Introduzione

"*I mercati sono troppo complessi per poterli manipolare in modo proficuo*." Così recitava, "John Stossel", scrittore, studioso, conduttore televisivo della "Fox Business Channel". Assunta tale ipotesi si cercherà di dimostrare l'esatto contrario, sfruttare le irregolarità e il temporaneo disallineamento dei titoli sui mercati per ottenere un profitto, senza incorrere in alcun rischio. La moderna Matematica Finanziaria ha eletto l'assenza di opportunità di arbitraggio a suo assioma. Ogni modello finanziario che si rispetti deve rispettare il principio di non arbitraggio in modo da evitare che esista il c.d. "pasto gratis".

Con arbitraggio si intende una strategia d'investimento che, senza impiegare capitale proprio permette di non perdere nulla, e consente di avere un guadagno certo e immediato.

Il presente elaborato, è sviluppato in modo tale da rispondere al seguente interrogativo: è sempre possibile ottenere un profitto di arbitraggio?

Nel primo capitolo verrà analizzata la parte teorica che riguarda i mercati i finanziari, le ipotesi sotto le quali un mercato dei capitali si può definire perfetto, come un modello teorico come "La random walk theory" può spiegare l'andamento dei prezzi sui mercati e le critiche mosse contro questa teoria. Successivamente nel secondo capitolo si analizzeranno, gli strumenti finanziari che i traders "prediligono" quando cercano di sfruttare delle opportunità di arbitraggio: i derivati nella specie Forward, future e options. Nello stesso capitolo verrà applicata su Excel, una strategia di arbitraggio chiamata long-box-spread che consiste nell'incrocio delle posizioni (corte, lunghe) di una coppia di opzioni con strike price diverso, e si constaterà la difficoltà di individuar opportunità di arbitraggio sulla base del "mispricing" delle opzioni. Il capitolo terzo è dedicato interamente alla parte applicativa, con la quale si simulerà stocasticamente l'andamento dei prezzi futuri di un titolo sottostante, e attraverso questa simulazione si "programmerà" un arbitraggio con future avente lo stesso sottostante della simulazione.

Capitolo 1: Teoria dell'arbitraggio e mercati finanziari

1.1 Mercati finanziari

Per mercati finanziari si intende il luogo "*figurato*[1]", dov'è scambiata la generalità degli strumenti finanziari. "*Oggi i mercati finanziari non sono più luoghi fisici ma piattaforme informatiche dove si incrociano, le proposte di acquisto e di vendita di strumenti finanziari* (CONSOB, s.d.)". I mercati finanziari possono essere divisi secondo determinati criteri:

- In relazione al **momento** di emissione
- In base alla **scadenza** degli strumenti finanziari emessi o negoziati.
- Secondo il "*funzionamento* (Di Giorgio, 2013)" dei mercati
- Sulla base del **taglio** delle transazioni
- Stando la metodologia di **accesso** al mercato
- In base al "*valore*" di negoziazione

Partendo dalla prima distinzione, il luogo dove le prime emissioni da parte degli "*utilizzatori di fondi*" (A.Saunders, 2015) di strumenti finanziari, prende il nome di **mercato primario.** La collocazione di tali strumenti avviene tramite offerta al pubblico o attraverso collocamento privato. Senza entrare nello specifico, differenza tra queste due tipologie di collocamento, sta nella ricerca da parte dell'emittente di un soggetto istituzionale interessato all'acquisto dell'intera emissione (collocamento privato) mentre nell'altra nella possibilità di riferirsi ad un pubblico nella sua interezza, entro certi limiti e regole. Il **mercato secondario** è il "luogo" ove vengono negoziati i titoli di precedenti emissioni. Sui mercati secondari oltre ad azioni e

[1] Termine estrapolato da Sandro Gronchi in "Lezioni di Economia Politica" 2013, L.S.D. p 68

obbligazioni, vengono scambiati anche tassi di cambio, titoli "*ibridi*" (A.Saunders, 2015) strumenti derivati ecc.

Venendo al secondo criterio, nei mercati finanziari si può distinguere il **mercato monetario** dove si realizza l'emissione, negoziazione, dei titoli di debito o degli strumenti finanziari a breve scadenza (di durata pari o inferiore ai 12 mesi). Strumenti negoziati in tale mercato possono essere buoni del tesoro, depositi interbancari, operazioni di pronti contro termine, commercial paper, certificati di deposito negoziabili ecc. **Nel Mercato dei capitali o finanziario,** avviene l'emissione o la negoziazione di titoli di capitali, azioni, titoli di debito, obbligazioni in un orizzonte temporale di medio-lungo termine (pari o maggiore ai 12 mesi).

Riferendoci al funzionamento, si distinguono i **mercati regolamentati** che si caratterizzano per essere retti da un sistema di regole organiche. Tali regole, possono essere dettate dalla legge, dai regolamenti delle autorità competenti, ma anche da società riconosciute e autorizzate ad operare nel settore. Così descritti tali mercati sono *"…identificati dalla presenza di un'organizzazione e di regole di funzionamento istituzionalizzate*" (Di Giorgio, 2013). Esistono poi i mercati **OTC** (Over The Counter), dove gli scambi avvengono attraverso negoziazioni bilaterali e non del tutto standardizzate.

La classificazione **mercati al dettaglio e mercati all'ingrosso** fa riferimento invece al *taglio* delle transazioni che avvengono sul mercato, "*nonché ai tipi di operatori"*. In particolare, nel mercato all'ingrosso operano solo gli investitori ammessi alle negoziazioni. Per esempio, nel mercato all'ingrosso dei titoli di stato, gli operatori ammessi alla negoziazione sono la Banca d'Italia ed il Ministero del Tesoro.

Il **mercato cash** (o spot) è un mercato finanziario in cui vengono negoziati gli "*strumenti finanziari base*" (azioni e obbligazioni), mentre nel **mercato dei derivati** vengono negoziati gli strumenti derivati, cioè quegli strumenti finanziari il cui *valore* deriva da uno strumento finanziario base (futures, opzioni, ecc.)

I **mercati creditizi** sono i mercati in cui gli investitori possono *accedere direttamente al credit*o. In tali mercati operano gli enti creditizi che concordano con ogni cliente le condizioni relative alle operazioni di raccolta (ad es. il tasso di interesse da applicare ad un deposito bancario) e quelle relative alle operazioni di impiego (ad es. la durata di un mutuo). I **mercati mobiliari** invece si contraddistinguono per il fatto che le negoziazioni si svolgono sulla base di "*regole prestabilite*" in modo oggettivo ed impersonale. In tali mercati circolano gli strumenti mobiliari (azioni ed obbligazioni). Le contrattazioni che si svolgono hanno per oggetto ingenti quantità di capitali e danno origine a prezzi ufficiali, resi noti al pubblico mediante appositi listini. Quest'ultima distinzione dei mercati, risulta essere superata "*dalla complementarietà dei vari strumenti finanziari con conseguente creazione di prodotti misti… nonché dalla costituzione soggetti o di gruppi che operano contemporaneamente in segmenti diversi"* (Di Giorgio, 2013)

Il sistema finanziario, inteso come insieme integrato *di strumenti*, *istituzioni e mercati finanziari,* assolve a tre funzioni fondamentali:

- trasferire le risorse finanziarie dai soggetti risparmiatori ai soggetti investitori (funzione creditizia o allocativa);
- garantire l'efficiente funzionamento del sistema dei pagamenti (funzione monetaria in senso stretto);
- trasmettere gli impulsi di politica monetaria al sistema economico (funzione monetaria in senso ampio

Per poter costruire una teoria che possa essere punto di partenza dell'attività operativa, la scienza economica (le scienze in generale) ha bisogno di semplificazioni. Un mercato dei capitali, qualora si verifichino congiuntamente tutte le seguenti condizioni (P.Bortot-U.magnani-G.Olivieri-F.A.Rossi-M.Torrigiani, 1998)*:*

- tutti gli operatori usufruiscono delle **stesse informazioni** (no asimmetria informativa), relative al meccanismo di mercato e alle operazioni trattate. Si vuole escludere la possibilità che esistano determinati soggetti c.d. *insiders,* in surplus di informazioni rispetto al mercato, che interferiscano con il buon funzionamento del mercato, arrivando a livelli di sotto-utilizzazione delle risorse disponibili. Per altro l'insiders trading è reato dal 1998 dopo la ricezione del Testo Unico delle disposizioni in materia di mercati finanziari conosciuto anche come *TUF o legge Draghi*
- ciascun operatore non è in grado di conoscere le conseguenze che provoca al mercato attraverso le proprie operazioni su di esso;

- nel mercato **non si pagano imposte** sul trasferimento dei titoli, commissioni di intermediazione e altri costi di transazione;
- nel mercato **non esistono costi fiscali;**
- le **operazioni sono comunque divisibili** in n operazioni. Vale il principio della "*composizione dei contratti*" ossia "*il debito (o credito) A inizialmente contratto può essere sostituito da n debiti con pagamento a scadenza…*" (Fersini P., 2015);
- importo iniziale pari al valore attuale delle successive rate (è la conseguenza matematica del punto precedente);
- ciascun operatore massimizza la propria **utilità**, si suppone che gli investitori si comportino come soggetti *razionali* ossia che preferiscano sempre un ammontare certo rispetto ad una quantità aleatoria (rispettando la c.d. *proprietà* di avversione al rischio).

In ogni istante esiste un solo prezzo che riflette il funzionamento del mercato. Nello specifico un solo importo che trasferisce una somma P_x con una somma M_y.

Sia così definita la funzione *f*, tale che: noto l'importo P_x e definiti gli istanti temporali x e y (con $x \leq y$), ci permette di determinare in modo "***univoco***[2]" (P.Bortot-U.magnani-G.Olivieri-F.A.Rossi-M.Torrigiani, 1998) l'importo M_y.

In formule:

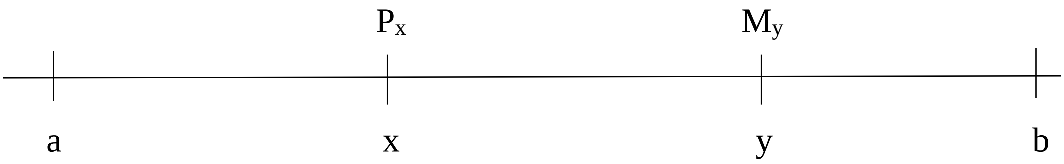
$My = f\ (x, Px, y)$ [3]

Se questa relazione esiste ed è corretta, allora significa che:

$Px = f\ (x, My, y)$ [4]

Ossia noto l'importo M_y, e gli istanti temporali x e y (con $x \leq y$), è possibile conoscere l'importo di origine P_x.

Utilizziamo tali funzioni e disegnare l'orizzonte temporale di riferimento:



[2] P.Bortot-U.magnani-G.Olivieri-F.A.Rossi-M.Torrigiani, "Matematica Finanziaria" p 7

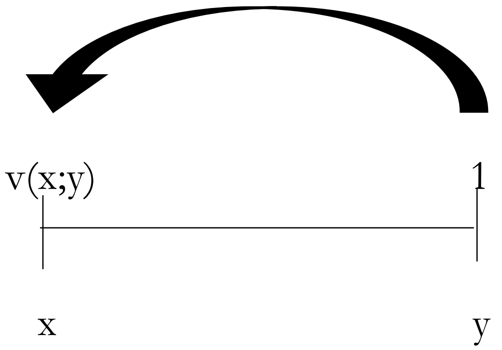
[3] Questa funzione è crescente rispetto all'importo P_x, e alla scadenza y

[4] Di inverso tale funzione è crescente rispetto all'importo M_y, e decrescente rispetto alla scadenza y

le due funzioni possono essere interpretate come il c.d. **prezzo di equilibrio,** per lo scambio di due importi ad epoche diverse.

Indichiamo tali funzioni con r(x,y) e v(x,y) che rappresentano rispettivamente, il montante unitario (il numero di unità di capitale ottenute in y investendo 1€ in x) e il valore attuale unitario (il prezzo corrente in x per ottenere 1€ in y).

Per la tesi è utile approfondire la trattazione del solo valore attuale unitario e dell'interesse unitario dando per acquisite le competenze basilari delle grandezze finanziarie[5], dei fattori di sconto e del montante unitario.



La funzione v(x;y) può essere interpretata come il **numero di unità di capitale** disponibili all'epoca x in cambio di una unità di capitale disponibile all'epoca y, oppure come Il **prezzo** all'epoca x di un importo unitario disponibile all'epoca y o ancora, Il **fattore di attualizzazione** poiché fornisce il valore attuale all'epoca x per ogni unità di capitale M dovuto all'epoca y.

1.2Modello per la distribuzione dei prezzi: la "Random Walk"

Nel 1953, la Royal Statistical Society si riunì a Londra per discutere uno studio alquanto singolare. Il suo Autore, Maurice Kendall, stava ricercando nei prezzi delle azioni e delle materie prime un trend o dei cicli che si ripetessero lungo un arco

[5] Per la trattazione completa si consulti: Bortot P.,Magnami U., Olivieri G., Rossi F.A. e Torrigiani M. Cap 1 *Matematica Finanziaria* (1998) Monduzzi editore

temporale. Con stupore egli non ne trovò ed elaborò una teoria che si basa sull'andamento casuale dei prezzi, o "**random walk**" (Kendall, 1953). Ogni serie dei prezzi sembrava "*un essere errante, quasi come se la sorte, una volta a settimana scrivesse un numero a caso…. e lo sommasse al prezzo corrente, determinando così il prezzo della settimana successiva*[6]". In verità il termine "random walk" o passeggiata aleatoria, è stato introdotto per primo d Karl Pearson nel 1905, il quale studiò il moto di una particella puntiforme vincolata, in uno spazio bidimensionale, a muoversi o verso destra con probabilità p o verso sinistra con probabilità $1-p$, con ogni "passo" indipendente dagli altri.

Formalmente una random walk, è un modello stocastico per descrivere il processo di generazione dei dati(prezzi) di una serie storica dove:

$yt = f(t) + u_t$

$f(t)$ è la parte deterministica della serie mentre ut è la parte stocastica. Per comprendere meglio il concetto di percorso casuale inteso da Kendall, si può svolgere un esempio[7]. Prendiamo spunto dal paradosso di "**San Pietroburgo**" (Bernoulli, 1984),teorizzato dal matematico svizzero Bernoulli. Il paradosso consiste nella costruzione di una lotteria, caratterizzata da un valore atteso infinito, e dunque preferibile al possesso di un qualsiasi importo finito. La lotteria prevede il lancio ripetuto di una moneta perfetta (probabilità $\frac{1}{2}$ di uscita della faccia testa, indicata con T) con pagamento dal banco al giocatore di un importo pari a 2n in caso di uscita della prima T al colpo n-esimo. Quindi, un giocatore riceve 2 euro se esce testa al primo colpo ($n = 1, 2^1 = 2$, con probabilità $\frac{1}{2}$), 4 euro se la prima testa esce al secondo colpo ($n = 2$, $2^2 = 4$, probabilità $\frac{1}{4}$), e così via. Bernuollì elaborò tale paradosso per contestare l'utilizzo indiscriminato del criterio della speranza matematica (valore

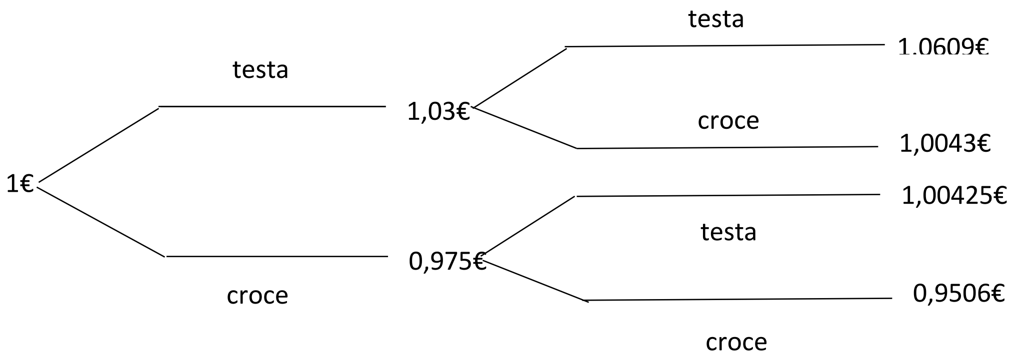
---

[6] Il testo è stato tradotto dal laureando per la versione originale si consulti: Kendall M.G (1953) *The Analysis of Economic Time-Series, Part I Prices*. Journal of royal statistical society n.96 pp11-25.

[7] Fonte: Brealey R.A, Myers S. C., Allen F. e Sandri S. (2015) *Principi di finanza aziendale*, settima edizione p322 e seguenti McGraw-Hill

atteso)[8]. Modificando leggermente la formulazione del paradosso (obiettivo è quello di trovare una relazione tra una vincita e la sua successiva, non una disamina su l'utilizzo di un indice statistico rispetto ad un altro) in modo che si possa ottenere una certa somma di denaro, pari alla differenza tra quota scommessa e importo trattenuto in caso di perdita, anche quando esce croce. In via definitiva: partecipiamo ad una lotteria versando al banco 1€. Alla fine di ogni giorno si lancia una moneta (quindi probabilità $\frac{1}{2}$ che esca testa e $\frac{1}{2}$ che esca croce). Se esce testa si vince il 3% dell'importo versato, altrimenti se esce croce si perde il 2,5% dell'importo scommesso.

Schema n.1-Adattamento lotteria "paradosso di San pietroburgo"



Fonte: Adattamento da "Finanza Aziendale" capitolo: "Mercati efficienti e finanza comportamentale" autore: "*Richard A. Braley*" p.462

Questo processo costituisce un percorso casuale con tendenza positiva pari allo 0,25% al giorno. Tale tendenza positiva è calcolabile come "***ritorno atteso*** [9] **"** (Richard A. Brealey, 2015).Quando Maurice Kendall ipotizzò che i prezzi delle azioni seguissero un percorso casuale, stava affermando che le variazioni dei prezzi sono indipendenti fra loro (autocorrelazione pari a 0), così come le vincite o le perdite del gioco. La

[8] Per la trattazione completa si consulti: Bernoulli D. *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, Journal of econometric society. Vol 22 n.1 pp23-26

[9] Tale tendenza positiva è pari a: $E(X) = \sum_i x * p = \frac{1}{2} * (3) + \frac{1}{2} * (-2{,}5) = 0{,}25$

random walk theory rappresenta la critica più importante all'analisi fondamentale e all'analisi tecnica, disconosce ogni forma di trend, cicli e stagionalità, e consegna nelle mani del "caso" l'andamento delle variazioni dei prezzi. Non sarebbe mai possibile battere sistematicamente il mercato e unica strategia operabile sarebbe quella del "Buy and Maintain". A sua volta molte critiche sono state mosse nei confronti della "random walk theory" in quanto negare l'esistenza di linee di tendenza e di modelli grafici che si ripetono nel tempo significa negare la realtà. Volendo svolgere un esempio reale:
si prendano in esame due andamenti di titoli azionari, assumendo che la variabile temporale sia mensile (dal 10/04/2018 al 10/05/2018)[10] delle azioni di Facebook Inc. Common Stock scambiate nel NASDAQ e le azioni di Snap[11] Inc. negoziate nel NYSE. Obiettivo è quello di andare a calcolare l'autocorrelazione[12] fra i rendimenti[13] delle azioni al tempo t rispetto al rendimento del periodo $t+1$ (autocorrelazione con *drift* in base $t+1$). Se la "Random Walk Theory" è vera allora l'autocorrelazione dovrebbe essere pari a 0.

Tabella n. **1-** Autocorrelazione dei prezzi di due titoli nel periodo 11/04/208-22/04/2018

T	Prezzo[14] Facebook	Prezzo SnapInc	Rendimento Facebook	Rendimento Snap Inc.
0	166,32	14,8	-0,78%	-2,21%
1	163,87	14,92	1,47%	-0,81%
2	164,52	14,88	-0,40%	0,27%
3	164,83	14,58	-0,19%	2,02%
4	168,66	14,88	-2,32%	-2,06%
5	166,36	14,65	1,36%	1,55%
6	168,1	14,84	-1,05%	-1,30%

[10] Se si considerano i giorni festivi e non lavorativi le rilevazioni in totale sono 22

[11] È la società americana che si occupa di tecnologia e social media company che possiede quattro prodotti: Snapchat, Spectacles, Bitmoji e Zenly

[12] Autocorrelazione è stata calcolata utilizzando la funzione Excel CORRELAZIONE($E$2:$E$22;E3:23). La formula matematica per la funzione di autocorrelazione dei residui è: $r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(a_t - \hat{a}) * (a_{t-k} - \hat{a})}{\sum_{t=1}^{n}(a_t - \hat{a})}$

[13] Il Rendimento esprime il rapporto tra due prezzi successivi in forma percentuale, in questo esempio per evitare di avere la prima cella vuota, si è tenuto conto anche del prezzo del giorno 10/04/2018.

