DIPARTIMENTO DI IMPRESA E MANAGEMENT

Cattedra di Matematica Finanziaria

TITOLO

CONSIDERAZIONI SULLA VALUTAZIONE DELLE OPZIONI FINANZIARIE CON IL METODO MONTE CARLO

RELATORE

Prof. Nino Savelli.

CANDIDATO

Giovanni Ruggiero

Matr. 199751

ANNO ACCADEMICO: 2017/2018

Indice

Introduzione

Nella trattazione che segue, sarà effettuata un'analisi degli strumenti derivati classici e del loro utilizzo nei portafogli azionari e obbligazionari. Verrà svolta una breve descrizione delle caratteristiche dei principali contratti utilizzati sul mercato, dedicando particolare attenzione ai contratti di opzione: se ne analizzeranno le peculiarità e gli scopi con cui possono essere utilizzati dagli operatori di mercato.

Comprese nel dettaglio le dinamiche che caratterizzano questi strumenti, è possibile restringere ancora il campo oggetto di studio e concentrarsi sui contratti scritti su sottostanti azionari. In particolare, si lavorerà su portafogli calibrati sulla componente *equity*.

Si vedrà come è possibile determinare il prezzo a cui un'opzione dovrebbe essere scambiata sul mercato, in tal senso verranno individuate le variabili intrinseche che ne possono condizionare il valore. Grande importanza assumerà la possibilità per i gestori di utilizzare le opzioni a fini di copertura (*hedging*) per ottenere un portafoglio non rischioso.

Per un'esaustiva analisi, si farà riferimento alla letteratura finanziaria e agli studi che hanno reso possibile lo sviluppo di modelli di *pricing*. Si illustreranno i principali metodi in grado di determinare il valore degli strumenti partendo da ipotesi semplificatrici della realtà. A tal fine verranno trattati i modelli di *pricing* più utilizzati: Modello degli alberi binomiali, Cox-Ross-Rubinstein e la formula di Black-Scholes; di ognuno ne verranno analizzate le ipotesi e le relazioni con gli altri modelli. Ove possibile, ci si soffermerà sui processi matematico-finanziari che permettono la costruzione di una formula chiusa per poter determinare il prezzo di un'opzione dati gli input osservabili sul mercato.

Tra i vari modelli, particolare attenzione verrà dedicata al modello di Black-Scholes che, grazie alle sue ipotesi semplificatrici e allo stesso tempo piuttosto realistiche, rappresenta lo strumento più utilizzato dagli operatori di mercato. Verranno descritte nel dettaglio le varie ipotesi (vero punto di forza del modello), e, con procedimento induttivo, si noterà come ognuna permette di ottenere la formula chiusa di valutazione del contratto di opzione. Per garantire maggiore chiarezza, ma soprattutto per dare una rappresentazione più realistica e vicina alla realtà, verrà effettuato in questo caso un esempio pratico in cui verrà prezzata un'opzione scritta sul titolo Ferrari quotato nella Borsa italiana. La formula di BS sarà implementata su un foglio di lavoro Excel utilizzando input empirici rilevati sul mercato. In questo modo sarà possibile dimostrare l'accuratezza e l'applicabilità dei concetti teorici ottenendone un riscontro concreto.

Il contributo più importante, sarà dato dall'ultimo capitolo, nel quale verrà affrontato e sviluppato un reale problema di *pricing* utilizzando sia la Formula di Black-Scholes sia il metodo Monte Carlo.

Verranno ripresi gli input di mercato presi in considerazione per il *pricing* della put su Excel con Black-Scholes. In prima istanza saranno simulate 10.000 traiettorie di prezzo dell'azione Ferrari su un orizzonte temporale di 10 anni; il punto di partenza delle simulazioni sarà il valore del prezzo rilevato sul mercato in t=0. I cammini di prezzo saranno descritti da un processo di moto browniano geometrico. In questo modo sarà possibile prevedere il prezzo futuro del titolo azionario sfruttando le tecniche di estrazione casuale di numeri random e di simulazione di traiettorie, tipiche dell'ambiente di lavoro di "R".

Dopo aver simulato i vari cammini, e ottenuto 10.000 possibili valori del prezzo dell'azione tra 10 anni, sarà possibile calcolarne la media ed individuare il prezzo atteso. A questo punto sarà banale stimare il *payoff* dell'opzione a scadenza sfruttando i principi teorici analizzati nei capitoli precedenti. Si ricorrerà poi ai metodi di calcolo delle differenze finite e alle simulazioni di Monte-Carlo per stimare il prezzo di scambio in t=0 del contratto di opzione scritto sulle suddette azioni Ferrari.

Verranno inoltre effettuate delle analisi di sensitivity, in modo da capire come il valore dell'opzione cambia al variare degli input sul mercato. Seguendo questo approccio, sarà possibile notare come le dinamiche e le relazioni spiegate da un punto di vista teorico possano trovare riscontro pratico nei risultati ottenuti dall'implementazione dei modelli.

Al termine della trattazione verranno poi confrontati i prezzi ottenuti dall'utilizzo di diverse strategie di calcolo, individuandone le analogie e giustificandone le differenze.

Capitolo 1 – Opzioni e gestione di portafoglio

1.1 Premessa: Nozione di contratto derivato

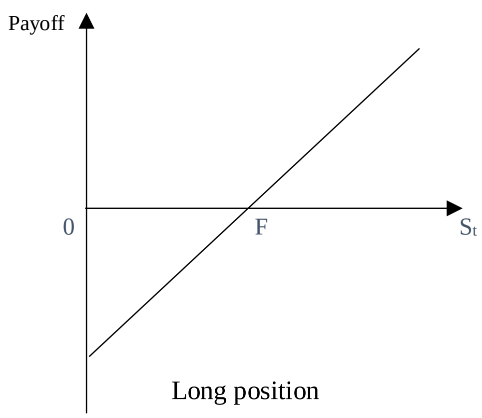
Un derivato è un contratto bilaterale il cui payoff dipende dal valore assunto da un sottostante (*underlying*). Esistono derivati su variabili di ogni tipo: sulle materie prime, sui beni e persino sulla quantità di neve caduta in una determinata zona; principale attenzione verrà dedicata ai derivati scritti su attività di tipo finanziario. Il sottostante finanziario può avere varia natura: tassi di interesse (*swap, forward rate agreement, interest rate futures*), valute (*currency futures, currency swap*), rischio di credito (*credit dafault swap, credit risk option, quality swap*), titoli obbligazionari, azionari (*futures, forward, opzioni*) o anche altri derivati. I mercati in cui vengono scambiati questi contratti sono OTC (*over the counter*) ossia mercati alternativi alle borse, creati da istituzioni finanziarie o da professionisti tramite reti telematiche, spesso non prevedono alcuna regolamentazione, e si basano su quello che è definito *"gentlemen agreement"*. I contratti derivati possono avere una scadenza prestabilita in cui le parti possono esercitare i propri diritti, oppure, in casi più complessi, il contratto può essere chiuso in una data precedente la scadenza. Utilizzando $Y(t)$ per indicare il payoff del derivato al momento in cui viene chiuso, avremo che $Y(t) = f[S(t)]$ in cui $S(t)$ è il valore del sottostante al momento della chiusura del contratto (t) che, a seconda dei casi può coincidere o meno con la data di scadenza. Nella misura in cui si modifica il valore dell'attività sottostante, si modifica anche il valore dello strumento derivato: questo legame è l'aspetto che caratterizza tutti gli strumenti derivati.

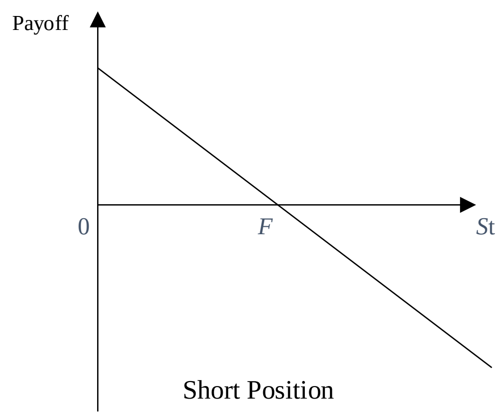
1.2 – Tipologie di contratti derivati

Sul mercato si possono trovare tante differenti tipologie di strumenti derivati: si pensi ai prodotti esotici che vengono costruiti per far fronte alle variegate esigenze di alcuni operatori di mercato e che non presentano alcun elemento di standardizzazione. In linea generale, focalizzandosi sui principali contratti derivati che possono avere come sottostante il prezzo dei titoli di mercato, è possibile far riferimento a 3 categorie: *forward, futures e opzioni*.

1.2.1 - Forward

Un contratto *forward* (contratto a termine) consiste nell'accordo stipulato in t_0 tra due controparti (acquirente e venditore), che si impegnano a scambiarsi un'attività sottostante in una data futura prestabilita T_k ad un prezzo a termine F deciso in t_0. Questo tipo di contratto consente agli operatori di fissare in t_0 il prezzo del titolo per una transazione che avverrà in una data successiva T_k proteggendosi dal rischio di una variazione sfavorevole del prezzo spot futuro. I contratti *forward* non sono soggetti ad alcuna forma di standardizzazione, sono definiti *tailor-made*, ovvero permettono ai contraenti di definire in piena libertà tutti gli elementi contrattuali in base alle proprie esigenze. In linea generica, chi apre una *short position* su un *forward* si impegna a vendere il sottostante in T_k al prezzo F, viceversa, chi apre una *long position* si impegna ad acquistare il sottostante in T_k al prezzo F.
Il *pay-off* a scadenza di un *forward* sarà pari a [S_t-F] per chi ha una *long position* e a [F-S_t] per chi ha una *short position.*





Il prezzo dei *forward* è solitamente determinato partendo dall'ipotesi di mercato efficiente e assenza di arbitraggio per cui deve valere:

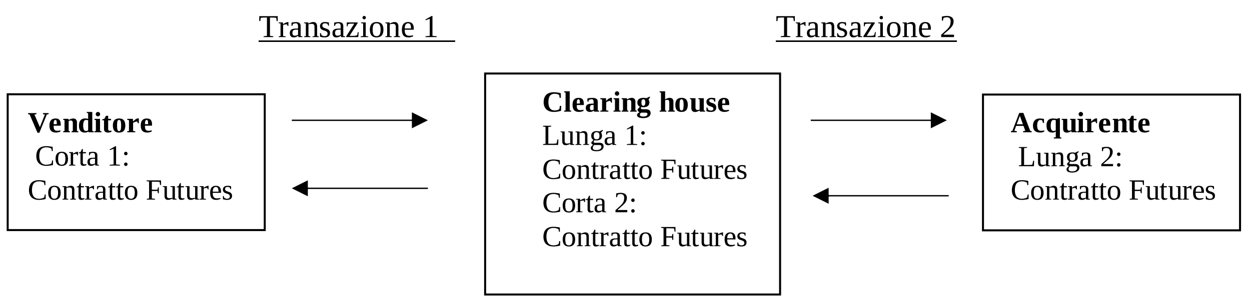
$$F = S(1 + r_f)^{(T_k - t_0)}$$

F: valore del contratto Forward,
S: prezzo spot del sottostante,
r_f: tasso *risk-free* sul mercato che può essere utilizzato per effettuare un'operazione di *cash&carry,*
T_k-t_0: vita residua del contratto.

1.2.2 - Futures

Il contratto *futures* ha la stessa struttura del *forward*, l'elemento distintivo è il mercato di negoziazione. I *futures* sono scambiati su mercati ufficiali che prevedono una standardizzazione degli strumenti in essi

negoziati, il *futures* può sostanzialmente essere visto come un *forward* standardizzato e quotato su un mercato regolamentato in cui le controparti non possono definire liberamente le caratteristiche del contratto, ma sono
obbligate a stipulare accordi con clausole predefinite. L'impossibilità dei *futures* di soddisfare perfettamente le esigenze degli operatori, è bilanciata da un'alta liquidità dei mercati e da una notevole riduzione del rischio di insolvenza. Questo tipo di contratto prevede una negoziazione mediata dall'intervento di una *clearing house* che garantisce la solvibilità delle parti richiedendo ad ognuna il versamento dei margini di garanzia. Il valore del contratto per l'operatore che ha aperto una posizione in *futures*, varia al variare del prezzo di mercato, si dice che il prezzo è *marked to market daily*. Per effetto di tale procedura, sono previsti pagamenti quotidiani tra acquirente e venditore in funzioni delle oscillazioni di prezzo di mercato (procedura del *marking to market*). Anche per la determinazione del prezzo dei *futures* si utilizza l'ipotesi di assenza di arbitraggio. Nonostante i diversi profili di rischio rispetto al *forward*, la teoria ha dimostrato che un *forward* e un *futures* con identiche condizioni contrattuali, dovrebbero presentare lo stesso prezzo F.
Di seguito vengono rappresentati, con l'ausilio di uno schema, le transazioni necessarie per la corretta stipulazione di un contratto futures, e le operazioni a questa successive.



1.2.3 – Opzioni

Un altro strumento molto utilizzato sul mercato a termine è il contratto di opzione. Un'opzione, a fronte del pagamento di un premio, conferisce al possessore (*holder*) il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere una certa quantità di attività sottostante ad un prezzo prefissato (prezzo di esercizio o prezzo *strike*) in una data futura stabilita. Sostanzialmente le controparti si scambiano un diritto, il cui prezzo è pari al premio pagato dall'acquirente/detentore al venditore/emittente. Un'opzione americana conferisce al possessore la facoltà di esercitare il diritto in qualsiasi momento prima della scadenza o al massimo alla scadenza. Un'opzione europea può essere esercitata solo alla scadenza.

1.3 - Opzioni call e opzioni put

Un'opzione *call* europea conferisce all'acquirente il diritto di acquistare un'attività sottostante (ad esempio un'azione) che quota St, in una data futura prefissata T ad un prezzo di esercizio K, dietro pagamento di un premio *call* C(t) al venditore. Un'opzione *put* conferisce all'acquirente il diritto di vendere al venditore dell'opzione (obbligato ad acquistare) il titolo sottostante con valore S_t ad un prezzo predeterminato K, a fronte del pagamento al venditore di un premio *put* P(t).

1.3.1 – Posizione long/short sulle opzioni.

Ogni operatore di mercato può decidere di prendere posizione nei contratti di opzioni a seconda di quelle che sono le sue previsioni sull' andamento dei prezzi di mercato, in modo da sfruttare questo strumento per implementare la propria strategia e ottenere profitti. A seconda della posizione aperta sulle opzioni, ogni operazione avrà un diverso profilo di rischio-rendimento e ogni investitore seguirà una strategia che può essere ribassista o rialzista.

Long position su un'opzione Call. L'operatore che apre una *long position* su un'opzione *call,* acquista il diritto ad acquistare il sottostante in una data futura T_k al prezzo *strike* K. Il *payoff* di una *long call* a scadenza che indica il suo valore sarà pari a:

$$payoff = \begin{cases} S(T_k) - K & se\ S(T_k) > K \\ 0 & se\ S(T_k) \leq K \end{cases}$$

In caso di premio liquidato a pronti, il profitto o la perdita netta che avrà l'operatore quando il contratto viene chiuso è pari a:

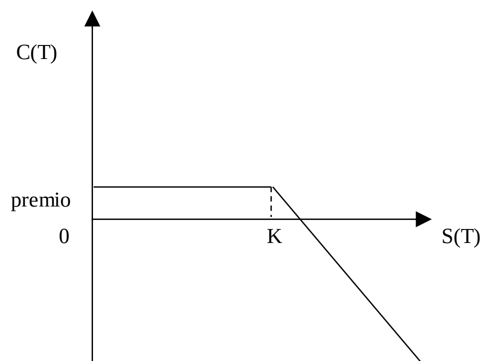
$$S(T_k) - K - C(1 + rt)$$

in cui *t* è il tempo intercorrente tra la liquidazione del premio e la chiusura del contratto e *r* è il tasso di rendimento di tale periodo. Si noti come il *payoff* non può assumere valori negativi, questo è spiegabile dalla natura non lineare del contratto e dalla stretta relazione tra valore del contratto e valore del sottostante: quando $S(T_k) \leq K$, l'operatore non esercita ed avrà al minimo un *payoff* nullo. L'operatore con una posizione *long* su una *call* ha una strategia rialzista, tanto più il prezzo del sottostante $(S(Tk))$ aumenta tanto maggiore sarà il suo profitto che quindi non ha limiti di crescita. La perdita massima, che l'investitore affronterebbe qualora decidesse di non esercitare, è invece limitata al premio pagato per acquistare l'opzione. In sintesi un operatore con una posizione *long* su una *call* può avere un rendimento teoricamente illimitato in quanto il prezzo del sottostante (ipotizziamo un'azione) può crescere all'infinito, mentre un'esposizione al rischio di perdita limitata al valore del premio pagato.

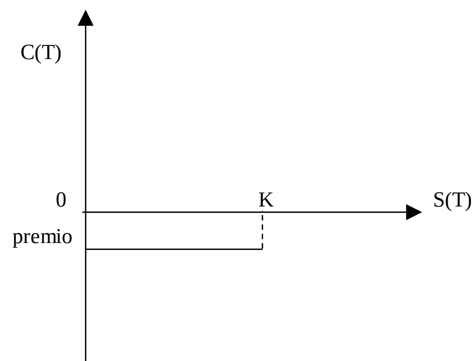
Short position su un'opzione Call. L'operatore che apre una *short position* su una *call,* si obbliga a vendere il sottostante al prezzo *strike* K se, in T_k l'acquirente della *call* decide di esercitare il diritto all'acquisto. L'operatore *short* ha una posizione speculare alla controparte pertanto il *payoff* a scadenza è pari a:

$$Payoff = \begin{cases} -[S(T_k) - K] & se\ S(T_k) > K \\ C(t) & se\ S(T_k) \leq K \end{cases}$$

L'operatore con posizione *short* ha un rendimento massimo pari al premio incassato qualora la controparte non eserciti, mentre si espone al rischio di una perdita teoricamente illimitata. La strategia alla base di una *short call* cambia a seconda che si parli di una *short call naked* o di una *short call covered,* la differenza tra le due è che nella prima l'operatore vende l'opzione allo scoperto in quanto non possiede l'attività sottostante in portafoglio, mentre nel secondo caso possiede l'*underlying* dell'opzione. Nel caso di una *short call naked* l'operatore ha una strategia da ribassista puro in quanto vuole speculare su un ribasso dei prezzi, mirando ad incassare il premio, indipendentemente da quanto il prezzo diminuisca. Nel caso di una *short call covered,* l'operatore ha intenzione di coprire il proprio portafoglio da una diminuzione del prezzo del titolo posseduto al massimo pari al premio incassato: se prevede una diminuzione del prezzo non superiore del valore del premio incassato, vende una *call* in modo da compensare la perdita di valore subita dal titolo in portafoglio con il premio incassato. In questo caso la strategia è definita da ribassista moderato in quanto colui che vende una *short call covered* prevede un ribasso dei prezzi contenuto, e al massimo pari al premio a cui vende l'opzione.



Short Call



Long Call

Long position su un'opzione Put. L'operatore che apre una *long position* su una *put* acquista il diritto, ma non l'obbligo, di vendere l'attività sottostante al venditore, al prezzo *strike* K, alla data T_k in cui decide di esercitare. Il *payoff* a scadenza di chi ha una posizione long su una *put* è dato da:

$$P(T) = \begin{cases} K - S(T_k) & se\ S(T_k) < K \\ 0 & se\ S(T_k) \geq K \end{cases}$$

L'operatore in questo caso ha una stratega ribassista; egli avrà un profitto nel caso in cui il mercato vada al ribasso. Tale profitto può al massimo essere pari al prezzo *strike* K in un quanto la quotazione di un titolo non può essere minore di zero. Allo stesso tempo si espone al rischio di una perdita non maggiore del premio: nel caso in cui in T_k risulti $S(T_k) \geq K$ egli non avrà convenienza ad esercitare e subirà una perdita pari al premio pagato. Specularmente per quanto detto per l'opzione *call*, in caso di premio pagato a pronti, il profitto o la perdita netta del *long put* è pari a:

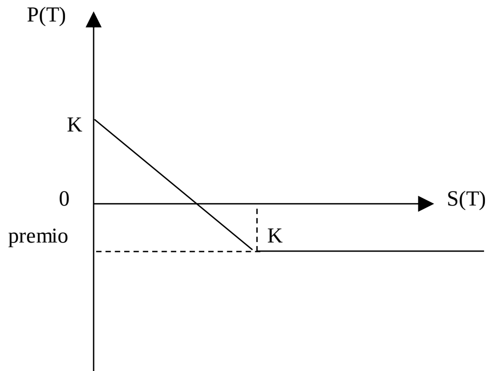
$$K - S(T_k) - P(1 + rt)$$

Anche la *put* ha quindi un *payoff* non lineare.

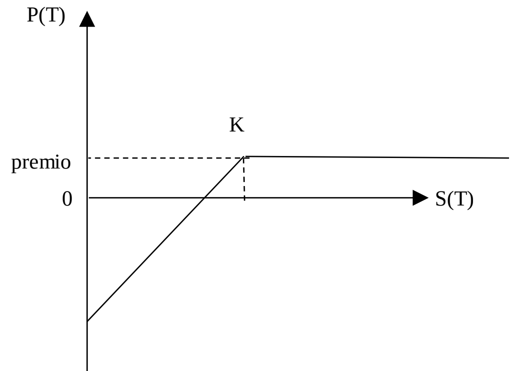
Short Position su un'opzione Put. L'operatore che prende una *short position* su un'opzione *put*, riceve un premio P(T) per obbligarsi ad acquistare l'attività sottostante al prezzo *strike* K, qualora la controparte decida di esercitare il proprio diritto in T_k. Il *payoff* a scadenza in questo caso risulta:

$$Payoff = \begin{cases} -[K - S(T_k)] & se\ S(T_k) < K \\ P(T) & se\ S(T_k) \geq K \end{cases}$$

La strategia di chi apre una *short position* su un'opzione *put* risulta essere quella di un rialzista. L'operatore avrà un profitto pari al premio incassato P(T) nel caso in cui a scadenza risulti $S(T_k) \geq K$ e la controparte non ha convenienza ad esercitare. Al contrario incorrerà in una perdita al massimo pari al prezzo *strike* K qualora il prezzo del sottostante scenda a zero.



