LUISS

Dipartimento
di Economia e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

Tecniche di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi e applicazioni su Python 3.7

Prof. Gennaro Olivieri
RELATORE

Marco Di Bartolo
CANDIDATO

Anno Accademico 2018/2019

INDICE

INTRODUZIONE

Questo elaborato ha l'obiettivo di guidare il lettore verso la comprensione delle stock options, delle loro caratteristiche e funzionalità, e dei concetti cardine alla base delle moderne tecniche di pricing delle stesse.

Inizialmente verranno introdotte le opzioni, con una panoramica sul loro funzionamento, il loro valore, le posizioni assumibili sulle stesse, i mercati in vengono negoziate e le diverse tipologie delle stesse. Successivamente verranno introdotti i processi stocastici, argomento chiave per la comprensione del pricing dei derivati. Ne studieremo le varie tipologie e caratteristiche, e vedremo come essi possono guidare i prezzi delle azioni. A questo punto cominceremo a parlare del pricing dei derivati introducendo il lemma di Ito, che ci permetterà, conoscendo i processi stocastici che guidano i prezzi delle azioni, di pervenire ai processi stocastici che guidano i prezzi dei derivati. Dopo aver costruito tali fondamenta per la comprensione dell'argomento, introdurremo i due concetti più importanti per il pricing dei derivati: l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton e il principio della valutazione neutrale verso il rischio. Fatto ciò, entreremo nell'ambito di nostro stretto interesse, il pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi. A tal fine perverremo al metodo più utilizzato da investitori e analisti di mercato: le formule di Black-Sholes-Merton. In seguito, analizzeremo due metodi alternativi per il pricing delle stock options: il metodo binomiale e il metodo di Monte Carlo, e ne studieremo le caratteristiche, le relazioni con il metodo di Black-Sholes-Merton e i limiti. Successivamente parleremo delle greche, le sensitivities dei prezzi delle opzioni, e ne studieremo i comportamenti, le relazioni reciproche e i metodi di calcolo.

In conclusione, tratteremo l'implementazione di tutto ciò su Python 3.7 e osserveremo operativamente e graficamente il funzionamento di tali metodi di pricing.

CAPITOLO 1: PANORAMICA SULLE OPZIONI

Un'opzione è un contratto derivato che conferisce al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere un'attività sottostante a un prezzo e per un periodo di tempo prefissati.

Le opzioni si distinguono in opzioni americane e in opzioni europee. Le prime conferiscono al possessore il diritto di acquistare o vendere l'attività sottostante in un qualsiasi momento sia prima della scadenza che a scadenza, mentre le seconde conferiscono il diritto di acquistare o vendere l'attività sottostante solamente a scadenza.

Le opzioni si suddividono ulteriormente in opzioni call e opzioni put. Le prime conferiscono al possessore il diritto di acquistare il sottostante a un prezzo determinato, denominato strike price, dietro pagamento al venditore di un premio call in anticipo. Le seconde invece conferiscono al possessore il diritto di vendere il sottostante allo strike price, dietro pagamento di un premio put in anticipo. Gli operatori che assumono posizione lunghe (di acquisto) su opzioni call e put hanno aspettative sull'andamento futuro del valore del sottostante speculari. In particolare, l'acquisto di un'opzione call è una scelta conveniente qualora si abbia delle aspettative rialziste, mentre l'acquisto di una opzione put è una scelta conveniente qualora si abbia aspettative ribassiste.

Giunte a scadenza le opzioni possono essere in tre differenti stati:

- In the money:

  Per un'opzione call, quando il valore del sottostante è superiore allo strike price.

  Per un'opzione put, quando il valore del sottostante è inferiore allo strike price.

- At the money:

  Per entrambi i tipi di opzione, quando il valore del sottostante uguaglia lo strike price.

- Out of the money:

  Per un'opzione call, quando il valore del sottostante è inferiore allo strike price.

  Per un'opzione put, quando il valore del sottostante è superiore allo strike price.

Pertanto, gli acquirenti di un opzione call o put eserciteranno il diritto rispettivamente di acquisto o di vendita del sottostante solo qualora l'opzione sia in the money, essendo questo l'unico scenario che li consente un payoff positivo e pari al valore dell'opzione nel momento in cui questa giunge a scadenza.

1.1. FATTORI CHE INFLUENZANO I PREZZI DELLE OPZIONI

I fattori che influenzano i prezzi delle opzioni sono i seguenti:

- Valore corrente del sottostante, S_0.
- Strike price, K.
- Vita residua, T.
- Volatilità del valore del sottostante, σ.
- Tasso d'interesse risk-free, r.
- Dividendi, cedole e altri flussi finanziari attesi durante la vita dell'opzione, il cui valore attuale è D.

  Nel calcolo di D si assume che i dividendi, le cedole e gli altri flussi finanziari vengano pagati nei giorni di stacco.

  Con riguardo a tali determinanti, il prezzo di un'opzione aumenterà (diminuirà) se:
- Nel caso di un'opzione call:
  - All'aumentare (diminuire) di σ.
  - All'aumentare (diminuire) di T.
  - All'aumentare (diminuire) di r.
  - All'aumentare (diminuire) di S_0.
  - Al diminuire (aumentare) di D.
  - Al diminuire (aumentare) di K.
- Nel caso di un'opzione put:
  - All'aumentare (diminuire) di σ.
  - All'aumentare (diminuire) di T.
  - Al diminuire (aumentare) di r.

- Al diminuire (aumentare) di S_0.
- All’aumentare (diminuire) di D.
- All’aumentare (diminuire) di K.

1.2. VALORE INTRINSECO E VALORE TEMPORALE DI UN’OPZIONE

Il prezzo di un’opzione ha due componenti, il suo valore intrinseco e il suo valore temporale.

Il valore intrinseco di un’opzione è:

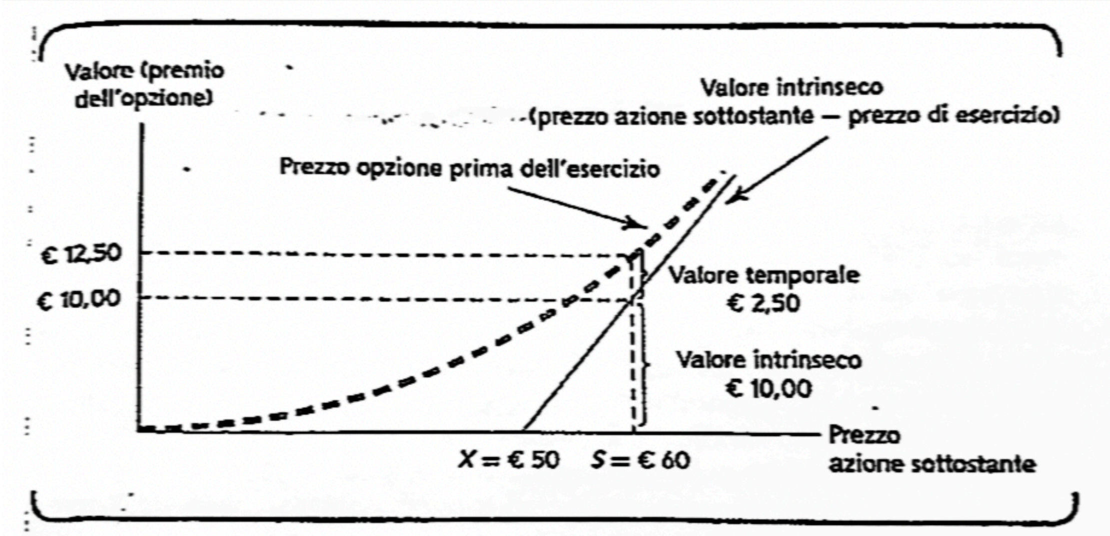
- Nel caso di un’opzione call:
  $\max[S_0 - K, 0]$
- Nel caso di un’opzione put:
  $\max[K - S_0, 0]$

Il valore intrinseco di un’opzione sarà positivo quando essa è in the money, nullo quando essa è at the money e negativo quando essa è out of the money.

Il valore temporale di un’opzione è rappresentativo della probabilità che il suo valore intrinseco aumenti nel tempo. Esso è dato per entrambi i tipi di opzione dalla differenza tra il prezzo dell’opzione, ovvero il premio da pagare anticipatamente per poterla acquistare, e il suo valore intrinseco. La funzione del valore temporale come componente del prezzo di un’opzione è proprio quella di assicurare che anche le opzioni out of the money e at the money possano essere negoziati a prezzi positivi all’interno del mercato. Infatti, gli operatori valutano la possibilità che il valore intrinseco dell’opzione, sebbene negativo o nullo al momento dell’acquisto, possa incrementare nel tempo, rendendo l’opzione in the money.

Con l’avvicinarsi dell’opzione a scadenza il valore temporale della stessa tende a zero e il suo valore intrinseco tende al prezzo dell’opzione.

Graficamente è qui rappresentato l'andamento del valore intrinseco e del valore temporale di un'opzione al variare del valore dell'attività sottostante:



(*cercare * in bibliografia*)

Con riguardo al valore intrinseco e al valore temporale di un'opzione, per le opzioni americane è dimostrabile che l'esercizio anticipato è conveniente solo quando il valore intrinseco dell'opzione è maggiore del suo prezzo, ovvero quando il suo valore temporale è negativo. Tale fattispecie non si verifica mai nel caso di una call americana avente come sottostante un titolo che non paga dividendi, e pertanto, non è mai conveniente il suo esercizio anticipato.

1.3. FINALITA' DELLE OPZIONI

Gli investitori possono compiere operazioni su opzioni con diversi obiettivi, tra i quali:

- Fini di copertura dai rischi (hedging): proteggere il valore di una posizione neutralizzando le variazioni indesiderate dei prezzi di mercato.
- Fini speculativi: attuare strategie finalizzate a realizzare un profitto basato sull'evoluzione attesa del valore dell'attività sottostante.
- Fini di arbitraggio: sfruttare un momentaneo disallineamento tra l'andamento del prezzo del derivato e quello del sottostante (destinati a coincidere all'atto della scadenza del

contratto), vendendo lo strumento sopravvalutato e acquistando quello sottovalutato e ottenendo un profitto privo di rischio.

1.4. MERCATI DI OPZIONI

Le opzioni possono essere negoziate all'interno di mercati regolamentati, come l'IDEM italiano o il Chicago Board Options Exchange (CBOE) statunitense, o in mercati over-the-counter.

In genere, come anche per gli altri derivati, nei mercati over-the-counter vengono negoziate opzioni più "esotiche", come per esempio le credit option.

Un mercato regolamentato per le opzioni, come per i titoli derivati in genere, può prendere la forma di un trading pit o di un mercato elettronico. Il funzionamento di un trading pit prevede che gli operatori si incontrino all'interno di un floor per compiere le varie negoziazioni secondo il meccanismo dell'asta gridata. Il funzionamento di un mercato elettronico, come quello dell'IDEM italiano, non prevede invece un luogo fisico per far incontrare gli intermediari, ma la possibilità che si incontrino in via telematica.

Nel mercato regolamentato delle opzioni solo gli intermediari accreditati sono autorizzati a effettuare le transazioni e pertanto le varie negoziazioni provenienti dal pubblico devono transitare da un floor broker, un dealer, o un market maker, specializzato nell'opzione oggetto della transazione. L'investitore deve pertanto effettuare le sue negoziazioni con l'ausilio di un intermediario, inviando a quest'ultimo i suoi ordini. Gli ordini trasmessi dall'investitore all'intermediario possono essere "ordini di mercato", in cui l'intermediario effettua la transazione al miglior prezzo disponibile, o "ordini con limite di prezzo", in cui all'intermediario viene dato un prezzo massimo in caso di assunzione di una posizione lunga o un prezzo minimo in caso di assunzione di una posizione corta. Per chiudere una propria posizione all'investitore basterà inviare al suo intermediario un ordine di segno opposto <<offsetting order>>.

Nel mercato regolamentato delle opzioni operano le clearing houses o camere di compensazione. Queste ultime, ogni volta che si conclude una transazione, ricevono elettronicamente i dettagli della stessa e provvedono a scomporla in una transazione in acquisto e una in vendita, assumendo il ruolo di controparte di entrambi i soggetti coinvolti nell'operazione. La clearing house, come nel caso dei futures, ha il ruolo di garantire che i pagamenti vengano effettuati tra le due parti, accollandosi i relativi rischi di controparte e di insolvenza.

Nel mercato delle opzioni, come nel caso del CBOE, possono essere imposti un "position limit" e un "exercise limit". Il primo è definito dal numero massimo di opzioni dello stesso segno che un investitore può possedere in portafoglio. A tal fine si considerano dello stesso segno calls lunghe e puts corte o calls corte e puts lunghe. Il secondo, che di solito è uguale al position limit, è definito dal numero massimo di opzioni dello stesso segno che un individuo (o un gruppo di individui che agiscono insieme) può esercitare in 5 giorni lavorativi consecutivi. Tali limiti sono stati introdotti per evitare che il mercato venga indebitamente influenzato dall'attività di un singolo investitore o di un gruppo di investitori.

Al fine di agevolare gli scambi, la maggior parte delle borse utilizza un sistema di market makers. Il market maker ha la funzione di assicurare che gli ordini di acquisto e di vendita vengano eseguiti senza ritardi e di far incontrare nel mercato acquirenti e venditori, ponendosi come controparte di entrambi e garantendo così la liquidità del mercato. Ogni volta che gli sia richiesto, il market maker di una certa opzione quota un prezzo <<denaro>> (bid) e un prezzo <<lettera>> (ask) per l'opzione. Il prezzo denaro è il prezzo al quale il market maker è disposto a comprare e il prezzo lettera è il prezzo al quale il market maker è disposto a vendere. Al fine di ottenere un profitto, la lettera è quotata più alta del denaro e la differenza tra le due quotazioni è chiamata bid-ask spread. Al fine di garantire il corretto funzionamento del mercato le borse impongono dei limiti superiori ai bid-ask spreads.

In conclusione, per i motivi sopra visti, il mercato delle opzioni è altamente liquido, ovvero caratterizzato da un gran numero di transazioni per unità di tempo.

1.5. POSIZIONI ASSUMIBILI SULLE OPZIONI

Sulle opzioni è possibile assumere sia posizioni lunghe che posizioni corte, essendoci quindi quattro possibili scenari di acquisto o vendita di calls o puts. Ciascuno dei quattro scenari presenta delle proprie caratteristiche in termini di payoff potenziale e break-even point, ovvero prezzo del sottostante in corrispondenza del quale non si hanno né profitti né perdite con conseguente payoff nullo.

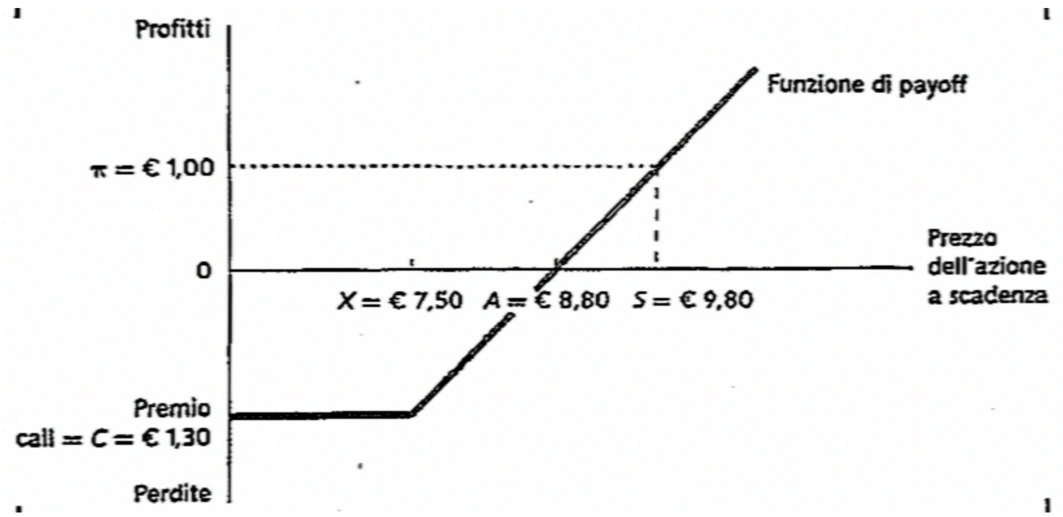
Analizzeremo qui ciascuno di tali possibili scenari:

1.5.1. LUNGA SU CALL

L'assunzione di una posizione lunga su un'opzione call può portare a profitti potenzialmente infiniti e perdite limitate al valore del premio call pagato anticipatamente. In tale scenario il break-even point è dato dalla somma dello strike price e del premio call capitalizzato fino alla data di scadenza. Tale operazione ha un senso finanziario qualora:

- Si attende un rialzo del titolo sottostante.
- Si desidera limitare la perdita massima al premio pagato.
- Si desidera bloccare il prezzo d'acquisto del titolo sottostante.