[14] Tutti i prezzi sono espressi in dollari $

7	166,28	15,2	1,08%	-2,43%
8	165,84	15,54	0,26%	-2,24%
9	159,69	15,63	3,71%	-0,58%
10	159,69	14,54	0,00%	6,97%
11	174,16	14,7	-9,06%	-1,10%
12	173,59	14,23	0,33%	3,20%
13	172	14,33	0,92%	-0,70%
14	173,86	14,13	-1,08%	1,40%
15	176,07	11,03	-1,27%	21,94%
16	174,02	10,97	1,16%	0,54%
17	176,61	10,79	-1,49%	1,64%
18	177,97	10,74	-0,77%	0,46%
19	178,92	10,97	-0,53%	-2,14%
20	182,66	11,01	-2,09%	-0,36%
21	185,53	11,01	-1,57%	0,00%

Nel caso di studio sia per Facebook Inc. che per Snap Inc. esiste una forma debole di autocorrelazione ma è comunque un dato in contrasto con la random walk theory, di fatti se non vi fosse stata nessuna correlazione tra il rendimento di due giorni successivi dello stesso titolo l'autocorrelazione sarebbe stata pari a 0. Nel caso di Snap Inc. esiste una forma molto debole di correlazione tra i prezzi dei titoli stessi. Essendo l'autocorrelazione (per entrambi i titoli) un valore negativo, comporta che una crescita ieri dei prezzi dei titoli di Facebook dell'1% in più della media, causa uno 0,095740799 in meno rispetto alla media stessa, vale lo stesso a valori diversi per Snap Inc. Detta in altri termini dato che l'autocorrelazione è negativa vi è una trascurabile probabilità che ad un rialzo dei prezzi segua una discesa. Dato che stiamo parlando di valori nell'ordine dei millesimi[15] non si può comunque concludere che possa esistere, nel periodo considerato, un modello idoneo a prevedere l'andamento dei prezzi dei titoli presi in considerazione.

1.3 Mercati Efficienti

[15] Per quanto riguarda Snap.Inc

Visto il paragrafo precedente dovrebbe essere chiaro perché nei mercati competitivi i prezzi delle azioni debbano, necessariamente seguire un andamento casuale. Se le variazioni di prezzo misurabili istante per istante, ogni ora, giornalmente, settimanalmente ecc, potessero essere manipolate per prevedere le variazioni del prezzo futuro, gli investitori non avrebbero alcuna difficoltà a realizzare facili guadagni. Ma ciò non potrebbe durare a lungo. Nel momento in cui gli investitori stanno cercando di trarre il famoso "pasto gratis", i prezzi tenderanno ad aggiustarsi immediatamente annullando così qualsiasi opportunità di profitto. Un economista di origini italiane Eugene F. Fama, nel 1970 scrisse la sua tesi di dottorato con cui per primo coniò la terminologia di "mercati efficienti". Nel suo lavoro Fama sosteneva che stante l'utilizzo di ingenti risorse da parte delle società di brokeraggio al fine di condurre studi sui trend nell'industria, sugli effetti delle variazioni dei tassi, sui bilanci delle aziende e sulle aspettative di managers e/o politici, gli analisti delle stesse società avrebbero dovuto essere in grado di battere sistematicamente un generico portafoglio titoli con le stesse caratteristiche di rischio. Poiché, secondo Fama, in ogni situazione l'analista professionista ha solo una percentuale di probabilità di battere il mercato, ciò non è sufficiente al fine della teorizzazione di un metodo matematico per battere sistematicamente il mercato. L'analista di fatto coadiuva il mercato a restare efficiente. La teoria di Fama può essere riassunta come segue: i prezzi riflettono sempre il valore fondamentale dei titoli, dato dall'attualizzazione della somma dei cash-flow futuri attesi. La variazione dei prezzi si ha quindi solo nel momento in cui nuove informazioni diventano disponibili. Fama definisce tale situazione dicendo che nell'economia non esiste il cosiddetto "pasto gratis": gli operatori economici non hanno alcuna opportunità di ottenere profitti anormali e superiori al profitto che corrisponde al rischio cui essi fanno fronte per l'investimento stesso. Esistono tre distinte ipotesi di efficienza dei mercati[16]:

- *Efficienza in forma debole*: non è possibile realizzare profitti sistematici attraverso l'analisi dei rendimenti passati e i prezzi seguiranno un percorso casuale;

[16] Si consulti Brealey R.A, Myers S. C., Allen F. e Sandri S. (2015) *Principi di finanza aziendale*, settima edizione p322 e seguenti McGraw-Hill p 326

- *Efficienza in forma semi-forte*: i prezzi di mercato riflettono non solo l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi, ma anche qualunque altra informazione pubblica. Quindi i prezzi si aggiusteranno immediatamente al giungere di nuove informazioni quali ad esempio, l'annuncio di utili, emissioni azionarie, fusioni ecc.
- *Efficienza in forma forte*: i prezzi di mercato riflettono, oltre a quanto visto prima, qualunque informazione privata, dei così detti insider, individuanti in quei soggetti che possiedono maggiori informazioni rispetto agli altri soggetti operanti nel mercato.

  A seguito della pubblicazione di: di "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work" da parte di Fama (1970) non tardarono ad arrivare le prime critiche ed evidenze empiriche che si rivelarono incoerenti con tali studi, di seguito si riportano alcune evidenze empiriche se sembrano essere in contrasto con la teoria di Fama:

1. Rozeff e Kinney [17] documentano rendimenti anormali del mercato in alcuni periodi dell'anno. In particolare, prendendo in considerazione le azioni del NYSE ed un periodo di tempo sufficientemente lungo, notano che il rendimento medio nel mese di gennaio è 3.48%, mentre negli altri mesi il rendimento medio è 0.42%. Il fenomeno venne poi riscontrato anche in mercati azionari di diversi paesi, al punto che si parlò di "**effetto gennaio**" (Bacon, 2014). Analogamente Bhabra, Dillon e Ramirez riscontrarono ciò nel mercato azionario statunitense, ma anche per il mese di novembre da cui: "**effetto novembre**[18]"
2. Lakonishok e Smidt (1988) osservano una redditività maggiore dei titoli azionari nell'ultimo giorno del mese e nei primi tre del seguente mese. Si è parlato di "effetto cambio del mese"
3. Curiosa è anche la scoperta di Jacobs e Levi (1988): l'"effetto vacanza" fece sì che il 35% della crescita dei corsi delle azioni tra gli anni 1963-1982 ebbe luogo negli otto giorni prefestivi di ciascun anno.

---

[17] Rozeff M. S. e Kinney W. (1976) *Capital market seasonality: The case of stock returns* Journal of Financial Economics, , vol. 3, pp 379-402.

[18] Si veda: Bhabra H, Dillon U., Ramirez G. *A November effect? Revisiting the tax-loss-selling hypothesis* , Financial Management , vol.28, pp 5-15

4. Harris e Gurel (1986) parlano di un “effetto S&P500”, <<*I risultati sono in linea con le ipotesi di “price-pressure”. Non appena avviene l’annuncio dell’inclusione di un titolo nell’indice SP500, i prezzi di quel titolo subiscono un incremento del 3%. L’incremento si consuma quasi sempre in 2 settimane*>>[19]

Se si considera il mercato italiano, diverse ricerche empiriche sono state condotte sul mercato azionario per verificarne l’efficienza. Per quanto concerne la forma di efficienza *debole* uno studio condotto da Capparelli[20] su 30 titoli nel periodo 1978-1983 con cui si è rilevata “*una significativa autocorrelazione nei rendimenti giornalieri, la quale andava, poi progressivamente scemando nei rendimenti settimanali e mensili*” (Richard A. Brealey, 2015). Non è un segreto che la presenza di autocorrelazione nei rendimenti è in contrasto con l’ipotesi di efficienza del mercato, in quanto, se i rendimenti del periodo precedente sono correlati a quelli del periodo successivo, allora la conoscenza dei rendimenti passati possono essere una base per la previsione dei rendimenti futuri. Test sono stati eseguiti anche per verificare la forma di efficienza semi-forte del mercato per mano di Murgia[21]. L’analisi è stata condotta su 312 casi nel periodo 1981-1988 per studiare la reazione del mercato all’annuncio di aumento o diminuzione dei dividendi. Da tale studio è emersa una conferma nell’ipotesi di efficienza semi-forte, il mercato mediamente, reagiva favorevolmente all’annuncio di aumento dei dividendi e sfavorevolmente alla diminuzione degli stessi. Per concludere citiamo un ultimo studio condotto per testare la veridicità della forma di efficienza forte del mercato italiano, da parte di Bajo e Petracci, [22] i quali documentarono extra-rendimenti nei tre mesi successivi a variazioni significative

[19] La traduzione è del laureando, per il testo originale si consulti: Gurel E. e Harris L. (1986), *Price and Volume Effects Associated with Changes in the S&P 500 List: New Evidence for the Existence of Price Pressures*. The journal of the american finance association volume 41, n.4 pp 815-829

[20] Capparelli F. (1986) *Una verifica empirica nell’ipotesi di efficienza debole del mercato di Borsa* sez. Il risparmio n.34 pp 235-268

[21] Murgia M.(1990), *L’annuncio dei dividendi nel mercato azionario italiano*, in Centro di ricerche finanziarie, Gruppo IMI,

[22] Bajo E., Petracci B. (2006), *Do what Insidiers do: abnormal perfomances after the release of insiders*. R*elevant Transaction* , Studies in Economic and Finance, vol 23, n.2 pp 94-118

(superiori al 2%) di partecipazioni azionarie da parte di azionisti di maggioranza o di riferimento. Si riscontrano rendimenti anormali positivi per incrementi delle quote di partecipazione e negativi per variazioni opposte.

1.4 Definizione Arbitraggio

"Genericamente un arbitraggio è un'opportunità di compiere operazioni finanziarie a costo zero che producono un profitto privo di rischio." (Pascucci, 2008). L'arbitraggio consiste nell'acquisto o nella vendita di un determinato strumento finanziario e la contemporanea, operazione di segno opposto in un mercato differente. L'arbitraggio si differenzia dalla **speculazione** per il fatto che, se il primo è un modo per sfruttare la temporanea differenza di prezzo in *mercati diversi*, la seconda remunera sulle differenze di prezzo di uno stesso strumento in *tempi diversi*. La speculazione lucra sul **fattore "tempo"** (acquisto successivo alla vendita e viceversa) mentre l'arbitraggio si basa sul **fattore "spazio"** (posizione lunga e corta su due mercati diversi). Una ulteriore definizione di arbitraggio viene fornita da Philip H. Dybvig e Stephen A. Ross:

"Un'opportunità di arbitraggio è una strategia di investimento che garantisce un flusso finanziario positivo in qualche circostanza, senza generare flussi finanziari negativi, né richiedere investimenti netti. In altri termini, un'opportunità di arbitraggio rappresenta un sistema che produce denaro indefinitamente, una cosiddetta money pump" (Dybvig, 1996).

Una semplice opportunità di arbitraggio è rappresentata dalla possibilità di prendere in prestito, in un determinato regime finanziario nell'ipotesi di mercato dei capitali perfetto, una certa somma di denaro q ad un determinato tasso di interesse i_0 e rivendere la stessa quantità di denaro q ad un nuovo tasso di interesse i_1 con $i_1 > i_0$. Ogniqualvolta è possibile compiere un'operazione del genere è possibile effettuare un arbitraggio secondo la definizione data ad inizio paragrafo. Nella realtà bisognerebbe tenere conto di altre componenti:

- Doppi costi di transazione (transazione dal soggetto A al soggetto B per l'acquisto e costo di transazione per la rivendita dal soggetto B a C)

- Oneri Fiscali
- Possibilità che mentre si è in procinto di uno dei due momenti (acquisto, rivendita) il prezzo torni all'equilibrio generando una perdita certa per l'arbitraggista.

In un mercato efficiente, se i prezzi si allontanano dai fondamentali, l'arbitraggista ve li riconduce. Egli vende i titoli sopravvalutati, facendo scendere i prezzi e acquista i titoli sottovalutati facendo salire i prezzi. In altri termini l'arbitraggista registra un profitto comprando quando i prezzi sono bassi e vendendo quando sono alti e aspetta la convergenza della domanda con l'offerta. Per questa ragione spesso quando si parla di arbitraggio si fa riferimento al *convergence traiding*.

Nella realtà dei mercati finanziari, esistono complicazioni ulteriori poiché i traders, devono pagare i c.d. *"bid-ask spread"*, che avranno una trattazione a parte nel paragrafo [2.6] e le commissioni. Inoltre, bisogna sempre tenere conto del rischio implicito dell'arbitraggio, il c.d. "*legging-in risk*" che costa nel rischio di non riuscire a chiudere le posizioni in precedenza aperte prima del riequilibrio dei prezzi.

Volendo fare un esempio, **Richard Braley** autore del 13-esimo capitolo "*Decisioni di finanziamento ed efficienza del mercato*" nel libro "*Principi di finanza aziendale*" (2015) illustra come si può svolgere un operazione di convergence trading attraverso una vendita allo scoperto, che sfocia in una perdita per il traders dovuta ad una forma di legging-in-risk: "….P*er esempio avete identificato un titolo sopravvalutato che non presente nel vostro attuale portafoglio. Volete procedere ad un sell high (nel gergo dell'analisi tecnica, vendere sulla forza di un titolo e nei pressi di un'importante resistenza), ma come vendere un'azione che non possedete? Potete farlo attraverso una vendita allo scoperto. Per effettuare una vendita allo scoperto, dovete prendere a prestito le azioni dal portafogli di un investitore, venderle e attendere speranzosi che il prezzo di mercato scenda; a quel punto potete restituire le azioni pagando un prezzo inferiore a quello a cui le avete vendute*." Ma non sempre va tutto come previsto; nel 2008 numerosi hedge found, nel tentativo di compiere un convergence traiding, decisero di vendere allo scoperto azioni VW (Volkswagen) prevedendo di riacquistarle ad un prezzo più basso (il mercato dell'auto era in un periodo "nero"). Ma durante tali operazioni la casa automobilistica Porche, a sorpresa rivelò di aver acquisito il 74%

delle azioni (VW), la rimanente quota minoritaria era di proprietà dello stato di Bassa Sassonia. I venditori allo scoperto si ritrovarono con un numero di azioni insufficienti per le operazioni di riacquisto. Un'azione Volkswagen in data 26/10/2008 costava 209 €, due giorni dopo il 28/10/2018 toccò quota 1005 € ad azione[23]. Il caso appena descritto mostra il più importante **limite** all'arbitraggio ossia il *rischio* che i **prezzi divergano** ancora prima che cominci la loro convergenza.

1.4.1Elementi teorici sulle strategie di arbitraggio

Una strategia è una sequenza predicibile di v.a $\phi(n)_n$ a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$ dove $\phi_n = (\phi_n^1, \phi_n^2 \dots, \phi_n^d)$. Le quantità di ϕ_n^irappresentano il numero di quote dell'i-esimo titolo nel portafoglio. Si può scrivere che il valore del portafoglio al tempo *n* è pari a:

$$\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 + \cdots + \phi_n^d S_n^d$$

Dove S_n rappresenta le componenti del vettore aleatorio dei prezzi al tempo *n*, una successione di valori si dice predicibile se ϕ_n è $\mathcal{F}_0$ misurabile ∨ per ogni $n - 1, \phi_n$ è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile. Detta in altri termini dire che ϕ_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile significa tenere conto del fatto che l'investitore deve stabilire le quantità $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots \phi_n^d$ prima di conoscere i valori dei prezzi al tempo *n*.

Data una strategia ϕ, il valore del portafoglio al tempo *n* è:

$$V_n(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i$$

Invece una strategia ϕ è detta autofinanziante se per ogni $n = 0,1 \dots, N - 1$ si ottiene:

$$(\phi_n, S_n) = (\phi_{n+1}, S_n)$$

Oppure più semplicemente una strategia si definisce autofinanziante se la quantità (ϕ_n, S_n) è uguale al capitale investito al tempo *n*.

Si possono distinguere due tipologie di strategie di arbitraggio:

- Arbitraggio Puro

---

[23] Fonte dati: Marsh S. (2008) *"Short sellers make VW the world's priciest firm"* Reuters. https://www.reuters.com/article/us-volkswagen/short-sellers-make-vw-the-worlds-priciest-firm-idUSTRE49R3I920081028

- Arbitraggio Statistico

. Si può dire che un arbitraggio puro è una strategia che non richiede un capitale iniziale, non espone ad alcun rischio perché il suo valore finale è maggiore o uguale a 0. Affinché l'operazione possa realizzarsi è necessario che gli strumenti finanziari oggetto di arbitraggio siano *perfettamente sostituibili* [24]. Questi devono essere strumenti identici ma negoziati su mercati diversi oppure strumenti diversi ma aventi lo stesso **expected finanlcial return**. Un mercato è libero da arbitraggi se l'insieme delle strategie autofinanzianti e predicibili non consentono arbitraggi. Realizzare modelli di mercato che si basano su questo principio è notoriamente complicato. Il modello dovrebbe rispecchiare i mercati reali(efficienti) tale che non sia possibile costruire strategie di arbitraggio in grado di produrre dei ritorni economici. Tuttavia, alcuni risultati empirici sull'andamento dei prezzi di alcuni beni, mostrano temporanee inefficienze di mercato. Si genera così l'opportunità di intraprendere la seconda tipologia di strategia di arbitraggio conosciuta come **arbitraggio statistico**. Un arbitraggio statistico è anch'esso una strategia autofinanziante e predicibile. Sfrutta algoritmi basati su modelli sofisticati e dinamici spaziando dalla fisica alla statistica fino alla matematica, molti modelli sono stati presi in considerazione negli anni e molti sono stati scartati. Al contrario dell'arbitraggio puro, *l'arbitraggio statistico* può apprezzare dei valori negativi in alcuni istanti temporali. Questo significa che in un arco temporale limitato la strategia perde tutte le proprietà dell'arbitraggio (autofinanziante, assenza di rischio) ma nel lungo periodo lo riporta "all'equilibrio". In generale, si creano opportunità di arbitraggio statistico quando si riescono ad individuare delle componenti sistematiche nelle dinamiche dei prezzi di alcuni asset che si muovono con una certa regolarità. Non a caso si parla di **opportunità** di arbitraggio, in quanto l'agente economico che riesce prima ad individuarle e successivamente a sfruttarle può godere di un'operazione che presenta un rischio inferiore alla remunerazione di titoli c.d *risk free* e di norma egli è restio dal rivelare suddette operazioni. Per questo non è semplice anche solamente "studiare" delle operazioni di arbitraggio già sfruttate.

[24] Vedi Borsa Italiana: https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/arbitraggio.htm

Sul Sole 24 Ore è possibile reperire un articolo, con cui si illustra come una SICAV come la "*Pharus*", ha operato sul mercato nella convinzione di ottenere profitti senza incorrere in nessun rischio. Una delle operazioni di arbitraggio che stavano cercando di portare avanti, consiste nell'apertura di una posizione al rialzo sui future sul corrispettivo Btp. **Un'operazione che conta di lucrare sull'amento del differenziale di spread tra i due bond btp/bund**. Nello specifico la Pharus aprì a giugno del 2010, una doppia posizione: una a rialzo sul future dei BTP con scadenza a 10 anni l'altra a ribasso sul corrispettivo future dei Bund tedeschi. Il rischio di cambio è di fatto neutralizzato in quanto anche se la BCE dovesse aumentare o diminuire il tasso di interesse, si erano opportunamente aperto due posizioni opposte. Permane il rischio di mercato ed è quello su cui la Pharus puntò per ottenere un profitto, infatti tale operazione si basa sulla convinzione che il rendimento dei BTP decennali dovesse crescere nel breve-medio periodo e si sarebbe creato una dilatazione tra i due rendimenti dei titoli di stato. Strategia che si rivelò corretta poiché lo spread nel 2011 con il governo Monti, toccò quota 528 punti base.

1.4.2 Principio di non arbitraggio

Secondo il principio di non arbitraggio, se due titoli in una data futura T hanno lo stesso valore, allora questi devono avere lo stesso valore anche in ogni istante precedente a T.

