



Dipartimento
di *Impresa e Management*

Cattedra di *Matematica Finanziaria*

***OPZIONI FINANZIARIE PLAIN VANILLA E STRUTTURATE:
CONSIDERAZIONI SU DIVERSI MODELLI DI PRICING***

Prof. Nino Savelli.

RELATORE

Olimpia Carradori
Matr. 211681

CANDIDATO

Anno Accademico 2018/2019

INDICE

INTRODUZIONE	3
1. OPZIONI FINANZIARIE	5
1.1. OPZIONI PLAIN VANILLA IN STILE EUROPEO	5
1.2. OPZIONI STRUTTURATE	9
1.1.1. Opzioni asiatiche	10
1.1.2. Opzioni regular barrier	11
2. VALUTAZIONE DELLE OPZIONI FINANZIARIE	13
2.1. VALORE INTRINSECO E VALORE TEMPORALE DELLE OPZIONI FINANZIARIE	13
2.2. MODELLI DI PRICING IN ASSENZA DI RISCHIO DI TASSO	16
2.2.1. Modello di pricing binomiale di Cox, Ross e Rubinstein (CRR) e Hull e White	16
2.2.2. Il modello di Black e Scholes	22
2.2.3. Simulazioni di Monte Carlo	32
3. APPLICAZIONE DI METODI DI PRICING SU OPZIONI FINANZIARIE	
35	
3.1. FORMULA DI BLACK E SCHOLES: APPLICAZIONE SU OPZIONI PLAIN VANILLA	35
3.2. ALBERI BINOMIALI DI CRR: APPLICAZIONE SU OPZIONI PLAIN VANILLA	39
3.2.1. Confronto tra modelli di pricing su opzioni plain vanilla: Black e Scholes e CRR	41
3.3. SIMULAZIONI DI MONTE CARLO: APPLICAZIONE SU OPZIONI PLAIN VANILLA	43
3.3.1. Confronto tra modelli di pricing su opzioni plain vanilla: Black e Scholes e simulazioni di Monte Carlo	48
3.4. VALUTAZIONE DI OPZIONI ASIATICHE	53
3.5. VALUTAZIONE DI OPZIONI REGULAR BARRIER	55
CONCLUSIONI	60
BIBLIOGRAFIA	62
APPENDICE	63

Introduzione

I derivati sono strumenti finanziari il cui valore dipende dal valore di un'attività sottostante. Oggi questi strumenti hanno assunto un ruolo centrale e indispensabile per tutti gli agenti finanziari, essendo impiegati ai fini di assolvere ad una molteplicità di funzioni che ruotano prevalentemente attorno alla gestione del rischio e all'ottimizzazione di portafogli finanziari. Risulta dunque essenziale riconoscere come definire adeguatamente il loro prezzo.

Tra gli strumenti derivati più diffusi è importante far riferimento ai contratti di opzione. Diversi sono i metodi potenzialmente impiegabili per poter valutare tali contratti; per le opzioni plain vanilla in stile europeo il metodo più diffuso è rappresentato dall'approccio analitico di Myron Scholes e Fischer Black, in grado di elaborare una formula chiusa per la definizione del prezzo. Questo metodo, introdotto nel 1973, rappresenta un'innovazione incisiva nell'ambito della valutazione delle opzioni, che per la prima volta è stato avvicinato al mondo della statistica e della probabilità. L'innovazione è costituita dall'introduzione di assunzioni relative al moto rappresentativo della dinamica dei prezzi azionari dai quali dipende il payoff dell'opzione e dunque il suo prezzo: il moto browniano geometrico. Semplificando le ipotesi base dell'approccio di Black e Scholes, e favoriti dall'elevato potere computazionale dei computer moderni e dalla crescente qualità dei software di programmazione, una varietà di metodi numerici sono stati successivamente elaborati e impiegati nella valutazione delle opzioni finanziarie. Questi metodi sono caratterizzati da un elevato potenziale in termini di accuratezza ed efficienza, ma soprattutto flessibilità nella determinazione del prezzo delle opzioni finanziarie. È anche l'adattabilità degli stessi alla valutazione di opzioni strutturate che ne spiega l'elevata diffusione.