Long Put



Short Put

Di seguito viene schematizzato quanto detto riguardo le diverse posizioni che possono essere aperte sulle opzioni, in modo da poterne notare facilmente le principali differenze. La tabella permette il confronto del profilo rischio-rendimento di ognuna delle possibili posizioni su opzione tramite il confronto dei *payoff*, associa inoltre ad ogni operazione, la strategia di mercato implementabile.

Tipologia	Perdita Max	Profitto Max	Strategia
Long call	Premio C(T)	$K - S(T_k)$ −C(T)	Rialzista
Short Call Naked	$K - S(T_k) + C(T)$	Premio C(T)	Ribassista puro
Short Call Covered	$[K - S(T_k) + C(T)]_{\text{mancato guadagno}}$	Premio C(T)	Ribassista moderato
Long Put	Premio P(T)	$K - S(T_k)$ −P(T)	Ribassista
Short Put	$K - S(T_k)$ +P(T)	Premio P(T)	Rialzista

1.4 – Valore delle opzioni

Il prezzo delle opzioni in t ≤ T si può esprimere come valore di un Zcb stocastico, avente come valore di rimborso il prezzo dell'opzione a scadenza C(T)-P(T) esprimibile dalle relazioni precedentemente descritte, e quindi aleatorio in t.

$$\begin{cases} C(t) = V[t; C(T)] \\ P(t) = V[t; P(T)] \end{cases}$$

Per quanto esposto precedentemente e per la possibilità dell'acquirente dell'opzione di non esercitarla qualora il *payoff* risultasse negativo, C(T) e P(T) assumeranno sempre valori non negativi, di conseguenza anche il loro valore attualizzato in t_0 C(t) e P(t) risulterà sempre positivo per poter rispettare il principio di non arbitraggio.

1.4.1 – Opzioni in the money, at the money, out of the money.

Il premio di un contratto di opzione, come si vedrà a breve, non è funzione solamente del *payoff* finale. Nonostante il prezzo dell'opzione non possa mai assumere valori negativi, le opzioni negoziate possono essere suddivise in tre categorie in base al valore (intrinseco) assunto in un determinato istante di tempo. Tale valore può essere visto come il *payoff* che l'opzione assicurerebbe se venisse esercitata in quell'istante e che quindi influenza il valore totale del contratto. In base alla relazione prezzo *strike*-valore del sottostante in un generico istante di valutazione, le opzioni possono essere classificate in: opzione *in the money, at the money, out of the money*. Per quanto riguarda le opzioni call, la relazione utilizzata per la classificazione è la seguente: $S(T_k) - K$.

Se il suddetto valore è positivo e quindi risulta $S(T_k) > K$ si dice che l'opzione scade *in the money*, se invece risultasse $S(T_k) = K$ è definita *at the money* oppure *out of the money* qualora $S(T_k) < K$.

Lo stesso ragionamento viene svolto per le opzioni put ma facendo riferimento alla relazione: $K - S(T)$.

Si dice che una put scade *in the money* se $K > S(T)$, *at the money* se $K = S(T)$, *out of the money* se $K - S(T)$. Si evince facilmente che le opzioni *in the money* hanno sempre valore positivo e solitamente conviene esercitarle, mentre quelle *out of the money* hanno sempre valore negativo e conviene acquistarle solamente in alcuni casi, in dipendenza da altri fattori che si vedranno di seguito.

1.4.2 – Valutazioni delle opzioni.

Il valore dell'opzione, oltre che dal prezzo *strike* e dalla quotazione dell'attività sottostante, dipende da una pluralità di fattori. Le principali variabili che influenzano il valore di un'opzione sono principalmente 5:

1. il prezzo a pronti dell'attività sottostante ($S(T_k)$);
2. tasso di interesse di mercato;
3. il prezzo di esercizio dell'azione (K);
4. la data di esercizio (scadenza nel caso di opzione europea);
5. volatilità del prezzo dell'attività sottostante.

Iniziando l'analisi dalle due variabili principali che influenzano il valore di un'opzione: (1) prezzo dell'attività sottostante, (2) tasso di interesse di mercato; è necessario far riferimento alla relazione di parità *call-put*. Si ipotizzi di aprire una posizione *short* su una *call* europea e una posizione *long* su una *put* europea, le opzioni hanno stessa scadenza T, stesso *strike price* K, e stesso sottostante di valore $S(T_k)$. Data la relazione tra contratti di opzione e *forward*, la combinazione delle due operazioni assicurerà in T un *payoff* pari a quello che si avrebbe aprendo una posizione di acquisto a termine, con consegna in T al prezzo K. Riprendendo le definizioni di premio della *put* P(T) e premio della *call* C(T) precedentemente esposte[1], si avrà:

$$\underline{C(T) - P(T)} = \max\{S(T) - K, 0\} - \max\{K - S(T), 0\} = \underline{S(T) - K}$$

Riformulando la precedente relazioni nel rispetto:

- della legge del prezzo unico per cui si ha:

[1] V. *retro* § 1.3.1 – Posizione long/short sulle opzioni.

$$V[t; C(T) - P(T)] = V[t; S(T) - K],$$

-e l’ipotesi di linearità del prezzo, secondo cui:

$$V[t; C(T)] - V[t; P(T)] = V[t; S(T)] - V[t; K]$$

otteniamo che:

$$C(t) - P(t) = V[t; S(T)] - v(t,T)K. \qquad (1.1)$$

A seconda del tipo di sottostante e del fatto che paghi o meno dividendi si possono avere sviluppi differenti della (1.1), nel primo caso il prezzo *strike* sarà semplicemente pari al prezzo *spot* del sottostante capitalizzato per il periodo di durata del contratto al tasso spot previsto; nel secondo caso il valore dell’opzione risente della presenza dei pagamenti intermedi previsti. Ad ogni modo, al di là delle complicazioni di eventuali flussi intermedi, la (1.1) indica in linea generica la relazione tra il premio dell’opzione, il prezzo del sottostante, e il tasso di mercato da cui dipende il valore di $v(t,T)$. La variabile $v(t,T)$ indica il fattore di sconto di mercato in t per importi che saranno esigibili in T (data di scadenza del contratto).
Per capire come gli altri fattori possano influenzare il valore di un’opzione, occorre notare che il premio è composto da due elementi principali: valore intrinseco(VI) e valore temporale(VT). Può pertanto essere scomposto come segue a seconda che si parli di un’opzione *call* oppure di una *put*:

$$\begin{cases} C(T) = VI + VT \\ P(T) = VI + VT \end{cases}$$

Il valore intrinseco di un’opzione è il valore minimo che si può ottenere dall’opzione esercitandola, nel caso di un’opzione americana, tale valore è liquidabile in ogni momento. La differenza principale tra le due tipologie di opzioni, per quanto riguarda il valore intrinseco, è che nella americana si fa riferimento al prezzo spot del sottostante in quanto la valutazione è istantanea e il payoff lo si può ottenere al momento della valutazione. Nelle opzioni europee, il prezzo *strike* K viene confrontato con il prezzo a termine del sottostante in quanto il valore intrinseco può eventualmente essere ottenuto solamente a scadenza.

-Opzioni Americane $\begin{cases} VI_{call} = Max[S - S(T_k); 0] \\ VI_{put} = Max[K - S(T_k); 0] \end{cases}$ -Opzioni Europee $\begin{cases} VI_{call} = Max\left[\frac{S(t)-K}{1+rt}; 0\right] \\ VI_{put} = Max\left[\frac{K-S(t)}{1+rt}; 0\right] \end{cases}$.

Finora ci siamo concentrati sulle prime tre variabili: tasso di mercato, prezzo del sottostante e prezzo di esercizio, i quali condizionano il valore di un'opzione attraverso il valore intrinseco; per capire ora il ruolo assunto dalla (4) scadenza e dalla (5) volatilità nella determinazione del premio delle opzioni, bisogna concentrarsi sull' altra componente: VT. Il valore temporale di un contratto di opzione è il valore associato alla probabilità che il valore intrinseco possa aumentare nell' arco di tempo fra la data di acquisto (o valutazione) e quella di scadenza. All'aumentare della volatilità del prezzo, aumenta la possibilità che il prezzo del sottostante cambi e possa salire o scendere sopra o sotto il prezzo *strike* K. Nel caso di una *long call* la volatilità avrà sempre un'accezione positiva: in caso di alta volatilità aumenta la probabilità che il prezzo del sottostante superi il prezzo *strike* incrementando il profitto del possessore che può teoricamente tendere all'infinito. È pur vero che un'alta volatilità aumenta anche le probabilità che il prezzo diventi inferiore del valore del sottostante e l'opzione scada *out of the money*, in questo caso però la perdita sarebbe limitata al solo premio pagato. È chiaro quindi che tanto più il prezzo del sottostante di una *call* è volatile tanto maggiore sarà il valore temporale dell'opzione. Per quanto riguarda la *put*, si può ragionare in modo speculare alla *call:* sapendo che un maggiore ribasso dei prezzi, dovuto ad una maggiore volatilità, incrementa il valore; mentre un rialzo invece porta ad una perdita massima pari al premio. Altra componente rilevante del valore temporale è la vita residua: tanto più è lontana la scadenza del contratto, tanto più aumentano le probabilità che il prezzo del sottostante superi il prezzo *strike* e quindi il valore temporale aumenta.

Il caso in cui il valore temporale assume fondamentale importanza si ha quando l'opzione è *out of the money*[2]. Riprendendo quanto spiegato precedentemente, si può dire che sostanzialmente un'opzione scade out of the money quando, indipendentemente dalla tipologia, non risulta conveniente l'esercizio per l'investitore e quindi il valore intrinseco è pari a 0. È chiaro a questo punto che se $VI = 0$, il premio pagato per l'opzione, che sappiamo essere pari a $premio = VI + VT$, dipenderà solamente dal valore temporale VT. Ciò vuol dire che anche se un'opzione alla data di valutazione garantisce un *payoff* negativo, può essere scambiata ad un prezzo positivo qualora gli investitori ritengono che prima della scadenza l'azione possa scadere *in the money*, ovvero siano disposti ad acquistare il suo valore temporale.

Esempio:

Si ipotizzi di avere un'opzione call su un'azione. $\begin{cases} K = 50€ \\ T = 3\ mesi \\ S(T_0) = 40€ \\ C(t_o) = 3€ \end{cases}$

Date le caratteristiche del contratto e le condizioni di mercato, risulta essere: $VI = S(T_k) - K = 40 - 50 = 0$

VI sappiamo che non può essere negativo ma al massimo pari a 0. In questo caso il valore del premio sarà

[2] V. *retro* § 1.4.1 – Opzioni in the money - at the money – out f the money.

dato dal solo valore temporale, pertanto: $C(t_0) = VT = 3€$. Si noti inoltre che qualora le cose dovessero rimanere immutate, in $t = 1.5\, mesi$, che corrisponde a metà della vita del contratto, si avrà che $C(t_{1.5}) = \frac{VT}{2} = \frac{3}{2}$. Il valore temporale diminuisce all'avvicinarsi della scadenza.

Altro caso da evidenziare per quanto riguarda la rilevanza del valore temporale nella valutazione delle azioni, è quello delle opzioni americane. L'opzione americana può essere esercitata in qualunque momento, spesso capita che nonostante l'esercizio dell'opzione in un determinato momento garantisca un *payoff* positivo e quindi un profitto, il possessore potrebbe trovare conveniente vendere l'opzione sul mercato piuttosto che esercitarla. Il premio, tiene conto della possibilità che il valore intrinseco aumenti prima della scadenza, pertanto il mercato valuta l'opzione più di quanto sia il suo valore intrinseco in quel momento, è cioè disposto ad acquistare il valore temporale. Il possessore dell'azione, in questo caso può ottenere un profitto maggiore ($premio = VI + VT$) vendendo l'azione sul mercato piuttosto che chiudere il contratto incassando il solo valore intrinseco.

Esempio.

Si ipotizzi di avere una *call* americana ì su un'azione: $\begin{cases} K = 100€ \\ S(T_x) = 110€ \\ C(t_x) = 11€ \end{cases}$

In questo caso risulta: $VI = S(T_x) - K = 110€ - 100€ = 10€$ Il contraente facoltizzato se decidesse di esercitare avrebbe un profitto totale pari al valore intrinseco e quindi pari a 10€. Se invece decidesse di vendere l'azione sul mercato, potrebbe incassare il premio che equivale al valore intrinseco maggiorato del valore temporale, ottenendo in questo modo un profitto pari a $C(t_x) = 11€ > VI = 10€$[3]. (L'esercizio converrebbe all'investitore solamente se la società emittente l'azione sottostante avesse annunciato la distribuzione di un dividendo > 1€).

La rilevanza del valore temporale nella valutazione dei contratti di opzione americani, assume un ruolo molto importante nello spiegare perché una *call* europea ha lo stesso prezzo di mercato di una *call* americana. È vero che le call americane garantiscono il diritto di esercitare in qualsiasi momento, per quanto detto prima però, l'esercizio non risulta conveniente prima della scadenza, pertanto questo diritto non si traduce in un maggior prezzo e i due contratti avranno la stessa quotazione a parità di altre condizioni.

Riassumendo, il valore di un'opzione *out of the money* aumenta:

- quanto minore è la differenza tra prezzo a termine del sottostante e prezzo *strike* (è più facile che l'opzione diventi *in the money*)
- quanto maggiore è la vita residua dell'opzione

[3] Si dice in gergo che un'opzione americana "vale più da viva che da morta". Il senso è che a causa dell'effetto del valore temporale e della possibilità di variazione del prezzo del sottostante, conviene vendere l'opzione sul mercato (mantendola "viva") e monetizzando il valore temporale piuttosto che farla "morire" esercitandola in una data ancora lontana dalla scadenza del contratto ottenendo solamente il valore intrinseco. Ovviamente se l'opzione dovesse risultare deep in the money quanto detto potrebbe non risultare vero.

- quanto maggiore è la volatilità del prezzo dell'attività sottostante (maggiori le probabilità di superare la soglia dello *strike price*).

1.5 – Strategie di portafoglio con i derivati.

I contratti derivati, possono essere tenuti in portafoglio con finalità differenti a seconda di quella che è la strategia del gestore. In base all'utilizzo che viene fatto dei derivati, si possono individuare le seguenti categorie di gestori:

- Arbitraggisti ➡ sfruttano l'inefficienza di mercato data dal disallineamento fra posizione a pronti e a termine per ottenere profitti. (Gestione attiva di portafoglio);

- Speculatori ➡ sono costantemente esposti al rischio di mercato, hanno solitamente open position sui derivati in portafoglio cercando di ottenere profitti dalla variazione dei prezzi di mercato. (Gestione attiva di portafoglio;

- Hedgers ➡ coprono i portafogli contro il rischio tasso o rischio mercato ricercando un rendimento minimo *ex post* pari al rendimento *ex ante* (TIR). (Gestione Passiva di portafoglio);

1.5.1 – Arbitraggio.

La relazione che lega il prezzo *forward*, F_0, e il prezzo *spot*, S_0, di un bene di investimento che, in un mercato di perfetta efficienza, non offre redditi è: $F_0 = S_0 e^{rT}$. Nel caso in cui il prezzo di mercato del *forward* non coincide con quello teorico estrapolato dal criterio di non arbitraggio, esiste la possibilità per i gestori di effettuare operazioni di arbitraggio che offrono rendimenti certi senza rischio.
Si possono effettuare operazioni di arbitraggio, quando vale una delle seguenti ipotesi di mercato:

a) $F_0 > S_0 e^{rT}$: Gli arbitraggisti comprano il titolo al prezzo *spot* e lo rivendono *forward (cash&carry).*
b) $F_0 < S_0 e^{rT}$: Gli arbitraggisti vendono allo scoperto il titolo al prezzo *spot* e lo riacquistano al *forward* (*reverse cash&carry*).

Di seguito vengono forniti due esempi di come i gestori possono sfruttare le opportunità di arbitraggio:

- Esempio di *cash&carry.*

Il prezzo *spot* di un titolo che non paga dividendi è pari a: $S_0 = 40\$$. Il prezzo dello stesso titolo sul mercato dei *forwards* con scadenza T= 3 mesi risulta: $F_0 = 43\$$. Il tasso di interesse a tre mesi (r) è pari al 5% annuo.

Con questi prezzi di mercato risulterebbe $43\$ > 40\$e^{(0.05*3/12)}$ è quindi valida l'ipotesi a) $F_0 > S_0e^{rT}$.

Un operatore ha la possibilità di indebitarsi per un ammontare pari a $S_0 = 40\$$ oggi al tasso r=5% per tre mesi; comprare il titolo al prezzo spot ($S_0 = 40\$$) e contestualmente venderlo a termine al prezzo forward a tre mesi ($F_0 = 43\$$). A scadenza, in T=3 mesi, l'operatore consegnerà l'azione incassando $F_0 = 43\$$ ed estinguerà il debito contratto pagando $40\$e^{(0.05*3/12)} = 40.50\$$. Al termine dell'operazione il gestore, sfruttando il disallineamento tra prezzo *spot* e prezzo *forward* in T_0, risulterà in grado di ottenere un profitto senza rischio pari a $P = 43\$ - 40{,}5\$ = 2{,}50\$$.

- Esempio di *reverse cash&carry*.

Il prezzo *spot* di un titolo che non paga dividendi è pari a $S_0 = 40\$$. Il prezzo dello stesso titolo sul mercato dei *forwards* con scadenza T=3mesi risulta: $F_0 = 39\$$. Il tasso di interesse a tre mesi (r) è pari al 5% annuo.

Date queste condizioni di mercato risulterebbe $39\$ < 40\$e^{(0.05*3/12)}$ è quindi valida l'ipotesi b) $F_0 > S_0e^{rT}$.

L'operatore ha la possibilità di vendere il titolo allo scoperto in T_0, investendo il ricavato ($S_0 = 40\$$) al tasso di mercato r=5%, e contestualmente acquistare il titolo venduto allo scoperto sul mercato dei *forwards*.

A scadenza, in T=3mesi, l'operatore otterrà il rimborso dell'investimento fatto in T_0 che sarà pari al montante di S_0 pari a: $40\$e^{\left(0.05*\frac{3}{12}\right)} = 40.50\$$. Contestualmente, pagherà il prezzo *forward* $F_0 = 39\$$ per acquistare e restituire il titolo venduto allo scoperto. L'operazione nel complesso assicurerà un profitto senza rischio pari a: $P = 40.5\$ - 39\$ = 1.50\$$.

È chiaro come entrambe le operazioni, in modo perfettamente speculare, riescano a sfruttare situazioni di inefficienza del mercato, garantendo all'operatore un profitto senza rischio utilizzando gli strumenti derivati e le negoziazioni sui mercati a termine.

1.5.2 – Speculazione

Un operatore che utilizza contratti derivati per realizzare operazioni speculative, cerca di ottenere un profitto tramite *open position trading*, effettuando previsioni sull'andamento del mercato. Con operazioni speculative, a differenza del precedente caso di arbitraggio, l'operatore si espone al rischio di perdita, qualora l'andamento del mercato non dovesse rispettare le previsioni effettuate. Le attività di speculazione sul mercato a termine effettuate utilizzando i *forward* e i *futures*, permettono di sfruttare l'effetto leva: la sottoscrizione di questi contratti non richiede agli operatori alcun esborso monetario in T_0, questi pertanto, non dovendo risultare solvibili alla data di sottoscrizione, possono conseguire guadagni, ma anche perdite, di entità notevolmente superiore alla loro disponibilità di capitale. L'attività di speculazione tramite *forward*, consiste nel fissare in T_0 il prezzo del contratto che verrà pagato in una data futura, ottenendo un profitto se a scadenza il prezzo del titolo è maggiore del prezzo *forward* stabilito; ciò permetterà allo speculatore di acquistare il titolo al prezzo F e rivenderlo al prezzo di mercato più alto.

L'attività di speculazione tramite *futures,* sfrutta la procedura di liquidazione del *marking to market* che prevede pagamenti quotidiani tra le parti in base all'andamento del prezzo di mercato del contratto. Lo speculatore che ha una strategia rialzista, ad esempio, potrebbe acquistare il contratto, in modo da ricevere pagamenti positivi, e quindi ottenere profitti, qualora il mercato vada al rialzo rispettando le previsioni effettuate. Ottenendo una perdita nel caso contrario.

Per attività speculative più complesse sono utilizzate le opzioni. Un gestore può aprire posizioni su diversi contratti di opzioni in base a quelle che sono le sue previsioni sull'andamento del mercato. Ciò gli permette di ottenere profitti qualora le sue previsioni si verifichino, allo stesso tempo potrebbe contrarre perdite nel caso contrario. Un operatore che vuole assumere una posizione rialzista su un titolo azionario, ad esempio, può acquistare un'opzione *call* sul titolo. In questo modo l'investitore può ottenere un profitto potenzialmente illimitato se le sue previsioni risultino corrette e il mercato vada al rialzo, potrebbe però incorrere in una perdita qualora i prezzi diminuiscano. Riprendendo le diverse posizioni che possono essere aperte sui contratti di opzione, e il caratteristico profilo rischio rendimento di ognuna[4], è possibile individuare numerose strategie di speculazione sull'andamento dei prezzi dei titoli aprendo posizioni sui contratti di opzioni, in base a quelle che sono le esigenze di ogni gestore. Tramite l'apertura di posizioni sulle opzioni, gli investitori possono speculare, oltre che sull'andamento del prezzo di un titolo, anche sul rialzo o il ribasso della volatilità del medesimo prezzo. Come già visto, il premio dell'opzione è direttamente dipendente dal suo valore temporale e quindi dalla volatilità del titolo sottostante. È chiaro che qualora la volatilità del sottostante dovesse aumentare, aumenterebbe anche il valore temporale dell'opzione e quindi il valore del premio, ciò permetterebbe al suo possessore di rivenderla sul mercato ad un prezzo maggiore rispetto quello pagato per acquistarla, realizzando quindi un profitto. Lo stesso ragionamento, risulta ugualmente valido nel caso opposto di una diminuzione della volatilità del sottostante, che quindi comporterebbe una perdita per il gestore. A differenza del caso di speculazione sui prezzi, l'utilizzo di un'opzione per speculare sulla volatilità di un'attività, rappresenta sempre una strategia rialzista, a prescindere dell'esposizione nei confronti del prezzo del sottostante[5]. Sappiamo che il valore temporale di un'opzione, qualsiasi essa sia, è direttamente proporzionale alla volatilità del prezzo del sottostante; chi possiede un'opzione in portafoglio, per speculare tramite attività di trading sulle opzioni, ottiene un profitto solo se aumenta il prezzo dell'opzione sul mercato. Dato che il premio, a parità di altre condizioni, aumenta all'aumentare della volatilità, la posizione dello speculatore sul prezzo delle opzioni sarà sempre rialzista perché, indipendentemente dall'andamento del prezzo del sottostante, egli otterrà un profitto quando, a seguito di un aumento della volatilità, potrà vendere l'opzione ad un prezzo maggiore di quello d'acquisto.

