



*Dipartimento di Impresa e Management
Cattedra di Matematica Finanziaria*

*Considerazioni sull'immunizzazione finanziaria: approccio deterministico e stocastico e
simulazioni del tasso spot con il modello CIR*

RELATORE
Prof. Nino Savelli

CANDIDATO
Davide Giovanardi
Matricola 200121

Anno Accademico 2017/2018

Indice

INTRODUZIONE	3
1. TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE CLASSICA	4
1.1 DEFINIZIONE E IPOTESI DEL MODELLO.....	4
1.1.1 <i>Struttura per scadenza dei rendimenti</i>	5
1.2 IL TEOREMA DI FISHER E WEIL	8
1.3 DURATION.....	13
1.3.1 <i>Tempo Ottimo di Smobilizzo</i>	14
1.4 COPERTURA DI USCITE MULTIPLE.....	15
1.4.1 <i>Duration di secondo ordine e Convexity</i>	18
1.4.2 <i>Teorema di Redington</i>	21
2. PROCESSI STOCASTICI	24
2.1 MOTO BROWNIANO	24
2.2 MOTO BROWNIANO STANDARD.....	25
2.3 MOTO BROWNIANO GEOMETRICO	26
2.3.1 <i>Distribuzione Lognormale</i>	27
2.3.2 <i>Relazione tra modello deterministico e modello stocastico</i>	30
2.3.3 <i>Dal continuo al discreto</i>	31
2.4 APPLICAZIONI DEL MOTO BROWNIANO GEOMETRICO	32
2.4.1 <i>Simulazione di Monte Carlo per processi di prezzo su Excel</i>	32
2.4.2 <i>Simulazione di traiettorie decennali su R</i>	37
2.5 IL MODELLO MEAN-REVERTING	41
2.6 PROCESSO DI ORNSTEIN E UHLENBECK.....	42
2.6.1 <i>Simulazione delle traiettorie spot-rate su R</i>	43
3. TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA	47
3.1 IPOTESI FONDAMENTALI SUL MERCATO	47
3.1.1 <i>Spot-rate</i>	48
3.2 DURATION STOCASTICA	49
3.3 TEOREMA GENERALE DI IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA	50
3.4 IL MODELLO COX, INGERSOLL E ROSS (CIR)	52
3.4.1 <i>La funzione di densità</i>	55
3.4.2 <i>L'equazione di valutazione</i>	58
3.5 IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA: COSTRUZIONE DI PORTAFOGLI IMMUNIZZATI	60
3.6 SIMULAZIONE DI MONTE CARLO: TASSO SPOT CON IL MODELLO CIR	64
CONCLUSIONE	67
BIBLIOGRAFIA	68

Introduzione

Ogni giorno investitori di tutto il mondo fronteggiano decisioni sulla composizione delle attività e passività del loro portafoglio; una delle strategie più importanti che essi tenderanno a perseguire consiste nella minimizzazione della probabilità di default; in altre parole, risulta fondamentale assicurare che il valore totale delle attività sia maggiore di quello delle passività.

Questa importante esigenza permette di introdurre il concetto di immunizzazione: in una prima accezione, si definisce immunizzato un portafoglio che in ogni istante successivo all'epoca di valutazione t riporta un valore netto non-negativo.

Oltre ad approfondire questa definizione, l'obiettivo principale del presente elaborato è quello di applicare le teorie che caratterizzano lo studio dell'immunizzazione: a tal fine svolgerò case studies esemplificativi sul programma Excel e lancerò simulazioni di Monte Carlo tramite il linguaggio di programmazione R sulla piattaforma R-Studio.

Imposterò l'analisi dell'immunizzazione iniziando dal mondo deterministico: essendo caratterizzato da intensità istantanea di interesse costante, esso permette di avere un alto livello di immunizzazione; tuttavia, i risultati ottenuti possono essere considerati come un'approssimazione che naturalmente non tiene conto delle caratteristiche aleatorie del fenomeno sottostante.

La mancanza della componente aleatoria verrà risolta nel secondo capitolo, in cui tratterò i processi stocastici: grazie a questi è infatti possibile introdurre una componente di rischiosità nel modello deterministico; essi permettono dunque di ottenere un'approssimazione più ricca della realtà, comportando però una maggiore complessità del modello; in questa sede presenterò alcuni case studies esemplificativi da me sviluppati, sia su Excel che su R, con lo scopo di rinforzare e confermare le teorie enunciate nel corso del capitolo.

I processi stocastici aprono le porte alla teoria dell'immunizzazione stocastica; pertanto, nell'ultimo capitolo introdurrò il modello proposto da Cox, Ingersoll e Ross, che permette di simulare l'andamento dello spot-rate; procederò inoltre con l'enunciazione del teorema generale di immunizzazione stocastica e riporterò alcune sensitivity analyses sui parametri del CIR per meglio comprenderne le caratteristiche. Svolgerò un case study su Excel applicando una strategia di immunizzazione stocastica e confronterò questi risultati con quelli ottenuti nel case study applicativo dell'immunizzazione classica svolto nel primo capitolo.

Infine implementerò il modello CIR in una simulazione di Monte Carlo lanciata su R, la quale permetterà l'analisi e lo studio dei cammini del tasso spot e porterà alle conclusioni finali.

1. Teoria dell'immunizzazione classica

Il primo capitolo di questo elaborato riguarda l'analisi dell'approccio deterministico con particolare riferimento alla teoria dell'immunizzazione classica. Come si vedrà nelle seguenti pagine, la principale caratteristica di questo modello consiste nella presenza di una struttura per scadenza dei rendimenti piatta; nei prossimi paragrafi verranno approfondite, oltre a questa proprietà fondamentale, le ipotesi che portano alla formulazione dell'immunizzazione classica.

Oltre ad analizzare e discutere la teoria, svolgerò dei case studies con lo scopo di applicare e dimostrare i risultati a cui giungerò tramite i teoremi propri dell'immunizzazione classica.

1.1 Definizione e ipotesi del modello

L'immunizzazione classica secondo gli studi pionieristici di Fisher, Weil¹ e Redington² analizza la capacità di un portafoglio composto da attività e passività di mantenere in ogni istante generico t un valore netto (dato dalla differenza tra totale delle attività e totale passività) non-negativo (equilibrio finanziario).

Questo significa ricercare le condizioni per cui un portafoglio che si trovi in equilibrio finanziario all'epoca di valutazione mantenga tale equilibrio sino al primo shift additivo del tasso di interesse.

Le definizioni sopra riportate saranno ampliate e approfondite nel corso del capitolo; inoltre, verranno elencate le variabili del modello di immunizzazione classica, discutendone le caratteristiche fondamentali e le loro applicazioni.

Lo studio dell'immunizzazione classica verte su due principali componenti: i flussi, i quali si dividono in entrate e uscite, e la struttura per scadenza dei rendimenti. I primi verranno discussi nelle prossime righe, mentre la trattazione della struttura dei rendimenti verrà rimandata al prossimo paragrafo.

I flussi fanno parte dell'attivo quando sono generati da operazioni di investimento, mentre fanno parte del passivo quando viene fatto ricorso al debito. Un'ipotesi rilevante della teoria classica dell'immunizzazione è che ogni posta di attivo e passivo è conosciuta con certezza dall'investitore all'istante di valutazione; in altre parole, l'operatore di mercato, che può essere persona fisica o istituzione, sa con certezza quali sono gli importi e le scadenze di tutti i flussi che compongono l'attivo e il passivo del portafoglio al generico istante di valutazione t .

Come detto in precedenza, l'equilibrio finanziario dipende dai flussi e dalla struttura per scadenza dei rendimenti; una volta raccolte le caratteristiche e le ipotesi delle poste dell'attivo e del passivo e aggiungendo che tali poste rimangono invariate per tutta la durata dell'investimento dell'ipotetico

¹ (L. Fisher, 1971)

² (Redington, 1952)

portafoglio in analisi, è opportuno notare che una perturbazione nella struttura dei rendimenti può causare un mutamento dell'equilibrio del portafoglio. Nel prossimo paragrafo verrà introdotta la struttura per scadenza dei rendimenti, e si discuteranno le caratteristiche e le ipotesi sull'evoluzione della stessa.

1.1.1 Struttura per scadenza dei rendimenti

La seconda componente su cui si fonda l'immunizzazione classica è la struttura per scadenza dei rendimenti.

Oltre ad essere fondamentale nella trattazione del modello classico di immunizzazione, essa rappresenta un punto chiave di questo elaborato. Partendo da ipotesi molto forti sulla stessa, nel corso di questi capitoli si andranno ad eliminare passo dopo passo le assunzioni semplicistiche che permettono la trattazione dei modelli deterministici, progredendo sempre di più verso scenari più reali che prendono in considerazione molteplici aspetti complessi, uno fra tutti la componente stocastica presente nell'evoluzione del tasso di interesse.

La prima ipotesi sulla struttura per scadenza dei rendimenti riguarda l'intensità istantanea di interesse; si assume infatti che detta struttura sia "piatta" ovvero che sia caratterizzata da un'intensità istantanea di interesse costante. Inoltre, la struttura è nota e osservabile dall'investitore nell'istante generico t .

Queste due ipotesi, la costanza dell'intensità istantanea di interesse e la conoscenza certa da parte dell'investitore della struttura stessa, comportano che egli sia in grado di conoscere con certezza in t il valore netto del portafoglio; si dice infatti che la struttura è "espressiva"³ del mercato, permettendo in t e in ogni istante successivo ad esso il calcolo del valore netto del portafoglio totale.

Prima di affrontare le ipotesi del modello che riguardano l'evoluzione della struttura per scadenza dei rendimenti, si ritiene opportuno approfondire sulla provenienza dei tassi di interesse che la compongono; questo significa ricercare quei criteri e metodologie che vengono usati per la determinazione della struttura dei rendimenti in situazioni reali; in altre parole, ci concentreremo sulla sua determinazione a livello empirico.

Il primo passo consiste nell'interrogarsi sulla provenienza dei tassi; infatti, in sede di valutazione di uno specifico portafoglio, l'investitore consulterà le informazioni che il mercato rende disponibili riguardo a titoli di suo interesse. Se ipotizziamo che l'investitore debba valutare un portafoglio composto da titoli aventi tutte le scadenze da uno fino a dieci anni, egli dovrà cercare informazioni relative a titoli con dieci maturità diverse; a questo punto sembra logico assumere che l'operatore non andrà a considerare un titolo con un basso volume di scambi, bensì sarà interessato a quei titoli con massimi volumi scambiati ogni giorno. Questi titoli prendono il nome di "titoli benchmark" proprio

³ (M. De Felice, 1991)

per la loro caratteristica di rappresentare un riferimento per tutti i titoli con uguale maturity e proprietà simili.

Una volta stabilita la tipologia di titoli ai quali l'investitore fa riferimento, il secondo passo consiste nel distinguere i titoli benchmark a seconda delle loro diverse caratteristiche, con lo scopo di acquisire una maggiore consapevolezza riguardo la struttura per scadenza. Infatti, si può identificare un livello di maturity che divide in due parti i titoli benchmark, separandoli nettamente a seconda delle loro diverse caratteristiche; la maturity in questione è pari a due anni: i titoli con scadenza inferiore a due anni sono caratterizzati da un'elevatissima liquidità, un rischio di insolvenza praticamente nullo e una grande quantità di volumi; questi sono i titoli scambiati nei mercati interbancari e i tassi di riferimento più importanti sono il LIBOR (London Interbank Offered Rate) e l'EURIBOR (EURO Interbank Offered Rate). Al contrario, i titoli con maturity maggiore ai due anni avranno minore liquidità, rischio di insolvenza crescente e volumi scambiati di gran lunga minori rispetto alla prima categoria; in questo caso si dovrà fare riferimento ai titoli di stato e se si fa riferimento all'Italia ai BTP (Buoni del Tesoro Poliennali).

Questa distinzione ha un'importante conseguenza per l'investitore che si trova in sede di valutazione di un portafoglio con molteplici scadenze: egli dovrà avere la consapevolezza di questa netta differenza, la quale, per esempio, comporta che i tassi a un anno fanno riferimento a titoli con caratteristiche completamente diverse rispetto ai tassi a nove anni, comportando una differente volatilità dei tassi futuri offerti dal mercato (variabilità minore per i tassi relativi a scadenze brevi, maggiore per gli altri).

Una volta analizzata la provenienza della struttura per scadenza dei rendimenti, un ulteriore fattore strettamente collegato alla variabilità dei tassi di interesse è il prezzo dei titoli benchmark; infatti, i prezzi disponibili sul mercato cambiano continuamente, con la conseguenza che ogni giorno l'investitore dovrà considerare una struttura dei tassi differente da quella del giorno precedente.

Quest'ultimo problema relativo alla variabilità dei prezzi dei titoli benchmark e conseguentemente della struttura per scadenza dei rendimenti non sarà oggetto di trattazione del primo capitolo di questo elaborato: infatti, ricordiamo che una delle forti assunzioni dell'immunizzazione classica è la costanza dell'intensità istantanea di interesse la quale permette all'investitore di valutare con certezza il valore netto del portafoglio totale in ogni istante di attività.

La variabilità dei tassi d'interesse verrà invece analizzata nel terzo capitolo quando verrà trattato il modello CIR e la teoria dell'immunizzazione stocastica. Rimanderemo dunque a quella sede la discussione sull'incertezza dei tassi di interesse.

Ritornando all'immunizzazione classica, riprendiamo il concetto secondo il quale la struttura per scadenza sarà assunta uguale per tutta la durata dell'attività dell'investitore; essa può soltanto

evolvere tramite shift additivi in aumento o in diminuzione, di ampiezza aleatoria. Questo sta a significare che la curva che descrive l'andamento dell'intensità istantanea di interesse (δ) può variare esclusivamente tramite traslazioni verso l'alto o verso il basso; in altre parole, la curva si muoverà uniformemente sul piano, e gli shift di ampiezza aleatoria influenzeranno allo stesso modo le intensità istantanee di interesse di tutte le scadenze. Questa precisazione è di fondamentale importanza e rappresenta una forte semplificazione rispetto alla realtà osservata sul mercato. La seguente equazione riassume l'ipotesi di shift additivi discussa sinora:

$$\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t'),$$

dove Z è una variabile aleatoria, indipendente da s , che rappresenta l'ampiezza dello shift additivo, positivo o negativo, subito dalla curva dei rendimenti δ nell'intervallo di tempo che intercorre da t a t' ⁴.

Nel prossimo paragrafo si vedrà come l'ipotesi di shift additivi è applicata al Teorema di Fisher e Weil dell'immunizzazione classica.

⁴ (M. De Felice, 1991)

1.2 Il teorema di Fisher e Weil

Un primo passo nell'analisi di portafogli di investimento sotto la condizione di immunizzazione, consiste nel considerare gli studi svolti riguardo la copertura di una singola uscita. Prima di approfondire questo argomento risulta necessario ribadire alcuni concetti riguardo l'immunizzazione e chiarire il più possibile le proprietà dell'analisi che verrà svolta.

Una prima proprietà del portafoglio che verrà utilizzato come oggetto di analisi nei successivi paragrafi consiste nel fatto che esso sia composto da titoli obbligazionari zero-coupon. Questa tipologia di titoli è caratterizzata dal fatto che non vengono pagate cedole durante la durata dell'investimento e che rimborsano il valore nominale a scadenza; il rendimento associato a questi titoli è quindi dato esclusivamente dallo scarto di emissione, ovvero dalla differenza tra il rapporto tra valore nominale e prezzo del titolo e uno.

Un secondo chiarimento riguarda invece la definizione di immunizzazione di una singola uscita; è interessante notare che essa può essere interpretata in due diversi modi, ovviamente strettamente connessi fra loro: reddito e rendimento. Nel primo caso, diremo che un portafoglio gode della condizione di immunizzazione se il reddito di fine periodo, il quale è composto dal reddito di reinvestimento più il valore di smobilizzo, risulta uguale o maggiore del reddito che sarebbe stato prodotto in assenza di shift additivi. Allo stesso modo, c'è immunizzazione se il rendimento ex-ante, ossia il rendimento che l'investitore si aspetta in sede di programmazione dell'investimento, è uguale o maggiore del rendimento ex-post, ovvero quel rendimento che effettivamente si verifica a seguito di eventuali perturbazioni dovute a shift additivi.

Un'ultima considerazione riguarda i due momenti chiave della nostra analisi, l'istante di valutazione e la data in cui si verifica l'eventuale shift: questo ci porta alla differenziazione tra portafoglio in *equilibrio* e portafoglio *immunizzato*. Nel primo caso si parla di equilibrio, ovvero quando il valore scontato al tempo di valutazione t del flusso di investimento è uguale al valore scontato del flusso di indebitamento sempre in t . Nel secondo caso invece, riferendoci ad un momento successivo all'epoca di valutazione t , si verificherà la condizione di immunizzazione se, in seguito ad un eventuale shift additivo, il valore netto del portafoglio totale risulterà non-negativo.

Questi chiarimenti sulla condizione di immunizzazione e sul portafoglio oggetto di analisi serviranno per introdurre il teorema di Fisher e Weil e successivamente applicarlo in un case study svolto sul programma Excel.

Come anticipato all'inizio di questo paragrafo, il teorema di Fisher e Weil si concentra sulla copertura di una singola uscita, un'unica posta del passivo; oltre che a rappresentare un ottimo inizio per comprendere la più vasta teoria dell'immunizzazione classica, questo teorema trova il suo utilizzo in rapporto alla situazione in cui l'investitore voglia porre un obiettivo alla sua strategia di

investimento, sull'orizzonte temporale dettato dalla scadenza della passività target; questo permette che ci sia la certezza che il flusso dell'attivo avrà un rendimento minimo garantito pari al rapporto tra il valore nominale dell'importo target e il suo prezzo al tempo t , sempre in riferimento al periodo uguale alla scadenza della passività obiettivo; in altre parole, il rendimento ex-ante o programmato, sarà almeno uguale al rendimento ex-post o effettivo.

Arrivati a questo punto, sembra opportuno introdurre il teorema di Fisher e Weil sulla copertura di un'uscita singola⁵.

Assumendo $\delta(t,s)$ come intensità istantanea di interesse relativa alla struttura per scadenza dei rendimenti osservata all'istante di valutazione t , sia definito un flusso di importi di investimento x ed una singola passività L . Allora diremo che la prima condizione del teorema è rappresentata dall'uguaglianza tra il valore attuale dell'attivo (x) ed il valore attuale dell'unica passività (L). Questa condizione è chiamata vincolo di bilancio e può essere riassunta dalla seguente uguaglianza:

$$W(t, x) = W(t, L).$$

Conseguentemente, si assumerà che il portafoglio gode della condizione di immunizzazione se a seguito di uno shift additivo aleatorio della curva che rappresenta l'andamento di δ verificatosi in un istante t' successivo a t , il valore netto del portafoglio totale risulta non-negativo:

$$W(t', x) \geq W(t', L).$$

Secondo il teorema di Fisher e Weil la relazione sopra riportata sarà sempre valida solamente se la duration, concetto che verrà analizzato a breve, propria del flusso di investimento che compone l'attivo è uguale alla maturity della singola uscita L :

$$D(t, x) = H - t,$$

dove H rappresenta la scadenza propria del singolo importo passivo.

Una volta enunciato il teorema di Fisher e Weil sembra opportuno applicare i risultati ottenuti; ho quindi svolto un case study sul programma Excel per avere una verifica empirica del teorema e avere una comprensione più intuitiva del quadro finora descritto.

Considerando come istante di valutazione $t=0$, si ponga come unica passività un importo pari a 100 da realizzarsi al tempo $t=4$; è molto importante ricordare che le possibili strategie che l'investitore può perseguire sono due: strategia di copertura dell'uscita che si verificherà in epoca $t=4$, oppure selezione di un portafoglio di investimento con rendimento minimo garantito e target pari a all'importo da realizzare in $t=4$. Riguardo alla composizione dell'attivo si assumerà che esso sia composto da due quote con scadenze pari a $t=2$ e $t=5$, rappresentate da titoli zero-coupon con capitalizzazione integrale e valore facciale unitario. Infine, si ipotizzi che la struttura per scadenza

⁵ (L. Fisher, 1971)

dei rendimenti sia osservata in t e che possa evolvere esclusivamente tramite shift additivi di ampiezza e segno aleatori.

Per ottenere gli importi delle due poste dell'attivo, risulta necessario porre a sistema le due condizioni prima elencate: il vincolo di bilancio tra valore attuale dell'attivo e del passivo e la condizione di uguaglianza tra duration propria dell'attivo e del passivo; quest'ultima, come abbiamo sottolineato, sarà pari alla maturity della singola posta del passivo che chiameremo H .

Come specificato, le quote relative alla quantità dei due titoli zero-coupon necessarie alla risoluzione del problema, che chiamerò a e b , sono ricavate tramite un sistema tra le due condizioni poste dal teorema di Fisher e Weil, il quale porta alle due seguenti equazioni:

$$a = \frac{L * v(t, H) * (t_2 - H)}{v(t, t_1) * (t_2 - t_1)}$$

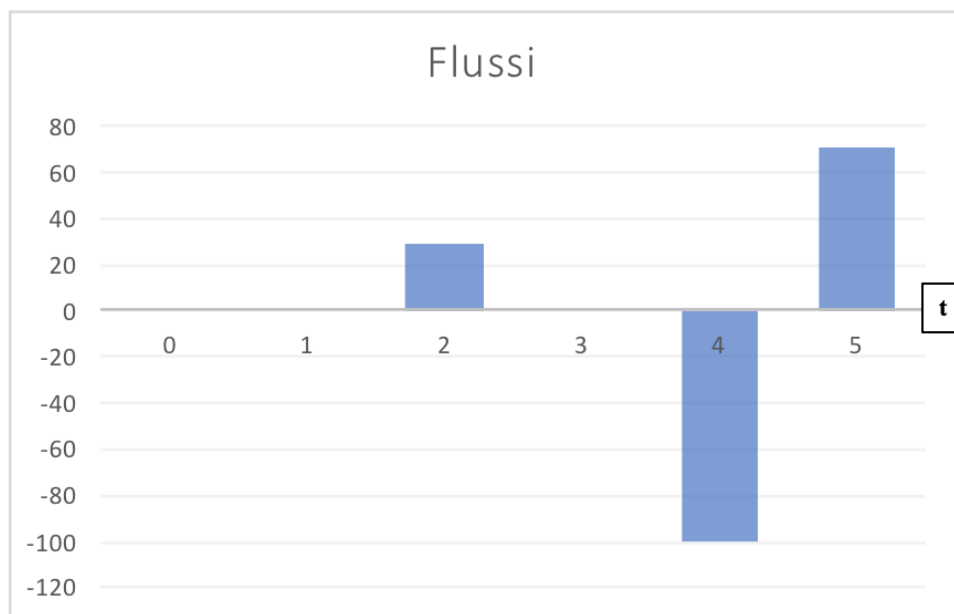
$$b = \frac{L * v(t, H) * (H - t_1)}{v(t, t_2) * (t_2 - t_1)}$$

dove t_1 e t_2 sono rispettivamente le scadenze del primo e del secondo titolo zero-coupon, e $v(t, t')$ sono i fattori di sconto relativi a ciascuna scadenza corrispondente ai titoli in esame.

