Dipartimento di Impresa e management

Cattedra di Matematica finanziaria

DURATION, CONVEXITY
E IMMUNIZZAZIONE DI PORTAFOGLIO

RELATORE

Prof.ssa Gaia Barone

CANDIDATO

Luca Ciampriello

Matr. 198571

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la professoressa Barone sia per l'aiuto fornitomi che per la disponibilità e precisione dimostratemi durante il periodo di stesura. Infine vorrei fare un ringraziamento speciale ai miei genitori i quali mi hanno sostenuto e guidato in ogni momento durante questo percorso.

Introduzione

Quando si impiega un capitale, si presume che l'ammontare di questo non rimanga costante al passare del tempo. Qualora l'investimento lo prevedesse si potrebbe presentare il problema di confrontare tra loro capitali che si rendono disponibili a scadenze diverse. Questo è un problema fondamentale della matematica finanziaria. Nella valutazione del ritorno di un'operazione finanziaria che ha comportato un certo investimento, il quale presume un certo cash flow a determinate scadenze, è necessario un indice per misurare l'importanza finanziaria della disponibilità di diverse somme in epoche diverse ai fini della valutazione del valore disponibile alle diverse scadenze.

In questo elaborato verrà analizzato il concetto di *duration* e la letteratura sviluppatasi in merito a tale argomento negli ultimi 80 anni, dalla formula di Macaulay[1], discutendo dei problemi e i limiti, soffermandosi sull'evoluzione del concetto, fino allo studio di alcuni moderni strumenti finanziari, infine si farà riferimento a varie strategie di portafogli a reddito fisso, facendo una distinzione tra approcci attivi e passivi.

Una strategia passiva d'investimento presume che i prezzi di mercato dei titoli siano correttamente determinati sul mercato. I *passive managers* operano in modo tale da mantenere un appropriato equilibro tra rischio-rendimento, date le opportunità di mercato. Un caso speciale di *passive management* è la strategia di immunizzazione, che ha come fine quello di proteggere, immunizzare un portafoglio titoli dal rischio di tasso d'interesse. All'opposto una strategia attiva d'investimento si prefigge di ottenere rendimenti maggiori, commisurati con il rischio sostenuto. Nel contesto del *bond management* questo approccio sopra descritto può assumere due diverse metodologie. Gli *active managers* possono sia formulare analisi e aspettative riguardo i movimenti dell'intero mercato dei *bond*, sia analisi *intramarket* per individuare e identificare, con metodologie di *pricing*, particolari settori del mercato o particolari titoli *mispriced*, sottovalutati o sopravvalutati.

Il rischio di tasso d'interesse è un elemento fondamentale in entrambe le strategie appena descritte, dunque si inizierà lo studio con un'analisi della sensibilità del prezzo dei *bond* a variazioni del tasso d'interesse. Questa sensibilità è misurata con la *duration*, passando ad analizzare successivamente cosa determina la *duration* di un titolo. Si considererà una migliore misura della sensibilità al tasso d'interesse, con il concetto di *convexity*, soffermandosi su due casi particolari di convessità della funzione prezzo nel caso specifico di *callable bonds*, *bond* esigibili anticipatamente, e *mortgage backed securities*, titoli garantiti da ipoteca.

[1] Frederick Macaulay, "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856", *National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

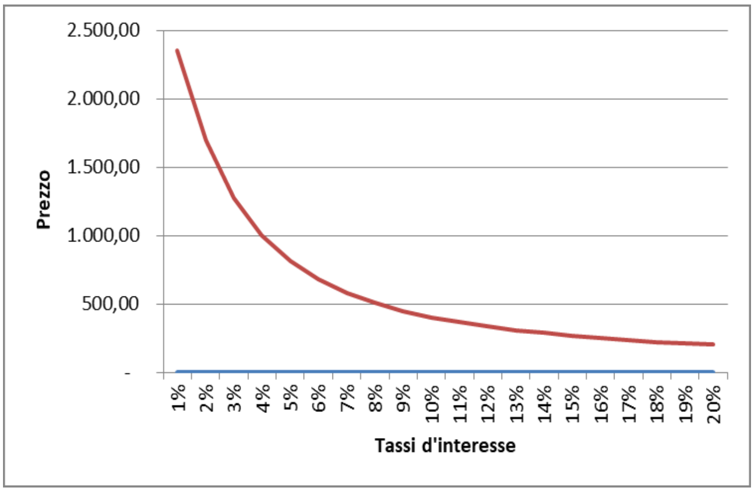
Si esaminerà come immunizzare l'*holding period return* di un portafoglio dal rischio di tasso d'interesse e altre strategie di *bond portfolio management*, attraverso tecniche basate sulla *duration*, con un esempio di costruzione di un portafoglio immunizzato.

1. Rischio di tasso di interesse

La relazione tra il prezzo di un generico *bond* e il tasso d'interesse è di tipo inversa e la misura della variazione di questi ultimi, in un determinato intervallo temporale, può essere molto rilevante. I tassi d'interesse possono aumentare o diminuire e allo stesso tempo i detentori di *bond* possono incorrere in perdite o profitti. Tali profitti o perdite fanno si che gli investimenti in titoli a reddito fisso siano rischiosi, anche se il pagamento delle cedole alle varie scadenze e il rimborso del capitale sono garantite, come nel caso delle obbligazioni del tesoro di un determinato stato.

La Figura 1 mostra il prezzo di un *coupon bond* di 30 anni, pagante cedole semestrali al tasso cedolare del 4%, nel caso in cui sia venduto alla pari, tasso di mercato 4%, venduto sotto la pari 8% a € 504,94.

Figura 1 - *Relazione prezzi-rendimenti*



Fonte: *Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

La curva, con pendenza negativa, illustra la relazione negativa tra prezzo e rendimento. Questa implica che un incremento nel tasso d'interesse causa una riduzione del prezzo del titolo che sarà minore dell'incremento del prezzo risultante da una riduzione di uguale ammontare nel tasso d'interesse. Questa proprietà è chiamata convessità e sarà analizzata successivamente. Questa pendenza riflette il fatto che un progressivo incremento dei tassi d'interesse provoca una riduzione progressivamente minore nel prezzo del *bond*[2]. Si può notare come la curva diviene sempre più piatta ad alti tassi d'interesse.

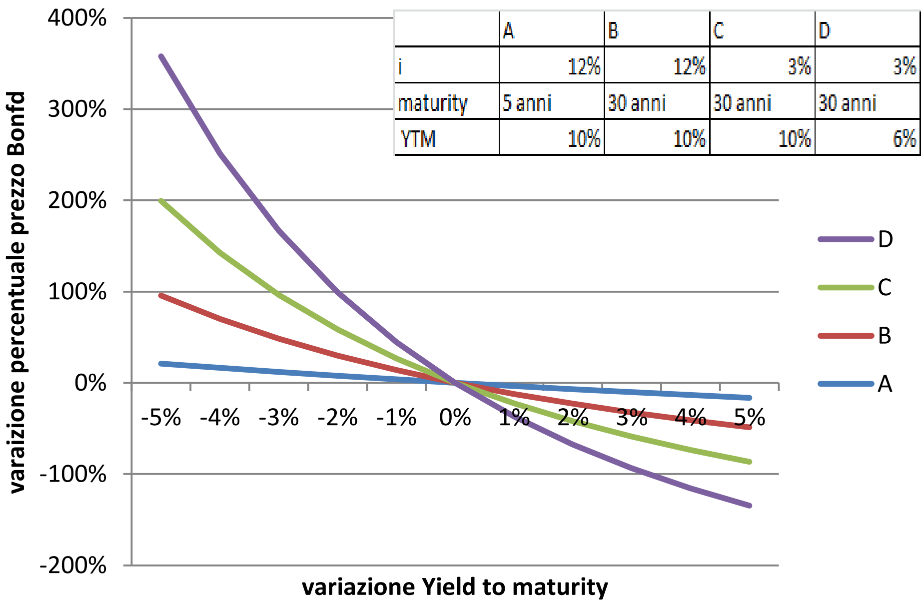
[2] Il progressivo minor impatto dell'incremento nel tasso d'interesse risulta dal fatto che ad alti tassi il bond vale meno. In aggiunta, un aumento successivo nei tassi impatta su una base di valore inferiore, determinando una minore riduzione nel prezzo.

Dopo che i *bond* sono stasi emessi, coloro che li detengono possono comprarli o venderli nel mercato secondario. In questo mercato i prezzi variano inversamente rispetto ai tassi di mercato. In un mercato competitivo tutti i titoli devono offrire un giusto tasso di rendimento atteso. Se un *bond* è venduto con un tasso cedolare dell' 8% quando i tassi sul mercato sono all' 8%, sarà venduto alla pari. Se il tasso di mercato salisse al 9% ci si potrebbe chiedere chi sarebbe disposto a pagare il valore nominale del titolo per un tasso cedolare dell'8%, il prezzo del *bond* dovrà diminuire fino al punto in cui il proprio rendimento atteso aumenti fino al " livello competitivo " del 9%. Tuttavia, se i tassi di mercato si riducessero al 7%, il tasso cedolare dell'8% corrisposto dal *bond* diventerebbe molto attraente rispetto ai tassi di investimenti alternativi sul mercato. La relazione inversa tra prezzo-rendimento è una caratteristica centrale nei titoli obbligazionari. Le variazioni dei tassi d'interesse rappresentano la principale fonte di rischio nel mercato dei titoli a reddito fiss

1.1 Sensibilità al tasso di interesse

La sensibilità dei prezzi dei *bond* a cambiamenti dei tassi di interesse di mercato è ovviamente una grande preoccupazione per gli investitori. La figura sottostante presenta la percentuale di variazione nel prezzo corrispondente a cambiamenti dell'*yield to maturity* di quattro ipotetici *bond*, A, B, C e D, che differiscono nel tasso cedolare nel tasso di rendimento iniziale e nella *maturity*.

Figura 2 - *Relazione prezzo, maturity*



Fonte: *Elaborazione persornale, Microsoft Excel*

Tutti i prezzi dei *bond* diminuiscono in conseguenza a un aumento dei tassi e la curva del prezzo si presenta convessa, dimostrando che una diminuzione dei tassi ha un maggiore impatto sui prezzi rispetto a un incremento degli stessi tassi di un uguale ammontare.

Si possono definire le prime due relazioni tra *bond* e prezzo:

1 Relazione inversa tra i prezzi dei *bond* e i tassi: all'aumentare dei tassi, i prezzi diminuiscono; al diminuire dei tassi, i prezzi aumentano.

2 Un incremento nel tasso di rendimento dei *bond* si risolve in un minore cambiamento di prezzo rispetto a un decremento nel tasso di uguale ammontare.

Analizzando la figura si può notare la diversa sensibilità al tasso d'interesse dei *bond* A e B. L'obbligazione B con una *maturity* maggiore dell'obbligazione A mostra un maggiore sensibilità a cambiamenti del tasso d'interesse.

Si può definire la terza relazione tra *bond* e prezzo:

3 I prezzi di obbligazioni con *maturity* elevate tendono ad essere maggiormente sensibili a cambiamenti nel tasso d'interesse rispetto a obbligazione con *maturity* inferiori.

Guardando attentamente le caratteristiche dell'obbligazione B ed A, quest'ultima ha meno di sei volte la sensibilità al tasso d'interesse dell'obbligazione B. Sebbene generalmente la sensibilità al tasso d'interesse aumenta con la *maturity*, questa incrementa meno che proporzionalmente all'incrementare della *maturity* del titolo.

Si può definire la quarta relazione tra *bond* e prezzo:

4 La sensibilità dei prezzi dei titoli a cambiamenti nei tassi incrementa a un tasso decrescente all'aumentare della *maturity*. Il rischio di tasso d'interesse è meno che proporzionale alla *maturity* del titolo.

I titoli B e C che presentano le stesse caratteristiche eccetto per il tasso cedolare, mostrano un altro elemento. Le obbligazioni con cedole minori hanno una maggiore sensibilità verso cambiamenti nei tassi di interesse.

Si può definire la quinta relazione tra *bond* e prezzo:

5 Il rischio di tasso d'interesse è inversamente correlato con il tasso cedolare del titolo. I prezzi di *bond* con cedole minori sono più sensibili a variazioni nei tassi d'interesse rispetto ai prezzi di *bond* con cedole maggiori.

Infine i titoli C e D sono identici eccetto per il tasso interno di rendimento al quale sono venduti. Il titolo C, con tasso implicito di rendimento maggiore, è meno sensibili a cambiamenti nei rendimenti.

Si può definire la sesta relazione tra *bond* e prezzo:

6 La sensibilità del prezzo dei *bond* al cambiamento del proprio rendimento è inversamente correlata al tasso di rendimento implicito al quale il *bond* è attualmente venduto.

Le prime cinque proprietà generali appena descritte furono esposte da Malkiel.[3] L'ultima relazione fu dimostrata da Homer e Liebowitz.[4]

La *maturity* è la maggior determinante del rischio di tasso d'interesse. Tuttavia, la *maturity* da sola non è sufficiente a misurare la sensibilità al tasso d'interesse. Come si può notare dalla Tabella 1 i titoli B e C hanno la stessa scadenza, ma il prezzo del *bond* con più alto tasso cedolare è meno sensibile a cambiamenti nel tasso d'interesse.

Attraverso un esempio numerico si può vedere come il tasso cedolare o il rendimento interno influenza il tasso d'interesse.

Tabella 1 - *Rendimenti e tassi d'interesse coupon bond.*

Tasso annuo effettivo	t = 1 anno	t = 10 anni	t = 20 anni
8%	€ 1.000,00	€ 1.000,00	€ 1.000,00
9%	€ 990,64	€ 934,96	€ 907,99
perdita di valore	0,95%	6,50%	9,20%

Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Si nota dalla tabella 2 come il titolo a più breve termine perde meno dell'1% quando i tassi passano dall' 8% al 9%. Il titolo a 10 anni perde il 6,50% mentre quello a 20 anni circa il 9%. Confrontando questi tre *coupon bond,* pagamento semestrale, tasso cedolare annuo dell'8%, con tre *zero coupon bond*

Tabella 2 - *Rendimenti e tassi d'interesse zero coupon bond.*

Tasso annuo effettivo	t = 1 anno	t = 10 anni	t = 20 anni
8%	€ 924,56	€ 456,39	€ 208,29
9%	€ 915,73	€ 414,64	€ 171,93
perdita di valore	0,96%	9,15%	17,46%

Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Per ogni *maturity*, il prezzo degli *zero coupon bond* diminuiscono in proporzione maggiore rispetto al prezzo dei *coupon bond* all'8%. I titoli a lungo termine sono più sensibili a movimenti nei tassi

[3] Burton G. Malkiel, "Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics 76, (1962), pp. 197-218.*

[4] Sidney Homer and Martin L. Liebowitz "Inside the Yield Book: New Tools for Bond Market Strategy," Prentice Hall Direct, 1973.

d'interesse rispetto ai titoli a breve termine, attraverso questa affermazione si potrebbe sostenere che uno *zero coupon bond* rappresenta un titolo più a lungo termine rispetto a un *coupon bond* con uguale *maturity.*

Si deve notare che nell'esempio riportato precedentemente le *maturity* dei *bond* non sono una misura corretta per poter definire un titolo a lungo-termine o breve-termine. Il *bond* a 20 anni 8% che corrisponde cedole semestralmente, tali pagamenti sono effettuati prima della scadenza del titolo. Ogni uno di questi pagamenti potrebbe essere considerato avente la propria scadenza, in una visione di un coupon *bond* come un "portafoglio di cedole". La *maturity* effettiva corrisponderebbe a una media delle *maturity* di tutti i *cash flow.* Lo zero coupon *bond* corrisponde un unico pagamento a scadenza. Quindi la sua *maturity* è un concetto ben definito.

I titoli ad alto tasso cedolare hanno una frazione elevate del proprio valore collegata alle cedole piuttosto che al pagamento del valoro di rimborso finale, e quindi il portafoglio di cedole è più fortemente ponderato verso i primi pagamenti con scadenze brevi, i quali forniscono una più bassa *maturity* effettiva. Ciò spiega la quinta relazione di Malkiel[5], secondo cui la sensibilità del prezzo diminuisce con l'aumentare del tasso cedolare. Similmente nella sesta relazione, gli alti rendimenti riducono il valore attuale dei pagamenti corrisposti dai titoli, maggiormente per i pagamenti più distanti nel tempo. Quindi, ad alti rendimenti, una maggiore porzione del valore dei titoli è dovuta ai suoi primi pagamenti, i quali hanno minori *maturity* effettive e sensibilità ai tassi d'interesse. Così la sensibilità complessiva del prezzo dei titoli a cambiamenti nei rendimenti è più bassa.

1.2 *Duration*

Per far fronte all'ambiguità nel concetto di *maturity* di un *bond* che prevede pagamenti durante la propria vita, si deve ricercare una misura della *maturity* media di un tale titolo. Tuttavia potrebbe essere utilizzata la *maturity* effettiva del titolo come misura guida della sensibilità dello stesso a cambiamenti nel tasso d'interesse, perché come prima si è dimostrato la sensibilità del prezzo a cambiamenti nei tassi tende ad aumentare con la *maturity.*

Frederick Macaulay[6] definì il concetto di *maturity* effettiva di un titolo con l'introduzione della *duration* di un titolo. La formula di Macaulay[8] è uguale alla media ponderata delle scadenze di ogni cedola o pagamento del capitale. Il peso associato ad ogni pagamento a determinate scadenze dovrebbe essere rappresentativo dell'incidenza di quello specifico pagamento sul valore del *bond*. Di fatto, il peso applicato ad ogni pagamento, effettuato a una determinata scadenza, è la

[5] Burton G. Malkiel, "Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics 76,* (1962), pp. 197-218.
[6] Frederick Macaulay, *"*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*," National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

proporzione del valore totale del titolo, tenendo conto del pagamento, il quale può essere definito come rapporto tra il valore attuale del pagamento diviso il prezzo del titolo. Possiamo definire il "peso" dei singoli *cash flow* disponibili al tempo *t*, definiti CF_t, come:

$$w_t = \frac{\frac{CF_t}{(1+y)^t}}{P} \tag{1}$$

Dove *y* è il tasso interno di rendimento. Il numeratore è il valore attuale dei singoli *cash flow* corrisposti dal titolo alle varie epoche *t* mentre il denominatore è il valore attuale di tutti i pagamenti del titolo. In tale equazione il calcolo di questi pesi è una somma ad 1 perché la somma dei cash flow scontati al rendimento interno del titolo è uguale al prezzo del *bond*. Usando tali valori per calcolare la media ponderata delle scadenze dei singoli *cash flow*, effettuando il prodotto di ogni cedola per la propria scadenza, prima della ricezione di ogni pagamento del titolo, si ottiene la *Macaulay duration*[8]*:*

$$D = \sum_{t=1}^{n} t * w_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} t * \frac{CF_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t * \frac{CF_t}{(1+y)^t}}{P} \tag{2}$$

La *duration* è una misura della sensibilità del prezzo del titolo a variazioni nel tasso d'interesse. E' largamente utilizzata come misura di rischio per i *bond*, maggiore è la *duration*, maggiore sarà la rischiosità. Le ipotesi fondamentale sottostante tale formula è la struttura piatta dei tassi d'interesse[7].