[4] Vd. *retro* § 1.3.1 – Posizone long, posizione short sulle opzioni.

[5] Per capire questa affermazione, si ripensi alla relazione tra il premio di un'opzione, valore temporale e volatilità dei prezzi, vd. *retro* § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni.

1.5.3 – Copertura.

L'*hedger* (il gestore di portafoglio che effettua attività di copertura), cerca di rimuovere parzialmente o integralmente un rischio di natura finanziaria. L'attività di *hedging* può essere effettuate sia su portafogli azionari che obbligazionari, ma con modalità differenti. L'attività di *hedging* su portafogli obbligazionari ha scopi simili all'attività di immunizzazione di portafoglio, ma mentre l'*hedging* sfrutta l'apertura di posizioni in derivati per poter legare il rendimento del portafoglio ad un rendimento *benchmark* (rendimento ex post= rendimento ex ante), il portafoglio immunizzato ottiene lo stesso scopo allineando l'*holding period* dei titoli alla d*uration* del portafoglio. Il gestore che vuole immunizzare il portafoglio, non manterrà i titoli in portafoglio fino a scadenza, ma li smobilizza in una data T=Duration. In questo modo l'eventuale effetto prezzo negativo, dovuto ad una variazione positiva dei tassi, verrà compensato dall'opposto effetto rendimento dovuto alla stessa variazione, e il gestore potrà ottenere un rendimento minimo certo pur in presenza del rischio di variazioni inattese dei tassi. Il portafoglio immunizzato può essere considerato una *proxy* di uno zero coupon bond tenuto fino a scadenza. Il teorema dell'immunizzazione, comunque, è sottoposto a tre ipotesi restrittive:

1) Shift paralleli della curva dei rendimenti.
2) Curva dei tassi piatta.
3) Assenza dei costi di transazione sulle operazioni necessarie a mantenere la *duration* del portafoglio in linea con *l'holding period*.

Spesso dunque, i gestori preferiscono ricorrere agli strumenti derivati per poter coprire il portafoglio obbligazionario da variazioni improvvise dei tassi, raggiungendo il rendimento *benchmark* prefissato.
Per coprire un portafoglio obbligazionario o azionario, l'*hedger* può ricorrere ai contratti *forward, futures* oppure ai contratti di opzioni (*cap, floor, put, call*). Come vedremo, gli strumenti a cui si ricorre per la copertura di entrambe le tipologie di portafoglio sono gli stessi, al variare della natura del portafoglio però, variano le modalità con cui questi vengono utilizzati.

Copertura tramite futures. Un gestore che ha titoli obbligazionari in portafoglio, può coprirsi da una variazione in aumento dei tassi di mercato, e quindi da una diminuzione del prezzo dei titoli, tramite la vendita di un contratto *futures* avente come sottostante il paniere di euro bund[6]. Se il prezzo dei titoli in portafoglio dovesse scendere, il gestore avrebbe una perdita in conto capitale che dovrebbe essere compensata dai flussi derivanti dalla posizione aperta in *futures*. Nel momento in cui diminuisce il prezzo del titolo sottostante del *futures*, il gestore che ha una posizione *short*, riceve il pagamento dall'investitore *long* secondo quanto previsto dalla procedura del *marking to market*, il pagamento ricevuto ha la stessa entità della variazione negativa del prezzo del titolo, potrà pertanto coprire la perdita in conto capitale subita,

[6] Dal paniere di euro bund che rappresenta il paniere di titoli consegnabili, verrà scelto a scadenza il cheapest to deliver, che è il titolo che permette di massimizzare l'implied repo rate.

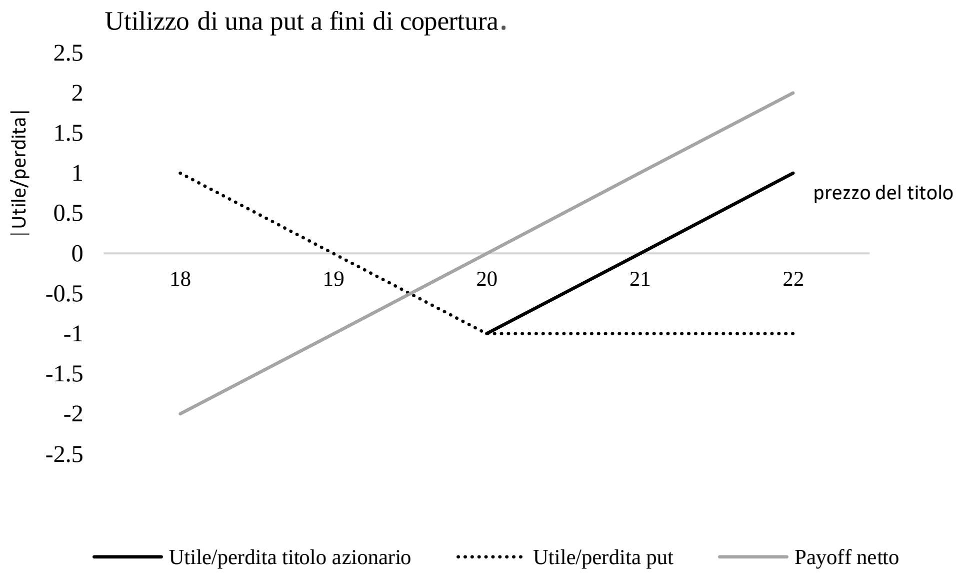
lasciando immutato il rendimento del portafoglio. D'altro canto, se i prezzi dovessero aumentare, il gestore non avrà alcun guadagno: il profitto in conto capitale generato da un aumento dei prezzi, viene annullato dalla perdita generata dalla posizione in *futures* (il gestore dovrà rendere all'investitore *long* del *futures* un pagamento di ammontare pari alla variazione positiva del prezzo).
Per quanto riguarda un portafoglio azionario la copertura tramite *futures* segue la stessa procedura valida per un portafoglio obbligazionario, la differenza sostanziale è nel sottostante: mentre il gestore di un portafoglio obbligazionario apre una posizione short su contratti *futures* avente come sottostante l'Euro bund futures con duration pari al portafoglio da coprire, il gestore di un portafoglio azionario apre una posizione *short* su un futures avente come sottostante un indice di mercato che abbia un *beta* (indice di rischio sistematico) pari al *beta* del portafoglio azionario. Aprendo una posizione *futures* su un indice di mercato con stesso *beta* del portafoglio, il gestore lega l'andamento del *futures* in modo perfettamente speculare a quello del portafoglio in modo da avere flussi di stessa entità ma con segno opposto, data qualsiasi variazione dei tassi sul mercato.
Si noti come tramite un'operazione di *hedging* di questo tipo, l'operatore ha sì la possibilità di coprirsi da variazioni impreviste dei tassi che potrebbero comportare delle perdite in portafoglio; allo stesso tempo però, rinuncia ad ottenere rendimenti aggiuntivi dovuti ad un aumento dei prezzi dei titoli in portafoglio. Il rendimento del portafoglio viene in questo modo ancorato ad un valore benchmark da cui, in caso di copertura perfetta, non si discosta né in positivo né in negativo (Gestione passiva di portafoglio).

Copertura tramite opzioni. Per quanto riguarda i portafogli obbligazionari, l'operatore può utilizzare le opzioni nel caso in cui possegga titoli a cedola variabile per coprirsi dalla variazione del pagamento cedolare che ha diritto a ricevere. Nel caso in cui il pagamento cedolare sia direttamente proporzionale ad un tasso variabile (*floater*) il gestore corre il rischio di un pagamento troppo basso qualora il tasso raggiunga valori estremamente piccoli. Per ottenere un pagamento e quindi un rendimento minimo, il gestore può acquistare un *floor*: il *floor* può essere visto come una long put che ha come sottostante il tasso da cui dipende il pagamento cedolare; il *long floor* acquista il diritto a vendere un tasso variabile dietro pagamento di un tasso *strike*, che sarà pari al tasso che permette al gestore di ottenere il pagamento minimo desiderato. Qualora il tasso cedolare risulti inferiore al tasso *strike*, il gestore può esercitare il *floor* in modo da ottenere al minimo il pagamento corrispondente al tasso strike fissando quindi un rendimento di portafoglio minimo.
Nel caso in cui il pagamento cedolare sia inversamente dipendente da un tasso di mercato variabile (reverse floater) con cedola pari ad un tasso fisso meno il variabile (TF-TV), il gestore deve coprirsi dal rischio di rialzo eccessivo dei tassi che comporterebbe una cedola negativa. Questa esigenza di copertura può essere soddisfatta tramite l'acquisto di un *cap* che è una *long call* sul tasso variabile che fissa un valore massimo al tasso variabile coprendo l'operatore dal rischio di cedola negativa.
Per quanto riguarda operazioni di copertura dei portafogli azionari utilizzando i contratti di opzione, il caso più classico è quello di un soggetto che ha la necessità di coprire una posizione in titoli azionari dal rischio di ribasso dei prezzi. Il gestore può in questo caso acquistare un'opzione *put*, garantendosi il diritto di

vendere il titolo ad un prezzo prefissato anche se il suo valore di mercato dovesse diminuire; in questo modo può assicurarsi un prezzo minimo di smobilizzo del titolo e quindi un rendimento di portafoglio minimo nel periodo tra istante iniziale e scadenza dell'opzione.

Si fornisce un esempio di seguito:

Si ipotizzi che un soggetto ha in portafoglio un titolo azionario con prezzo corrente $S_0 = 20$. Per proteggersi dal rischio di ribasso del prezzo, il gestore può acquistare un'opzione *put* europea con scadenza $T = 3\ mesi$ e prezzo di esercizio $K = 20$, pagando un premio $P(t) = 1$. A fronte del pagamento di un premio, l'operatore si garantisce un prezzo di smobilizzo non inferiore a 20, potendo beneficiare illimitatamente di un rialzo del prezzo del titolo.



Come si può notare dall'esempio, e in modo più immediato dalla figura riportata sopra, l'acquisto di una *put* per operazioni di copertura, consente di coprirsi da un ribasso dei prezzi, ma allo stesso tempo non impedisce di ottenere profitti in caso di un loro rialzo. Comprando una *put*, il gestore pur cercando di limitare le perdite in caso di ribasso e ottenere un rendimento minimo, non si preclude la possibilità di un rendimento maggiore in caso di rialzo (in questo modo si costruisce "sinteticamente" una *call*). Le operazioni di copertura tramite *forward* in cui viene fissato il prezzo a termine o tramite *futures*, descritte precedentemente, consentono di eliminare del tutto il rischio di perdita in caso di ribasso, impedendo allo stesso tempo al gestore di trarre profitto da un eventuale rialzo dei prezzi. Il gestore di un portafoglio azionario allora, sceglierà di coprirsi utilizzando un contratto di opzione piuttosto che un *forward* o un *futures*, in base a quanto sia forte il timore di ribasso: qualora tema un ribasso moderato del prezzo dei titoli, dal quale vuole coprirsi volendo però confermare un'esposizione rialzista, l'operatore opterà per l'acquisto di una *put* con finalità di copertura, avendo un profilo complessivo rischio rendimento come quello presentato in figura e simile a quello di una *call*. Le operazioni di copertura di portafogli azionari possono essere anche molto più articolate e complesse rispetto quelle descritte sopra, se si considera il *trade-off* tra premio pagato ed esposizione al rischio, il gestore potrebbe essere disposto a pagare più o meno per l'acquisto di un'opzione in base a quelle che sono le sue previsioni e a quella che ritiene la sua esposizione al rischio. Ad esempio, nel caso precedente, qualora l'operatore avesse ritenuto basso il rischio di ribasso dei prezzi avrebbe potuto decidere di acquistare un'opzione con un prezzo *strike* inferiore, pagando un premio inferiore, in quanto l'opzione avrebbe garantito una protezione minore. L'operatore può quindi decidere di acquistare un'opzione con prezzo *strike* più alto, che garantisce elevata protezione dal ribasso dei prezzi, pagando però un premio più elevato, o un'opzione con prezzo *strike* minore come descritto in precedenza. Sostanzialmente un gestore sarà disposto a pagare un premio tanto più elevato, quanto maggiore sarà la copertura che l'opzione garantisce. Il valore di un'opzione in questo contesto dipende anche dal livello di copertura garantito.

Per ridurre il costo di copertura complessivo, gli operatori possono costruire operazioni ancora più complesse; come ad esempio lo *zero-cost-collar*. In un'operazione di questo tipo, l'*hedgers* compra un'opzione *put out of the money*, per coprirsi dal rischio di ribasso e contestualmente vende un'opzione *call out of the money,* minimizzando il costo di copertura, ma rinunciando ad un rendimento maggiore in caso di mercato al rialzo del titolo azionario sottostante.

Le opzioni permettono dunque di avere una maggiore o minore esposizione al rischio in base a quelle che sono le esigenze del gestore di un portafoglio azionario, il quale sarà disposto a pagare un premio tanto maggiore quanto più saranno alte le probabilità di incorrere in perdite a seguito di un ribasso dei prezzi, in quanto maggiore sarà l'esigenza di coprirsi. Tali probabilità come si vedrà dipendono anche dalla volatilità dei prezzi, che anche in questo contesto risulta una variabile fondamentale nella determinazione del prezzo delle opzioni.

Capitolo 2 – Pricing delle opzioni.

Fino ad inizi anni settanta, nonostante fosse ormai opinione diffusa che l'incertezza avesse un ruolo determinante nelle dinamiche di mercato, in particolar modo per fissare il prezzo degli strumenti scambiati; si era soliti trattare gli elementi stocastici delle attività in modo inadeguato e incoerente. Gli operatori, in mancanza di una strumentazione adeguata e formale per il trattamento dell'incertezza e la previsione degli eventi futuri attesi, assegnavano un valore alle opzioni in base a quello che era il *"sentiment"* di mercato e al prezzo che avrebbero attribuito gli altri investitori allo stesso strumento finanziario. Il prezzo era sostanzialmente fissato intuitivamente, non considerando quelli che erano i ragionamenti stessi del pensiero economico: l'assenza di arbitraggio e l'attività di *hedger*. Negli anni settanta, hanno avuto un notevole impulso gli studi in ambito di *"option pricing theory"*, le principali teorie sviluppate durante quello che è stato definito il "decennio di rifondazione", riguardano tre macro-ambiti: la struttura del capitale d'impresa, le ipotesi di mercato efficiente, e il Capital Asset Price Model. Con lo sviluppo di nuove teorie basate su principi matematici e strumenti di calcolo probabilistici, si è avuto quello che alcuni autori definiscono "salto quantico"[7], si è cioè creata una strettissima correlazione tra il formalismo del calcolo delle probabilità e i principi delle teorie finanziarie, sino a diventare oggi un unicum. Il calcolo probabilistico è diventato uno strumento imprescindibile nel pricing degli strumenti finanziari e nella previsione dell'andamento dei prezzi[8], che nelle procedure di pricing delle opzioni rappresentano l'unica variabile da tenere in considerazione.

Lo sviluppo del modello di *Black-Scholes*, che prevede la determinazione del prezzo delle opzioni secondo un metodo razionale, ha dato un notevole impulso per la definizione di altri modelli di valutazione razionali e basati sui principi matematici. Si hanno oggi diversi modelli a cui ricorrere per poter stabilire il prezzo di un'opzione sul mercato, Black-Scholes rimane comunque quello più utilizzato e il più attendibile a causa di alcune ipotesi più realistiche e significative, come si vedrà di seguito.

2.1 – Modelli di pricing.

Per poter prezzare le opzioni che vengono scambiate sul mercato, bisogna utilizzare alcune ipotesi restrittive riguardo il funzionamento del mercato:

1. I mercati sono completi: le variazioni dell'attività sottostante possono essere diversificate da titoli

[7] Vd. per altri: G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*

[8] Si sviluppa in questo contesto l'ipotesi secondo cui la dinamica di prezzo dei titoli, sono caratterizzate da proprietà di martingala, per cui il prezzo futuro dei titoli, dato un certo andamento degli stessi nel tempo, dipende dal valore assunto alla data di valutazione.

trattati in borsa.

2. Sono possibili attività di copertura perfetta: il valore dell'opzione viene stabilito costruendo un portafoglio dinamico[9] di titoli che garantisca gli stessi *payoff* dell'opzione; c'è perfetta correlazione tra l'opzione e il portafoglio equivalente che ne replica l'andamento
3. Vale il principio di non arbitraggio e quindi la legge del prezzo unico[10]. In particolare, portafogli con stesso rischio garantiscono lo stesso rendimento.
4. In coerenza con il principio di non arbitraggio sono consentite vendite allo scoperto *(short selling):* ogni investitore ha la possibilità di vendere una qualsiasi unità di sottostante anche se non posseduta al momento della stipulazione del contratto.
5. Si suppone che il tasso di interesse privo di rischio (r_f) e la volatilità (σ) siano funzioni deterministiche del tempo durante la vita dell'opzione.

Alcune di queste ipotesi sono pure astrazioni teoriche, chiaramente avulse dalla realtà, assumono però un ruolo essenziale per sviluppare con rigore e coerenza il ragionamento dal punto di vista concettuale. Tali ipotesi creano un ambiente idoneo allo sviluppo di diversi modelli per poter determinare il prezzo delle opzioni sul mercato, ogni procedura presenta comunque ulteriori assunzioni di base e caratteristiche peculiari. In ogni caso, caratteristica comune a tutti i modelli, è che tutti hanno come unica grandezza variabile la volatilità del prezzo di mercato del sottostante.
La principale caratteristica che distingue i tre modelli di *pricing*, è la discretizzazione del tempo. Il modello di Black-Scholes si basa su un'ipotesi di tempo continuo, tiene conto delle variazioni di prezzo su intervalli di tempo infinitesimi, il modello sviluppato da Cox-Ross-Rubinstein, e quello degli alberi binomiali, invece, vengono sviluppati nel discreto, utilizzando procedure di discretizzazione delle grandezze, e procedendo per step temporali.

2.1.1 – Modello degli alberi binomiali.

Il più semplice modello di *pricing* utilizzato per determinare il prezzo dei contratti di opzione è rappresentato da quello dei *binomial tree* (alberi binomiali). Questo approccio possiede particolari semplicità di calcolo dovuto all'impiego di semplici tecniche di approssimazione numerica e strumenti matematici elementari; nonostante ciò è considerato in grado di fornire risultati che spesso risultano sufficientemente accurati anche in casi caratterizzati da strutture piuttosto complesse. Come già detto, si parte dall'ipotesi di successione discreta di date. La peculiarità delle tecniche di approssimazione ad albero consiste nel considerare come futuri prezzi possibili del sottostante un insieme discreto di valori: uno per ogni data.

[9] Un portafoglio viene definito dinamico quando viene modificato con continuità, e le sue componenti sono aggiustate costantemente al variare dei prezzi di mercato.
[10] Due attività che generano gli stessi flussi futuri devono avere lo stesso valore corrente.

Per quel che riguarda il caso più semplice e generale, si fa ricorso al modello uniperiodale che viene sviluppato su un solo istante di tempo: vengono fissati due intervalli elementari, al termine dei quali il prezzo del sottostante $S_{(t)}$ potrà assumere solamente due valori; un livello di prezzo ipotizza un mercato al rialzo, l'altro si verificherebbe in uno scenario di ribasso[11]. Il valore assunto dalla variabile $S_{(t)}$ in ciascuno dei due casi è predeterminato, non è però noto quello che sarà l'andamento del mercato, a seconda del quale il valore del sottostante tenderà verso un'ipotesi di prezzo piuttosto che l'altra.

Esempio di Modello Binomiale a uno stadio-uniperiodale.

Il prezzo iniziale di un'azione è di $S_{(0)} = 20\$$ si fissa l'intervallo di tempo discreto di $T = 3\ mesi$ al termine del quale si ipotizza $S_{(T)} = 22\$$ in caso di mercato al rialzo e $S_{(T)} = 18\$$ in caso di ribasso. Si supponga di voler valutare un'opzione call[12] scritta sul suddetto sottostante con prezzo di esercizio K=21$ e scadenza T. Al termine dell'intervallo considerato l'opzione avrà un valore diverso a seconda di quello che sarà l'andamento del mercato e quindi l'ipotesi che si verificherà:

$$\begin{cases} C_{(T)} = 22\$ - 21\$ = 1\$ & se\ S_{(t)} = 22\$ \\ C_{(t)} = 18\$ - 21\$ = 0\$. & se\ S_{(t)} = 18\$ \end{cases}$$

Si consideri ora un portafoglio composto da una posizione lunga su una quantità Q di azioni e da una *short position* su una call. Bisogna determinare il valore di Q che renda il portafoglio privo di rischio tramite attività di copertura. Il valore del portafoglio è pari a:

$$V_p = \begin{cases} (22Q - 1)\$ & se\ \ S_{(T)} = 22\$,\ \ C_{(T)} = 1\$ \\ 18Q\$ & se\ S_{(T)} = 18\$,\ \ C_{(T)} = 1\$ \end{cases}.$$

Affinché ci sia una perfetta attività di copertura e il portafoglio sia privo di rischio; il suo valore V_p deve rimanere invariato indipendentemente da quello che sarà l'andamento del mercato e quindi da quale sarà l'ipotesi verificata. Il valore di Q che permette di coprire il portafoglio dal rischio di variazione dei prezzi di mercato, è quello che permette di avere lo stesso valore di portafoglio V_p in entrambe le ipotesi.