La tabella seguente mostra nella prima colonna lo scadenziario su un arco temporale di cinque anni, nella seconda colonna i flussi dell'attivo al tempo $t=2$ e $t=5$, nella terza colonna l'unica uscita al tempo $t=4$, e infine nell'ultima colonna tutti fattori di sconto dall'istante di valutazione $t=0$ a ciascun anno presente sullo scadenziario temporale. In questo case study, il tasso di interesse i utilizzato è costante e pari al 6%, dunque tutti i fattori di sconto saranno calcolati in base a questo tasso. Una volta realizzato il calcolo dell'ultima colonna, si procede con la risoluzione del sistema sopra riportato con la conseguente individuazione delle quote necessarie affinché si verifichi la condizione di immunizzazione per il portafoglio in analisi. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella; le ultime due righe fanno riferimento al valore attuale dei flussi di attivo e passivo e alle duration degli stessi.

<i>scadenze</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	x_t	y_t	$v(0,t)$
0			
1			0,943
2	29,67		0,890
3			0,840
4		100,00	0,792
5	70,67		0,747
VA	79,21	79,21	
Duration	3,00	3,00	

Il seguente grafico a barre evidenzia la grandezza dei flussi dell'attivo x_t e del passivo y_t sullo scadenziario temporale t :



Dal risultato ottenuto si può affermare che sono necessarie 29,67 unità di zero-coupon bond unitari con scadenza pari a due anni e 70,67 unità di zero-coupon bond unitari con scadenza pari a cinque anni.

Tramite il sistema è stato dunque possibile ricavare l'impostazione del portafoglio affinché sussista la condizione di immunizzazione enunciata da Fisher e Weil.

Il secondo passo consiste nel verificare effettivamente la validità del teorema. Ci sarà infatti immunizzazione se, successivamente al verificarsi di shift additivi della curva dei rendimenti, il valore netto del portafoglio totale risulta non-negativo.

La successiva operazione consisterà quindi nell'apportare due shift pari a venti punti base, in aumento e in diminuzione, del tasso di interesse utilizzato nel case study. I due nuovi tassi verranno impiegati nel calcolo dei fattori di sconto aggiornati che serviranno per trovare i nuovi valori attuali dell'attivo e del passivo. La differenza fra questi ultimi, che rappresenta il valore netto del portafoglio totale, verrà usata come evidenza per la verifica del teorema.

Le due tabelle successive mostrano quindi uno shift additivo di 20 punti base sia in aumento che in diminuzione; in questo modo si potrà verificare se il valore netto del portafoglio sarà non-negativo e quindi se ci sia la condizione di immunizzazione:

<i>shift</i>	<i>i aggiornato</i>	<i>scadenze</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
0,2%	6,2%	t	x_t	y_t	$v(0,t)$
		0			
		1			0,942
		2	29,67		0,887
		3			0,835
		4		100,00	0,786
		5	70,67		0,740
		VA	78,61465	78,61437	
		Val. Netto	0,0002795		

<i>shift</i>	<i>i aggiornato</i>	<i>scadenze</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
0,2%	6,2%	t	x_t	y_t	$v(0,t)$
		0			
		1			0,945
		2	29,67		0,893
		3			0,844
		4		100,00	0,798
		5	70,67		0,754
		VA	79,81029	79,81000	
		Val. Netto	0,0002845		

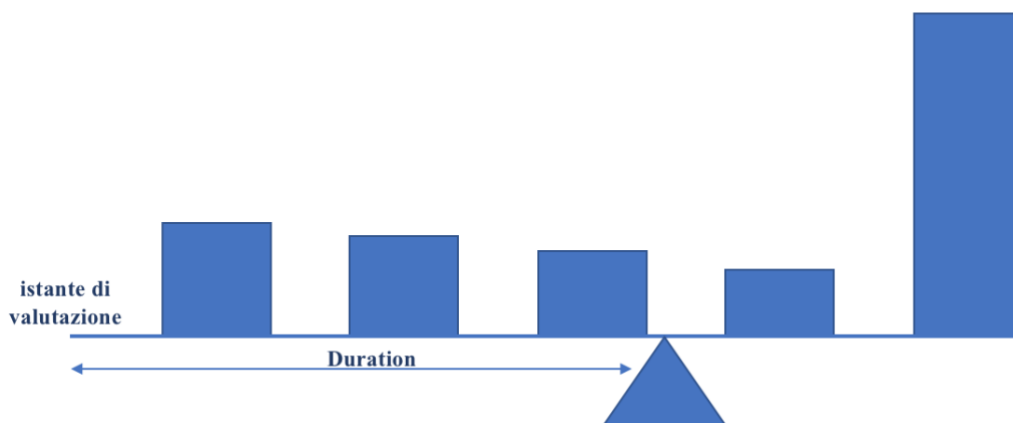
In entrambi i casi il valore netto del portafoglio totale è positivo e soddisfa le aspettative. Il teorema di Fisher e Weil è dunque dimostrato anche a livello empirico.

1.3 Duration

Durante lo studio del teorema di Fisher e Weil svolto nel paragrafo precedente si è visto un concetto molto importante la cui spiegazione si è preferito rimandare a posteriori; in questo paragrafo verrà quindi approfondito il concetto di duration, ne verrà data la definizione, saranno discusse le varie e importanti implicazioni, e nel corso della sua trattazione verranno presentati esempi con lo scopo di rafforzare il suo impatto.

La duration, o durata media finanziaria, introdotta da Macaulay⁶ e Hicks⁷, costituisce la media aritmetica ponderata delle scadenze delle poste di un generico flusso, moltiplicate per i relativi importi scontati in base alla struttura per scadenza dei rendimenti osservata sul mercato all'epoca di valutazione.

Il grafico successivo mostra uno schema grafico della duration, interpretata come valore dell'ascissa del baricentro delle masse, rappresentate dal valore dei flussi scontati:



Da questa figura è intuitivo notare che il valore della duration oscilla in un range che va dall'epoca di valutazione fino alla maturity del titolo. In questo caso è stata rappresentata la struttura della duration di un titolo a cedola fissa: la grandezza decrescente dei rettangoli sta a indicare che le cedole di importo uguale vengono scontate progressivamente con fattori di sconto maggiori, così da pesare di meno al trascorrere del tempo; a scadenza invece, il rettangolo più grande raffigura il valore scontato della cedola maggiorata del valore facciale dell'obbligazione.

Nel case study del paragrafo precedente è stato sottolineato come la duration della singola posta del passivo è uguale alla sua maturity: infatti, tale titolo essendo uno zero-coupon è caratterizzato da un singolo flusso in corrispondenza della maturity, ovvero il rettangolo più grande della figura di sopra; questo significa che la duration sarà completamente spostata verso destra nella figura di riferimento

⁶ (Macaulay, 1938)

⁷ (Hicks, 1939)

e sarà quindi massima: nella formula della duration infatti, l'importo al numeratore si semplifica con quello al denominatore e ciò che rimane è la sola scadenza o maturity della singola posta.

1.3.1 Tempo Ottimo di Smobilizzo

La duration riveste un ruolo fondamentale nell'immunizzazione classica e come abbiamo visto è condizione fondamentale del teorema di Fisher e Weil.

Riprendendo quanto detto nel paragrafo precedente, la strategia che sottostà alla costruzione di un portafoglio con una singola uscita può essere quella di assicurare all'investitore un rendimento target; in altre parole, l'investitore godrà di un rendimento ex-post, ovvero il rendimento che effettivamente riesce a conseguire, che sarà uguale al rendimento ex-ante, ovvero il rendimento che l'investitore ha programmato in sede di valutazione. La duration fornisce un supporto fondamentale a questo concetto, in quanto essa può essere interpretata come tempo ottimo di smobilizzo dell'investimento. Prima di approfondire questo assunto, è importante soffermarsi sul perché il rendimento ex-ante può discostarsi dal rendimento ex-post; in seguito verrà analizzato come la duration possa essere la soluzione a questo problema.

Il rendimento ex-post può infatti essere diverso da quello programmato a causa delle perturbazioni sulla curva dei tassi di interesse; è fondamentale ribadire che le perturbazioni ammesse in questo tipo di analisi riguardano esclusivamente spostamenti additivi e quindi paralleli della curva che rappresenta l'andamento di δ .

Se ci si concentra sull'analisi di un singolo titolo, gli shift additivi comportano due effetti: effetto reinvestimento ed effetto prezzo; infatti, in uno scenario rialzista, quindi con shift additivi di segno positivo, avremo un effetto prezzo negativo, in quanto i fattori di sconto con cui vengono scontate le poste del flusso sono maggiori, e un effetto reinvestimento positivo, in quanto le poste scadute verranno reinvestite con un tasso maggiore; naturalmente, avremo una situazione speculare nel caso di uno scenario ribassista.

Come si può notare questi due effetti hanno segno opposto, sono dunque due forze che si contrastano. Allora la duration, intesa come tempo ottimo di smobilizzo, individua quello specifico istante in cui queste due forze di segno opposto si annullano, ovvero l'effetto prezzo equivale all'effetto reinvestimento. In altre parole, per qualsiasi shift additivo del tasso di interesse il rendimento ex-ante è uguale al rendimento ex-post⁸.

⁸ (Saunders, 2015)

Andando invece a considerare un portafoglio, lo stesso utilizzato per il case study del paragrafo precedente, la duration intesa come tempo ottimo di smobilizzo porta comunque a conclusioni rilevanti; tali risultati sono formalizzati dal Teorema sul tempo ottimo di smobilizzo di Fisher e Weil⁹: assumendo $\delta(t,s)$ come intensità istantanea di interesse relativa alla struttura per scadenza dei rendimenti osservata all'istante di valutazione t , sia definito un flusso di importi di investimento x ed una singola passività L ed essendo valide le condizioni del Teorema di Fisher e Weil, vincolo di bilancio e condizione di duration:

$$W(t, x) = W(t, L),$$

$$D(t, x) = H - t,$$

allora, se la curva dei rendimenti non subisce perturbazioni aleatorie, tali condizioni saranno ancora soddisfatte. In altre parole, un portafoglio immunizzato all'epoca di valutazione t continuerà a esserlo se la struttura dei rendimenti subisce un'evoluzione puramente deterministica e non giungono a scadenza poste del flusso x^{10} .

Invece, un eventuale shift aleatorio comporterebbe il disallineamento delle durate medie finanziarie avendo come conseguenza la perdita della condizione di immunizzazione; sarebbe infatti necessario ponderare nuovamente gli importi dell'attivo tenendo in considerazione il nuovo livello del tasso d'interesse.

1.4 Copertura di uscite multiple

I due teoremi di Fisher e Weil forniscono un'importante conclusione riguardo la teoria dell'immunizzazione; sulla base di essi è possibile selezionare e gestire in modo dinamico portafogli di investimento (nel nostro caso titoli zero-coupon) che abbiano reddito immunizzato sull'holding period, rispetto a shift additivi della struttura a termine dei rendimenti¹¹.

Anche se la copertura di una singola passività è significativa sia per una prima comprensione del concetto di immunizzazione sia per obiettivi pratici come la previsione di uno specifico target da raggiungere per un dato investimento, sembra opportuno ampliare il modello allo studio di scenari di copertura di uscite multiple.

Come verrà dimostrato nei seguenti paragrafi, il vincolo di bilancio e la condizione di duration non sono più sufficienti da soli a garantire l'immunizzazione di un portafoglio con uscite multiple.

⁹ (L. Fisher, 1971)

¹⁰ (M. De Felice, 1991)

¹¹ (M. De Felice, 1991)

Per verificare questo assunto, ho elaborato un case study sul programma Excel; data la struttura per scadenza dei rendimenti¹², in questo esempio si andrà ad analizzare un portafoglio composto da dieci poste sia all'attivo che al passivo, con scadenze a partire dal primo anno fino ad arrivare al decimo. Le poste del passivo sono state scelte arbitrariamente senza seguire alcun criterio; si è quindi voluta esaltare la casualità della scelta delle poste del passivo. Al contrario, le poste dell'attivo cambieranno passo dopo passo a seconda delle condizioni che verranno fissate per ciascuno step. La seguente tabella mostra la situazione iniziale, ove nella prima colonna è riportato lo scadenzario su un arco temporale di dieci anni, nella seconda la struttura per scadenza su dieci anni dei tassi di interesse a pronti, nella terza e quarta rispettivamente le poste dell'attivo e del passivo, ed infine nell'ultima i fattori di sconto che verranno utilizzati nel calcolo dei valori attuali:

<i>scadenze</i>	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	i(0,t)	x _t	y _t	v(0,t)
1	4,40%	0,00	40,00	0,958
2	4,80%	0,00	54,00	0,910
3	5,10%	0,00	34,00	0,861
4	5,20%	0,00	21,00	0,816
5	5,30%	0,00	2,00	0,772
6	5,36%	0,00	56,00	0,731
7	5,42%	0,00	78,00	0,691
8	5,48%	0,00	90,00	0,653
9	5,55%	0,00	100,00	0,615
10	5,61%	0,00	23,00	0,579
	VA:	<u>0,00</u>	<u>363,86</u>	

Una volta impostato il case study, il passo successivo è quello di trovare dieci importi dell'attivo che soddisfino il vincolo di bilancio (valore netto uguale a zero) e la condizione di duration. In questa sede, considererò questi dieci importi come dieci titoli zero-coupon a copertura delle dieci uscite presenti nel passivo. I dieci importi dell'attivo saranno calcolati usando il pacchetto Solver di Excel ponendo come condizioni il vincolo di bilancio e la condizione di Duration. Questo primo passo vuole dimostrare che le sole due assunzioni del teorema di Fisher e Weil non sono sufficienti a garantire immunizzazione.

¹² È stata considerata la struttura per scadenza dei rendimenti presente sul seguente volume: G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi, *Manuale di Finanza 1. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, il Mulino, 2005, pagina 221, prima colonna.

Nella seguente tabella ho aggiunte le due ultime colonne che serviranno per il calcolo delle rispettive duration.

Nell'ultima riga sono riportati i valori attuali dell'attivo e del passivo con le rispettive duration.

<i>scadenze</i>	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>	<i>duration x_t</i>	<i>duration y_t</i>
t	$i(0,t)$	x_t	y_t	$v(0,t)$	D(x)	D(y)
1	4,40%	28,89	40,00	0,958	27,67	38,31
2	4,80%	34,04	54,00	0,910	61,99	98,33
3	5,10%	39,21	34,00	0,861	101,32	87,86
4	5,20%	44,45	21,00	0,816	145,18	68,58
5	5,30%	49,71	2,00	0,772	191,98	7,72
6	5,36%	54,99	56,00	0,731	241,22	245,63
7	5,42%	60,29	78,00	0,691	291,67	377,34
8	5,48%	65,60	90,00	0,653	342,48	469,86
9	5,55%	70,91	100,00	0,615	392,51	553,50
10	5,61%	49,09	23,00	0,579	284,38	133,25
	VA:	<u>363,86</u>	<u>363,86</u>	Duration:	<u>5,72</u>	<u>5,72</u>

La colonna evidenziata in rosso rappresenta tutte le poste del flusso x (attivo) che per costruzione soddisfano il vincolo di bilancio e la condizione di duration. Dopo aver impostato il case study, è necessario verificare se questo portafoglio gode della condizione di immunizzazione.

Per fare ciò ho applicato due shift additivi, il primo positivo di venti punti base, il secondo sempre della stessa grandezza, ma negativo. Le due tabelle successive riportano la modifica sulla colonna della struttura a pronti dei tassi di interesse che naturalmente ha effetto sull'ultima colonna dei fattori di sconto. Questi ultimi saranno utilizzati per il calcolo dei valori attuali aggiornati e nell'ultima riga verrà riportato il valore netto post-shift.

	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	$i(0,t)-20BP$	x_t	y_t	$v(0,t)$
1	4,20%	28,89	40,00	0,960
2	4,60%	34,04	54,00	0,914
3	4,90%	39,21	34,00	0,866
4	5,00%	44,45	21,00	0,823
5	5,10%	49,71	2,00	0,780
6	5,16%	54,99	56,00	0,739
7	5,22%	60,29	78,00	0,700
8	5,28%	65,60	90,00	0,663
9	5,35%	70,91	100,00	0,626
10	5,41%	49,09	23,00	0,590
Valore Netto:			-0,001	

	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	$i(0,t)+20BP$	x_t	y_t	$v(0,t)$
1	4,60%	28,89	40,00	0,956
2	5,00%	34,04	54,00	0,907
3	5,30%	39,21	34,00	0,856
4	5,40%	44,45	21,00	0,810
5	5,50%	49,71	2,00	0,765
6	5,56%	54,99	56,00	0,723
7	5,62%	60,29	78,00	0,682
8	5,68%	65,60	90,00	0,643
9	5,75%	70,91	100,00	0,605
10	5,81%	49,09	23,00	0,569
Valore Netto:			-0,002	

Come si può notare dall'ultima riga delle due tabelle sopra riportate, il valore netto del portafoglio totale post-shift è negativo, sia in caso di variazione negativa sia positiva.

È quindi arrivato il momento di introdurre nel modello una terza condizione al teorema di Fisher e Weil: la duration di secondo ordine. Essa rappresenta infatti l'evoluzione del modello finora analizzato; tuttavia, prima di proseguire con l'enunciazione di quello che verrà chiamato Teorema di Redington, sembra opportuno approfondire il concetto di duration di secondo ordine e le sue implicazioni.

1.4.1 Duration di secondo ordine e Convexity

Fino a questo momento si è fatto riferimento alla duration di primo ordine; tuttavia, un'estensione agli ordini successivi risulta essenziale per uno studio accurato di portafogli obbligazionari in relazione alla teoria di immunizzazione classica.

La duration di secondo ordine D^2 esprime la media pesata dei quadrati degli scarti temporali e fornisce una misura di dispersione temporale del flusso x rispetto a t^{13} .

Il momento di secondo ordine D^2 è espresso dalla media dei quadrati degli scarti temporali delle scadenze delle poste dall'origine, pesata per il valore scontato dei relativi flussi.

D^2 , data l'ipotesi di importi non-negativi, è positiva e varia in un range compreso tra la data di valutazione e il quadrato della scadenza massima delle poste del flusso x .

Per comprendere una delle preziose applicazioni di tale misura è significativo introdurre il concetto di volatility e di convexity.

¹³ (G. Castellani, Manuale di Finanza 1. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni, il Mulino, 2005)

Assumendo come parametro di riferimento l'intensità istantanea di interesse δ , quindi basando l'analisi sul continuo, e facendo uso della derivata prima della funzione prezzo rispetto a variazioni del rendimento si ricava la seguente uguaglianza:

$$\frac{dV(\delta)}{d\delta} = -\sum_{s=1}^n s \cdot R_s \cdot e^{-\delta \cdot s},$$

dividendo per $V(\delta)$ si ricava la variazione relativa della funzione prezzo rispetto alla variazione del tasso:

$$\frac{\frac{dV(\delta)}{d\delta}}{V(\delta)} = \frac{-\sum_{s=1}^n s \cdot R_s \cdot e^{-\delta \cdot s}}{V(\delta)} = -\frac{\sum_{s=1}^n s \cdot R_s \cdot e^{-\delta \cdot s}}{\sum_{s=1}^n R_s \cdot e^{-\delta \cdot s}} = -D_R^0(\delta)$$

Il risultato è equivalente alla Duration di primo ordine, la quale esprime appunto la volatilità (sensibilità del prezzo rispetto a variazioni dell'intensità istantanea di interesse). Poiché per calcolare la volatility è stata utilizzata la derivata prima, la variabilità del prezzo rispetto a movimenti di tassi di interesse è approssimata da una retta: un'importante conseguenza di ciò è la simmetria nelle variazioni di prezzo, ovvero per due shift di stessa ampiezza ma diverso segno, la variazione assoluta del prezzo sarà la medesima; tuttavia, ciò che si verifica realmente è che la funzione valore risulta più reattiva per diminuzioni di tasso di interesse piuttosto che di aumenti.

Inoltre, l'approssimazione lineare della duration non permette di catturare completamente le differenze nella convessità delle funzioni valore di un portafoglio composto da attività e passività.

Per ovviare a questi due problemi risulta necessario lo studio della curvatura della funzione valore, il quale sarà visto nelle prossime righe.

Infatti, al contrario della volatility, la convexity riguarda lo studio della derivata seconda della funzione prezzo rispetto a variazioni del rendimento e quindi permette di considerare non la linearità della funzione prezzo bensì il suo grado di convessità; per illustrare al meglio le proprietà della convexity, si inizierà con l'equazione che la identifica e in seguito si analizzeranno le implicazioni.

A differenza della volatility, si calcola la derivata seconda ricavando la seguente relazione:

$$\frac{d^2V(\delta)}{d\delta^2} = \sum_{s=1}^n s^2 \cdot R_s \cdot e^{-\delta \cdot s}$$

Analogamente alla volatility, si divide per $V(\delta)$ ottenendo:

$$\frac{\frac{d^2V(\partial)}{d\partial^2}}{V(\partial)} = \frac{\sum_{s=1}^n s^2 \cdot R_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{V(\partial)} = \frac{\sum_{s=1}^n s^2 \cdot R_s \cdot e^{-\partial \cdot s}}{\sum_{s=1}^n R_s \cdot e^{-\partial \cdot s}} = D^2(\partial)$$

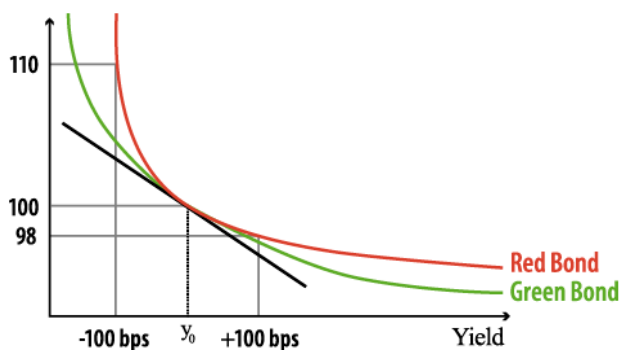
Come si può immediatamente notare, il rapporto ottenuto è uguale alla duration di secondo ordine che nel continuo rappresenta dunque la convexity. Essa, calcolata come derivata seconda, esprime il cambiamento della derivata prima per movimenti del rendimento; come detto in precedenza questo permette lo studio della curvatura della funzione prezzo.