Come esempio per l'applicazione della formula della *duration*, si è costruito nel foglio di calcolo sottostante la *duration* di uno *zero coupon bond* C con tasso d'interesse nominale del 5% e di due *cupon bond*, il *coupon bond* A con tasso cedolare 5%, il B con tasso cedolare 8%, con un'ipotesi di tassi di mercato pari al 5%.

[7]Si veda paragrafo 1.5 Problemi e limiti

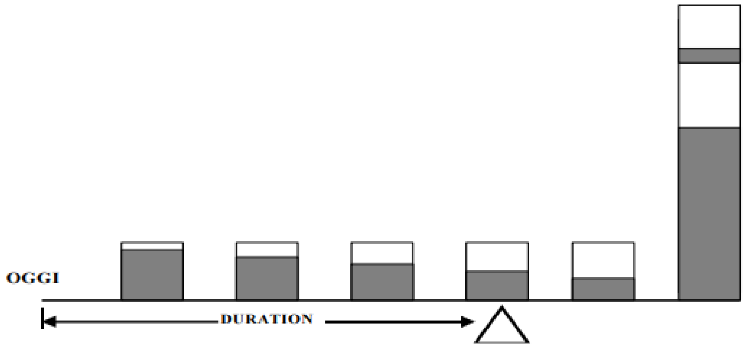
Tabella 3 - *Duration titolo A coupon bond, titolo B coupon bond, titolo C zero coupon bond*

r	5%			r(b)	8%			
VN	1000			VN	1000		VN	1000
anni	**$CF_{t,A}$**	**$t*CF_{t,A}$ / $P_A*(1+r)^t$**		**$CF_{t,B}$**	**$t*CF_{t,B}$ / $P_B*(1+r)^t$**		**$CF_{t,C}$**	**$t*CF_{t,C}$ / $PC*(1+r)^t$**
0	€ 1.000,00			€ 1.231,65			€ 613,91	
1	50	0,047619		80	0,0618604		0	0
2	50	0,090703		80	0,1178293		0	0
3	50	0,129576		80	0,1683276		0	0
4	50	0,16454		80	0,2137493		0	0
5	50	0,195882		80	0,2544635		0	0
6	50	0,223865		80	0,2908154		0	0
7	50	0,248738		80	0,3231282		0	0
8	50	0,270736		80	0,3517042		0	0
9	50	0,290074		80	0,3768259		0	0
10	1050	6,446089		1080	5,3832275		1000	10
Prezzo	€ 1.000,00			Prezzo	€ 1.231,65		Prezzo	€ 613,91
Duration	8,1078217			Duration	7,5419313		Duration	10

Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Come si nota dal foglio di calcolo sviluppato su Excel, la *duration* del *bond* A è maggiore della *duration* del *bond* B ma è inferiore alla *duration* dello zero coupon *bond* C. Analizzando attentamente si può osservare che il valore attuale del primo coupon staccato dal *bond* A (50) rappresenta il 4,76% del prezzo del titolo, mentre il valore attuale del primo pagamento corrisposto dal titolo B (80) è il 6,19% del prezzo del titolo. Le percentuali per il secondo stacco di cedole sono rispettivamente, 4,54%, 5,89%. La *duration* in questo caso può essere interpretata anche come baricentro finanziario dell'investimento, come mostrato nel grafico sottostante, ovvero come il punto in coincidenza del quale l'asse sul quale sono posti i valori attuali dei flussi di cassa è in equilibrio. In accordo con quanto esposto nell'esempio precedente il titolo A presenterà un baricentro nella distribuzione dei cash flow più spostato verso la scadenza del titolo, rispetto al titolo B, i pesi dei singoli pagamenti è minore del titolo B.

Figura 3 - *La duration come baricentro finanziario*



Fonte*:* Pier Luigi Fabrzi*, Economia del mercato mobiliare, Egea, 2016*

Infine la *duration* dello zero coupon *bond* risulta essere la maggiore rispetto ai titoli A e B ed esattamente uguale alla propria *maturity*. La causa della coincidenza tra *duration* e *maturity* è la presenza di un unico pagamento, il tempo medio fino al pagamento deve essere la *maturity* del titolo.

La *duration* è un concetto chiave nella gestione di un portafoglio a reddito fisso per almeno tre ragioni. La prima è che tale valore rappresenta come abbiamo appena dimostrato una sintesi statistica dell'effettiva *maturity* media del portafoglio[8]. Secondo, tale misura si rivela essere uno strumento essenziale nell'immunizzazione di portafoglio dal rischio di tasso d'interesse[9]. Terzo la *duration* è una misura della sensibilità di un portafoglio al tasso d'interesse.

1.3 *Volatility*

Il rischio d'interesse determina una modifica sia dei prezzi dei titoli sia delle condizioni alle quali possono essere reinvestiti i pagamenti intermedi prodotti dagli stessi titoli. Il rischio d'interesse può essere suddiviso in due componenti:

1. Rischio di volatilità
2. Rischio di reinvestimento

In questo paragrafo ci soffermeremo sullo studio della volatilità del prezzo dei titoli obbligazionari al variare dei tassi di interesse, nel paragrafo successivo si analizzerà il rischio reinvestimento attraverso lo studio di cosa determina la *duration*.

[8] La *duration* di portafoglio è la media ponderata delle *duration* dei titoli che compongono il portafoglio.
[9] Si veda cap. 3

Il valore, prezzo, di un titolo si calcola come somma dei flussi di cassa da questo generati attualizzati a un determinato tasso di rendimento. Considerando un titolo che genera n flussi, tutti dello stesso segno R_t ,il suo prezzo può essere così espresso:

$$P = V(i) = \sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t} \tag{3}$$

Alternativamente:

$$P = V(\delta) = \sum_{t=1}^{n} R_t * e^{-\delta * t} \tag{4}$$

A seconda se si vuole considerare la capitalizzazione composta al tasso i o al tasso istantaneo δ. Il prezzo come si può facilmente notare è funzione sia del prezzo del titolo che del tasso d'interesse utilizzato. Pensiamo ad un investitore che ha intenzione di acquistare un titolo, egli sarà sottoposto, nel tempo, nel caso in cui il suo *holding period* non coincida con la scadenza del titolo, al rischio di movimenti dei tassi dei titoli di nuova emissione con scadenza pari alla scadenza residua del proprio titolo. Una generica attività finanziaria modificherà il proprio valore, prezzo, al mutare dei rendimenti corrisposti sul mercato. Diviene fondamentale nella valutazione dell'acquisto di un titolo, l'utilizzo di un indice sintetico dell'ampiezza delle oscillazioni di prezzo che ci si può aspettare in seguito a variazioni dei rendimenti corrisposti sul mercato. Da un punto di vista matematico si può studiare la derivata prima della funzione valore rispetto a variazioni del tasso di rendimento.

$$\frac{\partial V(\delta)}{\partial \delta} = -\sum_{t=1}^{n} t * R_t * e^{-\delta * t} \tag{5}$$

Questa espressione mostra la sensibilità del prezzo a variazioni infinitesime del tasso. Si può proseguire dividendo la derivata prima della funzione valore per il valore del titolo così da ottenere la variazione relativa della funzione prezzo rispetto a variazioni del tasso.

$$\frac{\frac{\partial V(\delta)}{\partial \delta}}{V(\delta)} = \frac{-\sum_{t=1}^{n} t * R_t * e^{-\delta * t}}{V(\delta)} = -\frac{\sum_{t=1}^{n} t * R_t * e^{-\delta * t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * e^{-\delta * t}} = -D(\delta) = volatility \tag{6}$$

Come si può notare il valore che si ottiene corrisponde alla *duration*, il segno meno esprime la relazione negativa tra tasso d'interesse e prezzo del titolo. Nel caso appena esposto la *duration* assume il significato di volatilità del prezzo. Maggiore è il valore assunto dalla *duration* maggiore sarà la reattività del prezzo del titolo a modificazioni del tasso di rendimento. Dunque si può affermare che titoli che presentano una *duration* più elevata sono considerati maggiormente rischiosi di titoli con *duration* inferiore.

Attraverso lo sviluppo della serie di Taylor[10] è possibile analizzare come la *duration* possa essere utilizzata per una stima della variazione subita dal prezzo di un titolo, in seguito ad uno *shift* del tasso d'interesse rispettivamente da δ a $E(\delta) = \delta + \Delta\ \delta$.

$$V(\delta + \Delta\delta) \cong V(\delta) + \frac{\partial V(\delta)}{\partial \delta} * \Delta\delta = V(\delta) - D(\delta) * V(\delta) * \Delta\delta \qquad (7)$$

Da tale relazione si può ricavare facilmente che la variazione percentuale del prezzo di un titolo è proporzionale alla variazione del tasso, *shift*, ed al valore della *duration*. Si può esprimere così:

$$\frac{V(\delta + \Delta\delta) - V(\delta)}{V(\delta)} \cong -D(\delta) * \Delta\delta \qquad (8)$$

Si deve noterà che tale relazione ha alla base ipotesi forti, la variazione dei tassi di rendimento si riferisce a titoli simili di nuova emissione. E' da considerare come una misura di variabilità, quindi di rischio di valore o prezzo di un'attività finanziaria con riferimento restrittivamente a variazioni del proprio tasso di rendimento.

La volatilità prima definita non coincide propriamente con la *duration* ma bensì con la *duration* modificata, ritornando alle espressioni precedenti:

$$\frac{\partial V(i)}{\partial i} = -\sum_{t=1}^{n} t * R_t * (1+i)^{-(t+1)} = -\frac{1}{1+i} * \sum_{t=1}^{n} t * R_t * (1+i)^{-t} \qquad (9)$$

[10] Serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} * (x - x_0)^i + R_n(x)$$

Dividendo per V(i) si ricava la variazione relativa:

$$\frac{\frac{\partial V(i)}{\partial i}}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} * \frac{\sum_{t=1}^{n} t * R_t * (1+i)^{-t}}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} * \frac{\sum_{t=1}^{n} t * R_t * (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t}} = -\frac{1}{1+i} * D(i) = \ volatility \quad (10)$$

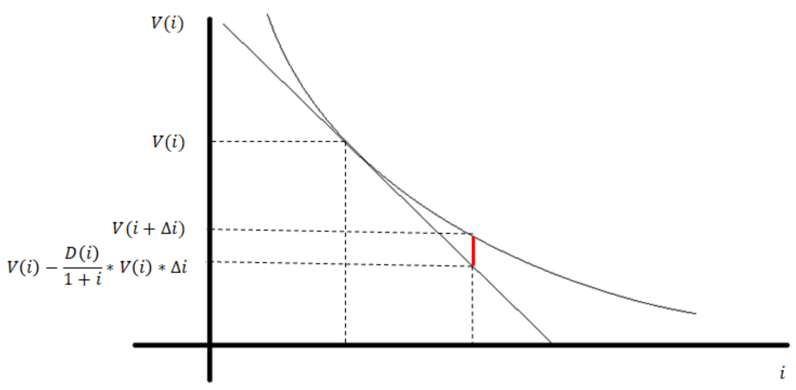
Attraverso la serie di Taylor:

$$V(i+\Delta i) \cong V(i) + \frac{\partial V(i)}{\partial i} * \ \Delta i = V(i) - \frac{D(i)}{1+i} * V(i) * \ \Delta i \quad (11)$$

$$\frac{V(i+\Delta i) - V(i)}{V(i)} \cong \ - \frac{D(i)}{1+i} * \ \Delta i \quad (12)$$

È importante sottolineare il tipo di approssimazione utilizzata per stimare la variazione del titolo tramite la volatilità. La funzione del valore, prezzo, di un titolo ha, come osservato in precedenza, un andamento convesso, stimare la variazione di prezzo quando si passa da un tasso, (*i*) ad un tasso pari a *(i + Δi)*, proporzionale all'ampiezza dello *shift* Δi ed al coefficiente di volatilità $-\frac{D(i)}{1+i}$ significa calcolare la variazione sulla retta tangente e non direttamente sulla funzione. Tale risultato è dovuto all'utilizzo dell'approssimazione al primo ordine della serie di Taylor. La rilevanza dell'errore dipende dall'andamento della curva del valore del titolo al variare del tasso d'interesse.

Figura 4 - *Approssimazione di primo ordine*



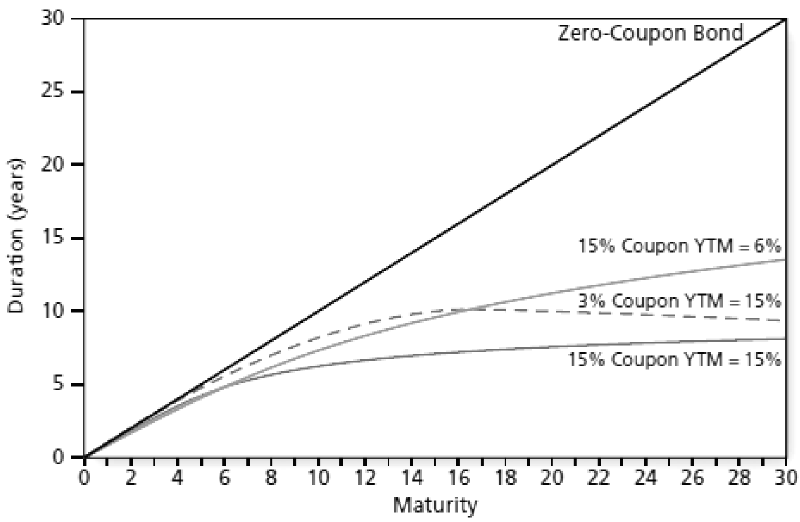
Fonte*: Elaborazione personale.*

Si può notare come allontanandosi progressivamente dal punto di tangenza la qualità dell'approssimazione va diminuendo e i valori stimati dalla retta tangente si discostano dal valore effettivo. Tale approssimazione tende a sovrastimare la variazione negativa di prezzo ad aumenti del tasso d'interesse e a sottostimare l'aumento del valore del titolo dovuto a riduzioni del tasso d'interesse. Si può osservare come attraverso un'approssimazione con la retta tangente si effettua un'ipotesi forte, la variazione del valore per un dato movimento del tasso di attualizzazione, stimata con la duration fornisce valori simmetrici, ciò significa che l'andamento della curva è il medesimo sia a destra che a sinistra del punto di tangenza. Nei mercati reali la relazione dei titoli a variazioni dei tassi non è di tipo simmetrico. Per risolvere tale problematicità si deve introdurre il concetto di *convexity* che sarà esposta nei paragrafi successivi.

1.4 Cosa determina la *duration*

La d*uration* ci permette di quantificare la sensibilità del prezzo a modificazioni nel tasso d'interesse. Se un investitore desiderasse speculare sull'andamento dei tassi d'interesse, la *duration* potrebbe essere un valido strumento per quest'ultimo per comprendere quanto è grande la "scommessa" che sta effettuando. All'opposto, se un investitore desiderasse mantenere una posizione neutrale rispetto all'andamento dei tassi d'interesse, potrebbe semplicemente osservare la sensibilità al tasso d'interesse di un dato *bond-market index,* la *duration* ci permette di misurare tale sensibilità, e imitarla nel proprio portafoglio. Per tali ragioni è cruciale comprendere le determinanti della *duration*. Il grafico sottostante, dove sono mostrati quattro diversi titoli con diverse *duration*, tassi cedolari, rendimenti e *maturity*, riassume molte delle regole su cui ci si soffermerà.

Figura 5 - *Relazione duration e maturity*



Fonte: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

1. La *duration* di uno zero coupon *bond* equivale alla sua *maturity*. un coupon *bond* ha una *duration* minore di uno zero coupon *bond* con uguale *maturity* perché le prime cedole nella vita del titolo diminuiscono la media ponderata delle scadenze.
2. A parità di *maturity*, la *duration* di un titolo è minore quanto più il tasso cedolare è alto. Questa proprietà corrisponde alla quinta relazione di Malkiel[11] ed è dovuta all'impatto delle prime cedole sulla media ponderata delle scadenze. Maggiori sono le cedole, maggiore sarà il peso dei pagamenti ricevuti nel periodo di vita inziale del titolo, minore sarà la media ponderata della *maturity* dei pagamenti. In altre parole, un'alta porzione del valore totale del *bond* è collegata ai primi pagamenti effettuati dal titolo, tali valori sono relativamente insensibili ai tassi rispetto ai successivi più lontani nel tempo e maggiormente sensibili. Come si può notare dal grafico la curva che rappresenta il titolo con tasso cedolare del 15% giace al di sotto della curva del titolo con tasso cedolare del 3% con identici rendimenti.
3. Mantenendo il tasso cedolare costante, la *duration* del titolo generalmente aumenta con la *maturity*. La *duration* incrementa sempre con la *maturity* per titoli venduti alla pari o sopra la pari. E' da notare come la *duration*, dunque, non sempre incrementa all'aumentare della *maturity*. Si può analizzare tale proprietà con il titolo venduto a sconto con tasso cedolare del 3%, in tale caso la *duration* tenderebbe a diminuire con l'incremento della *maturity*.