Ovvero: $22Q - 1 = 180Q$ da cui risulta $Q = 0.25$.

Il portafoglio privo di rischio sarà composto da: $\begin{cases} 1.\quad una\ long\ position\text{: } 0.25\ azioni; \\ 2.\quad una\ short\ position\text{: } 1\ opzione \end{cases}.$

Il valore del portafoglio privo di rischio risulterà quindi pari a:

[11] Si procede con un'analisi di scenario, ragionando in termini di *worst case* e *best case*.

[12] Per le caratteristiche di questo tipo di opzioni si rimanda al capitolo 1.3 – Opzioni call/ Opzioni put, con particolare riferimento all'apertura di una posizione long su una call.

$$V_p = \begin{cases} (22(0.25)-1)\$ = 4.5\$ & se\ S_{(T)} = 22\$,\ C_{(T)} = 1\$ \\ 18(0.25)\$ = 4.5\$ & se\ S_{(T)} = 18\$,\ C_{(T)} = 1\$ \end{cases}$$

Si noti come alla fine del trimestre, indipendentemente dall'andamento del prezzo del sottostante, il portafoglio avrà sempre un valore $V_t = 4.5\$$. Riprendendo le ipotesi tipiche del modello, in particolare quella di assenza di arbitraggio[13], avremo che il rendimento del portafoglio, sarà uguale a quello dei titoli *risk-free*. Ipotizzando che il tasso *risk-free* di mercato sia pari a $r_{risk-free} = 12\%$, avremmo che il valore del portafoglio oggi sarà pari al valore attualizzato di $V_t = 4.5\$$ ovvero: $4.5e^{-0.12(0.25)} = 4.367\$$, questo valore rappresenta il valore in $T = 0$ del portafoglio di cui sopra, formato dall'azione di valore $S_{(0)} = 20\$$ e dalla short position sulla call di valore $C_{(0)}$. Ed è proprio il valore $C_{(0)}$ dell'opzione quello che deve essere definito per poter prezzare lo strumento. Secondo quanto detto si ha che:

$$20(0.5) - C_{(0)} = 4.367\$$$

Risolvendo si che il valore dell'opzione call su quella azione di valore $S_{(0)} = 20\$$ sarà pari a:

$$C_{(0)} = 0.633\$.$$

Partendo dall'ipotesi di struttura binomiale dell'incertezza del prezzo del titolo azionario, e sfruttando quella che vedremo sarà definita argomentazione di hedging, che permette di trasformare un portafoglio rischioso in uno privo di rischio, si è potuto definire il prezzo dell'opzione secondo quello che è il suo valore per l'investitore, il quale inserendola nel portafoglio, riesce a coprirsi da variazioni dei prezzi sul mercato garantendo un rendimento minimo (benchmark) alla sua gestione[14]. Il gestore sarà pertanto disposto a pagare un prezzo massimo per l'opzione che non risulti maggiore del valore che può trarre dall'attività di copertura del portafoglio.

Ritornando all'esempio è chiaro che il prezzo dell'opzione in $T = 0$ potrà essere solamente pari a quello ottenuto, nel rispetto dell'ipotesi di non arbitraggio infatti non sarebbe possibile avere un prezzo maggiore o minore di questo.

- Se $C_{(0)} > 0.633\$$ avremmo che $20(0.5) - C_{(0)} > 4.367\$$ e quindi il portafoglio renderebbe più del tasso privo di rischio, non rispettando l'ipotesi di non arbitraggio.
- Se $C_{(0)} < 0.633\$$ avremmo che. $20(0.5) - C_{(0)} < 4.367\$$ e quindi tramite una vendita allo scoperto sarebbe possibile per il gestore prendere in prestito ad un tasso minore del tasso *risk-free*,

[13] V. ipotesi n.3 *retro* § 2.1- Modelli di pricing Ripresa in questo contesto per definire l'uguaglianza tra il rendimento di un portafoglio privo di rischio come quello in esame e il tasso di rendimento di un titolo *risk-free*.

[14] Si riprende in questa sede l'attività di copertura del portafoglio azionario utilizzando le opzioni, discussa nel capitolo 1 v. *retro* § paragrafo 1.5.3 – Copertura tramite opzioni. Il concetto già trattato viene qui ripreso per il pricing delle opzioni: il valore che il mercato attribuisce alle opzioni è strettamente correlato dal valore che queste creano per i gestori nel momento in cui consentono loro di utilizzarle per fini di hedging, il valore di un'opzione è fortemente legato alla sua capacità di copertura.

anche questa seconda conclusione risulta totalmente priva di senso.

Generalizzando l'esempio precedente si può ottenere una formula valida per il pricing delle opzioni a livello generale, per cui in ipotesi di non arbitraggio, è possibile determinare il prezzo dei derivati dato il prezzo dell'attività sottostante, ricorrendo all'*hedged portfolio.* Tale formula può essere ottenuta tramite una serie di generalizzazioni e di passaggi matematici rispetto all'esempio effettuato, che permettono di ottenere come risultato finale una relazione di questo tipo:

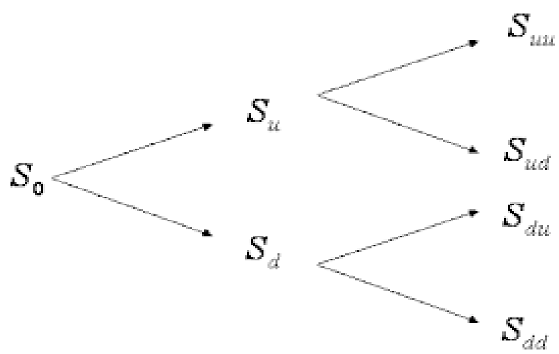
$$C_{(0)} = e^{-rT}\left[pC_{(T)u} + (1-p)C_{(T)d}\right].$$

In cui p indica la probabilità neutrale al rischio di un rialzo dei prezzi e di conseguenza $C_{(T)u}$ indica il valore dell'opzione in caso di rialzo; in modo del tutto speculare $(1-p)$ indica la probabilità di un ribasso e $C_{(T)d}$ il valore dell'opzione in quest'ultimo caso. La suddetta relazione indica che in linea generale, il prezzo dell'opzione in $T=0$ può essere ottenuto attualizzando al tasso privo di rischio (pari a quello dell*'hedged portfolio*) il valore atteso in $T=0$ dei *payoff* previsti alla scadenza, si noti però che tale valore è calcolato utilizzando le probabilità neutrali al rischio (p e (1-p)). Si noti inoltre che in realtà $C_{(T)}$ non è altro che una funzione del prezzo sottostante che può quindi essere riscritta come $C_{(T)} = f(S)$ indipendentemente da quello che è il cammino della quotazione del sottostante. Diventa ancora più immediato a questo punto notare come unica variabile aleatoria da cui dipende il prezzo dell'opzione è il valore S del sottostante. Inoltre, si noti l'importanza ricoperta nella formula di pricing dalla possibilità di costruire l'*hedged portfolio*, da cui poter ricavare il tasso di attualizzazione. Si inizia a capire, come già detto, che il valore di un'opzione è fortemente influenzato dalla sua "capacità di copertura"[15], e dalla possibilità di ottenere un portafoglio privo di rischio aprendo posizioni diverse sui contratti di opzione. Il modello a uno stadio appena descritto è utile per capire il ragionamento alla base dell'approccio dei *binomial tree*, ma è difficilmente applicabile nella realtà: l'ipotesi che il prezzo finale dell'attività sottostante possa assumere solamente due valori futuri è eccessivamente semplicistica e quasi per nulla realistica.

Per seguire un approccio con una logica molto simile a quella sopra descritta, ma con alcune estensioni che permettono di rimanere più fedeli alla realtà, si deve far riferimento al "modello binomiale multiperiodale". Rimanendo nel discreto, il modello multiperiodale prevede la suddivisione dell'intervallo di tempo che intercorre tra la data di valutazione e la data di scadenza dell'opzione in un numero elevatissimo di sottoperiodi di uguale lunghezza in modo da avere una maggiore ampiezza e attendibilità dei calcoli. Il prezzo relativo ad ogni sottoperiodo, è pari al prodotto del premio conosciuto all'inizio del periodo e il relativo fattore di diminuzione o di crescita a seconda di quelle che sono le aspettative riguardo l'andamento

[15] Il ruolo fondamentale dell'*hedged portfolio* nella valutazione delle opzioni, e di come la possibilità di copertura che offrono influenza il loro valore, sarà meglio illustrata nel seguito della trattazione quando verrà descritto il modello di Black-Scholes v. *infra* § 2.2 – Black-Scholes.

del mercato nel periodo considerato[16]. È come se ogni sottoperiodo venisse definito da un modello ad uno stadio, e il multiperiodale fosse l'unione di più modelli uniperiodali, si ottiene in questo modo un albero binomiale che descrive l'andamento del prezzo dell'opzione lungo l'intero periodo di tempo considerato diviso per gli andamenti sui singoli sottoperiodi in cui questo è diviso. Ogni ramo dell'albero binomiale rappresenta un possibile percorso e può rappresentare una previsione di prezzo verificabile con una più o meno intensa probabilità.



Esempio di albero binomiale ottenuto dividendo il periodo di interesse in due sottoperiodi, effettuando le relative ipotesi in caso di rialzo e di ribasso del mercato.

Volendo ottenere una formula generale valida in questo contesto si possono riprendere i concetti già espressi per ciò che riguarda il modello elementare, considerando questo caso come una semplice estensione del precedente. Sia "X" la variabile aleatoria che indica l'andamento stocastico del prezzo dell'attività sottostante l'opzione, "u" il fattore di crescita in caso di mercato al rialzo e "d" il fattore di diminuzione nel caso di mercato al ribasso possiamo scrivere che:

$$X = \begin{cases} 1, \; se \; S_t = uS_{t-1} & con\; probabilit\grave{a}\; q \\ 0, \; se \; S_t = dS_{t-1} & con\; probabilit\grave{a}\; 1-q \end{cases}$$

In base a quella che sarà l'ipotesi verificata (S_u, S_d per il primo periodo o S_{uu}, S_{ud}, S_{du}, S_{dd} per il secondo):

$$\begin{cases} u(uS_0) & con\; probbilit\grave{a}\; q^2 \\ u(dS_0) & con\; probabilit\grave{a}\; 2q(1-q) \\ d(dS_0) & con\; probabilit\grave{a}\; (1-q)^2 \end{cases}$$

Possiamo avere diversi payoff dell'opzione:

[16] Viene in questo caso riutilizzato il modello di ipotesi spiegato precedentemente per il modello uniperiodale in cui viene definita un'ipotesi di prezzo nel caso in cui il mercato vada al rialzo ed una per il caso di ribasso, questa operazione viene qui effettuata più volte, viene infatti definita un'ipotesi per entrambi i casi su ogni periodo considerato. La procedura può essere vista come la reiterazione di quella effettuata nel caso del modello a uno stadio.

$$\begin{cases} C_{(0)} & valore\ corrente \\ C_{(T)u},\ C_{(T)d} & valore\ a\ fine\ primo\ periodo \\ C_{(T)uu}, C_{(T)ud}, C_{(T)dd}, & valore\ a\ fine\ secondo\ periodo \end{cases}.$$

In modo simile a quanto fatto per i modelli ad uno stadio, possiamo ottenere una formula generale di valutazione indipendentemente dal numero di sottoperiodi in cui viene diviso l'intervallo di tempo preso in considerazione:

$$C_{(0)} = e^{-rT}\left[p^2 C_{(T)uu} + 2p(1-p)C_{(T)ud} + (1-p)^2 C_{(T)dd}\right].$$

Si possono notare le similitudini con la formula di pricing del modello a uno stadio; in questo caso però la valutazione dell'opzione avviene mediante una tecnica di programmazione dinamica con la quale è possibile percorre al ritroso l'albero binomiale, determinando il prezzo dell'opzione alla data di valutazione partendo dalle ipotesi effettuate riguardo il prezzo futuro del sottostante.

2.1.2 – Cox-Ross-Rubinstein.

Cox, Ross e Rubinstein proposero nel 1978 un modello estremamente semplificato per poter determinare il prezzo degli strumenti derivati scambiati sul mercato, nonostante l'estrema facilità dal punto di vista tecnico matematico, il modello è stato spesso utilizzato per la determinazione del prezzo di strumenti anche molto complessi. Gli studi portarono alla formazione di quello che ha preso il nome di "Modello Binomiale", caratteristica principale è data proprio dalla struttura di incertezza utilizzata per descrivere il processo stocastico del sottostante che, come si vedrà più avanti, è di tipo binomiale[17]. L'ambiente in cui si sviluppa il modello rispetta le ipotesi tipiche dei modelli di pricing[18], il CRR[19] è definito nel discreto, si basa cioè sull'assunto che il mercato sia aperto solo su una successione discreta di date, viene visto come l'equivalente nel discreto del più diffuso modello di Black-Scholes[20]. Unica fonte di incertezza risulta come usuale l'andamento del prezzo sottostante, mentre i tassi di interesse futuri sono considerati deterministici, pertanto il rischio di tasso diventa un effetto di secondo ordine rispetto al cammino del prezzo $S_{(t)}$, e può essere trascurato.

Il modello in esame riprende la struttura di incertezza binomiale[21], assegnando al prezzo del sottostante di fine periodo, un valore pari al valore assunto ad inizio periodo moltiplicato per un fattore di crescita o di diminuzione a seconda dell'andamento del mercato.

[17] Per ciò che concerne la struttura di incertezza binomiale, e ai metodi utilizzati per trattarla v. *retro* § 2.1.1 – Alberi binomiali, in cui sono stati definiti i casi generali di studio dell'andamento del prezzo di un titolo sottostante ad un contratto di opzione utilizzando l'approccio binomiale ripreso nuovamente dal CRR.
[18] V. *retro* § 2.1 – "Modelli di pricing"
[19] Tale abbreviazione viene utilizzata in riferimento al modello di Cox-Ross-Rubinstein.
[20] V. *infra* § 2.2 – Modello di Black-Scholes.
[21] V. *retro* § 2.1.1 – Modello degli alberi binomiali.

Alla base del modello, vi è la possibilità di costruire un portafoglio replicante il rendimento dell'opzione da prezzare, acquistando *asset* e aprendo posizioni su altre opzioni. Sostanzialmente si suppone che l'operatore che apre una posizione sull'opzione oggetto di valutazione, sia in grado di costruire un portafoglio sintetico che a scadenza assicuri un payoff pari a quello dell'opzione, indipendentemente dall'andamento del mercato. Nel caso specifico, Cox Ross e Rubinstein intendono per portafoglio replicante, un portafoglio formato da azioni e obbligazioni che sia calibrato in modo da assicurare un profilo rischio rendimento uguale a quello dell'opzione. Un portafoglio di questo tipo può essere rappresentato come segue:

$$\begin{cases} aS\Delta + mB = Y_a \\ bS\Delta + mB = Y_b \end{cases}$$

Nella rappresentazione precedente, a e b indicano l'andamento del mercato, S il prezzo dell'azione in portafoglio, m il fattore di capitalizzazione del capitale B investito in 0 e Y indica il valore dell'opzione nell'ipotesi di rialzo (a) e di ribasso (b).

Per calibrare il portafoglio in modo che possa essere considerato un portafoglio replicante, è necessario conoscere la quantità di azioni e obbligazioni che lo devono comporre, bisogna sostanzialmente risolvere il sistema precedente esplicitando "B" e "Δ":

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{Y_a - Y_b}{(a-b)S} \\ B = \dfrac{aY_b - bY_a}{(a-b)m} \end{cases}$$

Nel momento i cui il portafoglio assicura lo stesso payoff del derivato, allora ,nel rispetto della legge del prezzo unico, varrà che:

$$Y = S\Delta + B$$

Sviluppando la precedente utilizzando le espressioni esplicite di Δ e B, attraverso banali passaggi matematici[22] si può ottenere:

$$Y = \frac{1}{m}[qY_a + (1-q)Y_b]$$

[22] Per i passaggi matematici che premettono di ottenere la formula di prezzo di un'opzione generica secondo il CRR si rimanda al libro G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)"* capitolo 4 § 4.3.1 – Il caso della call. Si noti che nel suddetto capitolo vengono spiegati i passaggi per ottenere la formula di prezzo per una call, è chiaro che le medesime relazioni risultano ugualmente valide nel caso più generale di un'opzione generica, per cui sono state in questa sede riprese.

Si noti che la formula di prezzo del CRR riprende quella degli alberi binomiali uniperiodali[23], il modello infatti ne riprende la stessa struttura di incertezza e le stesse metodologie di calcolo per la definizione del valore da attribuire a un contratto derivato, partendo però dalla costruzione di un portafoglio in grado di assicurare gli stessi payoff dell'opzione.

Si noti inoltre che, seppure su intervalli di tempo discreti, si opera in un ambiente incerto e stocastico. Se si assumesse una prospettiva deterministica e di assenza del rischio di variazione dei prezzi, oppure di un operatore con funzione di utilità lineare e quindi indifferente al rischio si otterrebbe una formula di valutazione differente:

$$Y_{(t)} = \frac{E_t[Y_{(t+n)}]}{(1+i)^n}$$

Chiaro che in un ambiente deterministico il prezzo del derivato alla data di valutazione sarebbe uguale al valore attuale del payoff a scadenza che è perfettamente prevedibile in t_0.

Esempio di valutazione di una call europea utilizzando il CRR.

Si supponga di aprire una long position su una call con le seguenti caratteristiche: $K = 50€$, scadenza $T = 1$ e scritta su un sottostante azionario con prezzo $S_{(0)} = 50€$. Il tasso di mercato *risk-free* a cui è possibile investire è $i = 0.25$. Il fattore di crescita in caso di rialzo è pari ad $a = 2$, il fattore di diminuzione in caso di ribasso è $b = 0.5$. Si utilizza un albero binomiale uniperiodale per effettuare previsioni riguardo l'andamento del prezzo del sottostante $S_{(t)}$:

50	$100 = aS_{(0)} = 50 * 2$	se il mercato va al rialzo.
	$25 = bS_{(0)} = 50 * 0.5$	se il mercato va al ribasso.

Dato l'andamento del prezzo del sottostante appena ipotizzato, i flussi a scadenza a cui da diritto il possesso della call sono:

$C_{(t)}$	$C_a = \max\{100 - 50,\ 0\} = 50$	se il mercato va al rialzo.
	$C_b = \max\{25 - 50,\ 0\} = 0$	se il mercato va al ribasso.

[23] In questo caso però la probabilità che si verifichi l'ipotesi di mercato al rialzo è indicata con q mentre la probabilità complementare di un ribasso del prezzo è indicata con (1-q).

Dati questi flussi riprendendo le formule descritte precedentemente[24], si possono ottenere le quantità di sottostante e l'ammontare di capitale da investire al tasso i, necessarie per calibrare il portafoglio in modo da ottenere il portafoglio replicante:

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{C_a - C_b}{(a-b)S} = \dfrac{50-0}{100-25} = \dfrac{2}{3} = 0.66667 \\ B = \dfrac{aC_b - bC_a}{(a-b)m} = \dfrac{2*50*-0.5}{(2-0.5)*1.25} = -13.333 \end{cases}$$

Una volta ottenute le quantità dei diversi titoli, necessarie per ottenere il portafoglio replicante, è possibile ottenere il valore dell'opzione applicando la formula di prezzo[25] del CRR:

$$C_{(t)} = S\Delta + B = 50 * \frac{2}{3} - \frac{40}{3} = 20€$$

Il prezzo della call in esame risulterà quindi $C_{(t)} = 20€$.

Si può inoltre notare che il valore dell'opzione deriva dalla sua capacità di copertura, come si vedrà in modo più approfondito nel caso del modello di *Black-Scholes* con l'argomentazione di *hedging*[26]: sarà possibile utilizzare la call valutata per costruire un portafoglio non rischioso (*hedged portfolio*) che assicurerà lo stesso *payoff* indipendentemente dall'andamento del mercato. Tale portafoglio può essere ottenuto acquistando la call e vendendo tramite *short selling* Δ unità di sottostante. Il costo di un portafoglio di questo tipo sarà:

$$B = \Delta S_{(0)} - C_{(0)} = \frac{2}{3} * 50 - 20 = \frac{40}{3}$$

A scadenza l'*hedged portfolio* garantirà un *payoff* indipendentemente da quello che sarà l'andamento del mercato:

$$payoff = Bm = \frac{40}{3} 1.25 = 16,66$$

Il portafoglio risulta coperto: assicura un rendimento minimo che non risente dell'andamento dei tassi sul mercato.

---

[24] Ci si riferisce in questo caso alle formule estese di Δ e B illustrate all'inizio del paragrafo. Ovvio che mentre nel caso generale sono state definite per un'opzione qualsiasi vengono qui rapportate al caso della call in esempio da valutare.

[25] Si noti che in questo caso verrà utilizzata per semplicità la formula di valutazione per cui $C = \Delta S + B$, è chiaro che utilizzare l'altra formula estesa definita precedentemente porterebbe allo stesso risultato, richiedendo però una maggiore complicazione di calcolo.

[26] V. *infra* § 2.2.3 – Formule di pricing per un'opzione europea.

2.1.3 – Black-Scholes

Il modello di Black-Scholes nonostante sia cronologicamente precedente al Modello di Cox-Ross-Rubinstein[27], ne risulta, in realtà, logicamente successivo. Partendo dal CRR si può vedere il modello di Black-Scholes come una semplice estensione concettuale.