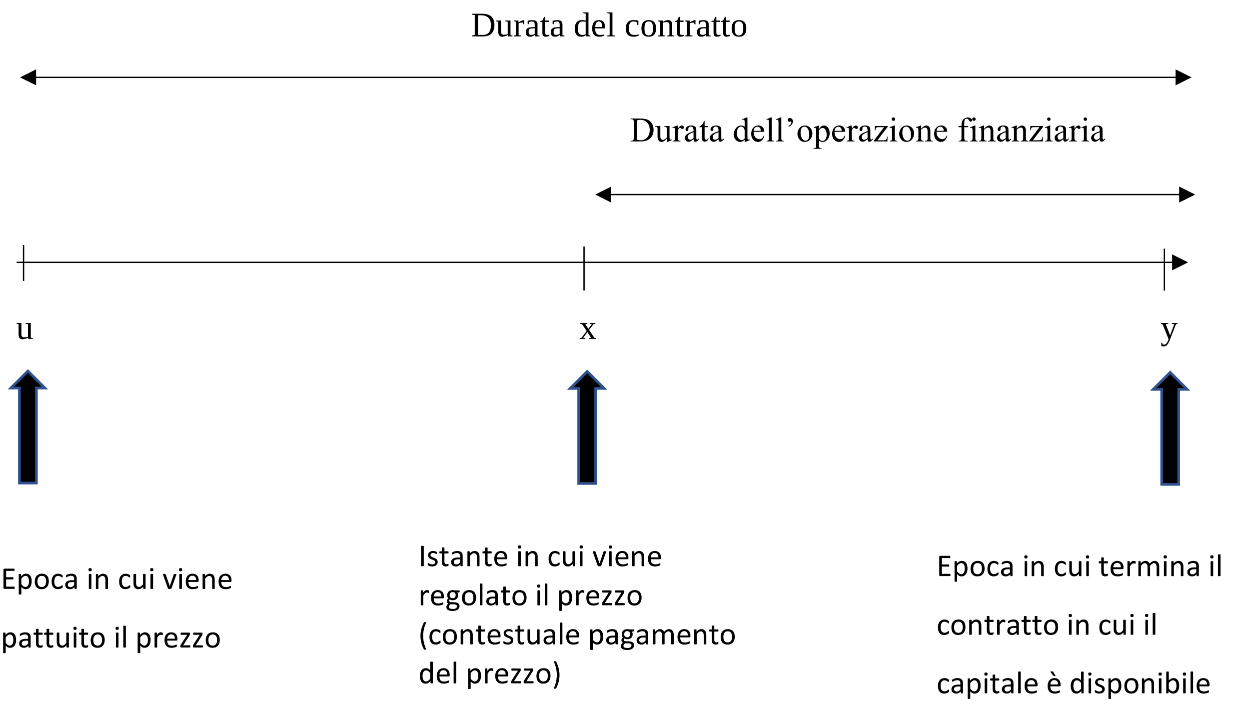
In matematica non si può rappresentare il principio di non arbitraggio, ma si assume che il mercato sia "geneticamente" efficiente, eliminando la possibilità di fare soldi gratis.

Se v_{t_1} e v_{t_2} rappresentano il prezzo al tempo t di due titoli rischiosi, secondo il principio di non arbitraggio, se $v_{T_1} = v_{T_2}$ allora anche $v_{t_1} = v_{t_2}, \forall\, t \leq T$.

Un altro modo per dimostrare il principio di non arbitraggio è quello di considerare le probabilità neutrali verso il rischio. Tali probabilità indicano l'aggiustamento delle probabilità soggettive verso un determinato evento o stato, ed essendo neutrali verso il rischio esse sono pari a 1.

Al paragrafo 1.2, abbiamo ipotizzato che tutto debba avvenire in due istanti temporali o in x (epoca di valutazione e contestuale contrattazione) e in y (epoca in cui il capitale è esigibile). Inseriamo ora un'altra epoca finanziaria a cui corrisponde l'istante in cui viene pattuito il prezzo, e verrà indicato con u.

Schema n.**2**- Operazione finanziaria vs durata contrattuale

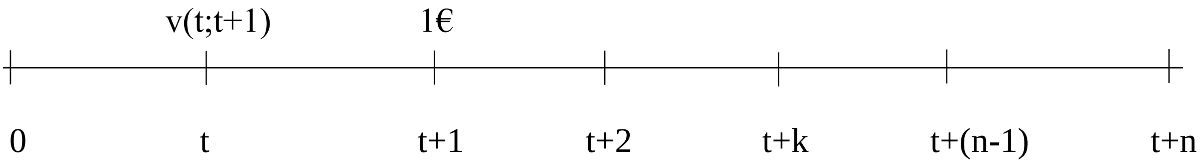


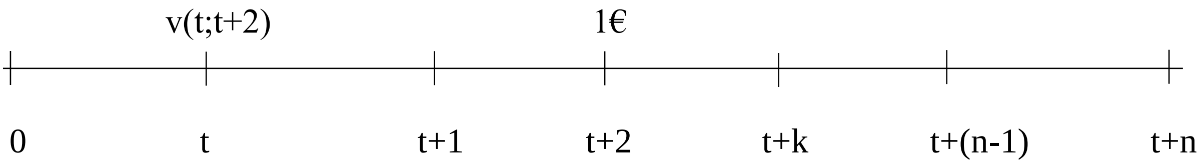
Nei contratti a pronti, il prezzo viene corrisposto nel momento in cui esso è pattuito di conseguenza $u = x$

Da ciò discende che se si acquista in un qualsiasi mercato, una qualsiasi quantità q, ad un determinato prezzo p, con la contestuale "*consegna immediata*" del bene o dell'attività finanziaria, tale prezzo prende il nome di prezzo a pronti o prezzo **spot**. Per "*consegna immediata*" si considerano i tempi tecnici per il processo di liquidazione e regolamento.

Supponiamo che il tempo sia rappresentato da una variabile discreta *t*, con *n* il numero di epoche unitarie. Illustrando su uno scadenziario i prezzi unitari con le corrispettive epoche, si avrà la seguente situazione:

Schema n.**3**- Scadenziario operazione a pronti

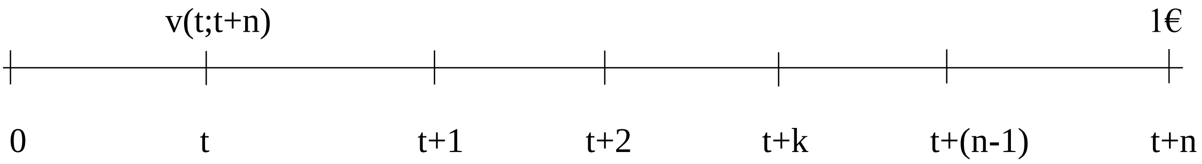




.

.

.



All'epoca t si osservano nel mercato i prezzi di n contratti a pronti:

$v(t, t+1); v(t, t+2); v(t, t+k)$ …… $v(t, t+n)$

Pertanto, $v(t, t+k)$ è il prezzo pattuito e corrisposto all'epoca t che garantisce la disponibilità di un importo unitario in $t + k$ con$(k = 1,2, \ldots\ldots n)$.

Supponendo che degli operatori effettuino più operazioni di capitalizzazione, e nello specifico possano scegliere tra una sola operazione di durata t e più operazioni ma sempre di durata complessiva t.

Se l'istante *u* di pattuizione del prezzo e l'istante *x* (epoca di regolazione del prezzo) **divergono**, si può definire la funzione $v(u; x; y)$ come il prezzo fissato nell'istante *u* da pagare in *x* che dà diritto a ricevere 1€ in *y*.

In via definitiva il prezzo a pronti nel paragrafo precedente diviene un caso particolare di questo in quanto *u* e *x* coincidono.

Ovviamente $u \leq x \leq y$ [25], se $u = x$ si ottiene il caso particolare $v(u, x, y) = v(x, y)$ prezzo a pronti o **spot.**

Pertanto, si ha: $0 < v(u, x, y) \leq 1 \quad \forall\, u \leq x \leq y$.

Se $x = y$ la **durata** dell'operazione finanziaria è nulla e $v(u, y, y) = 1$. Il prezzo di un importo unitario esigibile in y **aumenta** con l'avvicinarsi alla scadenza dell'istante in cui il prezzo viene regolato. Volendo formalizzare: $v(u, x1, y) \leq v(u, x2, y)$ se $u \leq x_1 \leq x_2 \leq y$. Al contrario, tra due importi unitari disponibili in epoche future diverse, ha *prezzo maggiore* quello dei due che è disponibile **prima** (detto in un modo spartano ma di grande efficacia: "*i soldi prima valgono di più dei soldi dopo*")

$v(u, x, y_1) \geq v(u, x, y_2)$ se $u \leq x \leq y_1 \leq y_2$.

A questo punto non resta che scrivere lo schema della struttura a termine il quale è sicuramente più articolato di quella a pronti. Per dedurlo occorrono delle sostituzioni: indicando il generico prezzo a termine $v(u, x, y)$, con $u = t$, $x = t + 1$, lasciando che la y assuma tutte le $n - 1$ epoche rimanenti. Si ripete il passaggio fissando $x = t + 2$, in corrispondenza del quale la y assumerà il valore di ciascuna delle $n - 2$ epoche rimanenti. Si procede meccanicamente fino a quando non si otterrà $x = t + n - 1$ valore per cui la y non potrà che essere pari a $t + n$.

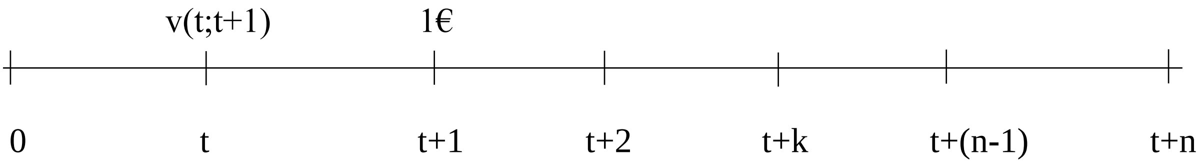
Tabella n.**2-** Schema della struttura a termine

U	X	Y
$u = t$	$x = t + 1$	$y = t + 2, y = t + 3,$ …. ………….. $y = t + n$
	$x = t + 2$	$y = t + 3, y = t + 4,$ …. , $y = t + n$
	$x = t + n - 2$	$y = [t + (n - 1)], y = t + n$
	$x = t + n - 1$	$y = t + n$

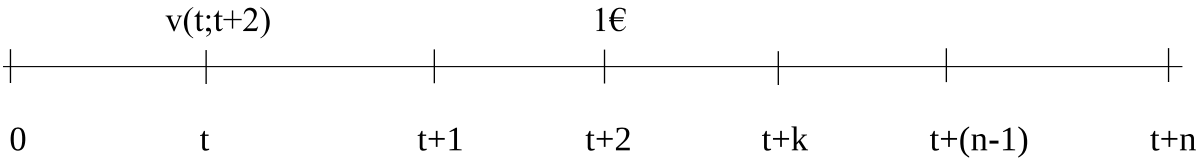
Riassumendo, all'epoca iniziale in cui $u = t$, $x = t + 1$, e la y è soddisfatta per tutte

[25] Si inserisce il ≤ in quanto come sappiamo u e x possono coincidere ma anche x e y. Per convincersene si pensi all'acquisto di un titolo (senza alcun vincolo) in data t e la contestuale rivendita alla medesima data t

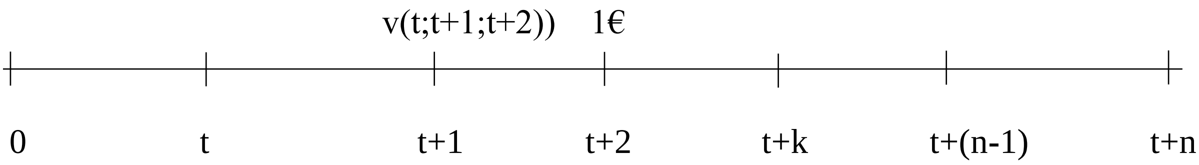
quelle equazioni che vanno da $y = t + 2$ fino a $y = t + n$, saranno "disponibili" $\boldsymbol{n - 1}$ **prezzi**. Ancora, andando all'epoca successiva saranno "possibili" $\boldsymbol{n - 2}$ **prezzi**, fino ad arrivare all'ultima epoca in cui è disponibile solo **1 prezzo**.
Sia dato un prezzo a pronti, concordato e pagato al tempo t che dà diritto a ricevere 1€ all'epoca t+1.
Schema n.**4-** linea temporale operazione a termine



E sia dato un prezzo concordato e pagato all'epoca t tale che dà diritto a ricevere 1€ all'epoca t+2.



Ora invece si consideri un prezzo concordato all'epoca t che sia pagato all'epoca t+1 che dà diritto a ricevere 1€ all'epoca t+2.



Questa è una tipica operazione a termine, in quanto la pattuizione del prezzo avviene all'istante t, la regolamentazione del prezzo è fissato all'istante $t + 1$ e l'istante di riscossione dell'importo unitario è determinato nell'istante $t + 2$. Dati i prezzi delle operazioni a pronti e il prezzo dell'operazione a termine: è lecito chiedersi come si possano confrontare i prezzi di queste due tipologie di operazioni.
Se l'identità $v(t; t + 2) = v(t; t + 1) * v(t; t + 1; t + 2)$, significa che il mercato è in equilibrio, a parità dei tassi di interesse e nelle condizioni di mercato dei capitali

perfetto [1.1], è indifferente (in termine di prezzi e payout) acquistare un unico titolo di durata $t + n$ ad effettuare un'operazione che combini n titoli di durata complessiva $t + n$. Questa uguaglianza prende il nome di "*principio di non di arbitraggio*".

Se $v(t; t + 2) > v(t; t + 1) * v(t; t + 1; t + 2)$ è sicuramente possibile fare un arbitraggio acquistando a pronti (il prezzo minore) e vendendo a pronti (prezzo maggiore).

Se $v(t; t + 2) < v(t; t + 1) * v(t; t + 1; t + 2)$ è sempre possibile un arbitraggio eseguendo le operazioni inverse a quelle prima dette.

Matematicamente non si può esporre il principio di non arbitraggio. In ogni modello di mercato efficiente si desume che debba valere, eliminando il c.d." pasto gratis". Come si è potuto notare nel paragrafo [1.3], i mercati non sono sempre efficienti come si crede. Evidenze empiriche mostrano la presenza di inefficienze, che creano opportunità di arbitraggio.

Di seguito si riporta un modello che mostra come si potrebbe svolgere un'operazione di arbitraggio:

Tabella n.**3**- Schema di arbitraggio con $v(t; t + 2) > v(t; t + 1) * v(t; t + 1; t + 2)$

	t	$t + 1$	$t + 2$
Compro a pronti	$-v(t; t + 1) * v(t; t + 1; t + 2)$	$+v(t; t + 1; t + 2)$	
Compro a termine		$-v(t; t + 1; t + 2)$	$+1$
Vendo a pronti	$+v(t; t + 2)$		-1
Tot	> 0	0	0

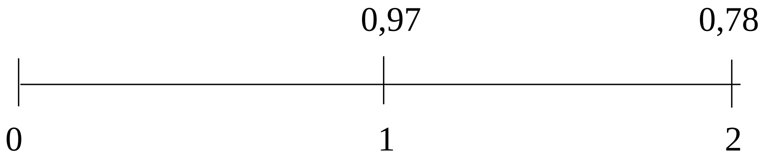
Ora è chiaro perché un'operazione di arbitraggio può essere definita come una strategia finanziaria che permette di ottenere una ricchezza finale positiva, partendo da un nulla e, soprattutto, senza assumere rischi, infatti come si può vedere dalla tabella n.[3], in t si assume posizione corta e lunga senza nessun esborso sfruttando il temporaneo disallineamento dei prezzi. Secondo caso:

Tabella n.**4**- Schema di arbitraggio con $v(t;t+2) < v(t;t+1) * v(t;t+1;t+2)$

	t	$t+1$	$t+2$
Compro a pronti	$-v(t;t+2)$		$+1$
Compro a termine	$+v(t;t+1) * v(t;t+1;t+2)$	$-v(t;t+1;t+2)$	
Vendo a pronti		$+v(t;t+1;t+2)$	-1
Tot	> 0	0	0

Volendo fare un esempio: esistono 3 epoche diverse $t =$ 0,1,2 e sono disponibili i seguenti prezzi a pronti:

1. $v(0{,}1) = 0{,}97$
2. $v(0{,}2) = 0{,}78$



Affinché non esistano opportunità di arbitraggio, il prezzo di equilibrio del relativo prezzo a termine è dato dal rapporto dei due prezzi a pronti:

$$v(0{,}1{,}2) = \frac{v(0{,}2)}{v(0{,}1)} \sim 0{,}804124$$

Supponendo che in un determinato istante il prezzo corrente di v(0,1,2) non sia pari al sul prezzo di equilibrio ma sia invece ad esempio pari a :

$v(0{,}1{,}2) = 0{,}856$

c'è opportunità di arbitraggio?

$v(0{,}1{,}2) * v(0{,}1) \sim 0{,}83032$

E quindi:

$v(0{,}1{,}2) * v(0{,}1) > v(0{,}2)$

Tabella n.**5**-Esempio opportunità di arbitraggio per $v(0,1,2) * v(0,1) > v(0,2)$

	0	1	2
Compro a pronti	-0,78		+1
Vendo a pronti	+0,83032	-0,856	
Vendo a termine		+0,856	-1
Tot	+0,05032	0	0

Si è ottenuto un profitto all'epoca 0, senza investire alcun capitale, e senza assumersi alcun rischio.

Invece se il prezzo a termine:

$v(0,1,2) = 0{,}79$

Allora è vero che:

$v(0,1,2) * v(0,1) = 0{,}7663$

$v(0,1,2) * v(0,2) < v(0,2)$

Tabella n.**6**-Esempio operazione di arbitraggio con $v(0,1,2) * v(0,2) < v(0,2)$

	0	1	2
Vendo a pronti	+,79		-1
Compro a pronti	-0,7663	+0,79	
Vendo a termine		-0,79	+1
Tot	+0,0237	0	0

CAPITOLO 2

Gli strumenti finanziari per arbitraggio

2.1 Definizione derivati

"*I prodotti derivati si chiamano in questo modo perché il loro valore* ***deriva*** *dall'andamento del valore di una attività ovvero dal verificarsi nel futuro di un evento osservabile oggettivamente. L'attività, ovvero l'evento, che possono essere di qualsiasi natura o genere, costituiscono il "****sottostante****" del prodotto derivato* (CONSOB, s.d.)". I *derivati* sono contratti tra due agenti economici che specificano le condizioni, in particolare le date e i valori delle variabili fondamentali, in base alle quali si determinano i pagamenti o i payoffs che verranno effettuate dalle controparti. I derivati vengono anche chiamati: "diritti contingenti[26]" dato che i payoffs dipendono dal verificarsi di un determinato evento relativo alle variabili sottostanti. Volendo fare una distinzione tra i derivati: "*I derivati si possono distinguere categorie: quelli che possono essere replicati da strategie statiche*[27] *e quelli che richiedono strategie dinamiche. I primi sono rappresentati dai forwards i secondi dalle opzioni*" (Rubinstein, 2005). Caratteristica di molti derivati è che di norma l'attività di riferimento non viene scambiata ma viene negoziata solo la variazione di valore dell'attività avvenuta nel corso del tempo. Se tale variazione è positiva è la prima parte che paga la seconda, nel caso opposto è la seconda parte che remunera la prima. Derivati con caratteristiche così semplici vengono chiamati forwards o futures, nel capitolo precedente quando si è parlato dell'operazioni di pronti contro termine, il contratto a termine non è nient'altro che un forwards, in quanto gli effetti per le parti si hanno alla scadenza stessa. I derivati oltre che dipendere da eventi (stati di natura),

---

[26] Mark Rubistein "Futures, opzioni e strategie dinamiche" Published by: "Risk Books, a division ok Risk Pubblications" 2005 p 38

[27] La strategie operabili non prevedono pesi di ribilanciamento e ricalibrazione come Buy and Hold

spesso dipendono dai prezzi dei titoli o altre attività, che prendono il nome di **attività sottostanti.**

La maggior parte delle opportunità di arbitraggio si svolgono tramite gli **strumenti derivati**, per i quali le esistono delle formule matematiche che sottolineano relazioni di prezzo relativamente rigide tra titolo sottostante e titolo derivato, rendendo di fatto le due attività perfettamente (o quasi) sostituibili tra di loro. Nella pratica si sfrutta un momentaneo disallineamento tra l'andamento del prezzo del derivato e quello del sottostante, vendendo lo strumento sopravvalutato e acquistando quello sottovalutato e ottenendo, così, un profitto privo di rischio. Bisogna da subito segnalare che avere come sottostante un titolo azionario o obbligazionario espone il derivato a dei rischi, che potrebbe compromettere l'operazione di arbitraggio. Con o titoli di equity è più difficile individuare opportunità di arbitraggio in quanto manca il carattere di perfetta sostituibilità tra tali strumenti finanziari. Anche supponendo di voler eseguire un arbitraggio all'interno dello stesso settore azionario, non si può di certo affermare con certezza che un'azione di "Air France" possa essere sostituibile ad un'azione di "Fly Amirates". Ciò non esclude l'esistenza di altre strategie di arbitraggio, eseguite in particolar modo da gestori di hedge funds, che mirano ad acquistare e vendere titoli sulla base della loro sotto/sopravvalutazione relativa. Non si tratta però di arbitraggi in senso stretto, ma di **arbitraggi rischiosi**[28].