   Come prima sottolineato la *maturity* e la *duration* dello zero coupon *bond* sono le medesime. Nonostante ciò, per i *coupond bond*, la *duration* aumenta meno che proporzionalmente all'incrementare della *maturity*. Generalmente titoli a lungo termine hanno alte *duration*, tale misura è utile a rappresentare la natura a lungo termine dei titoli perché prende in considerazione anche i pagamenti cedolari corrisposti durante la vita del titolo. La *maturity* è una buona misura statistica solamente nel caso in cui il titolo non prevede pagamenti durante la propria vita. Dal grafico si può notare come i due coupon *bond* con medesimo tasso cedolare, 15%, hanno differenti *duration* quando hanno differenti rendimenti. Minori sono i tassi di rendimento, maggiori saranno le *duration*, vi è una relazione negativa. La causa, intuitiva, è dovuta al caso specifico secondo cui minori sono i rendimenti più distanti saranno i pagamenti effettuati dal *bond* con maggiori valori attuali e con maggior percentuale in rapporto al valore totale del titolo. Dunque, nel calcolo della media ponderata della *duration* i pagamenti più distanti ricevono maggiori pesi, i quali determinano maggiori valori della *duration*.

[11]Burton G. Malkiel, "Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics 76,* (1962), pp. 197-218.

4. Mantenendo tutti i fattori costanti, la *duration* di un titolo è maggiore quando il rendimento del titolo è minore. Come precedentemente affermato alti rendimenti riducono il valore attuale di tutti i pagamenti effettuati dal titolo durante la propria vita. Dati elevati rendimenti, una elevata porzione del valore totale del titolo è collegata ai primi pagamenti effettuati dal *bond*, tale da diminuire la *maturity* effettiva.
5. La *duration* di un *bond* perpetuo:

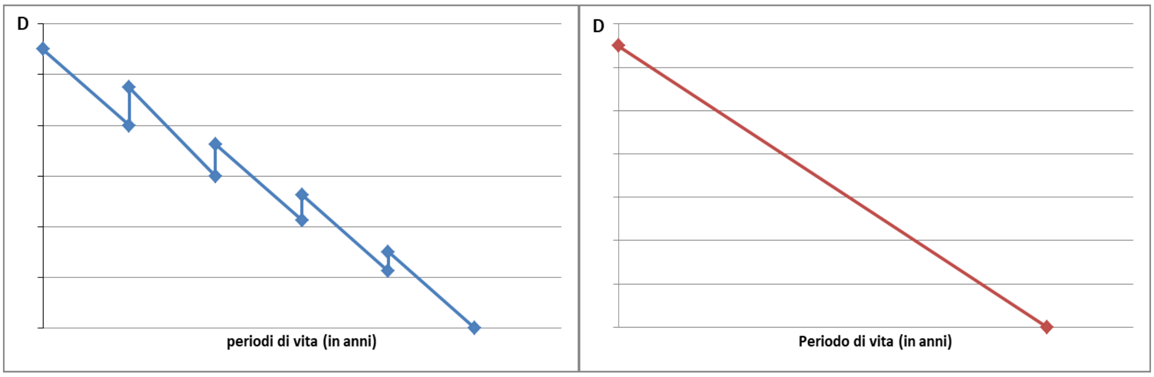
$$D = \frac{1 + r}{r} \tag{13}$$

   Dato un tasso del 10%, la *duration* di un *bond* perpetuo che paga 100€ ogni anno per sempre è 11 anni, ma ad un tasso dell'8% è 13,5 anni.
   Tale espressione mostra come la *duration* e la *maturity* possono differire notevolmente. La *maturity* di un titolo perpetuo è infinita, mentre la *duration* di uno strumento finanziario che assicura un tasso del 10% è solo 11 anni. Il peso del valore attuale dei primi cash flow del titolo dominano il calcolo della *duration*. E' da notare nel grafico precedente come con il progressivo aumentare delle *maturity*, le *duration* dei coupon *bond* con rendimento entrambi del 15% convergono alla *duration* di un titolo perpetuo con uguale rendimento, 7,67 anni.

Sotto il profilo dell'andamento, identificando con questo il comportamento della *duration* lungo la vita del titolo e fino alla sua scadenza finale. Ipotizzando la costanza del tasso di rendimento nel periodo preso ad esame, il valore della *duration* è caratterizzato da un trend discendente, il quale si presenta con modalità diverse a seconda della tipologia dei titoli presi in esame. L'andamento della *duration* è:

- Lineare per i titoli senza cedola
- Discontinuo per i titoli con cedola

Figura 6 - *Effetto drift*



Fonte: *Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Mentre per un titolo senza cedola il comportamento della *duration* è esattamente sovrapposto a quello della durata residua, in diminuzione continua e costante, con i titoli che presentano pagamenti durante la propria vita la presenza di tali cash flow rende impossibile l'andamento lineare. Alla scadenza dei flussi di cassa, talli flussi escono dallo schema dei cash flow attesi e lo stesso schema subisce una rimodulazione, più nello specifico nella forma della redistribuzione dei pesi dei flussi rimanenti. Il comportamento appena descritto determina in occasione delle scadenze dei singoli flussi di cassa, un aumento della *duration*, dando luogo a un effetto, noto come *effetto drift*. Tale effetto si riscontra nel grafico dalla presenza di continui "rimbalzi" in corrispondenza delle scadenze dei singoli flussi di cassa. La misura di tali rimbalzi non è uniforme, essi sono di un ammontare progressivamente inferiore all'avvicinarsi della scadenza finale.
La *duration* come affermato precedentemente esprime una misura in termini temporali, configurandosi come un indicatore di durata. La *duration* esprime la velocità di rientro dell'investimento obbligazionario intendendo il tempo medio necessario al titolo per ripagare il capitale in esso investito. Sotto tale aspetto, la misura della *duration* si configura anche come l'epoca ottima di smobilizzo, quell'epoca che permette di ottenere il rendimento prefissato ex ante, rendimento interno del titolo preso in esame.
Attraverso un esempio si può dimostrare quanto appena affermato. Dato un coupon *bond* con tasso cedolare del 5%, valore nominale 100, durata 5 anni che corrisponde cedole annualmente. Il titolo presenta una *duration* pari a 4,546. Di seguito si mostra la rappresentazione su un foglio di calcolo, Tabella 4, del titolo preso in esame:

Tabella 4 - *duration epoca ottima di smobilizzo*

i cedolare	0,05
VN	100
durata	5
t	
0	€ 100,00
1	€ 5,00
2	€ 5,00
3	€ 5,00
4	€ 5,00
5	€ 105,00
Duration	4,545951

Fonte: *Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Successivamente si passa a calcolare il valore futuro (M), identificando con questo l'epoca *duration*, di tutti i flussi di cassa antecedenti alla stessa, e al calcolo del valore attuale (V), all'epoca *duration*, di tutti i flussi di cassa successivi all'epoca *duration*. Infine si passerà a calcolare l'*holding period return*[12] dell'investimento. Tali passaggi verranno effettuati in tre scenari differenti di tassi d'interesse di mercato, rispettivamente minore, uguale e maggiore al rendimento interno del titolo preso ad esame. Di seguito la rappresentazione su un foglio di calcolo del procedimento sopra illustrato:

Tabella 5 - *HPR corrispondnte alla Duration in scenari di tassi di mercato differenti*

i (m)	4%
M	21,69186
V	103,1467
W	124,8386
HPR	5%

i (m)	5%
M	22,13238
V	102,6995
W	124,8319
HPR	5%

i (m)	6%
M	22,58009
V	102,2584
W	124,8385
HPR	5%

Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

Come volevasi dimostrare dai risultati (1.10), la *duration* rappresenta l'epoca ottimo di smobilizzo, ovvero l'epoca in cui disinvestendo si ottiene il rendimento *ex ante* associato all'investimento. Tale

[12] Rendimento totale corrisposto da un titolo o portafoglio titoli mantenuto per un dato periodo di tempo. È maggiormente utilizzato per confrontare rendimenti di investimenti mantenuti per differenti periodi temporali.

$$HPR = (\frac{M}{P})^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1$$

Nell'esempio sopra citato:

$$HPR = (\frac{M}{P})^{\left(\frac{1}{D}\right)} - 1$$

proprietà della *duration* verrà successivamente approfondita quando si esaminerà il concetto di immunizzazione finanziaria.

1.5 Problemi e limiti

Per analizzare i problemi e i limiti della *duration* è opportuno iniziare dall'approfondimento della formula per il calcolo della stessa:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t * \frac{CF_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t * \frac{CF_t}{(1+y)^t}}{P} \tag{14}$$

Si può facilmente notare che nel calcolo della durata media finanziaria si utilizza il rendimento a scadenza del titolo nell'attualizzazione dei flussi di cassa corrisposti dallo stesso. Rendimento a scadenza la cui determinazione presume il re-investimento dei flussi dell'investimento in esame allo stesso tasso. Tali ipotesi sono rilevanti perché questa nozione di *duration* è strettamente valida solo se si assume una curva dei rendimenti piatta, così da poter scontare tutti pagamenti corrisposti dal titolo a uno stesso tasso d'interesse, in accordo con quanto detto precedentemente. Come discusso precedentemente in termini di volatilità, la misura della *duration* può essere presa ad esame anche assumendo una curva dei rendimenti con *shift* paralleli. Il prezzo del *bond* potrebbe essere modificato e calcolato, in questa prospettiva, come segue:

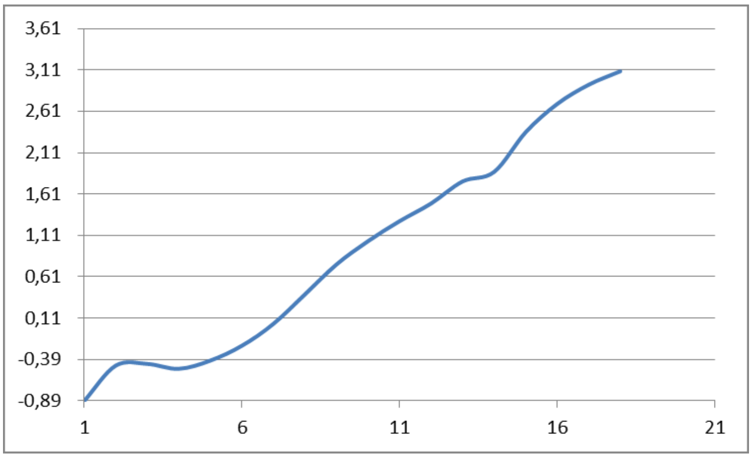
$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y+\Delta y)^t} \tag{15}$$

Successivamente derivare la misura della *duration* attraverso il calcolo della derivata rispetto a Δy.
Le ipotesi di curva dei rendimenti piatta o di *shift* paralleli nell'*yield curve* sono forti, e non abbastanza in linea con la realtà dei mercati finanziari. Una soluzione a tale problematica e quella di considerare una *term structure*[13], dove i valori attuali dei *cash flow* corrisposti dal titolo sono calcolati con tassi d'interesse presenti sulla *zero coupon yield curve*, opportunamente costruita, con le scadenze corrispondenti alle specifiche date del particolare *cash flow*, dunque coerentemente diversi ad ogni scadenza. Con l'uso di una struttura a termine si può effettuare una valutazione più accurata dell'obbligazione in linea con le aspettative del mercato sui futuri tassi d'interesse.

[13] Indica la relazione tra tassi di interesse o rendimenti dei *bond* e differenti scadenze. La *term structure* è anche conosciuta come *yield curve* o curva dei rendimenti. Attraverso varie tecniche come quella del *bootstrapping* o dell'interpolazione lineare si possono costruire curve dei rendimenti complete alle varie scadenze.

Tuttavia la *Macaulay duration*[14] è una buona approssimazione dei cambiamenti nel valore dei titoli dovuti a spostamenti della curva dei rendimenti, non solo nel breve periodo, ed anche nel caso in cui la struttura a termine è relativamente complessa e non piatta.
Di seguito un esempio di *yield curve.*

Figura 7 - *Yield curve titoli governativi italiani, 24 Marzo 2018.*



Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel.*

1.6 Evoluzione del concetto di *duration*

Prima di esaminare l'uso della *duration*, ci soffermeremo sulle critiche della recente letteratura sul tema. Molti degli studi effettuati sulla *duration* furono scritti prima del 1973 e revisionati da Weil[15]. In un primo momento ci si soffermerà sul lavoro effettuato da Weil e successivamente ci si concentrerà sulla letteratura sviluppatasi dal 1973 sul tema della *duration*.
Macaulay[16] propose la misura della *duration* per rappresentare la *maturity* media di un flusso di pagamenti di un titolo, come ad esempio un *bond*. Assumendo S_{t_j} come il valore futuro di un pagamento alle varie scadenze t_j , e P_{t_i} il valore attuale. Dunque la *duration* di un flusso di pagamenti $(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n})$ con valori attuali $(P_{t_1}, P_{t_2}, \dots, P_{t_n})$ è:

$$D= \frac{\sum_{t=1}^{n} t_i P_{t_i}}{P \sum_{t=1}^{n} P_{t_i}} \tag{16}$$

[14] Frederick Macaulay, *"*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*," National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*
[15] Weil, Roman L. "Macaulay's Duration: An Appreciation." *Journal of Business (October* 1973).
[16] Frederick Macaulay, *"*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*," National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

Tale formula è una "misura temporale" le proprietà di questa sono state ampiamente descritte precedentemente. Macaulay voleva una misura scalare che indicasse la lunghezza, temporale, di un *bond*.

Hicks pubblicò nel 1939 *Value and Capital*[17], un anno dopo la pubblicazione di Macaulay. Hicks definì ed utilizzò "un'elasticità del valore del capitale" riguardo ad un *discount ratio*, fattore, che è equivalente alla *Macaulay duration*[18]. Hicks chiamò la propria misura "*average period*". Hicks utilizzò tale misura per rendere concreta la nozione intuitiva che, quando i tassi di interesse diminuiscono, i produttori sostituiranno moneta, o il capitale che possono prendere, per altri mezzi di produzione e quel periodo medio di piani di produzione incrementerà. Macaulay ricercava una misura del tempo, Hicks un'elasticità, tuttavia loro derivarono la stessa misura. Hicks notò che nonostante le elasticità sono *"ordinarlily pure numbers",* questa misura in particolare ha una dimensione temporale. Fisher successivamente, inconsapevole dell'interesse di Hicks in merito all'elasticità, mostrò che la formula di Macaulay aveva le proprietà di un'elasticità.

Nel 1945, Samuelson, non a conoscenza del lavoro di Macaulay[20], analizzò l'effetto di cambiamenti nei tassi d'interesse in istituzioni quali: università, compagnie assicurative, e banche. Egli sviluppò una misura, *"weighted average time period of payments"*, equivalente alla *duration*, e dimostrò, che se la *duration* degli asset è maggiore o minore rispetto alle proprie passività, l'istituzione perderà o guadagnerà quando i tassi di interesse aumenteranno e guadagnerà o perderà quando i tassi diminuiranno.

Nel 1952, Redington, provò che i profitti di una compagnia assicurativa erano immuni, non si sarebbero potuti ridurre ma piuttosto probabilmente incrementare, a qualsiasi piccolo, infinitesimale, spostamento dei tassi d'interesse, dimostrando che gli *asset* a medio termine dovevano eguagliare le passività a medio termine. Redington scrisse che la migliore pratica di investimento per le compagnie assicurative fosse quella di abbinare flussi di attività e passività, periodo per periodo.

Durand, nel 1957, affermò che gli unici *asset* finanziari con *"superlong durations"* fossero le *"growth stocks"*[19], quindi quelle istituzioni con passività aventi *duration* elevate vorranno mantenere *"growth stocks"* per ridurre il rischio di perdite dovute a fluttuazioni dei tassi d'interesse[20].

Fisher and Weil utilizzarono successivamente la *duration* per sviluppare una strategia ottimale per l'investimento in titoli per ottenere un *"near-riskless asset"* e misurare i rendimenti dei possessori

---

[17] J. R. Hicks, "Value an Capital" (1939*).*

[18] Hicks p. 186.

[19] Nella letteratura più recente le *growth stocks*, in contrapposizione alle *value stocks* ,sono quelle azioni che presentano: alti *price/earnings* o alti *price/book value* e bassi *dividend/price.*

[20] David Durand, " Growth Stocks and the Petersburg Paradox," *Journal of Finance (September 1957).*

dei *bond*. Tali studi verranno ripresi successivamente nell'elaborato quando si analizzerà il *bond management*.

La letteratura sviluppatasi attorno allo studio dei significati e usi della *duration* dal 1973 ha avuto una direzione ben precisa, quella di approfondire le problematicità insite nelle ipotesi stesse della misura della *duration* e cioè la struttura piatta dei tassi d'interesse e la limitazione di *shift* paralleli nella curva dei rendimenti.

Fisher e Weil[21] mostrarono che, sotto restrittive assunzioni di additività circa il verificarsi di *shift* nella curva dei rendimenti, la *duration* di Macaulay[22] poteva essere utilizzata per costruire un portafoglio di titoli immunizzato; un portafoglio con rendimento garantito almeno pari al rendimento dei tassi d'interesse a termine. Questo è raggiungibile scegliendo un portafoglio titoli con *duration* uguale all'orizzonte d'investimento dell'investitore. Bierwag e Kaufman[23] si avvicinarono all'immunizzazione assumendo che i cambiamenti nella struttura a termine dei tassi d'interesse si verificavano in modo "moltiplicativo" piuttosto che additivo. Se si assume che $i(t)$ denota la funzione che offre il tasso d'interesse a termine istantaneo per un tempo futuro t, con shift Δ in $i(t)$,questa sarà così definita:

$$i(t) = i(t) * (1 + \Delta) \tag{17}$$

Piuttosto che:

$$i(t) = i(t) + \Delta \tag{18}$$

Come avevano definito Fisher e Weil. Nel tentativo di ricerca di una soluzione a tale problema, Bierwag e Kaufman definirono una misura della *duration* come qualcosa di differente rispetto a quella espressa da Macaulay[24]. Tuttavia i risultati furono comparati con quelli ottenuti con le formule prodotte da Macaulay e si riscontrano piccole differenze per *bond* con *maturity* minori dei 20 anni. In altri due *papers* Bierwag[25] [26] derivò diverse versione della *duration* con *shift* del tipo additivi, moltiplicativi e insieme additivi e moltiplicativi nella curva dei rendimenti:

---

[21] Fisher, Lawrence, *and* Roma L. Weil. "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies." *Journal of Business* (October 1971*)*.