I risultati ottenuti da questa analisi portano a concludere che l'approssimazione che si ottiene calcolando la duration di primo ordine è quella di una retta, proprio per l'uso della derivata prima; ricordiamo che questa è la seconda condizione del teorema di Fisher e Weil e ribadiamo che non è sufficiente ad assicurare immunizzazione nel caso di uscite multiple. A questo punto è possibile spiegare il perché: i due flussi, attivo e passivo, pur avendo duration di primo ordine uguali, avranno con molta probabilità duration di secondo ordine diverse, ovvero curvature diverse; questo comporta che, dato il punto di tangenza imposto dall'uguaglianza delle duration, la funzione con D^2 maggiore dominerà in tutti i punti (ad esclusione del punto di tangenza) l'altra funzione (eccetto il caso di duration di secondo ordine uguali; in questo caso le due funzioni coincideranno in tutti i punti).

Questo concetto è espresso dalla seguente figura:

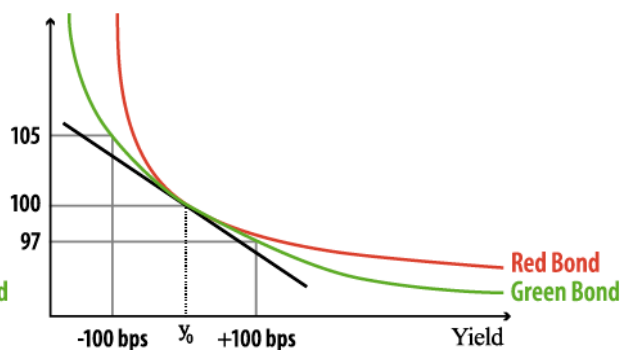
A High Convexity Bond – Red Bond

Price of Bond



A Low Convexity Bond – Green Bond

Price of Bond



fonte: Western Asset

Come si può notare dalla figura, la curva relativa al Red Bond domina in tutti i punti meno che quello di tangenza la curva del Green Bond; questo significa che per ogni spostamento del tasso di interesse il valore netto risultante dalla differenza tra valore del Red Bond meno valore del Green Bond sarà non-negativa. È da notare come la duration di primo ordine non cattura le differenze nella curvatura delle funzioni prezzo dei due bond, essendo un'approssimazione lineare. In conclusione, si conferma

dunque la necessità di scegliere un portafoglio con attivo avente convexity maggiore o uguale a quella del passivo; questa sarà la condizione fondamentale esaminata nel prossimo paragrafo.

1.4.2 Teorema di Redington

L'analisi di copertura di uscite multiple è stata svolta da Redington e si può interpretare come evoluzione dei due teoremi di Fisher e Weil, ovvero copertura di un'uscita singola e tempo ottimo di smobilizzo.

In questo paragrafo procederò con l'enunciazione del teorema e in seguito con l'applicazione dello stesso nel case study già iniziato nel paragrafo 1.4.

Assumendo $\delta(t,s)$ come intensità istantanea di interesse relativa alla struttura per scadenza dei rendimenti osservata all'istante di valutazione t , siano definiti due flussi di importi non-negativi di investimento x e indebitamento y ¹⁴ con valori uguali all'epoca di valutazione t :

$$W(t, x) = W(t, y),$$

allora se la curva dei rendimenti subisce in t' , istante immediatamente successivo a t , uno shift additivo di ampiezza aleatoria infinitesima, allora il valore netto del portafoglio totale sarà non-negativo:

$$W(t', x) \geq W(t', y),$$

se la duration di x è uguale alla duration di y :

$$D(t, x) = D(t, y),$$

e se la duration di secondo ordine di x è non-minore della duration di secondo ordine di y :

$$D^2(t, x) \geq D^2(t, y).$$

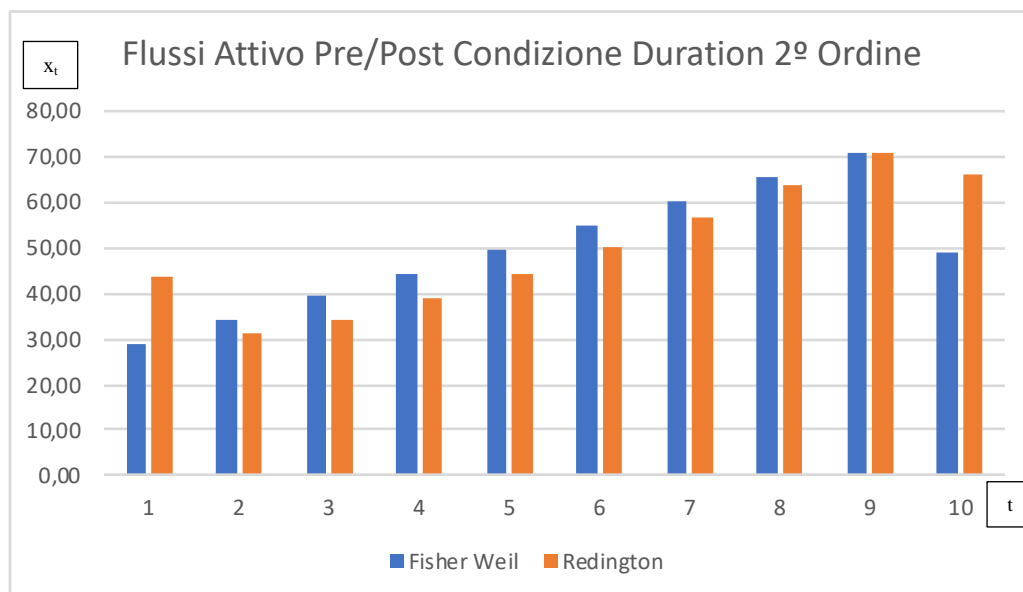
Si può immediatamente notare come la condizione di duration di secondo ordine assume un ruolo di svolta e decisivo all'interno del Teorema di Redington. Come discusso nel paragrafo precedente, essa mira ad assicurare che la curva del flusso attivo domini o al massimo coincida con quella del passivo.

Per verificare il Teorema di Redington ho proseguito il case study iniziato nel paragrafo 1.4, nel quale si ricorda che le sole due condizioni esposte da Fisher e Weil non sono sufficienti a garantire immunizzazione; nella seguente tabella ho aggiunto due colonne per il calcolo delle duration di secondo ordine del flusso dell'attivo e di quello passivo. Successivamente, gli importi del flusso attivo x (evidenziati in figura in rosso) sono stati riponderati aggiungendo la condizione D^2 nel programma Solver di Excel. La seguente tabella illustra i cambiamenti appena descritti e l'aggiornamento della colonna dell'attivo.

¹⁴ (Redington, 1952)

scadenze	struttura a pronti	flussi attivo	flussi passivo	fattori di sconto	duration x_t	duration y_t	duration ² x_t	duration ² y_t
t	$i(0,t)$	x_t	y_t	$v(0,t)$	$D(x)$	$D(y)$	$D^2(x)$	$D^2(y)$
1	4,40%	43,68	40,00	0,958	41,84	38,31	41,84	38,31
2	4,80%	31,05	54,00	0,910	56,55	98,33	113,10	196,67
3	5,10%	34,36	34,00	0,861	88,80	87,86	266,40	263,58
4	5,20%	38,71	21,00	0,816	126,42	68,58	505,68	274,33
5	5,30%	43,91	2,00	0,772	169,58	7,72	847,89	38,62
6	5,36%	49,84	56,00	0,731	218,62	245,63	1311,70	1473,79
7	5,42%	56,39	78,00	0,691	272,77	377,34	1909,42	2641,37
8	5,48%	63,43	90,00	0,653	331,17	469,86	2649,33	3758,91
9	5,55%	70,88	100,00	0,615	392,32	553,50	3530,90	4981,51
10	5,61%	65,99	23,00	0,579	382,34	133,25	3823,38	1332,53
	VA	363,86	363,86		5,72	5,72	41,22	41,22

Al fine di evidenziare il cambiamento nelle poste dell'attivo in seguito all'introduzione della condizione di duration di secondo ordine nel Teorema di Redington, ho creato un grafico a barre che confronta per ogni anno la grandezza degli importi di investimento. È interessante notare come le poste secondo Fisher e Weil sono leggermente maggiori dal secondo all'ottavo anno mentre riportano una netta inferiorità rispetto alle poste secondo Redington del primo e ultimo anno; il seguente grafico illustra le considerazioni appena fatte:



Una volta strutturato il portafoglio secondo le condizioni del Teorema di Redington, è opportuno verificare che sussista la condizione di immunizzazione. Dalle ultime due colonne è possibile notare che le duration di secondo ordine coincidono; come specificato in precedenza, questo sta a significare

che le due curve che rappresentano la funzione valore in relazione a cambiamenti del tasso di interesse sono coincidenti; il loro grado di curvatura è infatti il medesimo. Il risultato atteso a seguito di uno shift sarà quindi quello di un valore netto del portafoglio totale pari a zero.

Per verificare le considerazioni appena fatte, ho individuato due scenari possibili, uno rialzista e uno ribassista, applicando uno shift additivo pari a dieci punti base. Nelle due tabelle che seguono sarà evidenziata in rosso la colonna che rappresenta la struttura per scadenza dei tassi a pronti aggiornata. Di conseguenza, anche l'ultima colonna che rappresenta i fattori di sconto varierà comportando il cambiamento del valore attuale dei due flussi.

L'aspettativa di questi due scenari è che il valore netto sia uguale a zero a seguito dello shift dei tassi di interesse.

	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	$i(0,t)+10BP$	x_t	y_t	$v(0,t)$
1	4,50%	43,68	40,00	0,957
2	4,90%	31,05	54,00	0,909
3	5,20%	34,36	34,00	0,859
4	5,30%	38,71	21,00	0,813
5	5,40%	43,91	2,00	0,769
6	5,46%	49,84	56,00	0,727
7	5,52%	56,39	78,00	0,687
8	5,58%	63,43	90,00	0,648
9	5,65%	70,88	100,00	0,610
10	5,71%	65,99	23,00	0,574
	VA	361,89	361,89	
Valore Netto:		0,00		

	<i>struttura a pronti</i>	<i>flussi attivo</i>	<i>flussi passivo</i>	<i>fattori di sconto</i>
t	$i(0,t)-10BP$	x_t	y_t	$v(0,t)$
1	4,30%	43,68	40,00	0,959
2	4,70%	31,05	54,00	0,912
3	5,00%	34,36	34,00	0,864
4	5,10%	38,71	21,00	0,820
5	5,20%	43,91	2,00	0,776
6	5,26%	49,84	56,00	0,735
7	5,32%	56,39	78,00	0,696
8	5,38%	63,43	90,00	0,658
9	5,45%	70,88	100,00	0,620
10	5,51%	65,99	23,00	0,585
	VA	365,84	365,84	
Valore Netto:		0,00		

Come previsto, il valore netto del portafoglio totale in seguito a tutti e due gli shift additivi del tasso di interesse è uguale a zero. Il Teorema di Redington è quindi dimostrato anche a livello empirico tramite il case study esemplificativo appena svolto.

2. Processi stocastici

L'analisi del Capitolo 1 di questo elaborato verte esclusivamente su modelli deterministici; grazie alle ipotesi formulabili su questo tipo di modelli è stata resa possibile l'enunciazione dei teoremi di Fisher e Weil, riguardo la copertura di un'uscita singola e il tempo ottimo di smobilizzo, e il Teorema di Redington sulla copertura di uscite multiple; tutti e tre costituiscono una parte essenziale della teoria dell'immunizzazione classica.

Tuttavia, l'evidenza empirica suggerisce che la realtà che ci circonda è assai distante dai modelli deterministici. In questo capitolo verrà dunque introdotto il concetto di alea, il quale apre le porte ai modelli stocastici che saranno il punto centrale dei prossimi paragrafi.

Un modello stocastico studia il processo evolutivo di una grandezza al variare del tempo; tale processo ha la caratteristica di evolvere in parte in modo casuale ed in parte secondo determinate caratteristiche. Effettuando delle osservazioni ripetute dello stesso processo (simulazioni), si noteranno i diversi andamenti dell'evoluzione della grandezza al trascorrere del tempo; detti andamenti vengono chiamati realizzazioni del processo. Per ogni istante t ci sarà una gamma di valori che il processo può assumere con specifiche probabilità. Tutti questi diversi valori sono racchiusi in una variabile aleatoria $X(T)$ e saranno riassunti da un valore medio, ovvero la sommatoria di tutti i possibili valori, moltiplicati per le rispettive probabilità di realizzazione.

Come verrà analizzato in seguito, è possibile associare determinati processi stocastici a un determinato andamento, il quale seguirà delle specifiche regole e avrà delle precise caratteristiche.

In particolar modo, il focus di questo capitolo è costituito dai processi di diffusione, i quali rappresentano una classe di processi stocastici nell'ambito del tempo continuo. Inoltre, essi sono caratterizzati dalla proprietà di continuità delle traiettorie e dalla proprietà di markovianità; la prima assicura la presenza di funzioni continue e assenza di "shock" che comportano punti di discontinuità, mentre la seconda riguarda l'evoluzione del processo e specifica che la distribuzione di probabilità dei valori futuri della variabile presa in considerazione, è determinata unicamente in base al valore che il processo assume nell'istante corrente e non dipende invece dall'intera "storia" del processo¹⁵.

2.1 Moto browniano

Un moto browniano (o processo di Wiener) è un processo $Y(t)$ a traiettorie continue, omogeneo a incrementi indipendenti (IID)¹⁶.

¹⁵ (M. De Felice, 1991)

¹⁶ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

Prima di iniziare l'analisi del moto browniano è interessante soffermarci su alcuni cenni storici riguardo l'origine dello stesso.

La scoperta risale agli inizi dell'Ottocento da parte di Robert Brown, un botanico scozzese; il campo in cui è avvenuta tale scoperta e le sue prime applicazioni sono relativamente lontane dalla matematica finanziaria. Il moto browniano fa infatti riferimento al moto disordinato di particelle piccole ma osservabili al microscopio presenti in fluidi o sospensioni fluide¹⁷. Brown era riuscito tramite esperimenti e attente osservazioni a concludere che le particelle, pur muovendosi in modo disordinato e apparentemente senza alcuno schema, seguivano in realtà un andamento che poteva essere riassunto da una legge.

Fino a quel momento però, il campo in cui il moto browniano veniva applicato e trovava il suo utilizzo era esclusivamente quello della fisica.

Solamente in seguito si è giunti alla modellizzazione del moto browniano per applicazioni matematiche e finanziarie, grazie al processo di Wiener¹⁸.

Tuttavia, nelle applicazioni finanziarie correnti si fa ancora riferimento a Brown piuttosto che a Wiener, per ragioni che suggeriscono semplicità e continuità nella terminologia; questo però non significa che bisogna dimenticarsi di Wiener, perché è proprio grazie alla sua modellizzazione che si basa l'analisi finanziaria relativa ai processi di diffusione.

Sembra adesso opportuno introdurre le diverse tipologie di processi di diffusione, iniziando con il moto browniano standard.

2.2 Moto browniano standard

Prima di introdurre il moto browniano standard è importante ribadire le due ipotesi essenziali per l'analisi del modello: la continuità delle traiettorie e la proprietà di incrementi indipendenti; tali ipotesi hanno infatti delle conclusioni molto rilevanti riguardo la distribuzione probabilistica del moto. Infatti, tenendo in mente le ipotesi, si può pensare al processo come somma di un numero illimitatamente grande di incrementi estremamente piccoli¹⁹. Questo comporta che, per il teorema del limite centrale (assunto l'elevatissimo numero di incrementi), un moto browniano standard presenta caratteristiche di normalità. Nello specifico avremo che, comunque scelti due istanti t e s , la variabile aleatoria $Y(s)-Y(t)$ segue una distribuzione normale, con media $\mu(s-t)$ e varianza $\sigma^2(s-t)$, ovvero:

$$Y(s) - Y(t) \sim \mathcal{N}(\mu(s-t), \sigma^2(s-t)).$$

¹⁷ (Thermopedia, n.d.)

¹⁸ (Hida, 1980)

¹⁹ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

L'ipotesi di normalità è molto importante nell'ambito delle trasformazioni lineari. Infatti, il moto browniano standard prende il suo nome proprio dalla tipologia di distribuzione che è appunto una distribuzione normale standard, con parametri $\mu=0$ e $\sigma=1$.

Tornando alle trasformazioni lineari, si può quindi affermare che un moto browniano $Y(t)$ con media e varianza unitarie può essere rappresentato come trasformazione lineare di un moto browniano standard:

$$Y(t) = Y(0) + \mu t + \sigma Z(t),$$

dove $Z(t)$ rappresenta il moto browniano standard.

Il grande punto debole di questa equazione sta nel fatto che la probabilità che $Y(t)$ assuma un valore negativo è positiva; infatti, essendo $Z(t)$ caratterizzato da incrementi indipendenti fra di loro che possono assumere segno negativo, il rischio della negatività di $Y(t)$ non è nullo. Questo limite può essere riscontrato nell'applicazione del moto browniano standard nel processo di prezzo; per questa ragione la trattazione di questo modello non verrà approfondita ulteriormente e l'attenzione sarà posta sul secondo tipo di moto browniano, chiamato geometrico, che come si vedrà fornisce un ottimo modello per simulare processi riguardo l'andamento dei prezzi.

2.3 Moto browniano geometrico

In questo paragrafo e serie di sotto-paragrafi procederò con l'enunciazione e l'analisi del moto browniano geometrico; in primo luogo verrà descritta l'equazione generale, poi saranno fatte delle considerazioni sul mondo deterministico e il relativo modello esponenziale; in seguito verrà analizzata la distribuzione probabilistica propria di questo processo, la lognormale, e saranno messi a confronto il modello deterministico con quello stocastico; infine si procederà con la discretizzazione dell'equazione differenziale del moto browniano geometrico per permettere applicazioni dello stesso nell'ambito di simulazioni di Monte Carlo.

Si definisce moto browniano geometrico il processo stocastico:

$$Y(t) := Y(0) * e^{\mu t + \sigma Z(t)},$$

ovvero il processo ottenuto come esponenziale di un moto browniano con media e varianza unitarie μ e σ^2 .²⁰

Questo processo è di elevatissima importanza, a iniziare proprio dal mondo deterministico; infatti, se consideriamo l'equazione del moto browniano geometrico senza la componente stocastica, otteniamo la legge esponenziale che fa riferimento alla capitalizzazione composta del mondo finanziario:

²⁰ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

$$Y(t) := Y(0) * e^{\mu t}.$$

Infatti, μ viene interpretata come intensità istantanea di interesse (δ) e il rapporto tra $Y(t)$ e $Y(0)$ non è altro che il fattore di capitalizzazione o montante.

Da questo punto di partenza è immediato osservare come il moto browniano geometrico sia un'estensione del modello esponenziale tipico del mondo deterministico. Esso va infatti ad aggiungere una nuova componente, chiamato termine “di rumore”²¹ normale, con media nulla e varianza lineare nel tempo. Questo nuovo termine è di fondamentale importanza in quanto permette di catturare la componente casuale propria di un processo; è vero che aggiungendo il termine stocastico il modello assume una complessità maggiore, ma è anche vero che in questo modo ci si avvicina ad un'interpretazione della realtà più simile e veritiera.

Un'importante differenza con il moto browniano standard consiste nella struttura probabilistica: infatti, osservando l'equazione a inizio paragrafo si può notare che il moto browniano geometrico non gode della proprietà di incrementi indipendenti; al contrario, ogni incremento di $Y(t)$ risente della serie storica dell'evoluzione del prezzo che si raggruppa nel valore dell'istante precedente, ovvero $Y(t-1)$; questo significa che ogni incremento è influenzato dal valore dell'istante precedente.

Questo comporta una differente distribuzione probabilistica che è di tipo lognormale e che verrà analizzata e approfondita nel paragrafo successivo

2.3.1 Distribuzione Lognormale

Una prima proprietà fondamentale che caratterizza questa distribuzione è la seguente: la variabile aleatoria $Y = e^X$ è lognormale, con parametri μ e σ , se la variabile X segue una distribuzione normale:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),$$

Inoltre, la distribuzione ha media:

$$E(Y) = e^{\mu + \sigma^2/2},$$

e varianza:

$$Var(Y) = [E(Y)]^2(e^{\sigma^2} - 1).$$

Queste proprietà hanno come risultato un'importante implicazione: la lognormale assegna probabilità positiva solamente a valori di Y positivi, è unimodale e ha parametro di asimmetria positivo; questo permette di avere un modello affidabile e veritiero per simulare i processi di prezzo, e rende il moto browniano geometrico il più usato per questi fini.

²¹ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

Riprendendo l'analisi della distribuzione lognormale e comparandola con la distribuzione normale, una prima differenza riguarda la simmetria delle due distribuzioni. Mentre la normale è perfettamente simmetrica, la distribuzione lognormale presenta un grado di asimmetria più o meno rilevante, a seconda dello scenario in analisi. Questa caratteristica è riassunta dall'indice di asimmetria ("skewness"); esso è definito come il rapporto tra il momento centrale di terzo ordine e il cubo della deviazione standard²²:

$$\gamma(X) = \frac{E[(X - E(X))^3]}{\sigma^3(X)}$$

Per γ uguale a zero otteniamo il caso simbolico della media uguale alla mediana, che rappresenta la distribuzione Normale.