2.2 Arbitraggio con i contratti forwards

I contratti **forwards** sono dei contratti a termine fermi[29], accordi in cui il compratore (*buyer*) si impegna ad acquistare dal venditore (seller) un'attività sottostante (*underlying asset*) ad un determinato prezzo, chiamato **prezzo di consegna**, ad una certa data. Le condizioni del contratto, vengono stipulate in modo che al tempo k, con $k < t$, non si generi nessun costo per chi le stipula. L'utilità dei contratti forward sta

[28] Si consulti il sito web "Assogestioni" http://www.assogestioni.it/index.cfm/1,433,0,49,html/l-arbitraggio

[29] Vedi Borsa Italiana: https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/contratto-a-termine-fermo.html

nel fatto che bloccano il prezzo del prodotto sottostante fino alla data di consegna, rendendo quindi immune il compratore da eventuali variazioni. Quando si acquista un forward non viene pagata nessuna somma di denaro; l'effettiva compravendita viene prorogata sino alla data posta in calce al contratto, è solamente in quel momento che avviene la consegna materiale (o meno) dell'attività sottostante al prezzo che si era pattuito. Il prezzo prefissato si chiama **delivery asset,** viene fissato in modo che il *valore corrente* del contratto sia nullo[30]. La notazione per le variabili nei contatti **forward** è la seguente:

- f_t è il valore del contratto forward al tempo t. Al momento iniziale il valore del contratto forward è pari a 0 ($f_0 = 0$). Di conseguenza al tempo T, $f_T = S_t - F_0$ (long forward) e $f_t = F_0 - S_t$ (short forward)
- S_t è il prezzo spot dell'attività sottostante al tempo T. Questa quantità rappresenta il guadagno (o la perdita se negativa) per chi assume rispettivamente una posizione lunga o corta sul contratto.
- F_0 è invece il prezzo di consegna, ossia la quantità di denaro stabilito oggi (t = 0) ma pagato alla scadenza *T.*
- Si definisce inoltre *prezzo forward*, F_t, il prezzo di consegna che si determinerebbe se il contratto fosse stipulato al tempo *t.*
- Sia S_0 il prezzo spot del bene al tempo della stipula del contratto, t = 0, T la data di consegna del bene e r il tasso di interesse certo su un deposito bancario per il periodo di vita del contratto [0; T].

In assenza di opportunità di arbitraggio si avrà necessariamente che:

$F_0 = S_0(1+i)^{(T-t)}$.

Ciò che interessa ai fini della trattazione della tesi è l'esatto contrario ossia cosa accade quando per assurdo $\boldsymbol{F_0 \neq S_0(1+i)^{(T-t)}}$. Ci sono due alternative:

- $F_0 > S_0(1+i)^{(T-t)}$
- $F_0 < S_0(1+i)^{(T-t)}$

[30] Si veda Carmona R. e Tehranchi M. (2006) *Interes Rate Models: an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective"* Springer Finance p 10

Se $F_0 > S_0(1+i)^{(T-t)}$ si potrebbe costruire un'opportunità d'arbitraggio per il venditore del bene. Infatti, al tempo $t = 0$ al venditore conviene prendere a prestito dalla banca S_0 ad un determinato tasso *r* per comprare il bene e tenerlo fino al tempo $t = T$. Scaduto il termine, il venditore consegna il bene all'acquirente ricavando F_0. Di questo, l'importo $S_0(1+i)^{(T-t)}$ è pari alla somma che deve alla banca per il prestito ottenuto, e la restante somma pari a $\boldsymbol{F_0 - S_0(1+i)^{(T-t)} > 0}$ rappresenta un profitto di arbitraggio per il venditore. È utile notare che mentre in tutti gli altri esempi di arbitraggio fatti fino ad ora il profitto si otteneva al tempo 0, qui si deve necessariamente aspettare la vita residua del contratto.

Si supponga, a titolo di esempio che il *prezzo spot* dell'oro sia pari a **€390**, il *prezzo forward* ad 1 anno dell'oro sia **€425**, che il *tasso di interesse* sia il **5%** annuo. In linea con le ipotesi del mercato dei capitali perfetto, oltre alla inesistenza dei costi di transazione ecc.. non sono rilevati neanche i costi di custodia e di trasporto per l'oro.

Allora risulta che $F_0 > S_0(1+i)^{(T-t)}$ in quanto

$F_0 > 409{,}5$.

È possibile eseguire un'opportunità di arbitraggio come segue:

Tabella n.**7**-Esempio arbitraggio forward su commodities nel caso $F_0 > S_0(1+i)^{(T-t)}$

	0	1
Prendere a prestito	+390	-409,5
Posizione lunga oro	-390	+oro
Posizione corta oro	0	+425-oro
Tot	0	+15,5

Dato che il prezzo forward è minore del prezzo spot dell'oro conviene prendere a prestito una certa somma di denaro pari al prezzo spot dell'oro e aprire una posizione lunga su l'oro in modo tale che tra 1 anno si avrà a disposizione una determinata quantità q, e qualità, di oro sufficiente a pareggiare tra 1 anno la stessa quantità e qualità. A fine periodo si pagherà $S(1+i)^{(T-t)}$, all'intermediario che ha prestato i capitali e si vende il titolo alla somma F_0 ottenendo un profitto (non certo[31]) pari a **€15,5**.

Nel secondo caso, è l'acquirente che sfrutta l'opportunità di arbitraggio. Al tempo $t = 0$ si avrà una vendita allo scoperto (ovviamente l'acquirente non possiede il titolo in esame indi per cui è costretto a muoversi effettuando una short selling) per il bene, guadagnando S_0 e, che contestualmente deposita in banca sino al tempo $t = T$ al tasso d'interesse r. In T l'acquirente, che ha in banca $S_0(1+i)^{(T-t)}$ onora l'impegno preso pagando F_0 e al venditore per il bene, chiudendo la vendita allo scoperto realizzando un guadagno certo pari a

$\boldsymbol{F_0 - S_0(1+i)^{(T-t)} > 0}$ con $F_0 > 0$. In questa strategia c'è un "passaggio" in più rispetto a prima; l'acquirente, svolgendo una vendita allo scoperto deve necessariamente riconsegnare il bene e contemporaneamente consegnare il titolo a chi sarà il nuovo acquirente del bene. Quindi in realtà esiste una doppia transazione che andrebbe valutata prima di effettuare la vendita alo scoperto. Si supponga che il *prezzo spot* dell'oro sia di **€390**, il *prezzo forward* a 1 anno è pari a **€390** il *tasso di interesse* per il periodo in considerazione è pari al $\mathbf{5\%}$. Sulla base di questi dati risulta che $F_0 < S_0(1+i)^{(T-t)}$ in quanto: $F_0 < 409{,}5$.

Tabella n.**8**-Esempio arbitraggio Forward su commodities nel caso $F_0 < S_0(1+i)^{(T-t)}$

	0	1
Deposito in contanti	-390	+409,5
Posizione corta oro	+390	-oro
lunga forward	0	-390+oro
Tot	0	+19,5

[31] Essendo il profitto "programmato" tra 1 anno e non nell'immediatezza, non si può definirlo un guadagno certo

Formalizzando: se al tempo t, sul mercato si riscontra che $F_0 < S_0(1+i)^{(T-t)}$ allora non conviene acquistare direttamente il forward ma l'agente economico può: assumere una posizione corta sul titolo spot e ricevere la somma S_0, contestualmente aprire una posizione lunga sul forward che paga F_0 in T (che vale S_0 in t con $t < T$), infine si deposita la somma ricavata. In T la somma ricavata dalla vendita allo scoperto frutterà interessi pari a $S_0(1+i)^{T-t}$ dal deposito e una parte di questi contanti verrà utilizzata per comprare il titolo alla somma F_0, e infine si chiude la posizione corta sul titolo ottenendo un profitto in T pari a $S_0(1+i)^{T-t} - F_0 > 0$.Utilizzando gli stessi dati dell'esempio precedente è possibile seguire un'altra strategia di arbitraggio che consente di ottenere un profitto certo al tempo t invece che al momento T. Nello specifico:

Tabella n.**9**-Eempio opportunità di arbitraggio con forward su merci ottenendo un profitto in t

	0	1
Deposito in contanti	-371,43	+390
Posizione corta oro	+390	-oro
lunga forward	0	390+oro
Tot	+18,57	0

Questo dimostra che è comunque possibile ottenere un profitto certo al tempo 0, utilizzando una strategia di arbitraggio autofinanziante, depositando una certa quantità q[32] di denaro al momento 0 in modo da ottenere esattamente S_0 tra 1 anno.

[32] Attualizzando F_0

2.3 Opportunità di arbitraggio nel mercato future dei BTP

Il **future** è un contratto a termine standardizzato con cui acquirente e venditore si impegnano a scambiarsi una determinata quantità di una certa attività, finanziaria o reale, a un prezzo prefissato con liquidazione differita a una data futura prestabilita. Nei contratti a termine originali vi è il contatto diretto tra acquirente A e venditore B, nei futures il contatto è *istituzionalizzato* ciò significa che la negoziazione avviene in mercati regolamentati e centralizzati. Chi acquista un future apre una *long position*, ovvero si impegna ad acquistare alla scadenza l'attività sottostante al prezzo prefissato. Chi vende un future si dice che apre una *short position*, ovvero si impegna a vendere a una data futura prestabilita, l'attività sottostante. L'acquirente del future realizzerà un *profitto* se la quotazione dello strumento subisce un andamento positivo o in altri termini al **rialzo**, mentre il venditore realizzerà un guadagno se l'andamento dell'attività subirà un **ribasso**. I futures per la loro configurazione teorica possono portare a delle perdite (profitti) anche superiori a quanto effettivamente investito; ciò espone lo strumento finanziario ad un alto rischio di insolvenza. Per mitigare questo effetto si è istituita la clearing house che obbliga i contraenti a liquidare quotidianamente le posizioni aperte in future con il meccanismo del making to the market[33].

Il sistema dei margini di garanzia, oltre a garantire la copertura di eventuali situazioni di insolvenza, consente a chi opera sui futures di sfruttare il così detto **effetto leva**, ossia di beneficiare di rendimenti (perdite) amplificati se si considera quanto effettivamente investito. Ciò ha la diretta conseguenza di poter controllare, a fronte del pagamento di un margine iniziale, lo strumento derivato che ha valore molto più alto e lo rende adatto a operazioni di speculazione altamente rischiose sotto il profilo finanziario, di fatti le posizioni vengono aperte e chiuse in un ristretto arco di tempo (spesso anche nella stessa ora). Di converso solo un numero esiguo di contratti future giunge a scadenza.

---

[33] Il lavoro della clearing house è stato indirettamente spiegato nel paragrafo [1.4.2] quando si è riportato un esempio di arbitraggio con future effettuato dalla SICAV Pharus.

Un interessante studio condotto da Andrea Giacomelli, Domenico Sartore e Michele Trova[34] ha portato alla luce delle opportunità di arbitraggio nel mercato Btp futures. In questo studio, gli autori indicando con:

- T =tempo di scadenza del contratto future con contestuale consegna del sottostante
- t = l'istante attuale
- S_t = prezzo spot al quale l'attività sottostante è quotata sul mercato al tempo t
- K_t =indica il prezzo di consegna concordato in t per la scadenza T
- f_t = il valore teorico del contratto future al tempo t
- FV_t =il valore dell'equilibrio per il prezzo di consegna del bene sottostante (fair value) al tempo t
- r_t = tasso di interesse privo di rischio su base annua

Ipotizzano che al tempo t si possano effettuare le seguenti operazioni:

1. acquistare al prezzo S_t il bene sottostante;
2. impiegare un investimento privo di rischio la liquidità pari a $K_t/(1 + r_t)^{(T-t)/365}$ e contemporaneamente acquistare un future con stessa scadenza T e prezzo di consegna K_t.

Alla *scadenza* T il valore dei due portafogli dovrà essere **identico**, se così non fosse si violerebbe la *condizione* di non arbitraggio. Tale situazione non deve valere solo in T ma anche in tutti gli istanti intermedi di T. Per ogni istante t dovrà essere:

$$S_t = \frac{K_t}{(1 + r_t)^{(T-t)/365}} + f_t$$

Tale equazione sembra suggerire il fatto che il *mercato* istante per istante **aggiusti** il valore di K_t in modo che alla scadenza del contratto f_t sia **nullo**, ciò introduce il concetto di *fair value:*

$$FV_t = S_t(1 + r_t)^{(T-t)/365}$$

Per cui:

[34] Giacomelli A., Sartore D. e Trova M. *Opportunità di arbitraggio nel mercato del BTP futures: una verifica empirica*, n.d.

$$\boldsymbol{FV_t = K_t}$$

Nel caso in cui tale uguaglianza non è verificata (sempre sotto le ipotesi di mercato dei capitali perfetto) è possibile che vi siano delle opportunità di arbitraggio. Nello specifico si delineano due stati:

- $FV_t = S_t(1 + r_t)^{\frac{T-t}{365}} < K_t$

Il valore del fair value è inferiore al prezzo di consegna concordato ciò indirizza ad una strategia di arbitraggio chiamata "**cash and carry**" che consta di una posizione corta in future e della corrispettiva posizione lunga in cash, con impiego di capitali complessivi dato dalla somma del prezzo della posizione cash e dal cost of carry della posizione in future inferiore al prezzo del future. Nel caso preso in esame si acquista a pronti il bene sottostante (ricorrendo al debito), al prezzo S_t e si vende sempre a pronti il future al prezzo di consegna K_t. In *T* il **profitto** sarà pari a:

$$K_t - S_t(1 + r_t)^{(T-t)/365}$$

- $FV_t = S_t(1 + r_t)^{\frac{T-t}{365}} > K_t$

In questo caso si apre la possibilità di un arbitraggio del tipo "**reverse cash and carry**" vendendo a pronti allo scoperto il bene sottostante al prezzo S_t ed acquistando a pronti il future al prezzo di consegna K_t. In T il **profitto** dell'operazione di arbitraggio è:

$$S_t(1 + r_t)^{\frac{T-t}{365}} - K_t$$

Al fine della verifica empirica delle conclusioni appena esposte, gli autori[35] di questo studio hanno ricorso alla classe dei modelli VAR-Bayesiani. Utilizzando come dati rilevazioni giornaliere dei prezzi di chiusura di:

- BTP future LIFFE (/12/1997 e il 1/03/1998)
- BTP 8,75% scadenza 1/07/2006
- BTP 7,75% scadenza 1/11/2006
- BTP 6,75% scadenza 1/02/2007
- BTP 6,75% scadenza 1/07/2007

[35] Andrea Giacomelli, Domenico Sartore, Michele Trova

Dato che l'analisi inizia in un periodo ante l'euro si è utilizzato anche un fixing dei tassi sulla lira interbancari ad un mese (data di ipotetica durata dell'investimento in future) rilevati sulla piazza di Londra (LIBOR) e su quella di Roma (RIBOR). Si delinea il seguente modello VAR:

$$y_t = A_t * m_t + \sum_{s=1}^{p} B_{s,t} * Y_{t-s} + \mathcal{E}_t$$

Dove y_t indica il vettore delle rilevazioni dei prezzi future al tempo t, tutti gli altri prezzi spot dei BTP prima enunciati e anche il fixing dei tassi sulla lira interbancaria $LIBOR_t$ e $RIBOR_t$. Mentre m_t rappresenta un vettore composto da 5 variabili ad impulso ognuna di essa associata ad un giorno lavorativo diverso, e una sesta variabile ad impulso deputata ad assumere valore pari a 1 quando la rilevazione ricade in un giorno antecedente ad una festività infrasettimanale e 0 quando si verifica il contrario. La previsione di queste variabili ad impulso o dummy, consta nella convinzione che esistano delle variazioni minime di prezzo dello strumento finanziario a seconda del giorno in cui viene effettuata la rilevazione. Difatti gli autori rilevano che esiste una forte **stagionalità settimanale** per quanto riguarda la serie dei *future* sui BTP. È stato anche riscontrato che gli *operatori finanziari* (come spesso accade), tendono a chiudere le proprie *posizioni* prima di un giorno festivo infrasettimanale.

L'analisi delle previsioni da loro ottenute evidenzia che su 4 dei 15 casi analizzati la possibilità di un arbitraggio **cash and carry** con titolo sottostante BTP 8,75 01/07/2006. L'ampiezza della "finestra" di arbitraggio rimane comunque molto esigua (nell'ordine di un millesimo di punto percentuale) ne consegue che eventuali spazi di arbitraggio, al netto dei costi di intermediazione, potrebbero essere non convenienti per singoli investitori privati.

2.4 Opzioni: definizione e tipologie.

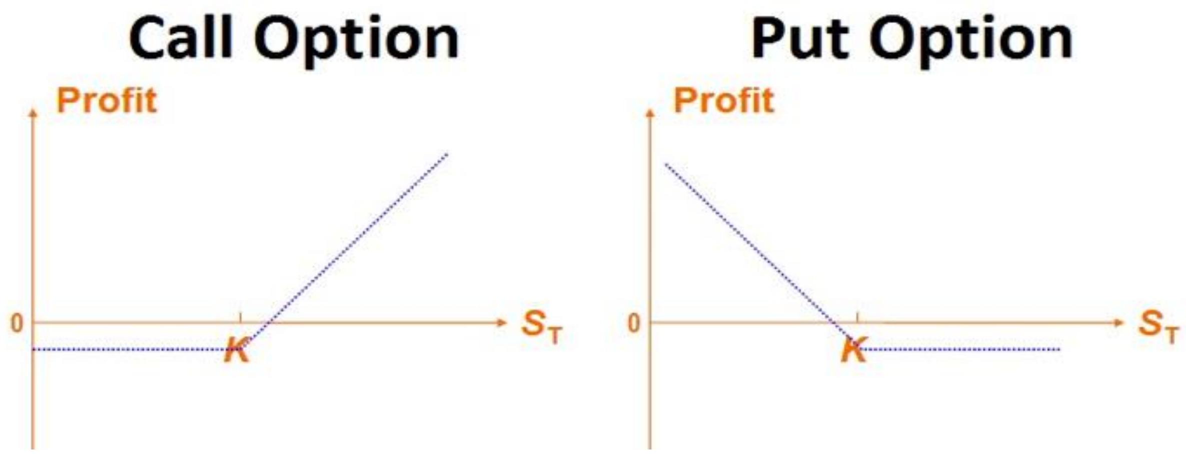
“Un'opzione consiste in un tipo di contratto che conferisce al possessore il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare o vendere un determinato titolo ad una determinata scadenza[36]”.

Le opzioni ordinarie sono dei contratti per comprare o vendere l’attività sottostante ad un prezzo predeterminato e ad una certa data (o entro una certa data) nei quali una delle controparti ha la facoltà di rescindere l’accordo. Le opzioni ordinarie, come i forwards, hanno ad oggetto una futura compravendita il cui prezzo viene fissato al tempo k. Nel caso delle opzioni tale prezzo viene definito “*prezzo di esercizio*”, mentre il tempo mancante alla scadenza è chiamata *“vita residua”*. Le opzioni sono differenti dai contratti a termine perché, ad esempio nelle opzioni call una delle parti, il compratore, può annullare il contratto e di norma tale facoltà ha un valore, mentre colui che vende l’opzione è tenuto ad onorare il suo impegno. Il compratore paga il c.d. prezzo dell’opzione o **premio** al venditore nel momento in cui l’opzione viene negoziata, anche se la compravendita del bene sottostante avverrà eventualmente nel futuro. Le opzioni si possono distinguere in:

- **Opzione call** Se il diritto di annullare il contratto spetta alla parte che deve ricevere l’attività sottostante**;**
- **Opzione put** se invece il diritto spetta alla parte che deve consegnare il sottostante**.**

Figura n.**1-** Loss/Profit diagram opzione put e call

[36] “Dispense di Matematica Finanziaria”, a.a. 2014-2015 Prof. Aggr. Arsen Palestini *introduzione alle opzioni finanziarie*
https://web.uniroma1.it/economialt/sites/default/files/MATEMATICA%20FINANZIARIA%208.%20CENNI%20DI%20TEORIA%20DELLE%20OPZIONI.pdf



Fonte: "Forex Strategico" (2013), "Dino Zannoni",https://www.forexstrategico.com/it/opzioni-put-call-strike-08-03/

Come si evince dal grafico il vantaggio di chi compra un'opzione call è che il suo rischio è circoscritto al capitale versato per entrare in una call. Se il prezzo si dovesse abbassare, il possessore della call non eserciterà l'opzione e perderà solo il premio. In caso contrario, se il prezzo precedentemente individuato nel contratto, dell'azione o della merce, dovesse aumentare i benefici saranno tanto maggiori quanto maggiore è il differenziale di prezzo. Chi ha comprato la call, acquisterà al prezzo prefissato e rivenderà nello stesso momento, ottenendo un profitto dalla differenza. Il venditore di call avrà un beneficio limitato che corrisponde al premio, e uno svantaggio potenzialmente illimitato. Tuttavia, il venditore potrà da subito usufruire della somma pagata dall'acquirente e cercare di sfruttare tale capitale al massimo per ridurre una perdita potenziale. Alla luce di tale motivazione non c'è da meravigliarsi se di norma i compratori di opzioni sono privati mentre i venditori sono solitamente banche. Una call con prezzo di esercizio più basso del prezzo dell'attività sottostante è detta **in the money,** perché se il prezzo dell'attività sottostante resta immutato allora l'opzione verrà esercitata[37]. Dal grafico della *put* vale il ragionamento inverso; quando il prezzo di esercizio è più alto del valore dell'attività sottostante allora la put è *in the money*. Una call che con prezzo di esercizio maggiore del prezzo dell'attività sottostante viene detta **out of the money** (per la put il prezzo di esercizio sarà ovviamente minore). Se

[37] Mark Rubinstein(2005). *Derivati: Futures, Opzioni e strategie dinamiche* pubblicato da "Risk Books, a division of Risk Pubblications." p33

prezzo di esercizio e prezzo dell’attività sottostante si eguagliano allora l’opzione viene detta **at the money.** Opzioni call e put si dividono in opzioni call e put **americane** e opzioni call e put **europee**. Andando per ordine nelle opzioni *call americane* il loro possessore ha il diritto di decidere se esercitare o meno la facoltà in un qualsiasi periodo intermedio $t < T$ durante la vita del contratto. A parità di valori fondamentali, le opzioni americane hanno sempre un valore superiore rispetto alle opzioni europee poiché la facoltà posseduta dall'acquirente dell'opzione è più estesa in termini temporali.