[22] Frederick Macaulay*, "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*," National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

[23] Bierwag, G. O., *and* George Kaufman. "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: A Note." *Journal of Business* (July 1977).

[24] Frederick Macaulay*, "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*," National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

[25] Bierwag, G. O. "Measures of Duration." (1976)

[26] Bierwag, G. O. "Dynamic Portfolio Immunization Policies." (1977)

$$i(t) = i(t) * (1 + \Delta_1) + \Delta_2 \tag{19}$$

Dove Δ_1 è la componente moltiplicativa e Δ_2 è la componente additiva. Bierwag[10] generalizzò il suo precedente lavoro sancendo multipli *shift* piuttosto che unici, nel struttura a termine.
Cox, Ingersoll, e Ross[27] dimostrarono un metodo generale per determinare una misura alternativa della *duration* attraverso una propria procedura di immunizzazione che permette di considerare multipli *shock* che possono cambiare tanto l'inclinazione quanto la posizione della curva dei rendimenti. Il metodo di Cox, Ingersoll e Ross fu derivato da un modello generale di struttura a termine basata sull'assunzione che i più brevi, o a pronti, tassi di interesse seguono un processo di Gauss Markov. Essi calcolarono tale misura di *duration* per specifici casi e notarono sostanziali differenze dalla *duration* di Macaulay[28].
Gli studi appena mostrati dimostrano come la letteratura inerente al tema della *duration* abbia preso una nuova direzione dal 1973. Differenti tipi di misure della *duration* sono state derivate, da alternative assunzioni, inerenti il modo in cui la curva dei rendimenti si modifica ed inoltre sono state presentate differenti misure rispetto a quella di Macaulay, inerenti il rischio di tasso d'interesse. Fisher e Weil supposero *shift* additivi nella struttura a termine che non potevano verificarsi in mercati competitivi in equilibrio. Ciò nonostante, Fisher e Weil testarono le implicazioni del loro teorema con dati reali per mostrare una strategia implicita di immunizzazione, se pur non perfetta, poteva produrre una sostanziale riduzione nel rischio oltre i 30 anni esaminati. Tuttavia si studiarono altri tipi di cambiamenti nella curva dei rendimenti senza considerare se gli *shift* potessero verificarsi in equilibrio o nella realtà. C'è da notare come tali risultati non furono supportati da test empirici per determinare se i titoli fossero realmente immunizzati. Si può concludere con una citazione dal *paper* di Ingersoll, Skelton, Weil, "Duration Fourty Years Later":

> *"We are justified in concluding only that we have made but one small step in risk reduction along the road to immunization."*

[27] Cox, Ingersoll and Ross. "Duration and the Measurement of Basis Risk" (1977)

2. *Convexity*

Come misura della sensibilità al tasso d'interesse, la *duration* è chiaramente uno strumento chiave nel *fixed-income portfolio management.* Come specificato precedentemente[28] la *duration* come misura degli effetti sul prezzo dei titoli, di movimenti nei tassi d'interesse è solamente un'approssimazione. L'equazione (12) afferma che la variazione percentuale nel prezzo del *bond* è approssimativamente uguale al prodotto tra la *modified duration*[29] e la variazione nel rendimento del *bond*. Quanto appena affermato equivale a dire che la variazione percentuale del prezzo è direttamente proporzionale al cambiamento nel rendimento del *bond*. Tali assunzioni, come è mostrato nel grafico (1.6), conducono a una rappresentazione della variazione del prezzo del *bond* come una funzione lineare del cambiamento nel suo rendimento. Tuttavia la relazione prezzo-rendimento non è lineare. Nell'analisi precedente[26] è stata studiata la derivata prima della funzione valore e si è ottenuta una buona approssimazione per piccoli cambiamenti nei rendimenti, ma meno nel caso di grandi variazioni in questi ultimi. In questo capitolo verrà analizzata la derivata seconda della funzione valore così da introdurre un nuovo concetto nella valutazione dei titoli, la *convexity*.
Lo studio della derivata seconda della funzione valore, prezzo, effettuata rispetto a variazioni di tasso di interesse, consente di tenere in considerazione la proprietà di convessità della funzione stessa. Nel continuo si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V(\delta)}{\partial \delta^2} = \sum_{t=1}^{n} t^2 * R_t * e^{-\delta * t} \tag{20}$$

Si divide per $V(\delta)$ cos' da ottenere:

$$\frac{\frac{\partial^2 V(\delta)}{\partial \delta^2}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 * R_t * e^{-\delta * t}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 * R_t * e^{-\delta * t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * e^{-\delta * t}} = D^2(\delta) = convexity \tag{21}$$

Il coefficiente ottenuto dall'equazione (21) è la cosiddetta *duration di secondo ordine* calcolabile come la media quadratica ponderata delle scadenze, come all'opposto la *duration* è la media semplice ponderata delle scadenze. Nel continuo equivale alla *convexity*, così come nel continuo la

[28] Si veda cap. 1 par. 1.3
[29] *Modified duration, MD:*

$$MD = \frac{D}{1+r}$$

Dove r rappresenta il rendimento a scadenza *duration* coincide con la *volatility*[30]. La *convexity* essendo ottenuta attraverso la derivata seconda mostra il cambiamento della derivata prima[31] per un dato movimento del tasso. Se la *duration* rappresentava il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione, la *convexity* permette di studiare la curvatura della funzione valore. Analogamente a quanto affermato in precedenza[32], si può utilizzare l'approssimazione al secondo ordine della serie di Taylor[33] utilizzando la *duration di secondo ordine.*

$$V(\delta+\Delta\delta) \cong V(\delta) + \frac{\partial V(\delta)}{\partial \delta} * \Delta\delta + \frac{1}{2!} * \frac{\partial^2 V(\delta)}{\partial \delta^2} * \Delta\delta^2 = V(\delta) - D(\delta) * V(\delta) + \frac{1}{2!} * D^2(\delta) * V(\delta) * \Delta\delta^2 \quad (22)$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (7), si può notare che quest'ultima si differenzia da questa appena mostrata per l'aggiunta di un termine il quale è necessario per effettuare l'approssimazione di $V(\delta+\Delta\delta)$ tramite una parabola. La variazione percentuale del prezzo è ora funzione non solo della *duration* ma anche di un secondo termine, utile a tener conto della curvatura della funzione.

$$\frac{V(\delta+\Delta\delta) - V(\delta)}{V(\delta)} \cong -D(\delta) * \Delta\delta + \frac{1}{2!} * D^2(\delta) * \Delta\delta^2 \quad (23)$$

Questo termine aggiuntivo, definibile di aggiustamento, corregge la variazione del prezzo ricavata precedentemente attraverso la retta tangente alla funzione[34], ha come risultato un aumento della dimensione della variazione di prezzo in caso di rialzo e attenuandola in caso di ribasso. Dunque, all'aumentare della *convexity*, aumenta la variazione positiva del valore del titolo al diminuire del tasso, mentre all'opposto si attenua la variazione negativa al crescere del tasso.

Passando nel discreto, la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 V(\delta)}{\partial \delta^2} = \sum_{t=1}^{n} t * (t+1) * R_t * (1+i)^{-(t+2)} = \frac{1}{(1+i)^2} * \sum_{t=1}^{n} (t^2+t) * R_t * (1+i)^{-t} \quad (24)$$

---

[30] Si veda cap. 3 par. 1.3 equazione (6)
[31] Riferimento *duration*, relazione (6)
[32] Si veda cap.3 par. 1.3 relazione (7)
[33] Serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} * (x-x_0)^i + R_n(x)$$

[34] Retta tangente alla funzione la quale sottostimava l'aumento di prezzo derivante da una riduzione dei tassi e sovrastimava la riduzione di prezzo dovuta ad un aumento dei tassi

Dividendo per $V(i)$ si ottiene:

$$\frac{\frac{\partial^2 V(i)}{\partial i^2}}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2} * \frac{\sum_{t=1}^{n}(t^2+t) * R_t * (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t}} = \frac{1}{(1+i)^2} * [D(i) + D^2(i)] = convexity \qquad (25)$$

Difatti:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n}(t^2+t) * R_t * (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t * R_t * (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t}} + \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2 * R_t * (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t * (1+i)^{-t}} = D(i) + D^2(i) \qquad (26)$$

Come si può notare dalla relazione (26) non vi è perfetta coincidenza tra *duration di secondo ordine* e *convexity. P*recedentemente[35] si è definita la *convexity*, nel continuo, coincidente con la *duration di secondo ordine*, così come la *duration*, nel continuo coincide con la volatility, la convexity rappresenta la media quadratica ponderata delle scadenze, nel discreto per ottenere una misura della *convexity* è necessario sommare alla *duration* di secondo ordine la *duration* di primo ordine, la media semplice ponderata delle scadenze, ed infine dividere per $(1+i)^2$.
Mediante l'approssimazione al secondo termine della serie di Taylor[36] si ottiene:

$$V(i+\Delta i) \cong V(i) + \frac{\partial V(i)}{\partial i} * \Delta i + \frac{1}{2!} * \frac{\partial^2 V(i)}{\partial^2 i} * \Delta i^2 = V(i) - \frac{\partial i}{1+i} * V(i) * \Delta i + \frac{1}{2!} * \frac{1}{(1+i)^2} * [D(i) + D^2(i)] * V(i) * \Delta i^2 \qquad (27)$$

Ovvero:

$$V(i+\Delta i) \cong V(i) + Volatility * \Delta i + \frac{1}{2!} * Convexity * V(i) * \Delta i^2 \qquad (28)$$

Da cui la variazione percentuale del prezzo:

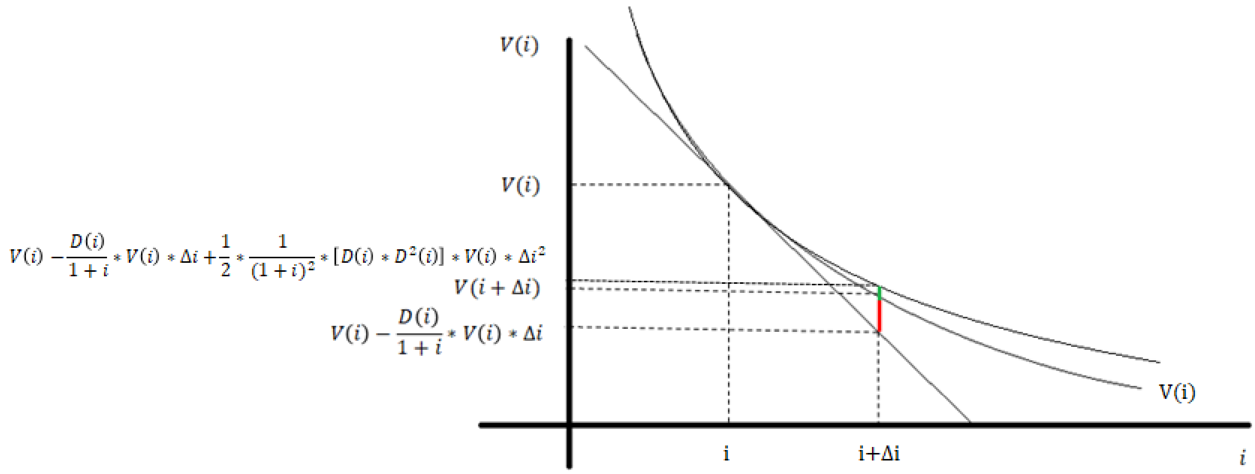
$$\frac{V(i+\Delta i) - V(i)}{V(i)} \cong Volatility * \Delta i + \frac{1}{2!} * Convexity * \Delta i^2 \qquad (29)$$

[35] Si veda equazione (21)
[36] Serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} * (x-x_0)^i + R_n(x)$$

Il grafico che segue (2.1) mostra la differenza fra un'approssimazione lineare ed una con una parabola:

Figura 8 - *Approssimazione di secondo ordine*



Fonte*: Elaborazione personale.*

Si può notare dal grafico (2.0.) che per *shift* molto piccoli non vi è una differenza ravvisabile tra le due stime, dunque ci si può limitare al primo termine della serie di Taylor. Per *shift* più ampi, si riscontra una maggiore accuratezza della stima attraverso l'aggiunta del termine corrispondente alla *convexity*. Si può dedurre facilmente che la *convexity* sia una caratteristica molto ricercata per i titoli. Nell'operatività sui mercati questi due coefficienti noti come *volatility* e *convexity* non vengono utilizzati per stimare numericamente la variazione del prezzo di un titolo in seguito a una variazione dei tassi attesa[37]. Tuttavia, questi due coefficienti, sono utilizzati come indicatori del rischio di un titolo, proprio per la loro capacità di mostrare in un indice sintetico la sensibilità del prezzo di un titolo a variazioni nei tassi d'interesse.

2.1 *Convexity* come criterio di scelta

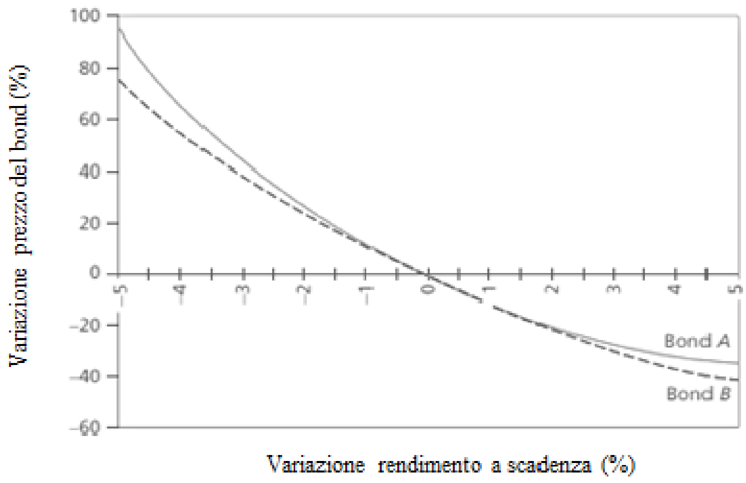
La *convexity* è una caratteristica molto ricercata per i titoli e ben apprezzata dagli investitori. I titoli con maggiori convessità "rendono di più", in termini di prezzo[38], quando i tassi scendono, rispetto a

[37] La causa è dovuta alla possibilità, molto più semplice, di ottenere la variazione del prezzo di un titolo in termini esatti, non come approssimazione, misurandola sulla funzione valore stessa della quale si conosce l'algoritmo di calcolo preciso.

[38] In riferimento a profitti ottenibili in conto capitale dovuti a cambiamenti nel valore del titolo causati da variazioni nei tassi di interesse.

quanto perdono quando i tassi aumentano. Nella figura sottostante, sono rappresentate le *convexity* di due *bond*:

Figura 9 - *Convexity bond A e bond B*



Fonte: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

I *bond* A e B rappresentati nella figura 8 hanno la stessa *duration* al rendimento iniziale. L'andamento della variazione dei loro prezzi in funzione della variazione nel tasso di interesse è tangente, implicando che le loro sensibilità a variazioni nei rendimenti, ipotizzate minime, sono uguali. Tuttavia si può riscontrare come il titolo A è più convesso del titolo B. Il titolo A ammette maggiori incrementi di prezzo e più piccole diminuzioni di prezzo in presenza di variazioni consistenti nei tassi di interesse. Se è presente una consistente volatilità nei tassi di interesse, tale scenario incrementa il rendimento atteso del titolo, perché il titolo reagirà con più forza a diminuzione nei tassi e soffrirà di meno da incrementi negli stessi. Data l'assunzione di *no free lunch* sul mercato, la *convexity* è molto desiderata dagli investitori, dunque essi dovranno corrispondere prezzi più alti e accettare rendimenti inferiori sui titoli con maggiori *convexity*. In fase di *securities selection* gli investitori si troveranno a scegliere tra titoli con rendimenti maggiori, *convexity* minori, e titoli con rendimenti minori, *convexity* e prezzi maggiori. Nonostante ciò, una prima ipotesi rilevante che un investitore potrebbe effettuare è riguardo l'aspettativa dei futuri tassi di interesse che vi saranno sul mercato, perché qualora ci si aspettasse scenari di mercato instabili, con potenziali variazioni rilevanti nei rendimenti, causate ad esempio da eventi politici, decisioni di politica monetaria, questi potrebbero giustificare l'acquisto di titoli con *convexity* maggiori, rendimenti a scadenza inferiori e prezzi maggiori, in modo da sfruttare le caratteristiche implicite dei titoli con *convexity* maggiori, all'opposto con aspettative di scenari di mercato stabili, potrebbe giustificarsi una scelta di titoli con *convexity* minori, prezzi minori e rendimenti maggiori, ma allo stesso tempo l'assunzione di un rischio maggiore.