Graficamente è qui riportato il payoff dell'acquisto di un'opzione call:



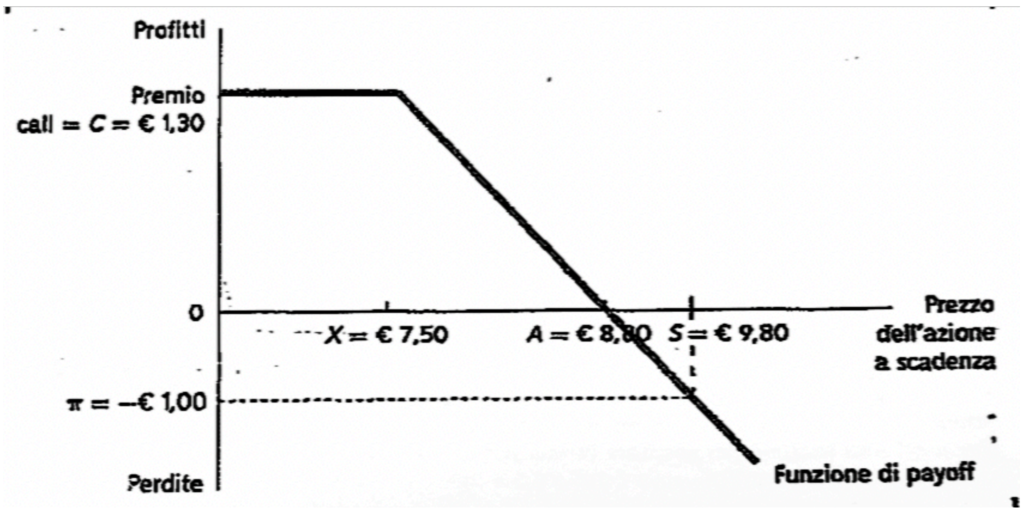
(*cercare * in bibliografia*)

1.5.2. CORTA SU CALL

Con la vendita di un'opzione call, il venditore, a fronte di un premio call ricevuto anticipatamente dall'acquirente dell'opzione, si dichiara disponibile a vendergli l'azione sottostante allo strike price. L'assunzione di una posizione corta su un'opzione call può portare a perdite potenzialmente infinite e profitti limitati al valore del premio call incassato anticipatamente. In tale scenario il break-even point è dato dalla somma dello strike price e del premio call capitalizzato fino alla data di scadenza. Tale operazione ha un senso finanziario qualora:

- Si attende un periodo di stabilità o diminuzione del prezzo del titolo sottostante.
- Si desidera aumentare il rendimento del portafoglio o ridurre il costo di acquisto del titolo sottostante.
- Si desidera assicurare un prezzo di vendita del titolo, incassando contemporaneamente un premio.

Graficamente è qui riportato il payoff della vendita di un'opzione call:



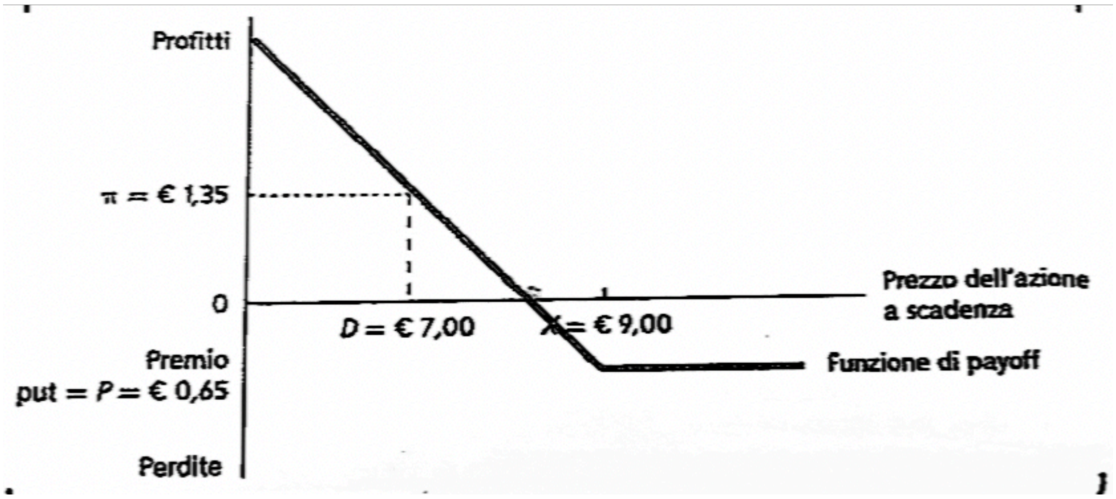
(*cercare * in bibliografia*)

1.5.3. LUNGA SU PUT

L'assunzione di una posizione lunga su un'opzione put può portare a perdite limitate al premio put pagato in anticipo e profitti potenzialmente elevati ma limitati alla differenza tra lo strike price e il premio put. In tale scenario il break-even point è uguale ai massimi profitti potenziali. Tale operazione ha un senso finanziario qualora:

- Si attende un ribasso del titolo sottostante.
- Si desidera limitare la perdita massima al premio pagato.
- Si desidera bloccare il prezzo di vendita del titolo sottostante.

Graficamente è qui riportato il payoff dell'acquisto di un'opzione put



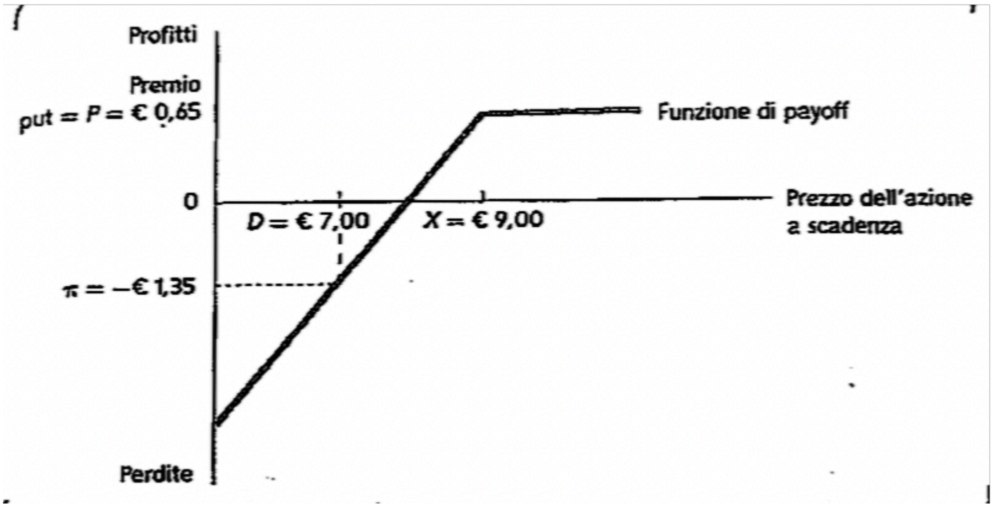
(*cercare * in bibliografia*)

1.5.4. CORTA SU PUT

Con la vendita di un'opzione put, il venditore, a fronte di un premio put ricevuto anticipatamente dall'acquirente dell'opzione, si dichiara disponibile ad acquistare da quest'ultimo l'azione sottostante allo strike price. L'assunzione di una posizione corta su un'opzione put può portare a profitti limitati al valore del premio put incassato anticipatamente e perdite potenzialmente elevate ma limitate alla differenza tra lo strike price e il premio put incassato anticipatamente. In tale scenario il break-even point è uguale alle massime perdite potenziali. Tale operazione ha un senso finanziario qualora:

- Si attende un periodo di stabilità o aumento del prezzo del titolo sottostante.
- Si desidera aumentare il rendimento del portafoglio.
- Si desidera bloccare il prezzo di acquisto del titolo sottostante.

Graficamente è qui riportato il payoff della vendita di un'opzione put:



(*cercare * in bibliografia*)

Come sopra riportato, sia chi acquista una call che chi vende una put ha aspettative rialziste sul prezzo del sottostante. Un operatore deciderà di vendere una put qualora si aspetti un rialzo di modeste entità, mentre opterà per l'acquisto di una call qualora si aspetti un rialzo di sostanziosa entità. Specularmente, sia chi acquista una put che chi vende una call ha aspettative ribassiste sul prezzo del sottostante. Un operatore deciderà di vendere una call qualora si aspetti un ribasso di modeste entità, mentre opterà per l'acquisto di una put qualora si aspetti un ribasso di sostanziosa entità.

1.6. TIPOLOGIE DI OPZIONI

Le opzioni possono essere suddivise in varie tipologie a seconda della natura del loro sottostante, del metodo di calcolo del payoff e altre variabili. Essendo le opzioni un derivato negoziato anche nei mercati over-the-counter, le controparti di un contratto di opzione possono regolare privatamente le caratteristiche dello stesso, rendendo i tipi di opzione un insieme aperto.

Qui ne verranno presentate alcune principali tipologie suddivise in due macro-raggruppamenti: le opzioni plain vanilla e le opzioni esotiche.

Le opzioni plain vanilla possono essere raggruppate in:

- Spot options, che a loro volta possono essere raggruppate in:
  - Stock options
  - Currency options
  - Stock index options
- Futures options

1.6.1. OPZIONI PLAIN VANILLA

Per opzioni plain vanilla si intende opzioni con caratteristiche prestabilite che non prevedono possibilità di personalizzazione a seconda delle esigenze delle controparti. Le opzioni plain vanilla sono pertanto contratti standard e molto meno complesse delle opzioni esotiche.

Le opzioni plain vanilla possono essere raggruppate in: spot options e futures options.

1.6.1.1 SPOT OPTIONS

Le spot options sono delle opzioni che danno al possessore il diritto di comprare o vendere a pronti un'attività sottostante entro una certa data, a un certo prezzo. Esse vengono così denominate perché, se esercitate, consentono l'acquisto o la vendita immediata del sottostante.

Le spot options possono essere raggruppate in: stock options, currency options e stock index options.

1.6.1.1.1. STOCK OPTIONS

Le stock options sono delle opzioni con la caratteristica di avere come sottostante un'azione di una società quotata in borsa. Esse danno il diritto al loro possessore di comprare o vendere l'azione sottostante ad un determinato prezzo. Ciascuna opzione si riferisce a un quantitativo standard di azione sottostante e vi possono essere diverse opzioni aventi come sottostante la stessa azione. In Italia le opzioni che vengono negoziate sul mercato telematico IDEM sono di tipo americano. A scadenza, il possessore di una stock option può liquidare il suo contratto di opzione con l'acquisto o la vendita effettiva del sottostante o con un cash-settlement, regolando in denaro la differenza tra il prezzo dell'azione e lo strike price.

1.6.1.1.2. CURRENCY OPTIONS

Le currency options sono una tipologia di opzione il cui sottostante è una certa quantità di valuta. Le currency options vengono negoziate soprattutto nei mercati over-the-counter e possono essere utilizzate per le finalità sopra descritte. In particolare, è possibile compiere operazioni in currency options a fini di hedging contro il rischio di cambio, o a fini speculativi per realizzare strategie di investimento basate sulle proprie previsioni sull'andamento della valuta sottostante, o a fini di arbitraggio per sfruttare un momentaneo disallineamento tra l'andamento della valuta sul mercato derivato e l'andamento sul mercato a pronti.

1.6.1.1.3. STOCK INDEX OPTIONS

Le stock index options sono una tipologia di opzione il cui sottostante è il valore di un indice di mercato azionario, in Italia il più utilizzato è il FTSE MIB. A differenza di una stock option, a scadenza il possessore di una stock index option non può liquidare il suo contratto di opzione con l'acquisto o la vendita effettiva del sottostante, ma bensì con un cash-settlement. Le stock index options consentono agli operatori di mercato di investire indirettamente in un portafoglio diversificato che replica il comportamento di un indice di mercato e quindi equivalgono a un investimento in un determinato mercato. Gli indici sono espressi in punti e il valore monetario di una stock index option è pari al valore dell'indice moltiplicato per un particolare moltiplicatore deciso dal mercato ove la stessa è negoziata. Le stock index options possono essere utilizzate per finalità di hedging contro le potenziali perdite che potrebbe subire un portafoglio azionario in essere. In tal modo ogni eventuale perdita su tale portafoglio può essere compensata da un profitto sulla pozione assunta in stock index options.

1.6.1.2. FUTURES OPTIONS

Le futures options si differenziano dalle spot options perché, qualora esercitate, consentono l'acquisto o la vendita dell'attività sottostante a una data futura e a un prezzo concordato. Un'opzione call su futures dà al possessore la facoltà, qualora esercitata, di ricevere una posizione lunga sul futures sottostante più un importo in denaro pari alla differenza tra l'ultimo <<prezzo futures di liquidazione>> (settlement futures price) e il prezzo d'esercizio della call. Invece, un'opzione put su futures dà al possessore la facoltà, qualora esercitata, di ricevere una posizione corta sul futures sottostante più un importo in denaro pari alla differenza tra il prezzo d'esercizio della put e l'ultimo settlement futures price. In genere le futures options sono americane.

1.6.2. OPZIONI ESOTICHE

La categoria delle opzioni esotiche fa riferimento a tutti i contratti di opzione in cui il calcolo del payoff presenta elementi di novità rispetto alle opzioni plain vanilla. Questi contratti vengono negoziati nei mercati over-the-counter proprio a causa della mancanza di standardizzazione degli elementi contrattuali. Le opzioni esotiche possono venir create per diverse ragioni che possono riguardare mere esigenze di copertura o anche fini speculativi e possono presentare caratteristiche di vario genere. Un esempio di opzioni esotiche sono le credit options.

Dopo aver introdotto alcune delle più importanti tipologie di opzioni, d'ora in avanti ci riferiremo sempre implicitamente alle stock options.

1.7. LIMITI SUPERIORI E INFERIORI DEI PREZZI DELLE OPZIONI

I prezzi delle opzioni sia europee che americane devono rispettare dei limiti superiori e inferiori affinché non esistano opportunità di profitto per gli arbitraggisti. I limiti in questione si basano su un'assunzione necessaria alla loro significatività, ovvero che il tasso d'interesse risk-free sia maggiore di zero ($r > 0$). Nella trattazione che segue chiameremo c il prezzo di una call europea, C il prezzo di una call americana, p il prezzo di una put europea e P il prezzo di una put americana.