Anche se è vero che non è quasi mai conveniente esercitare un'opzione americana di tipo call prima della scadenza perchè esaurendo la durata del contratto, il suo possessore gode di due benefici: *“posticipa il giorno in cui dovrà versare il prezzo di esercizio e in più conserva l'elemento assicurativo caratteristico di ogni opzione”* (BorsaItaliana, 2009). Per quanto concerne *l'opzione americana put*, vale il contrario: qualora il valore intrinseco dell'opzione sia elevato, non conviene posticipare l'incasso.

Le *opzioni europee* si caratterizzano per il fatto che il loro possessore ha il diritto di decidere se esercitare o meno la facoltà soltanto in corrispondenza della scadenza del contratto (per questo motivo hanno valore inferiore rispetto alle put/call americane).

2.4.1 Valore di un’opzione europea

Il **Valore finale** di un’opzione europea è funzione del solo prezzo finale dell’attività sottostante e dal prezzo di acquisto dell’opzione al tempo $t = 0$. Indicando con:

- S Prezzo spot corrente dell’attività sottostante;
- d Payout return del sottostante;
- σ Volatility[38] del sottostante;
- K Lo strike price;
- t Time to expiration;

[38] Per volatility qui si intende la misura dell’incertezza del ritorno atteso su base annua dell’attività sottostante. Più alta è la volatility maggiore è la probabilità che alla scadenza della call il prezzo dell’attività sottostante sia diverso dal prezzo corrente (apprezzato al tempo t=0)

- r Tasso privo di rischio;

Il **valore finale** di una **call europea** è semplice da individuare in quanto è in funzione del solo prezzo finale dell'attività sottostante (S^*) e dal prezzo di acquisto dell'opzione al tempo $t = 0$. Quindi:

$$C^* = \max[0, S^* - k]$$

Osservando la formula, si può affermare che:

- Se $S^* < K$, la call scade priva di valore, dato che si può acquistare sul mercato *spot* l'attività sottostante al prezzo S^*, risparmiando una differenza pari a: $K - S^* > 0$.
- Se $S^* > K$, chi possiede una call si trova in una situazione di **vantaggio** in quanto potrà riscattare la call pagando K e ottenendo l'attività sottostante del valore S^* ricevendo un profitto rivendendo l'attività sul mercato.

Allo stesso modo si può definire il valore finale di un'opzione put semplicemente come:

$$P^* = \max[0, K - S^*]$$

Qui è il caso opposto di quello espresso prima

- Se $S^* < K$ il possessore della put si trova nella posizione di poter vendere l'opzione ad un prezzo vantaggioso, comprando sul mercato al prezzo finale dell'attività sottostante S^* e rivendendolo immediatamente al prezzo K alla controparte che, subirà una perdita pari a $K - S^* > 0$.
- Se $S^* > K$ allora la put non sarà riscattata in quanto è priva di valore (positivo) per chi ha il diritto di attivarla. Il compratore potrà acquistare sul mercato spot l'attività sottostante a quel determinato prezzo.

2.4.2 Strategie di arbitraggio sulla violazione della put-call parity Put-call parity

Utilizzando uno schema di arbitraggio, è possibile dimostrare che i valori attuali dei payoff delle put e delle call devono necessariamente essere uguali in quanto devono rispettare l'equazione della put-call parity.

La put–call parity è una relazione che lega i valori delle due tipologie di opzioni, permettendo di ricavare dall'una il valore dell'altra. Questa relazione vale per le opzioni di tipo europeo e non per quelle di tipo americano, che possono essere esercitate prima della scadenza.

La relazione put-call parity si esprime tramite la seguente equazione:

$$C = P + Sd^{-t} - Kr^{-t}$$

Tabella n.**10**- Schema Pull-call parity

	Data odierna	$S^* < K$	$K \leq S^*$
Buy call	$-C$	0	$S^* - K$
Buy put	$-P$	$K - S^*$	0
Buy asset	$-Sd^{-t}$	S^*	S^*
Capitale di credito ($Pv_0\ di\ K$)	Kr^{-t}	0	$-K$
Totale	$-P - Sd^{-t} + Kr^{-t}$	0	$S^* - K$

Fonte: "Derivati: Futures, opzioni e strategie dinamiche ", *Mark Rubistein*, paragrafo: "Introduzione alle opzioni" p.148

Nella tabella precedente, viene confrontato il payoff di una call europea lunga, e il payoff di un portafoglio, composto da una posizione lunga su una put corrispondente alla call e su d^{-t} unità dell'attività sottostante, finanziata in parte tramite capitale di credito per un importo pari a Kr^{-t}. Invece, l'investimento effettuato pari a 1 unità di attività sottostante, costa S e vale S^*d^t alla scadenza. Di conseguenza l'investimento in d^{-t} unità dell'attività sottostante costa Sd^{-t} e vale: $(S^* * d^t)d^{-t} = S^*$ al termine della vita dell'opzione. Il denaro ricevuto in prestito dovrà essere remunerato al prestatore che diventa pari a $(Kr^{-t})r^t$ capitalizzando gli interessi. Il payoff del portafoglio tenuto conto della remunerazione del finanziamento, è uguale al payoff di una call, qualunque sia il prezzo dell'attività sottostante, a parità di scadenza ed altre condizioni. In assenza di opportunità di arbitraggio in un mercato perfetto il valore del portafoglio e quello di una call si **equivalgono**.

L'equazione, put-call parity si può anche dimostrare algebricamente sulla base del payoff $\max(0, S^* - K) = \max(0, K - S^*) + S^* - K$

In un mercato completo e arbitrage free i valori attuali dei payoffs devono essere uguali.

La put-call parity ha importanti implicazioni economiche, essa mostra come prendere in prestito il denaro utilizzando il mercato delle opzioni. Se si mette in evidenza il termine $-Kr^{-t}$, si può osservare che si potrebbe ottenere un finanziamento vendendo una put, acquistando una call e vendendo allo scoperto d^{-t} unità di sottostante. Questa serie di operazioni di fatto replica i finanziamenti utilizzando le opzioni. In altro modo se viene esplicitato il termine $-Sd^{-t}$, si evince che si potrebbe vendere allo scoperto il sottostante comprando una put, vendendo una call e avendo in prestito un importo pari a Kr^{-t}. Similmente a prima, questa operazione replica le vendite allo scoperto utilizzando le opzioni e in effetti, se si utilizza il mercato delle opzioni, il guadagno della vendita allo scoperto produce interessi al tasso $r-1$. Si può fare lo stesso ragionamento mettendo in evidenza il tasso di interesse r che ci mostra "Implied riskless return".

Con ogni evidenza la relazione più interessante dell'equazione della put-call parity si ottiene portando al primo membro $C-P$, tale relazione mostra che le uniche determinanti della differenza tra i prezzi di una put e di una call sono rappresentate da:

- Il prezzo spot del sottostante S;
- Il prezzo di esercizio K;
- La vita residua t;
- Il riskless return r;
- E il payout return d.

Si potrebbe affermare che in questo elenco di variabili che influenzano la differenza tra il prezzo della put e della call, manca una variabile: la deviazione standard. La volatilità misura l'incertezza lungo il return del sottostante, di conseguenza dovrebbe necessariamente essere presente nell'elenco precedente, ma se si tengono "ferme" le altre 5 variabili un aumento della volatilità su una call deve necessariamente far aumentare anche il valore della corrispondente put in egual misura.

Date queste considerazioni, è possibile dimostrerà che si può ottenere un profitto di arbitraggi, con le sole opzioni europee, sfruttando la formula della put-call parity mediante una strategia denominata *spread-box* e una strategia sui *bid-ask spread*.

2.4.3 Legame fra prezzi di due titoli rischiosi: una generalizzazione sulla put-call parity

Si consideri un mercato in cui sono espressi solamente due istanti temporali, un'epoca 0 e un'istante T, e si supponga che in questo mercato siano disponibili solo tre attività finanziarie:

- Un bond con tasso di interesse r e valore iniziale $B_0 = 1$;
- Un titolo rischioso S il cui valore finale dipende da un **evento casuale**, di cui non si conosce la quotazione al tempo 0 quindi $S_0 =?$
- Un secondo titolo rischioso C con le stese caratteristiche del precedente punto;

L'evento casuale è limitato a soli due stati di natura possibili E_1, E_2 per cui il valore del titolo rischioso al tempo $T(S_T)$, può essere rispettivamente pari a $S^+ \, o \, S^-$, e $C^+ o \; C^-$ in base a quale dei due eventi si verifica.

S e C rappresentano una scommessa sull'esito del lancio di un dado. Quali sono i valori dei titoli rischiosi al momento 0?

Tabella n.**11-** Gioco lancio di un dado con due eventi possibili

Tempo	0	T
Bond	1	e^{rt}
Titolo rischioso S	?	$S_T = S^+ se \; E_1$ $S_T = S^- se \; E_2$
Titolo rischioso C	?	$C_T = C^+ se \; E_1$ $C_T = C^- se \; E_2$

Fonte: "Calcolo stocastico per la finanza" di "Andrea Pascucci" (2007) p.15

Indicando con V il valore della strategia e con α, β le quantità dei titoli rischiosi:

$$V = \alpha S + \beta C$$

E si vuole imporre che replichi a scadenza il bond $V_T = e^{rT}$

$$\begin{Bmatrix} \alpha S^{+} + \beta C^{+} = e^{rT} \; se \; si \; verifica \; E_1 \\ \alpha S^{-} + \beta C^{-} = e^{rT} \; se \; si \; verifica \; E_2 \end{Bmatrix}$$

Si ottiene un sistema lineare e si risolve per α e per β:

$$\alpha = e^{rT} \frac{C^{+} - C^{-}}{C^{+}S^{-} - C^{-}S^{+}}$$

$$\beta = -e^{rT} \frac{S^{+} - S^{-}}{C^{+}S^{-} - C^{-}S^{+}}$$

Per la condizione di *non arbitraggio*, secondo la quale X_T *e* Y_T rappresentano il valore di due generici strumenti finanziari se $X_T = Y_T$ allora vale la stessa cosa per ogni istante intermedio $X_t = Y_t$, allora il valore della strategia $V_0 = 1$ e quindi:

$$aS_0 + \beta C_0 = 1$$

Questa equazione fornisce un legame tra i prezzi di due titoli rischiosi che deve sussistere affinchè non esistano opportunità di arbitraggio. Ciò significa anche che la valutazione di un derivato non richiede in ogni caso la quotazione del sottostante, ma può esser fatta a partire dalla quotazione di un altro derivato sullo stesso sottostante. Un Caso particolare dell'equazione precedente non è nient'altro che la formula della put-call parity[39]

2.5 Arbitraggio sulla violazione della pull-call parity attraverso una strategia box-spread

La strategia (**box-spread**) che si riporta, è stata implementata dal Professor of Finance at the Indian Institute of Management *Vipul Mathur*, il quale voleva testare l'efficienza del mercato delle opzioni per le call europee nel Nifty Index. La strategia riguarda solamente le opzioni di tipo europeo e un asset "*risk-free*". Egli costruì un "*Arbitrage table*" con 2 calls europee e due puts europee, che hanno la stessa attività sottostante e la stessa durata. Elemento distintivo di questa strategia è che una di queste due coppie di opzioni (d'ora in poi indicata con A), ha uno strike price minore rispetto al prezzo strike dell'altra coppia (d'ora in poi indicata la lettera B). Si indica con X_H lo strike

---

[39] Pascucci A. (2008) *Calcolo stocastico per la finanza* editore "Springer" p 5-11

price di A, mentre B ha uno strike price pari a $X_L$con $X_L < X_H$. Insieme queste due coppie di put e call europee formano un "*synthetic bond*" che ha un pagamento certo alla scadenza pari a $X_H - X_L$. Se il mercato è "*arbitrage free*", il ritorno del "*synthetic bond*" dovrà essere lo stesso del rendimento di un titolo risk-free con la stessa scadenza. Se i due ritorni sono differenti tra di loro allora si prospetta un'opportunità di arbitraggio tra il "meta bond" e l'asset risk-free.

Si ipotizzi di assumere posizione lunga su una strategia[40] box spread il che significa eseguire le seguenti operazioni:

- Assumere posizione lunga sull'opzione call che ha strike price pari a X_L e relativo premium price pari a C_L.
- "*Short a put option*" (Vipul, 2009) che possiede lo strike X_L e premium price P_L.
- Assumere posizione corta sull'opzione call con strike X_H e premium C_L
- "*Long a put options*" (Vipul, 2009) con strike uguale a X_H e premium P_H

Se si assume una posizione lunga attraverso strategia box-spread, si richiede sempre un investimento iniziale pari a $C_L - C_H + P_H - P_L$ sotto le seguenti considerazioni:

- Il premium price di una call con strike price minore è più alto rispetto ad un'opzione call con uno strike price maggiore
- Il premium price su un'opzione put, con strike price maggiore, è più grande del premium price di un'opzione put con strike price minore.

Tale strategia di arbitraggio può essere riassunta con una tabella che spiega meglio il funzionamento della stessa:

Tabella n.**12**- modello long-Box-spread

Coppie	Strike	Options	Ritorno atteso	Costo
A	X_L	Long call; short put	$S_T - X_L$	$C_L - P_L$

[40] Per la dimostrazione completa si consulti: Vipul (2009), *Box-spread Arbitrage, efficency of NIFTY index options: the indian evidence* The journal of futures markets vol. 29 no.6 p 544-562

B	X_H	Short call; long put	$X_H - S_T$	$P_H - C_H$
Tot			$X_H - X_L$	$C_L - C_H + P_H - P_L$

Fonte: "The Journal of Futures Markets", Vol. 29, No. 6, p. 547 (2009)

Ogni quartetto di possibilità tra il portafoglio A e il portafoglio B è testato dagli arbitraggisti. In caso di long box-spread strategy, esisterà un profitto se e solamente se:

$(X_H - X_L) > (C_L - P_L + P_H - C_H)$

al netto degli interessi maturati fino alla scadenza. In caso affermativo l'arbitraggista acquisterà l'opzione call con il minor strike price e l'opzione put con il più alto strike price, mentre venderà la l'opzione call con il più alto strike price e la put con il più basso strike price. Se la somma dei costi e dei relativi interessi dovesse essere superiore al payoff l'arbitraggista assumerà le posizioni opposte a quelle prima dette e in cambio riceverà un payoff: $C_L - P_L + P_H - C_H$ al costo di $X_H - X_L$. La strategia short-box-spread è riassunta nella tabella che segue:

Tabella n.**13-** Strategia short-box-spread

Coppie	Strike	Options	Ritorno atteso	Costo
A	X_L	Short call; long put	$C_T - P_L$	$S_T - X_L$
B	X_H	Long call; short put	$P_H - C_H$	$X_H - S_T$
Tot			$C_L - C_H + P_H - P_L$	$X_H - X_L$

Adattamento: Tabella n°1 "The Journal of Futures Markets", Vol. 29, No. 6, p. 547

Nella realtà dei mercati finanziari non è sufficiente dire che il payoff delle combinazioni delle call e put deve essere maggiore ai costi sostenuti per effettuare l'operazione di arbitraggio, in quanto si deve considerare anche gli interessi sul margine versato e le commissioni di brokeraggio. In un modo più completo un profitto di arbitraggio con opzioni attraverso l'uso di una strategia long box-spread (**APLB**) è pari a:

$$APBL = (X_H - X_L) - (C_L - P_L + P_H - C_H)[1 + r(T - t)] - M[r(T - t)] - B[1 + r(T - t)]$$

Dove M rappresenta il margine di deposito e B sono le commissioni richieste dal broker.

Allo stesso modo si può individuare il profitto di arbitraggio per la short box-spread strategy (**APSB**) è:

$APBS = (C_L - P_L + P_H - C_H)[1 + r(T - t)] - (X_H - X_L) - M[r(T - t)] - B[1 + r(T - t)$.

2.5.1 Applicazione Box-Spread Arbitrage

Per verificare l'ipotesi postulata da Vipul, è stata eseguita una prova sulle opzioni europee negoziate sulla piattaforma di trading Plus 500, aventi come titolo sottostante le azioni di Facabook Inc. Questa applicazione prende in considerazione il diverso prezzo di acquisto (prezzo ask) e il prezzo di vendita (bid), la differenza (bid-ask spread) rappresenta la quantità di denaro trattenuta dal dealer, indi per cui la precedente formula (APBL) non verrà considerata. La rilevazione dello strike e dei relativi premi delle opzioni è avvenuta in data 6/9/2018.

Tabella n.**14** – Coppia call e put per Box-Spread Arbitrage

Coppia	Strike	Tipologia	Scadenza	Bid	Ask
X_1	€ 155,00	call	19/09/2018	€ 9,20	€ 9,40
	€ 155,00	put	19/09/2018	€ 1,04	€ 1,09
X_2	€ 160,00	call	19/09/2018	€ 5,36	€ 5,53
	€ 160,00	put	19/09/2018	€ 2,20	€ 2,24
X_3	€ 165,00	call	19/09/2018	€ 2,66	€ 2,71
	€ 165,00	put	19/09/2018	€ 4,34	€ 4,50
X_4	€ 170,00	call	19/09/2018	€ 1,08	€ 1,12
	€ 170,00	put	19/09/2018	€ 7,84	€ 8,01
X_5	€ 175,00	call	19/09/2018	€ 0,39	€ 0,46
	€ 175,00	put	19/09/2018	€ 12,08	€ 12,33
X_6	€ 180,00	call	19/09/2018	€ 0,18	€ 0,20
	€ 180,00	put	19/09/2018	€ 16,84	€ 17,11

Nella tabella non è riportato il prezzo del titolo sottostante poiché ai fini della strategia box-spread, il titolo sottostante è invariante. Ciò è meglio osservabile tramite la seguente tabella:

Tabella n.**15** – Esempio Box spread strategy

Strike	incrocio posizioni	Payoff	Costo della strategia
X1	long call; short put	S*-X1	C1-P1
X2	short call; long put	X2-S*	P2-C2
Tot		X2-X1	C1-C2+P2-P1

Dalla colonna "payoff" risulta evidente che il prezzo dell'attività sottostante è presente sia prima con il segno positivo che successivamente con il segno negativo, ragione per cui si annulla. Alla luce di questo risultato si può affermare che tale tipologia di strategia mira a realizzare un profitto di arbitraggio la dove c'è un c.d. "*mispricing*". Dalla colonna Costo della strategia è facilmente comprensibile che questa strategia richiede sempre un investimento iniziale[41].

Ribadendo che esiste un profitto di arbitraggio solamente se la differenza tra il payoff e l'investimento iniziale è maggiore (al netto dei costi di transazione) è maggiore del valore attuale[42] della quantità certa di payoff:

$$\pi = (X_2 - X_1) - (C_1 - C_2 + P_2 - P_1) > (X_2 - X_1) * (r^{-t})$$

Provando ad incrociare le posizioni con strike pari a X1 e X2 si ottiene il seguente risultato:

Tabella n.**16** – Incrocio call/ put con strike X1 e X2

Strike	Posizione	payoff	Costo investimento	Loss/Profit
155	Long call; short put		9,40-5,36	
160	Short call; Long put		2,24-1,04	
Tot		5	5,24	-0,24

Il costo della strategia non viene coperto dal payoff certo, non c'è ovviamente possibilità di arbitraggio.

41 Long/Short Box spread sono strategia di arbitraggio c.d rischiose

42 La variabile temporale t sarà data in anni pari a : 0,046575342 in quanto le opzioni di norma scadono il 3° venerdì del mese quindi hanno almeno 18 giorni di durata, mentre l'interesse i è pari a 0,015

In quasi tutte le altre combinazioni possibili, si ottiene una perdita. Incrociando le posizioni con strike pari X2=160 e X3=165, si ottiene un risultato che merita ulteriore attenzione:

Tabella n.**17** – Long Box-spread con strike con combinazione strike X2 e X3

Strike	Posizione	payoff	Costo investimento	Loss/Profitt
160	Long call; short put		5,53-2,26	
165	Short call; Long put		2,20-4,50	
Tot		5	0,57	4,43

In t si ottiene un profitto di arbitraggio pari a 4,43€. Questo risultato deve essere valutato:

$(X_2 - X_1) - (C_1 - C_2 + P_2 - P_1) > (X_2 - X_1) * (r^{-t})$

$4{,}43 < 4{,}996533991$

Non è possibile ottenere un profitto di arbitraggio basato sul "mispricing" delle opzioni, sulle combinazioni delle call/put in tabella [14].