2.2 *Duration* e *convexity callable bond*

2.2.1 Callable bond

Un *callable bond* è un' obbligazione strutturata composta da un'obbligazione ed un'opzione[39], che da il diritto al rimborso anticipato, call, a favore dell'emittente. L'emittente di obbligazione nel medio lungo termine è esposto al rischio di ribasso dei tassi nell'orizzonte temporale corrispondente alla vita residua dell'obbligazione, perché egli si espone potenzialmente a corrispondere un interesse maggiore rispetto ai tassi presenti sul mercato. L'emittente può coprirsi da tale rischio inserendo nel titolo la clausola di rimborso anticipato, call[40], la quale gli conferisce la facoltà di estinguere il prestito prima della naturale scadenza dell'obbligazione. L'ammontare corrisposto dall'emittente all'investitore in caso di richiamo anticipato del prestito è inferiore ad un corrispondente *bond* privo di clausola. Il prezzo del titolo è inferiore al prezzo di una normale obbligazione e la differenza è costituita dal valore dell'opzione venduta all'emittente

$$P_{callable} = P_{non-callable} - P_{call\ option} \tag{30}$$

L'emittente emette un prestito a tasso fisso ed acquista il diritto d'opzione, call, dal sottoscrittore del *bond.* L'investitore investe in un titolo a reddito fisso $P_{callable}$ e vende l'opzione all'emittente $P_{call\ option}$. La differenza è il prezzo che corrispondere per acquistare il titolo *callable*. La differenza tra il valore di un titolo *callable* e quella di un titolo non *callable* è legata al valore dell'opzione che dipenderà da più variabili quali: il livello dei tassi[41], il tempo[42], la volatilità dei tassi d'interesse[43]. Colui che acquista il titolo *callable* avrà un aspettativa di stabilità dei tassi d'interesse, perché se i tassi rimangono costanti con il trascorrere del tempo il valore dell'opzione[44]

[39] Un'opzione è un contratto che conferisce al possessore il diritto di acquistare o vendere, ad una certa data se di tipo europeo o per tutta la vita dell'opzione se di tipo americano, l'attività sottostante l'opzione ad un prezzo prefissato. Chi acquista il diritto di comprare avrà una long call, la controparte avrà una short call. Colui che acquista il diritto di vendere avrà una long put, la cui controparte avrà una short put.

[40] L'esercizio del diritto può avvenire in date specifiche o dopo un certo periodo.

[41] Un trend crescente dei tassi ha come conseguenza una riduzione del valore del diritto di estinguere anticipatamente l'obbligazione da parte dell'emittente e viceversa.

[42] Più ci si avvicina alla data di esercizio è minore sarà il valore del diritto e viceversa.

[43] Maggiore sarà la volatilità dei tassi d'interesse maggiore sarà il valore dell'opzione e viceversa

[44] Il valore di un opzione può essere scomposto in due componenti: valore intrinseco e valore temporale. Nel caso di un opzione call, componente del titolo strutturato analizzato, si avrà:

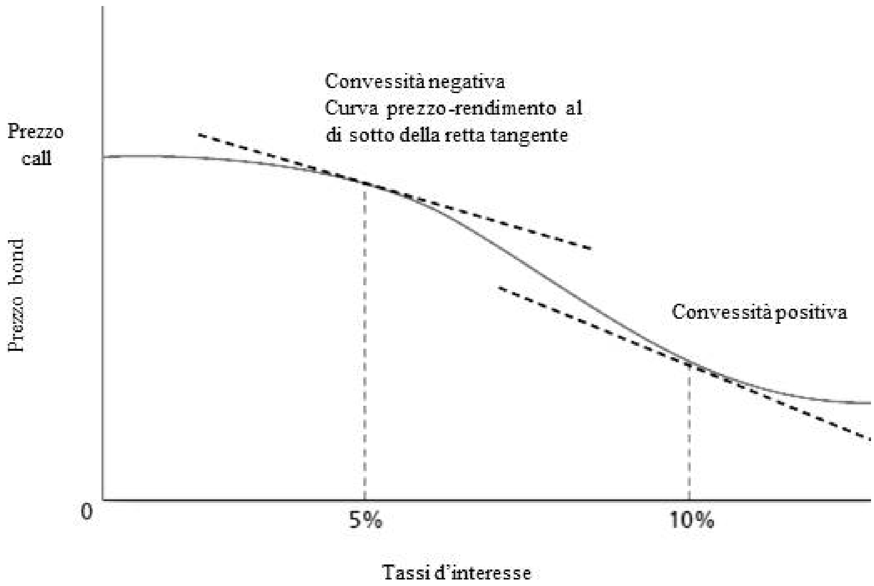
$$VI = Q_c - P_e$$

diminuirà e il prezzo del titolo aumenterà e con esso il rendimento realizzato. È da notare come l'acquirente di un titolo *callable* diversamente da un possessore di un *fixed-income* semplice teme il ribasso dei tassi perché aumenta il valore dell'opzione, vi è una maggiore probabilità di richiamo del prestito e dunque di esercizio del diritto d'opzione da parte dell'emittente, da deprimere la quotazione.

2.2.2 Duration e *convexity callable bond*

La figura sottostante mostra la curva prezzo-rendimento nel caso di un *callable bond.*

Figura 10 - *Curva prezzo-rendimento*



Fonte: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

Quando i tassi sono elevati, la curva è convessa, come nel caso di un semplice *bond*. Nella figura 9 si può notare come in corrispondenza del tasso d'interesse del 10% la curva prezzo-rendimento si

---

$$VT = Premio - VI$$

VI : valore intrinseco opzione
VT : valore temporale opzione
Q_c : quotazione corrente attività sottostante
$Premio$: prezzo di acquisto dell'opzione
P_e : prezzo di esercizio del diritto d'opzione

Il valore intrinseco è pari al valore dello strumento derivato in caso di esercizio immediato del diritto.
Il valore temporale diminuisce con l'avvicinarsi alla data di scadenza dell'opzione. Esso rappresenta quanto l'investitore è disposto a pagare in più rispetto al valore intrinseco dell'opzione.

colloca al di sopra della retta tangente alla curva. Tuttavia, al diminuire dei tassi d'interesse il prezzo del *bond* aumenta ma fino ad un certo limite: non potrà valere più del suo *call price*[45]. Dunque in caso di riduzione dei tassi d'interesse si può affermare come il valore dell'obbligazione strutturata è compresso dal suo *call price.* Come si può notare dalla figura 9 in corrispondenza di un tasso d'interesse del 5% la curva prezzo-rendimento giace al di sotto della retta tangente al grafico e si può affermare come la curva abbia una convessità negativa[46]. Nella zona di convessità negativa si presenta una fattispecie particolare. L'aumento dei tassi d'interesse causa una riduzione di valore del titolo che è minore del corrispondente profitto in conto capitale corrispondente a una diminuzione dei tassi d'interesse di pari ammontare. Tale asimmetria deriva dal fatto che l'emittente del *bond* possiede un diritto d'opzione call sul *bond.* Nel caso in cui i tassi diminuiscano il possessore del titolo avrà una perdita corrispondente a quella di una normale obbligazione, tuttavia il possessore dello strutturato ha incassato il premio dell'opzione. Nel caso in cui i tassi d'interesse diminuiscono, piuttosto che ottenere un elevato *capital gain* come nel caso di una semplice obbligazione, l'investitore potrebbe vedersi esercitare il diritto d'opzione da parte dell'emittente. Come precedentemente affermato, l'investitore è compensato da tale rischio nel momento in cui acquista l'obbligazione strutturata. Il *callable bond* è venduto a un prezzo inferiore, dunque con un rendimento iniziale a scadenza maggiore, rispetto ad una normale obbligazione. Quando la *convexity* è negativa il secondo termina dell'equazione (28) risulterà necessariamente negativo, dunque il valore risultate sarà peggiore di quello scaturito dall'approssimazione attraverso la sola *duration*. Tuttavia, un *bond* strutturato è difficile analizzarlo attraverso la Macaulay *duration*[47]. La presenza nel titolo dell'opzione ha come conseguenza una difficoltà nel prevedere i futuri *cash flow* corrisposti dal *bond*. Se il prestito obbligazionario viene richiamato anticipatamente, i cash flow termineranno e il capitale sarà ripagato anticipatamente. La convenzione nei mercati finanziari è quella di calcolare la *duration* effettiva dei *bond* strutturati. La *duration* effettiva non può essere calcolata come nell'equazione (2) mostrata precedentemente. La *duration* effettiva è definita come la variazione proporzionale del prezzo del *bond* per unità di variazione nel tasso d'interesse di mercato.

$$Duration\ effettiva = -\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\Delta r} \tag{31}$$

[45] In ipotesi di diminuzione dei tassi d'interesse il titolo *callable* vedrà aumentare il proprio valore ma non oltre il proprio *call price* perché l'emittente eserciterà il proprio diritto d'opzione, essendosi coperto da un potenziale ribasso dei tassi, dunque il *call price* corrisponde al prezzo d'esercizio dell'opzione call sul *bond*.

[46] In analisi matematica si afferma che in tale regione la curva è concava.

[47] Frederick Macaulay, "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856," *National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

L'equazione appare simile alla *modified duration* analizzata precedentemente nell'equazione (10), ma vi sono importanti differenze. In primo luogo nel calcolo della *duration* effettiva non si prende in considerazione l'*yield to maturity* del *bond* in esame ma bensì il tasso d'interesse prevalente sul mercato. Questo perché, per un *callable bond*, "chiamabile anticipatamente", la *maturity* non è fissa quindi l'*yield to maturity*[48] non è rilevante nell'analisi. Dunque si calcola il cambiamento di prezzo dovuto ad uno *shift* nella struttura a termine dei tassi d'interesse. In secondo luogo, la *duration* effettiva conta su metodologie di *pricing* considerando opzioni incorporate. Questo sta ad indicare come la *duration* effettiva sarà funzione di variabili che non sono prese in considerazione nel caso convenzionale.

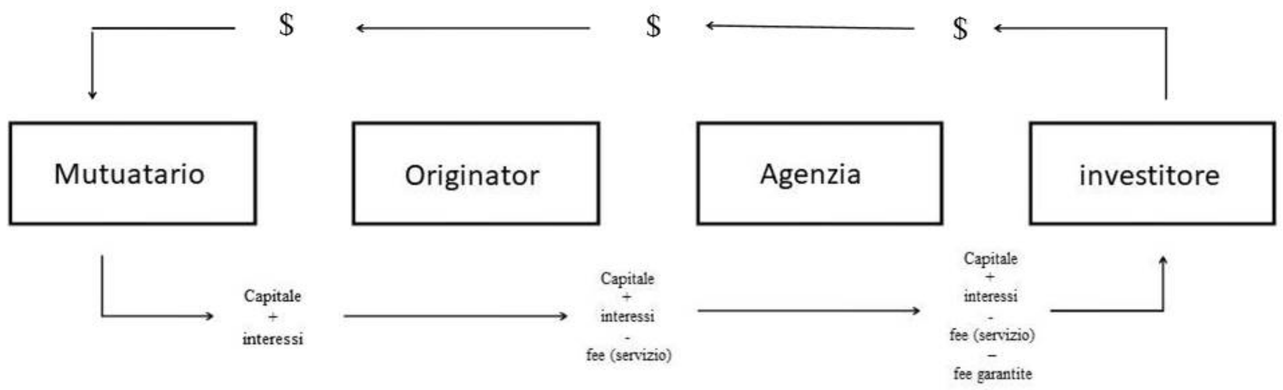
[48] In un'analisi specifica dell'*yield to maturity* di un *callable bond* si dovrebbero effettuare delle ipotesi in merito ai futuri tassi di mercato durante la vita del titolo. Qualora ci si aspetti che i tassi diminuiranno, o alternativamente *yield to maturity* minore del tasso cedolare, è opportuno considerare un *yield to call* mentre, nel caso opposto, qualora ci si aspetti tassi crescenti è opportuno considerare un *yield to maturity* perché l'emittente non avrà alcun interesse nell'esercitare il diritto d'opzione. Per *yield to call* si intende il rendimento alla prima data di esercizio del diritto d'opzione.

2.3 *Duration e Convexity di Mortgage backed Securities*

2.3.1 Mortgage-backed securities[49]

Prima del 1970, la maggior parte dei mutui provenivano da banche locali o da cooperative di credito. L'acquirente della propria casa ripagava il prestito per l'acquisto dell'immobile per un lungo periodo di tempo. Una tipica istituzione finanziatrice avrebbe avuto nel proprio portafoglio nel lato delle attività il credito a lungo termine nei confronti del mutuatario, mentre la sua principale passività sarebbe stata i conti dei propri depositanti. Tale scenario iniziò a cambiare quando alcune società iniziarono ad acquistare mutui dagli *originators*[50]e successivamete riunire questi prestiti in grandi *pool* così da poterli negoziare alla pari di qualsiasi altro *asset* finanziario. I *pool*, i quali rappresentavano essenzialmente diritti sui mutui sottostanti, furono soprannominati *mortgage-backed securities*[51]*,* ed il processo fu chiamato *securitization.* La figura sottostante mostra i *cash flows* derivanti da tale processo di *securitization:*

Figura *11 - Cash flows securitization*



Fonte: *Elaborazione personale, Microsoft PowerPoint*

Gli *originators* concedono un mutuo e il mutuatario si impegna a ripagare il capitale e gli interessi per un determinato periodo di tempo. Successivamente, l'originator vende i mutui ad agenzie specializzate e recupera il costo del prestito. Tuttavia l'originator continua a servire il credito, ricevendo i pagamenti mensili da parte del mutuatario per una piccola percentuale di commissione e a sua volta corrisponde al netto di tale commissione il pagamento effettuato dal mutuatario ad un'agenzia. L'agenzia riunisce i prestiti in pool chiamati *MBS*[52] e vende tali titoli ad altri investitori.

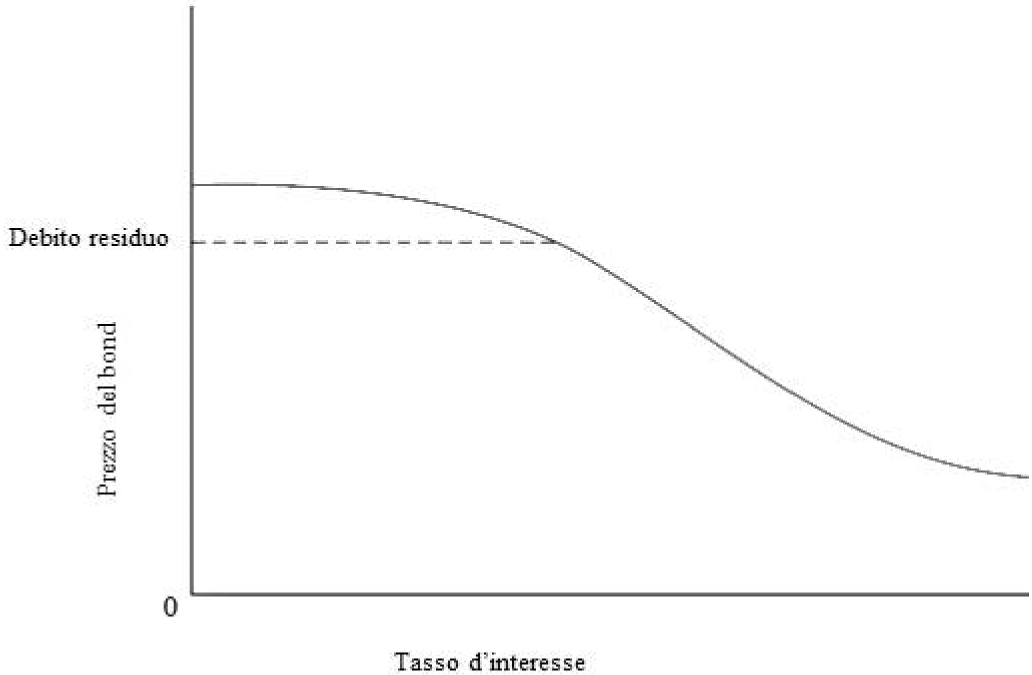
[49] In questo paragrafo ci si riferirà al mercato statunitense degli *MBS, mortgage-backed securities*
[50] Corrisponde al soggetto mutuante
[51] Titoli garantiti da ipoteca
[52] *Mortgage-backed securities*

L'agenzia tipicamente garantisce il credito incluso in ogni *pool* e ritiene specifiche commissioni prima di corrispondere il resto dei cash flow agli ultimi investitori. I *cash flow* degli *MBS* passano dal mutuatario al mutuante, *origintaor*, all'agenzia fino allo specifico investitore per tale motivo gli *MBS* sono anche definiti *pass-throughs.* È da notare come il mutuatario ha il diritto di ripagare l'intero ammontare del debito residuo in qualsiasi momento. Per esempio se i tassi dei mutui scendessero, il mutuatario potrebbe decidere di indebitarsi a un tasso più basso, usando tale ammontare per ripagare il prestito originario. Il diritto di ripagare il prestito è analogo al diritto di richiamare un *callable bond*. Nel caso del mutuo il *call price* è rappresentato dal debito residuo del prestito. Dunque un *mortgage-backed security* può essere visto come "un insieme di prestiti estinguibili di tipo *callable".*

2.3.2 Convexity e duration di mortgage-backed securities

I *MBS* sono soggetti, alla pari dei *callable bond*, ad una *convexity* negativa. Quando il mutuatario ripaga anticipatamente il proprio mutuo, il pagamento del capitale passa all'investitore, egli otterrà semplicemente il debito residuo del prestito, piuttosto che un *capital gain* sul proprio investimento[53]. Nel grafico sottostante è mostrata la curva prezzo rendimento di un MBS.

Figura 12 - *Convexity Mortgage-backed security*



Fonte: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

Si può notare dalla figura 12 che la curva sia molto simile a quella precedentemente analizzata nel caso di *callable bond*[54]. Tuttavia vi sono alcune differenze tra i *callable bond* e i *MBS.* I *mortgage-backed securities* sono venduti solitamente ad un prezzo maggiore rispetto al debito residuo sottostante. Ciò è dovuto al fatto che i mutuatari non rifinanzieranno i loro prestiti se i tassi non diminuiranno. Molti debitori non saranno disposti a sostenere costi o altre problematiche di diversa natura per rifinanziare i propri debiti senza un vantaggio abbastanza consistente, altri potrebbero avere semplicemente una bassa educazione finanziaria da pensare di rifinanziare il proprio mutuo. I

[53] Supponiamo 10 mutui a 30 anni, ogni uno con valore nominale di 10.000 $ riuniti in un pool di 10.000.000 $. Se il tasso sui mutui è il 6%. La rata mensile su ogni prestito corrisponde a 599,55 $, la componente interesse è pari a 583,33 $, la differenza rappresenta il rimborso del capitale pari a 16,22 $. Nei periodi successi, con un debito residuo con il passare del tempo inferiore una parte minore della rata mensile sarà quota interessi e una parte maggiore sarà quota capitale. Il possessore dell' *MBS* riceverà un ammontare leggermente inferiore, dovuto alle *fees* ritenute dall'agenzia, a quanto corrisposto dal mutuatario pari a (599,55 $ x 10 = 5.995,5) dai 10 mutui nel *pool*.