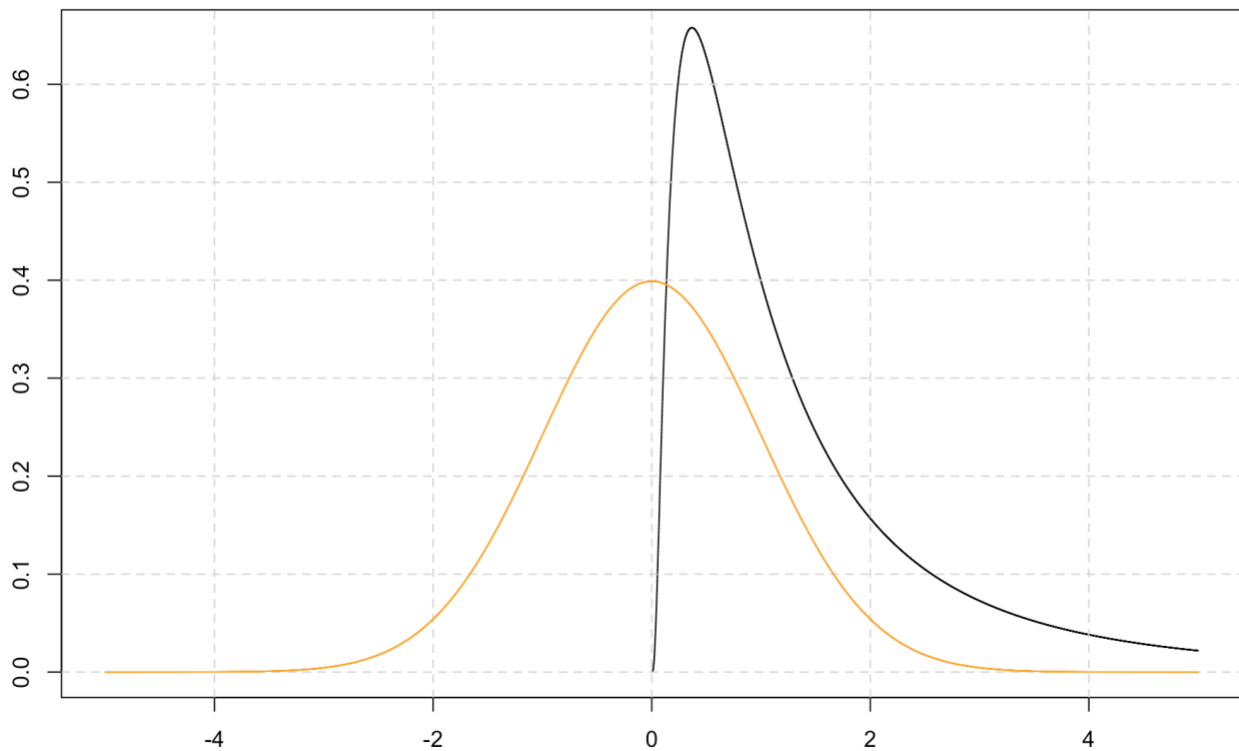
Al contrario, se γ è maggiore di zero avremo una distribuzione con una coda a destra più lunga e una concentrazione dei valori a sinistra; l'opposto vale per γ minore di zero.

Questa differenza nel grado di asimmetria della distribuzione trova delle applicazioni rilevanti nello studio dei casi di insolvenza; a differenza della distribuzione normale, infatti, la lognormale permette di condurre un'analisi più accurata dei casi estremi che possono potenzialmente causare insolvenza, grazie alla sua "coda" asimmetrica. Questo significa che per livelli di significatività molto bassi (area sotto la curva tendente all'unità) l'ascissa di riferimento della lognormale sarà molto più elevata rispetto a quella di una normale, riflettendo l'asimmetria che caratterizza questi eventi anomali. Infatti, come detto in precedenza, i casi considerati normali e comuni sono spostati sulla sinistra della figura (ipotizzando un'asimmetria positiva) e i casi anomali (come ad esempio le catastrofi, nell'ottica di una compagnia di assicurazione) fanno parte della coda sulla destra.

Per dare una rappresentazione grafica a quanto detto sinora, ho disegnato la funzione di densità di una distribuzione normale e di una lognormale su R-Studio, rispettivamente di colore arancione e nero. Nella pagina seguente si troverà il grafico e le note di commento sullo stesso.

²² (N. Savelli)

Funzione di Densità di una Distribuzione Normale – Lognormale



Come appare dalla figura, la massa dei valori è concentrata in prossimità alla destra di zero per la distribuzione lognormale, mentre è uniformemente posizionata in centro nel caso della normale.

È essenziale notare che mentre la distribuzione normale standardizzata ammette valori negativi con probabilità del 50%, la distribuzione lognormale ammette esclusivamente valori positivi, ovvero i valori inferiori a zero hanno probabilità nulla.

L'analisi svolta in questo paragrafo rafforza l'intuizione che la distribuzione lognormale sia naturalmente predisposta all'analisi dei processi dei prezzi. Infatti, nel caso del moto browniano geometrico, essa ha indice di asimmetria positivo, avendo dunque la coda a destra e soprattutto ammettendo esclusivamente valori positivi. Infine, essendo unimodale e relativamente semplice da analizzare fa sì che il moto browniano geometrico sia il modello più adatto e usato per descrivere un processo di prezzo.

2.3.2 Relazione tra modello deterministico e modello stocastico

La riflessione sulla legge esponenziale fatta nell'introduzione del moto browniano geometrico porta a considerare attentamente la relazione tra modello deterministico e modello stocastico.

Riprendendo brevemente le due equazioni, deterministica,

$$Y(t) := Y(0) * e^{\mu t},$$

e stocastica,

$$Y(t) := Y(0) * e^{\mu t + \sigma Z(t)},$$

appare interessante mettere a confronto le due relazioni.

Come si può immediatamente notare la sola differenza è rappresentata dal termine $\sigma Z(t)$, il quale è stato definito come termine aleatorio a media nulla; questo però non deve portare alla conclusione che il modello stocastico sia in media equivalente al modello deterministico²³; in altre parole, non si deve pensare che osservando molteplici processi stocastici e calcolando la media tra tutte le traiettorie il risultato sia identica alla traiettoria descritta dalla legge esponenziale.

Invece, è corretto affermare che il modello stocastico equivale a quello deterministico se si considera l'aspettativa dell'esponente della seconda relazione; in questo caso si arriva alla conclusione che i due modelli coincidono se il termine σ , il quale rappresenta la deviazione standard, è uguale a zero. Questo significa che la variabilità dei dati presi in considerazione è nulla, e la traiettoria assunta da modello stocastico è in questo caso riconducibile a quella della legge esponenziale.

Come si vedrà in seguito quando si analizzeranno le simulazioni delle traiettorie del moto browniano geometrico, il modello stocastico tenderà ad essere uguale a quello deterministico quando il numero delle simulazioni del moto browniano tende a infinito, il che significa che la volatilità media delle infinite simulazioni tende a zero.

²³ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

2.3.3 Dal continuo al discreto

Prima di arrivare alle applicazioni del moto browniano geometrico risulta necessario effettuare un passaggio fondamentale, il quale permette di arrivare alla simulazione delle traiettorie del processo stocastico coerenti con la relativa struttura probabilistica.

Il passaggio in questione consiste nello sviluppare un equivalente discreto dell'equazione differenziale (continuo) e quindi sostituire la componente differenziale dt con un intervallo di tempo finito (discreto) Δt .

Nelle equazioni e passaggi seguenti sarà riportata l'equazione differenziale stocastica che descrive il moto browniano geometrico per poi passare all'equivalente discreto di Eulero che servirà per esprimere in logaritmi l'equazione stocastica, arrivando quindi ad un equivalente discreto accurato e comodo da implementare.

L'equazione differenziale stocastica del moto browniano geometrico è la seguente:

$$dY = \mu Y dt + \sigma Y dZ,$$

che implica l'equivalente discreto di Eulero:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + \mu Y_t \Delta t + \sigma Y_t \sqrt{\Delta t} \epsilon_t,$$

ed implica l'equazione:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta Z_t. \quad 24$$

Una volta ottenuti l'equivalente discreto di Eulero e la rispettiva equazione che descrive il moto browniano geometrico, si può procedere con il calcolo di un equivalente discreto passando ai logaritmi e specificando la componente stocastica Z_t con la radice dell'intervallo temporale t moltiplicata per la variabile casuale ϵ_t ; otteniamo quindi:

$$\ln Y_{t+\Delta t} = \ln Y_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

L'equazione appena trovata risulta di fondamentale importanza per le applicazioni del moto browniano geometrico in ambito finanziario, soprattutto grazie al tipo di distribuzione probabilistica di cui è caratterizzata, la lognormale, la quale permette l'esclusione di valori di Y_t negativi.

Nei prossimi paragrafi verranno applicate le conclusioni a cui si è giunti finora, iniziando da una simulazione che ho svolto sul programma Excel riguardo il processo dei prezzi di un'azione.

²⁴ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

2.4 Applicazioni del moto browniano geometrico

Come anticipato nel corso di questo capitolo, il moto browniano geometrico risulta utile nelle applicazioni riguardo i processi di prezzo delle azioni. Nei prossimi due sotto-paragrafi illustrerò e commenterò delle simulazioni di Monte Carlo che ho svolto prima su Excel e poi su R.

2.4.1 Simulazione di Monte Carlo per processi di prezzo su Excel

Il moto browniano geometrico, come si è detto nei paragrafi precedenti, è molto utile grazie alla sua caratteristica di non ammettere valori negativi e grazie alla sua implementazione relativamente semplice.

Nel corso del paragrafo riporterò i risultati di un case study che ho svolto su Excel e commenterò le ipotesi e implicazioni a cui sono giunto passo dopo passo.

Il punto di partenza consiste nel considerare l'equivalente discreto logaritmico trovato nel paragrafo precedente:

$$\ln Y_{t+\Delta t} = \ln Y_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

Inoltre, riscrivendo la relazione logaritmica del moto browniano geometrico come rapporto tra i due logaritmi, si può affermare che la parte sinistra dell'equazione, che rappresenta l'intensità di rendimento a scadenza, segue una distribuzione normale con media pari a $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ e deviazione standard pari a $\sigma \sqrt{\Delta t}$:

$$\ln \left(\frac{Y(t)}{Y(t-1)} \right) \sim \mathcal{N} \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t} \right]$$

Se il logaritmo naturale del rapporto tra i prezzi (δ) è normalmente distribuito, allora è lecito affermare che i prezzi seguono una distribuzione lognormale; questa conclusione è di fondamentale importanza in quanto ci permette di introdurre i concetti e le teorie discusse nei paragrafi precedenti; in particolare, il moto browniano illustrato in questo case study è un processo di diffusione dei prezzi che segue una distribuzione lognormale.

Riscrivendo dunque la relazione che descrive il moto browniano otteniamo la seguente equazione:

$$\ln \left(\frac{Y(t)}{Y(t-1)} \right) = \alpha + z_t \sigma ,$$

Il logaritmo naturale del rapporto tra il prezzo osservato al tempo t e il prezzo osservato in $t-1$ è uguale alla somma di due componenti, una deterministica (α) e una stocastica ($z_t \sigma$).

La componente deterministica è la media (drift) che, essendo crescente, indica un'aspettativa rialzista riguardo il prezzo dell'azione; il drift è anche definito come rendimento atteso dell'azione.

Al contrario, la componente stocastica è determinata dalla deviazione standard e una variabile casuale; quest'ultima è il cosiddetto termine di rumore in funzione di σ , che marca questo processo come stocastico. Una conseguenza fondamentale è che i cammini osservati ogni volta che viene lanciata una simulazione sono diversi; infatti l'insieme dei valori della variabile casuale varia ogni volta che un nuovo processo di prezzo viene simulato.

Si procederà con il case study svolto su Excel evidenziando gli step di lavoro seguiti.

Step 1

In questo case study, che rappresenta una prima applicazione del moto browniano geometrico in campo finanziario, ho sviluppato un modello che necessita di tre assunzioni di base: il rendimento atteso annuale per l'azione, la deviazione standard annuale ed infine il prezzo al tempo di valutazione $t=0$ [$Y(0)$]. Per queste tre componenti ho scelto dei valori arbitrari pari rispettivamente a 8%, 20% e 100 euro.

Inoltre, assumendo che il prezzo dell'azione vari quotidianamente, sarà necessario convertire il drift (rendimento atteso) e la deviazione standard (volatility) da valori annuali a valori giornalieri, considerando i giorni di mercato aperto pari a 250 giorni in un anno. A questo proposito è essenziale sottolineare come la volatility non debba esser divisa per 250, bensì per la radice di 250, in quanto è la varianza che è in funzione del tempo comportando che la deviazione standard, essendo radice della varianza, sia in funzione della radice del tempo. Infine, ai fini dell'analisi, è necessario calcolare il valore atteso del moto browniano geometrico sottraendo al valore del drift giornaliero metà della varianza.

Nella tabella seguente vengono riportati i dati del problema discussi sinora con le relative conversioni giornaliere di drift e volatility:

Dati	
Drift (annuale)	8%
Drift (giornaliero)	0,03%
σ (annuale)	20%
σ (giornaliera)	1,26%
Drift (valore atteso)	0,02%
Y(0) (prezzo in $t=0$)	100

Step 2

Una volta impostato il problema, lo step successivo è quello di specificare la variabile random assegnandoli tanti valori quanti sono gli intervalli temporali della simulazione. In questo case study, si andrà ad osservare l'evoluzione del prezzo di un'azione nell'arco temporale di durata pari a un

anno. Conseguentemente, la distribuzione di numeri random dovrà contenere 250 valori, tanti quanti sono gli intervalli che caratterizzano la simulazione.

Per rappresentare questo tipo di distribuzione sul programma Excel, ci si servirà della funzione NORMSINV, la quale identifica l'inverso di una distribuzione cumulativa normale standard, che ha quindi media nulla e deviazione standard pari a uno. All'interno della funzione NORMSINV si andrà ad inserire il parametro RAND il quale genera un valore compreso tra 0 e 1 con una distribuzione uniforme. Il risultato è una distribuzione di 250 valori compresi tra -3 e 3²⁵, i quali serviranno come termine di disturbo della componente deterministica che è appunto fissa per tutte le simulazioni che verranno implementate. È essenziale ribadire che alla componente stocastica viene assegnata la distribuzione normale proprio per la relazione che esiste tra lognormale e normale: dato che il prezzo dell'azione segue una distribuzione lognormale, allora il logaritmo del rapporto dei prezzi di due giornate consecutive seguirà una distribuzione normale.

Step 3

Una volta calcolati i valori della componente random, il passo successivo è quello di usare tali valori per calcolare il rendimento logaritmico che rappresenta l'intensità di interesse. In altre parole, lo step successivo consiste nell'applicare la seguente equazione che è stata già discussa in precedenza:

$$\ln\left(\frac{Y(t)}{Y(t-1)}\right) = \alpha + z_t\sigma,$$

dove con α si intende il valore atteso della distribuzione lognormale, riportato in tabella come **Drift**(valore atteso), z_t il t-esimo valore random e infine σ la volatilità giornaliera.

Tutti i valori che risultano dal calcolo di questa relazione costituiscono l'esponente della seguente relazione tra il prezzo dell'azione al tempo t e quello del giorno precedente ($t-1$):

$$Y(t) = Y(t-1)^{\alpha + z_t\sigma},$$

ed esplicitando l'esponente:

$$Y(t) = Y(t-1)^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_t}$$

Lo step finale consiste dunque nel calcolare tutti i prezzi giornalieri utilizzando proprio la relazione espressa sopra. Il risultato sarà costituito da 250 prezzi, uno per ogni giorno, che seguono un cammino influenzato dal moto browniano geometrico che, come è stato detto, risponde ad una distribuzione probabilistica lognormale. Nella seguente tabella vengono riportate le prime dieci simulazioni, con la prima colonna a indicare lo scadenziario temporale giornaliero di 250 giorni, la seconda la distribuzione normale della componente stocastica, la terza il calcolo dell'esponente della legge che descrive l'evoluzione del processo di prezzo dell'azione, l'ultima i prezzi giornalieri dell'azione:

²⁵ Infatti, l'area sotto la funzione di densità calcolata considerando tre lunghezze di deviazione standard sia a destra che a sinistra è pari a 99%. Per questo il range della distribuzione casuale simulata varierà approssimativamente tra -3 e 3.

t	$N(0,1)$	$\alpha + z_t\sigma$	Y_t
1	0,754	0,010	100,982
2	0,913	0,012	102,180
3	-0,655	-0,008	101,362
4	-0,418	-0,005	100,851
5	0,395	0,005	101,381
6	-0,830	-0,010	100,347
7	0,245	0,003	100,682
8	0,382	0,005	101,193
9	-1,065	-0,013	99,863
10	0,401	0,005	100,395
...

Step 4

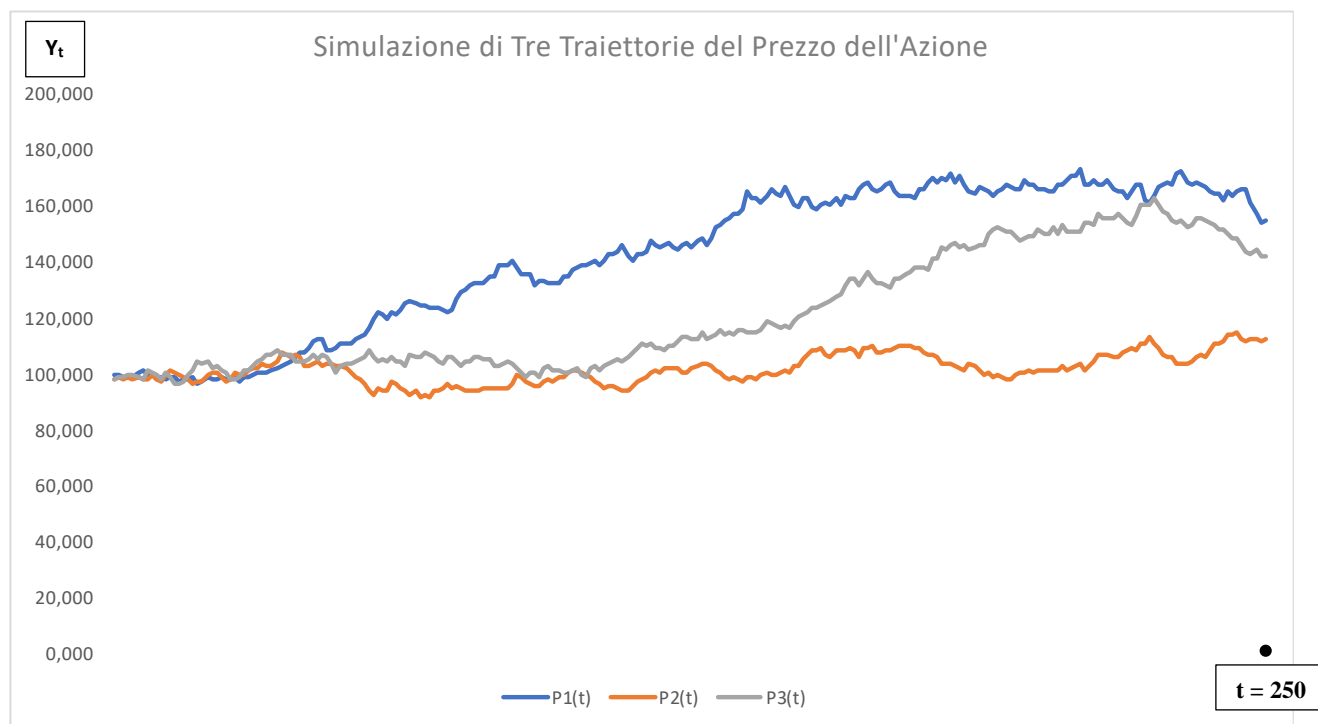
Utilizzando i risultati ottenuti dalla simulazione del processo di prezzo dell'azione, è significativo riportare il percorso simulato su un grafico. Nella figura seguente, l'asse delle ascisse rappresenta lo scadenziario temporale, diviso in 250 giorni, e l'asse delle ordinate riporta il livello del prezzo dell'azione al trascorrere del tempo.



Come si può notare, l'andamento del prezzo è crescente, ad indicare la relazione di tipo esponenziale che caratterizza il moto browniano geometrico, ma irregolare; infatti, il termine di disturbo stocastico sposta casualmente la traiettoria del prezzo che subisce oscillazioni in funzione di una variabile aleatoria, in questo caso caratterizzata da una distribuzione normale, con media nulla e deviazione standard unitaria.

È significativo ricordare che il cammino rappresentato nella figura non è assolutamente l'unica traiettoria possibile che il prezzo dell'azione può assumere; infatti, proprio a causa della componente stocastica, ogni volta che la simulazione viene lanciata il cammino del prezzo sarà completamente diverso, a causa della variabile casuale che caratterizza questo processo.

A questo proposito, ho lanciato altre tre simulazioni che sono state successivamente riportate nel seguente grafico.



Questa rappresentazione permette di capire ancora più a fondo quanto la componente stocastica incide sull'andamento del prezzo simulato. Facendo riferimento alla figura, è rilevante notare come a fine anno il prezzo simulato dalla seconda traiettoria (P2) sia leggermente superiore al valore iniziale che era pari a 100. Al contrario, la traiettoria che descrive l'andamento del primo cammino (P1), arriva a toccare un valore massimo di circa 180, per poi accostarsi a fine anno ad un valore di 160. Come si può notare quindi, la differenza fra le traiettorie dovuta alla componente stocastica è ampia; da qui l'esigenza fondamentale di lanciare il numero più alto possibile di simulazioni se l'obiettivo è quello di avvicinarsi ad un valore medio più accurato e affidabile.

È fondamentale ribadire che le traiettorie seguono una distribuzione probabilistica lognormale, quindi la probabilità che il prezzo di un'azione segua un particolare cammino è collegata alla distribuzione lognormale; questo concetto si concretizza con la rappresentazione degli intervalli di confidenza che esaminerò nel prossimo paragrafo in parallelo con la successiva simulazione.

2.4.2 Simulazione di traiettorie decennali su R

Nel paragrafo precedente è stata svolta l'analisi dell'approccio Monte Carlo al modello del moto browniano geometrico. Pur essendo arrivati a risultati significativi e di rilevante importanza, l'estensione a orizzonti temporali più ampi rispetto a quello di 250 giorni è stata limitata dalla mole di dati necessaria per la realizzazione di questo obiettivo. Per questa ragione, svolgerò il seguente case study facendo uso del linguaggio di programmazione R su R-Studio, permettendo così di avere a disposizione una potenza di calcolo sostanzialmente maggiore e di avere la possibilità di includere nell'analisi elementi e caratteristiche rilevanti a una comprensione più completa del case study.

Nelle pagine successive riporterò i dati e i calcoli del problema svolto su R, nonché i commenti e le spiegazioni di tutti i passaggi, per concludere con una rappresentazione grafica del lavoro svolto:

Step 1

Un primo passo consiste nell'elencare tutti i dati del problema:

```
#Dati
n <- 2500
T1 <- 10
mu <- 0.1
sigma <- 0.2
S0 <- 100
m <- 3
set.seed(45)
```

dove “n” rappresenta il numero di intervalli temporali, ovvero in questo caso avremo che la variabile oggetto del moto browniano standard subirà un cambiamento 2500 volte, il che equivale a dire, assumendo come base il giorno, che si sta studiando l'andamento del prezzo dell'azione su un arco temporale pari a dieci anni; “T₁” è appunto il numero di anni su cui si vuole basare l'arco temporale, in questo caso dieci; “mu” e “sigma” sono i due parametri fondamentali che stanno a indicare rispettivamente il drift e la deviazione standard e che in questo case study assumono i valori di 0,1 e 0,2; “S₀” è il valore di base della variabile, ovvero il prezzo iniziale dell'azione a inizio cammino ed è pari a 100; infine, “m” indica il numero di simulazioni che verranno lanciate.