1.7.1. LIMITI SUPERIORI

I limiti superiori dei prezzi delle opzioni sono i seguenti:

- Il prezzo di un'opzione call sia europea che americana non può superare il prezzo dell'azione sottostante:

  $c \leq S_0$ e $C \leq S_0$

  Se queste disuguaglianze non fossero rispettate un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto privo di rischio comprando l'azione e vendendo le calls.
- Il prezzo di un'opzione put americana non può superare lo strike price:

  $P \leq K$
- Il prezzo di un'opzione put europea non può superare il valore attuale dello strike price calcolato usando il tasso risk-free:

  $p \leq Ke^{-rT}$

  Se questa disuguaglianza non fosse rispettata un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto privo di rischio vendendo l'opzione e investendo il ricavato al tasso risk-free.

1.7.2. LIMITI INFERIORI

I limiti inferiori dei prezzi delle opzioni sono i seguenti:

- Il prezzo di un'opzione call europea avente come sottostante un titolo che non paga dividendi non può essere inferiore a $\max[S_0 - Ke^{-rT}, 0]$:

  $c \geq \max[S_0 - Ke^{-rT}, 0]$

Se questa disuguaglianza non fosse rispettata un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto privo di rischio comprando la call e vendendo l'azione.

- Il prezzo di un'opzione put europea avente come sottostante un titolo che non paga dividendi non può essere inferiore a max[Ke^{-rT} – S_0, 0]:

  p ≥ max[Ke^{-rT} – S_0, 0]

  Se questa disuguaglianza non fosse rispettata un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto privo di rischio comprando la put e vendendo l'azione.

- Il prezzo di un'opzione call europea avente come sottostante un titolo che paga dividendi non può essere inferiore a max[S_0 – D - Ke^{-rT}, 0]:

  c ≥ max[S_0 – D - Ke^{-rT}, 0]

- Il prezzo di un'opzione put europea avente come sottostante un titolo che paga dividendi non può essere inferiore a max[D + Ke^{-rT} – S0, 0]:

  p ≥ max[D + Ke^{-rT} – S_0, 0]

1.8. PUT - CALL PARITY

I prezzi di calls e puts europee devono rispettare una determinata relazione affinché non ci siano opportunità di arbitraggio tra le calls e le puts aventi come sottostante la stessa azione, la put-call parity.

Nel caso in cui l'opzione call e l'opzione put abbiano come sottostante un'azione che non paga dividendi la put-call parity è:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Qualora invece l'opzione call e l'opzione put abbiano come sottostante un'azione che paga dividendi la put-call parity è:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

La put-call parity è valida solo tra opzioni europee.

1.9. RELAZIONE TRA I PREZZI DI CALLS E PUTS AMERICANE

I prezzi di calls e puts americane devono rispettare una determinata relazione affinché non ci siano opportunità di arbitraggio tra le calls e le puts aventi come sottostante la stessa azione.

Nel caso in cui l'opzione call e l'opzione put abbiano come sottostante un'azione che non paga dividendi tale relazione è:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Qualora invece l'opzione call e l'opzione put abbiano come sottostante un'azione che paga dividendi tale relazione è:

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Per concludere la nostra panoramica sulle opzioni, esse sono un tipo di investimento caratterizzato da un forte effetto leva, in quanto, in contropartita al pagamento di un premio di modesta entità, le prospettive di profitto sono esponenzialmente molto più significative.

D'ora in poi ci occuperemo del pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi.

CAPITOLO 2: PROCESSI STOCASTICI

Al fine di poter comprendere le tecniche di pricing delle stock options europee è opportuno capire prima cosa governa l'andamento del prezzo di un'azione, il principale determinante del prezzo di una stock option. Per far ciò è necessario introdurre i processi stocastici.

Un processo stocastico è il meccanismo che governa l'evoluzione nel tempo di una variabile aleatoria. I processi stocastici possono essere classificati in processi <<a tempo discreto>> e processi <<a tempo continuo>>. Nei processi a tempo discreto il valore della variabile può cambiare solo a istanti prefissati, mentre nei processi a tempo continuo esso può cambiare continuamente. Inoltre, i processi stocastici possono essere classificati in processi <<a variabile discreta>> e processi <<a variabile continua>>. Nei processi a variabile discreta la variabile osservata può assumere solo alcuni valori discreti, mentre nei processi a variabile continua essa può assumere qualsiasi valore nel suo campo di definizione.

In seguito ci riferiremo ai processi stocastici anche con il termine di <<random walks>>.

2.1. DRIFT RATE E VARIANCE RATE

Ciascun processo stocastico è caratterizzato da due tassi che determinano l'evoluzione della variabile aleatoria: il tasso di deriva atteso (drift rate) e il tasso di varianza (variance rate).

Il drift rate rappresenta la variazione attesa per unità di tempo della variabile aleatoria, mentre il variance rate rappresenta la varianza per unità di tempo della variabile aleatoria.

Noti il drift rate e il variance rate, prendendo in considerazione un intervallo di tempo T:

- La media delle variazioni della variabile aleatoria è: drift rate * T
- La varianza delle variazioni della variabile aleatoria è: variance rate * T
- La deviazione standard delle variazioni della variabile aleatoria è: √(variance rate * T)

Il drift rate connota la componente deterministica e la pendenza del processo stocastico stesso, mentre il variance rate connota la componente stocastica e la volatilità o il "rumore" del processo stocastico.

2.2. PROCESSI DI MARKOV

I processi di Markov rappresentano una categoria di processi stocastici con la peculiarità che le previsioni sul valore futuro della variabile aleatoria sono incerte ed espresse in termini di distribuzioni probabilistiche. Pertanto, al fine della loro stima, l'unico dato rilevante è il valore corrente della variabile aleatoria, non rilevando invece la storia passata della stessa e il modo in cui il presente è emerso dal passato.

I processi di Markov possono essere sia a tempo discreto che a tempo continuo, ma a questo punto di trattazione dell'argomento ci riferiremo solo a processi Markoviano a tempo discreto.

Prendendo in considerazione una variabile aleatoria z, il cui valore cambia di un ammontare pari a Δz in ogni piccolo intervallo di tempo Δt, essa seguirà un processo stocastico Markoviano qualora:

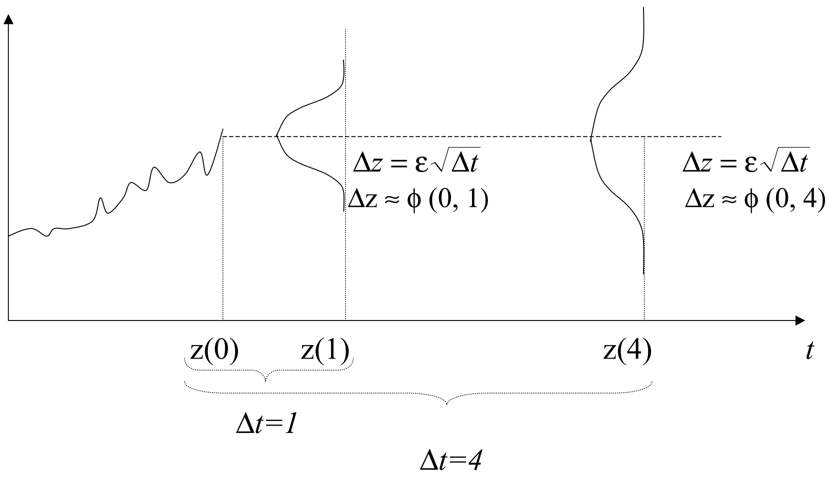
- $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale con media 0 e varianza Δt, $\varphi(0, \Delta t)$.
- I valori di Δz relativi a due periodi di tempo distinti sono indipendenti.

Per mostrare le ulteriori proprietà dei processi di Markov, prenderemo in considerazione un intervallo di tempo di lunghezza T e lo scomporremo in *n* piccoli intervalli di tempo ciascuno di lunghezza Δt. Imponendo a una variabile aleatoria z *n* processi Markoviani, ciascuno in ogni intervallo Δt e ognuno descritto con $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, si otterrà un unico grande processo di Markov composto dagli *n* processi di Markov più piccoli contigui tra di loro. Tale processo Markoviano, lungo tutto l'intervallo T, avrà le seguenti proprietà:

- La media della variazione della variabile aleatoria z è nulla: $n*E(\Delta z) = n*0 = 0$
- La varianza della variazione della variabile aleatoria z è T: $n*\sigma^2(\Delta z) = n*\Delta t = T$
- La deviazione standard della variazione della variabile aleatoria z è $\sqrt{T}$: $\sigma(\Delta z) = \sqrt{T}$

Da ciò ne consegue che, nei processi Markoviani, le medie e le varianze delle variazioni relative a intervalli di tempo contigui sono additive, mentre le deviazioni standard delle variazioni relative a intervalli di tempo contigui non sono additive.

Un esempio grafico di un processo di Markov è il seguente:



(*cercare + in sitografia*)

2.3. PROCESSI DI WIENER

I processi stocastici di Wiener rappresentano un particolare tipo di processi di Markov con la peculiarità di avere variazione media nulla e tasso di varianza unitario. Essi sono anche chiamati <<Moti Browniani>> e si ottengono trasferendo un moto Markoviano dal tempo discreto al tempo continuo, considerando incrementi temporali e della variabile aleatoria sempre più piccoli ($\Delta t \to 0$ e $\Delta z \to 0$). Il moto di una variabile aleatoria z così definito non è più esprimibile come $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, ma come $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ dove ε, come sotto verrà spiegato, ha un diverso significato rispetto a prima.

Formalmente, una variabile aleatoria z che segue un processo di Wiener dovrà soddisfare le seguenti proprietà:

- Gli incrementi dz della variabile aleatoria relativi a due periodi di tempo distinti sono indipendenti.
- Per ogni piccolo incremento temporale dt, $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$.
- Drift rate nullo.
- Variance rate unitario.

La prima proprietà implica che z segue un processo di Markov e un drift rate nullo implica che il valore atteso di z a ogni futuro istante di tempo è uguale al suo valore corrente. La seconda proprietà invece segna la differenza tra i processi di Markov in genere e quelli di Wiener, conseguente all'adattamento al tempo continuo: nei primi l'estrazione di ε avviene da una normale generica, $\varphi(0, \Delta t)$ e non necessariamente da una normale standardizzata, mentre nei secondi ε deve essere estratta da una normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$.

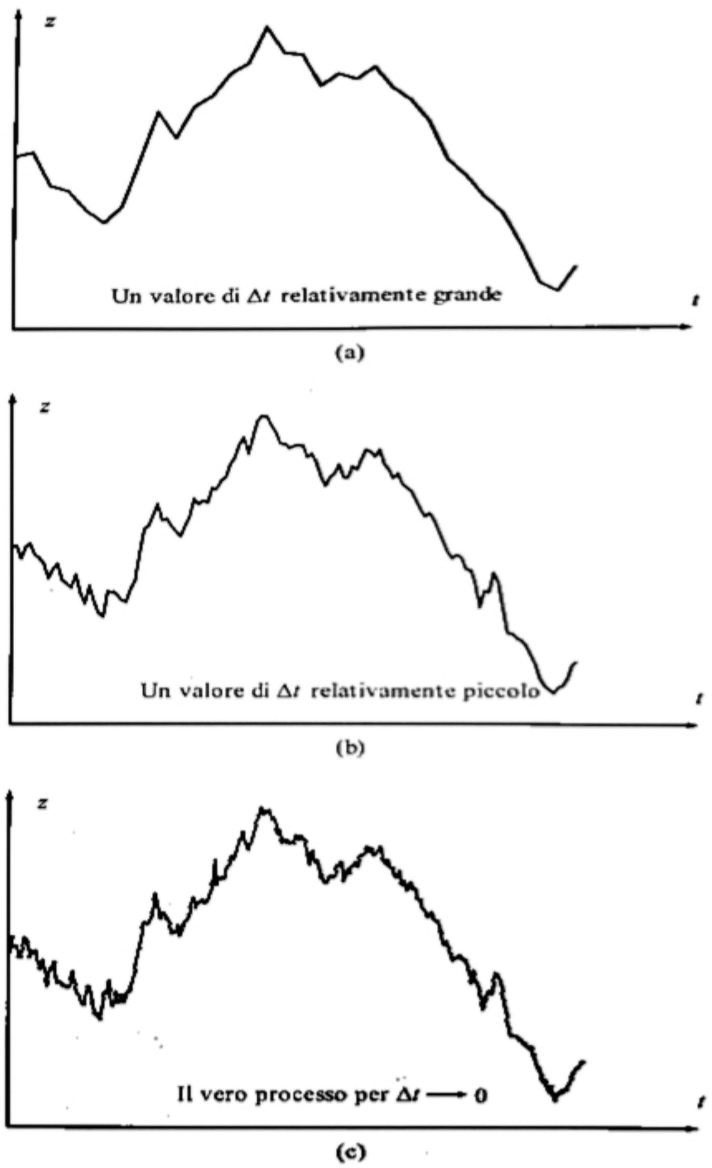
Tali proprietà dei processi di Wiener implicano che dz si distribuisce secondo una normale con media nulla e deviazione standard pari a $\sqrt{dt}$:

$$dz \sim \varphi(0, dt)$$

Inoltre, i processi di Wiener presentano due ulteriori proprietà. In un qualsiasi intervallo di tempo:

- Il valore atteso della lunghezza del sentiero seguito dalla variabile aleatoria è infinito.
- Il valore atteso del numero delle volte in cui la variabile aleatoria è uguale a un particolare valore è infinito.

Graficamente è qui riportato il passaggio dal tempo discreto al tempo continuo, fino all'ottenimento di un processo di Wiener:



(*cercare ^ in bibliografia*)

2.4. PROCESSI DI WIENER GENERALIZZATI

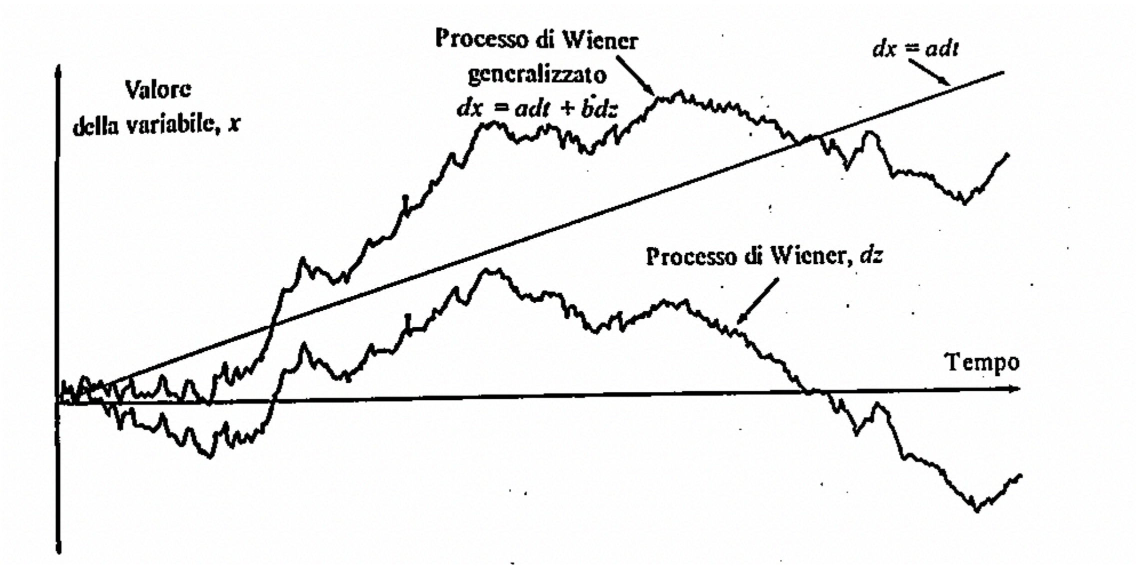
I processi di Wiener generalizzati sono una generalizzazione dei processi di Wiener e sono caratterizzati da drift rates e variance rates uguali a delle costanti arbitrarie.