[54] Si veda la figura 10.

MBS mostrano una *convexity* negativa in corrispondenza di tassi d'interesse bassi, il loro implicito *call price,* il debito residuo del mutuo, non è un limite superiore rigido nel suo valore. Si può affermare come la loro *duration* si allunga in uno scenario di tassi in aumento mentre all'opposto le loro *duration* diminuiranno nel caso di aspettative di tassi decrescenti perché aumenteranno i potenziali pagamenti anticipati.

I semplici MBS hanno dato inizio alla formazione di *mortgage-backed derivatives.* Per esempio un CMO (*collateralized mortgage obligation*) reindirizza ulteriormente i *cash flow* di MBS a svariati titoli derivati chiamati *tranches*. Tali *tranches* sono strutturate in modo da allocare il rischio di tasso d'interesse ad altri investitori propensi ad assumersi tale rischio[55].

Nelle tabelle sottostanti[56] vi è un esempio di come è strutturato il mercato CMO, per comprendere come in realtà le *tranches* strutturate, qui esaminate, sono utilizzate per allocare il rischio di tasso d'interesse piuttosto che il rischio di credito lungo le varie classi.

Tabella 4 - *Tranches pool ipotecario di \$10 milioni*

Tranche A = \$ 4 milioni	*"Short pay" tranche*
Tranche B = \$ 3 milioni	*"Intermediate-pay" tranche*
Tranche C = \$ 3 milioni	*"Long-pay" tranche*

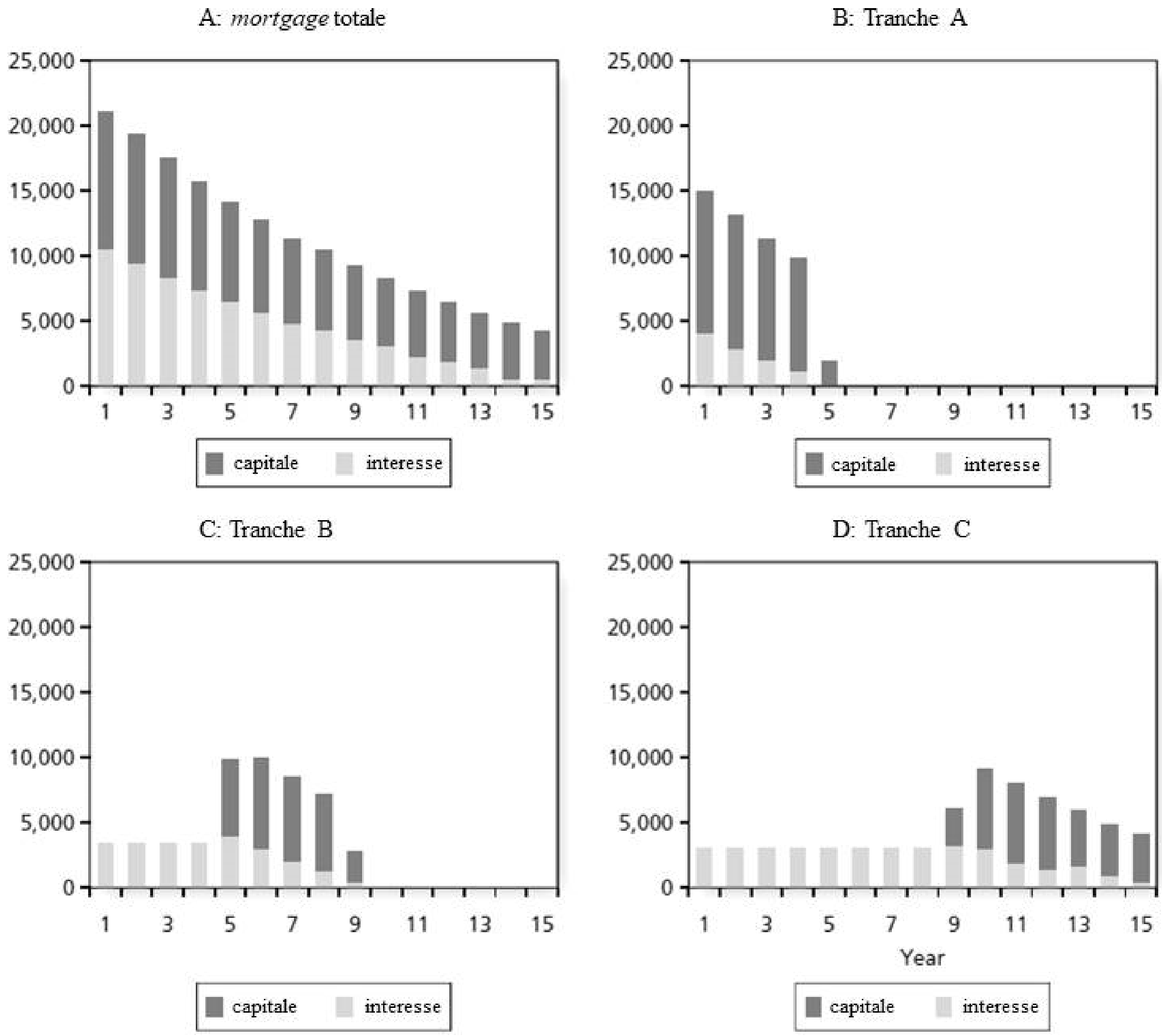
Fonte*: Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

Il pool di mutui sottostante è diviso in tre *tranches,* ogni uno con differenti *maturity* e dunque con diversa esposizione al rischio di tasso d'interesse. Ipotizzando un pool di \$10 milioni con mutui con *maturity* di 15 anni, ogni uno con tasso d'interesse del 10,5%, suddiviso in tre *tranches,* tabella 4. Supponendo che ogni anno l'8% dei prestiti in sospeso nel pool sono pagati anticipatamente. I *cash flows* totali in ogni anno in una visione complessiva del pool di mutui è dato dal riguardo A della figura 13, come si può notare il totale dei pagamenti si restringe dell'8% l'anno a mano a mano che i prestiti nel pool sono pagati. Le barre scure nel grafico rappresentano il pagamento del capitale, sia dell'ammortamento del prestito, sia nel caso di pagamenti anticipati, mentre le barre chiare rappresentano il pagamento delle quote interessi. Dal riquadro B si può osservare come inizialmente tutti pagamenti del capitale sono collegati alla *tranche* A. dal riquadro C e B si nota come le *tranches* B e C ricevono solamente il pagamento delle quote interessi fino al momento in cui la *tranche* A è conclusa. Quando la *tranche* A è stata totalmente "ripagata", i pagamenti di

[55] Un esempio di strumento finanziario sono i *CDOs, collateral debt obligations* usano *tranches* strutturate per riallocare il rischio di credito lungo differenti classi.
[56] Fonte esempio: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

capitale finiranno nella tranche B, fin quando la tranche B non sarà "ripagata" interamente, in quel momento i pagamenti delle quote capitale andranno a confluire nella tranche C.

Figura 13 - *Cash flows mortgage pool e tre tranches*



Fonte*: Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

Il processo sopra descritto permette di definire la tranche A come una "*short pay class*" la quale avrà la minore *duration* effettiva, mentre la tranche C è la *"long-pay tranche*" con la maggiore *duration* effettiva. Questo appena mostrato è un esempio semplice di come è possibile allocare il rischio di tasso d'interesse lungo differenti *tranches*.

3. *Passive bond management*

Le strategie di gestione passiva dei portafogli azionari o obbligazionari si dividono fra strategie attive[57] e strategie passive[58]. Queste si differenziano principalmente in base a tre elementi:

- Il tipo di obiettivo perseguito;
- La libertà concessa al gestore nella definizione delle politiche di investimento;
- L'importanza rivestita dalla valutazione e analisi dei titoli e dell'andamento atteso del mercato nel merito della riuscita della strategia.

Con *Passive bond management* si intendono le strategie di gestione dei portafogli caratterizzate dal fine di ottenere un ben definito rendimento obiettivo, o rendimento minimo obiettivo, basate su regole predeterminate a cui il gestore accetta di attenersi. L'obiettivo di rendimento può essere definito o in termini assoluti, ottenere un rendimento pari al 3%, oppure in termini relativi, intensione di ottenere un rendimento in linea con l'andamento di un benchmark, un indice obbligazionario ad esempio. In una strategia passiva definibile pura, il gestore deve sottostare ad importanti e restrittive regole gestionali per conseguire il rendimento prefissato, tali peculiarità, fanno si da rendere quasi irrilevanti le visioni personali del gestore in merito all'andamento atteso dal mercato, dunque una strategia passiva pura sarà caratterizzata da costi di gestione nettamente più limitati rispetto ad una gestione attiva.

I *passive managers* considerano i prezzi dei titoli come correttamente determinati e cercano di controllare solamente il rischio del loro portafoglio. La prima tipologia di strategia passiva è quella di tentare di replicare la performance di un indice, la seconda è conosciuta come immunizzazione. Queste tecniche sono utilizzate da istituzioni finanziari come, società di assicurazione e fondi pensione, impiegate per proteggere lo "stato finanziario" complessivo delle istituzioni dall'esposizione alle fluttuazioni dei tassi d'interesse. Queste due tecniche appena definite sono simili nel considerare i prezzi dei titoli come correttamente determinati, ma sono differenti in termini di esposizione al rischio. Un portafoglio costruito per replicare l'andamento di un indice avrà lo stesso profilo rischio-rendimento dell'indice preso ad esame al quale si lega. All'opposto, una strategia di immunizzazione cerca di costruire un profilo privo di rischio, nel quale le fluttuazioni dei tassi d'interesse non hanno impatto sul valore dell'azienda.

[57] *Active bond management*
[58] *Passive bond management*

3.1 Immunizzazione

Molte istituzioni finanziarie tentano di isolare dai propri portafogli il rischio di tasso d'interesse interamente. Generalmente tale rischio è preso ad esame in due modi differenti. Alcune istituzioni come le banche, sono sensibili a proteggere il loro *net market value* da fluttuazioni dei tassi. Altre, come i fondi pensione, potrebbero essere obbligati ad effettuare pagamenti dopo un certo periodo di tempo. Questi ultimi sono più attenti nel proteggere il valore futuro dei propri portafogli. Tuttavia comune a tutti gli investitori è il rischio di tasso d'interesse. Il *net worth* dell'azienda o la capacità di far fronte a future obbligazioni varia con il variare dei tassi d'interesse. L'immunizzazione è utilizzata dalle istituzioni finanziare per proteggersi dal rischio di tasso d'interesse.

Nel caso delle banche, queste hanno un disallineamento nella struttura delle scadenze di attività e passività. Tipiche passività sono i depositi, molti dei quali a breve periodo, dunque con *duration* basse. Le attività, all'opposto, sono costituite principalmente da prestiti e mutui, questi sono caratterizzati da più lunghe *duration*, e i loro valori sono conseguentemente più sensibili a variazioni nei tassi d'interesse. Nel caso di aumento inaspettato dei tassi, le banche possono incorrere in pesanti cadute del loro *net worth,* la diminuzione di valore delle loro attività è maggiore rispetto alle loro passività. Le istituzioni finanziarie dovrebbero allineare le esposizioni al rischio di tasso d'interesse delle loro attività con le esposizioni delle passività cosicché il valore delle attività segua quello delle passività sia in caso di aumento che in caso di caduta dei tassi di interesse. Qualsiasi istituzione, con determinate future obbligazioni, dovrebbe considerare l'immunizzazione una importante questione di *risk management*. La strategia di immunizzazione fu introdotta da F.M. Redington[59]. L'intuizione fu quella di allineare le *duration* delle attività con quelle delle passività in modo che il portafoglio di attività dell'azienda potesse far fronte alle obbligazioni della stessa, nonostante i movimenti dei tassi d'interesse.

Consideriamo ad esempio una società voglia finanziarsi per un importo pari a € 10,000.00 emettendo uno zero coupon *bond* con una scadenza di 5 anni. A fronte dell'emissione società si è impegnata a corrispondere il rimborso del valore nominale a scadenza più l'interesse maturato a scadenza. Supponendo che il titolo ZCB garantisce un tasso di interesse dell'8%, la società promette di corrispondere un importo pari a € 10,000.00 x 1,08 = - € 14,693.28 in 5 anni.

Supponiamo che la società decida di finanziare la sua obbligazione investendo in coupon *bond*s per un valore di € 10,000.00 con tasso cedolare 8% ai quali corrispondono cedole annualmente, vendute alla pari con scadenza sei anni. Fino al momento in cui i tassi di mercato rimangono stabili

[59] F.M. Redington, "Review of the Principle of Life-Office Valuations," *Journal of the Institute of Actuaries 78* (1952).

al 5% la società finanzia senza alcun problema la propria obbligazione, dato che il valore attuale della propria obbligazione è esattamente uguale al valore dei titoli.
La tabella sottostante nel riquadro A, mostra come se il tasso di interesse rimane costante all'8% i fondi accumulati dal titolo cresceranno esattamente al valore dell'obbligazione pari a € 14,693.28.

Tabella 5 - *Valore finale portafoglio titoli dopo 5 anni*

	numero pagamenti	anni rimanenti obbligazione	valore accumulato investimento	
A) r = 8%	1	4	800 * (1.08)^4	€ 1,088.39
	2	3	800 * (1.08)^3	€ 1,007.77
	3	2	800 * (1.08)^2	€ 933.12
	4	1	800 * (1.08)^1	€ 864.00
	5	0	800 * (1.08)^0	€ 800.00
	vendita titolo	0	10,800/1.08	€ 10,000.00
				€ 14,693.28
B) r = 7%	1	4	800 * (1.07)^4	€ 1,048.64
	2	3	800 * (1.07)^3	€ 980.03
	3	2	800 * (1.07)^2	€ 915.92
	4	1	800 * (1.07)^1	€ 856.00
	5	0	800 * (1.07)^0	€ 800.00
	vendita titolo	0	10800/1.07	€ 10,093.46
				€ 14,694.05
C) r = 9%	1	4	800 * (1.09)^4	€ 1,129.27
	2	3	800 * (1.09)^3	€ 1,036.02
	3	2	800 * (1.09)^2	€ 950.48
	4	1	800 * (1.09)^1	€ 872.00
	5	0	800 * (1.09)^0	€ 800.00
	vendita titolo	0	10,800/1.09	€ 9,908.26
				€ 14,696.03

Fonte: *Elaborazione personale*

Oltre il quinto anno il reddito derivante da cedole di 800 è reinvestito al tasso prevalente sul mercato pari all'8%. Alla fine del periodo, il *bond* può essere venduto per € 10,000.00. Il titolo è venduto alla pari perché il tasso di interesse di mercato è uguale al tasso cedolare. Il reddito totale alla fine dei 5 anni da reinvestimento delle cedole e dalla vendita del titolo è uguale a € 14,693.28.
Se i tassi di interesse cambiano, vi saranno due forze che controbilanciandosi influenzeranno la possibilità che i fondi raggiungano il valore target del portafoglio di € 14,693.28. Se i tassi di interesse aumentano, i fondi soffriranno di perdite in conto capitale, compromettendo la possibilità di soddisfare la propria obbligazione da parte della società. Il titolo avrà un valore inferiore in 5

anni rispetto al caso in cui i tassi rimangano costanti all'8%. Tuttavia, all'aumentare dei tassi di interesse, i frutti derivanti dal reinvestimento delle cedole cresceranno ad un tasso maggiore, compensando le perdite in conto capitale. Si può affermare come l'investitore in titoli a reddito fisso deve sostenere due rischi di tasso di interesse che si compensano tra loro: rischio prezzo e rischio reinvestimento. Aumenti dei tassi di interesse provocano perdite in conto capitale ma allo stesso tempo aumenta il tasso al quale verranno reinvestiti i redditi generati dal titolo in esame. Se la *duration* del portafoglio è scelta opportunamente, questi due effetti si annulleranno perfettamente. Quando la *duration* del portafoglio è stabilita uguale *all'holding period* dell'investitore, il valore accumulato dall'investimento alla data coincidente con *l'holding period* deciso, sarà immune dall'influenza del cambiamento dei tassi di interesse. Dunque, per un periodo di investimento uguale alla *duration* del portafoglio, rischio prezzo e rischio reinvestimento si annullano perfettamente.

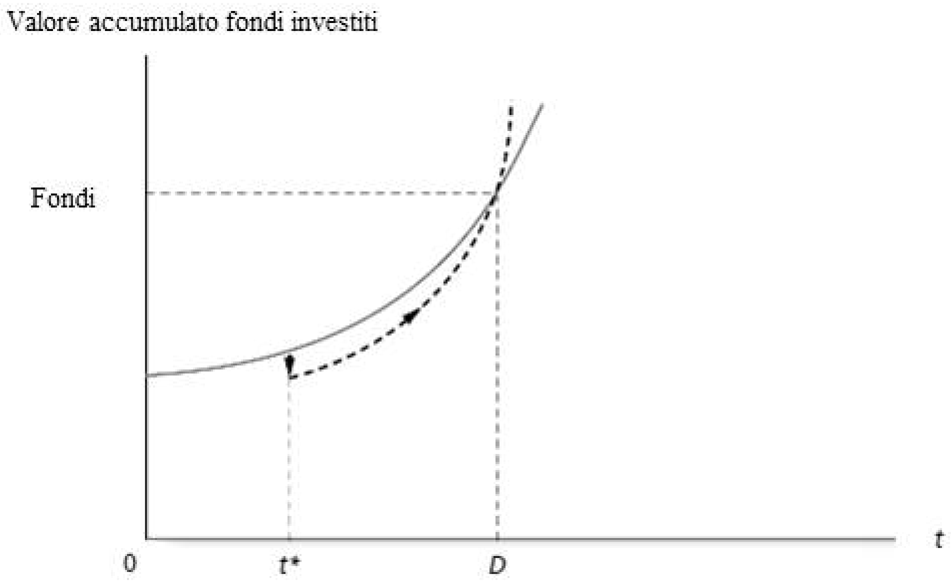
Nel nostro esempio la *duration* dei titoli con *maturity* pari a 6 anni, utilizzati per finanziare l'emissione dello ZCB è circa 5 anni. Per far si che il piano di finanziamento abbia uguale *duration* tra attività e passività, la società dovrebbe immunizzarsi contro le fluttuazioni dei tassi di interesse.