Nel precedente paragrafo si è detto che il Modello Binomiale, è un modello di pricing che opera su intervalli di tempo discreti, la peculiarità di Black-Scholes consiste invece nella possibilità di operare nel continuo[28]. Chiaro a questo punto che è possibile ottenere una versione limite del modello binomiale: l'albero binomiale multiperiodale può essere costruito per un numero sempre maggiore[29] di periodi, e seguendo la logica del CRR si potrebbe ottenere il valore del contratto in t_0 regredendo l'albero. Concettualmente una simile operazione consiste nel dividere l'orizzonte temporale di riferimento[30] in un numero infinito di sotto intervalli, si ottengono in questo modo intervalli di tempo (nonché step di valutazione) infinitesimi, e di conseguenza un orizzonte di tempo che tende al continuo. Banalmente il modello di Black-Scholes è ottenibile portando all'infinito il numero dei passi del CRR[31], ne rappresenta cioè il limite nel continuo. Data la stretta correlazione tra i due modelli, ovvio che l'obiettivo comune ad entrambi è quello di assegnare ai contratti di opzioni un corretto valore di mercato. Ovviamente la possibilità garantita da Black-Scholes di poter lavorare su un orizzonte di tempo continuo che meglio rispecchia la realtà, spiega il suo maggiore utilizzo e la sua portata innovativa nel mondo della finanza[32]. Il modello è utilizzabile per il pricing di derivati scritti su qualsiasi tipo di sottostante, il principale utilizzo che ne viene fatto però consiste nella valutazione di contratti scritti sui titoli azionari. "Lo sviluppo in forma di software della formula di Black-

---

[27]Si vuole sottolineare che, a differenza di quanto la struttura di analisi utilizzata nel testo possa far intendere, il modello di Black-Scholes non è una conseguenza del CRR. Gli studi di Black Scholes e Merton risalgono al 1972, quelli di Cox Ross e Rubinstein al 1979, partendo infatti dagli studi dei primi, il secondo gruppo di studiosi ha cercato di fornire una rappresentazione semplificata della formula di pricing. Cox Ross e Rubinstein accettando l'ipotesi che il prezzo dell'attività sottostante segua un percorso particolarmente semplice (quello binomiale), hanno permesso di ottenere una formula in grado di determinare il prezzo delle opzioni definendo gli intervalli discreti di rilevazione, ad esempio il giorno e l'ora. Hanno cioè discretizzato la formula di Black-Scholes. L'ordine espositivo utilizzato in questa sede, permette comunque di evidenziare più facilmente i legami logico matematici che esistono tra i due modelli.

[28] V. *infra* § 2.2 Modello di Black-Scholes.

[29] Si può costruire un albero binomiale per un numero di periodi che tende a infinito.

[30] Per orizzonte temporale di riferimento ci si riferisce all'intervallo intercorrente tra la data di stipulazione del contratto di opzione t_0 e la scadenza t_1 dello strumento di cui si vuole stimare il prezzo. Chiaro che stimando il prezzo per intervalli di tempo infinitesimi si può ottenere un percorso nel continuo del valore del sottostante, si può cioè stimare un andamento continuo del prezzo dell'opzione.

[31] Non vengono ripresi in questa sede i procedimenti matematici con cui è possibile ottenere la formula di Black-Scholes portando all'infinito i periodi e gli scenari previsti dal CRR.

[32] Nonostante alcune ipotesi piuttosto astratte il modello è tutt'oggi riconosciuto come il più attendibile modello di picing per le opzioni. È individuato come metodologia di riferimento per la valutazione delle voci di bilancio degli intermediari finanziari e per il calcolo dei requisiti patrimoniali individuali per i rischi di mercato. L'argomentazione di hedging, fondamento teorico del modello, ha assunto un ruolo fondamentale per la definizione e l'applicazione dei principi contabili, in particolare per ciò che riguarda la determinazione del *fair value* degli strumenti finanziari in bilancio. Secondo il *2427-bis* cc. per la regolamentazione e il controllo di solvibilità di società finanziare e non, è necessario che nella nota integrativa si proceda alla stima del *market value* dei derivati scritti in bilancio, a tale scopo la formula di Black-Scholes nonché il portafoglio replicante e il principio di non arbitraggio, diventano strumenti imprescindibili.

Scholes divenne lo strumento universale per fissare il prezzo dei contratti sul mercato"[33]. L'importanza dell'ipotesi di intervalli di tempo infinitesimi e un orizzonte temporale continuo su cui studiare l'andamento dei prezzi, deriva non solo dalla maggiore aderenza alla realtà, ma anche soprattutto dalla possibilità di utilizzare il processo di diffusione del moto browniano per avere un approccio strutturato razionale e matematico con cui analizzare il percorso di prezzo del sottostante.

2.2 – Modello di Black-Scholes

Si analizza ora il modello introdotto nel paragrafo precedente; essendo quello con maggiore rilevanza pratica, sarà, tra i tre modelli di *pricing* descritti, quello che verrà trattato con maggiore dettaglio e per cui verrà anche eseguita un'applicazione pratica nel capitolo successivo[34].

La grande importanza e diffusione del modello è spiegabile dalla possibilità di poter studiare il cammino del prezzo del sottostante nel tempo continuo, su intervalli infinitesimi di tempo.

Si noti bene che il modello di *Black-Scholes* fornisce solamente una procedura di *pricing* subordinato e non un modello di mercato azionario in grado di spiegare le modalità con cui i prezzi delle azioni quotate si formano, come fa ad esempio il *capital asset pricing model*. Lo scopo ultimo di *Black-Scholes* è ottenere una valutazione attendibile dell'opzione scritta su un sottostante azionario. Come già notato più volte in precedenza, il prezzo del sottostante rappresenta l'unica variabile aleatoria nella definizione del prezzo di un'opzione, allora, la definizione del prezzo del sottostante diventa uno strumento imprescindibile per poter valutare il relativo derivato. È chiaro quindi che le ipotesi del modello saranno sufficienti per delineare i meccanismi di formazione dei prezzi azionari, ma saranno solamente le minime indispensabili per avere una previsione del prezzo del sottostante, da cui dipende il prezzo di arbitraggio dell'opzione finanziaria. Il modello in questione cioè non si propone di analizzare e spiegare le modalità di formazione dei prezzi azionari sui mercati in base alle aspettative degli operatori, ma effettua previsioni riguardo il prezzo futuro delle azioni, solamente in quanto tali previsioni sono propedeutiche alla definizione del valore dell'opzione avente i suddetti titoli come sottostante. Lo studio del prezzo dell'azione sottostante è solamente strumentale per la definizione del prezzo dell'opzione che è invece il fine ultimo del modello. L'irrilevanza dell'avversione al rischio degli operatori e delle loro aspettative nella definizione del prezzo dei contratti derivati, si noti bene, non va contro l'ipotesi effettuata di massimizzazione dell'utilità attesa. I suddetti elementi influenzano la determinazione del prezzo del sottostante, il quale influenza a sua volta il prezzo dell'opzione, però una volta osservato il prezzo del sottostante, questo contribuirà alla definizione del prezzo del derivato nel rispetto solamente di regole di coerenza e del principio di non arbitraggio.

---

[33] Si rimanda in proposito al "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)"* capitolo 4 "*Valutazione di opzioni senza rischio di tasso" pg 124.*

[34] Nel capitolo 3 – Applicazioni in R verrà sviluppato un problema di pricing concreto che permetterà la spiegazione pratica del modello di Black-Scholes, sfruttando le tecniche di calcolo tramite estrazioni random su intervalli di tempo infinitesimi, possibili nell'ambiente di lavoro di "R".

2.2.1 - Ipotesi di base del modello

Oltre alle assunzioni generali valide per tutti i modelli di pricing[35], per il modello di Black-Scholes, devono essere effettuate 4 ulteriori ipotesi:

- il mercato è aperto con continuità: gli intervalli di tempo presi in considerazione hanno ampiezza che tende a 0 (sono intervalli infinitesimi),
- il mercato è perfetto:
  - assenza di gravami fiscali e costi di transazione
  - i titoli sono infinitamente indivisibilli
  - gli operatori sono massimizzatori di profitto e *price-taker*,
- sul mercato sono disponibili titoli *default-free* per qualsiasi scadenza (è possibile prestare denaro senza rischio); la *term structure* dei tassi di interesse è piatta e deterministica ad un livello di intensità istantanea di interesse r,
- il processo di prezzo del sottostante può essere descritto da un *moto browniano geometrico* spiegato dalla seguente equazione differenziale:

$$dS_{(t)} = \mu S_{(t)}\, dt + \sigma S_{(t)} dZ_{(t)}. \qquad (2.1)$$

Le prime tre caratteristiche tipiche dell'ambiente in cui viene sviluppato il modello, risultano abbastanza intuitive e non necessitano di particolari approfondimenti o spiegazioni, la quarta invece, rappresenta un vero punto di svolta negli studi di *Black-Scholes* e in generale nell'approccio della finanza al *pricing* degli strumenti e dei titoli scambiati sul mercato.

I processi di diffusione in generale, sono caratterizzati dalla proprietà di continuità delle traiettorie, pertanto, si adattano perfettamente alle esigenze di studio dell'andamento del prezzo di un titolo nel tempo continuo. Tra tutti i possibili processi stocastici utilizzati nelle scienze applicate per descrivere l'andamento di un elemento qualsiasi[36], in finanza viene utilizzato il processo di *moto browniano*: un processo con struttura probabilistica molto semplificata, che gode della proprietà di dar luogo a incrementi indipendenti e identicamente distribuiti, in grado di descrivere il cammino di un elemento. Data le proprietà di indipendenza e di continuità delle traiettorie descritte, il moto browniano può essere utilizzato per descrivere l'andamento di un prezzo di mercato che può essere rappresentato come la somma di un numero illimitatamente grande di incrementi di ampiezza infinitesima e indipendenti l'uno dall'altro. Date tali caratteristiche si può utilizzare il teorema del limite centrale per giungere alla conclusione che il *moto*

[35] Si fa riferimento in questo caso alle ipotesi di base caratteristiche degli ambienti di pricing delle opzioni, che sono state descritte all'inizio del capitolo 2 v. *retro* § 2.1 – Modelli di pricing.

[36] I processi di diffusione sono molto utilizzati nelle scienze applicate (matematica, fisica, chimica ecc..) per poter descrivere l'andamento delle particelle o di corpi di natura qualsiasi. In finanza, come si vedrà, viene ripreso il moto Browniano, che in chimica descrive l'andamento e il processo di diffusione completamente imprevedibile del calore, per poter descrivere ed effettuare stime previsionali riguardo l'andamento e il valore dei prezzi di mercato futuri.

browniano presenta caratteristiche di normalità, di conseguenza l'andamento del prezzo di un titolo, che può essere a sua volta descritto da una normale, presenterà le seguenti caratteristiche:

$$E\left[Y_{(t)}\right] = Y_0 + \mu t; \qquad\qquad Var\left[Y_{(t)}\right] = \sigma^2 t.$$

Dove Y sta ad indicare la traiettoria continua del prezzo.

Qualora la distribuzione del moto possa essere rappresentata da una normale standard, si parla di *moto browniano standard* la cui distribuzione ha: $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Si noti che a causa della proprietà di normalità e di indipendenza, le traiettorie non sono derivabili[37]. La non derivabilità delle traiettorie indica che, a differenza di quanto si possa pensare, i moti dei prezzi non sono rappresentati da funzioni continue con caratteristiche di regolarità, ma le variazioni di prezzo descritte dal moto, seppur su intervalli di tempo infinitesimi, procedono per punti angolosi[38]. Quella appena descritta è una caratteristica fondamentale per un modello che necessita di studiare e descrivere l'andamento dei prezzi delle azioni di mercato: i prezzi futuri non hanno alcuna correlazione con quelli passati pertanto, le traiettorie tracciate dalle loro variazioni, anche se su intervalli piccolissimi di tempo, non possono in alcun modo possedere caratteristiche di prevedibilità locale, che si avrebbe qualora la funzione che le descrive sia derivabile e continua.

L'ipotesi n°4 dell'elencazione di inizio capitolo, non fa riferimento al *moto browniano standard*, ma al *moto browniano geometrico*. La prima tipologia di moto, si sviluppa sull'intero asse reale: i valori dei prezzi delle azioni potrebbero assumere un valore qualsiasi nell'intervallo [-∞; +∞], il prezzo di un'opzione potrebbe cioè essere negativo; ipotesi avulsa dalla realtà. Per evitare una simile incoerenza il modello di *Black-Scholes,* per descrivere l'evoluzione dei prezzi, utilizza il processo stocastico di *moto browniano geometrico,* ottenuto come esponenziale di un moto browniano con media e varianza unitarie. L'utilizzo dell'esponenziale permette di sfruttarne le proprietà matematiche per limitare lo spazio degli stati del processo all'intervallo [0; +∞] contenente solamente valori positivi.

L'equazione stocastica che descrive un moto browniano geometrico è:

$$Y_{(t)} = Y_{(0)} e^{\mu t + \sigma Z_{(t)}}$$

In questo modo l'ipotesi non è più di normalità della distribuzione bensì si assume che la distribuzione dei

[37] Per quanto riguarda i passaggi matematici che dimostrano la caratteristica di non derivabilità della funzione che rappresenta la distribuzione degli incrementi dei prezzi delle azioni secondo il moto browniano, si rimanda all'appendice C.2 del "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)"* § *"Moto browniano standard"* pg.404-405.

[38] La rappresentazione di un tragitto di moto browniano tramite "salti" su intervalli di tempo piccolissimi non risulta di immediata comprensione, sarà più chiaro quando nel capitolo successivo verrà data una rappresentazione grafica del tragitto di prezzo di un titolo che segue un moto browniano.

prezzi di mercato possa essere rappresentata da una lognormale[39].

Raggiunta l'ipotesi di lognormalità della distribuzione si può dire, riprendendo la (2.1), che il prezzo $S_{(t)}$ da stimare rappresenta la variabile aleatoria, il cui valore può essere ottenuto dato $S_{(0)}$, utilizzando una distribuzione di probabilità lognormale con parametri: $\left(\frac{(\mu-\sigma^2)}{2}\right)\tau$, $\sigma\sqrt{\tau}$; dove τ indica l'intervallo di tempo preso in considerazione nel quale si vuole descrivere l'andamento del prezzo.

2.2.2 – Rendimenti rischiosi-non rischiosi

Partendo da un'ipotesi di ambiente deterministico, il rendimento di un investimento non-rischioso, è ottenuto dalla seguente equazione di prezzo:

$$dW_{(t)} = rW_{(t)}dt. \qquad (2.2)$$

Estendendo la legge ad un ambiente stocastico, si rientra nel caso della (2.1) che può essere rielaborata e riscritta come segue:

$$\frac{dS_{(t)}}{S_{(t)}} = \mu\, dt + \sigma dZ_{(t)} \qquad (2.3)$$

Il lato sinistro dell'equazione esprime la variazione marginale del prezzo dell'azione $S_{(t)}$, il lato destro un moto browniano con valore atteso μ e deviazione standard σ. Chiaro come il prezzo di un investimento rischioso varia seguendo un tragitto descrivibile da un *moto browniano geometrico*. Il valore atteso μ che può essere ricavato dall'equazione precedente (2.3), indica il tasso di rendimento istantaneo atteso da un investimento rischioso, mentre il tasso r ricavabile dall'equazione (2.2) indica il tasso di rendimento di un investimento non rischioso. Per rispettare le ipotesi del modello per cui gli operatori massimizzano l'utilità attesa deve valere sempre che $\mu > r$, la differenza rappresenta il premio per il maggior rischio affrontato nel selezionare un investimento azionario piuttosto che uno senza rischio. Rapportando il premio per il rischio ad un indicatore di rischio rappresentato dalla deviazione standard del rendimento istantaneo dell'investimento σ, si può ottenere l'indice di Sharpe nel tempo continuo. Tale indice indica la remunerazione ricevuta per ogni unità di rischio[40] in più che viene sostenuta.

La trattazione riguardo la dinamica di prezzo del sottostante, e la relazione tasso rischioso - tasso *risk free*

[39] Si noti che a differenza dei casi precedenti, la distribuzione avrà valore atteso μ pari all'aspettativa della derivata logaritmica dell'andamento del prezzo, per le relative dimostrazioni matematiche che illustrano il rapporto sussistente tra i due processi si rimanda all'appendice C.6 del "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)"* § *"Moto browniano geometrico"* pg.425-426.

[40] Il rischio a cui si fa riferimento in questo caso è la volatilità dei rendimenti σ, ovvero un indice che tiene conto del rischio totale di mercato: rischio sistematico e rischio specifico. In realtà il mercato usualmente remunera solamente la componente di rischio sistematico non diversificabile.

volta a far capire la logica che guida la previsione del valore di un prezzo, in particolare della sua variazione su un dato intervallo di tempo partendo da quella che è la quotazione nota ad oggi del titolo, assume un ruolo molto importante per poter capire in modo approfondito quelle che sono le equazioni di valutazione delle call e delle put ottenute con il modello di *Black-Scholes*[41].

2.2.3 – Formule di pricing per un'opzione europea

Il valore di un'opzione dipende dal valore temporale e dal valore intrinseco[42], per la definizione del prezzo assume pertanto rilevante importanza la natura dell'opzione e le clausole temporali che ne regolano l'esercizio. Bisogna in questo caso distinguere tra opzione europea e opzione americana attribuendo diverse formule di valutazione ad ognuna delle tipologie.

Pricing di una call europea. Si ipotizzi di voler valutare un'opzione call europea con premio $C_{(t)}$ al tempo t con durata τ pertanto esercitabile solamente all'istante $T = t + \tau$, prezzo strike K, e avente come sottostante un titolo azionario con prezzo in t pari a $S_{(t)}$.

Da quanto detto precedentemente, si sa che i fattori che influenzano il valore del premio $C_{(t)}$ sono: la variabile aleatoria $S_{(t)}$ [43]che rappresenta l'unica fonte di incertezza e che influenza il valore intrinseco dell'opzione, e la vita residua a scadenza del contratto che ne determina il valore temporale. Sostanzialmente il prezzo dell'opzione è funzione di due variabili: del prezzo assunto dal sottostante e del tempo. Può pertanto essere scritta come segue:

$$C_{(t)} = C\big(S_{(t)}, t\big) \qquad (2.4)$$

Precedendo con l'utilizzo di formalità matematiche[44], che in questa sede vengono evitate, si può "spacchettare" la funzione precedente ottenendo una formula estesa che permetta di definire il valore del premio dell'opzione; si otterrà in particolare un'equazione differenziale stocastica con la quale si può ottenere il processo $C_{(t)}$, dal quale si può poi ottenere il prezzo della call:

---

[41] Si ricorda ancora una volta che l'andamento del prezzo dell'azione sottostante, e in particolare il valore assunto alla data di scadenza dell'opzione, rappresenta l'unica fonte di incertezza del problema di pricing: il processo di prezzo rappresenta la variabile di stato. Lo studio e l'approfondimento del processo stocastico che può spiegare l'andamento del prezzo diventa pertanto un punto di partenza imprescindibile.

[42] A questo proposito si rimanda al capitolo 1, v. *retro* § 1.4.2 – Valore intrinseco e valore temporale, in cui vengono definite le componenti del valore di un'opzione e le variabili da cui dipendono.

[43] Si noti inoltre che secondo quanto detto nel paragrafo 2.2.1 – Ipotesi di base del modello, la variabile $S_{(t)}$ che indica il processo di prezzo del sottostante, spiegato per ipotesi da un *moto browniano geometrico,* è la variabile di stato.

[44] Vengono evitati i procedimenti matematici che permettono di ottenere l'equazione differenziale stocastica in quanto non corrispondenti agli scopi della trattazione, si rimanda comunque all'appendice C.5.4 del libro "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*" pp 422, "Il lemma di Ito". Si veda dello stesso libro anche il capitolo 5, § 5.2.1 – "La dinamica del prezzo dell'opzione" per capire come ottenere l'equazione differenziale del processo di $C_{(t)}$ tramite l'applicazione del lemma di Ito.

$$dC_{(t)} = a\big(S_{(t)}, t\big)dt + b\big(S_{(t)}, t\big)dZ_{(t)},$$

Ponendo:

$$a'\big(S_{(t)}, t\big) = \frac{a(S_{(t)},t)}{C_{(t)}} \quad , \qquad\qquad b'\big(S_{(t)}, t\big) = \frac{b(S_{(t)},t)}{C_{(t)}}$$

Si può riscrivere la (2.4) come:

$$\frac{dC_{(t)}}{C_{(t)}} = a'\big(S_{(t)}, t\big)dt + b'\big(S_{(t)}, t\big)dZ_{(t)}$$

Nella precedente relazione, le variazioni marginali del prezzo dell'opzione attese $dC_{(t)}/C_{(t)}$, che compongono il processo di prezzo dell'opzione, risulta dipendente dal coefficiente di drift α e il coefficiente di diffusione $b^{2.}$ Si noti inoltre la presenza di $dZ_{(t)}$ad indicare che il processo di prezzo segue un moto browniano esattamente come il processo di prezzo dell'azione sottostante. Riadattando la formula precedente, una volta esplicitando a'e una volta esplicitando b', si ottiene:

$$E_t\left[\frac{dC_{(t)}}{C_{(t)}}\right] /dt \ = a'\big(S_{(t)}, t\big) \qquad\qquad Var\left[\frac{dC_{(t)}}{C_{(t)}}\right]/dt = \ b'^2\big(S_{(t)}, t\big)$$

Si noti quindi che a' rappresenta il tasso istantaneo di rendimento atteso da un investimento nell'opzione call con caratteristiche descritte all'inizio di questo capitolo, e b' rappresenta la deviazione standard dello stesso tasso[45].

Si è detto che il prezzo di un'opzione dipende anche dal valore che si può ricavare utilizzandola per fini di copertura di portafoglio[46], l'attività di hedging e il vantaggio da questa ricavabile riveste pertanto un ruolo determinante nella valutazione di un'opzione. Di seguito si vedrà da una prospettiva tecnica come la determinazione del valore dell'opzione nel portafoglio coperto e quindi non rischioso sia un passaggio fondamentale per ottenere l'equazione di pricing.

Secondo l'argomentazione di hedging, è possibile costruire un portafoglio non rischioso, acquistando α unità di un'azione e prendendo una *long position* su un'opzione call scritta sull'azione acquistata. In questo modo il valore del portafoglio risulterà pari a:

$$W_{(t)} = C_{(t)} + \alpha S_{(t)},$$

[45] Si noti che in questo caso la deviazione standard e il tasso di rendimento istantaneo, si riferiscono ad un investimento rischioso, e come vedremo saranno utilizzati per definire la relazione con un portafoglio non rischioso che permette la definizione del prezzo dell'opzione.