2.6 Arbitraggio nel mercato "reale": prezzo bid, prezzo ask.

Durante tutto l'elaborato, si è supposto di lavorare in un contesto di mercato perfetto, quindi non sono stati presi in considerazione ad esempio i costi di transazione e costo del capitale. Ora è necessario infrangere questa supposizione ammettendo di lavorare in un contesto di mercato "reale", e verificare se è possibile effettuare un arbitraggio sfruttando la non equità della put-call parity al netto di tutti i costi sopportabili. I *dealers* ossia coloro che quotano i prezzi dei 4 contratti interessati dalla *put-call parity* nei diversi mercati, istituiscono un *ask price* a cui sono disposti ad assumere una posizione *short*, e un *bid price* a cui sono disposti ad acquistare. È facilmente intuibile che il costo di transazione implicito è ricavato sulla differenza tra prezzo bid e prezzo ask che prende il nome di *bid-ask spread*. il *bid-ask spread* ha anche un significato economico: esso indica il livello di liquidità del titolo, tanto più il costo dato dal bid-ask spread è minore tanto più sarà maggiore la liquidità del titolo, perché è facilmente negoziabile sul mercato. Facendo il ragionamento inverso, più il titolo è difficilmente “liquidabile”, allora significa che maggiore sarà il compenso (*bid-ask spread*) trattenuto implicitamente dai *dealers* per la transazione. Avendo introdotto i due diversi prezzi di acquisto e vendita è naturale allora parlare anche di diverso tasso di interesse in base alla posizione che si intende assumere. Da qui la distinzione tra il tasso di interesse a cui il capitale viene preso in prestito r_{ask} (tasso di finanziamento) dal tasso di interesse a cui viene investito il capitale r_{bid} (tasso di investimento). Di norma il tasso $r_{ask} \geq r_{bid}$. La nuova formula della put-call simmetry considerando costi di transazione e tassi ask/bid è molto complessa, di conseguenza si utilizzerà una notazione semplificata sviluppata dalla Prof.ssa Barone Gaia [43] per cui c e p indicheranno rispettivamente il valore corrente della *call* e della *put* europea con prezzo di esercizio K e scadenza T, mentre S e B indicheranno, rispettivamente, il valore corrente dell’attività sottostante e di uno *zero-coupon bond* con valore nominale K e scadenza T:

$$c + B = p + S$$

E

$$B = KZ$$

Dove Z è il valore corrente di uno zero-coupon bond con valore nominale unitario e scadenza T.

Secondo questa formulazione, la *put-call parity* rappresenta un’ equivalenza tra un portafoglio formato da una *call* con valore corrente *c* e da uno zero-coupon bond con valore corrente B, valore nominale K e scadenza T, detta anche *fiduciary call*, e un portafoglio costituito dalla corrispondente *put* europea con valore corrente *p* e dalla sua attività sottostante, con valore corrente S c.d. *protective put.* I nuovi modelli di put-call parity sono riportati nelle seguenti tabelle:

Tabella n.**20**- Put-call parity considerando i relativi costi di transazione e del capitale per $S_T < K$ con $Z = e^{-rT}$

Portafoglio	0	T
A	C	0

[43] Vedi: Barone G. (2012) *Arbitraggi e algebra di Garman*, Create Space p. 8-17

	$B = KZ$	K
	$c + B$	K
B	p	$K - S_T$
	S_0	S_T
	$p + S_0$	K

Tabella n.**21**- Put-call parity considerando i relativi costi di transazione e del capitale per $S_T > K$ con $Z = e^{-rT}$

Portafoglio	0	T
A	C	$S_T - K$
	$B = KZ$	K
	$c + B$	S_T
B	p	0
	S_0	S_T
	$p + S_0$	S_T

L’arbitraggista opera acquistando al prezzo più elevato ask e vendendo al prezzo più basso bid. In questa situazione però non è sufficiente, in quanto per ottenere un guadagno certo, è necessario che il guadagno superi il costo della

transazione. Tenendo in considerazione i costi dell’operazione, si deve modificare la *put-call parity*, che per ovvi motivi si, divide in altre a due relazioni:

$$C_{bid} + B_{bid} < P_{ask} + S_{ask}$$

E vale anche:

$$C_{ask} + B_{ask} > P_{bid} + S_{bid}$$

Vale la stessa cosa per KZ:

$$B_{bid} = KZ_{bid}$$

E allo stesso tempo:

$$B_{ask} = KZ_{ask}$$

Da una prima analisi si evince che lo "sdoppiamento" della put call parity avviene per le relazioni di "acquisto" e "vendita". Qualora le prime due disuguaglianze non dovessero essere rispettate allora si potrebbe certamente effettuare un arbitraggio senza incorrere in alcun rischio. Come?

Se

$C_{bid} + B_{bid} < P_{ask} + S_{ask}$ è falsa, l'arbitraggista assumerà una posizione corta sulla *fiduciary call*[44], allo stesso tempo assumerà una posizione lunga sulla *protective put*[45]. Vale lo stesso ragionamento a parti ribaltate nel caso in cui non fosse verificata la $C_{ask} + B_{ask} > P_{bid} + S_{bid}$.

Volendo svolgere un esempio si può assumere che: lo strike price di un'opzione è pari a $K = 140$, tassi di interesse $r_{ask} = 0{,}9\%\ e\ r_{bid} = 0{,}5\%$, tassi di cambio divisi in base alla relazione $S_{ask} = 132\ e\ S_{bid} = 130$, $c_{ask} = 11$ e $c = 10{,}7$, $p_{bid} = 5{,}7$, $p_{ask} = 6$ e. La durata dell'operazione $T = 0{,}5$. Per verificare se esiste un'opportunità di arbitraggio in questo mercato e ai prezzi dati, bisogna verificare i valori di $B_{ask} e\ B_{bid}$:

$Z_{bid} = e^{rask*T} = e^{-0{,}09} * 0{,}5 = 0{,}99551011$

$Z_{ask} = e^{-rbid*T} = e^{-0{,}005} * 0{,}5 = 0{,}9975031$

[44] Una fiduciary call è una strategia "costo implicito", delineata per limitare i costi derivanti dall'esercizio di una opzione call. Nella pratica quando un trader acquista un opzione, egli indirettamente investe il valore attuale dello strike price al tasso risk free. A scadenza il valore dell'"account" è sufficiente a coprire il costo di esercizio della call.

[45] Protective put è una strategia che un trader può usare per difendersi da una perdita probabile. La put in questo caso si comporta come una polizza assicurativa, ha un costo, che riduce il guadagno potenziale dell'investitore ma che allo stesso tempo riduce la perdita totale.

A questo punto si possono calcolare i prezzi ask e bid tenendo conto dello strike price:

$B_{ask} = KZ_{ask} = 139{,}65044$

$B_{bid} = KZ_{bid} = 139{,}371415$

Ora si deve verificare se le disuguaglianze derivanti dalla put call parity sono verificate:

$C_{bid} + B_{bid} < P_{ask} + S_{ask} \longrightarrow 150{,}071415 = 10{,}7 + 139{,}371415 < 6 + 132 = 138$ non è verificata

$C_{ask} + B_{ask} > P_{bid} + S_{bid} \longrightarrow 11 + 139{,}65044 > 5{,}7 + 130$ è verificata.

Pertanto, è possibile sfruttare un'opportunità di arbitraggio e il profitto sarà pari alla differenza tra $(C_{bid} + B_{bid}) - (P_{ask} + S_{ask}) = 12{,}071415$.nello specifico la strategia di arbitraggio consiste nella vendita del titolo sopravvalutato (fiduciary call) e coprendosi con la protective put, assumendo le seguenti posizioni: lunga su C e B e corta su P e S.

CAPITOLO 3

Arbitraggio su future con applicazione di una simulazione stocastica.

Il seguente capitolo mira a verificare la possibilità di realizzare una strategia di arbitraggio mediante un future su commodity. In particolare è stata realizzata una simulazione dei prezzi del sottostante che tenti di replicare la futura situazione del bene d'investimento (l'oro) preso ad esempio. Il capitolo verrà strutturato nel seguente modo:

1. rilevazione dei prezzi di chiusura dello strumento finanziario che fungerà da sottostante;
2. elaborazione di una simulazione Montecarlo per la previsione dei prezzi futuri;
3. valutazione della presenza o assenza di opportunità di arbitraggio

3.1 Rilevazione e analisi

La commodity che fungerà da sottostante è l'oro, è stato scelta questa commodity rispetto ad un'altra perché l'oro ha una deviazione standard minore di buona parte dei titoli finanziari. La deviazione standard è una variabile della simulazione montecarlo che incide significativamente sul valore finale simulato, per cui mantenere la deviazione st. in un range medio/basso consente una simulazione realistica. Le rilevazioni dei prezzi dell'oro sono state estrapolate dal seguente sito internet che prende il prezzo dell'oro negoziato sul mercato di Londra (LBMA)

http://www.kitco.com/scripts/hist_charts/yearly_graphs.plx,

Tabella n.**22** – Rilevazioni prezzo oro dal 2/1/2018 al 31/08/2018

Data	oro PM ($)
martedì 2 gennaio 2018	1312,05
mercoledì 3 gennaio 2018	1314,9
giovedì 4 gennaio 2018	1314,5
venerdì 5 gennaio 2018	1317,15
lunedì 8 gennaio 2018	1319,95
martedì 9 gennaio 2018	1311
mercoledì 10 gennaio 2018	1319,75
giovedì 11 gennaio 2018	1323,05
venerdì 12 gennaio 2018	1326,8
lunedì 15 gennaio 2018	1339,25
martedì 16 gennaio 2018	1333,85
mercoledì 17 gennaio 2018	1335,85
giovedì 18 gennaio 2018	1335,65
venerdì 19 gennaio 2018	1332,2
lunedì 22 gennaio 2018	1334,95
martedì 23 gennaio 2018	1332,6
mercoledì 24 gennaio 2018	1333,4
giovedì 25 gennaio 2018	1353,7
venerdì 26 gennaio 2018	1354,95
lunedì 29 gennaio 2018	1353,15
lunedì 29 gennaio 2018	1343,85
martedì 30 gennaio 2018	1344,9
mercoledì 31 gennaio 2018	1345,05
giovedì 1 febbraio 2018	1341,35
venerdì 2 febbraio 2018	1331,15
lunedì 5 febbraio 2018	1333,6
martedì 6 febbraio 2018	1331,4
mercoledì 7 febbraio 2018	1324,65
giovedì 8 febbraio 2018	1315,45
venerdì 9 febbraio 2018	1314,1
lunedì 12 febbraio 2018	1322,3
martedì 13 febbraio 2018	1325,35

mercoledì 14 febbraio 2018	1336,25
giovedì 15 febbraio 2018	1352,45
venerdì 16 febbraio 2018	1352,45
lunedì 19 febbraio 2018	1352,1
martedì 20 febbraio 2018	1346,6
mercoledì 21 febbraio 2018	1339,85
mercoledì 21 febbraio 2018	1330,5
giovedì 22 febbraio 2018	1328,35
venerdì 23 febbraio 2018	1327,95
lunedì 26 febbraio 2018	1333,5
martedì 27 febbraio 2018	1325,75
mercoledì 28 febbraio 2018	1317,85
giovedì 1 marzo 2018	1307,75
venerdì 2 marzo 2018	1322,3
lunedì 5 marzo 2018	1320,4
martedì 6 marzo 2018	1331,4
mercoledì 7 marzo 2018	1329,4
giovedì 8 marzo 2018	1321
venerdì 9 marzo 2018	1320,6
lunedì 12 marzo 2018	1319,15
martedì 13 marzo 2018	1322,75
mercoledì 14 marzo 2018	1323,55
giovedì 15 marzo 2018	1318,75
venerdì 16 marzo 2018	1310,1
lunedì 19 marzo 2018	1312,4
martedì 20 marzo 2018	1311
mercoledì 21 marzo 2018	1321,35
giovedì 22 marzo 2018	1329,15
venerdì 23 marzo 2018	1346,6
giovedì 26 marzo 2048	1352,4
martedì 27 marzo 2018	1341,45
mercoledì 28 marzo 2018	1332,45
giovedì 29 marzo 2018	1323,85
martedì 3 aprile 2018	1333,45
mercoledì 4 aprile 2018	1337,3
giovedì 5 aprile 2018	1327,7
venerdì 6 aprile 2018	1331,2
lunedì 9 aprile 2018	1331,95
martedì 10 aprile 2018	1338,95
mercoledì 11 aprile 2018	1350,75
giovedì 12 aprile 2018	1341,35
venerdì 13 aprile 2018	1343,7
lunedì 16 aprile 2018	1349,35
martedì 17 aprile 2018	1342,1

mercoledì 18 aprile 2018	1351,45
giovedì 19 aprile 2018	1348,6
venerdì 20 aprile 2018	1336,75
lunedì 23 aprile 2018	1324,3
martedì 24 aprile 2018	1328,85
mercoledì 25 aprile 2018	1321,65
giovedì 26 aprile 2018	1320,7
venerdì 27 aprile 2018	1321,5
lunedì 30 aprile 2018	1318,2
martedì 1 maggio 2018	1307,1
mercoledì 2 maggio 2018	1340,2
giovedì 3 maggio 2018	1315,05
venerdì 4 maggio 2018	1309,4
martedì 8 maggio 2018	1306,6
mercoledì 9 maggio 2018	1313,85
giovedì 10 maggio 2018	1318,8
venerdì 11 maggio 2018	1324,35
lunedì 14 maggio 2018	1319,85
martedì 15 maggio 2018	1295
mercoledì 16 maggio 2018	1291,25
giovedì 17 maggio 2018	1289,5
venerdì 18 maggio 2018	1288,3
lunedì 21 maggio 2018	1288,35
martedì 22 maggio 2018	1293,05
mercoledì 23 maggio 2018	1289
giovedì 24 maggio 2018	1304,85
venerdì 25 maggio 2018	1303,5
martedì 29 maggio 2018	1295,5
mercoledì 30 maggio 2018	1300,7
giovedì 31 maggio 2018	1305,35
venerdì 1 giugno 2018	1294,6
lunedì 4 giugno 2018	1295,45
martedì 5 giugno 2018	1292,05
mercoledì 6 giugno 2018	1300,1
giovedì 7 giugno 2018	1297,25
venerdì 8 giugno 2018	1298,25
lunedì 11 giugno 2018	1299,6
martedì 12 giugno 2018	1298,65
mercoledì 13 giugno 2018	1296,15
giovedì 14 giugno 2018	1302,75
venerdì 15 giugno 2018	1285,25
lunedì 18 giugno 2018	1281,55
martedì 19 giugno 2018	1276,15
mercoledì 20 giugno 2018	1274,2

giovedì 21 giugno 2018	1266,15
venerdì 22 giugno 2018	1269,15
lunedì 25 giugno 2018	1268,7
martedì 26 giugno 2018	1260,3
mercoledì 27 giugno 2018	1254,6
giovedì 28 giugno 2018	1251,55
venerdì 29 giugno 2018	1250,45
lunedì 2 luglio 2018	1247,8
martedì 3 luglio 2018	1251,75
mercoledì 4 luglio 2018	1255,65
giovedì 5 luglio 2018	1255,5
venerdì 6 luglio 2018	1255,35
lunedì 9 luglio 2018	1262,05
martedì 10 luglio 2018	1254
mercoledì 11 luglio 2018	1251,4
giovedì 12 luglio 2018	1245,9
venerdì 13 luglio 2018	1241,7
lunedì 16 luglio 2018	1241,1
martedì 17 luglio 2018	1232,8
mercoledì 18 luglio 2018	1224,5
giovedì 19 luglio 2018	1217,55
venerdì 20 luglio 2018	1228,75
lunedì 23 luglio 2018	1224,95
martedì 24 luglio 2018	1228,35
mercoledì 25 luglio 2018	1231,5
giovedì 26 luglio 2018	1228,25
venerdì 27 luglio 2018	1223,95
lunedì 30 luglio 2018	1223,8
martedì 31 luglio 2018	1220,95
mercoledì 1 agosto 2018	1219
giovedì 2 agosto 2018	1215,45
venerdì 3 agosto 2018	1216,3
lunedì 6 agosto 2018	1209,65
martedì 7 agosto 2018	1212,35
mercoledì 8 agosto 2018	1209,55
giovedì 9 agosto 2018	1214,35
venerdì 10 agosto 2018	1214,4
lunedì 13 agosto 2018	1200,35
martedì 14 agosto 2018	1197
mercoledì 15 agosto 2018	1182
giovedì 16 agosto 2018	1180,4
venerdì 17 agosto 2018	1178,4
lunedì 20 agosto 2018	1184,35
martedì 21 agosto 2018	1190,95

mercoledì 22 agosto 2018	1196,65
giovedì 23 agosto 2018	1192,35
venerdì 24 agosto 2018	1197,7
martedì 28 agosto 2018	1212,25
mercoledì 29 agosto 2018	1204,2
giovedì 30 agosto 2018	1197,3
venerdì 31 agosto 2018	1202,45

Di seguito si riportano alcuni indici statistici dei dati rilevati in tabella [22]:

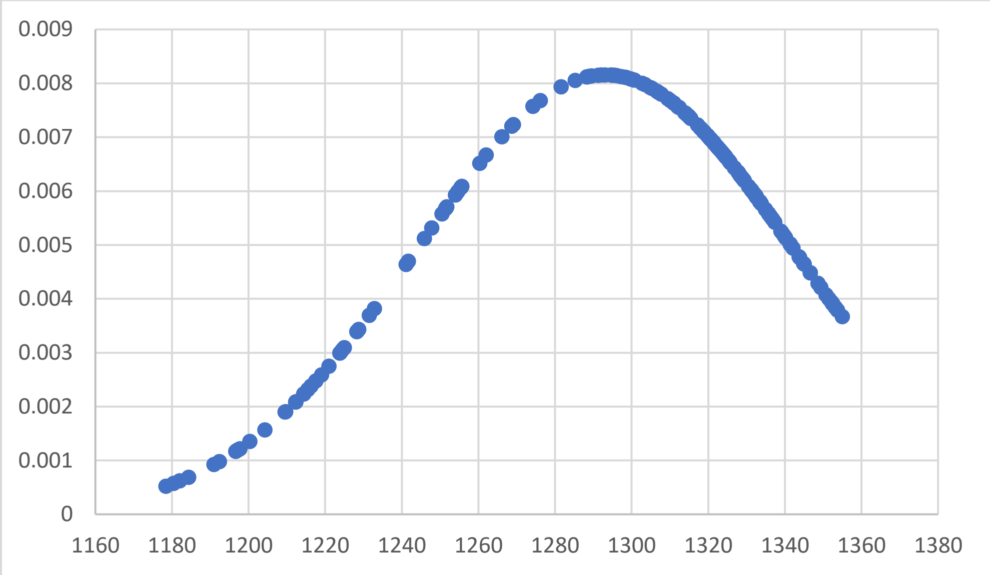
Tabella n.**23** – Indici statistici di tabella n.[22]

Media	1293,102
Dev.st	48,91462
Asimmetria	-0,81742
mediana	1312,4
curtosi	-0,60921

La mediana[46] è "distante" dalla media semplice del corso, ciò può essere un segnale che il corso azionario si potrebbe distribuire non secondo una Normale secondo Gauss. Nonostante questo l'asimmetria è compresa in un intorno di [-2;+2] e l'indice di curtosi non superiore a [-3;+3] indicano (oltre che la curva è leggermente leptocurtica) ma soprattutto che i dati rilevati in precedenza probabilmente si distribuiscono secondo una normale. Per verificare questa ipotesi si calcolano le distribuzioni cumulate, che restituisce la distribuzione normale per la media e la deviazione standard dati, e tracciando il grafico dei risultati ottenuti, si dovrebbe osservare un tipico grafico a campana.

Grafico n.**1** – Grafico a campana dei dati storici in tabella [22]

[46] Calcolata con la funzione Excel : Mediana()



Non tutti i dati sono distribuiti equamente (ci sono diversi spazi bianchi), tuttavia aumentando la frequenza campionaria (dati intraday) o la numerosità campionaria secondo il teorema del limite centrale si dovrebbe ottenere una distribuzione più regolare.

Uno degli strumenti più utilizzati nell'analisi tecnica è la media mobile. Esistono varie tipologie di medie: mobile, aritmetica, ponderata, esponenziale e additiva. Obiettivo dell'utilizzo di questo indicatore, oltre alla speculazione, è quello di individuare un trend e dare un parere sul prossimo andamento futuro. Per questo motivo è stato preferito l'utilizzo di medie mobili esponenziale, che danno maggiore rilevanza ai dati finali della serie storica. Nelle MM esponenziali si utilizza un coefficiente α chiamato: fattore di decadimento che assegna un valore compreso in un intervallo [0,1]. Per il calcolo di questa media esponenziale ad α è stato attribuito un valore pari a:

$\alpha = \frac{2}{n+1}$.