Un processo di Wiener generalizzato per una variabile aleatoria x può essere così definito in termini di dz:

$$dx = adt + bdz$$

dove $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ è un processo di Wiener e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$. Il termine bdz aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da x. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a b volte un processo di Wiener.

Graficamente è qui riportato un esempio di un processo di Wiener generalizzato:



(*cercare ^ in bibliografia*)

2. 4.1. TRASPOSIZIONE AL TEMPO DISCRETO

Sebbene formalmente i processi di Wiener siano processi stocastici a tempo continuo, è possibile trasporli al tempo discreto. Un processo di Wiener generalizzato trasposto al tempo discreto per una variabile x può essere così definito in termini di Δz:

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

dove $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ è un processo di Wiener trasposto al tempo discreto e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$. Anche in questo caso $b\Delta z$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da x. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a b volte un processo di Wiener trasposto al tempo discreto.

Secondo le formulazioni di cui sopra, i processi di Wiener generalizzati hanno:

- Drift rate = a
- Variance rate = b^2

Pertanto, in un intervallo di tempo T essi hanno:

- Media delle variazioni della variabile aleatoria: a * T
- Varianza delle variazioni della variabile aleatoria: b^2 * T
- Deviazione standard delle variazioni della variabile aleatoria: $b\sqrt{T}$

2.5. PROCESSI DI ITO

I processi di Ito rappresentano un particolare tipo di processi di Wiener generalizzati con la caratteristica che i parametri a e b^2, rispettivamente il drift rate e il variance rate, sono funzioni del valore corrente della variabile aleatoria, che denomineremo x, e del tempo t:

- Drift rate = a(x, t)
- Variance rate = $b^2(x, t)$

Pertanto, in un intervallo di tempo T essi avranno:

- Media delle variazioni della variabile aleatoria: a(x, t) * T
- Varianza delle variazioni della variabile aleatoria: $b^2(x, t)$ * T
- Deviazione standard delle variazioni della variabile aleatoria: $b(x, t)\sqrt{T}$

Un processo di Ito per una variabile aleatoria x può essere così definito in termini di dz:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

dove $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ è un processo di Wiener e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, φ(0, 1). Il termine b(x, t)dz aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da x. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a b(x, t) volte un processo di Wiener.

2.5.1. TRASPOSIZIONE AL TEMPO DISCRETO

Essendo i processi di Ito un particolare caso di processi di Wiener generalizzati, essi sono formalmente processi stocastici a tempo continuo, tuttavia è possibile trasporli al tempo discreto. Un processo di Ito trasposto al tempo discreto per una variabile aleatoria x può essere così definito in termini di Δz:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\Delta z$$

dove $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ è un processo di Wiener trasposto al tempo discreto e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$. Anche in questo caso $b(x, t)\Delta z$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da x. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a b(x, t) volte un processo di Wiener trasposto al tempo discreto.

2.6. PROCESSI STOCASTICI PER I PREZZI DELLE AZIONI

Quanto finora discusso aveva lo scopo di introdurci ai processi stocastici, in modo da pervenire ai processi stocastici che governano i prezzi delle azioni, passaggio fondamentale per comprendere le tecniche di pricing delle stock options.

I processi stocastici utilizzati per descrivere i prezzi delle azioni sono i processi di Markov. Pertanto, in base a quanto già detto riguardo i processi Markoviani, le previsioni sui prezzi delle azioni sono incerte ed espresse in termini di distribuzioni probabilistiche che non dipendono dal sentiero temporale seguito in passato dal prezzo dell'azione, ma solo dal prezzo corrente della stessa. Ciò significa che quest'ultimo "sconta" già tutte le possibili informazioni sui trends ribassisti o rialzisti in atto e che se così non fosse, ci sarebbero opportunità di arbitraggio e il prezzo si aggiusterebbe istantaneamente.

L'assunzione che i prezzi azionari seguano un processo di Markov è coerente con la forma debole di efficienza dei mercati, secondo cui il prezzo corrente dell'azione racchiude in sé tutta l'informazione presente nella serie storica dei prezzi. Da ciò ne consegue che l'analisi di quest'ultima è irrilevante, in quanto già insita nei prezzi stessi, al fine di prevedere l'andamento futuro dei prezzi e che pertanto, è impossibile per gli operatori di mercato fare profitti con l'analisi tecnica.

Una volta assodato che un processo stocastico deve essere Markoviano per descrivere le random walks dei prezzi delle azioni, passiamo in rassegna i tipi di processi Markoviani fin qui analizzati per pervenire al più idoneo.

Al tal fine è importante tenere a mente che gli investitori non si aspettano un rendimento assoluto, ma bensì un rendimento percentuale indipendente dall'andamento del prezzo dell'azione. Inoltre, in un breve intervallo di tempo Δt, la volatilità del tasso di rendimento di un'azione tende a essere ragionevolmente costante in termini percentuali, cioè in rapporto al prezzo corrente, e pertanto, anch'essa indipendente dall'andamento del prezzo dell'azione. Queste caratteristiche si concretizzano non in dei drift rate e variance rate costanti in termini assoluti, ma bensì in termini percentuali. Ciò si concretizza in un rapporto costante tra drift rate e prezzo dell'azione e in una deviazione standard della variazione del prezzo dell'azione proporzionale al prezzo della stessa.

Un processo di Wiener generalizzato, espresso nella forma $dx = adt + bdz$, sarebbe applicabile ai prezzi delle azioni qualora gli investitori si aspettassero sempre un rendimento espresso in termini assoluti e uguale al drift rate (a). Nella realtà però, come sopra evidenziato, non è così. Inoltre, come già detto, nemmeno un variance rate (b^2) costante come nei processi di Wiener generalizzati è idoneo a rappresentare un processo stocastico per i prezzi azionari. In conclusione, i processi di Wiener generalizzati e di conseguenza anche i processi di Wiener in genere, con i loro drift rates e variance rates costanti e indipendenti dal prezzo corrente dell'azione, non sono applicabili per descrivere le random walks dei prezzi azionari. Più appropriati a tal fine e aventi le caratteristiche richieste di cui sopra, sono i processi di Ito, particolare tipologia dei processi di Wiener generalizzati e con la peculiarità di avere dei drift rates e variance rates funzioni del prezzo corrente dell'azione sottostante, e del tempo.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per descrivere la random walk del prezzo di un'azione che non paga dividendi. In particolare, essa deve:

- Seguire un processo di Ito e pertanto avere un drift rate e variance rate funzioni del prezzo dell'azione sottostante e del tempo.
- Essere coerente con un rendimento percentuale (che denomineremo μ) e una volatilità del tasso di rendimento (che denomineremo σ) costanti in termini percentuali e indipendenti dal prezzo dell'azione.

In considerazione di ciò, il processo stocastico per il prezzo di un'azione che non paga dividendi è:

$$dS0 = \mu S0dt + \sigma S0dz$$

dove dz = $\varepsilon\sqrt{dt}$ è un processo di Wiener e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, φ(0, 1). Il termine σS0dz aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da S_0. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a σS_0 volte un processo di Wiener.

2.6.1. TRASPOSIZIONE AL TEMPO DISCRETO

Come sopra spiegato, essendo i processi di Ito un particolare caso di processi di Wiener generalizzati, essi sono formalmente processi stocastici a tempo continuo, tuttavia è possibile trasporli al tempo discreto. Pertanto, un processo stocastico per il prezzo di un'azione che non paga dividendi trasposto al tempo discreto è:

$$\Delta S0 = \mu S0\Delta t + \sigma S0\Delta z$$

dove Δz = $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ è un processo di Wiener trasposto al tempo discreto e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, φ(0, 1). Anche in questo caso $\sigma S_0 \Delta z$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da S_0. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a σS_0 volte un processo di Wiener trasposto al tempo discreto.

Secondo tale modello ΔS_0 si distribuisce in modo normale con media pari a $\mu S_0 \Delta t$ e deviazione standard pari a $\sigma S_0 \sqrt{\Delta t}$:

$$\Delta S0 \sim \varphi(\mu S0 \Delta t, \sigma^2 S0^2 \Delta t)$$

Questi modello di comportamento del prezzo di un'azione sono noti come <<Moti geometrico Browniani>> e hanno le seguenti caratteristiche:

- Drift rate = μS_0
- Variance rate = $\sigma^2 S_0^2$

Pertanto, in un intervallo di tempo T, essi hanno:

- Media delle variazioni di S_0: $\mu S_0 T$
- Varianza delle variazioni di S_0: $\sigma^2 S_0^2 T$
- Deviazione standard delle variazioni di S_0: $\sigma S_0 \sqrt{T}$

2.7. LEMMA DI ITO

Una volta compreso il processo stocastico che governo il prezzo di un'azione, è necessario fare un passo successivo e capire come questo influenza il prezzo di una stock option avente tale azione come sottostante.

Il prezzo di qualsiasi derivato è funzione delle variabili stocastiche sottostanti e del tempo. Pertanto, al fine del pricing dei derivati, è fondamentale studiare le derivate dei processi stocastici seguiti dal valore delle attività ad essi sottostanti, al fine di risalire ai processi stocastici che governano l'andamento del prezzo dei derivati stessi. Tale compito è svolto dal lemma di Ito.

In particolare, se S_0 è il prezzo del sottostante di un derivato, t è il tempo e $G(S_0, t)$ è la funzione che esprime il valore del derivato, conoscendo il processo stocastico seguito da S_0 (dS_0), il lemma di Ito consente di risalire al processo stocastico che governa $G(S_0, t)$ (dG) calcolando la derivata di dS_0.

Supponiamo che il derivato in esame abbia come sottostante un'azione. In questo caso, come sopra discusso, il prezzo dell'azione seguirà un processo di Ito o <<moto geometrico Browniano>>:

$$dS0 = \mu S0dt + \sigma S0dz$$

dove dz = $\varepsilon\sqrt{dt}$ è un processo di Wiener e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, φ(0, 1).

In base al lemma di Ito, anche il valore del derivato $G(S_0, t)$ seguirà un processo di Ito:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0dz$$

dove dz è lo stesso processo di Wiener presente all'interno del processo di Ito che governa il prezzo dell'azione sottostante. Anche in questo caso $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0dz$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da G. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0$ volte lo stesso processo di Wiener presente all'interno del moto geometrico Browniano che governa il prezzo dell'azione sottostante.

2.7.1. TRASPOSIZIONE AL TEMPO DISCRETO

Come sopra spiegato, essendo i processi di Ito un particolare caso di processi di Wiener generalizzati, essi sono formalmente processi stocastici a tempo continuo, tuttavia è possibile trasporli al tempo discreto. In questo caso, come sopra discusso, il prezzo dell'azione seguirà un processo di Ito o <<moto geometrico Browniano>> trasposto al tempo discreto:

$$\Delta S0 = \mu S0\Delta t + \sigma S0\Delta z$$

dove $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ è un processo di Wiener trasposto al tempo discreto e dove ε è un'estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, φ(0, 1).

In base al lemma di Ito, anche il valore del derivato G(S_0, t) seguirà un processo di Ito trasposto al tempo discreto:

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t + \frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0 \Delta z$$

dove Δz è lo stesso processo di Wiener trasposto al tempo discreto presente all'interno del processo di Ito, anch'esso trasposto al tempo discreto, che governa il valore dell'azione sottostante. Nuovamente, $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0 \Delta z$ aggiunge "rumore" ossia variabilità al sentiero temporale seguito da G. Tale quantità di rumore o di variabilità è uguale a $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0$ volte lo stesso processo di Wiener trasposto al tempo discreto presente all'interno del moto geometrico Browniano, anch'esso trasposto al tempo discreto, che governa il prezzo dell'azione sottostante.

Come nel caso del processo di Ito trasposto al tempo discreto usato per descrivere l'andamento del prezzo di un'azione, ΔG si distribuisce in modo normale con media pari a $\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t$ e deviazione standard pari a $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0\sqrt{\Delta t}$:

$$\Delta G \sim \varphi\left(\left(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2\right)\Delta t\,, \left(\frac{\partial G}{\partial S0}\right)^2 \sigma^2 S0^2 \Delta t\right)$$

Questi modelli di comportamento del valore del derivato sono anch'essi dei <<moti geometrico Browniani>> e hanno le seguenti caratteristiche:

- Drift rate: $\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2$
- Variance rate: $(\frac{\partial G}{\partial S0})^2\sigma^2 S0^2$

Pertanto, in un intervallo di tempo T, essi hanno:

- Media delle variazioni di S_0: $(\frac{\partial G}{\partial S0}\mu S0 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}\sigma^2 S0^2)$T

- Varianza delle variazioni di S_0: $(\frac{\partial G}{\partial S0})^2\sigma^2 S0^2$T
- Deviazione standard delle variazioni di S_0: $\frac{\partial G}{\partial S0}\sigma S0\sqrt{}$T

CAPITOLO 3: EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI BLACK-SHOLES-MERTON

Una volta compreso come risalire dal moto geometrico Browniano che controlla il prezzo di un'azione al moto geometrico Browniano che controlla il prezzo un derivato avente tale azione come sottostante, vediamo come ciò si può operativamente applicare per calcolare il prezzo corrente del derivato, introducendo l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton.

Al fine della valutazione dei derivati l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton svolge un ruolo fondamentale. Tale equazione permette di risalire al valore di ciascun derivato avente come sottostante un'azione di cui è dato il prezzo. Essa si ottiene a partire dal lemma di Ito ed è un'equazione differenziale alle derivate parziali e, come tale, ha tante soluzioni, una per ogni derivato avente come sottostante l'azione di cui è noto il prezzo. Per ottenerne la soluzione particolare del valore di uno specifico derivato bisogna imporle delle <<condizioni al contorno>>, diverse per ogni specifico derivato ed espresse in termini di valori estremi del prezzo dell'azione sottostante e del tempo.

L'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton dipende dalle seguenti assunzioni di base:

- Il prezzo dell'azione segue il moto geometrico Browniano sopra descritto con μ (rendimento percentuale) e σ (volatilità del tasso di rendimento) costanti.
- Le vendite allo scoperto sono consentite e non esistono restrizioni all'utilizzo dei relativi proventi.
- Non esistono costi di transazione o tasse.
- I titoli sono perfettamente divisibili.
- L'azione non paga dividendi durante la vita del derivato.
- Non esistono opportunità di arbitraggio prive di rischio.

- I titoli vengono negoziati continuamente.
- Il tasso d'interesse risk-free a breve termine è uguale per tutte le scadenze.

Sotto tutte queste assunzioni di base, l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton è:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rS0\frac{\partial G}{\partial S0} + \frac{1}{2}\sigma^2 S0^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S0^2} = rG$$

Ogni funzione $G(S_0, t)$ che soddisfa l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton rappresenta il prezzo teorico di un derivato negoziabile. Se esiste un derivato che ha questo prezzo non vi sono opportunità di arbitraggio. Viceversa, se una funzione $G(S_0, t)$ non soddisfa l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton, essa non può rappresentare il prezzo di un derivato senza che si manifestino opportunità di arbitraggio per gli operatori.

CAPITOLO 4: VALUTAZIONE NEUTRALE VERSO IL RISCHIO

Una volta presentata l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton, introduciamo uno strumento alternativo, ma ad essa fortemente legato, per il pricing dei derivati: il principio della valutazione neutrale verso il rischio.

Esso è senza dubbio lo strumento più importante per l'analisi dei derivati e può essere così postulato: in un mondo neutrale verso il rischio, i prezzi dei derivati sono uguali a quelli del mondo reale. Tale principio trae origine da una proprietà fondamentale dell'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton: in quest'equazione non figurano variabili che sono influenzate dalla propensione al rischio degli investitori. Infatti, essa non contiene il tasso di rendimento atteso dell'azione (μ), il cui valore aumenta all'aumentare della propensione al rischio degli investitori.