Nella trattazione che segue si mira ad esporre un confronto tra i diversi metodi di valutazione delle opzioni finanziarie. A tal fine, in prima istanza, risulta opportuno dedicarsi alla conoscenza teorica ed analitica delle stesse, tematica affrontata nel *Capitolo 1*. Si provvede, dunque, ad approfondire lo studio delle opzioni plain vanilla e di opzioni strutturate asiatiche e regular barrier. La familiarità con la struttura dei payoff dei suddetti contratti consente, infatti, la comprensione dei diversi modelli di valutazione elaborati in letteratura ai fini di definire il loro prezzo.

Nel *Capitolo 2* si provvede alla presentazione di tali metodi in termini teorici, esaltandone la vincolatività delle ipotesi e l'applicabilità alle diverse tipologie di opzioni. Si espone, dunque, la dimostrazione e l'approccio assunto da Black e Scholes. Tra i metodi numerici, si approfondisce il metodo degli alberi binomiali di Cox, Ross e Rubinstein e il modello delle simulazioni di Monte

Carlo. Per ognuno di essi, applicabile direttamente alle opzioni plain vanilla, si forniscono esempi di studi riscontrati in letteratura che consentono di effettuare le manipolazioni necessarie, laddove possibili, per adottare tali metodi ai fini della valutazione di opzioni strutturate.

Attraverso le nozioni esposte nei primi capitoli, è possibile applicare empiricamente i metodi esposti a diverse tipologie di opzioni finanziarie simulate. L'adozione pratica dei diversi metodi completa l'analisi esclusivamente teorica che era stata precedentemente condotta e, nel *Capitolo 3*, consente di analizzarli sotto una pluralità di profili, sottolineandone vantaggi e svantaggi in relazione a caratteri di efficienza, accuratezza, flessibilità ed adattabilità. I metodi sono eseguiti nell'ambiente di lavoro 'R' tramite l'elaborazione di algoritmi di cui i principali sono esposti in appendice.

1. Opzioni finanziarie

Le opzioni sono contratti finanziari derivati che conferiscono all'acquirente il diritto di acquistare o vendere un dato ammontare di sottostante ad una specifica data futura e ad un dato prezzo di esercizio. Determinano inoltre il sorgere, in capo al venditore/emittente, di un'obbligazione a vendere o acquistare tale attività sottostante allo stesso prezzo di esercizio. Il contratto di opzione descritto è definito in stile europeo in quanto conferisce il diritto di esercizio esclusivamente nell'istante della scadenza contrattuale. Un contratto di opzione in stile americano, invece, conferisce all'acquirente il diritto di esercizio dell'opzione in qualsiasi istante durante la vita a scadenza del contratto. L'acquisto di un contratto di opzione richiede inoltre il pagamento del prezzo dell'opzione, obbligazione che sorge in capo all'acquirente nel momento della stipula contrattuale.¹

1.1. Opzioni plain vanilla in stile europeo

- Opzioni call plain vanilla in stile europeo

Colui che possiede un'opzione call, gode del diritto di acquistare l'attività sottostante all'istante di scadenza T , o data di esercizio, sostenendo un prezzo di esercizio X . A tale diritto corrisponde l'obbligo di vendita da parte dell'emittente (o venditore). L'acquirente e possessore assume una posizione long sul contratto suddetto, in modo speculare il venditore assume una posizione short. Assumendo agenti massimizzatori di profitto, il payoff del detentore dell'opzione call dipende dal prezzo assunto dal sottostante nella data di esercizio secondo la seguente relazione:

$$payoff(C) = \max(S(T) - X; 0)$$

Attraverso un 'position diagram' risulta possibile rappresentare graficamente lo schema di payoff di tale long call.

¹ Nella trattazione che segue si fa riferimento ai concetti esposti in "Manuale di finanza vol.III Modelli stocastici e contratti derivati, Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI" (2006) e in "Options, Futures and Other Derivatives. Eighth edition. John C. HULL" (2012).