La media mobile esponenziale (**EMA**) riferita al 1° periodo è equivalente ad una media mobile semplice di fatto:

$$EMA = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x\, i$$

Dal secondo periodo la media mobile esponenziale diventa:

$$EMA_t = EMA_{t-1} + \alpha * (C_t - EMA_{t-1})$$

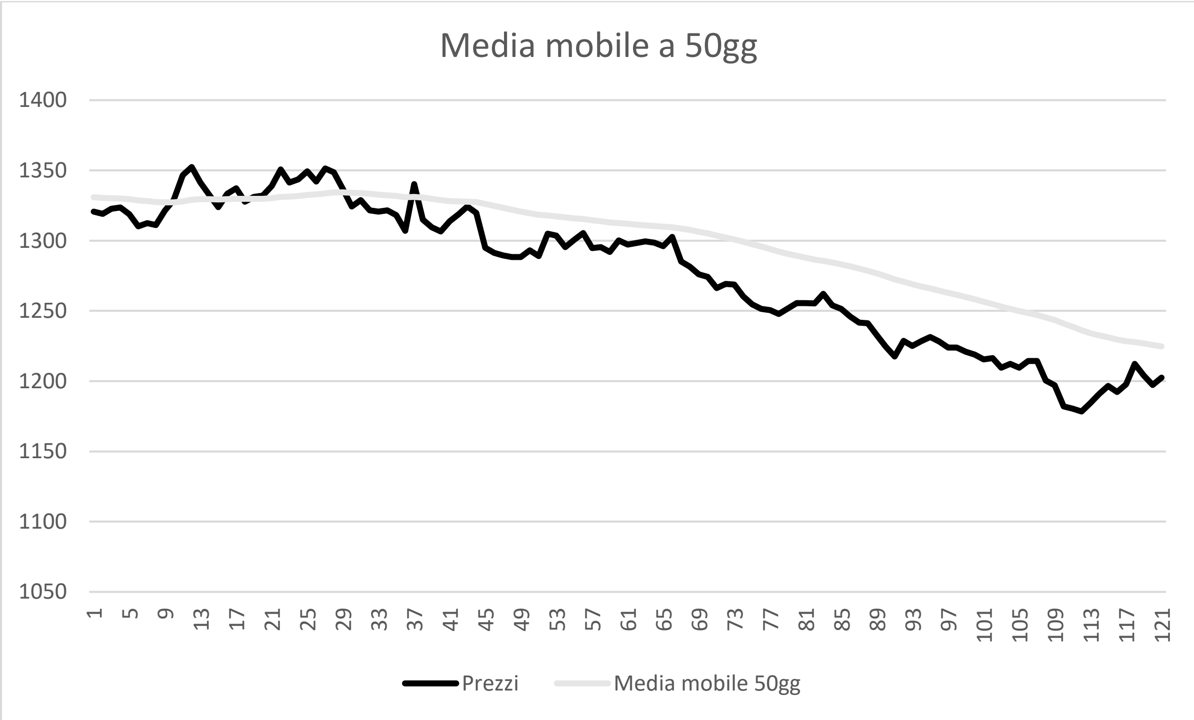
Ossia è la somma tra la media esponenziale del periodo precedente e il prodotto tra il coefficiente di decadimento α e la differenza tra il prezzo di chiusura e la media esponenziale del periodo precedente.

Volendo fare un esempio la media mobile esponenziale a 50 periodi, riferita ai dati in tabella [22], con n pari a 51 è:

$$EMA_{51} = 1330{,}954 + 0{,}0392 * (1319{,}15 - 1330{,}954) = 1330{,}491098$$

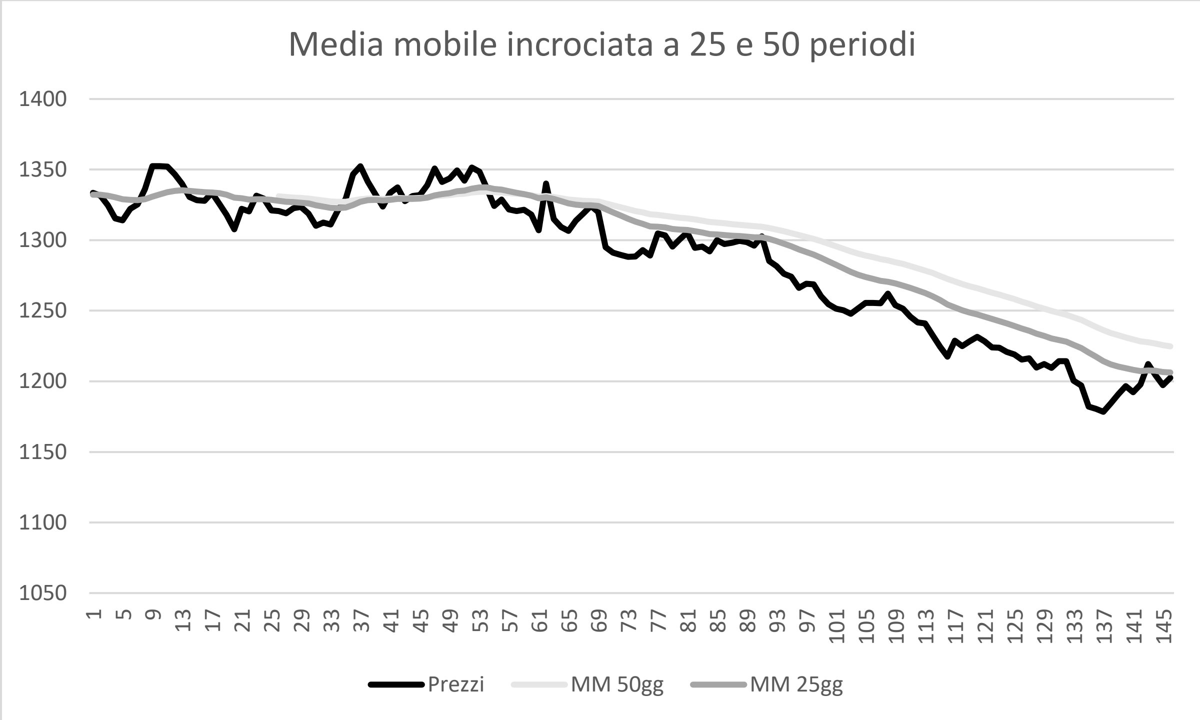
Come si potrà vedere dal grafico è evidente che la media mobile (grigio) si trova al di sopra della serie storica del prezzo Oro Pm (nero), questo indica che potrebbe essere in atto un trend ribassista.

Grafico n.**2** – Media Mobile ponderata (50gg)



Ciò è confermato utilizzando due medie mobili una a 25 periodi e una a 50 periodi.

Grafico n.**3** – Medie mobili combinate Oro PM



Nel punto di ascissa 85 si nota che la media mobile a 25 gg (veloce) taglia al ribasso la media mobile a 50 periodi (lenta) ciò è un chiaro segnale di trend ribassista. Concludendo, ci attendiamo che la simulazione montecarlo, fornisca dei valori coerenti con le considerazioni date in questo paragrafo.

3.2Simulazione Montecarlo

Concettualmente il metodo montecarlo si basa sulla possibilità di eseguire, utilizzando dei numeri casuali, un campionamento di una distribuzione di probabilità assegnata. *"…Invece di utilizzare un campione di numeri effettivamente estratti a caso si ricorre a una sequenza di numeri ottenuti con un processo iterativo ben determinato; tali numeri vengono detti pseudo-casuali giacché, pur non essendo casuali, hanno proprietà statistiche analoghe a quelle dei veri numeri casuali"* (TRECCANI, s.d.). Il metodo montecarlo è basato su una simulazione stocastica. A loro volta i modelli stocastici utilizzano variabili aleatorie, cui il calcolatore associa una distribuzione di probabilità con il campionamento dei numeri casuali. Nel metodo montecarlo un fenomeno viene osservato n volte, e il calcolatore ascrive le modalità assunte in ciascuna manifestazione. Obiettivo è quello di identificare la distribuzione statistica del carattere. Condizione necessaria affinchè la simulazione sia valida è che ogni risultato ottenuto debba necessariamente essere svincolato, da altro risultato ottenuto con lo stesso modello. In questo contesto, si parla di *indipendenza* dei risultati

Tra le applicazioni vi sono: la risoluzione di problemi di analisi numerica, quali ad esempio il calcolo di integrali definiti, lo studio dei sistemi modello, sviluppati nella teoria delle code, per descrivere la formazione e lo smaltimento delle code in sistemi di varia complessità, come le centraline telefoniche. Volendo formulare un breve esempio per comprendere l'utilità di una simulazione così pensata, si consideri un dado non truccato il cui spazio campionario S sia costituito da 6 eventi tutti equiprobabili. La probabilità che esca una delle sei facce del dado è del 16,7%. Assumendo che i dadi siano 2, e si voglia conoscere la proprietà che al lancio congiunto dei due dadi esca almeno un 2. Anche in questo caso la soluzione è ancora rilevabile analiticamente. I casi possibili sono 36 (6 per un dado e 6 per l'altro), e la probabilità che esca almeno un 2 è data dal rapporto tra gli eventi favorevoli e i casi possibili 11/36. Adesso si ammetta di voler calcolare la medesima probabilità ma basandosi su 500 dadi. La risposta non è più immediata come nei casi precedenti, ed è in questi casi che si usufruisce delle simulazioni offerte dai calcolatori.

Per la simulazione montecarlo occorre una variabile aleatoria caratterizzata dalla funzione Casuale di Excel e da due variabili dipendenti: drift e deviazione standard.

La deviazione standard non verrà calcolata sui prezzi di chiusura ma sul log-rendimento. Per variazioni di prezzo contenute, il rendimento logaritmico e quello aritmetico (semplice) sono simili. Il logaritmo del rendimento approssima bene una funzione che ha comportamento lineare nell'origine.

Il log rendimento può essere approssimato al rendimento semplice, ma gode di maggiori proprietà rispetto a quest'ultimo: il logaritmo riesce a approssimare meglio una grande mole di dati (graficamente rilevante) in più i log rendimenti sono sommabili nel tempo.

$$Log\ rendimenti = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

Tabella n.**24**-Log rendimenti Gold Pm rilevati dal 2/1/2018 al 31/8/2018

Data	oro PM ($)	Log rendimenti
martedì 2 gennaio 2018	1312,05	
mercoledì 3 gennaio 2018	1314,9	0,002169818
giovedì 4 gennaio 2018	1314,5	-0,000304252
venerdì 5 gennaio 2018	1317,15	0,002013946
lunedì 8 gennaio 2018	1319,95	0,002123546
martedì 9 gennaio 2018	1311	-0,006803652
mercoledì 10 gennaio 2018	1319,75	0,00665212
giovedì 11 gennaio 2018	1323,05	0,002497353
venerdì 12 gennaio 2018	1326,8	0,002830351
lunedì 15 gennaio 2018	1339,25	0,009339728
martedì 16 gennaio 2018	1333,85	-0,004040258
mercoledì 17 gennaio 2018	1335,85	0,001498296
giovedì 18 gennaio 2018	1335,65	-0,000149729
venerdì 19 gennaio 2018	1332,2	-0,002586354
lunedì 22 gennaio 2018	1334,95	0,002062127
martedì 23 gennaio 2018	1332,6	-0,001761917
mercoledì 24 gennaio 2018	1333,4	0,00060015
giovedì 25 gennaio 2018	1353,7	0,015109513
venerdì 26 gennaio 2018	1354,95	0,000922969
lunedì 29 gennaio 2018	1353,15	-0,001329345
lunedì 29 gennaio 2018	1343,85	-0,006896579
martedì 30 gennaio 2018	1344,9	0,000781032
mercoledì 31 gennaio 2018	1345,05	0,000111526
giovedì 1 febbraio 2018	1341,35	-0,002754618
venerdì 2 febbraio 2018	1331,15	-0,007633339
lunedì 5 febbraio 2018	1333,6	0,001838822
martedì 6 febbraio 2018	1331,4	-0,001651032
mercoledì 7 febbraio 2018	1324,65	-0,005082747
giovedì 8 febbraio 2018	1315,45	-0,006969461
venerdì 9 febbraio 2018	1314,1	-0,001026792
lunedì 12 febbraio 2018	1322,3	0,006220624
martedì 13 febbraio 2018	1325,35	0,002303931
mercoledì 14 febbraio 2018	1336,25	0,008190608
giovedì 15 febbraio 2018	1352,45	0,012050579
venerdì 16 febbraio 2018	1352,45	0
lunedì 19 febbraio 2018	1352,1	-0,000258823
martedì 20 febbraio 2018	1346,6	-0,004076042
mercoledì 21 febbraio 2018	1339,85	-0,00502523
mercoledì 21 febbraio 2018	1330,5	-0,007002856

giovedì 22 febbraio 2018	1328,35	-0,001617241
venerdì 23 febbraio 2018	1327,95	-0,000301171
lunedì 26 febbraio 2018	1333,5	0,004170665
martedì 27 febbraio 2018	1325,75	-0,005828728
mercoledì 28 febbraio 2018	1317,85	-0,005976716
giovedì 1 marzo 2018	1307,75	-0,007693518
venerdì 2 marzo 2018	1322,3	0,011064541
lunedì 5 marzo 2018	1320,4	-0,001437924
martedì 6 marzo 2018	1331,4	0,008296299
mercoledì 7 marzo 2018	1329,4	-0,001503308
giovedì 8 marzo 2018	1321	-0,006338687
venerdì 9 marzo 2018	1320,6	-0,000302847
lunedì 12 marzo 2018	1319,15	-0,001098589
martedì 13 marzo 2018	1322,75	0,002725313
mercoledì 14 marzo 2018	1323,55	0,000604618
giovedì 15 marzo 2018	1318,75	-0,003633202
venerdì 16 marzo 2018	1310,1	-0,006580848
lunedì 19 marzo 2018	1312,4	0,001754052
martedì 20 marzo 2018	1311	-0,001067317
mercoledì 21 marzo 2018	1321,35	0,007863736
giovedì 22 marzo 2018	1329,15	0,005885699
venerdì 23 marzo 2018	1346,6	0,013043257
giovedì 26 marzo 2048	1352,4	0,004297895
martedì 27 marzo 2018	1341,45	-0,008129673
mercoledì 28 marzo 2018	1332,45	-0,006731766
giovedì 29 marzo 2018	1323,85	-0,006475195
martedì 3 aprile 2018	1333,45	0,007225411
mercoledì 4 aprile 2018	1337,3	0,002883087
giovedì 5 aprile 2018	1327,7	-0,007204534
venerdì 6 aprile 2018	1331,2	0,002632669
lunedì 9 aprile 2018	1331,95	0,000563243
martedì 10 aprile 2018	1338,95	0,005241691
mercoledì 11 aprile 2018	1350,75	0,008774269
giovedì 12 aprile 2018	1341,35	-0,006983424
venerdì 13 aprile 2018	1343,7	0,001750433
lunedì 16 aprile 2018	1349,35	0,004195992
martedì 17 aprile 2018	1342,1	-0,005387444
mercoledì 18 aprile 2018	1351,45	0,006942539
giovedì 19 aprile 2018	1348,6	-0,002111073
venerdì 20 aprile 2018	1336,75	-0,008825722
lunedì 23 aprile 2018	1324,3	-0,009357277
martedì 24 aprile 2018	1328,85	0,003429889
mercoledì 25 aprile 2018	1321,65	-0,005432951
giovedì 26 aprile 2018	1320,7	-0,000719057

venerdì 27 aprile 2018	1321,5	0,000605556
lunedì 30 aprile 2018	1318,2	-0,002500285
martedì 1 maggio 2018	1307,1	-0,008456227
mercoledì 2 maggio 2018	1340,2	0,025007914
giovedì 3 maggio 2018	1315,05	-0,018944169
venerdì 4 maggio 2018	1309,4	-0,004305671
martedì 8 maggio 2018	1306,6	-0,002140674
mercoledì 9 maggio 2018	1313,85	0,005533415
giovedì 10 maggio 2018	1318,8	0,003760474
venerdì 11 maggio 2018	1324,35	0,004199541
lunedì 14 maggio 2018	1319,85	-0,003403679
martedì 15 maggio 2018	1295	-0,019007399
mercoledì 16 maggio 2018	1291,25	-0,002899954
giovedì 17 maggio 2018	1289,5	-0,001356195
venerdì 18 maggio 2018	1288,3	-0,000931027
lunedì 21 maggio 2018	1288,35	3,88101E-05
martedì 22 maggio 2018	1293,05	0,003641439
mercoledì 23 maggio 2018	1289	-0,003137045
giovedì 24 maggio 2018	1304,85	0,012221368
venerdì 25 maggio 2018	1303,5	-0,001035137
martedì 29 maggio 2018	1295,5	-0,006156233
mercoledì 30 maggio 2018	1300,7	0,00400586
giovedì 31 maggio 2018	1305,35	0,003568623
venerdì 1 giugno 2018	1294,6	-0,008269437
lunedì 4 giugno 2018	1295,45	0,000656358
martedì 5 giugno 2018	1292,05	-0,002628021
mercoledì 6 giugno 2018	1300,1	0,00621108
giovedì 7 giugno 2018	1297,25	-0,002194545
venerdì 8 giugno 2018	1298,25	0,000770564
lunedì 11 giugno 2018	1299,6	0,001039321
martedì 12 giugno 2018	1298,65	-0,000731261
mercoledì 13 giugno 2018	1296,15	-0,001926931
giovedì 14 giugno 2018	1302,75	0,005079083
venerdì 15 giugno 2018	1285,25	-0,013524163
lunedì 18 giugno 2018	1281,55	-0,002882969
martedì 19 giugno 2018	1276,15	-0,00422255
mercoledì 20 giugno 2018	1274,2	-0,001529202
giovedì 21 giugno 2018	1266,15	-0,006337731
venerdì 22 giugno 2018	1269,15	0,002366585
lunedì 25 giugno 2018	1268,7	-0,000354631
martedì 26 giugno 2018	1260,3	-0,006642966
mercoledì 27 giugno 2018	1254,6	-0,004532991
giovedì 28 giugno 2018	1251,55	-0,002434014
venerdì 29 giugno 2018	1250,45	-0,000879297

lunedì 2 luglio 2018	1247,8	-0,002121486
martedì 3 luglio 2018	1251,75	0,003160572
mercoledì 4 luglio 2018	1255,65	0,003110795
giovedì 5 luglio 2018	1255,5	-0,000119467
venerdì 6 luglio 2018	1255,35	-0,000119481
lunedì 9 luglio 2018	1262,05	0,005322965
martedì 10 luglio 2018	1254	-0,006398941
mercoledì 11 luglio 2018	1251,4	-0,002075518
giovedì 12 luglio 2018	1245,9	-0,004404764
venerdì 13 luglio 2018	1241,7	-0,003376752
lunedì 16 luglio 2018	1241,1	-0,000483325
martedì 17 luglio 2018	1232,8	-0,006710078
mercoledì 18 luglio 2018	1224,5	-0,006755408
giovedì 19 luglio 2018	1217,55	-0,005691955
venerdì 20 luglio 2018	1228,75	0,00915675
lunedì 23 luglio 2018	1224,95	-0,003097366
martedì 24 luglio 2018	1228,35	0,002771779
mercoledì 25 luglio 2018	1231,5	0,002561133
giovedì 26 luglio 2018	1228,25	-0,002642547
venerdì 27 luglio 2018	1223,95	-0,003507058
lunedì 30 luglio 2018	1223,8	-0,000122562
martedì 31 luglio 2018	1220,95	-0,002331528
mercoledì 1 agosto 2018	1219	-0,001598394
giovedì 2 agosto 2018	1215,45	-0,002916472
venerdì 3 agosto 2018	1216,3	0,000699085
lunedì 6 agosto 2018	1209,65	-0,005482402
martedì 7 agosto 2018	1212,35	0,002229563
mercoledì 8 agosto 2018	1209,55	-0,002312235
giovedì 9 agosto 2018	1214,35	0,003960565
venerdì 10 agosto 2018	1214,4	4,11734E-05
lunedì 13 agosto 2018	1200,35	-0,011636947
martedì 14 agosto 2018	1197	-0,002794754
mercoledì 15 agosto 2018	1182	-0,012610508
giovedì 16 agosto 2018	1180,4	-0,001354555
venerdì 17 agosto 2018	1178,4	-0,001695778
lunedì 20 agosto 2018	1184,35	0,005036515
martedì 21 agosto 2018	1190,95	0,005557207
mercoledì 22 agosto 2018	1196,65	0,004774678
giovedì 23 agosto 2018	1192,35	-0,003599836
venerdì 24 agosto 2018	1197,7	0,004476901
martedì 28 agosto 2018	1212,25	0,012075086
mercoledì 29 agosto 2018	1204,2	-0,006662691
giovedì 30 agosto 2018	1197,3	-0,005746424
venerdì 31 agosto 2018	1202,45	0,00429212

Con la simulazione montecarlo è

possibile generare n possibili valori casuali che il sottostante potrà assumere al tempo T. Ad ognuno di valori rilevati in tabella [24] verrà associato un numero casuale compreso in un intervallo [0,1]. Si procederà con la trasformazione di questa probabilità nel corrispondente valore della Normale Standard che per definizione è "*una variabile casuale con media nulla e varianza unitaria*"[47]. Per svolgere questo calcolo si utilizza la funzione INV.NORM.ST. Conoscendo il valore *p* della probabilità, infatti, si conosce l'area sottesa dalla curva della Normale Standard e un punto. Con il ricorso alla funzione INV.NORM.ST(**p**) non si fa altro che trovare il valore di quel punto. A questo punto, però, ci si troverà in contrasto con l'ipotesi originaria secondo cui la distribuzione dell'indice è Normale, ma non Normale Standard. Per ottenere il corrispondente valore distribuito normalmente si moltiplica ogni *z* per lo scarto quadratico medio σ della distribuzione del sottostante e aggiungervi il **drift** (costante). Il drift rappresenta il valore atteso del rendimento giornaliero (giorno per giorno). E si calcola come $\mu - (\sigma\text{^}2)/2$, e può essere letta come: *il valore del rendimento atteso giornaliero, eroso dalla volatilità che ha caratterizzato il titolo, ad un tasso pari alla metà della varianza.* Tale valore elevato a potenza con base il numero di nepero, e moltiplicato per il prezzo di chiusura registrato nel giorno precedente fornisce, il prezzo di chiusura del giorno successivo.