Nella tabella mostrata precedentemente (3.0.) i riquadri B e C mettono in luce due possibili scenari di mercato: i tassi diminuiscono al 7% riquadro B, o incrementano al 9% riquadro C. In entrambi i casi i pagamenti corrisposti annualmente dalle cedole sono reinvestiti ai nuovi tassi di interesse, i quali si assume cambieranno prima del pagamento della prima cedola ed il *bond* è venduto al quinto anno in modo da riuscire ad onorare l'obbligazione assunta.

Il riquadro B mostra che se il tasso d'interesse diminuisce fino al 7% i fondi accumulati corrisponderanno a € 14,694.05, offrendo un piccolo profitto di € 0.77. All'opposto, se i tassi dovessero salire fino al 9% come raffigurato nel riquadro C, i fondi accumulati corrisponderanno a € 14,696.03, realizzando un piccolo profitto di € 2.74.

È importante analizzare alcuni punti fondamentali di questo esempio appena mostrato. Primo, "matchando" le *duration* con la differenza tra i fondi accumulati grazie al reinvestimento delle cedole, effetto reinvestimento, e quelli derivanti dalla vendita del titolo, effetto prezzo. Questo sta ad indicare, che quando i tassi di interesse diminuiscono, le cedole crescono ad un tasso minore rispetto al periodo precedente, ma l'aumento del valore del *bond* compensa la perdita appena delineata. Quando i tassi di interesse aumentano, il valore del *bond* diminuisce, ma le cedole più che controbilanceranno la potenziale perdita in conto capitale, grazie al reinvestimento delle stesse a tassi più elevati. La figura sottostante illustra il caso appena descritto.

Figura 14 - *Crescita dei fondi investiti*



Fonte: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

La linea continua rappresenta il valore accumulato dal titolo se il tasso di interesse è costante all'8%. La linea tratteggiata mostra un incremento della pendenza della curva nel caso in cui i tassi di interesse aumentano. L'effetto iniziale è una perdita in conto capitale, la curva giace al di sotto di quella iniziale, ma tale perdita è compensata da un incremento di tasso a cui sono reinvestiti i fondi. All'istante *t* corrispondente a 5 anni, l'orizzonte di investimento eguaglia la *duration* del titolo ed i due effetti si annullano, cosicché la società possa essere in grado di soddisfare l'obbligazione assunta attraverso i profitti accumulati dal titolo.

Si può analizzare l'immunizzazione in termini di valore attuale contro valore futuro dell'investimento. La tabella 6 mostra nel riquadro A lo stato patrimoniale iniziale, attività e passività, della società presa ad esame. Entrambi, *asset* e obbligazione hanno un uguale valore di mercato pari a € 10,000.00, dunque la società si finanzia correttamente.

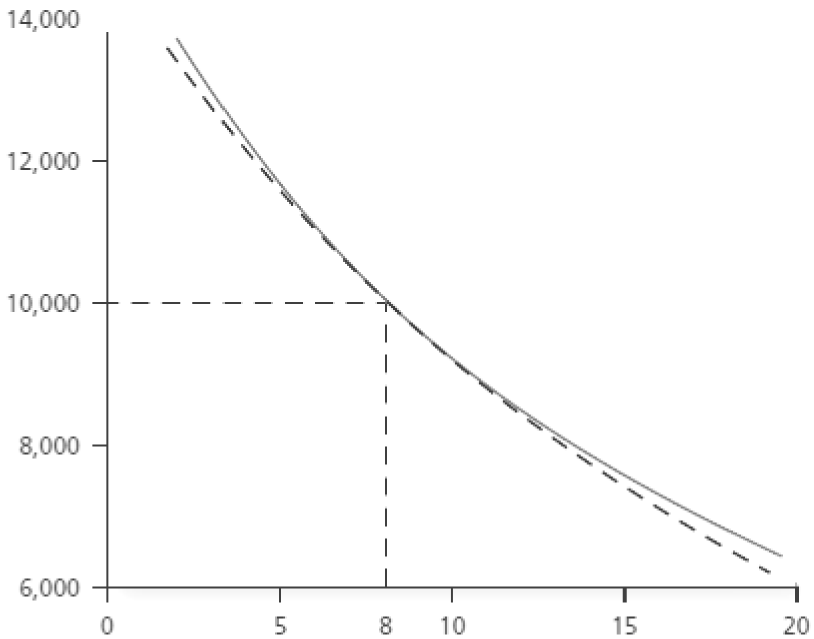
Tabella 6 - *Valore di mercato attività e passività*

ATTIVITA'		PASSIVITA'	
A) r = 8%			
bond	10,000	obbligazione	10,000
B) r = 7%			
bond	10,476.65	obbligazione	10,476.11
C) r = 9%			
bond	9,551.41	obbligazione	9,549.62

Fonte*: Elaborazione personale, Microsoft Excel*

I riquadri B e C nella tabella mostrano che sia nel caso in cui i tassi di interesse aumentino, sia nel caso in cui diminuiscano, il valore del *bond* finanzia la società ed il valore attuale dell'obbligazione della società varia di un ammontare approssimativamente uguale. Nonostante i movimenti dei tassi di interesse, la società è finanziata e registra nei due scenari B e C un profitto minimo. La "*duration-matching*" ha assicurato che sia le attività che passività reagissero allo stesso a cambiamenti nei tassi di interesse.
La figura 15 mostra il valore attuale del titolo e l'obbligazione come funzione del tasso di interesse.

Figura 15 - *Immunizzazione*



Fonte: *Elaborazione personale*[60]

Nello scenario di tassi di interesse dell'8% i valori sono identici e l'obbligazione è finanziata completamente. Le due curve sono tangenti nel punto in cui il tasso di interesse è all'8%. Anche se i tassi cambiano i valori del titolo e dell'obbligazione sono ancora uguali. Tuttavia si può notare come quanto appena affermato sia valido solo per piccole variazioni dei tassi di interesse. Per grandi movimenti dei tassi di interesse le due curve divergono. Tale aspetto spiega il motivo per cui nei due diversi scenari analizzati si riscontra un piccolo surplus a tassi di interesse diversi dall'8%. Si può spiegare tale profitto marginale con il concetto di *convexity*. La figura 15 mostra come il titolo presenti una *convexity* maggiore rispetto all'obbligazione che finanzia. Dunque, quando i tassi

[60] Esempio in: *Investments, Bodie, Kane, Marcus, tenth edition*

di interesse si muovono considerevolmente, il valore del *bond* supera il valore attuale dell'obbligazione di un certo ammontare.
L'esempio appena mostrato introduce l'importanza del tema del ribilanciamento del portafoglio immunizzato. Al variare dei tassi di interesse o delle *duration* degli *asset*, i *managers* devono ribilanciare i propri portafogli così da riallineare la *duration* del portafoglio con la *duration* delle obbligazioni. È da notare come anche se i tassi di interesse non variano, le *duration* delle attività variano per il semplice passare del tempo[61]. Anche se il portafoglio è immunizzato all'inizio del periodo, con il passare del tempo le *duration* delle attività e delle passività diminuiranno a tassi differenti. Senza il ribilanciamento dei portafogli, le *duration* non sarebbero più allineate tra loro. L'immunizzazione è una strategia passiva, come precedentemente affermato, intendendo con questo l'assenza di tentativi nella ricerca di titoli *mispriced.* I manager il cui compito è quello dell'immunizzazione di portafoglio hanno il compito di monitorare e aggiornare le posizioni all'interno del proprio portafoglio con tempestività. Tuttavia, il ribilanciamento dei propri portafogli comporta dei costi di transazione, dunque non si potrà modificare le proprie posizioni con una frequenza troppo elevata. L'obiettivo è quello di stabilire un compromesso opportuno tra il desiderio di una perfetta immunizzazione, il quale richiede continui ribilanciamenti, ed il bisogno di controllare i costi di negoziazione, i quali impongono ribilanciamenti meno frequenti.

3.2 Modelli unifattoriali di immunizzazione

I modelli unifattoriali di immunizzazione sono caratterizzati dall'utilizzo di modelli di *duration* a fattore singolo, intendendo con questo l'assunzione che l'unica fonte di rischio per i *bond* è il cambiamento dei tassi d'interesse. L'immunizzazione contro il rischio di tasso d'interesse si è detto esistere se un portafoglio di titoli alla fine di uno specifico periodo di investimento è uguale al valore aspettato al momento dell'acquisto. Le variazioni attese dei tassi d'interesse sono assunte come incorporate nella corrente *term structure*, dunque, se realizzate, non influenzeranno né il valore capitale dei titoli né i flussi dal reinvestimento. Se l'investimento è immunizzato, i rendimenti realizzati in un dato periodo non saranno minori dei rendimenti promessi dal mercato nel momento in cui l'investimento è stato effettuato.
Redington mostrò che, se la *term structure* era piatta o variava in modo da rimanere piatta, una istituzione con il valore attuale delle attività uguale al valore attuale delle proprie passività sarebbe

[61] Vedi effetto *drift* della *duration* all'avvicinarsi dello stacco delle cedole corrisposte dal titolo, esaminato nel capitolo 1. Vedi figura 5 la *duration* generalmente diminuisce meno rapidamente rispetto alla *maturity*.

stata immunizzata contro cambiamenti nei tassi d'interesse quando la Macaulay *duration*[66] delle proprie attività uguagliava la Macaulay *duration*[62] delle proprie passività[63].

Fisher e Weil implementarono la strategia di immunizzazione a mercati nei quali le *term structures* non sempre sono necessariamente piatte o i tassi variano in modo identico per ogni *maturity.* Essi supposero un processo stocastico che, nel discreto, implicava che nel breve periodo i tassi d'interesse variavano in maniera maggiore o minore rispetto al lungo periodo, in base alla pendenza della *term structure.* La struttura a termine nell'istante *0,* $h(0,t)$, passa istantaneamente a $(1+\lambda)*h(0,t)$ nell'istante t dovuto a un inaspettato movimento o shock nei tassi, di un ammontare pari a λ. Dal momento che λ influisce su tutti i tassi di sconto, tutti i cambiamenti nei tassi sono perfettamente correlati. La *duration* appropriata per tale processo stocastico è data da:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{m} \frac{tC_t}{[1+h(0,t)]^t} + \frac{mA_m}{[1+h(0,m)]^m}}{\sum_{t=1}^{m} \frac{C_t}{[1+h(0,t)]^t} + \frac{A_m}{[1+h(0,m)]^m}} \tag{32}$$

Fisher e Weil mostrarono che se i tassi di interesse variano in accordo a tale processo stocastico, un investitore può creare un portafoglio immunizzato di *coupon bonds*[64]*,* su un dato orizzonte temporale di investimento *HP*, comprando un portafoglio di titoli le cui *duration,* in accordo con la formula *(32)* eguagliano la lunghezza del periodo di investimento *HP*. La *duration* di un portafoglio è uguale alla media ponderata delle *duration* dei singoli titoli che compongono il portafoglio, dove i pesi dipendono sia dal valore relativo di ogni *bond* che dal processo stocastico assunto.

Quando la *duration* di un portafoglio è uguale alla rimanente lunghezza del periodo di investimento, cambiamenti inaspettati nel valore di mercato dei titoli, non ancora giunti alla *maturity*, alla fine dell'*holding period*, effetto prezzo, sono di misura uguale ma opposti nella direzione, ad inaspettati cambiamenti nel reinvestimento dei flussi, effetto reinvestimento[65]. È da notare come in corrispondenza di qualsiasi altra *duration* i due effetti non sono uguali ne si annullano. Si può affermare come i *coupon bond* facenti parte del portafoglio sono effettivamente trasformati in *zero coupon bond* con *maturity* uguali all'*holding period*. È importante notare che sia la *duration* del portafoglio che l'*holding period* decrescono con il passare del tempo, ma non nella stessa misura, il portafoglio deve essere ri-bilanciato periodicamente per mantenere la sua *duration* uguale

[62] Frederick Macaulay, "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856," *National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

[63] F.M. Redington, "Review of the Principle of Life-Office Valuations," *Journal of the Institute of Actuaries 78* (1952).

[64] Portafoglio di titoli senza opzioni incorporate, escludendo il rischio di default

[65] G.O.Bierwag and George G. Kaufman, "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: A Note," *Journal of Business, July 1977, ed. Bond Duration and Immunization.*

all'*holding period* rimanente e per mantenerlo immunizzato contro futuri cambiamenti inaspettati nei tassi di interesse.

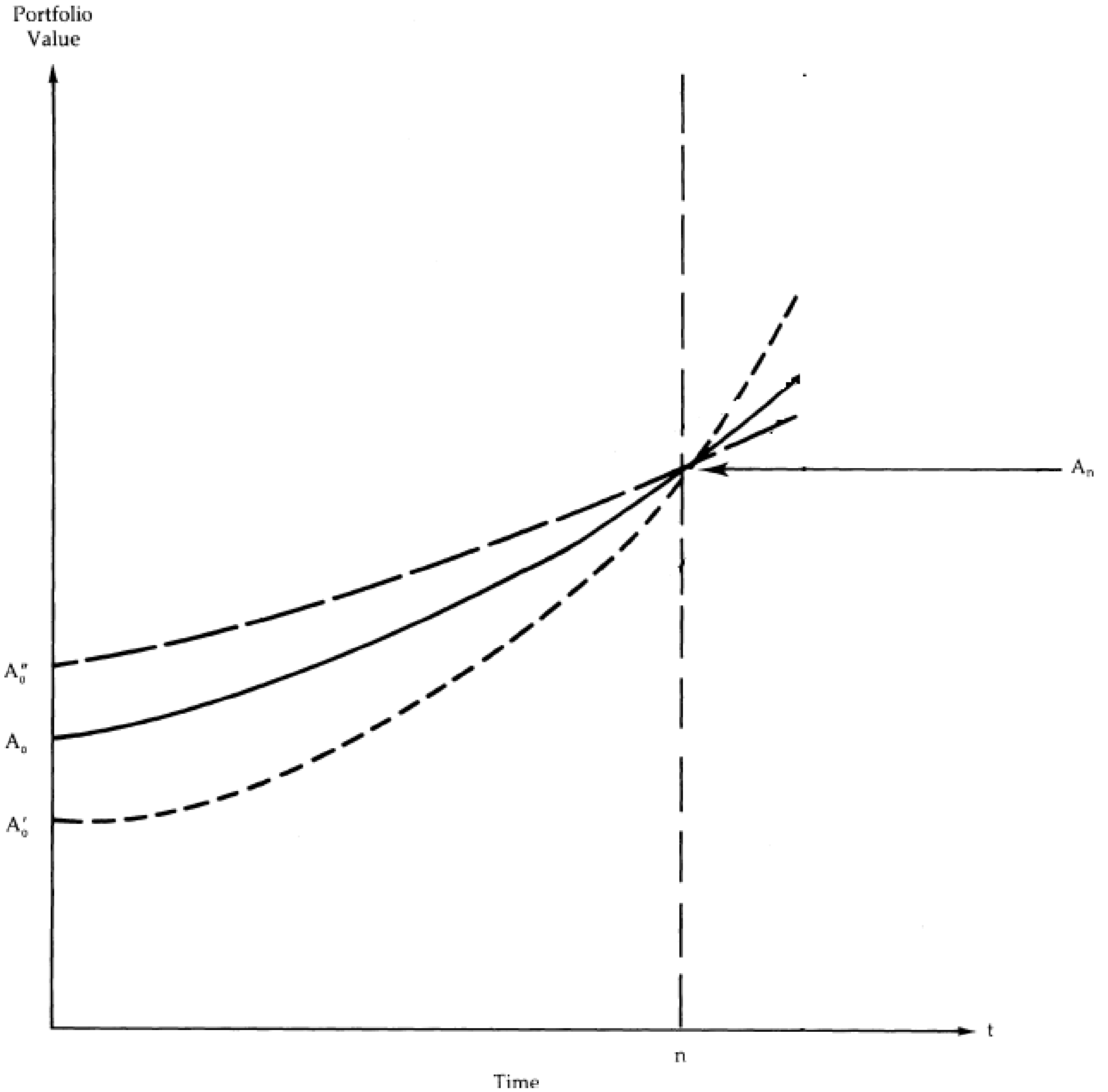
La strategia di immunizzazione attraverso "l'allineamento" delle *duration* è rappresentata nella figura 16. Se la *term structure* iniziale è $h(0,t)$ il valore iniziale di un portafoglio A_0 ci si aspetta che aumenti a:

$$A_n = A_0 * [1 + h(0,n)]^n \tag{33}$$

Alla fine dell'*holding period*, *n*, se non ci sono inaspettati cambiamenti nei tassi di interesse. Questo è mostrato nella figura 16 dalla curva rappresentata con una linea continua.

- Se i tassi di interesse aumentano inaspettatamente all'istante *0*, il valore del portafoglio diminuirà immediatamente a A_0' ma i flussi derivanti dal reinvestimento aumenteranno nel tempo.
- Se il portafoglio è stato costruito in modo tale da avere una *duration* uguale ad *n*, l'incremento nel reinvestimento dei flussi causa un incremento del valore del portafoglio a A_n come mostrato dalla linea tratteggiata superiore, la quale è più ripida della linea continua, all'istante *n*.
- Se i tassi di interesse diminuiscono, A_n'', l'andamento del valore del portafoglio sarà determinato dalla linea tratteggiata superiore.

Figura 16 - *Valore del portafoglio prima e dopo shock nei tassi di interesse*



Fonte: *G.O. Bierwag, George G.Kaufman and Alden Toevs,“ Duration: Its Devolopment and Use in Bond portfolio Management”*

Per portafogli con *duration* minori o maggiori di n, questi non saranno immunizzati, la linea tratteggiata sarà sopra o sotto la linea continua e produrrà un valore finale maggiore o minore rispetto a A_n all’istante n.