[46] V. *retro § 1.5.3 – Copertura.*

Assumendo per dimostrata l'argomentazione di hedging[47], possiamo quindi definire l'investimento nel portafoglio di valore $W_{(t)}$, come un investimento istantaneamente non rischioso. Definire un investimento come "istantaneamente non rischioso" vuol dire assumere che il valore futuro del portafoglio $W_{(t+1)}$ è perfettamente prevedibile in t, si ritorna cioè in un ambiente deterministico.

Nel rispetto dell'ipotesi di non arbitraggio, un portafoglio con le caratteristiche appena descritte non può avere un prezzo di mercato diverso da quello del portafoglio di mercato, ovvero il rendimento ottenuto dall'investimento nell'*hedged portfolio,* deve essere uguale a quello che si avrebbe investendo un capitale W al tasso non rischioso r[48]; dovrà pertanto valere[49]:

$$dW = Wr\,dt.$$

Si dimostra che partendo da questi risultati è vero che:

$$\frac{a - rC_{(t)}}{b} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Ovvero che la remunerazione per unità di rischio contratto, ottenuta da un investimento nell'opzione è pari a quella ottenuta dall'investimento sul titolo sottostante.

Partendo dalla relazione appena illustrata ed esplicitandola per $rC_{(t)}$[50] si può ottenere l'equazione differenziale deterministica che è l'equazione generale di valutazione di una call europea secondo il modello di *Black-Scholes*:

$$rC_{(t)} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\theta^2 C_{(t)}}{\theta S^2{}_{(t)}} + rS_{(t)}\frac{\theta C_{(t)}}{\theta S_{(t)}} + \frac{\theta C_{(t)}}{\theta t}.$$

Il prezzo dell'opzione $C_{(t)}$ deve rispettare la seguente relazione in ogni istante in cui l'opzione è in vita. Riprendendo la definizione di call europea, in particolare del valore intrinseco[51], si nota come in realtà l'equazione di valutazione generale deve rispettare la relazione tra prezzo del sottostante e prezzo strike a scadenza, si avrà pertanto che il premio dell'opzione sarà definito dal seguente sistema:

---

[47] V. capitolo 5, § 5.2.2 – L'argomentazione di hedging del libro "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*", pp 199-200 per la relativa dimostrazione.

[48] V. *retro* § 2.2.2 – Rendimenti rischiosi-non rischosi.

[49] Si riutilizza in questo caso l'equazione (2.2).

[50] Per i passaggi matematici utilizzando le equazioni differenziali che premettono di esplicitare $C_{(t)}$ v. capitolo 5, § 5.2.3 – L'equazione di valutazione del libro "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*", pp 201-202.

[51] V. *retro § 1.4.2* – Valutazione delle opzioni.

$$\begin{cases} rC_{(t)} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\theta^2 C_{(t)}}{\theta S^2{}_{(t)}} + rS_{(t)} \frac{\theta C_{(t)}}{\theta S_{(t)}} + \frac{\theta C_{(t)}}{\theta t} \\ C_{(T)} = \max[S_{(T)} - K; 0] \end{cases}$$

La cui risoluzione permette di ottenere la formula di prezzo della call europea sotto la condizione descritta:

$$C_{(t)} = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2). \qquad (2.5)$$

I principali elementi che compongono l'equazione di prezzo sono già conosciuti, i due elementi nuovi $N(d_1)$ e $N(d_2)$ rappresentano la funzione della normale standard descritta dai possibili percorsi del prezzo dell'azione sottostante S_t.

Pricing di una put europea. Si ipotizzi ora di voler valutare un'opzione put con premio $P_{(t)}$ al tempo t con durata τ pertanto esercitabile solamente all'istante $T = t + \tau$, prezzo strike K, e avente come sottostante un titolo azionario con prezzo in t pari a $S_{(t)}$. Si riprenda la relazione di parità put-call[52], che risulta valida anche in questo caso, in modo da ottenere la formula di valutazione della put utilizzando quella già definita per la corrispondente opzione call[53].
Data la relazione di parità put-call scritte su titoli che non pagano dividendi:

$$P_{(t)} = C_{(t)} - S_{(t)} + Ke^{-r\tau}$$

Si può sostituire a $C_{(t)}$ il suo valore dato dalla formula generale di valutazione della call di *Black-Scholes*, ottenendo la relazione seguente[54]:

$$P_{(t)} = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1). \qquad (2.6)$$

La precedente, rappresenta l'equazione generale di valutazione di una put europea con le caratteristiche descritte secondo il modello di Black-Scholes. Chiaramente anche per questa relazione possono effettuate tutte le riflessioni fatte riguardo la valutazione di una call. In modo specifico però si noti che nel caso della

[52] V. *retro* § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni, in cui è stata definita e dimostrata la relazione di parità put-call per definire il valore delle opzioni a livello concettuale.
[53] Chiaramente l'equazione di valutazione per la put potrebbe essere ottenuta eseguendo lo stesso procedimento effettuato per la call, avendo però già descritto precedentemente quest'ultimo nel dettaglio, sarebbe inefficiente ripetere lo stesso procedimento in modo speculare dal momento in cui è possibile utilizzare la *put-call parity condition*, per raggiungere lo stesso risultato in modo più immediato e chiaro.
[54] Per il procedimento matematico sottostante l'esplicitazione della (2.6) applicando alla (2.5) la condizione di parità put-call, v.capitolo 5, § 5.3 – Il caso ella put europea, del libro "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*", pp 217.

put, per indicare la funzione di ripartizione della normale vengono utilizzati: $N(-d_2)$ e $N(-d_1)$[55] e viene invertito l'ordine dei termini della sottrazione; tali modifiche rispetto la formula di valutazione della call sono spiegabili dalla natura perfettamente speculare della put rispetto la call corrispondente con le stesse caratteristiche contrattuali.

Esempio di pricing di un'opzione put europea.

Viene di seguito rappresentato il calcolo di una put europea avente come sottostante i titoli azionari Ferrari, verrà utilizzato il tasso risk-free della BCE a 10 anni come tasso di mercato, e dopo aver applicato la formula di Black-Scholes per determinare il prezzo del contratto, verrà osservata la sua sensibilità al variare delle variabili da cui dipende, secondo quanto spiegato nei paragrafi precedenti[56].

Si ipotizzi ora di avere un contratto con le seguenti caratteristiche:

Caratteristiche del contratto di opzione		
Prezzo sottostante	S(0)	111,00 €
Prezzo strike	K	100,00 €
Tasso r	r	0,54100%
Volatilità	σ	20%
Scadenza	T	10
Istante inziale	t	0

Riprendendo le definizioni descritte nel paragrafo precedente è possibile applicarle per ottenere gli strumenti necessari alla determinazione del prezzo:

Distribuzione di probabilità	
d(1)	0,4734293
d(2)	-0,1590262
N(d1)	0,68204653
N(d2)	0,4368241
N(-d1)	**0,31795347**
N(-d2)	**0,5631759**

Riprendendo la (2.6) e sostituendo i valori ottenuti è possibile ottenere il prezzo del contratto con tali caratteristiche:

P(0)	**18,06 €**

[55] Si noti che secondo le leggi della statistica: $N(-d_2) = 1 - N(-d_2)$ e $N(-d_1) = 1 - N(-d_1)$. Sono queste le due condizioni che permettono di ottenere la (2.6) come equazione di valutazione della put come risultato della *put-call parity condition* appilcata all'equazione di valutazione della call.

[56] Vd. *retro* § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni.

A questo punto è possibile eseguire analisi di *sensitivity*, che permettono di dimostrare come il prezzo può cambiare al variare delle principali grandezze da cui dipende:

1- Il primo fattore di cui si studierà l'effetto sul prezzo dell'opzione sarà il prezzo del sottostante S:

Ceteris paribus, se diventa S(0)=	90,00 €
d(1)	0,329418432
d(2)	-0,3030371
N(d1)	0,629080281
N(d2)	0,380930794
N(-d1)	**0,370919719**
N(-d2)	**0,619069206**
P(0)'	**25,26 €**

In questo caso si è dimostrato quanto la put aumenti di valore qualora diminuisca il prezzo del sottostante, nel caso specifico l'opzione scade *in the money,* aumenta il suo valore intrinseco e di conseguenza il suo prezzo. Risulta $P(0) < P(0)'$; l'incremento di prezzo è dovuto solamente alla diminuzione del prezzo del sottostante da $S = 111€\ a.\ S = 90€$[57].

$$S' < S \quad \rightarrow \quad P(0)' > P(0)$$

2- Si veda ora come il prezzo dell'opzione cambia al variare del prezzo strike K determinato contrattualmente:

Ceteris paribus, se diventa K=	110,00 €
d(1)	0,407981717
d(2)	-0,224473815
N(d1)	0,658356451
N(d2)	0,41119432
N(-d1)	**0,341643549**
N(-d2)	**0,58880568**
P(0)''	**23,44 €**

[57] Per i richiami teorici riguardo queste dinamiche vd. § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni.

Si noti che le opzioni put che prevedono un prezzo strike K più alto, hanno un valore maggiore a parità di altre condizioni, in quanto aumentano le probabilità che l'opzione scada *in the money*. Tale dinamica è chiara anche dall'esempio proposto: il prezzo dell'opzione in esame risulta maggiore quando a parità delle altre condizioni K aumenta.

$$K'' > K \rightarrow \quad P(0)'' > P(0)$$

3- Si considera l'effetto che un incremento della volatilità del prezzo del sottostante ha sul valore dell'opzione:

Ceteris paribus, se diventa σ=	25%
d(1)	0,521045933
d(2)	-0,269523482
N(d1)	0,698832613
N(d2)	0,393763437
N(-d1)	**0,301167387**
N(-d2)	**0,606236563**
P(0)	**24,00 €**

Anche in questo caso i risultati dimostrano quanto esposto teoricamente; il prezzo dell'opzione risulta essere direttamente proporzionale alla volatilità del prezzo del titolo sottostante.

$$\sigma''' > \sigma \quad \rightarrow \quad P(0)''' > P(0)$$

4- Si noti infine come il fattore tempo influenza il prezzo dell'opzione presa in considerazione:

Ceters paribus, se diventa T=	15
d(1)	0,550574248
d(2)	-0,224022421
N(d1)	0,709037217
N(d2)	0,411369929
N(-d1)	**0,290962783**
N(-d2)	**0,588630071**
P(0)'''	**21,98 €**

Aumentando la durata dell'orizzonte temporale, il valore temporale dell'opzione aumenta in quanto aumentano le probabilità che questa scada *in the money*, e di conseguenza aumenta il suo valore.

$$T'''' > T \quad \rightarrow \quad P(0)'''' > P(0)$$

2.2.4 - Volatilità implicita, calibratura delle quotazioni.

Nei capitoli precedenti sono state individuate tutte le variabili in grado di influenzare il prezzo dell'opzione[58], tali variabili hanno successivamente assunto rilevanza formale nella formula di valutazione di Black-Scholes. È importante sottolineare che, secondo il modello di Black-Scholes, le principali variabili che influenzano il valore delle opzioni risultano: il prezzo del sottostante, il prezzo strike, il tasso di interesse, il tempo a scadenza e la volatilità[59]. In questo contesto la volatilità "σ" del prezzo del titolo sottostante diventa una variabile fondamentale a cui il valore che può assumere il titolo sottostante è strettamente correlato. In questa sede ci si focalizza sulla volatilità implicita della formula, sulle sue caratteristiche e sull'importanza da questa assunta nel tempo.

Nel modello di Black-Scholes esiste una corrispondenza biunivoca crescente tra il prezzo dell'opzione e la volatilità del sottostante, relazione valida sia per le call che per le put. La principale conseguenza di questa relazione è che i titoli più volatili, per i quali i prezzi presentano le maggiori oscillazioni nel tempo, sono quelli per i quali risulta molto elevato il premio da pagare per poter aprire una posizione su opzioni che li hanno come sottostante. Data questa strettissima relazione tra prezzo dell'opzione e livello di volatilità della quotazione del sottostante, è oggi usuale definire il prezzo di un'opzione in termini di volatilità a parità di tasso di interesse. Cioè è possibile scambiare i contratti di opzione scambiando livelli di volatilità[60] del bene sottostante (volatilità implicita), in questo modo diventa più agevole la valutazione e il confronto tra contratti diversi con scadenza e prezzo di esercizio simili.

Dato che il prezzo dei titoli sul mercato varia al variare dei tassi di mercato, la volatilità è direttamente proporzionale alla variazione dei tassi di mercato; partendo dalla struttura dei tassi *spot* sul mercato si può pertanto individuare una struttura di volatilità specifica per ciascun titolo sottostante.

Sostanzialmente per applicare la formula di Black-Scholes e determinare il valore del contratto di opzione, bisogna stimare il valore delle variabili da cui questo dipende[61]. Per la stima del σ che indica la volatilità, è

---

[58] Vd *retro* § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni.

[59] Vd *retro* § 2.2.3 – Formule di pricing di un'opzione europea. Si rimanda in particolare alle formule di valutazione della call (2.5) e della put (2.6). Per rendere più evidenti le relazioni si nota nello specifico che $d_1 = \frac{\log\left[\frac{S_{(t)}}{K}\right] + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$; $d_2 = \frac{\log\left[\frac{S_{(t)}}{K}\right] + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$ dai quali si può ottenere la funzione di ripartizione della normale standard $N_{(x)}$ che identifica la funzione di distribuzione dei tassi di mercato.

[60] Per rendere più chiara questa relazione, la si può omologare a quella esistente tra le obbligazioni e il relativo tasso interno di rendimento. Spesso i titoli obbligazionari vengono valutati e scambiati secondo quello che è il loro tasso di rendimento a scadenza piuttosto che in base alla loro quotazione, in quanto il TIR in questo caso risulta la principale determinante del valore del titolo. Allo stesso modo le opzioni possono essere scambiate e valutate secondo il livello di volatilità implicita che esattamente come il TIR rappresenta la principale variabile di prezzo. Si noti che operazioni di questo tipo non influenzano in alcun modo il valore dei contratti o dei titoli, ma rappresentano semplici cambiamenti di linguaggio che rendono più immediata la comprensione delle caratteristiche intrinseche dei contratti.

[61] Si veda in proposito la nota 53.

possibile utilizzare la struttura di volatilità del sottostante che può essere ottenuta risolvendo la formula di Black-Scholes con procedimento reiterativo: partendo dal prezzo conosciuto di un altro contratto di opzione con caratteristiche simili a quello di cui si vuole determinare il valore, ma con scadenza o prezzo strike diverso, è possibile risolvere la formula di Black-Scholes risolvendo in funzione di σ, ottenendo una misura del livello di volatilità implicita di un contratto di opzione qualsiasi che abbia quel titolo come sottostante. La volatilità in questo modo può essere ottenuta sfruttando i *volatility provider* di mercato che permettono di stimare un valore della volatilità da cui ottenere la sensibilità e le possibilità di variazione dei prezzi.

Se non fosse possibile misurare la volatilità implicita, si potrebbe stimare il valore di σ da inserire nella formula di valutazione, utilizzando la volatilità storica[62]. Si procede in questo senso alle analisi delle serie temporali dei prezzi in un periodo precedente più o meno grande. In questo caso ci si troverebbe a valutare un *trade-off* tra attendibilità statistica e coerenza finanziaria: la prima richiede un serie temporale piuttosto lunga in modo che secondo i principi statistici l'ampiezza del campione possa assicurare un maggiore valenza dei risultati ottenuti; regredendo troppo indietro nel tempo però, si rischia di prendere in considerazione dei dati ormai anacronistici che non rispecchiano più il livello di volatilità del prezzo di un titolo, compromettendo la valenza finanziaria dei risultati che risulterebbero distorti qualora tenessero conto di dati di mercato troppo vecchi e per nulla significativi. Chiaro che qualora si decidesse di stimare la volatilità storica, in base al caso specifico, bisognerebbe considerare un campione con un'ampiezza in grado di coniugare contestualmente, le esigenze di calcolo statistico con gli obiettivi finanziari perseguiti.

Un altro utilizzo che può essere fatto della volatilità implicita, è la verifica della bontà del modello di Black-Scholes caso per caso. I valori di σ ottenuti invertendo la formula di valutazione, per opzioni con diverso livello di prezzo di esercizio e di maturità, dovrebbero dare lo stesso risultato; delle discrepanze tra i risultati ottenuti, indicano che in realtà il modello sta spiegando solo parzialmente alcune dinamiche di mercato.

Non bisogna dimenticare che queste misure rappresentano solamente delle stime che potrebbero con una più o meno alta probabilità non essere poi confermate *ex-post* dall'andamento del mercato.

2.2.5 – Metodo di valutazione Monte Carlo

Con il modello di Black-Scholes si è definito un orizzonte temporale continuo su cui studiare l'andamento dei prezzi azionari su intervalli infinitesimi di tempo. In tal modo si è potuto assimilare il processo di prezzo del sottostante ad un moto browiano geometrico, ottenuto come trasformazione di un moto browniano standard, e si è potuto definire una dinamica stocastica, di una generica distribuzione, partendo da variabili

[62] Entrambe le misure di volatilità possono rappresentare il rischio di mercato a cui si espongono gli intermediari finanziari, vengono individuati dalle istituzioni di vigilanza per le banche come gli indicatori da tenere in considerazione per il calcolo del coefficiente di valutazione delle opzioni e quindi nell'applicazione dei requisiti patrimoniali individuali. Anche nella vigilanza delle assicurazioni la liquidità implicita è indicata come un parametro oggettivo di valutazione con cui determinare il valore delle componenti derivate presenti in bilancio. Si sottolinea quindi l'attendibilità e la rilevanza assunta dalla formula di Black-Scholes sui mercati, che permettono di utilizzarla anche per i fini di regolamentazione per l'individuazione dei coefficienti patrimoniali minimi necessari a garantire la solvibilità degli intermediari finanziari.

aleatorie dZ(t) che fungono da “generatori di rumore”; avendo la possibilità di utilizzare una formula chiusa per il pricing dei contratti.

Nella realtà per effettuare simulazioni di traiettorie, si è soliti “discretizzare” l’orizzonte temporale, ottenendo un’equivalente discreto dell’equazione differenziale che caratterizza il processo di prezzo. Un’operazione di questo tipo consiste sostanzialmente nel passare da un orizzonte temporale continuo diviso in intervalli infinitesimi dt ad uno diviso in intervalli finiti Δt[63].

Secondo quanto detto, data un’equazione differenziale stocastica come quella che segue:

$$dY = a(Y,t)dt + b(Y,t)dZ,$$

può essere ottenuto il suo equivalente discreto, sostituendo agli intervalli continui di tempo dt, intervalli di tempo finiti Δt ottenendo un equivalente nel discreto del tipo:

$$\Delta Y = a(Y;t)\Delta t + b(Y;t)\sqrt{\Delta t}\epsilon_t$$

dove $\Delta Y = Y_{t+\Delta t} - Y_t$ rappresenta la variazione di valore nell’intervallo di tempo finito Δt, e ϵ_t sono variabili aleatorie normali standard non correlate. Si noti che un’equazione differenziale, non ha un unico equivalente discreto, ci possono essere molte equazioni alle differenze che accettano la stessa equazione differenziale come limite nel continuo, la scelta dell’equivalente da utilizzare, dipenderà da considerazioni legate a criteri di efficienza numerica.

Una volta stabilito l’equivalente discreto di un’equazione differenziale, la funzione di drift $a(Y;t)$, la funzione di diffusione $b(Y;t)$ e il punto di partenza $Y(0) = y_0$, è possibile ottenere sequenze potenzialmente illimitate di valori di Y su intervalli Δt, alla fine di ogni intervallo, si assegna al rumore ϵ_t un valore estratto da una distribuzione normale standard[64]. La successione ottenuta in questo modo fornisce una traiettoria simulata, ripetendo la procedura, modificando il valore di partenza y_0 e ottenendo sempre valori diversi di ϵ_t, è possibile ottenere un numero illimitato di simulazioni e realizzazioni discrete del processo.

Simulando i cammini di prezzo in questo modo si può ottenere il valore di contratti derivati per i quali non sono possibili espressioni di prezzo in forma chiusa, tali tecniche rientrano nei metodi di pricing di strumenti derivati definiti metodi di Monte-Carlo. Secondo questo approccio il valore in t=0 del prezzo di un’opzione è dato dall’attualizzazione di tutti i possibili valori ottenuti dai flussi simulati, oppure, secondo una prospettiva statistica, sono dati dalla media stimata di una distribuzione assegnata, ottenuta da osservazione campionarie ripetute. In questo senso il *payoff* $V(T)$ di un’opzione, da cui poi dipende il suo valore a scadenza, può essere

[63] Ovviamente per coerenza con le ipotesi di continuità del modello, seppur finiti, gli intervalli temporali Δt sono solitamente di lunghezza piccolissima.

[64] Ovviamente tutti i campionamenti effettuati delle variabili aleatorie ϵ_t devono risultare stocasticamente indipendenti.

ottenuto con la seguente formula:

$$V(t) = \frac{1}{(1+i)^{T-t}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\tilde{Y}(T)]$$

$\sum_{k=1}^{N} f[\tilde{Y}(T)]$ rappresenta lo stimatore di Monte-Carlo e $\tilde{Y}(T)$ tutti i possibili valori di Y(t) ottenuti dalle simulazioni.

Sostanzialmente si tratta di simulare un numero sufficientemente grande di possibili traiettorie di Y dalla data di valutazione t alla data di scadenza T, ogni traiettoria simulata avrà come valore finale un possibile Y(T); effettuando una media di tutti i possibili valori ottenuti e attualizzandola al tasso i è possibile ottenere il valore del payoff V(t) come valore in t del possibile payoff V(t) ottenibile in T. Ovviamente tanto maggiore sarà il numero di simulazioni tanto maggiore sarà l'accuratezza e l'attendibilità dei calcoli[65].

[65] Vd. *infra* cap 3 in cui sarà data una dimostrazione pratica dell'utilizzo dei metodi di Monte-Carlo per la determinazione del prezzo di un'opzione.

Capitolo 3 – Applicazioni con R.