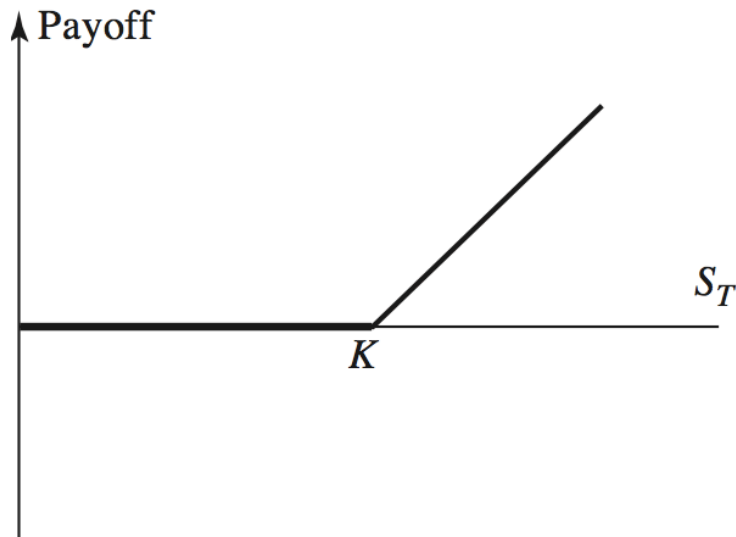


Figura 1 Payoff Opzione Long Call. Fonte: *Options, Futures and Other Derivatives*. Hull (2012)

Lo schema del payoff non è lineare e il valore del payoff non può essere mai negativo ma al più nullo. Nel caso in cui il premio (prezzo dell'opzione) è liquidato a pronti, lo schema dei profitti (o perdite) alla scadenza, istante T, è:

$$\max (S(T) - X, 0) - C(T)$$

Emerge, dunque, che la massima perdita del soggetto dotato di posizione long è limitata al prezzo del contratto e si verifica in caso di mancato esercizio.

Nell'ambito dei contratti di opzione l'attività di colui che assume una posizione long sull'opzione call corrisponde alla passività di colui che assume la posizione short. Se il prezzo dell'attività sottostante risulta essere minore del prezzo di esercizio, quando l'opzione matura, l'acquirente, non eserciterà la call e il payoff del venditore sarà pari a zero. Se il prezzo dell'attività sottostante è maggiore del prezzo di esercizio, sarà tale da indurre l'agente in posizione long a esercitare l'opzione, determinando un payoff negativo per il venditore.

$$Payoff(C) = \max (X - S(T); 0)$$

Emerge che l'agente con posizione short ha payoff massimo nullo, e profitto massimo pari al prezzo dell'opzione. Inoltre si espone al rischio di una perdita potenzialmente priva di limiti all'aumentare del prezzo del sottostante, come è osservabile dal grafico del profitto:

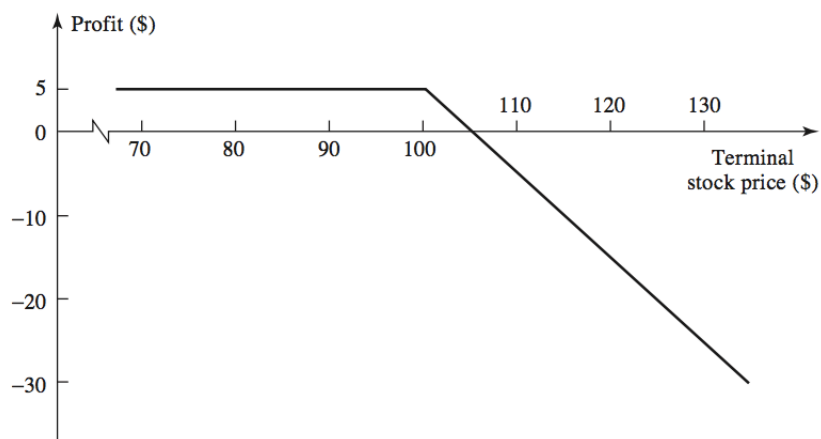


Figura 2 Grafico di profitto di un'opzione short call. Fonte: *Options, Futures and Other Derivatives*. Hull (2012)

Il venditore/emittente subisce la decisione della controparte.

-Opzione Put plain vanilla in stile europeo

L'opzione put riconosce il diritto, in capo all'acquirente/possessore, di vendere l'attività sottostante, nell'istante di scadenza contrattuale pari a T e al prezzo di esercizio pari a X . A tale diritto corrisponde l'obbligo di acquisto da parte dell'emittente (o venditore). L'acquirente e possessore assume, dunque, una posizione long sul contratto suddetto, il venditore assume una posizione short.