Se è vero che l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton è indipendente dalla propensione al rischio degli investitori, allora le sue soluzioni in termini di valori dei derivati saranno uguali, sia in un mondo neutrale verso il rischio, che in un mondo di avversione al rischio come quello reale. In quest'ultimo infatti, rispetto a un mondo neutrale verso il rischio, solo due variabili cambierebbero: il tasso di rendimento atteso dell'azione e il tasso di interesse per attualizzare il valore finale dei derivati. I cambiamenti di queste due variabili si compenserebbero esattamente tra di loro, portando quindi ai medesimi risultati che si otterrebbero in un mondo neutrale verso il rischio.

Pertanto, al fine di determinare il valore corrente di un derivato (G), possiamo fare qualsiasi assunzione circa la propensione al rischio degli investitori, la più semplificativa delle quali è che essi siano neutrali al rischio. Se questo è vero, essi non richiedono un tasso di rendimento atteso più elevato come compenso per il rischio e il processo di valutazione dei derivati gode di una duplice semplificazione:

- Il tasso di rendimento atteso delle azioni (e di qualsiasi altra attività) è pari al tasso d'interesse risk-free.
- Il tasso utilizzato per l'attualizzazione del payoff atteso del derivato è pari al tasso d'interesse risk-free.

Sulla base di queste semplificazioni, il principio della valutazione neutrale verso il rischio prevede i seguenti passaggi per il pricing dei derivati:

- Calcolare le probabilità associate al rialzo e al ribasso del valore dell'attività sottostante in un mondo neutrale verso il rischio.
- Calcolare il valore atteso del derivato sulla base di queste probabilità.
- Attualizzare il valore atteso del derivato al tasso d'interesse risk-free.

CAPITOLO 5: FORMULE DI BLACK-SHOLES-MERTON

Dopo aver studiato come risalire al prezzo di un derivato a partire dal prezzo del suo sottostante, tramite l'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton e il principio della valutazione neutrale verso il rischio, applichiamo tali strumenti al caso di nostro interesse: il pricing delle stock options europee aventi come sottostanti azioni che non pagano dividendi.

Gli strumenti di pricing più utilizzati a tal fine sono le formule di Black-Sholes-Merton. Esse costituiscono il modello di riferimento per gli altri metodi di pricing delle stock options che qui verranno trattati.

Le formule di Black-Sholes-Merton sono ricavabili in due modi:

- Applicando all'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton le opportune <<condizioni al contorno>>:
    - Nel caso di un'opzione call:

      G = max[S_0 - K,0]   quando t = T
    - Nel caso di un'opzione put:

      G = max[K – S_0,0]   quando t = T
- Tramite il principio della valutazione neutrale verso il rischio:

  Il valore corrente di una stock option si ottiene attualizzando il suo valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio al tasso d'interesse risk-free:
    - Nel caso di un'opzione call:

      c = $e^{-rT}\hat{E}$ [max[S_T – K,0]]
    - Nel caso di un'opzione put:

      p = $e^{-rT}\hat{E}$ [max[K - S_T,0]]

  dove S_T è il prezzo a scadenza dell'azione sottostante ed $\hat{E}$ è il valore atteso della stock option a scadenza.

  In entrambi i modi si perviene alle formule di Black-Sholes-Merton:

$$c = S_0N(d1) - Ke^{-rT}N(d2) \qquad\qquad p = Ke^{-rT}N(-d2) - S_0N(-d1)$$

dove N(x) è la funzione di ripartizione di una normale cumulata:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

e dove:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d2 = \frac{\ln\left(\frac{S0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

Insito in tali formule è l'utilizzo di un moto geometrico Browniano a tempo continuo e a variabile continua per costruire le random walks seguite dal prezzo dell'azione sottostante:

$$dS0 = \mu S0dt + \sigma S0\mathrm{dz}$$

Inoltre, è verificabile che i risultati delle formule di Black-Sholes-Merton sono coerenti con quanto detto sopra riguardo l'andamento dei prezzi delle stock options al variare dei principali fattori che li influenzano.

In conclusione, secondo l'analogia di Black, le formule di Black-Sholes-Merton possono essere utilizzate anche per il pricing delle calls americane su azioni che non pagano dividendi, in quanto, come già menzionato, non è mai conveniente il loro l'esercizio anticipato prima della scadenza.

CAPITOLO 6: METODI ALTERNATIVI DI PRICING

Avendo esaminato il metodo standard di pricing delle stock options, le formule di Black-Sholes-Merton, ne vengono qui presentati dei metodi alternativi.

I metodi alternativi di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi sono: il metodo binomiale e il metodo di Monte Carlo.

Tali metodi vengono sviluppati tramite il principio della valutazione neutrale verso il rischio, e pertanto, i prezzi delle stock options da essi risultanti, come quelli risultanti dall'equazione differenziale di Black-Sholes-Merton, saranno uguali sia in un mondo neutrale verso il rischio che in un mondo avverso al rischio come quello reale.

Sia il metodo binomiale che il metodo di Monte Carlo pervengono ai prezzi delle stock options costruendo degli scenari aleatori, ovvero imponendo ai prezzi azionari delle random walks governate da un moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto:

$$\Delta S0 = \mu S0\Delta t + \sigma S0\Delta z$$

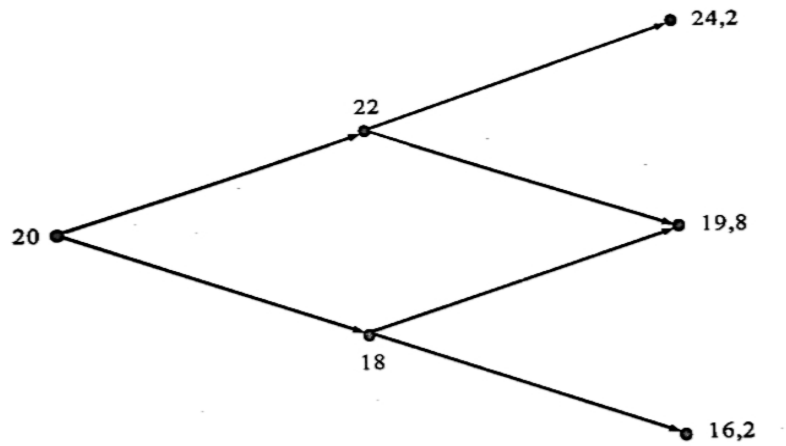
6.1. METODO BINOMIALE

Il metodo binomiale perviene ai prezzi delle stock options costruendo delle random walks per i prezzi dell’azione sottostante, che andranno a formare un “albero binomiale” con tante diramazioni quanti sono i nodi dello stesso. Ipotesi alquanto irrealistica sottostante al modello binomiale è che ad ogni nodo dell’albero esistano solo due scenari di evoluzione del prezzo dell’azione: rialzo e ribasso, entrambi definiti nell’entità.

In particolare, le variabili che determinano la composizione dell’albero binomiale, e arbitrariamente scelte dall’utilizzatore di tale metodo, sono:

- Il numero degli stadi del moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto: n
- Il numero di nodi dell’albero: n + 1
- Il numero di random walks imposte al prezzo dell’azione: 2^n

Un esempio grafico di albero binomiale a 2 stadi è il seguente:



(*cercare ^ in bibliografia*)

Nel costruire l’albero binomiale, ciascuna random walk viene suddivisa in n stadi, ciascuno di lunghezza $\Delta t = \frac{T}{n}$ dove T è la scadenza dell’opzione. In ciascuno degli n stadi di ciascuna random walk il prezzo dell’azione potrà subire un rialzo, con probabilità p, o un ribasso, con probabilità 1 – p. L’entità di tali rialzi e ribassi sarà data dai <<fattori di capitalizzazione>>, entrambi calibrati alla volatilità del prezzo dell’azione sottostante.

Tali fattori di capitalizzazione sono:

- In caso di rialzo:

  μ = $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ dove μ > 1
- In caso di ribasso:

  d = $\frac{1}{\mu}$ = $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ dove d < 1

  Da essi è possibile ricavare la probabilità di rialzo del prezzo dell'azione in un mondo neutrale verso il rischio:

$$p = \frac{a-d}{\mu-d}$$

dove a = $e^{r\Delta t}$ è denominato <<fattore di crescita>>, e la probabilità di ribasso del prezzo dell'azione in un mondo neutrale verso il rischio:

$$1 - p$$

Applicando i passaggi per la valutazione dei derivati previsti dal principio della valutazione neutrale verso il rischio, il metodo binomiale di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi può essere così descritto:

- Il primo passaggio è calcolare le probabilità associate al rialzo e al ribasso del prezzo dell'azione sottostante in un mondo neutrale verso il rischio:

  Se n è il numero degli stadi di ciascuna random walk, in base alle proprietà della distribuzione binomiale la probabilità di j rialzi e n – j ribassi è:

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}p^j(1-p)^{n-j}$$

- Il secondo passaggio è calcolare il valore atteso delle stock options sulla base di queste probabilità:

  Nel caso di un'opzione call:

  - $\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}\max\,[S0\mu^j d^{n-j}-K,0]$

  Nel caso di un'opzione put:

  - $\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}\max\left[K-\ S0\mu^j d^{n-j},0\right]$
- Il terzo e ultimo passaggio è attualizzare il valore atteso delle stock options al tasso d'interesse risk-free, pervenendo così alle formule finali del metodo binomiale:

$$c = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} \max\left[S0\mu^j d^{n-j} - K, 0\right]$$

e

$$p = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j} \max\left[K - S0\mu^j d^{n-j}, 0\right]$$

6.2. METODO DI MONTE CARLO

Come sopra detto, la principale criticità del metodo binomiale è che esso si basa sull'assunzione irrealistica che ad ogni stadio i percorsi percorribili dal prezzo dell'azione siano solo due. Tale problematica viene risolta dal metodo di Monte Carlo, che supera tale assunzione. Esso simula delle random walks per il prezzo dell'azione sottostante, ognuna composta da n stadi di durata dt = $\frac{T}{n}$, estraendo campioni pseudocasuali da un moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto. Il numero di tali simulazioni, che denomineremo g, può essere arbitrariamente scelto dall'utilizzatore di tale metodo di pricing. Basandosi anch'esso sul principio della valutazione neutrale verso il rischio, il metodo di Monte Carlo di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi può essere così descritto:

- Il primo passaggio è simulare il sentiero temporale per S_0 in un mondo neutrale verso il rischio:

$$S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\,\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n$$

  dove $\varepsilon_{(i)}$ è la i-esima estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$.

- Il secondo passaggio è calcolare il valore finale del derivato:

  Nel caso di un'opzione call:

  - $\max\left[S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\,\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n - K, 0\right]$

  Nel caso di un'opzione put:

  - $\max\left[K - S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\,\sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n, 0\right]$

- Il terzo passaggio è ripetere i primi due passaggi g volte per ottenere una serie di valori finali campionari in un mondo neutrale verso il rischio.
- Il quarto passaggio è stimare il valore finale atteso del derivato in un mondo neutrale verso il rischio, come media aritmetica dei valori finali campionari:

  Nel caso di un'opzione call:

  - $\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \max\left[S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\ \sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n\ -\ K, 0\right]$

  Nel caso di un'opzione put:

  - $\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \max\left[K-\ S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\ \sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n, 0\right]$

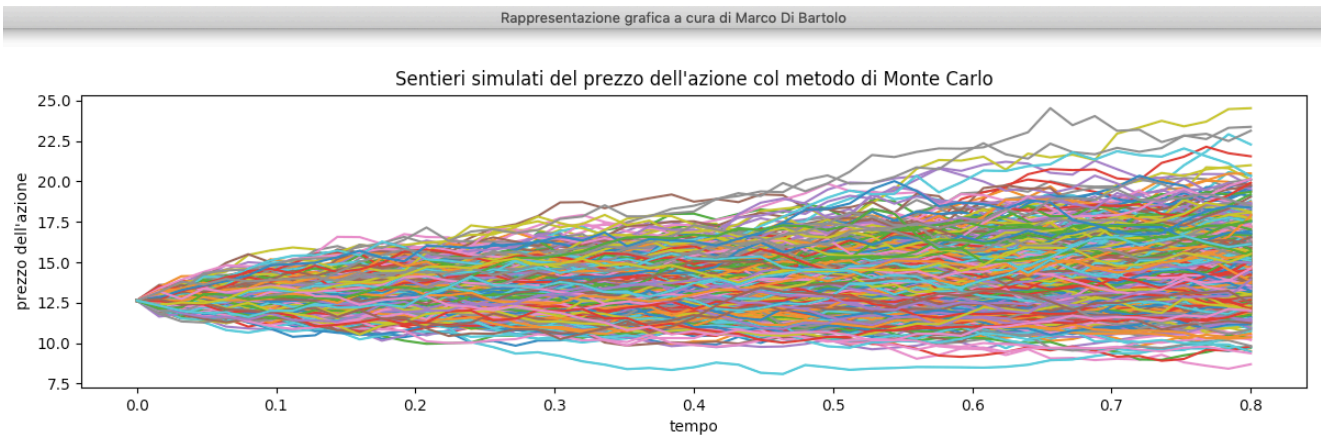
- Il quinto e ultimo passaggio è determinare il valore corrente del derivato attualizzando al tasso d'interesse risk-free il suo valore finale atteso, pervenendo alle formule finali del metodo di Monte Carlo:

$$c = e^{-rT}\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \max\left[S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\ \sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n\ -\ K, 0\right]$$

e

$$p = e^{-rT}\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \max\left[K-\ S0(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\ \sigma\varepsilon(i)\sqrt{dt}})^n, 0\right]$$

Un esempio grafico di random walks simulate con il metodo di Monte Carlo con il codice da me scritto è il seguente:



(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

CAPITOLO 7: CONVERGENZA TRA I 3 METODI DI PRICING

Come già detto, i metodi alternativi di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi, il metodo binomiale e il metodo di Monte Carlo, costruiscono delle random walks per il prezzo dell'azione sottostante tramite un moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto:

$$\Delta S0 = \mu S0\Delta t + \sigma S0\Delta z$$

Invece, le formule di Black-Sholes-Merton utilizzano un moto geometrico Browniano nella sua definizione formale, ovvero a tempo continuo:

$$dS0 = \mu S0dt + \sigma S0dz$$

Come sopra accennato, il metodo di Black-Sholes-Merton costituisce il modello più utilizzato per il pricing delle stock options e il punto di riferimento per verificare la bontà dei metodi di pricing alternativi. Per tal motivo è importante studiare la convergenza tra questi tre metodi.

Per far convergere i prezzi delle stock options ottenuti col metodo binomiale e col metodo di Monte Carlo a quelli ottenuti col metodo di Black-Sholes-Merton, è necessario far convergere il moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto usato dai due metodi alternativi al moto geometrico Browniano a tempo continuo usato dal metodo di Black-Sholes-Merton. Per far ciò è necessario:

- Per il metodo binomiale:

  Imporre che $\Delta t \rightarrow 0$, ovvero implicitamente che $n \rightarrow \propto$.

- Per il metodo di Monte Carlo:

  Imporre che $g \rightarrow 0$.

Il principale svantaggio dei metodi alternativi di pricing e specialmente del metodo di Monte Carlo è che far ciò risulta molto costoso in termini di tempi di calcolo, e pertanto, bisognerà accontentarsi di prezzi delle stock options contenenti degli errori, che al più potranno essere minimizzati.

Nel caso del metodo di Monte Carlo è possibile misurare tali errori di misura tramite gli errori standard. Essi vengono calcolati come segue:

- Nel caso di un'opzione call:

  $es_{call} = \frac{\omega call}{\sqrt{g}}$

  dove ω_{call} è la deviazione standard dei vari prezzi dell'opzione call ottenuti nelle g simulazioni di Monte Carlo.