L'ultimo dato, “set.seed”, è di fondamentale importanza in quanto permette di fissare il seme della sequenza dei numeri pseudocasuali generati. Ciò consente di poter riprodurre, ogni volta che viene lanciata la simulazione della variabile aleatoria, sempre lo stesso cammino; tale impostazione porta dei vantaggi a livello di riproduzione dei calcoli svolti: infatti, chiunque vuole simulare lo stesso cammino deve solamente impostare la simulazione inserendo lo stesso seme (“seed”) del cammino che vuole riprodurre. In questo case study, ho scelto come seme il numero 45; è importante ricordare che tale scelta è ininfluente e non pregiudica le conclusioni tratte durante lo svolgimento della simulazione.

Step 2

Dopo aver elencato e spiegato i dati del problema è opportuno proseguire con la scrittura di una funzione che permette di creare una matrice di dati che conterrà tutte le simulazioni dei cammini del prezzo dell'azione; si procederà riportando la funzione scritta su R, e in seguito si andranno a spiegare tutti i passaggi svolti nella stesura di detta funzione.

```
MotiBr <- matrix(NA, m, n+1)

for (i in 1:m){
  u <- rnorm(n, 0, sqrt(T1/n))
  Wt <- rep(0, n+1)
  for (l in 1:n){
    Wt[l+1] <- Wt[l]+u[l]
  }
  temp <- (0:n)/n*T1
  Xt <- (mu-sigma^2/2)*temp+sigma*Wt
  MotiBr[i,] <- S0*exp(Xt)
}
```

Nella stesura di questa funzione il primo passo è stato quello di creare una matrice chiamata “MotiBr” in grado di racchiudere tutti i dati che verranno prodotti dalla funzione, che come vedremo rappresenta la simulazione di Monte Carlo del moto browniano geometrico; nella creazione della matrice “MotiBr” ho specificato che i valori iniziali sono “NA” quindi valori nulli, ovvero la matrice di partenza è vuota e per questo si presta ad essere riempita con i risultati della simulazione; inoltre, con “m” si indica il numero di righe della matrice, pari al numero di cammini che si andranno a simulare, e con “n+1” il numero di colonne che è pari alla quantità di intervalli propri della simulazione più l'istante di partenza pari a zero.

Una volta creata la matrice, il passo successivo consiste nella scrittura della funzione: a questo scopo ho utilizzato il loop “for” che permette di ripetere lo stesso calcolo presente all'interno della funzione stessa per uno specifico numero di volte, che nel caso in questione è pari a “m” simulazioni, ovvero 3.

Il corpo della funzione presenta in primo luogo l'estrazione di numeri random, i quali seguono una distribuzione normale, con media nulla e deviazione standard pari alla radice quadrata del rapporto tra il numero degli anni e la quantità di intervalli “n”.

In seguito, ho creato il vettore “Wt” che sta a rappresentare la variabile aleatoria composta da tutte le estrazioni random effettuate nello step precedente.

Successivamente si andrà a formare lo scadenziario temporale; è molto importante notare che una volta creata la successione di 2500 numeri tramite il comando “(0:n)”, l'equazione usata subito dopo permette di dividere ogni valore della sequenza per 2500 per poi moltiplicarlo per il numero degli anni che in questo caso è pari a 10; in altre parole, questa formulazione comporta la creazione di uno

scadenario con estremi 0 e 10, dunque data di inizio e fine, e 2500 step compresi fra questi due estremi; la formulazione di questo scadenario si rivelerà importante nella parte conclusiva, quando si procederà con la rappresentazione grafica delle simulazioni: esso permette di apportare maggiore significatività all'asse delle ascisse, che rappresenta il tempo, in quanto ammette come unità di misura l'anno. Al contrario, con la mera sequenza di numeri da 0 a 2500, l'asse delle ascisse riporterebbe valori espressi in giorni, che non permetterebbero una comprensione intuitiva del grafico stesso.

Le ultime due righe della funzione permettono di applicare la formula del moto browniano geometrico tramite i valori appena calcolati e di registrare passo dopo passo i risultati all'interno della matrice creata all'inizio con il nome di "MotiBr".

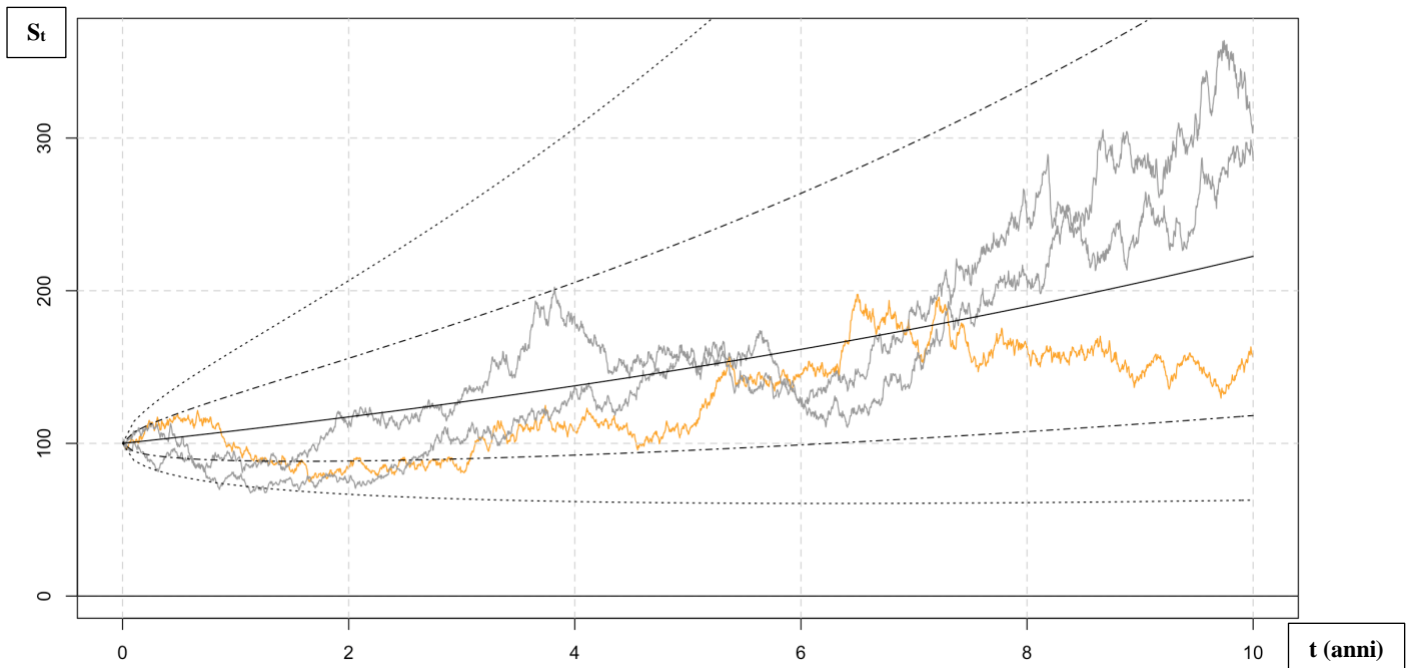
Nelle righe successive si può osservare l'output delle prime 35 simulazioni del primo cammino del prezzo dell'azione; questo cammino sarà evidenziato con il colore arancione nella rappresentazione grafica a fine paragrafo.

```
> MotiBr[1, ]
  [1] 100.00000 100.46416  99.60620  99.16088  98.26095  97.18209  96.80238
  [8]  96.22119  96.03972  98.29416  98.03985  96.67890  96.97442  98.52930
 [15] 100.58780 101.13236 100.81601 100.80217 100.64290 105.59074 103.43962
 [22] 101.99762 102.32452 102.12020 101.61995 101.09136 101.09023 100.02872
 [29] 100.27175 102.19345 102.47917 102.71890 101.81997 100.65442 101.05081
  ...
```

Step 3

L'ultimo step di questo case study consiste nella rappresentazione grafica dei cammini simulati.

A tal fine ho disegnato un grafico su R che raggruppa le tre simulazioni lanciate tramite la funzione appena scritta e commentata; il primo cammino, di cui sono riportati i primi 35 risultati, è evidenziato con il colore arancione, mentre i due successivi con il grigio.



L'asse delle ascisse rappresenta il tempo, in questo caso da 0 a 10 anni; l'asse delle ordinate indica invece il valore dell'azione che, partendo da un valore iniziale di 100 in tutti e tre i casi, muta al trascorrere del tempo seguendo un moto browniano geometrico.

Una prima considerazione su questo risultato riguarda il cammino di lungo periodo seguito dai tre andamenti; infatti, poiché in questo case study, mantenendo sempre come base il giorno, si è esteso l'arco temporale a 10 anni, in confronto a un solo anno nel case study di Excel, si può già notare come nel lungo periodo il prezzo dell'azione tende ad essere crescente andando verso una traiettoria simile a quella esponenziale.

A supporto di questa affermazione, nel grafico è stata inserita la curva che rappresenta il valore atteso del processo, ovvero l'andamento del prezzo dell'azione nel caso in cui la componente stocastica venga esclusa lasciando solamente quella deterministica; vediamo infatti che tale curva taglia gli andamenti delle tre traiettorie e assume il ruolo di benchmark essendo appunto un importante elemento di confronto.

Oltre alla curva benchmark sono stati inseriti due intervalli di confidenza, il primo con linee a tratti e puntini che rappresenta l'intervallo di confidenza al 69% (ovvero con distanza dalla media pari a una deviazione standard a destra e sinistra del drift della distribuzione normale); la seconda coppia di curve, a piccoli trattini omogenei, indica invece l'intervallo di confidenza al 95% (due deviazioni standard dal drift). Questo significa che esiste rispettivamente una probabilità del 69% e 95% che le traiettorie simulate cadano all'interno degli intervalli appena discussi. Ancora una volta, l'evidenza empirica dimostrata dalla figura dà ragione a queste affermazioni: anche se durante i primi due anni circa gli andamenti si discostano dalla traiettoria della curva benchmark, talvolta sfiorando anche

l'intervallo di confidenza del 95%, nel lungo periodo sono contenuti tutti e tre all'interno del primo intervallo del 69%.

2.5 Il modello mean-reverting

Nella seconda parte del presente capitolo sui processi stocastici si andrà ad analizzare un modello appartenente ad una categoria diversa rispetto ai moti browniani: il modello di evoluzione mean-reverting. Come sarà approfondito successivamente, questa nuova dinamica ha la caratteristica principale di avere un richiamo alla media che sarà indicata con la lettera γ ; il modello è espresso dalla seguente equazione differenziale:

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r_t)dt \text{ }^{26},$$

la soluzione di questa equazione differenziale, che permette di utilizzare il modello mean-reverting in applicazioni utili e rilevanti come la simulazione di un tasso di interesse, è riassunta nell'equazione:

$$r(t) = \gamma - (\gamma - r_0)e^{-\alpha t}.$$

Sembra opportuno analizzare e approfondire le variabili presenti nell'equazione del modello mean-reverting deterministico.

Per iniziare, $r(t)$ riassume lo spot rate ovvero il tasso a breve o anche il tasso di rendimento istantaneo; in altre parole, $r(t)$ rappresenta l'intensità istantanea di interesse in t di uno titolo zero-coupon avente scadenza brevissima pari a $t+dt$.

Allora, l'equazione sopra riportata implica che la dinamica dello spot rate segua il modello mean-reverting, che sarà analizzato nel corso di questo paragrafo.

Come è stato già affermato in precedenza, γ indica il valore di lungo periodo assunto dallo spot rate: infatti per t che tende a infinito, il secondo membro del lato destro dell'equazione tende a zero, confermando quindi questa affermazione su γ .

Il parametro α descrive la velocità con cui $r(t)$ si avvicina al valore di lungo periodo γ ²⁷; si può affermare allora che le traiettorie più ripide, quindi ad avvicinamento a γ più veloce, sono quelle in corrispondenza di alti valori di α . Inoltre, più $r(t)$ è distante da γ più lo spot rate si avvicina velocemente al valore medio di lungo periodo.

È da notare quindi che l'avvicinamento al valore di lungo termine γ avviene asintoticamente e con andamento esponenziale; una particolare osservazione consiste nel fatto che il modello mean-

²⁶ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, il Mulino, 2007)

²⁷ Infatti, si dice che " $1/\alpha$ " è la costante di tempo della traiettoria di richiamo alla media, ovvero il tempo necessario affinché la distanza tra lo spot rate e γ si riduca fino quasi a coincidere. Questo significa che più grande è il parametro α , più piccola è la costante di tempo e quindi più veloce è la riduzione della distanza fra i due valori.

reverting sia la soluzione dell'ipotesi keynesiana di *normal backwardation*, la quale afferma appunto che lo spot rate tende al tasso "normale" di lungo periodo γ ²⁸.

2.6 Processo di Ornstein e Uhlenbeck

Dopo aver introdotto il modello mean-reverting risulta conseguenza naturale trattare il processo di Ornstein e Uhlenbeck, il quale è fondamentale per procedere con una rappresentazione di traiettorie simulate nell'ambito mean-reverting.

È da notare che questo processo è utilizzato ampiamente nel modello di Vasicek per descrivere l'andamento dello spot rate; inoltre, viene anche utilizzato nel modello Cox, Ingersoll e Ross (oggetto di studi del prossimo capitolo) con le opportune modifiche dovute alla presenza di un processo mean-reverting che però in questo caso presenta la radice quadrata; come detto, quest'ultimo modello verrà visto nel terzo capitolo, mentre in questo paragrafo verrà analizzato e approfondito il processo di Ornstein e Uhlenbeck.

Prima di tutto, è necessario aggiungere al modello deterministico esaminato nel paragrafo precedente la componente stocastica; di conseguenza, l'equazione differenziale stocastica di partenza sarà la seguente:

$$dY = \alpha (\gamma - Y)dt + \sigma dZ$$

A questo punto è possibile calcolare l'equivalente discreto di Eulero, il quale permette di applicare il modello mean-reverting a processi di simulazione utili soprattutto nello studio dell'andamento del tasso istantaneo di interesse $r(t)$. L'equivalente discreto può essere riassunto dalla seguente equazione:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + \alpha (\gamma - Y_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

L'uguaglianza appena trovata ha la struttura di un'equazione autoregressiva di primo ordine; inoltre essa è caratterizzata dalla proprietà di markovianità in quanto tutti gli i -esimi incrementi dipendono solamente dal valore Y_t precedente ma non dalla serie storica²⁹.

²⁸ (Keynes, 1930)

²⁹ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, Appendice C, il Mulino, 2007)

2.6.1 Simulazione delle traiettorie spot-rate su R

In questo paragrafo utilizzerò le conclusioni a cui si è giunti riguardo il modello mean-reverting ed il processo di Ornstein e Uhlenbeck; inoltre, farò uso del linguaggio di programmazione R per effettuare una simulazione di Monte Carlo riguardo l'andamento dello spot rate secondo il modello mean-reverting.

Step 1

Procederò illustrando i dati, spiegando passo dopo passo le operazioni svolte ed infine illustrando con una rappresentazione grafica i risultati a cui si è giunti.

```
# Parametri del processo di Ornstein Uhlenbeck

T <- 10           # Numero Anni
n <- 250*T        # Numero intervalli
a <- 0.1          #  $\alpha$ , Velocità di tendenza al valore di lungo periodo
g <- 0.08         #  $\gamma$ , Valore di lungo periodo
X0 <- 0.04        # Valore al tempo iniziale
rho <- 0.02       # Volatilità
deltat <- T/n     # Scarto temporale su base annuale (1 Anno = 250 gg)
m <- 3           # Numero di traiettorie simulate
set.seed(123456) # Seme della distribuzione casuale
```

Da questi dati si può notar come lo scadenziario temporale sia lo stesso di quello utilizzato nella simulazione del moto browniano geometrico. Inoltre, anche il numero di cammini che si andranno a osservare rimane pari a tre.

Una prima lettura dei parametri evidenzia un basso valore di alpha, il quale porterà probabilmente ad un lento avvicinamento della traiettoria al valore medio di lungo periodo; nei prossimi step si potrà verificare questa assunzione.

Prima di iniziare l'analisi della funzione, è importante sottolineare che il comando "set.seed" viene utilizzato per fissare la distribuzione normale random, in modo da poter effettuare variazioni sui parametri utilizzati, al fine di capire ancora meglio le implicazioni del modello mean-reverting; infatti, grazie al comando "set.seed", la distribuzione random è la stessa tutte le volte in cui verranno lanciate le diverse simulazioni. Viene assicurata in tal modo la possibilità di riprodurre le simulazioni.

Step 2

Dopo aver elencato i dati del problema è opportuno procedere con la stesura della funzione che permetterà l'osservazione dei cammini propri del processo di Ornstein e Uhlenbeck; in questo case study ho scelto di simulare tre traiettorie mean-reverting.

Di seguito viene riportato il codice che ho scritto su R per il calcolo delle traiettorie.

```
OrnUhl <- matrix(NA, m, n)

for (l in 1:m){
  Xt <- c()
  Xt[1] <- X0
  for (i in 2:n){
    Xt[i] <- Xt[i-1]+a*(g-Xt[i-1])*deltat+rho*rnorm(1)*sqrt(deltat)
  }
  OrnUhl[l,] <- Xt
}
```

In modo analogo alla simulazione del moto browniano geometrico, il primo passo nella scrittura di questa funzione consiste nel creare una matrice di ampiezza pari al numero di simulazioni che si vuole lanciare (righe) e la quantità di intervalli che compongono il processo stocastico (colonne).

Una volta creata la matrice, si procede scrivendo la funzione che servirà per riempirla con i risultati ottenuti. Come nel caso del moto browniano geometrico, farò uso della funzione loop “for”, la quale permetterà di ripetere gli stessi calcoli per tutti cammini da simulare.

Il corpo della funzione è composto da un vettore chiamato “ X_t ”; dopo aver creato tale vettore e avergli assegnato il valore iniziale pari a “ X_0 ” (che ho fissato a un valore pari a 0,04), ho scritto un altro loop “for” che serve per riempire il vettore “ X_t ” con tutti i risultati della simulazione che sono calcolati tramite il modello mean-reverting analizzato finora.

L'ultimo passo da effettuare è quello di registrare la traiettoria appena simulata e contenuta nel vettore “ X_t ” in una riga della matrice creata a inizio processo, che in questa è stata chiamata “OrnUhl”; alla fine della simulazione la matrice “OrnUhl” conterrà tante righe quanti sono i cammini simulati e tante colonne quanti sono gli intervalli propri di ciascuna simulazione.

Le seguenti righe riportano la primissima parte (30 valori) della simulazione dell'andamento della prima traiettoria (che sarà riportata in blu scuro sul grafico a seguire) della dinamica dello spot rate:

```
> OrnUhl[1,]
 [1] 0.04000000 0.04107060 0.04073699 0.04030365 0.04043020 0.04329493
 [7] 0.04436513 0.04603947 0.04921868 0.05070870 0.05018135 0.04893327
[13] 0.04753665 0.04747914 0.04897770 0.05032233 0.05040707 0.04948914
[19] 0.05067838 0.05280025 0.05351909 0.05257597 0.05417637 0.05423539
[25] 0.05448544 0.05508079 0.05455018 0.05458134 0.05548312 0.05672223
...

```

Le traiettorie calcolate vanno a simulare l'andamento dello spot-rate con valore di partenza pari a 0,04 e valore di lungo periodo pari a 0,08; infatti, è significativo ricordare che il processo di Ornstein

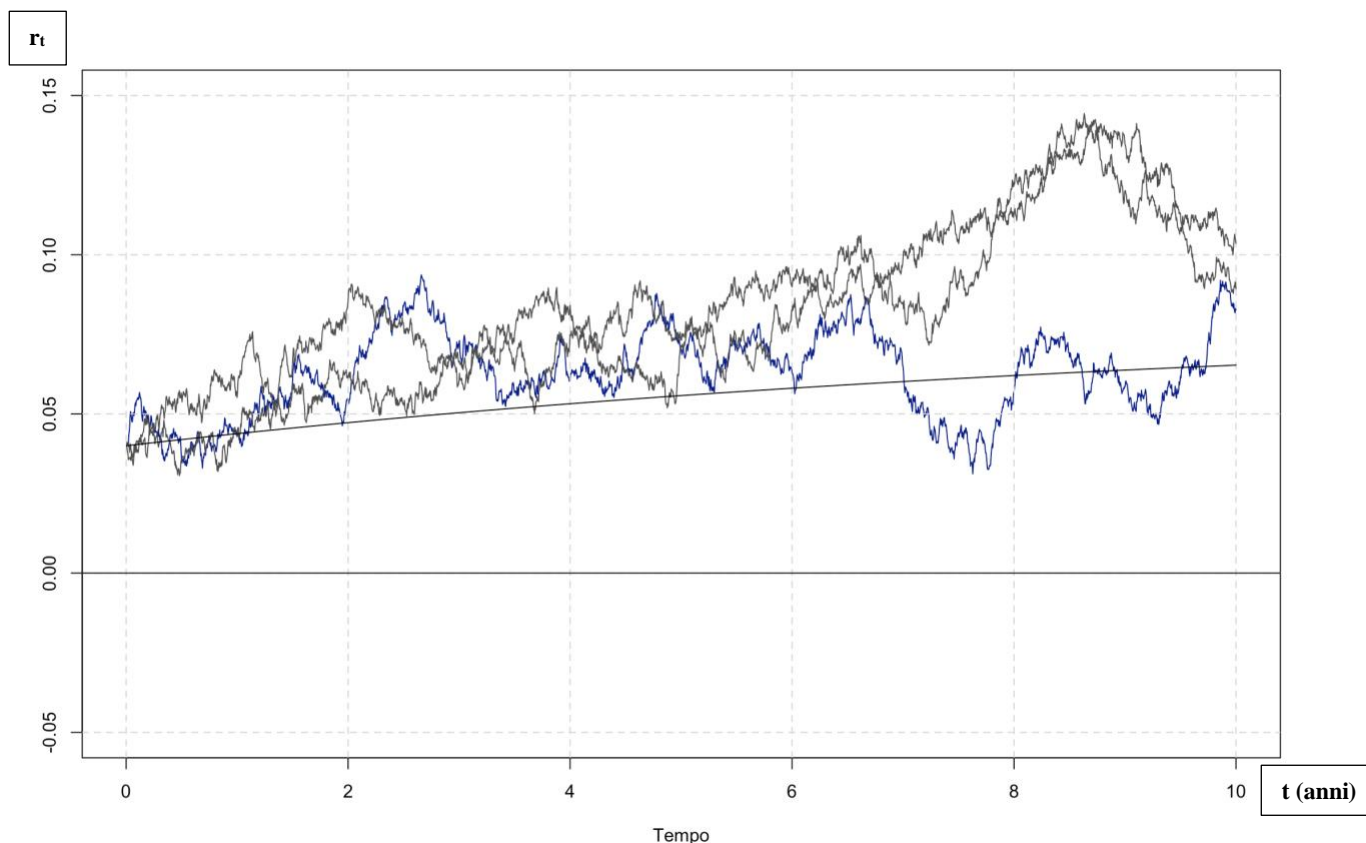
Uhlenbeck, date le sue peculiari caratteristiche, risulta molto utile per osservare il cammino di uno spot-rate. In questo case study non è tanto importante focalizzarsi su quali parametri e valori di partenza sono stati scelti in quanto esistono modelli enormemente complessi per arrivare a una stima accurata degli stessi; ciò che è rilevante ai fini di questa analisi, è invece capire quali sono gli effetti della variazione di uno di questi parametri mantenendo costanti tutti gli altri dati. In altre parole, è significativo proporre una sensitivity analysis del processo di Ornstein Uhlenbeck.