Le condizioni per le quali un'opzione put risulti essere profittevole sono esattamente l'opposto di quelle che determinano la profittabilità di un'opzione call. Se il prezzo dell'attività sottostante risulta essere maggiore del prezzo di esercizio, non sarà profittevole vendere l'attività a tale prezzo, ma risulterebbe più conveniente vendere l'attività nel mercato. L'opzione risulta dunque priva di valore. Se, invece, il prezzo dell'attività sottostante risulta essere inferiore del prezzo di esercizio, risulterà profittevole esercitare l'opzione. Il payoff dell'opzione put long risulta essere pari a:

$$payoff(P) = \max(X - S(T); 0)$$

E' possibile osservare che, dato che il prezzo del sottostante non può assumere valori negativi, nel caso di una posizione long su un'opzione put, il payoff dell'acquirente non può superare il prezzo di esercizio. Il 'position diagram' dell'opzione long put è descritto da:

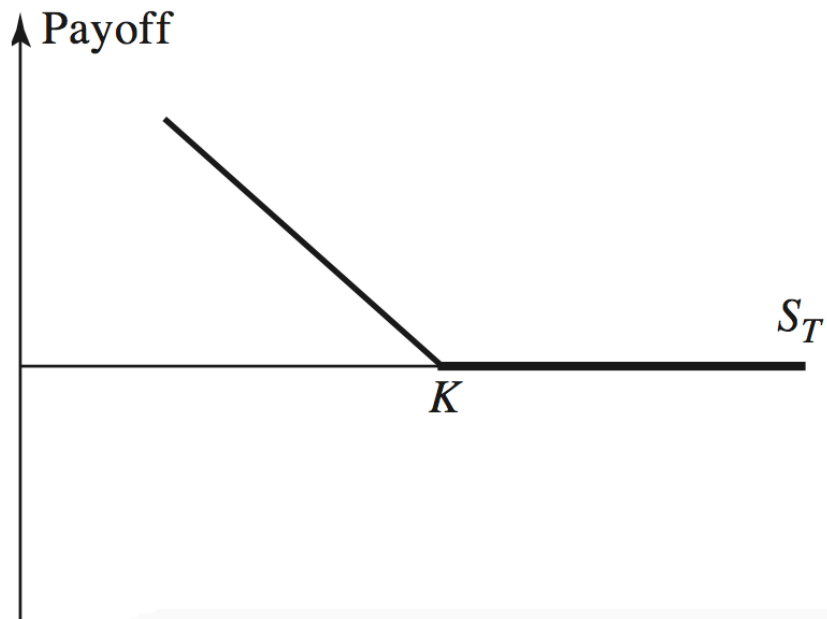


Figura 3 Payoff di opzione long put. Fonte: *Options, Futures and Other Derivatives*. Hull (2012)

Il valore del payoff non può essere mai negativo, ma al più nullo in caso di mancato esercizio.

Nel caso in cui il prezzo dell'opzione sia liquidato a pronti lo schema dei profitti (o perdite) alla scadenza, istante T è pari a:

$$\max (X - S(T)) - P(T)$$

La perdita in caso di mancato esercizio non può essere superiore al premio, ed è pari ad esso in caso di mancato esercizio.

L'agente che assume una posizione short sull'opzione put assume l'obbligo di pagare il prezzo di esercizio all'agente in posizione long se quest'ultimo lo richiede esercitando l'opzione, questo si verificherà se il prezzo dell'attività sottostante sarà inferiore rispetto al prezzo di esercizio dell'opzione. Il payoff dell'agente con posizione short in tal caso risulta essere pari a:

$$Payoff(Ps) = \max (S(T) - X; 0)$$

Nel caso presentato la perdita di tale agente non può essere superiore al prezzo di esercizio, ma al più uguale ad esso, dato che il prezzo del sottostante non può assumere valori negativi ma al più nulli. Nel caso di mancato esercizio dell'opzione da parte dell'agente con posizione long il venditore/emittente avrà un profitto pari al prezzo del contratto di opzione liquidato a pronti dall'agente acquirente. Il grafico relativo al profitto derivante da tale posizione è il seguente:

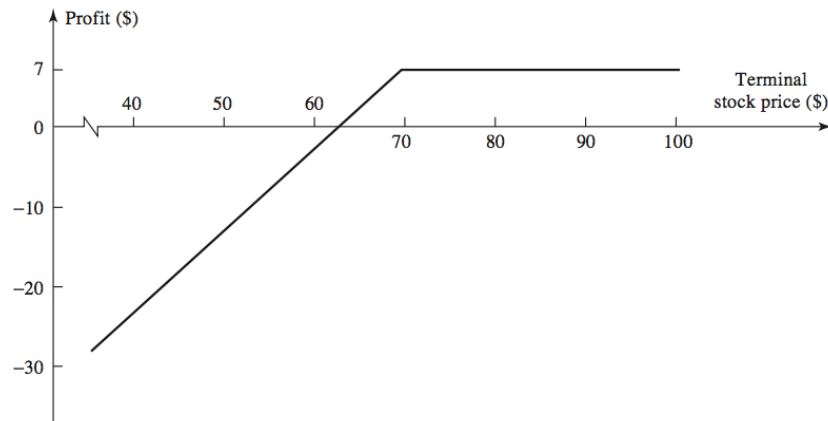


Figura 4 Grafico di profitto di un'opzione short put. Fonte: *Options, Futures and Other Derivatives*. Hull (2012)

I contratti di opzione possono essere anche classificati sulla base della natura dell'attività sottostante: titoli azionari, valute, indici di mercato, futures. All'interno della trattazione seguente si analizzeranno esclusivamente i contratti di opzione in stile europeo con sottostante costituito da azioni.

1.2. Opzioni strutturate

I contratti di opzione dotati delle caratteristiche esposte nei precedenti paragrafi sono definiti opzioni plain vanilla, questi contratti sono caratterizzati da una struttura standardizzata.

Le opzioni plain vanilla rappresentano una porzione ridotta di tutte le possibili varianti che possono caratterizzare i contratti di opzione; in particolare, quando il payoff derivante dall'acquisto di un contratto di opzione è dotato di caratteri distinti o nuovi rispetto a quanto esposto nella trattazione precedente, ci si riferisce alla categoria delle opzioni strutturate. Non caratterizzate da una struttura standardizzata, le opzioni strutturate, o esotiche, possono essere ricondotte a diverse classi. Considerando esclusivamente opzioni in stile europeo e caratterizzate da titoli azionari come sottostanti, è possibile distinguere due categorie di tali contratti:

- **Opzioni path dependend:** il payoff di questo tipo di opzioni non dipende esclusivamente dal prezzo assunto dal sottostante al termine della vita a scadenza del contratto derivato, risultano rilevanti anche i movimenti del prezzo del sottostante che hanno luogo durante la vita a scadenza dell'opzione. È possibile distinguere ulteriormente tali opzioni strutturate in opzioni altamente e lievemente dipendenti dal prezzo assunto dal sottostante. Nel primo caso il payoff del contratto di opzione è altamente influenzato dal percorso del prezzo del sottostante, le opzioni lookback sono dotate di payoff che dipende dal maggiore o minore valore assunto dal

prezzo del sottostante durante la vita a scadenza dell'opzione. Un altro esempio è costituito dalle opzioni asiatiche, il cui payoff è determinato dal valore medio assunto dal sottostante durante la vita a scadenza del contratto di opzione. Nel secondo caso la dipendenza è minore, come nel caso delle opzioni barrier, il cui payoff dipende esclusivamente dal fatto che il sottostante abbia, o meno, assunto valori inferiori di un certo livello prima della scadenza del derivato.

- **Opzioni multivariate:** questa classe di opzioni strutturate è caratterizzata da una pluralità di asset sottostanti. In tale caso, il valore del payoff del contratto di opzione dipende anche da parametri relativi alla correlazione esistente tra i prezzi dei sottostanti. Esempi sono le opzioni *basket*.

1.1.1. Opzioni asiatiche

Come osservato, il payoff delle opzioni asiatiche dipende dalla media dei prezzi assunti dal sottostante durante un certo intervallo temporale. Il prezzo del contratto di opzione, dunque, è funzione della media dei prezzi assunti dal sottostante durante la vita a scadenza dell'opzione. Il payoff di questa categoria di opzione è dato dalla differenza tra il valore del prezzo medio assunto dal sottostante in un dato intervallo temporale S_{med} e il prezzo di esercizio X :

$$payoff := \begin{cases} \max(S_{med} - X, 0) & \text{per un'opzione call} \\ \max(X - S_{med}, 0) & \text{per un'opzione put} \end{cases}$$

La media dei prezzi assunti dal sottostante può essere calcolata come media geometrica o come media aritmetica, condizione incisiva nella scelta del metodo di pricing di queste opzioni.