- Nel caso di un'opzione put:

  $es_{put} = \frac{\omega put}{\sqrt{g}}$

  dove ω_{put} è la deviazione standard dei vari prezzi dell'opzione put ottenuti nelle g simulazioni di Monte Carlo.

7.1. INDICATORI DI CONVERGENZA

Per misurare la convergenza tra i 3 metodi di pricing è possibile utilizzare gli R^2 indexes. Tali indici sono una misura di quanto una serie di valori "spiega" l'andamento di un'altra serie di valori e sono calcolati come segue:

$$R^2 = \rho^2 = \left(\frac{\sigma xy}{\sigma x \sigma y}\right)^2$$

dove:

- ρ è l'indice di correlazione, che misura il grado con cui due serie di valori sono correlate tra di loro.
- σ_{xy} è la covarianza, che misura il grado con cui due serie di valori variano insieme, ovvero dipendono l'una dall'altra.
- σ_x e σ_y sono le deviazioni standard delle due serie di valori in questione.

L'R^2 index è un indice che può assumere valori compresi tra 0 e 1.

Nel caso di nostro interesse, gli R^2 indexes sono utilizzati per misurare quanto i prezzi risultanti dal metodo di Black-Sholes-Merton "spiegano" i prezzi risultanti dal metodo binomiale e dal metodo di Monte Carlo, come misura della loro convergenza ad esso.

Pertanto:

- Se $R^2 = 0$:

  non vi sarà nessuna convergenza e reciproca correlazione tra i prezzi risultanti dal metodo di Black-Sholes-Merton e quelli risultanti dal metodo binomiale e dal metodo di Monte Carlo.

- Se $R^2 = 1$:

  vi sarà perfetta convergenza e reciproca correlazione tra i prezzi risultanti dal metodo di Black-Sholes-Merton e quelli risultanti dal metodo binomiale e dal metodo di Monte Carlo.

Come deducibile da quanto sopra argomentato, gli R^2 indexes assumeranno sempre un valore intermedio tra 0 e 1, convergendo ad 1 al tendere del moto geometrico Browniano trasposto al tempo discreto adoperato dal metodo binomiale e dal metodo di Monte Carlo al moto geometrico Browniano a tempo continuo adoperato dal metodo di Black-Sholes-Merton.

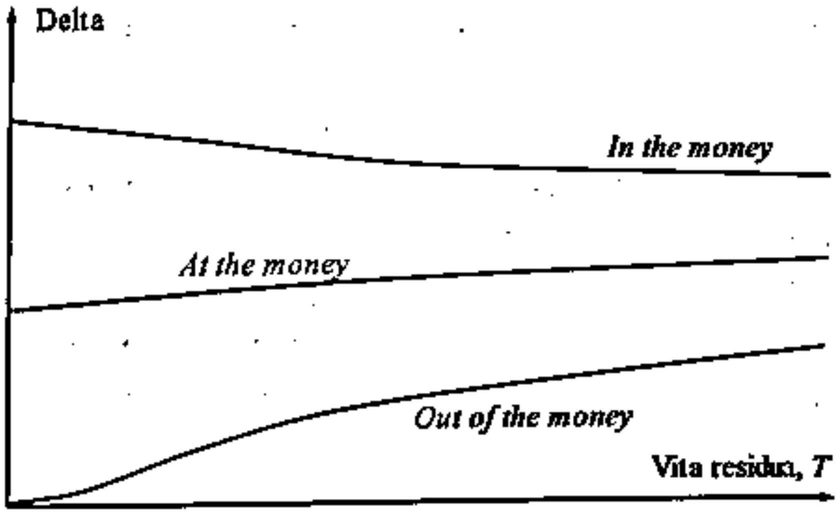
CAPITOLO 8: LE GRECHE

Le greche sono dei valori statistici espressi in percentuale che forniscono all'investitore dati importanti per poter impostare al meglio le proprie strategie di investimento e di fatto misurano la reattività di un'opzione al variare dei principali fattori che ne influenzano il prezzo. Le greche sono le sensitivities delle opzioni, ovvero le derivate parziali del loro prezzo rispetto alle variabili che lo influenzano e possono essere ricavate direttamente dal modello di Black-Scholes-Merton.

Le greche sono:

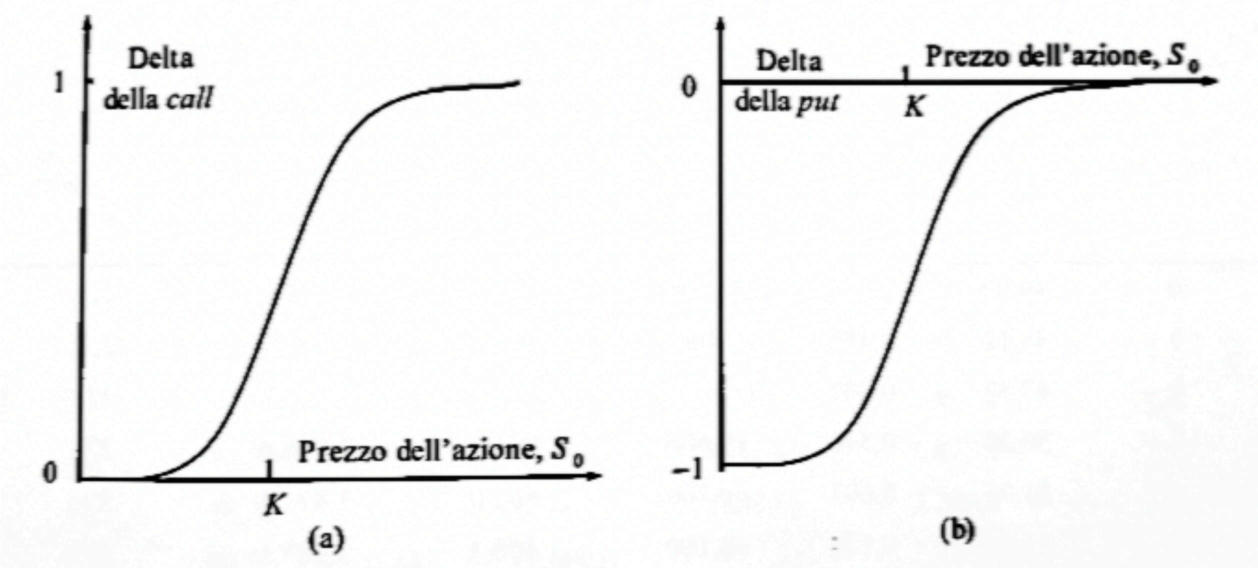
- Il Delta, $\Delta = \frac{\partial G}{\partial S0}$: rappresenta la sensitivity del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni del valore del sottostante. Per le opzioni put il delta deve essere compreso tra -1 e 0, mentre per le opzioni call il delta deve essere compreso tre 1 e 0. In prossimità della scadenza, le opzioni in the money hanno un delta molto vicino all'unità (-1 per le puts e 1 per le calls), mentre le opzioni out of the money hanno un delta molto vicino a 0. Il delta varia al variare del valore del sottostante: se aumenta il valore della differenza S_0 - K il delta di una call aumenta, mentre quello di una put diminuisce. Il delta è un buon indicatore per le strategie di hedging se il movimento del sottostante è contenuto. Un'opzione call e un'opzione put aventi lo stesso sottostante hanno diverso delta.

Qui illustrato è l'andamento del delta rispetto alla vita residua dell'opzione:



(*cercare ^ in bibliografia*)

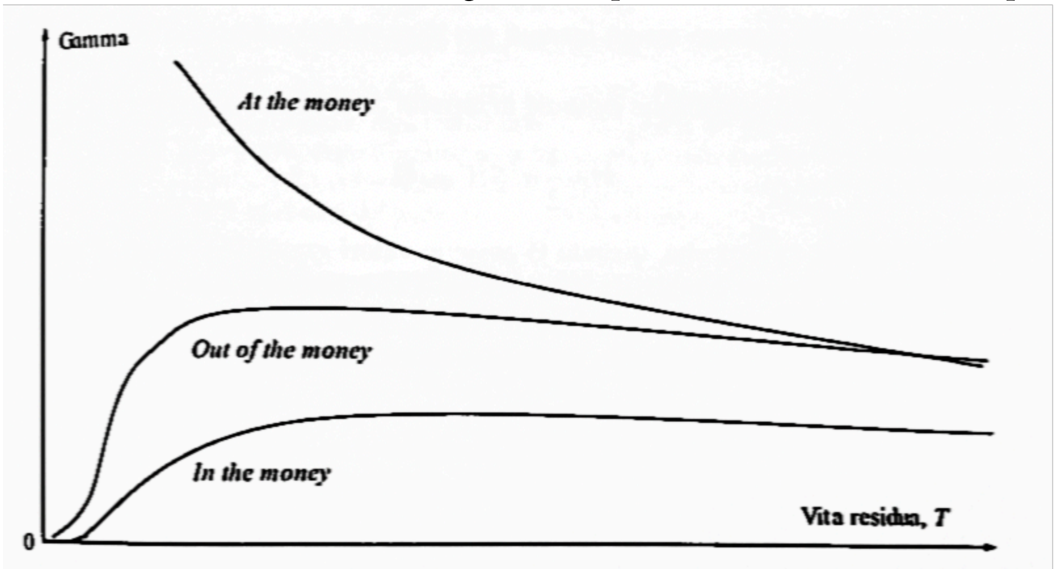
Qui illustrato è l'andamento del delta di una call e di una put rispetto al prezzo dell'azione sottostante:



(*cercare ^ in bibliografia*)

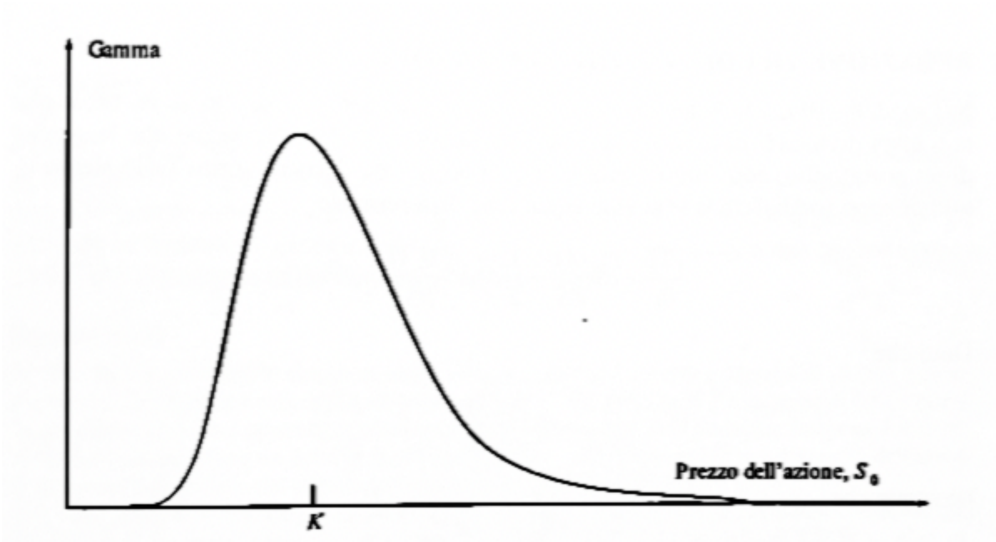
- Il Gamma, $\Gamma = \frac{\partial^2 G}{\partial S0^2}$: rappresenta la sensitivity del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni del delta ed è pertanto calcolato come la derivata seconda parziale del prezzo dell'opzione rispetto al valore del sottostante. Per finalità di hedging, in caso di movimenti significativi del valore del sottostante, poiché la relazione fra prezzo dell'opzione e prezzo del sottostante è convessa, è necessario aggiustare il delta con il gamma per evitare di andare "fuori copertura". Tale errore di hedging commesso utilizzando il delta è tanto maggiore quanto maggiore è la curvatura della relazione tra il prezzo dell'opzione e il prezzo dell'azione sottostante. Il gamma è capace di misurare tale curvatura, consentendo strategie di hedging più precise. Un'opzione call e un'opzione put aventi lo stesso sottostante hanno lo stesso gamma.

Qui illustrato è l'andamento del gamma rispetto alla vita residua dell'opzione:



(*cercare ^ in bibliografia*)

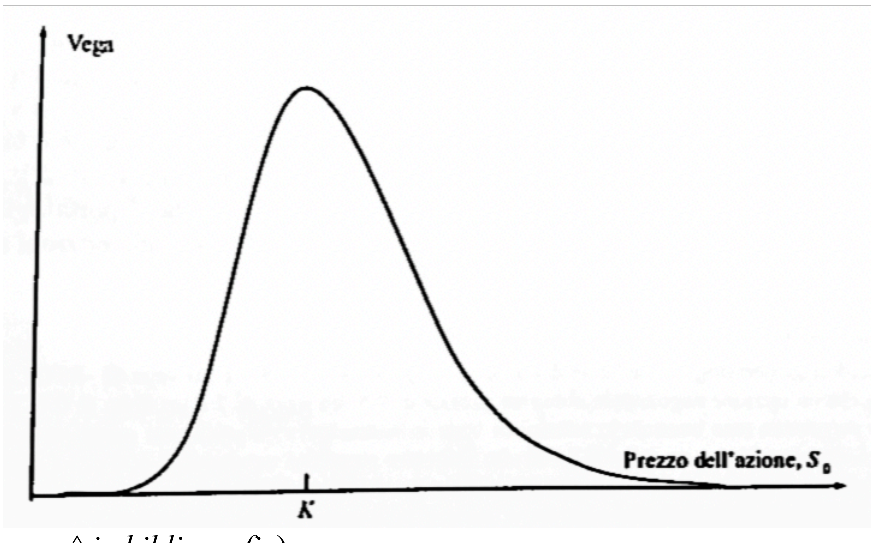
Qui illustrato è l'andamento del gamma rispetto al prezzo dell'azione sottostante:



(*cercare ^ in bibliografia*)

- Il Vega, $\nu = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$: rappresenta la sensitivity del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni della volatilità del prezzo del sottostante. Esso influisce soltanto sul valore temporale di un'opzione e non sul suo valore intrinseco e varia all'avvicinarsi della scadenza dell'opzione. Un'opzione call e un'opzione put aventi lo stesso sottostante hanno lo stesso vega.

