)

Nelson Charles R., Siegel Andrew F., *A Parsimonious Modelling of Yield Curves*. In *Journal of Business*, vol. 60, n. 4, pp. 473-489 (1987)

Pifferi Marco, Porta Angelo, *Il sistema europeo di banche centrali: struttura e obiettivi*, in *La Banca Centrale Europea* (Egea, Milano, 2006).

Pressacco Flavio, Stucchi Patrizia, *Elementi di matematica finanziaria*, (CEDAM, 2007).

Svensson Lars E. O., *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*, NBER Working Paper No. w4871 (1994).

Vasicek Oldrich, *An equilibrium characterization of the term structure*, in *Journal of Financial Economics*, (1997).