Nella maggior parte dei contratti di opzione di tipo asiatico, inoltre, l'intervallo temporale considerato coincide con la scadenza dell'opzione, tuttavia in altri casi la media potrebbe essere calcolata in un intervallo inferiore. L'intervallo considerato è tale da poter influire fortemente sul valore dell'opzione asiatica, rappresentando, dunque, una variabile di grande rilevanza: ad esempio, se il contratto di opzione asiatica prevede un intervallo breve e vicino alla scadenza dell'opzione, entro il quale calcolare la suddetta media, il valore dell'opzione asiatica è simile a quello assunto da un'opzione europea plain vanilla scritta su uno stesso sottostante, condizione che porta a considerare il valore di un'opzione europea come un upper bound del valore di un'opzione asiatica. Il valore dell'opzione asiatica è anche influenzato dalla scelta dell'istante a partire dal quale si calcola la media dei prezzi assunti dal sottostante: se l'istante di inizio è più lontano nel tempo la volatilità del valore del prezzo

medio sarà più alta, accrescendo di conseguenza anche il valore dell'opzione stessa². Nella trattazione si ipotizza, se non diversamente specificato, un intervallo temporale coincidente con la vita a scadenza del contratto di opzione asiatica.

1.1.2. Opzioni regular barrier

Tra le opzioni strutturate path-dependent di notevole successo e rilevanza nel mercato finanziario, sono anche le opzioni regular barrier.

Il payoff delle opzioni regular barrier si basa sul raggiungimento, da parte del valore del prezzo del titolo azionario sottostante, di un valore di prezzo predeterminato, durante la vita a scadenza dell'opzione: un contratto di opzione regular barrier knock-out cessa di esistere al realizzarsi di tale condizione, vice versa un contratto di opzione regular barrier knock-in viene ad esistenza al realizzarsi di tale condizione. Nel dettaglio, la struttura del payoff può essere così esemplificata³:

$$\text{Down - and - out call:} = \begin{cases} \max [0, S(T) - X], & \text{se } \forall \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \\ 0, & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

$$\text{Down - and - in call:} = \begin{cases} \max [0, S(T) - X], & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ 0, & \text{se } \forall \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases}$$

$$\text{Up - and - out put:} = \begin{cases} \max [0, X - S(T)], & \text{se } \forall \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) < H \\ 0, & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases}$$

$$\text{Up - and - in put:} = \begin{cases} \max [0, X - S(T)], & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ 0, & \text{se } \forall \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) < H \end{cases}$$

Dove τ rappresenta un generico momento durante la vita a scadenza del contratto di opzione e H rappresenta il valore di prezzo posto come barriera.

Cox e Miller (1965) provvedono a definire la densità di probabilità con cui il prezzo del titolo azionario sottostante assuma il valore della barriera durante la vita a scadenza del contratto di opzione:

² Vd. § 2-Valutazione delle opzioni plain vanilla.

³ Francesco SGUERA, *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, ALEA WEB, Marzo 1999.

$$p\left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right), t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} \left(\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) - 2H - at\right)^2} e^{\frac{2Ha}{\sigma^2}} \right)$$

con:

$$a = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

Risulta opportuno sottolineare che un'opzione down-and-out call è una tipologia di opzione knock-out la cui corrispondente opzione knock-in è una down-and-in call: quando la prima cessa di esistere, al raggiungimento del prezzo posto a barriera, la seconda viene ad esistere. Questa condizione consente di affermare che:

$$C_{downout} = C - C_{downin}$$

Analogamente è possibile osservare che al cessare di esistere di un'opzione up-and-out put, un'opzione up-and-in put viene ad esistenza. Si ottiene dunque che:

$$P_{upout} = P - P_{upin}$$

2. Valutazione delle opzioni finanziarie

Ai fini di definire il valore di contratti di opzione risulta necessario individuare le variabili che influenzano tale valore⁴:

- 1) La data di scadenza del contratto, in cui l'agente in posizione long relativamente ad un'opzione in stile europeo può decidere se esercitare il proprio diritto, T
- 2) Il prezzo del sottostante nel momento di acquisto del contratto di opzione, $S(0)$
- 3) Il prezzo di esercizio, X
- 4) La volatilità del prezzo del titolo azionario, σ
- 5) Il tasso di interesse risk-free nominale e positivo, r
- 6) I dividendi che saranno pagati sull'azione sottostante