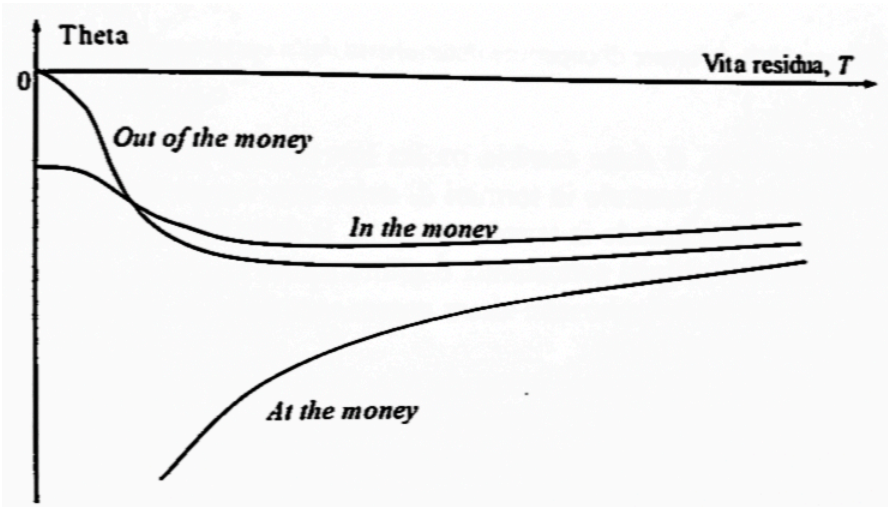
Qui illustrato è l'andamento del vega rispetto al prezzo dell'azione sottostante:



(*cercare ^ in bibliografia*)

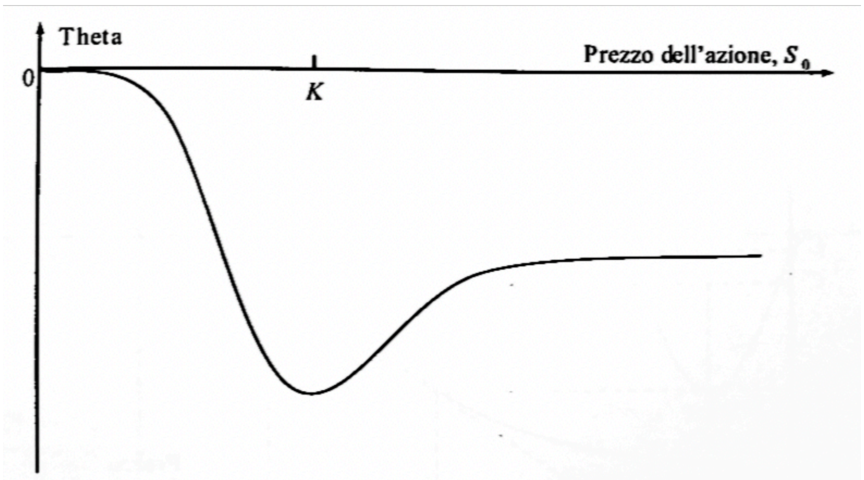
- Il Theta, $\Theta = \frac{\partial G}{\partial t}$: rappresenta la sensitivity del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni della vita residua dell'opzione. Esso varia col passare del tempo, aumentando progressivamente all'avvicinarsi della scadenza dell'opzione e assumendo i suoi valori massimi nei giorni precedenti il giorno di scadenza. Un'opzione call e un'opzione put aventi lo stesso sottostante hanno diverso theta.

Qui illustrato è l'andamento del theta rispetto alla vita residua dell'opzione:



(*cercare ^ in bibliografia)*

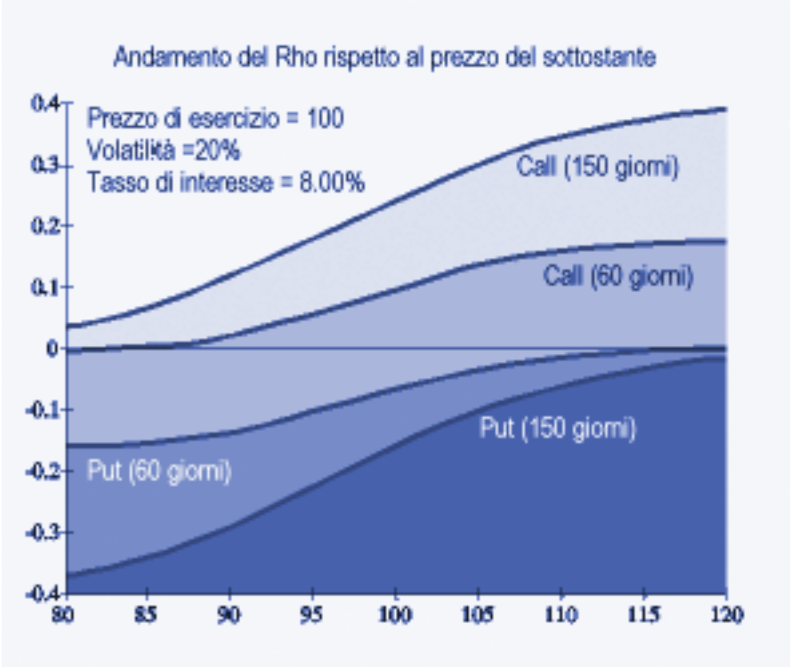
Qui illustrato è l'andamento del theta rispetto al prezzo dell'azione sottostante:



(*cercare ^ in bibliografia*)

- Il Rho, $\rho = \frac{\partial G}{\partial r}$: rappresenta la sensitivity del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni del tasso d'interesse risk-free. In fasi di tassi bassi, esso è sicuramente il fattore che meno influenza il prezzo dell'opzione. Un'opzione call e un'opzione put aventi lo stesso sottostante hanno diverso rho.

Qui illustrato è l'andamento del rho rispetto al prezzo dell'azione sottostante:



(*cercare # in sitografia*)

8.1. FORMULE DI CALCOLO

Secondo il modello di Black-Sholes-Merton le formule delle greche sono le seguenti:

- $\Delta_{call} = N(d1)$
- $\Delta_{put} = N(d1) - 1$
- $\Gamma = \frac{n(d1)}{\sigma S0\sqrt{T}}$
- $\nu = S0\sqrt{T}n(d1)$
- $\Theta_{call} = -\frac{S0n(d1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d2)$
- $\Theta_{put} = -\frac{S0n(d1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d2)$
- $\rho_{call} = KT\,e^{-rT}N(d2)$

- ρ_{put} = -KT e^{-rT} N(-d2)

dove N(x) è la funzione di ripartizione di una normale cumulata, la cui formula è già stata vista in merito alle formule di Black-Sholes-Merton, e n(x) è la funzione di densità di una normale standardizzata:

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Secondo il modello di Black-Sholes-Merton, le greche di una stock option avente come sottostante un'azione che non paga dividendi devono soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rS0\frac{\partial G}{\partial S0} + \frac{1}{2}\sigma^2 S0^2 \frac{\partial^2 G}{\partial G^2} = rG$$

Da cui ne consegue che:

$$\Theta + \mathrm{rS0}\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S0^2 \Gamma = \mathrm{rG}$$

CAPITOLO 9: SCRITTURA DEL CODICE

Quanto fin qui discusso ha avuto lo scopo di presentare al lettore i vari metodi di pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi e le formule di calcolo delle relative greche, in modo da rendere intellegibile il codice da me scritto su Python 3.7, in cui implemento quanto fin qui esaminato.

9.1. COSA FA

In 131 righe, il codice da me scritto svolge le seguenti mansioni:

- Calcolare i prezzi delle stock options tramite il metodo di Black-Sholes-Merton.
- Calcolare i prezzi delle stock options tramite il metodo binomiale.
- Calcolare i prezzi delle stock options tramite il metodo di Monte Carlo.
- Calcolare gli errori standard insiti nei prezzi delle stock options calcolati tramite il metodo di Monte Carlo.
- Calcolare le greche delle stock options secondo il modello di Black-Sholes-Merton.

- Calcolare l'R^2 index tra i prezzi ottenuti tramite il metodo di Black-Sholes-Merton e quelli ottenuti tramite il metodo binomiale.
- Calcolare l'R^2 index tra i prezzi ottenuti tramite il metodo di Black-Sholes-Merton e quelli ottenuti tramite il metodo di Monte Carlo.
- Mostrare in un'unica figura due grafici, il primo contenente i sentieri simulati del prezzo dell'azione col metodo di Monte Carlo, e il secondo contenente, per ciascuno dei vari metodi di pricing e in modo da evidenziarne le reciproche relazioni:
    - l'andamento dei prezzi delle stock options al variare del prezzo dell'azione sottostante.
    - i prezzi delle stock options effettivamente calcolati.

Nello svolgere tali funzioni il codice chiede al suo utilizzatore l'input delle seguenti variabili:

- Il nome dell'impresa delle cui stock options si vogliono calcolare i prezzi.
- Il risk-free rate (r).
- Lo strike price (k).
- La data di scadenza su base annua (T).
- Il numero di stadi da utilizzare nel metodo binomiale e nelle simulazioni di Monte Carlo (n).
- Il numero di simulazioni di Monte Carlo (g).
- Il numero di osservazioni prezzo dell'azione – prezzi delle opzioni da visualizzare graficamente (o).

9.2. COME LO FA

Prima di poter scrivere il codice ho dovuto scaricare nel mio PC il programma Python 3.7 e munirmi degli strumenti necessari alla sua scrittura. In particolare, ho creato un file Excel in cui ho scaricato da DataStream i prezzi delle azioni, su base trimestrale e in un arco di 5 anni, di tutte le imprese attive in Italia. Successivamente ho dovuto scaricare tramite il terminale del mio PC e poi importare nel codice che ho scritto alcuni moduli Python. I moduli Python sono delle librerie di funzioni che una volta scaricate su un PC e importate in un codice è possibile utilizzare.

I moduli Python che ho dovuto importare nel codice sono i seguenti:

- Pandas, che consente di lavorare su file Excel con Python.
- Statistics, che consente di calcolare indici statistici.
- Matplotlib.pyplot, che consente di creare delle rappresentazioni grafiche con annesse leggende.
- Numpy, che consente di svolgere analisi statistiche più avanzate.
- Scipy.stats, che consente di svolgere ulteriori calcoli statistici ancora più avanzati e di fare inferenza.
- Math, che consente di compiere determinate operazioni matematiche.

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
import pandas as pd
import statistics as st
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.stats as si
import math as mt
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Dopo questa fase preparatoria il codice crea un database denominato "df" in cui, tramite la funzione read_excel del modulo pandas, immagazzina il file Excel coi prezzi delle azioni delle imprese italiane. Dopodiché il codice chiede di inserire il nome dell'impresa delle cui stock options si vogliono calcolare i prezzi e, una volta inseritone il nome, il codice immagazzina la colonna coi vari prezzi dell'azione all'interno di una variabile denominata "colname". Da tale colonna il codice elimina i dati non disponibili, presenti nel file excel con la sigla N/A, utilizzando la funzione dropna del modulo pandas e immagazzina la risultante colonna nella variabile "col". Successivamente il codice utilizza un ciclo for all'interno della variabile "col", indicizzata tramite le funzioni shape e iloc del modulo pandas, per creare una lista con i vari rendimenti dell'azione. Di tale lista il codice ne calcola la deviazione standard con la funzione stdev del modulo statistics e di questa ne immagazzina il valore all'interno della variabile "v". Questa sarà la volatility del prezzo dell'azione.

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
df = pd.read_excel('prezzi copia 2.xlsx')
df.head()
colname = input("inserisci il nome dell'impresa:")
col = df[colname].dropna(axis=0)
if len(col)<3:
    print("Non sono disponibili sufficienti informazioni sui prezzi dell'azione")
else:
    lista=list()
    for i in range(col.shape[0]-1):
        lista.append(np.log(col.iloc[i+1]/col.iloc[i]))
    v=st.stdev(lista)
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Successivamente il codice utilizza il modulo matplotlib.pyplot per creare la figura in cui verranno rappresentati i due grafici di cui sopra, dando a ciascuno di essi un titolo e delle intestazioni all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate.

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
plt.figure('Rappresentazione grafica a cura di Marco Di Bartolo')
ax2=plt.subplot(2,1,1)
plt.xlabel('tempo')
plt.ylabel("prezzo dell'azione")
plt.title("Sentieri simulati del prezzo dell'azione col metodo di Monte Carlo")
ax1=plt.subplot(2,1,2)
plt.subplots_adjust(hspace=0.5)
plt.xlabel("prezzo dell'azione")
plt.ylabel('prezzo delle stock options')
plt.title('Pricing delle stock options europee su azioni che non pagano dividendi con il metodo di Black-Sholes-Merton, il metodo binomiale e il metodo di Monte Carlo')
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Fatto ciò, il codice richiede l'input delle altre variabili di cui sopra.

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
r=float(input('inserisci il risk-free rate:'))
k=float(input('inserisci lo strike price:'))
T=float(input('inserisci la data di scadenza su base annua:'))
n=int(input('inserisci il numero di stadi:'))
g=int(input('inserisci il numero di simulazioni di Monte Carlo:'))
o=int(input("inserisci il numero di osservazioni prezzo dell'azione - prezzi delle opzioni:"))
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Successivamente, a partire dall'input dell'utilizzatore del codice riguardo il numero di stadi (n), il codice crea una lista, denominata "lista", formata da vari istanti temporali imponendo n incrementi temporali all'istante 0. Dopodiché, a partire dall'input dell'utilizzatore del codice riguardo il numero di osservazioni prezzo dell'azione – prezzi delle opzioni (o), il codice utilizza due cicli while e un'analisi if per creare una lista di lunghezza o, denominata "lista1", fatta di possibili prezzi dell'azione. Il codice crea tale lista applicando degli spreads in aumento e in diminuzione all'ultimo prezzo registrato, a sua volta immagazzinato dentro una variabile denominata "S_0".

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
dt=T/n
lista=[0]
while len(lista)<n+1:
  lista.append(lista[-1]+dt)
S0= col.iloc[-1]
lista1=[S0]
v1=v/3
while len(lista1)<o:
    lista1.append(lista1[-1]+v1)
    if lista1[0]-v1>=0:
        lista1.append(lista1[0]-v1)
    lista1.sort()
while len(lista1)!=o:
    lista1.pop()
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Successivamente il codice utilizza "lista1" all'interno di tre diversi cicli for per creare delle ulteriori liste composte dai prezzi delle stock options calls e puts calcolati con i vari metodi di pricing. All'interno di ciascuno di tali cicli for il codice attua il pricing delle stock options con un metodo diverso di pricing, in modo tale che a ciascuno metodo di pricing sia riservato un proprio ciclo for. In particolare, nel ciclo for dedicato al metodo di Monte Carlo, il codice crea le liste, una per ogni simulazione di Monte Carlo effettuata, contenenti i prezzi simulati dell'azione sottostante.

Queste sono le righe di codice relative al pricing con le formule di Black-Sholes-Merton:

```
lcall=list()
lput=list()
for i1 in lista1:
    d1=(np.log(i1/k)+(r+0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
    d2=(np.log(i1/k)+(r-0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
    call=(i1*si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)-k*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(d2,0.0,1.0))
    put=(k*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(-d2,0.0,1.0)-i1*si.norm.cdf(-d1,0.0,1.0))
    lcall.append(call)
    lput.append(put)
    if i1==S0:
        d11=d1
        d22=d2
        ax1.plot(i1,call,'go',markersize=8)
        ax1.plot(i1,put,'mo',markersize=8)
        print('Secondo il metodo di Black-Sholes-Merton il prezzo della call è',call,'e il prezzo della put è',put)
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Queste sono le righe di codice relative al pricing col metodo binomiale:

```
u=np.exp(v*np.sqrt(dt))
d=np.exp(-v*np.sqrt(dt))
p=(np.exp(r*dt)-d)/(u-d)
lc=list()
lp1=list()
for i2 in lista1:
    lista2=list()
    lista3=list()
    i3=0
    while i3 != n+1:
        w=(mt.factorial(n)/(mt.factorial(i3)*mt.factorial(n-i3)))*(np.power(p,i3))*(np.power((1-p),(n-i3)))
        lista2.append(w*(max(0,(np.power(u,i3))*(np.power(d,(n-i3)))*i2-k)))
        lista3.append(w*(max(0,k-(np.power(u,i3))*(np.power(d,(n-i3)))*i2)))
        i3=i3+1
    c=max(0,sum(lista2)*(np.exp(-r*T)))
    p1=max(0,sum(lista3)*(np.exp(-r*T)))
    lc.append(c)
    lp1.append(p1)
    if i2==S0:
        ax1.plot(i2,c,'ro',markersize=8)
        ax1.plot(i2,p1,'ko',markersize=8)
        print('Secondo il metodo binomiale il prezzo della call è',c,'e il prezzo della put è',p1)
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Queste sono le righe di codice relative al pricing col metodo di Monte Carlo:

```
lc1=list()
lp2=list()
for i4 in lista1:
    lista4=list()
    lista5=list()
    for i5 in list(range(g)):
        lis=[i4]
        m=tuple([n])
        while n !=0:
            i4=i4*np.exp((r-v**2/2)*dt+v*np.sqrt(dt)*np.random.normal(0,1))
            lis.append(i4)
            n=n-1
        lista4.append(max(i4-k,0)*np.exp(-r*T))
        lista5.append(max(k-i4,0)*np.exp(-r*T))
        i4=lis[0]
        n=int(m[0])
        if i4==S0:
            ax2.plot(lista,lis)
    c1=max(0,st.mean(lista4))
    p2=max(0,st.mean(lista5))
    lc1.append(c1)
    lp2.append(p2)
    if i4==S0:
        ax1.plot(i4,c1,'bo',markersize=8)
        ax1.plot(i4,p2,'yo',markersize=8)
        print('Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della call è',c1,'con errore standard di',st.pstdev(lista4)/np.sqrt(g))
        print('Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della put è',p2,'con errore standard di',st.pstdev(lista5)/np.sqrt(g))
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Dopodiché il codice calcola gli R^2 indexes

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
print("Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è",np.power(si.pearsonr(lcall,lc1)[0],2))
print("Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è",np.power(si.pearsonr(lput,lp2)[0],2))
print("Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è",np.power(si.pearsonr(lcall,lc)[0],2))
print("Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è",np.power(si.pearsonr(lput,lp1)[0],2))
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

e le greche delle stock options.

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
print("Il delta della call è",si.norm.cdf(d11,0.0,1.0))
print("Il delta della put è",si.norm.cdf(d11,0.0,1.0)-1)
print("Il gamma sia della call che della put è",si.norm.pdf(d11,0.0,1.0)/(S0*v*np.sqrt(T)))
print("Il vega sia della call che della put è",S0*si.norm.pdf(d11,0.0,1.0)*np.sqrt(T))
print("Il theta della call è",-S0*si.norm.pdf(d11,0.0,1.0)*v/(2*np.sqrt(T))-r*k*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(d22,0.0,1.0))
print("Il theta della put è",-S0*si.norm.pdf(d11,0.0,1.0)*v/(2*np.sqrt(T))+r*k*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(-d22,0.0,1.0))
print("Il rho della call è",k*T*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(d22,0.0,1.0))
print("Il rho della put è",-k*T*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(-d22,0.0,1.0))
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Infine, il codice utilizza le varie liste coi prezzi delle stock options, le liste coi prezzi simulati tramite il metodo di Monte Carlo, “lista1”, “lista” e il modulo matplotlib.pyplot, per mostrare in un’unica figura due grafici: il primo contenente i sentieri simulati del prezzo dell'azione col metodo di Monte Carlo; il secondo contenente, per ciascuno dei vari metodi di pricing, l’andamento dei prezzi delle stock options al variare del prezzo dell’azione sottostante

Queste sono le righe di codice relative a questa fase:

```
ax1.plot(lista1,lc,'r',label='call col metodo binomiale')
ax1.plot(lista1,lp1,'k',label='put col metodo binomiale')
ax1.plot(lista1,lc1,'b',label='call col metodo di Monte Carlo')
ax1.plot(lista1,lp2,'y',label='put col metodo di Monte Carlo')
ax1.plot(lista1,lcall,'g',label='call col metodo di Black-Sholes-Merton')
ax1.plot(lista1,lput,'m',label='put col metodo di Black-Sholes-Merton')
ax1.legend(numpoints=1)
plt.show()
```

(*qualora l’immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

9.3. FUNZIONI IMPORTANTI

Entrando nell’ambito di ciascun output del codice, le funzioni più caratteristiche che il codice utilizza per il loro calcolo sono le seguenti:

- Prezzi calcolati con il metodo di Black-Sholes-Merton:
  scipy.stats.norm.cdf, che codifica la funzione di ripartizione di una normale cumulata.
- Prezzi calcolati con il metodo binomiale:
  math.factorial, che codifica la funzione fattoriale.
- Prezzi calcolati con il metodo di Monte Carlo:
  numpy.random.normal, che codifica un’estrazione casuale da una funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata, $\varphi(0, 1)$.
- Errori standard dei prezzi calcolati con il metodo di Monte Carlo:
  statistics.pstdev, che codifica il calcolo della deviazione standard.

- R^2 indexes:

  scipy.stats.pearsonr, che codifica il calcolo del coefficiente di correlazione di Pearson.

- Greche:

  scipy.stats.norm.cdf, che codifica la funzione di densità di una normale standardizzata.

- Grafici:

  matplotlib.pyplot.subplot, che codifica la creazione in un'unica figura con più grafici.

  matplotlib.pyplot.subplots_adjust, che codifica la regolazione della distanza tra più grafici in una figura.

9.4. VERIFICA DELLA CONVERGENZA DEI 3 METODI DI PRICING

In conclusione dell'intero elaborato, qui di seguito sono riportati dei risultati del codice a conferma di quanto sopra spiegato in merito alla convergenza del moto binomiale e del metodo di Monte Carlo al modello di Black-Sholes-Merton.

Da notare che se $n \to \infty$ e $g \to 0$ tale convergenza si compie, come dimostra il fatto che:

- R^2 indexes $\to 1$

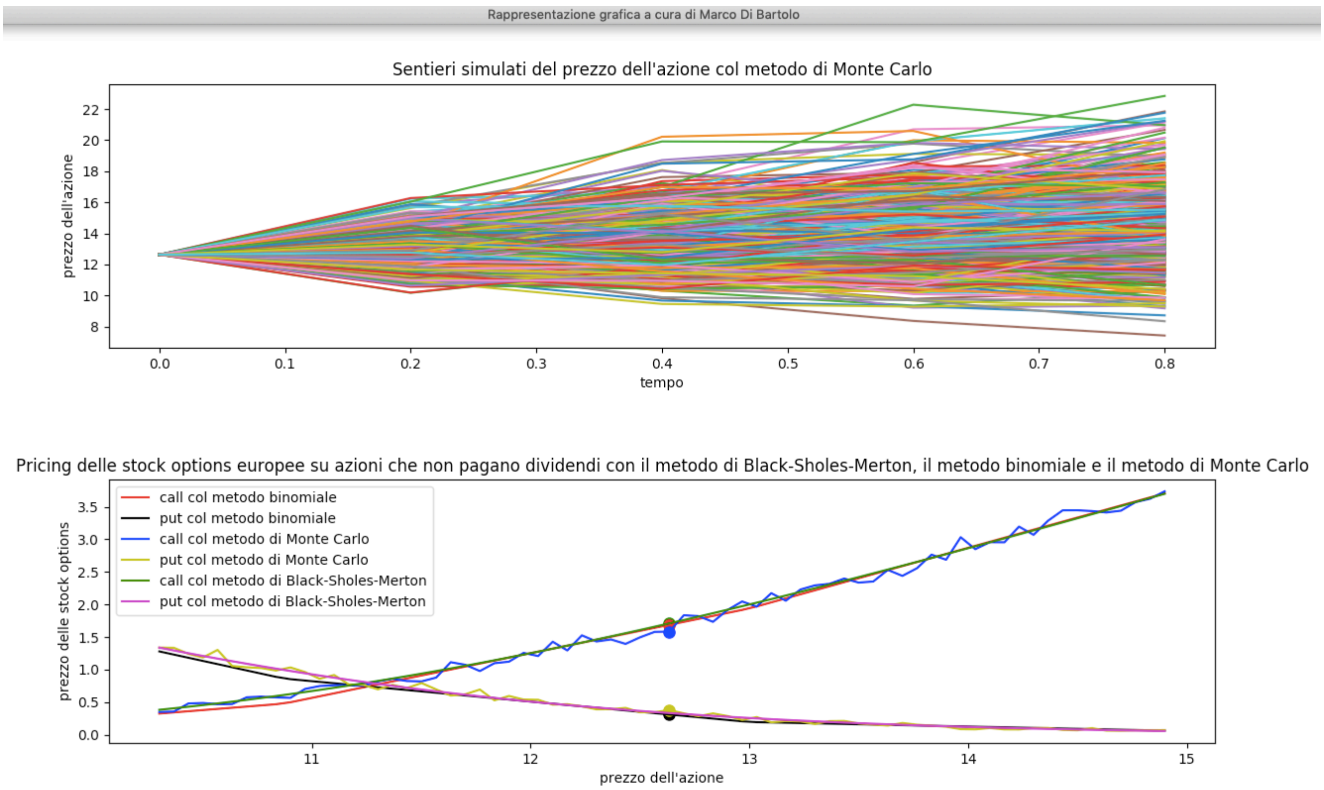
  e

- es_{call} ed $es_{put} \to 0$

Primo caso:

```
inserisci il nome dell'impresa:FIAT CHRYSLER AUTOS.
inserisci il risk-free rate:0.18
inserisci lo strike price:13
inserisci la data di scadenza su base annua:0.8
inserisci il numero di stadi:4
inserisci il numero di simulazioni di Monte Carlo:500
inserisci il numero di osservazioni prezzo dell'azione - prezzi delle opzioni:70
Secondo il metodo di Black-Sholes-Merton il prezzo della call è 1.7102794915715513 e il prezzo della put è 0.33282021634121417
Secondo il metodo binomiale il prezzo della call è 1.687661166753067 e il prezzo della put è 0.31020189152273486
Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della call è 1.5841454738219458 con errore standard di 0.08118737302587818
Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della put è 0.37894587487187154 con errore standard di 0.0351645508164907
Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è 0.9941575335576825
Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è 0.9896231111646857
Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è 0.999353327894993
Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è 0.9952391681101233
Il delta della call è 0.7688796766142973
Il delta della put è -0.23112032338570265
Il gamma sia della call che della put è 0.13481217208872875
Il vega sia della call che della put è 3.4406123654493923
Il theta della call è -1.870458764561868
Il theta della put è 0.15571856589667182
Il rho della call è 6.402997074218787
Il rho della put è -2.6022355055969464
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

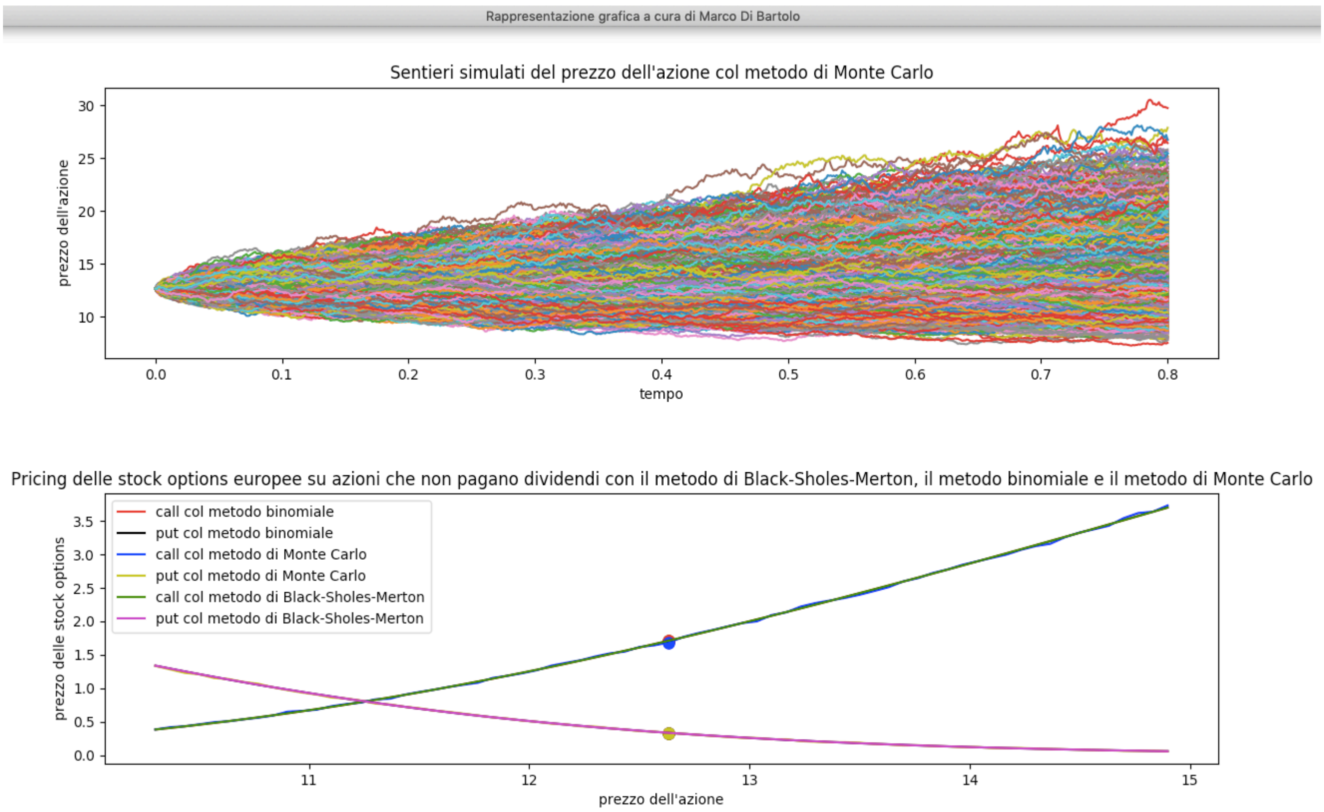


(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

Secondo caso:

```
inserisci il nome dell'impresa:FIAT CHRYSLER AUTOS.
inserisci il risk-free rate:0.18
inserisci lo strike price:13
inserisci la data di scadenza su base annua:0.8
inserisci il numero di stadi:700
inserisci il numero di simulazioni di Monte Carlo:15000
inserisci il numero di osservazioni prezzo dell'azione - prezzi delle opzioni:70
Secondo il metodo di Black-Sholes-Merton il prezzo della call è 1.7102794915715513 e il prezzo della put è 0.33282021634121417
Secondo il metodo binomiale il prezzo della call è 1.7100505752340442 e il prezzo della put è 0.33259130000377557
Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della call è 1.683051293895326 con errore standard di 0.015302489192090036
Secondo il metodo di Monte Carlo il prezzo della put è 0.33083371427709285 con errore standard di 0.005639078179010855
Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è 0.999776058818313
Tra il metodo di Monte Carlo e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è 0.9997541900121325
Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle call è 0.9999999812206687
Tra il metodo binomiale e il metodo di Black-Sholes-Merton l'R-squared index dei prezzi delle put è 0.9999998755278635
Il delta della call è 0.7688796766142973
Il delta della put è -0.23112032338570265
Il gamma sia della call che della put è 0.13481217208872875
Il vega sia della call che della put è 3.4406123654493923
Il theta della call è -1.870458764561868
Il theta della put è 0.15571856589667182
Il rho della call è 6.402997074218787
Il rho della put è -2.6022355055969464
```

(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)



(*qualora l'immagina sia sfocata si consiglia di zoomare*)

BIBLIOGRAFIA

Saunders Anthony, Cornett Marcia Milon, Anolli Mario, Alemanni Barbara(2015), *Economia degli intermediari finanziari*, McGraw-Hill (*)

Hull John C. (2012), *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson (^)

Monti A.C. (2008), *Introduzione alla Statistica*, ESI.

McKinney Wes (2011), *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*, O'Reilly

Crenca Chiara, Fersini Paola, Melisi Giuseppe, Olivieri Gennaro, Pelle Mariaelisa(2017), *Matematica Finanziaria*, Pearson

Nolfe Giuseppe, Buonocore Aniello (2010), *Lezioni di processi stocastici*, Edizioni Scientifiche Italiane

SITOGRAFIA

http://www00.unibg.it/dati/corsi/6627/3000-AR03_2004.pdf (+)
https://matplotlib.org/
https://docs.python.it/html/lib/module-random.html
https://stackoverflow.com/
https://www.scipy.org/
https://docs.python.org/2/library/math.html
https://docs.python.org/3/library/statistics.html
https://titutoro.wordpress.com/2018/07/04/scipy-numpy-matplotlib-e-casi-di-studio-specifici-distribuzioni-normali-fast-fourier-transform/
https://www.finanzaonline.com/ (#)