Step 3

In conclusione del case study, riporterò una rappresentazione grafica del processo simulato.

A tale scopo ho creato un grafico su R che riporta le tre traiettorie appena simulate; il primo cammino, di cui sopra i primi 30 risultati, è descritto dalla traiettoria blu. Invece gli altri due andamenti sono rappresentati in grigio scuro.

Infine, a tagliare le tre traiettorie è riportato in nero il valore atteso del processo, che serve come linea di riferimento per l'analisi di questo grafico.

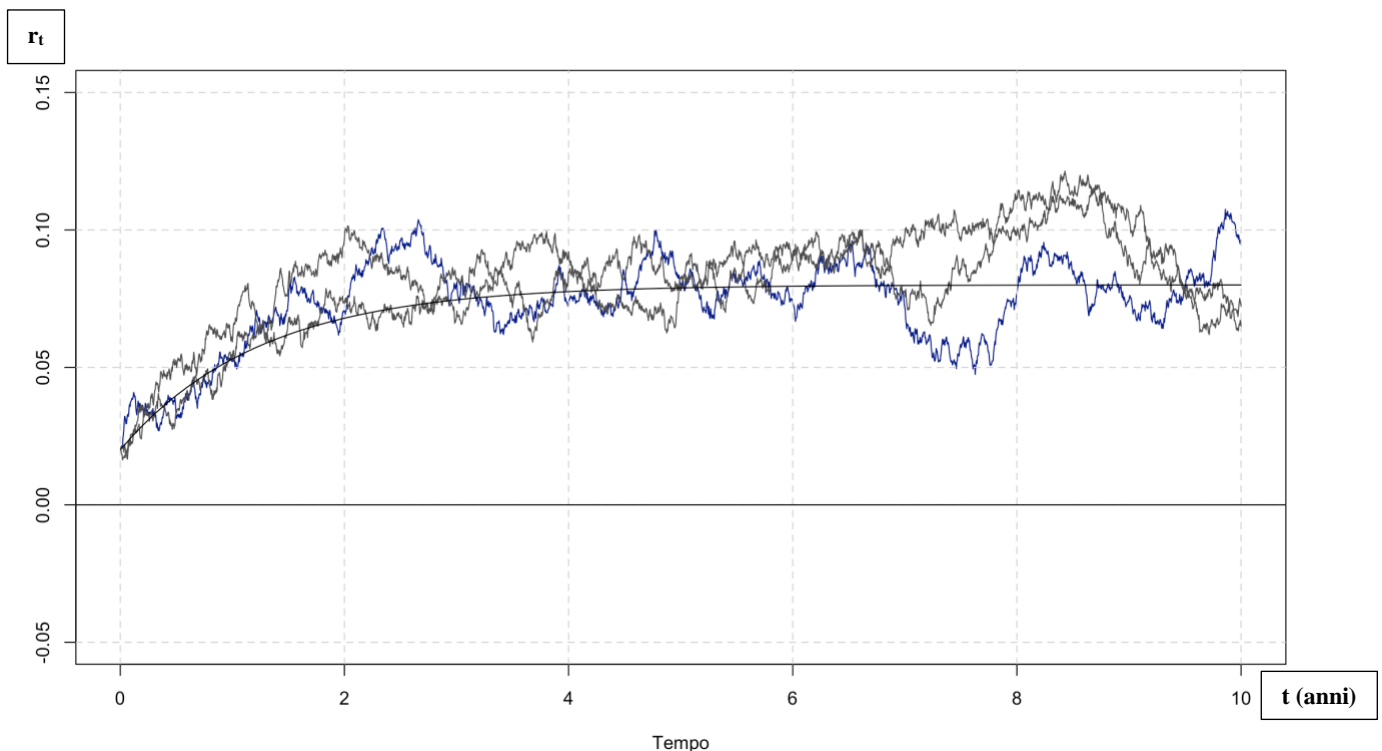


Una considerazione rilevante che si può trarre dal grafico riguarda il parametro α ; infatti, sia dalla variabilità delle traiettorie, sia dalla forma schiacciata della curva benchmark che rappresenta il valore atteso, si può evincere che la velocità di convergenza al valore di lungo periodo γ è lenta.

Questo va a confermare ciò che è stato assunto a inizio paragrafo riguardo la velocità di convergenza al valore medio di lungo periodo e alla conseguente variabilità delle traiettorie.

Per una verifica chiara e intuitiva, risulta significativo proporre un nuovo grafico gli stessi dati, ma aventi come unica differenza proprio il parametro α ; infatti, nel grafico successivo α cambierà da un valore di partenza di 0,1 ad un nuovo valore pari a 0,8.

L'aspettativa è che, in seguito ad aumento di alpha, si verifichi una maggiore velocità di convergenza al valore medio di lungo periodo e conseguentemente una minore variabilità dei cammini che dovrebbero quindi essere più racchiusi intorno alla linea benchmark rappresentativa del valore atteso.



È immediato notare come in questo secondo grafico la velocità con cui le traiettorie si avvicinano al valore di lungo periodo è chiaramente maggiore; la prima evidenza rilevante è data dalla curva benchmark che rappresenta il valore atteso del processo: è infatti possibile notare come essa schizzi subito verso l'alto per poi attestarsi sul valore di lungo periodo pari in questo caso a 0,08. Inoltre, l'effetto del parametro α è rilevante anche riguardo le traiettorie simulate: è possibile osservare come esse convergono con molta più rapidità al valore γ , mentre nel primo caso oscillavano più liberamente senza avere un vincolo forte all'asintoto di lungo periodo γ .

Questa notevole differenza tra le due simulazioni, dovuta esclusivamente alla variazione del parametro alpha, fa riflettere sull'importanza che ricade sulla scelta dei parametri e sui criteri e ragioni utilizzati per la valutazione degli stessi.

3. Teoria dell'Immunizzazione Stocastica

Nel corso dei primi due capitoli del presente elaborato è stato prima introdotto il mondo deterministico, al fine di enunciare la teoria dell'immunizzazione classica, e in seguito è stata introdotta la componente stocastica che, in aggiunta di quella deterministica, ha portato alla trattazione dei processi stocastici.

In questo capitolo si prenderanno come punto di partenza le ipotesi fatte sul mondo deterministico per poi evolvere l'analisi su temi che riguardano il mondo stocastico, e si studieranno le applicazioni dei processi stocastici alla teoria dell'immunizzazione, con particolare riferimento al processo mean-reverting square root, caratterizzante del modello di Cox, Ingersoll e Ross che sarà analizzato e approfondito nei paragrafi successivi.

3.1 Ipotesi Fondamentali sul Mercato

Prima di iniziare la trattazione del mondo stocastico sembra opportuno elencare le ipotesi che lo caratterizzano ed evidenziare le differenze con quello deterministico.

Vi sono quattro ipotesi principali:

1. Il mercato è perfetto (frictionless). Questo implica che non ci siano costi di transazione, i titoli sono infinitamente divisibili, sono consentite le vendite allo scoperto e gli agenti sono massimizzatori di profitto e price-taker, ovvero non possono tramite le loro azioni influenzare il prezzo di mercato.
2. Il mercato è aperto con continuità, ovvero in qualsiasi istante è possibile definire uno scambio (continuous trading).
3. Gli arbitraggi non-rischiosi sono esclusi e impossibili da realizzare.
4. Lo spot-rate $r(t)$, definito come intensità istantanea di interesse di titoli con vita infinitesima, è un processo di diffusione descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr(t) = f(r_t, t)dt + g(r_t, t)dZ(t)$$

dove f e g rappresentano rispettivamente il coefficiente di drift e la radice del coefficiente di diffusione.

Si può immediatamente notare che queste sono le stesse ipotesi del modello deterministico con l'aggiunta della quarta che riguarda lo spot-rate.

Proprio perché il tasso locale di interesse costituisce il punto chiave dell'analisi svolta in questo capitolo è opportuno approfondire le sue proprietà e caratteristiche.

3.1.1 Spot-rate

Con spot-rate si intende il rendimento istantaneo di mercato e lo si indica con notazione $r(t)$; esso è di fondamentale importanza nella costruzione sia del modello deterministico, sia di quello stocastico. Inoltre, è interessante considerare che esso può essere inteso anche come tasso non rischioso; infatti, una generica operazione di investimento in un intervallo di tempo che va da t a $t+dt$ garantisce un interesse positivo; tuttavia, tale operazione può essere considerata solo istantaneamente non rischiosa, poiché non sono noti i successivi valori dello spot-rate negli istanti $t' > t$.

Dopo aver definito lo spot-rate, un primo passo verso il mondo stocastico consiste nell'applicare la condizione di assenza di arbitraggi per ricavare una relazione (ancora deterministica) che sarà molto utile nell'analisi che verrà svolta successivamente. Detta relazione scaturisce dalla considerazione di due possibili scenari che l'investitore si trova a fronteggiare, i quali saranno discussi nelle righe successive.

Ipotizzando il possesso in t da parte di un investitore di un titolo con scadenza in s , valore nominale unitario e prezzo $v(t,s)$, egli si troverà a scegliere fra due alternative: in un primo caso può adottare una gestione attiva, rientrando nel mercato (quindi vendendo il titolo di cui è in possesso) e reinvestendo in un nuovo titolo; altrimenti può scegliere una gestione passiva, che consiste nella detenzione del titolo.

Nella prima situazione, reinvestendo in un titolo con scadenza in $t+dt$, egli realizzerà con certezza un interesse pari a $v(t,s)r(t)dt$, ovvero il prezzo in t del titolo, moltiplicato per lo spot-rate; se invece opta per la seconda scelta, l'interesse sarà dato da $v(t+dt,s) - v(t,s)$, ovvero la differenza di valore del titolo nell'arco temporale che intercorre fra t e l'istante immediatamente successivo ad esso.

Dato che si sta considerando un mercato in cui sono valide le condizioni sopra elencate, quindi con caratteristiche di certezza e assenza di rischiosità, per l'ipotesi di assenza di arbitraggio gli interessi che derivano da ciascuna strategia devono essere gli stessi; dovrà cioè valere la seguente uguaglianza che descrive il valore degli interessi che scaturiscono dalla strategia di gestione attiva e passiva:

$$dv(t,s) = v(t,s)r(t)dt,$$

dividendo entrambi i membri per $v(t,s)$ e passando agli integrali si ottiene:

$$v(t,s) = e^{-\int_t^s r(u)du}$$

che è proprio la legge della capitalizzazione composta.

A questo punto è opportuno fare una distinzione tra mondo deterministico e mondo stocastico.

Nel caso deterministico, varrà che $r(u)du$ è uguale all'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$ per ogni istante t . In altre parole, δ non è in alcun modo influenzata dal fattore tempo e vale sempre.

Immaginando adesso un portafoglio stocastico, si potrà giungere alle stesse conclusioni riguardo all'uguaglianza degli interessi prodotti con le due diverse strategie, una attiva, l'altra passiva; varrà quindi la relazione:

$$dW(t) = W(t)r(t)dt$$

dove $W(t)$ indica il valore del portafoglio al tempo t .

L'unica importante differenza consiste nel fatto che, mentre la relazione del mondo deterministico vale anche in qualsiasi istante successivo t , la relazione appena trovata è valida esclusivamente in t . Questo si verifica perché lo spot-rate, nel caso stocastico, cambia continuamente di valore e non è costante come invece nel mondo deterministico.

La variabilità del tasso di interesse locale sarà il punto centrale di questo capitolo; attraverso il modello CIR si cercherà di trovare un'approssimazione del suo andamento, considerandone i punti di forza e di debolezza e le sue applicazioni riguardo la teoria dell'immunizzazione stocastica.

3.2 Duration Stocastica

Una prima conseguenza della aleatorietà del modello stocastico è proprio quella della presenza del rischio. Da qui l'esigenza di identificare una misura della rischiosità collegata all'incertezza dell'andamento dello spot-rate. Cox, Ingersoll e Ross hanno proposto a tale scopo la duration stocastica³⁰.

Il primo passo nella definizione della stessa consiste nell'attribuire agli zero-coupon bond una duration stocastica uguale alla loro maturity, proprio come nel caso della duration ordinaria.

Inoltre, la misura di "rischio base"³¹ è definita come il rapporto tra la variazione del prezzo a seguito di fluttuazioni dello spot rate non anticipate e l'importo del prezzo stesso; tale rapporto può essere inteso come derivata logaritmica della funzione valore $W(t)$ rispetto a r (membro destro dell'uguaglianza sottostante):

$$\Omega(r(t), t; x) = - \frac{W_r(r(t), t; x)}{W(r(t), t; x)}$$

A questo punto, considerando due flussi x e y ugualmente rischiosi in t , i rispettivi rischi base dovranno coincidere. Allora dovrà valere la seguente uguaglianza:

$$- \frac{W_r(r(t), t; x)}{W(r(t), t; x)} = - \frac{v_r(t, t + D)}{v(t, t + D)}$$

³⁰ (J.C. Cox, Duration and the Measurement of the Basis Risk, Journal of Business, 52, n.1, , 1979)

³¹ (M. De Felice, 1991)

Questa relazione sta a significare che il rischio base di un flusso x (membro sinistro della relazione) è uguale al rischio base di un flusso y , che in questo caso è costituito da uno zero-coupon bond unitario con scadenza D .

Data l'uguaglianza dei rischi dei due flussi si può affermare che essi debbano avere stessa duration, e poiché la duration di uno zero-coupon bond è uguale alla sua maturity allora la duration del flusso x è pari a D . La duration stocastica viene quindi definita implicitamente dalla relazione appena esaminata.

3.3 Teorema generale di immunizzazione stocastica

Una volta introdotta la duration stocastica è possibile proseguire verso la teoria dell'immunizzazione stocastica.

In questo paragrafo procederò con l'enunciazione del teorema partendo dalle ipotesi di base, proseguendo con le condizioni che lo costituiscono, per arrivare alle considerazioni sui risultati ottenuti.

Si consideri un portafoglio composto da flussi di investimento x e flussi di indebitamento y . La condizione di partenza rimane, come per il teorema dell'immunizzazione classica, quella del vincolo di bilancio, ovvero che i due flussi in analisi abbiano un valore netto nullo all'istante di valutazione t .

Il portafoglio si dirà quindi immunizzato se, in un intervallo di tempo che va da t a $t+dt$, i flussi x e y riportano con certezza la stessa variazione di valore; questa affermazione è contenuta nella seguente relazione:

$$dW(t; x) = dW(t; y)$$

Ovvero, le due derivate prime dei valori dei flussi x e y sono uguali, e il differenziale stocastico del valore netto è nullo in t .

Ciò equivale a dire che un portafoglio avente valore netto nullo in t è nello stesso momento istantaneamente non rischioso, ovvero c'è la garanzia di solvibilità di un portafoglio che sia solvibile in t .

Il teorema generale di immunizzazione stocastica afferma che, dati i due flussi x e y distribuiti su uno scadenziario t , e data la condizione di vincolo di bilancio appena esaminata, allora ci sarà immunizzazione (portafoglio istantaneamente immunizzato) se la duration stocastica del flusso x è la stessa della duration stocastica del flusso y :

$$D(r(t), t; x) = D(r(t), t; y)$$

È essenziale notare che il teorema generale di immunizzazione stocastica fa riferimento esclusivamente all'istante immediatamente dopo t ; questo comporta che il vincolo di bilancio e la

condizione di duration non si conservano per istanti successivi a t , perché lo spot-rate $r(t)$ varia continuamente; da qui nasce l'esigenza da parte del gestore di effettuare una ricalibratura continua del portafoglio considerando ogni volta un livello diverso dello spot-rate.

Appare ora chiaro che l'obiettivo dell'immunizzazione stocastica è quello di risolvere l'aleatorietà di $r(t)$. In altre parole, vi è una forte esigenza di ipotizzare quale sia il livello del tasso locale in un dato istante, allo scopo di effettuare previsioni sul livello futuro del tasso che si potrebbero rilevare essenziali per una strategia di immunizzazione di portafogli per minimizzare eventuali problemi di solvibilità.

Per soddisfare tale esigenza sono stati creati diversi modelli che mirano a simulare l'andamento dello spot-rate, due fra tutti il modello di Cox, Ingersoll e Ross e il modello di Vasicek.

Nel corso dei prossimi paragrafi si approfondirà la teoria e le applicazioni del primo, il modello CIR. Il modello Vasicek, come detto in precedenza, è uno dei più famosi insieme al CIR per lo studio del cammino dello spot-rate; esso si basa principalmente sul processo di Ornstein e Uhlenbeck, largamente analizzato nel secondo capitolo di questo elaborato; il difetto maggiore che lo ha portato in secondo piano negli anni passati, ma che oggi presenta una sorprendente similarità con la realtà, consiste nel fatto che il processo ammette valori negativi della variabile oggetto di studio; in altre parole, una variabile, pur avendo un valore di partenza positivo, può, a causa della componente stocastica, assumere valori negativi nel corso del processo.

Come accennato, questo ha portato allo scarso utilizzo del modello nella simulazione dei tassi di interesse, poiché in passato la previsione di tassi di interesse negativi era inconcepibile; con molte sorprese, oggi tale modello ha riacquisito importanza proprio per la presenza di questo peculiare scenario ribassista, in cui alcuni tassi di interesse hanno addirittura superato la soglia dello zero, portandosi di fatto al di sotto di essa.

In questo capitolo tuttavia non verrà trattato il modello di Vasicek, ma ci si concentrerà su un modello simile ideato da Cox, Ingersoll e Ross dai quali prende il suo nome (CIR). Si vedrà che in questo caso la forza (o debolezza) del modello risiede nella sua proprietà di non ammettere valori negativi grazie alla presenza della radice quadrata nella componente stocastica che, come vedremo in un'analisi approfondita dei prossimi paragrafi, sarà decisiva nel distinguere il modello all'interno dell'ampia letteratura del mondo stocastico.

3.4 Il modello Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

Come è stato già accennato, il modello CIR riveste un ruolo importante nella valutazione dei contratti Interest Rate Sensitive (IRS); questi sono i contratti in cui lo spot-rate, a differenza di una struttura deterministica, non è costante e varia continuamente.

L'obiettivo del CIR è quindi quello di proporre un metodo che miri a dare una buona approssimazione dell'andamento del tasso di interesse locale. In particolare, per la componente deterministica si assume una dinamica mean-reverting con funzione di drift³²:

$$f(r_t, t) = \alpha(\gamma - r_t) \\ \text{con } \alpha, \gamma > 0$$

Come si può immediatamente notare, questa è la stessa componente incontrata nel corso del capitolo 2 in occasione dei processi stocastici di tipo mean-reverting; pertanto valgono le stesse considerazioni fatte in quel caso, ovvero che $r(t)$ segue una traiettoria di avvicinamento al valore di lungo periodo γ e che la velocità con cui avviene tale avvicinamento è dettata dal parametro α : più esso è grande più la differenza tra valore asintotico e tasso locale ha peso e quindi maggiore sarà la velocità con cui $r(t)$ si avvicina a γ .

La componente stocastica del CIR è riassunta dalla seguente relazione:

$$g(r_t, t) = \rho\sqrt{r_t}$$

Al contrario della componente deterministica, quella stocastica non è stata analizzata nel secondo capitolo. Infatti, essa presenta una differenza fondamentale che consiste nella presenza della radice quadrata: questo assicura che il coefficiente g tende a zero all'annullarsi di $r(t)$; la conseguenza diretta è che le traiettorie simulate dello spot-rate non possono assumere valore negativo.

Un'altra considerazione rilevante riguardo la componente stocastica riguarda il fatto che essa sia tanto più grande quanto più elevato è il livello di $r(t)$; questa proprietà da ragione all'evidenza empirica che riflette maggiore volatilità in periodi di elevati tassi di interesse³³.

Infine, se si considera il prezzo di mercato del rischio³⁴, risulta che esso è influenzato dalla costante π , numero reale di segno arbitrario, ed è descritto dalla funzione:

$$q(r_t, t) = -\pi \frac{\sqrt{r_t}}{\rho}$$

³² (J.C. Cox, A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53, 2., 1985)

³³ (G. Castellani, *Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati*, il Mulino, 2007)

³⁴ Il prezzo di mercato del rischio non è oggetto di trattazione di questo elaborato; pertanto si riporterà esclusivamente la funzione che lo descrive, ai soli fini dell'enunciazione e utilizzo del modello CIR.

La funzione drift può quindi essere aggiornata andando a considerare proprio il parametro π ; essa sarà quindi descritta da:

$$\hat{f} = \alpha(\gamma - r_t) + \pi r_t$$

Inoltre, per $\pi \neq \alpha$ si possono definire i nuovi coefficienti:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \alpha - \pi, \\ \hat{\gamma} &= \frac{\alpha}{\alpha - \pi} \gamma\end{aligned}$$

Ricavando la nuova funzione drift aggiornata:

$$\hat{f} = \hat{\alpha}(\hat{\gamma} - r_t)$$

In questo modo si riesce a conservare il processo mean-reverting e aggiornare i coefficienti α e γ per il premio al rischio π .