In questo capitolo viene ripresa l'opzione put scritta su azioni Ferrari che è stata oggetto di studio nel capitolo in cui si è trattato il modello di Black-Scholes[66], se ne determinerà il valore seguendo l'approccio dei metodi di valutazione Monte Carlo[67]. La simulazione delle N traiettorie che permettono di determinare N valori di Y(t) a scadenza, verrà effettuata nell'ambiente di studio dell'open source "R". Sarà in tal modo possibile ottenere un numero abbastanza grande di simulazioni, in modo da avere ipotesi di prezzo dell'opzione piuttosto attendibili.

3.1 – Moto Bowniano geometrico ed evoluzione dei prezzi.

Per poter determinare il pezzo di un'opzione, è necessario determinare la serie di possibili cammini che può caratterizzare il processo di prezzo del sottostante.

Nel corso della trattazione si è detto che alla base del modello di Black-Scholes c'è l'ipotesi secondo cui l'andamento del prezzo del titolo sottostante il contratto di opzione S(t), segue un processo di moto Browniano geometrico[68]. Se per poter utilizzare i metodi di calcolo mediante simulazione di Monte-Carlo[69] è necessario simulare quanti più percorsi possibili per il prezzo dell'attività sottostante, è necessario riuscire ad ottenere quante più realizzazioni del moto browniano geometrico possibili.

Si prosegue di seguito alla simulazione di N possibili andamenti del prezzo dei un titolo, con il vincolo che ogni possibile processo di prezzo segue un moto browniano geometrico[70], nel paragrafo successivo si vedrà poi come poter determinare il prezzo dell'opzione con i metodi di calcolo delle differenze finite, sfruttando le simulazioni realizzate.

Il problema può essere sintetizzato come segue: bisogna simulare m moti browniani geometrici con drift μ, volatilità σ e valore iniziale S_0, su un arco temporale di durata T_1 suddiviso in n sottoperiodi.

Nello specifico verrà ripreso il titolo azionario già considerato precedentemente[71]: un'azione Ferrari con prezzo in $t = 0$ pari a $S(0) = 111$€[72]:

---

[66] Vd. *retro* § 2.2.3 – Pricing di un'opzione europea.
[67] Vd. *retro* § 2.2.5 – Metodo di valutazione Monte Carlo.
[68] Vd, *retro* § 2.2.1 – Ipotesi di base del modello.
[69] Vd. *retro* § 2.2.5 – Metodi di calcolo delle differenze finite.
[70] Tutte le simulazioni sperimentazioni e calcoli a cui si fa riferimento sono stati effettuati nell'ambiente di lavoro "R" che permette di eseguire un numero infinitamente grande di simulazioni tramite l'estrazione di valori random che secondo la legge dei grandi numeri permettono di stimare una traiettoria di prezzo.
[71] Vd. *retro* § 2.2.3 – Pricing di un'opzione europea; in particolare si consideri l'ipotesi di pricing di una put europea e il relativo esempio svolto su excell.
[72] La rilevazione del prezzo di mercato è stata effettuata in data 25 Maggio 2018 ore: 17:02.
http://www.borsaitaliana.it/borsa/azioni/grafico.html?isin=NL0011585146&lang=it

```
S0<- 111
```

L'arco temporale su cui verranno eseguite le simulazioni è di 10 anni, e verrà simulata una rilevazione al giorno per 250 giorni ogni anno:

```
T <- 10
gga <- 250
```

di conseguenza l'arco temporale T_1 di durata 10 anni sarà diviso in n sottoperiodi tali che:

```
n <- T*gga
```

per quanto riguarda la volatilità σ verrà considerata pari al 20%, mentre per il tasso *risk-free* che condiziona l'andamento dei pezzi dei titoli azionari, viene utilizzato il tasso di interesse privo di rischio della BCE a 10 anni[73]:

```
sigma <- 0.20
r <- 0.0054100
```

l'intervallo dei passi sarà pari a T/n e verranno simulati 10.000[74] percorsi di prezzo secondo altrettanti moti browniani geometrici:

```
deltat <- T/n
m <- 10000
```

Una volta individuate le grandezze di base necessarie per le simulazioni dei moti, è possibile sfruttare la possibilità offerta da "R", che premette di eseguire calcoli e gestire un numero tanto grande di dati, per poter risolvere il problema.

Evitando di utilizzare i pacchetti di formule predefiniti dal sistema è possibile dare una rappresentazione dettagliata dei passaggi necessari per ottenere un elevato numero di simulazioni; al fine di una migliore comprensione verranno eseguiti i passaggi "manualmente" senza l'ausilio delle formule fornite[75], nonostante ciò possa risultare più oneroso in termini computazionali e di tempi di calcolo.

---

[73] Vd. *retro* § 2.2.3 – Pricing di un'opzione europea, anche in questo caso di rimanda all'esempio svolto precedentemente, da cui vengono ripresi i dati principali. In entrambi i casi il tasso BCE a 10 anni è stato ottenuto dalla curva dei tassi spot in data 25 Maggio 2018.
https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

[74] In questo caso è stato simulato un numero piuttosto ridotto di moti per non appesantire la trattazione con formalità di calcolo, ovviamente tanto maggiore sarà il numero di simulazioni effettuate, tanto più attendibili saranno i risultati ottenuti. Non bisogna dimenticare che si sta parlando di estrazioni di valori random, pertanto tanto maggiore sarà il numero di estrazioni tanto più i risultati rappresenteranno fedelmente la realtà.

[75] In questa fase si procederà spiegando ogni passaggio illustrato, assicurando la massima comprensione, al termine della spiegazione verrà fornito lo script completo del lavoro svolto su "R".

L'approccio più immediato per risolvere il problema è quello che prevede l'utilizzo di un ciclo *for*. Prima di tutto è necessario memorizzare i singoli percorsi nelle righe di una matrice $m * (n + 1)$:

```
1- MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
```

Dopodiché è necessario fissare il punto di partenza del moto, ovvero il valore iniziale del percorso di prezzo che è dato da S(0):

```
2- MotiBr[,1] <- S0
```

Riprendendo quanto detto in proposito del moto browniano geometrico[76], si tenga quanto detto in tema di distribuzione dei rendimenti logaritmici dell'attività sottostante e della loro caratteristica ad essere descritti da una distribuzione di probabilità normale. È necessario in questo caso riprendere la distribuzione di probabilità normale, stabilendo il seme in modo che ogni simulazione possa seguire la distribuzione di probabilità con lo stesso seme:

```
3- set.seed(123456)
   N <- matrix(rnorm(m*(n-1),0,1),m,(n-1))
```

Come già detto precedentemente, è necessario ricorrere ad un ciclo for che premette di realizzare un ciclo iterativo[77]; il ciclo for è composto da due parti distinte: l'iniziale dichiarazione della condizione e il corpo di istruzioni da ripetere. Nel caso in esame, l'input dato al software "R" per eseguire un ciclo for in grado di reiterare i calcoli sulla matrice $m * (n + 1)$ in cui sono stati memorizzati i singoli percorsi avrà una composizione di questo tipo:

```
 4- for (i in 1:m){
for (j in 2:n){
  MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp(r*deltat+sigma*N[i,j-1]*sqrt(deltat))
}
}
```

Si noti che la formula applicata alle colonne e alle righe della matrice dei percorsi del tipo:

```
MotiBr[i,j-1]*exp(r*deltat+sigma*N[i,j-1]*sqrt(deltat))
```

non è altro che la formula che descrive un moto browniano geometrico[78]. Sostanzialmente applicando

[76] Vd *retro* § 2.2.1 – Ipotesi di base del modello. Si presti particolare attenzione alla descrizione delle caratteristiche del moto browniano geometrico, e all'importanza della distribuzione di probabilità.
[77] Per ogni iterazione, ogni valore della matrice costruita precedentemente sarà moltiplicato con l'attuale valore di i nel primo ciclo o di j nel secondo.
[78] Vd. *retro* § 2.2.1 – Ipotesi di base del modello.

l'equazione di moto browniano geometrico alla matrice dei percorsi, si ha la possibilità di applicare un vincolo per cui ogni possibile percorso simulato si muoverà seguendo una traiettoria di moto tipica del moto browniano geometrico[79].

Gli ultimi passaggi consistono nella simulazione della distribuzione dei pezzi,

5- `hist(MotiBr[,n],25)`

dopodiché bisogna individuare il valore atteso della simulazione a 10 anni, ottenuto come valore medio di tutti i prezzi ottenuti dalle simulazioni:

6- `mean(MotiBr[,n])`

e infine stimare il valore atteso analitico[80]:

7- `S0*exp((r+sigma^2/2)*T).`

In fine è possibile rappresentare graficamente i risultati ottenuti, ottenendo su un grafico tutti i 10.000 percorsi simulati; sull'asse delle ascisse viene misurato il tempo, su quello delle ordinate viene indicato il prezzo dell'attività:

```
plot((1:n)/gga,
MotiBr[1,],type='l',ylim=c(0,max(MotiBr)),xlab='',ylab='',col='gray60')
for (i in 2:100) {
  lines((1:n)/gga,MotiBr[i,],col=i)
}

grid(lty=2,col='lightgray')
abline(h=0)
```

Si riporta di seguito l'intero script, spiegato precedentemente, con il quale è stato possibile simulare su "R" 10.000 possibili cammini del prezzo dell'azione Ferrari, ipotizzando un moto di prezzo fedele al moto browniano geometrico partendo dal prezzo S(t) conosciuto in t_0[81].

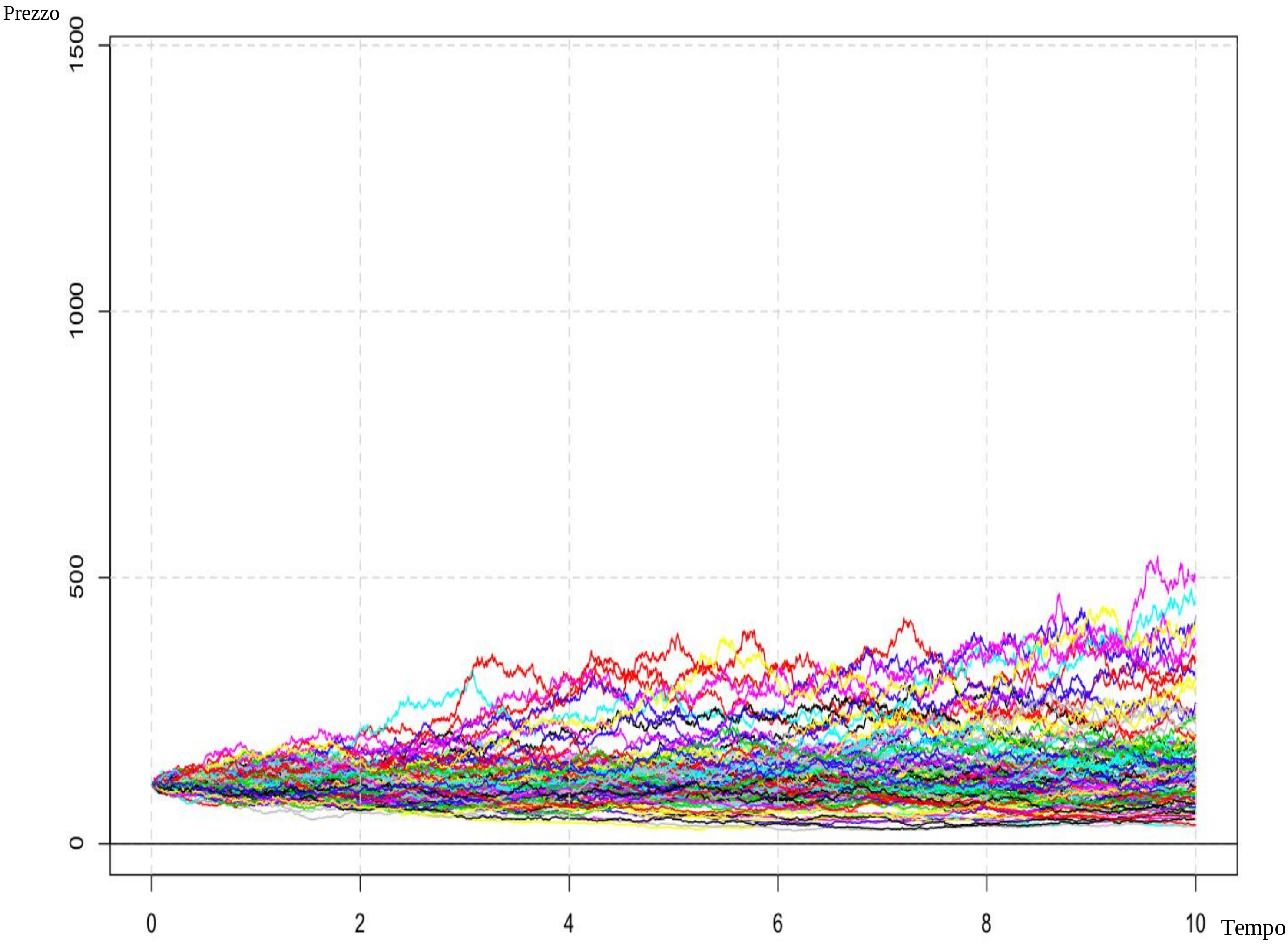
[79] Risulta questo un passaggio fondamentale sia per rispettare le ipotesi del modello di Black-Scholes sia per evitare di estrarre valori negativi di prezzo. Simulando i processi di prezzo in modo che si muovano secondo un moto browniano geometrico, e quindi applicando l'esponenziale ad ogni moto, è garantita la positività del processo stocastico S_t, viene in questo modo scongiurata l'eventualità di ottenere prezzi negativi. Implicitamente si ipotizza che i rendimenti logaritmici dell'attività finanziaria siano distribuiti secondo una normale e quindi che i prezzi hanno distribuzione lognormale.

[80] Vd. in proposito il § - Struttura probabilistica dell'appendice C del libro "G. Castellani, M. d. Felice, F. Moriconi, *Manuale di finanza. Vol.3: Modelli stocastici e contratti derivati. Il Mulino (2006)*", pp 407.

[81] Per le altre caratteristiche si rimanda alla trattazione precedente dello stesso paragrafo.

```
> # Azione Ferrari S0=111
> S0<- 111
> T <- 10
> gga <- 250
> n <- T*gga
> sigma <- 0.20
> r <- 0.0054100
> deltat <- T/n
> m <- 10000
>
> MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
> MotiBr[,1] <- S0
>
> set.seed(123456)
> N <- matrix(rnorm(m*(n-1),0,1),m,(n-1))
>
> for (i in 1:m){
+   for (j in 2:n){
+     MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp(r*deltat+sigma*N[i,j-1]*sqrt(deltat))
+   }
+ }
>
> hist(MotiBr[,n],25)
> mean(MotiBr[,n])
[1] 143.0875
> S0*exp((r+sigma^2/2)*T)
[1] 143.1124
>
> plot((1:n)/gga, MotiBr[1,],type='l',ylim=c(0,max(MotiBr)),xlab='',ylab='',col='gray60')
> for (i in 2:100) {
+   lines((1:n)/gga,MotiBr[i,],col=i)
+ }
> grid(lty=2,col='lightgray')
> abline(h=0)
```

La rappresentazione grafica dei percorsi simulati ottenuta con l’input descritto in precedenza, viene riportata di seguito:



Ogni curva colorata rappresenta un possibile tragitto di prezzo, si noti che tutte le curve hanno origine nel punto di coordinate 0-111, ovvero tutte si sviluppano dall'istante 0 in cui il prezzo S(t) del titolo Ferrari è pari a 111€. In T= 10 anni si ottengono in questo modo m valori diversi frutto degli m percorsi simulati, ognuno dei quali rappresenta a scadenza una distribuzione di probabilità lognormale, banalmente incrementando il numero di simulazioni e quindi di estrazioni di prezzo a scadenza, si avrebbe potuto ottenere una stima e una distribuzione di probabilità in grado di rispecchiare la realtà più fedelmente.

Si noti che i prezzi a scadenza sono compresi in un intervallo piuttosto ampio, e che grazie alle estrazioni random è possibile ottenere valori che sono espressione di scenari molto diversi tra loro. Secondo alcuni sentieri simulati, il prezzo potrebbe superare di molto il valore in t=0 (secondo il tragitto descritto dalla curva rosa il prezzo in t=10 potrebbe essere pari a 500€); altri scenari lasciano invece ipotizzare gravose perdite di valore del valore del titolo (alcune curve in T=10 sono molto vicine allo 0). Chiaramente il valore di una qualsiasi opzione scritta su un titolo Ferrari ad oggi, avente un andamento di prezzo come quello rappresentato, risentirà della previsione del prezzo futuro, ottenuta in questo modo, dato che questa inciderà

in maniera significativa sul *payoff* atteso. Nel caso specifico si noti che la media dei possibili prezzi del titolo tra 10 anni, è pari a $S(T) = 143.0875€$[82] che rappresenta quindi il valore atteso del titolo in T=10. Ipotizzando di scrivere un'opzione avente le caratteristiche riportate nell'esempio precedente[83]: put con prezzo strike $K = 100$, secondo le previsioni di prezzo qui effettuate, l'opzione in T=10 risulterà out of the money, per questo motivo un operatore ad oggi sarà disposto a pagare solo per il suo valore temporale, dato che il valore attuale del suo *payoff* alla data di valutazione t=0 è nullo, e il valore intrinseco atteso è pari a 0.
Altro importante fattore del grafico, è la caratteristica del *random walk* dei prezzi: ogni curva procede "per punti angolosi"; viene pertanto rispettato il principio di indipendenza degli incrementi nel tempo continuo che impone che tutte le traiettorie non abbiano caratteristiche di prevedibilità locale.

3.2 – Applicazione metodo Monte Carlo

In questo paragrafo si determinerà il prezzo di un'opzione put europea scritta su un sottostante che non paga dividendi, utilizzando il metodo di pricing tramite simulazione di Monte-Carlo. In particolare si riprende l'opzione già prezzata tramite la formula chiusa di Black-Scholes, in modo da poter evidenziare eventuali differenze tra i risultati ottenuti.

L'opzione da prezzare presenta le seguenti caratteristiche: $\begin{cases} K = 100 \\ T = 10 \\ r = 0.5410\% \end{cases}$; il sottostante è il titolo Ferrari il cui andamento di prezzo è stato oggetto di studio nel paragrafo precedente.
Il primo step necessario per determinare il prezzo tramite simulazioni di Monte-Carlo[84], è la previsione dei possibili valori che il prezzo dell'azione del sottostante può assumere a scadenza in T=10. A questo scopo è possibile riprendere l'ultima riga della matrice dei valori di prezzo simulati nel paragrafo precedente che indicano tutti i 10000 possibili valori dell'azione tra10 anni.
In questo senso immettendo l'input

```
Set.seed (123456)
MotiBr[,10]
```

è possibile ottenere il vettore dei 10.000 prezzi simulati, per evitare di appesantire la trattazione riportando il piano di lavoro "R" in cui vengono raffigurati i 10000 possibili valori di prezzo, verrà qui riportata la schermata raffigurante i primi dieci, per dare un'idea del tipo di output che si ottiene a seguito di una simile operazione:

```
[9361] 101.04770 109.97726 102.94679 116.07065 107.62911 107.21702 106.41614 109.69458 105.56643 111.23696 113.95566 115.72742 110.49103 109.83035 107.61596
 [9376] 110.78368 110.50237 109.05071 105.59735 110.09063 109.99721 114.76517 109.60917 109.90132 112.69706 109.79564 110.35849 110.36214 111.54305 110.41578
```