La *duration* corretta per l’immunizzazione come la *duration* corretta per il rischio di prezzo di un titolo, dipende dall’attuale processo stocastico che determina i cambiamenti nei tassi di interesse. Tuttavia l’attuale processo stocastico nel mondo reale non è conosciuto, gli investitori devono predirlo. Nel caso in cui gli investitori dovessero predire in modo sbagliato tale processo, le *duration* dei propri portafogli saranno più lunghe o più corte rispetto alla corretta *duration* necessaria per immunizzare il portafoglio. Il portafoglio non sarà immunizzato e il rendimento realizzato potrà essere minore o superiore a quello promesso. Il rischio di realizzare rendimenti minori rispetto a quelli promessi dovuti all'identificazione di un processo stocastico errato, può essere definito come *"stochastic process risk"*[66].

Bierwag, Kaufman, Toevs, Fong e Vasicek hanno sviluppato delle strategie per minimizzare le perdite da *stochastic process risk*[67]. Dal momento che non ci sono vendite o reinvestimenti di flussi prima della *maturity*, uno *zero coupon bond* la cui *maturity* e *duration* è uguale al rimanente orizzonte temporale di investimento, genererà sempre il rendimento promesso indipendentemente dal processo stocastico. Segue che, un portafoglio costituito da *coupon bond* i cui flussi assomigliano al flusso di uno *zero coupon* con uguale *duration*, incorreranno in un minimo *stochastic process risk.* Tale portafoglio potrebbe essere costruito selezionando titoli le cui *duration* sono "compresse" il più possibile attorno alla lunghezza dell'orizzonte temporale di investimento.

Questa analisi[6] ha importanti implicazioni per definire il rischio rendimento nel mercato dei *bond*. Dal momento che tutti gli investitori non hanno uguali orizzonti di investimento, loro desidereranno portafogli con differenti *duration* per immunizzarsi contro il rischio di tasso di interesse. Dunque, gli investitori con differenti orizzonti temporali di investimento vedranno il medesimo portafoglio titoli con differenti livelli di rischio di tasso di interesse. La *duration* appropriata per un portafoglio non dipenderà solo dalle caratteristiche dei *cash flows*, ma anche dal processo stocastico dei tassi di interesse che è presente sul mercato. Quindi, il rischio di tasso di interesse a cui incorre un investitore[68] è funzione di:

- L'*holding period* dell'investitore
- Le caratteristiche dei *cash flows* dei titoli
- Il processo stocastico dei tassi di interesse

Questa funzione può essere espressa come:

$$IRR = f(HP, CF, SP) \tag{34}$$

IRR = rischio di tasso di interesse

HP = *holding period* dell'investitore

[66] G.O. Bierwag, George G.Kaufman and Alden Toevs," Duration: Its Devolopment and Use in Bond Portfolio Management"

[67] G.O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, "Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk," *Journal of Bank Research, Winter 1983,* pp. 282-291 and H Gifford Fong and Oldrich A. Vasicek, "A Risk Minimizing Strategy for Multiple Liability Immunization" *(Gifford Fong Associates, Santa Monica, CA, revised February 1982).*

[68] Ipotesi di titoli privi di rischio di default e senza opzioni incorporate

CF = caratteristiche dei *cash flows* dei titoli

SP = l'attuale processo stocastico dei tassi di interesse sul mercato

Quando *SP* è correttamente determinato, i rimanenti due fattori nella relazione (34) definiscono l'appropriata misurata della *duration*. La relazione (34) può essere scritta:

$$IRR = f(HP, D) \qquad (35)$$

Segue che:

$IRR = 0$ quando $PL = D$

$IRR > 0$ quando $PL \lesseqgtr D$

Questo implica che un investitore potrebbe eliminare il rischio di tasso di interesse scegliendo un portafoglio titoli con una *duration* uguale al proprio *holding period.* Questa strategia renderà in un dato orizzonte temporale un rendimento privo di rischio che è dato dalla *term structure* prevalente nel mercato all'inizio del periodo di investimento. Qualsiasi altro portafoglio, come precedentemente affermato, incorrerà in un rischio di tasso di interesse il quale può determinare un rendimento minore di quello privo di rischio o di quello promesso per l'orizzonte temporale di investimento considerato. Gli investitori sono disposti ad assumersi tale rischio addizionale se si aspettano di realizzare rendimenti maggiori, essi sceglieranno tali portafogli solo se si aspettano di "over performare" rispetto al rendimento privo di rischio del portafoglio immunizzato, per l'orizzonte temporale di investimento considerato. Una strategia di questo tipo si annovera tra quelle attive.

L'equazione (34) mostra anche che non esiste un'unica misura di rischio per tutti i titoli e tutti gli investitori. Un titolo che può apparire meno rischioso ad un investitore con un *holding period* uguale alla *duration* del titolo potrebbe apparire maggiormente rischioso ad un investitore con un *holding period* maggiore o minore.

3.3 Modelli multifattoriali di immunizzazione

Tutta la teorica riguardo l'immunizzazione analizzata precedentemente utilizza modelli di *duration* a fattore singolo assumendo che l'unica fonte di rischio per i *bond* deriva da inaspettati cambiamenti nei tassi di interesse. La gran parte dei *bond manager* cercano di generare alti rendimenti costruendo portafogli immunizzati di titoli che sono soggetti ad altre fonti di rischio, in particolare il rischio di default[69]. Bierwag, Kaufman e Toevs hanno analizzato le condizioni

[69] Sylan G. Feldstein, Peter E. Christensen and Frank J. Fabozzi, "Bond Portfolio Immunization," in Frank J. Fabozzi, *ed., Readings in Investment Management* (Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1982)

attraverso le quali i modelli di *duration* a fattore singolo possano essere usati per immunizzare titoli soggetti sia al rischio di default che al rischio di tasso di interesse[70].

Gli investitori domandano un premio nel rendimento nell'investire in titoli soggetti al rischio di default. Dunque, il tasso d'interesse nominale in tali titoli eccede il rendimento *risk-free* atteso. Alcuni studi hanno dimostrato che il mercato obbligazionario è abbastanza efficiente e che i rendimenti realizzati in questi titoli non differiscono molto in media dai rendimenti *default-free* quando l'orizzonte d'investimento è sufficientemente lungo o il portafoglio è opportunamente diversificato[71]. Le perdite per default attuali per tali portafogli approssimano le perdite attese riflesse nei premi per il rischio di default. Per definizione è impossibile immunizzare portafogli di titoli privi del rischio di default ai loro tassi promessi su lunghi orizzonti temporali di investimento. Sebbene il valore attuariale delle perdite derivanti da default possano essere conosciute al tempo in cui il *bond* è acquistato, il momento dell'effettivo default non è possibile prevederlo ed è incerto. È possibile affermare che il default sei singoli titoli segua un processo stocastico. Il timing del default influenzerà lo schema dei *cash flows,* quindi la *duration* dei titoli, anche se il rendimento atteso non cambi[72]. Differenti processi di default genereranno differenti misure di *duration*. In aggiunta, la *duration* varierà dalla *duration* calcolate senza alcun aggiustamento per il rischio di default. Se l'attuale modello di *default loss* differisce dal modello assunto di *default loss*, anche se il valore attuale dell'attuale perdita da default è uguale al valore attuale delle perdite attese da default, le *duration* dei due modelli alternativi di *cash flows* saranno differenti.

Si può affermare come quindi i *bond non-default-free* siano soggetti a due processi stocastici, uno per il default, uno per i tassi di interesse. Il modello a fattore singolo deve essere corretto in modo da corrispondere a entrambi i processi; altrimenti le strategie attive o di immunizzazione basate su modelli di *duration* a fattore singolo potrebbero non ottenere i risultati sperati. Tuttavia non sono state effettuate ricerche in merito al processo stocastico delle perdite da default. In assenza di tali informazioni, *duration* probabilmente errate sono state calcolate per titoli inclini al default. Dunque i modelli di *duration* a fattore singolo dovrebbero essere usati con grande cautela nella gestione di portafogli di *bond non-default-free.*

[70] G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, "Use of Single factor Duration Models for Non-Default Free Bonds" *(Paper presented at the Annual Meeting of the Western Finance Association, Long Beach, CA, June 1983).*
[71] Thomas R. Atkinson, "Trends in Corporate Bond Quality," *(New York: National Bureau of Economic Research, 1967)* and Braddock Hickman, "Corporate Bond Quality and Investor Experience," *(New York: National Bureau of Economic Research, 1958), and* Richard W. McNally and Calvin Broadman, "Aspects of Corporate Bond Portfolio Diversification," *Journal of Financial Research, (Spring 1979).*
[72] Bierwag, Kaufman and Toevs, "Use of Single Factor Duration Models for Non-Default Free Bond. "

3.4 Immunizzazione per periodi di investimento multipli

È improbabile che tutti o molti investitori abbiano un singolo e ben definito orizzonte temporale di investimento. Alcune istituzioni finanziarie hanno una serie di scadenze nelle quali devono estinguere le passività ad un predeterminato valore. Gli investitori desidereranno proteggersi da ogni uscita derivante da quanto appena descritto. La più ovvia strategia è quella di *"matchare"* i *cash flows* generati da un attività in portafoglio con i *cash flows* previsti dalle passività. Tale strategia è tuttavia complessa. Se il processo stocastico dei tassi di interesse è in accordo con l'esistenza delle condizioni di equilibrio nei mercati finanziari competitivi, le istituzioni potrebbero immunizzare i propri *cash flows* più semplicemente scegliendo un singolo *asset portfolio* con una *duration* ed un valore attuale uguale alla *duration* e al valore attuale delle proprie passività. Sotto tali condizioni, le istituzioni potrebbero far fronte pienamente e in tempo a ogni uscita vendendo un appropriato ammontare di *asset*[73].

Bierwag, Kaufman, Toevs, Fong e Vasicek hanno mostrato che se il processo stocastico non soddisfa le condizioni di equilibrio, la strategia di immunizzazione diventa un più complesso processo a due stadi[74]. Le *duration* degli *asset* devono sempre essere allineate alle *duration* delle passività. Tuttavia, tale condizione è solo necessaria, ma non sufficiente. Ipotizzando un caso molto semplice, una decisione dei titoli nella costruzione del portafoglio, il portafoglio può essere diviso in due "sub-portafogli" separati. La *duration* del primo minore della prima scadenza e la *duration* del secondo maggiore della scadenza precedente. La tecnica appena descritta è soddisfatta anche da portafogli più complessi che possono essere divisi a loro volta in sub-portafogli aventi flussi che similmente legano ogni scadenza o sotto gruppo di scadenza. Allineare flussi in entrata e flussi in uscita è un caso limitativo.

[73] Redington, "Review of the Principle of Life-Office Valuation," *op cit.*

[74] G.O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, "Immunizing Strategies for Funding Multiple Liabilities, " Journal of Finance and Quantitative Analysis, *March 1983, and* Gifford H. Fong *and* Oldrich A. Vasicek, "Return Maximization for Immunized Portfolios," *in* Bierwag, Kaufman and Toevs, eds., *Innovations in Bond Portfolio Management, op cit*.

3.5 Problemi e limiti

Come affermato nelle analisi precedenti in merito all'equazione *(2)* della Macaulay *duration*[75], tale formula è valida solo se si assume una struttura piatta dei tassi d'interesse nella quale tutti i flussi di cassa sono scontati allo stesso tasso d'interesse. Successivamente si è affermato come si possa utilizzare la curva dei rendimenti e scontare ogni cash flow, corrisposto dal titolo, con il tasso di interesse presente sulla curva dei rendimenti alla corrispondente scadenza. Tuttavia anche con tale approccio, la tecnica dell'allineare le *duration* delle passività con quelle delle attività vale e immunizzerà i portafogli solamente nel caso di spostamenti paralleli della curva dei rendimenti. Ovviamente tale ipotesi è abbastanza irrealistica. Molti studi e ricerche sono state effettuate con l'obiettivo di generalizzare il concetto di *duration*. Come è stato analizzato sono stati sviluppati modelli di *duration* multifattoriali per permettere di ovviare a tali restrizioni. Tuttavia l'aggiunta di fattori esplicativi ha aumentato notevolmente la complessità dei modelli da non apparire sostanzialmente efficaci[76].

In realtà l'immunizzazione può essere un inappropriato obiettivo in uno scenario di inflazione. L'immunizzazione è essenzialmente una "nozione nominale" ed ha senso solamente con valori delle passività nominali. Ad esempio potrebbe non avere alcuna spiegazione immunizzare un'obbligazione che cresce in base all'andamento del livello dei prezzi usando un *asset* nominale come un *bond*.

La gestione del rischio di tasso di interesse è più complicata di quanto possa apparire semplice nella teoria. Come precedentemente affermato le istituzioni finanziarie devono identificare correttamente il sottostante processo stocastico dei cambiamenti nei tassi di interesse. Di maggiore rilevanza, le istituzioni hanno una grandissima quantità di *asset* e passività, molte con complessi schemi di rimborso, alcune che prevedono pagamento di interessi altre con forme diverse, altre con *maturity* non specificate, ad esempio domanda e offerta di depositi. La *duration* di tali strumenti non è facilmente calcolabile.

[75] Frederick Macaulay, "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*,*" *National Bureau of Economic Research, Inc, 1938*

[76] G. O. Bierwag, G. C. Kaufman, and A. Toevs, *eds., Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization (Greenwich, CT: JAI Press, 1983).*

Conclusione

In questo studio è stato analizzato è approfondito il concetto di *duration*. Partendo dallo studio effettuato da Macaulay, ad oggi quello più largamente apprezzato ed utilizzato, si è passati all'evoluzione che questo concetto ha avuto nel tempo, per comprendere meglio le potenzialità e allo stesso tempo i limiti, importanti, ai quali ogni *portfolio manager* dovrebbe prestare attenzione. È stata effettuata una rilevante analisi della valutazione dei titoli obbligazionari, con metodologie di *pricing* differenti, evidenziandone limiti e offrendo soluzioni alle problematiche legate alla modellizzazione di fenomeni reali. La portata dello studio del concetto di durata media finanziaria, intesa da Macaulay, è elevatissima, abbiamo visto in questo lavoro come uno studio del 1856 abbia importanti applicazioni nella comprensione e valutazione di strumenti finanziari "moderni" frutto della più recente ingegneria finanziaria, si veda titoli strutturati, o come mostrato prodotti strutturati creati con le cartolarizzazioni, e oltre a questi ultimi tale concetto è fondamentale nella gestione di portafoglio, basti pensare alle strategie di copertura attraverso strumenti derivati quali i *futures*, dove la *duration* riveste un ruolo importante, e molti altri ancora. Si è definita la *duration* effettiva, utilizzata per convenzione nei mercati finanziari per valutare i *bond* strutturati. L'analisi dei *mortgage backed securities* ha permesso di delineare come nei *mortgage pools* attraverso varie *tranches* si possa allocare il rischio di tasso di interesse mediante la comprensione delle *duration* effettiva delle *tranches,* componenti i *pools*. Infine si sono descritte diverse tecniche di gestione di portafogli obbligazionari, con un focus sull'immunizzazione, strategia passiva di gestione del portafoglio distinta rispetto alla gestione attiva. Nella parte conclusiva ci si è soffermati sulla gestione del portafoglio, richiamando spesso l'*holding period* dell'investitore, intendendo con questo l'orizzonte temporale di investimento dell'investitore, è importante precisare come attraverso le tecniche sopra analizzate sia non trascurabile tenere ben distinti il concetto di *holding period* dell'investitore con il concetto di *evaluation period*, è probabile che nella gestione di portafoglio di un'istituzione finanziaria i manager abbiano valutazioni periodiche, mensili, ma queste non devono essere fonte di valutazione dell'andamento della gestione perché le strategie sopra descritte saranno costruite sulla base dell'*holding period* dell'investitore e non dei vari, ricorrenti *evaluation periods*. Tale distinzione riveste un ruolo cruciale nell'utilizzo della *duration* nel *bond portfolio management*.

Riferimenti bibliografici

Bodie, Kane and Marcus, Investments tenth edition, McGraw-Hill education.

Pier Luigi Fabrizi, Economia del mercato mobiliare, sesta edizione, Egea.

Franco Capparelli, Economia del mercato mobiliare, McGraw-Hill.

Miles Livingston and Jhon Caks, *A* “ Duration “ Fallacy, *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 1 (Mar., 1977), Wiley for the American Finance Association.

John C. Hull, Opzioni, futures e altri derivati, nona edizione, edizione italiana a cura di Emilio Barone, Pearson.

Macaulay, F. (1938*),* "The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856", New York: National Bureau of Economic Research.

John Hicks, Value and Capital: an inquiry into some fundamental principles of economic theory*,* Clarendon Press, 1961.

Roman L. Weil “Macaulay's Duration: An Appreciation.” *Journal of Business*.

Simon Benninga, Financial Modeling, quarta edizione, MIT Press Ltd.

P. Borlot, U. Magnani, G. Olivieri, F. A. Rossi e M. Torrigiani*,* Matematica Finanziaria, seconda edizione, Monduzzi Editoriale.

Jonathan E. Ingersoll, Jr., Jeffrey Skelton and Roman L. Weil, Duration Fourty Years Later, The *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 4, Cambridge University.

G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, Its Development and Use in Bond Portfolio Management, *Financial Analysts Journal*, Vol. 39, No. 4 (Jul. – Aug., 1983), CFA Institute

Redington, “ Review of the Principle of Life-Office Valuation, “ *Journal of the Institute of Actuaries* 78 (1952).

Paul A. Samuelson, “ The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System, “ *American Economic Review*, March 1945.

G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, “ Immunizing Strategies for Funding Multiple Liabilities, “ *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, March 1983.

G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, “ Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk, “ *Journal of Bank Research*, Winter 1983.

G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, “ Single Factor Duration Models in a General Equilibrium Framework, “ *Journal of Finance*, May 1982.

G. O. Bierwag, George G. Kaufman and Alden Toevs, Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization (Greenwich, CT: JAI Press, 1983).

Cox, Ingersoll and Ross, " Duration and Measurement of Basis Risk , " *The Journal of Business*, Vol. 52, No. 1 (Jan., 1979)