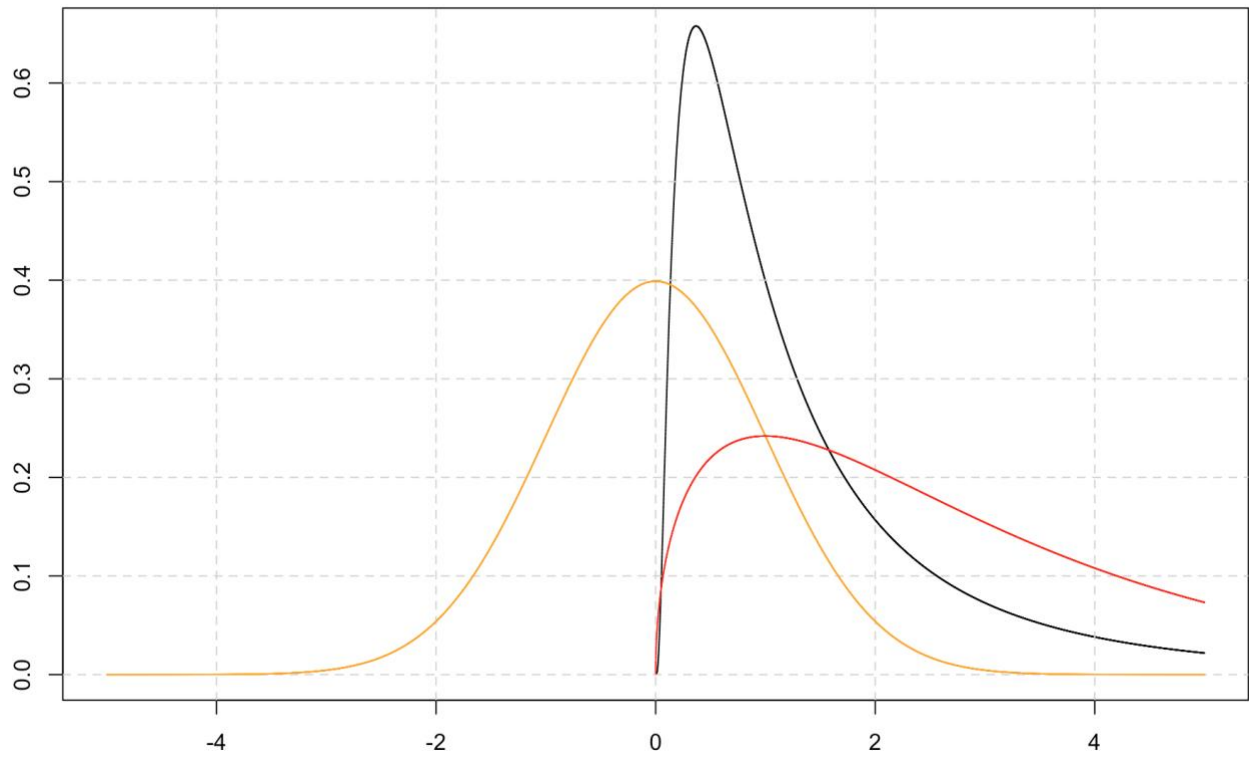
Una volta riportate le componenti del modello, è possibile enunciare l'equazione differenziale stocastica mean-reverting square-root:

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt + \rho\sqrt{r(t)}dZ(t)$$

Un'importante differenza osservabile in questa equazione differenziale risiede nella distribuzione di probabilità associata alla variabile aleatoria $r(t)$. Infatti, nel caso del processo mean-reverting ordinario la distribuzione probabilistica è di tipo lognormale, come analizzato nel secondo capitolo del presente elaborato.

In questo caso invece, l'introduzione della radice quadrata nella componente stocastica fa sì che la distribuzione probabilistica associata alla variabile aleatoria non sia più di tipo lognormale, ma è invece una distribuzione chi-quadro non centrata. Tuttavia, anche se le due distribuzioni sono diverse, presentano dal punto di vista qualitativo le stesse proprietà: la chi-quadro ammette infatti esclusivamente valori positivi dello spot-rate, è nulla in corrispondenza del valore di $r(t)$ uguale a zero e ha una coda a destra che va all'infinito.

Per evidenziare le differenze tra la distribuzione normale, lognormale e chi-quadro ho scritto un codice su R per disegnare le funzioni di densità di ciascuna di esse. Nella rappresentazione grafica seguente ho riportato in arancione la distribuzione normale, in nero la lognormale ed infine in rosso la chi-quadro.



Il grafico conferma quindi le assunzioni fatte in precedenza: la distribuzione lognormale e la chi-quadro presentano caratteristiche analoghe dal punto di vista qualitativo.

3.4.1 La funzione di densità

Una volta elencate le proprietà e caratteristiche del CIR sembra opportuno approfondire la trattazione della distribuzione probabilistica legata all'equazione differenziale mean-reverting square-root propria di questo modello.

In questo paragrafo svolgerò una sensitivity analysis sui parametri del modello attraverso la rappresentazione grafica delle funzioni di densità che avranno forma diversa al variare dei parametri; in particolare, la sensitivity analysis prevede la variazione di un solo parametro alla volta, mantenendo quindi tutti gli altri costanti, così da avere una comprensione più chiara e completa riguardo l'influenza che ciascuno di essi ha sulla funzione di densità e quindi sul modello CIR in generale.

È importante ricordare che la presenza della radice quadrata del tasso spot legata alla deviazione standard, comporta che la distribuzione probabilistica del tasso di interesse sia uguale a una chi-quadro non centrata; la funzione di densità sarà quindi data da³⁵:

$$f[r_T|r_t] = 2c * \chi_{2q+2,u}^2[2cr_t]$$

dove,

$$q = \frac{2\alpha\gamma}{\rho^2} - 1,$$

$$u = cr_t e^{-\alpha(T-t)},$$

$$c = \frac{2\alpha}{\rho^2(1 - e^{-\alpha(T-t)})}$$

Dopo aver espresso la funzione di densità della chi-quadro non-centrata procederò con la rappresentazione grafica che evidenzia il cambiamento di un parametro alla volta.

Per questo case study ho scelto come valori base dei parametri, che verranno di volta in volta cambiati, per alpha, gamma, rho e T rispettivamente 0,3, 0,07, 0,1 e 1.

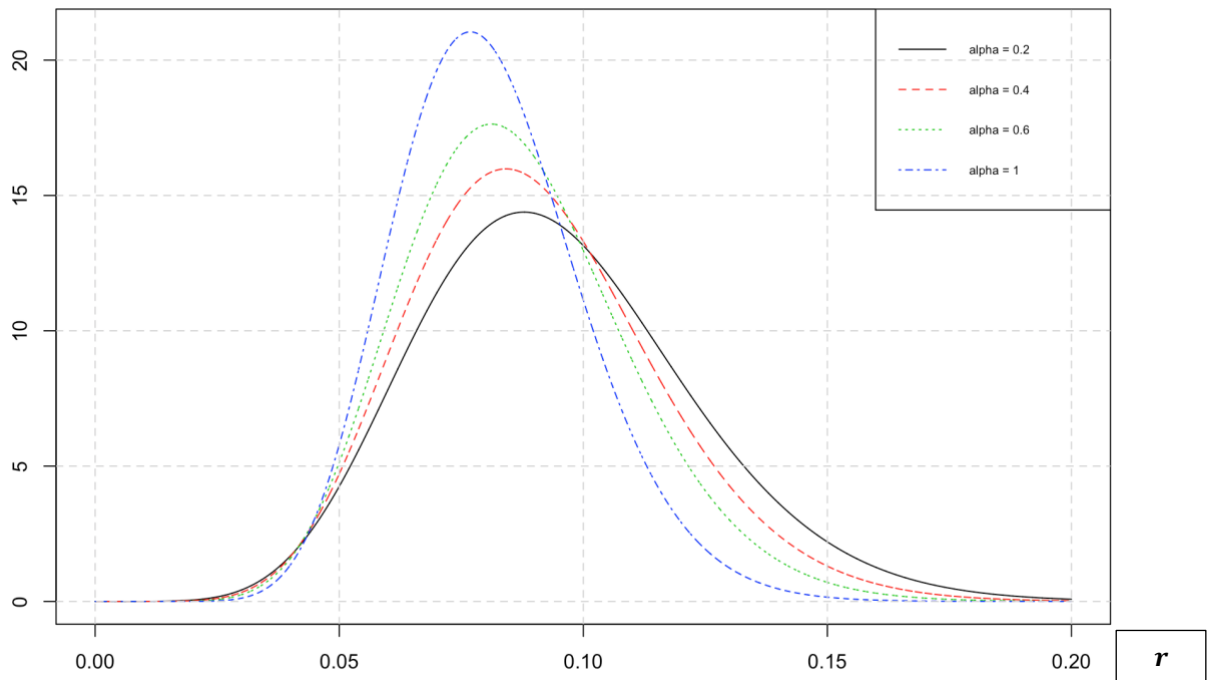
La seguente tabella illustra i dati appena riportati:

Dati	
α	0,3
γ	0,07
ρ	0,1
T	1

dove, alpha rappresenta la velocità con cui lo spot-rate si accosta al livello di lungo periodo, gamma il valore di lungo termine, rho la volatilità e infine T la scadenza.

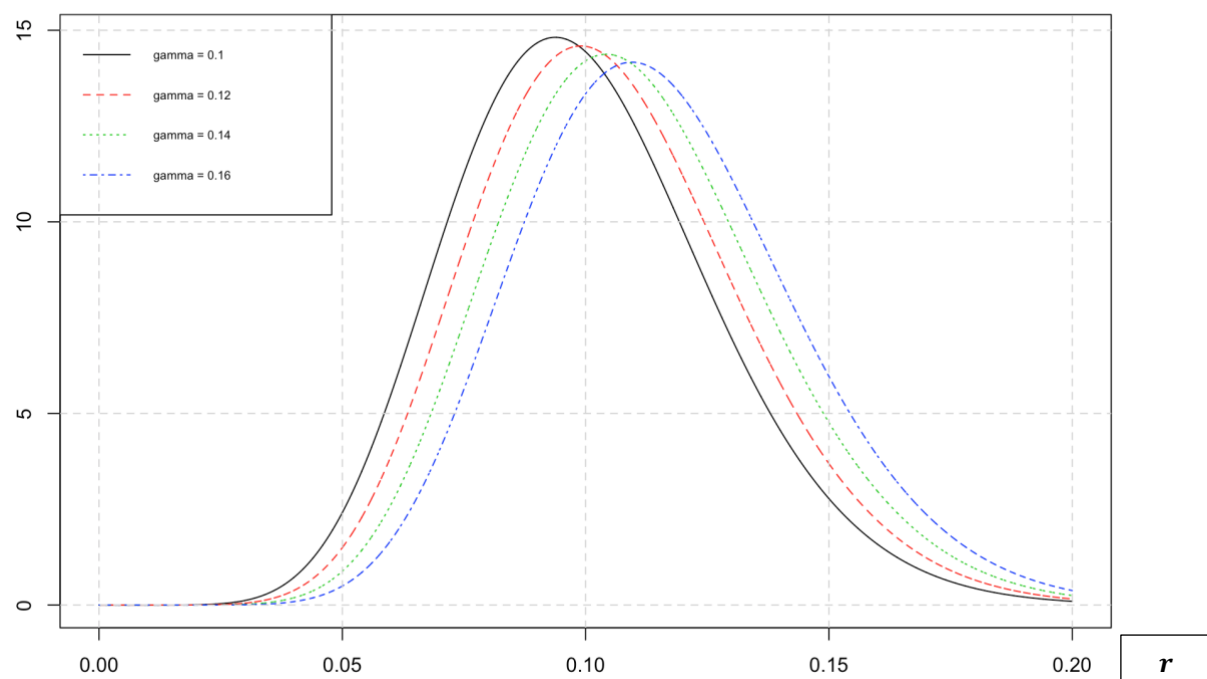
Nel primo grafico riporterò i cambiamenti della funzione di densità al variare del parametro alpha.

³⁵ (Mastering R for Quantitative Finance, Packt Publishing, Chapter 6, 2015)



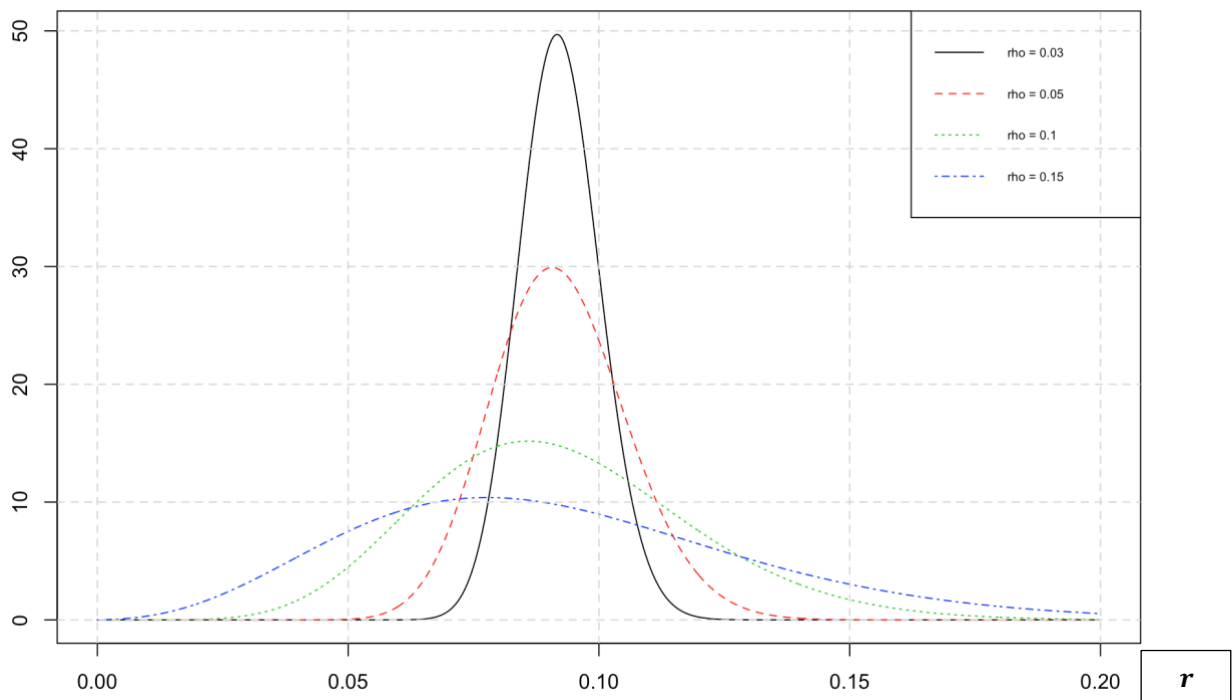
Da questo primo grafico risulta chiaro che al crescere di α , la variabilità dei valori di $r(t)$ decresce e quindi aumenta la velocità con cui quest'ultimo si avvicina alla media di lungo periodo; infatti, dal grafico si vede che tutti i valori di $r(t)$, in corrispondenza del livello di α maggiore uguale a 1, sono concentrati vicino a γ , che in questo esempio è pari a 0,07.

Nel prossimo grafico andrò a considerare gli effetti delle variazioni di gamma; si ricorda che il livello di α verrà ricalibrato al suo valore base iniziale pari a 0,3.



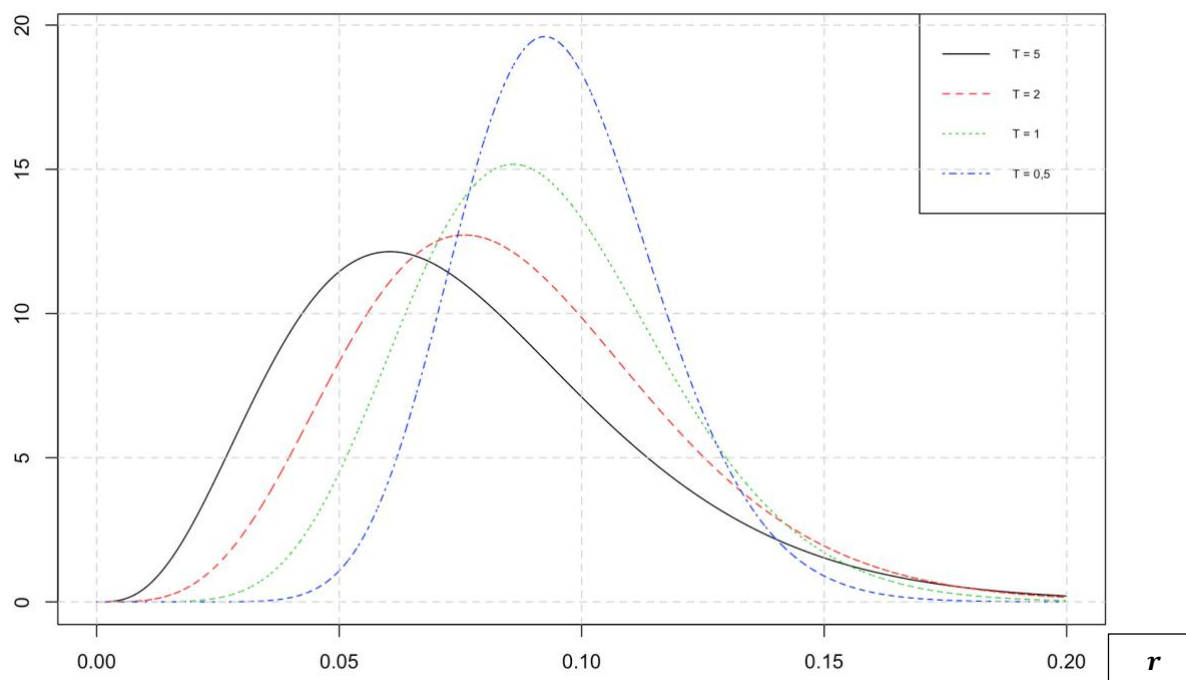
In questo caso l'effetto del cambiamento di γ incide principalmente sulla media della distribuzione; infatti, dato che γ è il valore medio di lungo periodo, al suo aumentare la funzione di densità si sposterà verso destra, proprio perché la concentrazione dei valori che, più o meno velocemente, tendono a γ , si sposta al cambiare di γ . Oltre ad avere un effetto traslatorio dell'intera funzione, il cambiamento di questo parametro influenza anche la forma della curva, la quale diventa più schiacciata all'aumentare dello stesso.

Nella successiva figura analizzerò gli effetti nel cambiamento della volatilità ρ .



Il risultato del cambiamento della deviazione standard è piuttosto intuitivo e in linea con i modelli discussi sinora; per valori alti di ρ , la funzione di densità è più bassa e schiacciata a indicare una maggiore varianza della distribuzione; nella figura, la linea blu corrisponde al livello più grande di ρ , che è pari a 0,15. Per il livello minimo invece, 0,03, è immediato notare come i valori di $r(t)$ siano molto più concentrati in corrispondenza del valore medio di lungo periodo γ .

Infine, procederò rappresentando la sensitivity analysis riguardo l'ultimo parametro del modello, T .



Da questa ultima figura è possibile concludere che all'aumentare del tempo aumenta la variabilità. Infatti, per una scadenza massima di 5 anni (linea nera) si può osservare una funzione di densità più schiacciata rispetto a quella relativa alla scadenza pari a 6 mesi (linea a tratti blu).

3.4.2 L'equazione di valutazione

L'ultimo passo da compiere prima di poter applicare delle strategie di immunizzazione stocastica consiste nell'analizzare l'equazione di valutazione del modello CIR; l'equazione differenziale permetterà di ricavare il prezzo di un titolo zero-coupon unitario con scadenza τ . Questo passaggio è quindi fondamentale per calcolare i fattori di sconto di mercato per le diverse scadenze τ , che a loro volta serviranno per valutare i titoli nella composizione del portafoglio immunizzato; in altre parole, tramite i parametri stimati del modello CIR, è possibile osservare l'andamento dello spot-rate e conoscere approssimativamente quale sarà il suo valore all'istante di interesse τ ; si tratta quindi di considerare la struttura per scadenza stocastica dei tassi di interesse ed estrapolare lo spot-rate relativo al periodo in cui si vuole applicare il fattore di sconto per calcolare il valore attuale di un titolo e dei suoi flussi.

Procederò riportando l'equazione di valutazione del modello CIR³⁶, la quale permetterà di arrivare a specificare la relazione che individua il prezzo di uno zero-coupon con valore facciale unitario.

³⁶ (G. Castellani, Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, il Mulino, 2007)

$$\frac{1}{2} * \rho^2 r \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + [\alpha(\gamma - r) + \pi r] \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} - rY = 0$$

Come si può immediatamente notare, l'equazione tiene conto dell'aggiustamento per il rischio grazie alla presenza del parametro π , il quale identifica il premio al rischio.

Considerando che i titoli Interest Rate Sensitive (IRS) assumono valore 1 a scadenza (τ) è possibile individuare il prezzo di un titolo zero-coupon unitario con scadenza τ :

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r(t)B(\tau)}$$

dove,

$$A(\tau) = \left[\frac{2de^{(\alpha-\pi+d)\tau/2}}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1) + 2d} \right]^v$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{d\tau}-1)}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1) + 2d}$$

$$d := \sqrt{(\alpha-\pi)^2 + 2\rho^2}$$

$$v := 2 \frac{\alpha\gamma}{\rho^2}$$

L'ultimo passo da compiere prima di applicare delle strategie di immunizzazione stocastica consiste nel richiamare il concetto di rischiosità introdotto nel paragrafo riguardo la duration stocastica (3.2); si era detto che l'opposto della derivata logaritmica del prezzo v rispetto ad r coincideva con la rischiosità in t del titolo zero-coupon con scadenza in τ ; detto rapporto risulterà fondamentale nella risoluzione del problema di immunizzazione stocastica; esso verrà indicato con la seguente notazione:

$$\Omega(t; t + \tau) = -\frac{v_r(t, t + \tau)}{v(t, t + \tau)} = \varphi(t, t + \tau)$$

La rischiosità indica quindi l'incertezza che scaturisce dalla presenza della componente stocastica all'interno del modello CIR. Considerando l'equazione differenziale sopra discussa che identifica il prezzo di uno zero-coupon con valore facciale unitario,

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r(t)B(\tau)}$$

si ricava che la rischiosità coincide con la seconda parte dell'esponente, $B(\tau)$, che è indipendente da r ed è in funzione di τ .