$P_{t+1} = P_{t-1} * e\text{^}[drift + dev.st * F(X)]$

È evidente che il modello qui costruito rappresenta un processo iterativo basato sui valori che giorno per giorno vengono generati.

Tabella n.**25** – Indici di tabella n°[24]

MEDIA	-0,00051
VARIANZA	3,42E-05
DEV.ST.P	0,005845
DRIFT	-0,00053

Nella tabella precedente sono inseriti gli indici che serviranno per impostare la simulazione Montecarlo, come si può ben vedere il drift è *negativo*. Tale dato era prevedibile in quanto dall'analisi del paragrafo precedente [3.1] è stato concluso che ci

[47] A.C Monti introduzione alla statistica

si aspettasse un trend ribassista, il drift non è nient'altro che una componente di questo trend.

Sono stati generati 78 prezzi attesi, in quanto il future utilizzato per l'arbitraggio ha come scadenza la data 27/12/2018

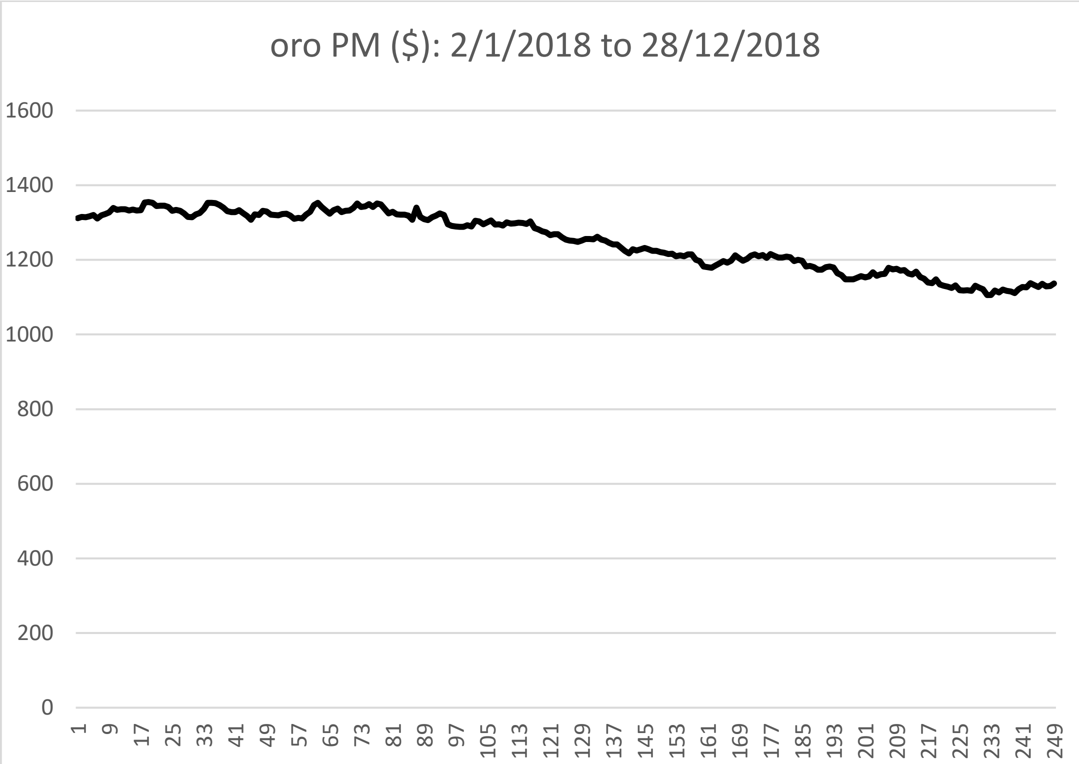
Tabella n.**26** -Prezzi attesi sviluppati con simulazione montecarlo

Data	prezzi spot attesi($)
martedì 4 settembre 2018	1210,140084
mercoledì 5 settembre 2018	1201,559622
giovedì 6 settembre 2018	1197,971815
venerdì 7 settembre 2018	1203,894387
lunedì 10 settembre 2018	1215,037077
mercoledì 12 settembre 2018	1221,422797
giovedì 13 settembre 2018	1220,819459
venerdì 14 settembre 2018	1217,487478
lunedì 17 settembre 2018	1215,314914
martedì 18 settembre 2018	1214,550386
mercoledì 19 settembre 2018	1217,649194
giovedì 20 settembre 2018	1202,674716
venerdì 21 settembre 2018	1210,334586
lunedì 24 settembre 2018	1214,590599
martedì 25 settembre 2018	1223,799092
mercoledì 26 settembre 2018	1221,43096
giovedì 27 settembre 2018	1232,437681
venerdì 28 settembre 2018	1225,268058
lunedì 1 ottobre 2018	1229,062985
martedì 2 ottobre 2018	1215,819715
mercoledì 3 ottobre 2018	1213,812393
giovedì 4 ottobre 2018	1228,446055
venerdì 5 ottobre 2018	1230,518378
martedì 9 ottobre 2018	1214,153853
mercoledì 10 ottobre 2018	1221,496593
giovedì 11 ottobre 2018	1223,370484
venerdì 12 ottobre 2018	1228,030497
lunedì 15 ottobre 2018	1215,711632
martedì 16 ottobre 2018	1224,026195
mercoledì 17 ottobre 2018	1224,502227
giovedì 18 ottobre 2018	1216,136207
venerdì 19 ottobre 2018	1211,285135
lunedì 22 ottobre 2018	1217,320275
martedì 23 ottobre 2018	1216,838669
mercoledì 24 ottobre 2018	1218,49645
giovedì 25 ottobre 2018	1217,091475

venerdì 26 ottobre 2018	1216,139428
lunedì 29 ottobre 2018	1227,103349
martedì 30 ottobre 2018	1228,327512
giovedì 1 novembre 2018	1211,048986
venerdì 2 novembre 2018	1211,71799
lunedì 5 novembre 2018	1214,721324
martedì 6 novembre 2018	1228,50263
mercoledì 7 novembre 2018	1224,346029
giovedì 8 novembre 2018	1220,613163
venerdì 9 novembre 2018	1219,596432
lunedì 12 novembre 2018	1213,263499
martedì 13 novembre 2018	1220,767887
mercoledì 14 novembre 2018	1221,239902
giovedì 15 novembre 2018	1231,628506
venerdì 16 novembre 2018	1229,139863
lunedì 19 novembre 2018	1223,949232
martedì 20 novembre 2018	1212,126487
mercoledì 21 novembre 2018	1211,903848
venerdì 23 novembre 2018	1201,536853
lunedì 26 novembre 2018	1206,411975
martedì 27 novembre 2018	1205,159392
mercoledì 28 novembre 2018	1212,711016
giovedì 29 novembre 2018	1218,853099
venerdì 30 novembre 2018	1223,030916
lunedì 3 dicembre 2018	1209,701942
martedì 4 dicembre 2018	1203,612308
mercoledì 5 dicembre 2018	1198,545772
giovedì 6 dicembre 2018	1189,109059
venerdì 7 dicembre 2018	1194,046701
lunedì 10 dicembre 2018	1190,184244
martedì 11 dicembre 2018	1189,541611
mercoledì 12 dicembre 2018	1199,965584
giovedì 13 dicembre 2018	1198,531644
venerdì 14 dicembre 2018	1192,26429
lunedì 17 dicembre 2018	1187,849569
martedì 18 dicembre 2018	1187,663262
mercoledì 19 dicembre 2018	1178,236774
giovedì 20 dicembre 2018	1190,461082
venerdì 21 dicembre 2018	1184,494405
mercoledì 26 dicembre 2018	1183,149567
giovedì 27 dicembre 2018	1186,48138
venerdì 28 dicembre 2018	1173,68449

Volendo tracciare un grafico completo che rappresenti l'andamento dei prezzi rilevati in tabella [24] e dei prezzi simulati in tabella [25] si otterrebbe un grafico come segue:

Grafico n.**4** – Andamento futuro Gold PM



Il grafico non è in contrasto con le ipotesi formulate nel paragrafo [4.1], in quanto è evidente una tendenza ribassista. In tutte le prove effettuate, resta la convinzione che il titolo, sulla base delle simulazioni e delle considerazioni del paragrafo precedente si attesterà su dei valori medi inferiori rispetto a quelli registrati nei mesi precedenti. Se si vuole effettuare un test basta rilevare i **prezzi effettivi** che Gold PM ha registrato nelle prime 12 sedute di borsa del mese di settembre[48]e confrontarli con quelli ottenuti con la simulazione. In queste sedute è stato rilevato il **valore medio[49]** (su base 12 gg) inferiore rispetto a qualsiasi valore medio mensile dell'anno 2018.

3.3 Arbitraggio su Future Gold dec 2018 (NGV8)

[48] I dati sono consultabili sul sito http://www.kitco.com/scripts/hist_charts/yearly_graphs.plx

[49] 1200,04$ rispetto ai 1201,25$ del mese di agosto 2018 e 1238,53$ del mese di luglio.

La tabella [27], esprime un tipico contratto future negoziabile sui mercati. I dati sono stati estrapolati dal sito http://www.investing.com.

Tabella n.**27** – Contratto Future Gold (NGV8)

CONTRATTO FUTURE	
Prezzo chiusura	$1205,7
scadenza	27/12/2018
prev.close	$1205,8
open	$1260,1
day's range	$1200,30-$1207,80
52 week range	$1161,4-$1365,4
1 year change	-8,97%
unit	1 oz
contract	100
DATA RILEVAZIONE 18/9/2018	

L'unità di misura con la quale viene scambiato l'oro è l'oncia, che equivale a circa 28,34 gr. Ogni contratto future ha un volume di scambio, questo preso ad esempio vale per 100 unità. Significa che alla scadenza chi ha acquistato questo contratto riceverà (in realtà liquiderà la posizione opposta) 2,834 kg di oro a fronte di un esborso di $12.0570. Per semplicità della trattazione considereremo il contratto future come unitario, ossia che si possa scambiare anche solo una unità di oncia di oro.

Come per il paragrafo [3.2] è stato simulato un andamento del prezzo del future dell'oro, non si ripetono i passaggi che sono identici a quelli già affrontati, si riporta solamente la tabella con i prezzi attesi.

Tabella n.**28** – Prezzi attesi future Gold $ 4/9/2018 al 26/9/2018

Data	Prezzi futures attesi ($)
martedì 4 settembre 2018	1205,013231
mercoledì 5 settembre 2018	1204,015015
giovedì 6 settembre 2018	1208,807933
venerdì 7 settembre 2018	1194,020041
lunedì 10 settembre 2018	1191,197228
mercoledì 12 settembre 2018	1207,849633
giovedì 13 settembre 2018	1220,562114
venerdì 14 settembre 2018	1229,02748
lunedì 17 settembre 2018	1217,124169
martedì 18 settembre 2018	1209,485304
mercoledì 19 settembre 2018	1203,806932

giovedì 20 settembre 2018	1210,195028
venerdì 21 settembre 2018	1211,082616
lunedì 24 settembre 2018	1217,00036
martedì 25 settembre 2018	1219,724238
mercoledì 26 settembre 2018	1213,605128

Nel capitolo [2.3] si è affermato che se il fair value del contratto future è diverso dal prezzo di consegna concordato all'istante t, allora è possibile un arbitraggio. Riassumendo esiste opportunità di arbitraggio (al lordo di qualsiasi costo di immagazzinamento o di intermediazione) se:

$FV_t \neq K_t$, dove :

- $FV_t = S_t(1+i)\hat{}(\frac{T-t}{365})$ è prezzo del futures che è pari al prezzo del sottostante investito oggi, fino al termine del future[50], ad un tasso risk free i e deve essere pari al prezzo di consegna pattuito in t.;
- K_t è il prezzo di consegna.

In particolare, se $FV_t < K_t$ si parla di arbitraggio di tipo **cash and carry** che consiste nell'acquistare a pronti il bene sottostante S_t (ricorrendo al debito) e nella contemporanea vendita a pronti il future al prezzo di consegna K_t.

Il profitto sarà pari a:

$\pi = K_t - S_t(1+i)\hat{}(\ \ T - t/365)$

Se $FV_t > K_t$, si prospetterebbe un'opportunità di arbitraggio c.d. rischioso, poiché si dovrebbe eseguire una vendita allo scoperto del bene sottostante (il rischio di questa operazione è già stata affrontata nel paragrafo [1.4]) e un contemporaneo acquisto del future al prezzo di consegna K_t. Questa tipologia di arbitraggio prende il nome di **reverse cash and carry**.

$$\pi = S_t(1+i)\hat{}(\ \ T - t/365) - K_t$$

Per il tasso di interesse i si utilizzerà il rendimento dell'ultima asta sui Bot disponibile sul sito del MEF con un i pari a 0,243%.

[50] N.B il fair value deve valere per ogni istante temporale intermedio tra t epoca di investimento e T epoche di disinvestimento, se così non fosse sarebbe comunque possibile effettuare un arbitragio.

Di seguito si riporta la tabella che indica il fair value per ogni valore del sottostante simulato in precedenza con il metodo Monte Carlo. La terza colonna (Test) si riferisce alla possibilità di effettuare un arbitraggio del tipo *cash and carry* indicata con "1" e con "0" i casi in cui è possibile effettuare un arbitraggio del tipo *reverse cash and carry*.

Tabella n.**29-** Fair value sottostante e test per verifica arbitraggio

VERIFICA VIOLAZIONE PRINCIPIO DI NON ARBITRAGGIO			
FVT		KT	Test
1211,057764	martedì 4 settembre 2018	1205,013231	0
1202,462799	mercoledì 5 settembre 2018	1204,015015	1
1198,864324	giovedì 6 settembre 2018	1208,807933	1
1204,783297	venerdì 7 settembre 2018	1194,020041	0
1215,909959	lunedì 10 settembre 2018	1191,197228	0
1222,284011	mercoledì 12 settembre 2018	1207,849633	0
1221,672125	giovedì 13 settembre 2018	1220,562114	0
1218,329715	venerdì 14 settembre 2018	1229,02748	1
1216,131388	lunedì 17 settembre 2018	1217,124169	1
1215,358265	martedì 18 settembre 2018	1209,485304	0
1218,451032	mercoledì 19 settembre 2018	1203,806932	0
1203,45869	giovedì 20 settembre 2018	1210,195028	1
1211,1155	venerdì 21 settembre 2018	1211,082616	0
1215,350015	lunedì 24 settembre 2018	1217,00036	1
1224,556123	martedì 25 settembre 2018	1219,724238	0
1222,178399	mercoledì 26 settembre 2018	1213,605128	0

La precedente tabella dimostra che alla scadenza il principio di non arbitraggio non è rispettato quindi è possibile un arbitraggio. Per verificare se esiste o meno profitto di arbitraggio bisogna riportare i profitti conseguibili dal tempo T al tempo 0.

Tabella n.**30-** Profitto di arbitraggio del tipo "1"

Caso Fv<K cash and carry			
Data	S_0	K_0	Π ($)
5/9/2018	-1.201,56	1.203,11	1,55
6/9/2018	-1.197,97	1.207,91	9,94
14/9/2018	-1.217,49	1.228,18	10,69
17/9/2018	-1.215,31	1.216,31	0,99
20/9/2018	-1.202,67	1.209,41	6,73
24/9/2018	-1.214,59	1.216,24	1,65

Tabella n.**31** – Profitto di arbitraggio del tipo “0”

Caso Fv>K reverse cash and carry			
Data	S_0	K_0	Π ($)
4/9/2018	1.210,14	-1.204,10	6,04
7/9/2018	1.203,89	-1.193,14	10,76
10/9/2018	1.215,04	-1.190,34	24,69
12/9/2018	1.221,42	-1.207,00	14,42
13/9/2018	1.220,82	-1.219,71	1,11
18/9/2018	1.214,55	-1.208,68	5,87
19/9/2018	1.217,65	-1.203,01	14,63
21/9/2018	1.210,33	-1.210,30	0,03
25/9/2018	1.223,80	-1.218,97	4,83
26/9/2018	1.221,43	-1.212,86	8,57

Si ottengono dei profitti che vanno dall’ordine di una unità di euro fino a diverse decine di euro. Tutti questi valori devono essere contestualizzati, non si è tenuto conto dei costi di consegna, di deposito e della remunerazione al broker. Come anticipato ad inizio di paragrafo, il contratto future (NGV8) comprende un volume di acquisto di 100 attività sottostanti, il cui prezzo reale alla consegna è pari a 12.250€ circa. Non tutti gli investitori privati possono permettersi tali operazioni, che per altro alle volte si presentano in una finestra temporale molto limitata. Nel paragrafo [2.4.3] si è già parlato del legging-in-risk ossia del rischio che i meccanismi della domanda e dell’offerta riportino il fair value all’equilibrio. Tutte queste considerazioni fanno supporre che i soggetti che possano individuarle e successivamente profittarne siano investitori pubblici, e non singoli investitori privati che potrebbero incorrere in costi “sommersi” o tempo limitato per compiere le operazioni, che trasformerebbero un profitto certo in una perdita probabile.

Bibliografia

Alemanni B., Anolli M., Cornett M. M. e Saunders A. (2015) *Economia dei mercati e degli intermediari finanziari* McGraw-Hill pp. 456 e ss

Barone G. (2012), *Arbitragggi e algebra di Garman* create space pp. 8-17

Bacon F. W. E Klock S. A. (2014*) The january effect: a test of market efficency*, Annual conference: Las Vegas volume 21 n.1 pp.423-434

Bajo E. e Petracci B. (2006) *Do what insidiers do. Abnormal perfomances after the release of insidiers. Relevan transaction* Studies in economic and finance vol 23 n.2 pp 94-188

Bernoulli D. (1954) *Exposition of a new theory on the measurement of risk* Econometrica Journal of economic society vol 22 n.81 pp 23-26

Bhabra H., Dillon U. e Ramirez G. (1999) *A november effect? Revisiting the tax-loss -selling Hypothesis* Financial Management, vol.28 pp 5-15

Bortot P., Magnami U., Olivieri G., Rossi F.A. e Torrigiani M. (1998) *Matematica finanziaria* Monduzzi editore p 3-7 e pp 7-13

Capparelli F. (1986) *Una verifica empirica nell'ipotesi di efficinze debole del mercato di borsa* sezione in Risparmio n.34 p 235-268.

Carmona R. Tehranchi M. (2006) *Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis prespective* Springer finance p.29

Fersini P. e Olivieri G (2015). *Sull"anatocismo" nell'ammortamento francese* rivista della associazione nazionale banche private p.134-170

Gurel E., Harris L. (1986) Price and volume effects associated with changes in the S&P500 list: new evidence for the existence of price pressure. The journal of the american finance association volume 41. n.4 p 815-829

Kendall M. G. (1953) *The analysis of economic time-series, part 1. Prices* Journal of the royal statistical society n.96 pp 11-25

Murigia M. (1990) *L'annuncio dei dividendi nel mercato azionario italiano*. Centro di ricerche finanziarie gruppo IMI p 14

Pascucci A. (2008) Calcolo stocastico per la finanza Milano Springer pp 15-18 e pp.14-16

Rubisten M. (2005) Derivati: Futures, opzioni e strategie dinamiche pubblished by Rirk books, a division of risk pubblications pp 28-36 e pp. 215-283

Vipul (2009) *Box spread arbitrage, efficency of Nifty index: options the indian evidence* The journal of futures markets vol. 29 no.6 pp 544-562

Sitografia

https://www.borsaitaliana.it/homepage/homepage.htm
http://www.consob.it/
https://web.uniroma1.it/economialt/sites/default/files/MATEMATICA%20FINANZIARIA%208.%20CENNI%20DI%20TEORIA%20DELLE%20OPZIO
teoria stocastica.pdf
serie storica.pdf