---

[82] Si guardi a proposito il passaggio riportato nello script d "R" che ha permesso di ottenere l'output [1]
[83] Vd. retro § 2.2.3 – Pricing di un'opzione europea, in prticolare alle caratteristiche dell'opzione put presa come esempio.
[84] Vd. *retro* § 2.2.5 – Metodi di calcolo delle differenze finite.

```
[9391] 105.86200 113.08655 114.72213 114.61717 112.54421 117.09771 114.34762 109.36064 107.65044 104.20934 109.63458 111.88566 113.28426 108.70810 102.84886
[9406] 110.03325 108.90590 111.50651 113.65868 114.74383 112.37112 110.25619 106.72090 116.09325 113.43886 111.23613 109.83345 109.81951 101.90176 109.37806
[9421] 107.74349 115.83539 108.58900 105.25374 105.95904 114.69097 109.90524 113.67129 107.58439 103.93306 108.94342 106.03658 115.68727 112.43532 105.75004
[9436] 116.58885 115.89516 107.57467 111.20737 109.14109 108.03552 109.16539 107.68558 107.05968 108.67006 105.82596 123.17279 116.72398 113.40017 111.64929
[9451] 122.43308 108.72624 109.84278 111.67170 107.81940 102.94340 113.63551 112.74838 107.45423 109.69550 107.84565 108.70693 114.07115 110.23333 109.68199
[9466] 113.80200 106.64033 105.52395 111.20872 114.06197 113.91620 111.52158 111.26317 105.43046 122.34876 112.74186 107.45466 112.42284 108.06163 112.86270
[9481] 107.08843 110.72224 117.14269 111.68486 115.33472 109.51128 111.53202 113.27207 110.88338 116.97599 102.18515 112.25207 114.28779 112.70267 107.03592
[9496] 105.96909 105.92377 106.80674 117.08190 117.67633 104.50058 114.58765 110.09564 107.78286 110.75895 107.06878 115.92290 109.40568 108.97839 108.15293
[9511] 119.78175 112.59925 111.26783 112.56202 108.54936 112.19053 112.50176 116.60104 117.07314 109.71562 111.01946 112.63024 116.74655 115.09955 106.22533
[9526] 121.05858 112.53848 109.24622 111.78153 107.85062 106.40404 108.44286 113.36069 109.45509 113.50764 103.80137 112.14875 113.48352 111.94400 106.19525
[9541] 110.15566 118.46781 106.24009 111.57614 112.49221 111.51633 112.56380 111.04552 102.67912 112.96084 111.52637 109.85848 111.63614 105.22826 110.11349
[9556] 109.27633 115.42726 109.82191 111.51118 112.80068 108.65162 119.45430 113.35753 113.69602 116.01173 109.42641 112.71800 108.48445 108.48449 103.41849
[9571] 111.64150 108.56471 106.90236 113.32810 114.34265 110.86722 107.89358 109.36628 111.38916 109.62020 112.90334 111.17610 110.00981 114.05499 116.70146
[9586] 111.34195 109.33277 111.81612 112.67121 105.90428 120.88947 112.15193 118.21764 107.83470 116.17320 114.99040 101.84555 114.56722 115.85295 103.30636
[9601] 112.45707 115.32568 108.71769 117.45949 114.78947 106.83509 105.38053 110.94032 114.42964 111.28830 114.99829 110.48585 111.11255 114.55057 112.70901
[9616] 108.59702 109.91525 117.17602 117.78522 116.19018 112.72034 111.45148 113.70849 112.64156 105.65943 119.97692 113.66771 110.92227 108.25312 106.86584
[9631] 113.75629 112.23639 119.69594 114.67387 118.19977 109.40816 119.79554 112.18037 112.20414 117.57713 111.61237 105.77284 106.65242 126.12731 102.32805
[9646] 108.67286 112.12898 113.48111 110.13352 107.18423 104.20677 113.95014 112.98773 114.63447 110.25838 115.25277 115.53796 106.66742 103.36763 119.18884
[9661] 110.63092 107.61293 111.25905 117.38013 116.25814 111.63664 108.99148 118.28220 114.47533 106.09805 114.52519 115.87064 113.24042 113.44426 115.60534
[9676] 113.22216 112.90127 106.72083 107.09673 115.06762 113.95089 113.91633 110.73045 103.96324 110.56136 106.65637 114.98378 111.58754 110.36257 105.15517
[9691] 106.72469 111.59437 104.97392 115.13355 108.76583 110.35724 113.10853 112.60710 118.56793 111.50019 115.24373 108.41566 110.97797 110.10080 105.79149
[9706] 116.57683 113.32130 106.87030 109.77418 110.03966 119.81951 108.31590 109.53348 110.09557 111.21447 109.24656 113.45930 115.50133 111.05960 107.04477
[9721] 115.76716 108.91574 110.89620 105.29911 120.43206 112.17998 105.20233 109.54803 113.75971 106.52961 118.60971 110.09363 105.38508 113.09154 111.63806
[9736] 108.21078 108.73688 110.79375 113.85329 112.00576 107.75322 113.19503 110.02029 110.96979 99.66365 117.53320 113.27360 106.98037 116.43087 118.86675
[9751] 116.21952 111.12721 112.76986 114.59517 112.30432 117.36245 111.88851 111.34538 115.70767 111.04765 115.72619 111.75463 104.63576 110.62169 106.63058
[9766] 111.69615 112.50919 108.76486 111.52126 110.92140 113.86068 109.40583 110.15451 111.01940 107.29314 107.29907 110.69469 110.07333 109.30734 114.83165
[9781] 110.61734 108.53050 110.10857 109.89133 121.48547 122.68458 109.95121 114.71906 113.11664 107.48793 114.88363 106.32310 115.33097 108.28587 112.37524
[9796] 109.83876 111.88773 109.54094 104.45177 111.72914 109.65244 119.12356 111.78879 113.61567 109.83397 111.52612 112.41772 108.55536 112.29627 110.99583
[9811] 114.01984 113.76680 117.31753 115.64380 112.87463 106.56152 113.98842 109.69399 114.16942 110.53612 117.11703 113.47139 109.64963 110.56093 113.37012
[9826] 110.83991 110.06868 112.58783 109.20387 111.76987 104.13781 110.45068 106.44651 115.20809 113.41687 107.36949 110.67567 112.58739 107.30246 115.09662
[9841] 107.47755 112.54562 110.89114 112.87206 111.02970 106.05375 110.86209 112.51944 116.46662 116.57885 113.66378 116.26480 103.07103 102.76311 112.96676
[9856] 118.41942 111.61600 113.46714 110.34212 110.15603 116.84196 109.16031 104.22481 107.02811 113.89651 108.85064 114.50710 118.72032 114.82924 112.81060
[9871] 110.63167 115.74061 112.53547 121.97697 108.09118 115.51078 110.13256 112.27570 113.00252 115.60126 107.40905 113.44212 114.78236 110.03685 105.55213
[9886] 108.00934 109.00409 104.86438 111.89407 109.68352 114.27668 110.10302 104.60386 110.47516 111.05292 110.35031 120.56686 112.98400 114.01666 112.10220
[9901] 103.68467 106.43894 111.72811 116.41639 118.28180 106.98528 110.52195 120.94126 108.69009 104.69386 114.80969 101.32404 114.29827 112.66966 111.69443
[9916] 111.18626 111.88227 109.68127 109.36644 115.65722 108.57510 109.04985 113.71179 120.49580 106.10627 116.06714 105.07261 113.60537 106.76585 107.68211
[9931] 103.70280 107.92234 112.51262 110.59541 114.35367 109.93957 111.56570 108.99520 113.20218 114.22721 113.72114 113.53811 110.43279 110.62687 108.89549
[9946] 107.51827 107.67428 101.47331 109.05013 108.71930 111.76199 110.52026 109.42497 106.84367 116.28945 113.93850 109.33895 103.90194 113.09227 116.42396
[9961] 106.23564 117.93787 107.85277 117.26805 110.35225 107.05991 118.73625 120.44426 120.26603 116.37846 111.20467 105.27657 104.37398 111.09169 101.57209
[9976] 105.34073 108.68012 115.50804 115.95321 114.35116 117.27361 106.11078 116.90846 107.58975 117.92716 108.20795 113.70526 110.18792 104.87719 107.08138
[9991] 111.40560 111.56409 113.35405 109.28147 117.00845 108.36553 106.84626 114.71694 115.56011 107.78501
```

Una volta individuati i possibili prezzi ottenibili a scadenza, è necessario individuare i *payoff* corrispondenti ad ogni prezzo, trattandosi di una put, avranno valore solamente i prezzi che ne permettono l'esercizio, tali che S(T) < K[85]. In questo senso bisogna prima di tutto assegnare ad S un possibile valore tra quelli estratti dal vettore dei prezzi simulati in t=10 per cui:

```
S<- MotiBr[,n]
K<- 100
```

in questo senso è possibile determinare i *payoff* a scadenza sottraendo al prezzo strike K ogni possibile prezzo S, ovvero ogni valore che è presente nell'ultima colonna della matrice che rappresenta tutti i possibili prezzi a scadenza:

```
Put.payoff <- pmax(0,K-S)
```

[85] Vd. *retro* § 1.3.1 – Long position short position sulle opzoni, con particolare riferimento alla long position su un'opzione put e il suo valore.

Una volta determinati i *payoff* a scadenza ottenibili dai prezzi simulati, è necessario individuare il valore attualizzato dei *payoff*, scontandoli al tasso di mercato.
Riprendendo quanto detto riguardo i metodi di calcolo delle differenze finite tramite simulazioni di Monte-Carlo[86], il *payoff* atteso rappresenta lo stimatore di Monte-Carlo, pertanto il suo valore attualizzato indica il valore dell'opzione alla data di valutazione t_0; riprendendo la formula per cui:

$$V(t) = \frac{1}{(1+i)^{T-t}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\tilde{Y}(T)]$$

L'input da inserire in R sarà il seguente:

```
Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
mean(Put.payoff.disc)
```

Ovviamente il payoff viene attualizzato al tasso di mercato risk-free, che come fissato per ipotesi è pari al tasso della BCE a 10 anni. Il risultato finale della procedura rappresenta il prezzo dell'opzione put europea il cui sottostante non paga dividendi, con le caratteristiche descritte all'inizio del paragrafo:

```
Putprice
 [1] 18.14659 €
```

il valore ottenuto rappresenta il prezzo che un operatore è disposto a pagare in t=0 per acquistare la put europea scritta su titoli Ferrari con scadenza tra 10 anni, in base a quelle che sono le sue previsioni sull'andamento del prezzo dell'azione sottostante.
Viene di seguito fornito lo script completo con gli input da inserire in R per determinare il prezzo di un'opzione put con caratteristiche predeterminate, utilizzando il metodo di calcolo delle differenze finite tramite simulazione di Monte-Carlo:

```
> Put.payoff <- pmax(0,K-MotiBr[,n])
> Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
> mean(Put.payoff.disc)
[1] 18.14659
> Putprice <- mean(Put.payoff.disc)
> Putprice
       [1] 18.14659
```

Anche in questo caso, esattamente come nel caso della valutazione con Black-Scholes, è possibile notare

[86] Vd. *retro* § 2.2.5 – Metodo di calcolo di valutazione Monte Carlo.

come cambia il prezzo dell'opzione, al variare di alcune variabili fondamentali che lo influenzano[87]: prezzo del sottostante in t=0, prezzo strike, tempo, volatilità, e tasso *risk-free*.

1- Se cambia S(0) per cui diventa S(0)= 90€ allora il *Putprice* si può ottenere come segue:

```
> S0<- 90
> T <- 10
> gga <- 250
> n <- T*gga
> sigma <- 0.20
> r <- 0.00541
> deltat <- T/n
> m <- 10000
> K <- 100
> MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
> MotiBr[,1] <- S0
> set.seed(123456)
> for (i in 1:m){
+   for (j in 2:n){
+     MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp((r-sigma^2/2)*deltat+sigma*rnorm(1)*sqrt(deltat))
+   }
+ }
> mean(MotiBr[,n])
[1] 94.84442
> S0*exp(r*T)
[1] 95.00311
> Put.payoff <- pmax(0,K-MotiBr[,n])
> Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
> mean(Put.payoff.disc)
[1] 25.28233
> Putprice <- mean(Put.payoff.disc)
> Putprice
[1] 25.28233
```

Il valore dell'opzione put ovviamente aumenta al diminuire del prezzo, diventando

```
PutPrice
[1] 25.28233 €
```

2- Se cambia il prezzo strike tale che K=110€ allora:

```
> S0<- 111
> T <- 10
> gga <- 250
> n <- T*gga
> sigma <- 0.20
> r <- 0.00541
> deltat <- T/n
> m <- 10000
```

[87] Vd. *retro* § 1.4.2 – Valutazione delle opzioni.

```
> K <- 110
> MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
> MotiBr[,1] <- S0
> set.seed(123456)
> for (i in 1:m){
+   for (j in 2:n){
+     MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp((r-sigma^2/2)*deltat+sigma*rnorm(1)*sqrt(deltat))
+   }
+ }
> mean(MotiBr[,n])
[1] 116.9748
> S0*exp(r*T)
[1] 117.1705
> Put.payoff <- pmax(0,K-MotiBr[,n])
> Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
> mean(Put.payoff.disc)
[1] 23.37567
> Putprice <- mean(Put.payoff.disc)
> Putprice
[1] 23.37567
```

Anche in questo rimane valida la relazione diretta tra prezzo strike della put e il suo valore, per cui *Putprice* aumenta all'aumentare dello strike.

```
PutPrice
[1] 23.37567 €
```

3- Se la volatilità aumenta per cui $\sigma = 25\%$:

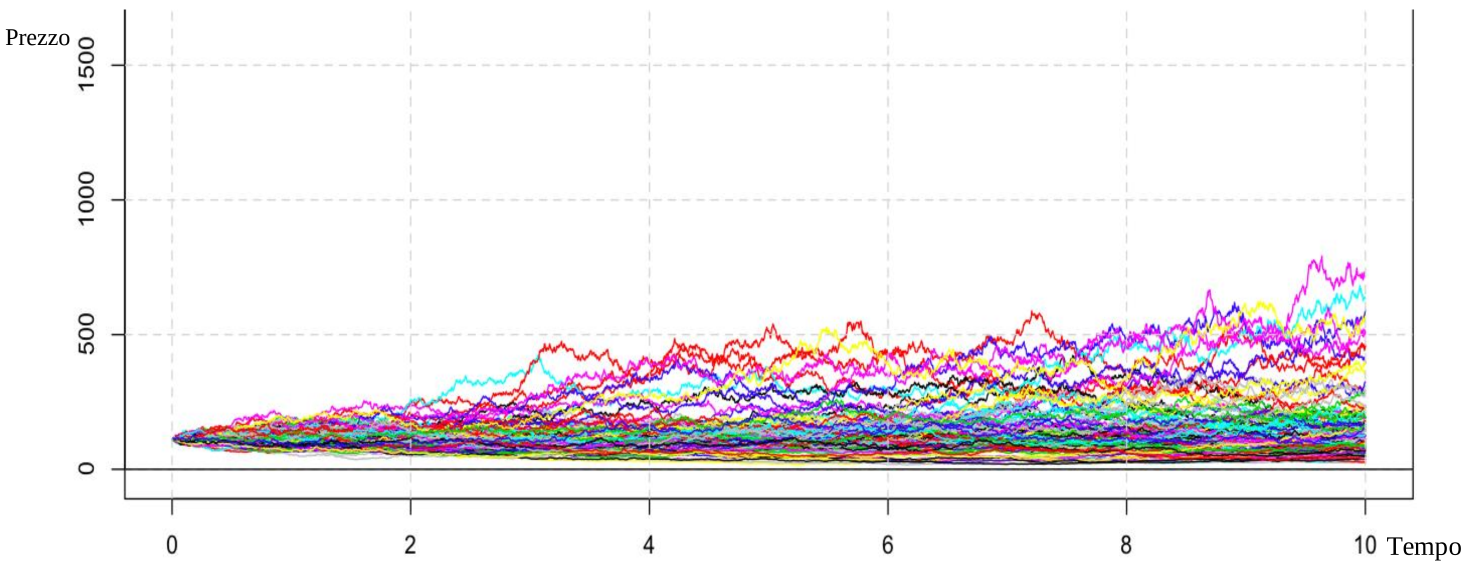
```
> S0<- 111
> T <- 10
> gga <- 250
> n <- T*gga
> sigma <- 0.25
> r <- 0.00541
> deltat <- T/n
> m <- 10000
> K <- 100
> MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
> MotiBr[,1] <- S0
> set.seed(123456)
> for (i in 1:m){
+   for (j in 2:n){
+     MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp((r-sigma^2/2)*deltat+sigma*rnorm(1)*sqrt(deltat))
+   }
+ }
> mean(MotiBr[,n])
[1] 116.766
```

```
> S0*exp(r*T)
[1] 117.1705
> Put.payoff <- pmax(0,K-MotiBr[,n])
> Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
> mean(Put.payoff.disc)
[1] 24.01517
> Putprice <- mean(Put.payoff.disc)
> Putprice
[1] 24.01517
```

Se aumenta la volatilità del sottostante, aumenta anche il valore dell'opzione.

```
PutPrice
[1] 24.01517
```

In questo caso è interessante anche notare come cambia graficamente il tragitto dei prezzi:



Si noti che molti valori di prezzo simulati possono superare anche di molto il limite di 500 a differenza del caso precedente in cui solo due superavano di poco questo valore, tale effetto è dovuto ad un aumento della volatilità.

4- Se aumenta la vita del contratto per cui la scadenza diventa T=15:

```
> S0<- 111
> T <- 15
> gga <- 250
> n <- T*gga
> sigma <- 0.20
```

```
> r <- 0.00541
> deltat <- T/n
> m <- 10000
> K <- 100
> MotiBr <- mat.or.vec(nr = m,nc = n)
> MotiBr[,1] <- S0
> set.seed(123456)
> for (i in 1:m){
+   for (j in 2:n){
+     MotiBr[i,j] <- MotiBr[i,j-1]*exp((r-sigma^2/2)*deltat+sigma*rnorm(1)*sqrt(deltat))
+   }
+ }
> mean(MotiBr[,n])
[1] 121.851
> S0*exp(r*T)
[1] 120.3832
> Put.payoff <- pmax(0,K-MotiBr[,n])
> Put.payoff.disc <- Put.payoff*(exp(-r*T))
> mean(Put.payoff.disc)
[1] 21.89835
> Putprice <- mean(Put.payoff.disc)
> Putprice
[1] 21.89835
```

All’aumentare della vita del contratto aumenta il suo valore temporale e quindi il suo prezzo.

```
PutPrice
[1] 21.89835 €
```

Nella determinazione di prezzo effettuata in questo modo, è possibile anche stabilire un intervallo di confidenza in modo da garantire un grado di fedeltà alla realtà e determinare un valore di prezzo più o meno attendibile a seconda del grado di confidenza prefissato. Ovviamente all’aumentare delle estrazioni aumenta la significatività ed attendibilità dei risultati ottenuti. L’intervallo di confidenza è uno dei metodi che si possono utilizzare per valutare l’ampiezza dell’errore massimo che si può commettere, avendo la possibilità in questo modo di poter disporre di un criterio oggettivo con cui determinare la numerosità campionaria che permette di avere estrazioni piuttosto attendibili, che siano in grado di minimizzare il margine di errore commesso[88].

[88] Per lo sviluppo di questi metodi si rimanda al libro “Finanza quantitativa con R” Marco Bee, Flavio Santi, Apogeo, Milano, 2013; capitolo 4, § 4.5 – La valutazione mediante simulazione di Monte-Carlo, in particolare si presti particolare attenzione all’algoritmo 4.12 – Calcolo della numerosità minima.

Conclusione

Nell'ultimo capitolo, sono state fornite rappresentazioni pratiche dei modelli e dei concetti teorici spiegati precedentemente, utilizzando dati rilevati empiricamente. Il confronto tra il dettato teorico e il riscontro nei diversi risultati ottenuti con le applicazioni pratiche, diventa un passaggio di chiusura imprescindibile per una giusta analisi ed esposizione degli argomenti trattati. In questa sede verrà pertanto evidenziato come nella pratica, i diversi modelli possano dar vita a risultati piuttosto simili pur seguendo approcci differenti.

Nella trattazione precedente è stato calcolato il prezzo di una stessa opzione put europea scritta su titoli Ferrari che non pagano dividendi, utilizzando due diversi approcci: con la formula chiusa di Black-Scholes e con il metodo delle simulazioni di Monte-Carlo.

Per l'applicazione del modello di Black-Scholes si è utilizzato il piano di lavoro di Excel che ha permesso di ottenere il prezzo del contratto con estrema facilità, ma soprattutto ha permesso di effettuare analisi di sensitivity. Partendo dagli input empirici iniziali, che hanno dato un risultato di prezzo, è stato possibile di volta in volta modificare il valore di una variabile determinante nella determinazione del prezzo (a parità di tutte le altre) notando come ognuna di queste potesse condizionare il valore dello strumento. I risultati ottenuti in questo modo, hanno fatto notare una perfetta aderenza ai concetti teorici espressi nel primo capitolo.

Successivamente si è calcolato il prezzo dell'opzione utilizzando il metodo di valutazione basato sulla tecnica di Monte Carlo. In primo luogo è stato necessario simulare un numero abbastanza grande di cammini di prezzo del sottostante per ottenere risultati piuttosto attendibili, a tal fine si è partiti dall'ipotesi per cui il prezzo di un titolo si muove secondo un moto browniano geometrico, anche in questo caso i risultati ottenuti in R hanno permesso di verificare anche graficamente quanto detto in modo teorico. Una volta ottenuti i 10.000 cammini di prezzo simulati, si è potuto calcolare lo stimatore di Monte-Carlo e quindi il prezzo dell'opzione. In questo secondo caso, si è ottenuto un prezzo molto simile al precedente ma non identico.

Si riprendono a questo proposito le due applicazioni effettuate per determinare il prezzo del contratto:

Caratteristiche del contratto di opzione		
Prezzo sottostante	S(0)	111,00 €
Prezzo strike	K	100,00 €
Tasso r	r	0,54100%
Volatilità	σ	20%
Scadenza	T	10
Istante inziale	t	0

Prezzo BS	Prezzo Monte Carlo
P(0) 18,06 €	PutPrice [1] 18.14659 €

È interessante notare che, per quanto quasi ugual, i prezzi ottenuti, uno con la formula chiusa di Black-Scholes, l'altro con il metodo di Monte-Carlo, presentano una piccola discrepanza di valore. Tale effetto è riconducibile al margine di errore intrinseco nell'applicazione di entrambi i modelli. Da un lato l'approccio numerico-quantistico alla base del metodo di Monte Carlo, che vede una relazione di diretta proporzionalità tra l'attendibilità dei risultati e il numero di simulazioni. Aumentando il numero di simulazioni, infatti, l'errore di stima tenderebbe a zero e si potrebbero ottenere, in modo del tutto teorico, risultati quasi certi.
Per quanto riguarda le ipotesi alla base del modello di Black-Scholes, come spiegato nel testo, sono spesso riconosciute come il vero punto di forza del modello in quanto permettono di studiare con un approccio concettualmente e matematicamente piuttosto semplice, un ambiente molto complesso quale quello dei mercati finanziari. Allo stesso tempo, dal punto di vista della precisione dei risultati, queste stesse ipotesi rappresentano il vero limite del modello di BS: spesso risultano pure astrazioni teoriche, avulse dalla realtà che non permettono di generare risultati completamente attendibili o previsioni certe degli sviluppi futuri. L'impossibilità di ottenere previsioni certe, si riflette in piccolissime differenze di valore dei risultati ottenuti tramite l'applicazione di modelli differenti.
In conclusione l'applicazione pratica dei concetti espressi a livello teorico ha permesso un'analisi molto più approfondita e chiara delle relazioni tra i modelli nonché del loro grado di sensibilità ad alcune variabili di calcolo e delle loro relazioni principali. Si è potuto notare inoltre, come ogni principio teorico fosse perfettamente confermato dai relativi risultati pratici con un margine di errore infinitesimo.

Bibliografia

P. L. FABRIZI, F. SAITA, G. ZANOTTI, U. POMANTE, *Economia del mercato mobiliare*, 2016, Milano, VI ed.

M. D. FELICE, F. MORICONI, G. CASTELLANI, *Manuale di finanza*: *Modelli stocastici e contratti derivati*, v. 3, 2006, Milano.

M. BEE, F. SANTI, *Finanza quantitativa con R*, 2013 Milano.

J. C. HULL, *Opzioni, futures e altri derivati*, 2017 VIII ed..

A. SAUNDERS, M. MILLON, M.ANOLLI, *Economia degli intermediari finanziari, 2015,* IV ed.

Programma “R” disponibile sul sito: *https://cran.r-project.org/bin/macosx/*

Prezzo titoli Ferrari rilevato su: *http://www.borsaitaliana.it/borsa/azioni/scheda/NL0011585146.html?lang=it*

Tasso risk-free BCE a 10 anni rilevato su:
https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html