La conclusione è quindi che la funzione di rischiosità $\varphi(\tau)$ è equivalente a $B(\tau)$:

$$\varphi(\tau) \equiv B(\tau) = \frac{2(e^{d\tau}-1)}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1) + 2d}$$

3.5 Immunizzazione Stocastica: costruzione di portafogli immunizzati

L'ultimo step dell'analisi sull'immunizzazione stocastica consiste nell'applicare in un case study le formule appena trovate e discusse riguardo il modello CIR a una strategia di immunizzazione. Come è stato detto in questi paragrafi, la forza di questo modello sta nel trovare un'approssimazione affidabile dell'andamento dello spot-rate in un determinato arco temporale.

In questo ultimo paragrafo illustrerò i risultati ottenuti in un case study che ho svolto sul programma Excel riguardo la costruzione di una strategia di immunizzazione stocastica.

In questa sede l'obiettivo è quello di calcolare due importi del flusso attivo (x_t) che vanno a copertura di una singola uscita (L). La peculiarità sta nel fatto che la struttura per scadenza dei rendimenti non sarà deterministica, ma sarà calcolata usando il modello CIR.

Nei prossimi step andrò a imporre le condizioni che costituiscono il teorema generale di immunizzazione stocastica e procederò calcolando e commentando i risultati ottenuti.

Le due condizioni dettate dal teorema sono il vincolo di bilancio e la condizione di duration stocastica: esse possono essere rispettivamente riassunte dalle equazioni:

$$\beta_1 * v(t, t_1) + \beta_2 * v(t, t_2) = L * v(t, H)$$
$$\varphi(t_1 - t) * \beta_1 * v(t, t_1) + \varphi(t_2 - t) * \beta_2 * v(t, t_2) = \varphi(H - t) * L * v(t, H)$$

dove $\beta_{1,2}$ rappresentano i due importi del flusso attivo, $v(t, t_n)$ i fattori di sconto relativi al periodo che va da t a t_n , H la scadenza della singola posta in uscita, L l'importo della stessa, $\varphi(t_n - t)$ i fattori di rischio relativi al periodo che va da t a t_n .

Nella tabella successiva riporterò i dati che saranno utilizzati per la risoluzione del case study:

Dati	
α	0,5
γ	0,13
ρ^2	0,005
π	-0,05
r_0	9%

dove α rappresenta la velocità con cui r tende al valore di lungo periodo, γ il valore di lungo periodo atteso, ρ^2 la varianza del modello, π il prezzo di mercato del rischio e r_0 il valore iniziale del tasso di interesse spot.

Step 1

Il primo passo consiste nel costruire la struttura dei fattori di sconto, interpretabili come prezzi di titoli zero-coupon con valore facciale unitario; tale struttura sarà fondamentale per soddisfare il vincolo di bilancio e quindi calcolare i valori attuali dei flussi delle poste attive e passive.

Per trovare i fattori di sconto $v(t, t + \tau)$ farò uso della caratteristica che ha permesso al modello CIR di collocarsi fra i modelli più utilizzati nella simulazione dello spot-rate: l'equazione in forma chiusa che identifica il prezzo di uno zero-coupon unitario:

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r(t)B(\tau)}$$

Esplicitando le componenti $A(\tau)$ e $B(\tau)$ e inserendo nell'equazioni i parametri riportati nella precedente tabella, ho calcolato la struttura dei fattori di sconto per lo scadenziario temporale uguale a 5 anni.

Nel corso di questo processo ho calcolato separatamente la componente $B(\tau)$, in quanto, come detto in precedenza, essa coincide con la funzione di rischiosità.

Le strutture dei fattori di sconto e rischio permettono di risolvere il case study, in quanto identificano le due condizioni del teorema generale di immunizzazione stocastica, il vincolo di bilancio e la condizione di duration.

La tabella successiva riporta i calcoli appena discussi, dove la prima colonna rappresenta lo scadenziario temporale, la seconda la componente $A(\tau)$, la terza la componente $B(\tau)$ equivalente ai fattori di rischio e infine l'ultima colonna rappresenta la struttura dei fattori di sconto calcolata mediante l'equazione in forma chiusa del CIR per trovare i prezzi di uno zero-coupon bond unitario.

<i>scadenze</i>	$A(\tau)$	$B(\tau)$ (fattori di rischio)	fattori di sconto
t		$\varphi(0,t)$	$v(0,t)$
1	0,973	0,769	0,908
2	0,911	1,211	0,817
3	0,835	1,464	0,732
4	0,755	1,609	0,653
5	0,678	1,692	0,582

Le ultime due colonne risultano fondamentali alla risoluzione del problema; infatti, la colonna dei fattori di sconto permette di calcolare gli importi che soddisfano la condizione del vincolo di bilancio, mentre la colonna dei fattori di rischio è fondamentale per ottenere le poste dell'attivo che soddisfano la condizione di duration stocastica propria del teorema generale di immunizzazione stocastica.

Step 2

Ho deciso di impostare questo case study in modo analogo a quello svolto nel primo capitolo (paragrafo 1.2), dove in quel caso ho utilizzato il teorema di Fisher e Weil proprio della teoria classica dell'immunizzazione; questo mi permetterà di effettuare un'analisi comparativa tra i risultati ottenuti con l'immunizzazione classica rispetto a quelli calcolati con l'immunizzazione stocastica.

Ho quindi ipotizzato che la singola uscita si verifica a distanza di 4 anni dall'epoca di valutazione (che in questo caso ho assunto uguale a zero) e ha una grandezza pari a 100; inoltre, ho supposto che i due flussi di investimento hanno luogo il secondo e quinto anno. In altre parole, L è uguale a 100, H equivale a 4 e $t_{1,2}$ sono uguali a 2 e 5.

Per calcolare le due quote del flusso attivo che andranno a coprire la singola uscita rendendo il portafoglio istantaneamente immunizzato, è necessario mettere a sistema le due condizioni del teorema, il vincolo di bilancio e la condizione di duration stocastica, proprio come è stato fatto per risolvere il case study del primo capitolo sull'immunizzazione classica.

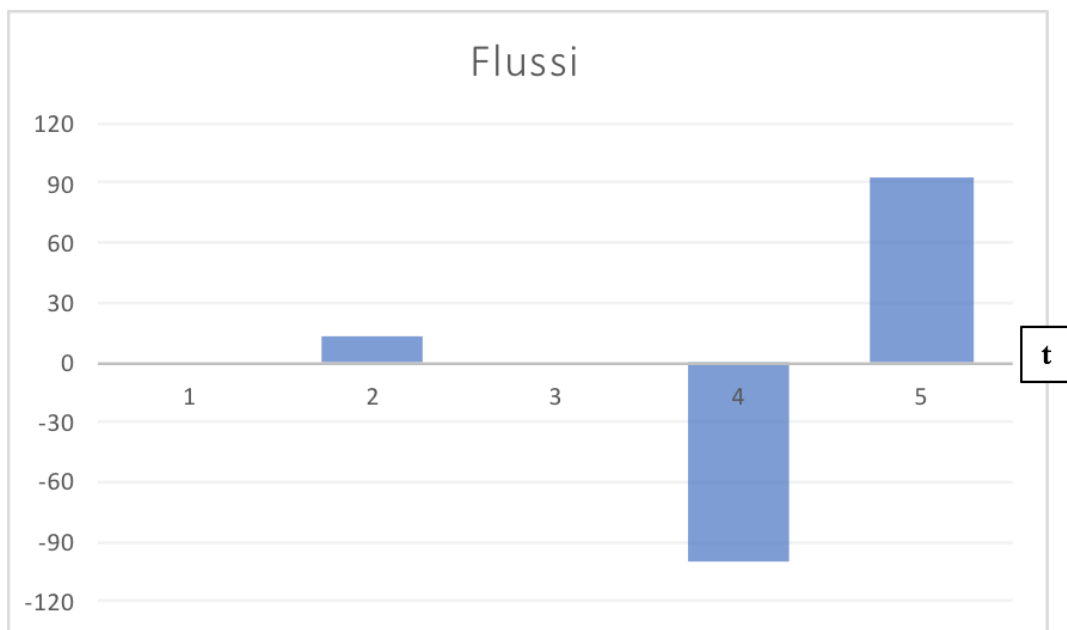
Risolvendo il sistema per i due importi $\beta_{1,2}$ e imponendo t uguale a 0, si ottiene:

$$\beta_1 = \frac{L * v(t, H) * (\varphi(t_2) - \varphi(H))}{v(t, t_1) * (\varphi(t_2) - \varphi(t_1))}$$
$$\beta_2 = \frac{L * v(t, H) * (\varphi(H) - \varphi(t_1))}{v(t, t_2) * (\varphi(t_2) - \varphi(t_1))}$$

Per risolvere questo sistema ho sostituito i dati calcolati e contenuti nelle colonne della tabella precedente riguardo la struttura dei fattori di sconto e rischio.

La strategia di immunizzazione stocastica porta quindi ad avere una composizione del portafoglio con quote β_1 e β_2 pari rispettivamente a 13,79 e 92,84.

Per una comprensione dei flussi più intuitiva ho riportato i risultati nel seguente grafico a barre:



I flussi di investimento appena trovati permettono quindi di avere un portafoglio che è istantaneamente immunizzato. Questo significa che nell'istante immediatamente successivo all'epoca di valutazione t , i flussi di attivo e passivo riportano con certezza la stessa variazione del valore; in altre parole, le derivate prime delle funzioni che rappresentano il valore attuale dei due flussi coincideranno nell'istante $t + dt$.

Se il gestore del portafoglio intende mantenere una condizione di immunizzazione permanente, dovrà ricorrere alla ricalibratura del portafoglio in ogni istante, poiché lo spot-rate varia continuamente.

Il modello CIR mira quindi a trovare una buona approssimazione del cammino seguito dallo spot-rate al trascorrere del tempo, così che il gestore del portafoglio può effettuare in qualsiasi istante la ricalibratura del portafoglio, che sarà tanto più accurata quanto più valide sono le stime dei parametri del modello; l'importanza della calibratura di questi ultimi si è vista in occasione della sensitivity analysis che ho svolto nel paragrafo **3.4.1**: una piccola variazione di uno dei parametri comporta una grande differenza nella distribuzione probabilistica dei valori che lo spot-rate può assumere; da qui, l'esigenza di affidare la scelta dei parametri a metodi sofisticati e complessi che tendono a includere il più grande possibile numero di fattori rilevanti alla simulazione del cammino dello spot-rate.

3.6 Simulazione di Monte Carlo: tasso spot con il modello CIR

Per svolgere il precedente case study ho utilizzato l'equazione in forma chiusa del modello CIR; questa mi ha permesso, dati i parametri, di ricavare la struttura dei fattori di sconto e dei fattori di rischio con i quali ho risolto il sistema composto dalle due condizioni del teorema generale di immunizzazione stocastica per trovare i due flussi dell'attivo a copertura della singola uscita.

Risulta adesso interessante approfondire su come il CIR permette di simulare l'andamento dello spot-rate in un determinato arco temporale.

Come accennato in precedenza, una delle caratteristiche di questo modello è quella di ammettere esclusivamente valori positivi del tasso di interesse locale; questa proprietà nasce dal fatto che la componente stocastica è in funzione della radice quadrata dello spot-rate stesso; dato che la radice quadrata ammette esclusivamente valore non-negativi, lo spot-rate può toccare un valore minimo pari a zero; inoltre, nel caso in cui arrivi a tale soglia, la componente stocastica sarà nulla, ma la componente deterministica sarà positiva e contribuirà a rialzare lo spot-rate che tenderà al valore di lungo periodo γ .

In questo paragrafo svolgerò una simulazione di Monte Carlo scrivendo una funzione con il linguaggio di programmazione R. Successivamente illustrerò le traiettorie calcolate in un grafico.

Step 1

Il primo step consiste nel trovare l'equivalente discreto che permette di applicare il CIR nella simulazione del cammino del tasso spot. Questo consiste nell'effettuare un passaggio dall'equazione differenziale che rappresenta il continuo:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho\sqrt{r_t}dZ(t)$$

ad un equivalente discreto:

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \alpha(\gamma - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t * \Delta t} \epsilon_t$$

Si può immediatamente notare che questo equivalente discreto riporta un'unica ma fondamentale differenza con il processo di Ornstein-Uhlenbeck, usato dal modello di Vasicek: la presenza del tasso spot all'interno della radice quadrata della componente stocastica. Questo elemento di differenza comporta la particolare proprietà del CIR di ammettere esclusivamente valori positivi dello spot-rate.

Step 2

Identificato l'equivalente discreto, è possibile iniziare il processo di simulazione del cammino del tasso spot. A tal fine illustrerò i dati che ho scelto volutamente uguali alla simulazione del capitolo precedente sul processo di Ornstein-Uhlenbeck:

```
# Parametri del CIR

T <- 10           # Numero Anni
n <- 250*T       # Numero intervalli
a <- 0.1         #  $\alpha$ , Velocità di tendenza al valore di lungo periodo
g <- 0.08        #  $\gamma$ , Valore di lungo periodo
X0 <- 0.04       # Valore al tempo iniziale
rho <- 0.02      # Volatilità
deltat <- T/n    # Scarto temporale su base annuale (1 Anno = 250 gg)
set.seed(123456) # Seme della distribuzione casuale
```

Una delle più importanti caratteristiche è il seme della distribuzione casuale. Scegliendolo uguale alla simulazione del capitolo precedente sul processo Ornstein Uhlenbeck, è possibile comparare i risultati ottenuti con i due diversi modelli; inoltre, il seme è di fondamentale importanza per replicare i risultati ottenuti, in qualsiasi momento successivo alla prima simulazione utilizzando ogni volta la stessa distribuzione random.

Dopo aver elencato i dati, riporterò la funzione utilizzata per trovare le traiettorie dello spot-rate, nella quale è da evidenziare la modifica relativa alla radice quadrata della componente stocastica: in questo caso essa è infatti costituita dall'intervallo temporale “delta t” moltiplicato per il tasso spot stesso:

```
CIR <- matrix(NA, m, n)

for (l in 1:m){
  Xt <- c()
  Xt[1] <- X0
  for (i in 2:n){
    Xt[i] <- Xt[i-1]+a*(g-Xt[i-1])*deltat+rho*rnorm(1)*sqrt(Xt[i-1]*deltat)
  }
  CIR[l,] <- Xt
}
```

Il procedimento consiste nel creare una matrice vuota con il nome CIR, che ha tante righe quante sono le traiettorie che si vuole simulare e tante colonne quanti sono i cammini che lo spot-rate percorrerà, in questo caso rispettivamente 100 e 2500 (10 anni).

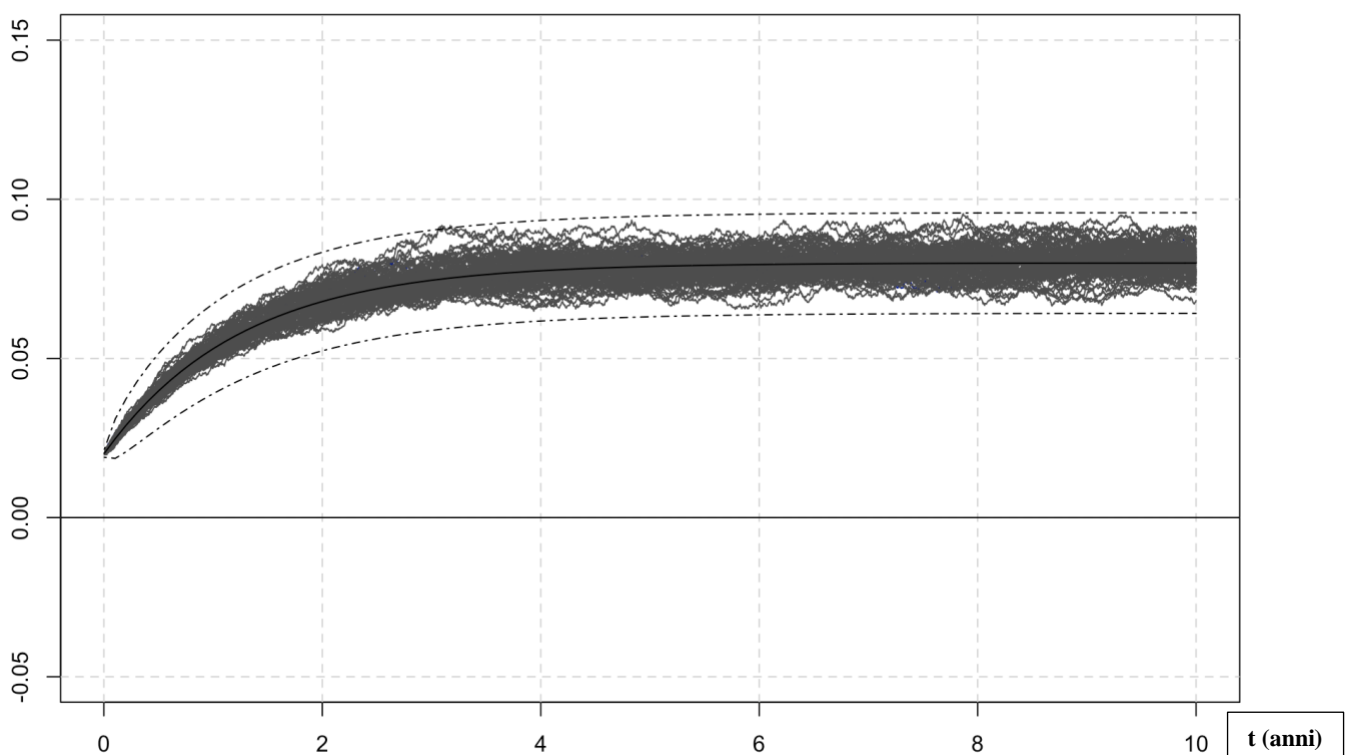
Successivamente, la funzione loop “for” permette di iterare sull'equazione del modello CIR per riempire la matrice con gli m cammini che si è scelto di simulare. Infatti, per ogni m , il vettore X_t viene creato e riempito con i 2500 intervalli tramite un ulteriore loop “for”; una volta finito un cammino, il vettore X_t viene ricreato e riempito nuovamente considerando una nuova distribuzione random.

Step 3

Dopo aver riempito la matrice “CIR” con tutti i cammini dello spot-rate è significativo rappresentare il risultato con un grafico.

In questo case study ho scelto di simulare 100 cammini dello spot-rate per avere una comprensione più ampia della distribuzione probabilistica propria del modello; la previsione è che le diverse traiettorie si raccolgono intorno al valore medio di lungo periodo identificato da gamma, che in questo caso è uguale a 0,08.

La curva nera in figura rappresenta invece il valore atteso del processo.



Come si può notare, le aspettative sono state confermate dal grafico, con i cammini che si concentrano intorno all’asintoto 0,08. La variabilità di questa simulazione è piuttosto contenuta, come si può notare dagli intervalli di confidenza evidenziati dalle due linee tratteggiate che indicano la distanza dal valore atteso pari a una deviazione standard in tutti e due i versi.

Conclusione

In questo elaborato sono stati analizzati e approfonditi il mondo deterministico e il mondo stocastico con particolare riferimento alla teoria dell'immunizzazione e, nel caso stocastico, alle simulazioni di Monte Carlo per i processi di prezzo e tasso di interesse. Questi due mondi non sono stati analizzati indipendentemente l'uno dall'altro, ma si è posto il più possibile l'accento sulla relazione che esiste tra i due e sul trade-off fra complessità del modello e grado di approssimazione della realtà; si è infatti visto come il mondo deterministico, grazie alle sue forti ipotesi sulla struttura dei tassi e sulle condizioni di mercato, permette di arrivare a un livello di immunizzazione più alto che però rappresenta un'approssimazione più semplicistica della realtà. Al contrario, il mondo stocastico prende in considerazione la variabilità della struttura dei tassi di interesse, aggiungendo in questo modo un grado maggiore di complessità al modello, permettendo però di arrivare a conclusioni più complete, in quanto considerano anche il rischio e la variabilità del tasso spot.

Oltre ad aver analizzato le teorie dei rispettivi modelli, ho applicato i teoremi con esercizi sull'immunizzazione classica e stocastica tramite il programma Excel e con l'utilizzo del pacchetto Solver. Inoltre, ho svolto delle simulazioni di Monte Carlo scrivendo delle funzioni con il linguaggio di programmazione R; ho infine riportato i risultati di queste simulazioni tramite la scrittura, sempre su R, di codici che permettono la rappresentazione grafica dei cammini simulati. Ho così evidenziato come sia importante mettere in pratica i teoremi appresi sul mondo deterministico e stocastico; il lavoro svolto su Excel e su R mi ha infatti permesso di avere una comprensione ampia e completa delle nozioni enunciate nel corso di questi capitoli.

Lo spot-rate è la variabile fondamentale in quanto rappresenta il centro degli studi sull'immunizzazione. È essenziale ricordare che tutte le conclusioni riguardo l'andamento futuro del tasso locale sono delle approssimazioni; la bontà di queste approssimazioni dipende dalle ipotesi fatte sullo stesso, tenendo sempre in mente che esiste un trade-off fra complessità del modello e grado di approssimazione della realtà; sarà quindi l'operatore economico che, in sede di analisi e osservazione del mercato, sceglierà quali ipotesi adottare sul tasso spot in base alle sue esigenze e obiettivi.

Bibliografia

- G. Castellani, M. D. (2005). *Manuale di Finanza I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, il Mulino.
- G. Castellani, M. D. (2007). *Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati*, Appendice C, il Mulino.
- G. Castellani, M. D. (2007). *Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati*, il Mulino.
- Hicks, J. (1939). *Value and Capital*, Oxford, Oxford University Press.
- Hida, T. (1980). *Brownian Motion*, Springer.
- J.C. Cox, J. I. (1979). *Duration and the Measurement of the Basis Risk*, Journal of Business, 52, n.1.
- J.C. Cox, J. I. (1985). *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53, 2.
- Keynes, J. M. (1930). *Treatise on Money*, chapter 29.
- L. Fisher, R. W. (1971). *Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bond Holders from Naïve and Optimal Strategies*, in “Journal of Business”, 44, n.5.
- M. De Felice, F. M. (1991). *La Teoria dell'Immunizzazione Finanziaria*, Il Mulino.
- Macaulay, F. (1938). *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U.S. since 1856*, New York, National Bureau of Economic Research.
- Mastering R for Quantitative Finance, Packt Publishing, Chapter 6. (2015).
- N. Savelli, G. C. (s.d.). Risk Management per Solvency II e NL UWR – Parte prima.
- Redington, F. (1952). *Review of the Principles of Life-office Valuations*, (with Discussion) in “Journal of the Institute of Actuaries”, 78, n.350.
- Saunders, A. (2015). *MacGraw Hill, Economia degli Intermedari Finanziari*.
- Thermopedia. (s.d.). *Brownian Motion*.