Osserviamo, inoltre, le ipotesi che domineranno le successive deduzioni circa il valore dell'opzione:

- 1) I costi di transazione sono assenti,
- 2) Tutti i profitti o le perdite derivanti dall'attività di trading sui mercati finanziari, sono sottoposti allo stesso regime di tassazione,
- 3) Risulta possibile prendere a prestito o prestare denaro al tasso di interesse risk-free,
- 4) Ciascun agente nel mercato è razionale e sfrutta ogni esistente opportunità di arbitraggio nel momento in cui si genera, dunque facendola immediatamente scomparire.

2.1. Valore intrinseco e valore temporale delle opzioni finanziarie

Il valore intrinseco di un contratto di opzione è rappresentato dal massimo tra il valore che esso avrebbe qualora l'agente in posizione long esercitasse immediatamente il diritto acquisito con l'acquisto dell'opzione e zero, ricordando infatti che il payoff dell'opzione non può mai assumere valori negativi per l'agente in posizione long. Per una opzione call il valore intrinseco è dunque:

$$e^C(t) = \max\{S(T) - X; 0\} \quad \text{con } t \leq T$$

Per una opzione put è invece pari a:

$$e^P(t) = \max\{X - S(T); 0\} \quad \text{con } t \leq T$$

⁴ Analogamente a quanto sostenuto per il precedente capitolo, i concetti esposti sono tratti da Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI. *Manuale di finanza vol.III Modelli stocastici e contratti derivati*. Il Mulino, 2006; John C. HULL. *Options, Futures and Other Derivatives*. Eighth edition. 2012

Appare in questa circostanza rilevante esporre la seguente classificazione:

- 1) Opzioni in the money, per un'opzione call $S(T) > X$, per un'opzione put $S(T) < X$,
- 2) Opzioni at the money, per un'opzione call e put $S(T) = X$,
- 3) Opzioni out of the money, per un'opzione call $S(T) < X$, per un'opzione put $S(T) > X$.

Se si osserva il valore intrinseco dell'opzione nell'istante di scadenza, espresso tramite le suddette classificazioni, solo le opzioni in the money saranno esercitate, le opzioni at the money e out of the money avranno infatti un valore nullo.

La differenza tra il valore dell'opzione e il suo valore intrinseco definisce il valore temporale dell'opzione. Tale differenza risulta essere sempre maggiore o al più uguale a zero. Facendo riferimento a qualsiasi istante $0 < t < T$, l'opzione mantiene un valore positivo anche se risulta essere at the money o out of the money. Il processo del prezzo dell'azione sottostante è di natura stocastica, assicurando l'esistenza di una probabilità che l'opzione nell'istante di scadenza sia profittevole, dunque in the money.

Risulta così possibile identificare in maniera più dettagliata il valore minimo, 'lower bound', e massimo, 'upper bound', entro i quali può oscillare il prezzo di un'opzione senza consentire la realizzazione di opportunità di arbitraggio prive di rischio.

-Lower Bound

Il valore minimo che un'opzione può assumere risulta essere pari alla differenza tra il prezzo del sottostante nell'istante t e il valore in t del prezzo di esercizio:

$$C(t) \geq S(t) - v(t, T)X \quad (2.1)$$

se si considera un'opzione call, e:

$$P(t) \geq v(t, T)X - S(t) \quad (2.2)$$

considerando, invece, un'opzione put. In entrambi i casi $v(t, T)$ rappresenta il fattore di sconto valido tra t e T con T pari all'istante di scadenza dell'opzione.

Per dimostrare la deduzione (2.1) è possibile osservare due portafogli:

A1) E' costituito da una opzione call in stile europeo dalle caratteristiche descritte in precedenza, e da uno zero-coupon bond che fornisce un payoff pari a X al tempo T,

A2) E' composto dall'attività sottostante l'opzione call,

Il portafoglio A1 per le sue caratteristiche avrà un valore in $t=T$ pari a:

$$A1 = \max\{S(T); X\}$$

Il portafoglio A2) ha un valore pari a S(T) al tempo $t=T$. In condizioni di assenza di arbitraggio, il portafoglio A1) deve sempre avere un valore che sia maggiore o al più uguale rispetto a quello del portafoglio A2). Riportando la stessa relazione al tempo $t=0$ si avrà che, in assenza di possibilità di arbitraggio:

$$C + v(0, T)X \geq S(0)$$

Dato che l'opzione, come osservato, non può assumere valori negativi:

$$C \geq \max\{S(0) - v(0, T)X; 0\}^5$$

Per dimostrare la deduzione (2.2) si osservino due portafogli:

B1) E' costituito da una opzione put in stile europeo dalle caratteristiche descritte in precedenza, e dall'attività sottostante l'opzione put,

B2) E' composto da uno zero-coupon bond con valore facciale X e scadenza al tempo $t = T$,

Il valore del portafoglio B1) nell'istante di scadenza del contratto è:

$$P + S(0) \geq v(0, T)X$$

e il valore del portafoglio B2) nello stesso istante è pari a X. Il valore del portafoglio B1), per non consentire opportunità di arbitraggio non rischiose, deve avere, in ogni istante, un valore maggiore o al più uguale rispetto a quello del portafoglio B2) delineando dunque la seguente relazione:

$$P \geq \max\{v(0, T)X - S(0); 0\}$$

⁵ Il titolo azionario considerato non paga dividendi.

-Upper Bound

Il valore massimo di un'opzione call in stile europeo non può mai essere superiore al valore dell'azione sottostante tale opzione. Questo, infatti, darebbe vita ad opportunità di arbitraggio prive di rischio: un arbitraggista potrebbe acquistare l'azione e vendere l'opzione call. Il valore massimo di un'opzione put è pari al prezzo di esercizio dell'opzione attualizzato al tempo dell'acquisto della stessa da parte dell'acquirente, $t=0$. In caso contrario una strategia di arbitraggio privo di rischi consiste nel vendere un'opzione put assumendo così posizione short sulla stessa, ed investire il ricavato al tasso di interesse risk-free.

2.2. Modelli di pricing in assenza di rischio di tasso

Nella trattazione seguente⁶ sono esposti modelli di pricing appartenenti alla categoria dei metodi numerici e modelli di pricing appartenenti alla categoria dei metodi analitici in forma chiusa.

Nel primo caso sono esposti teoricamente i metodi che vertono sulla simulazione di alberi binomiali, facendo riferimento al modello di Cox, Ross e Rubinstein per le opzioni plain vanilla e accennando al modello di Hull e White per le opzioni asiatiche, e i metodi che vertono sulle simulazioni di Monte Carlo dei prezzi del sottostante, applicabili a tutte le tipologie di opzioni.

Nel secondo caso è approfondito l'approccio di Black e Scholes ai fini di individuare una formula chiusa per la valutazione di opzioni plain vanilla; è inoltre esposta una modalità di manipolazione di tale formula per ottenere un modello di valutazione delle opzioni asiatiche con media geometrica e delle opzioni regular barrier.

2.2.1. Modello di pricing binomiale di Cox, Ross e Rubinstein (CRR) e Hull e White

Il modello di Cox, Ross e Rubinstein è stato introdotto nel 1979 con lo scopo di fornire un'alternativa semplificatrice e più intuitiva all'approccio di Black e Scholes per la determinazione del prezzo di opzioni plain vanilla.

⁶ Si fa riferimento a: Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI. *Manuale di finanza vol.III Modelli stocastici e contratti derivati*. Il Mulino, 2006; John C. HULL. *Options, Futures and Other Derivatives*. Eighth edition. 2012; John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein. *Option pricing: a simplified approach*. *Journal of Financial Economics* 7 (1979) pp.229-263

Il modello assume che il processo di prezzo delle azioni segua un andamento moltiplicativo, nel tempo discreto, e binomiale⁷. Gli sviluppi dei prezzi, in un intervallo temporale caratterizzato da sotto-intervalli discreti, possono essere descritti tramite un albero binomiale. Ad ogni intervallo temporale considerato è possibile osservare una data probabilità di crescita del prezzo dell'azione in un dato ammontare percentuale, ed una data probabilità di diminuzione del prezzo di un dato ammontare percentuale. I tassi di rendimento sui titoli azionari osservati, possono assumere alternativamente uno di due diversi valori all'interno di un intervallo di tempo: il valore $u - 1$ con probabilità pari a q , e $d - 1$ con probabilità pari a $1 - q$. Dunque, assumendo che il valore al tempo $t=0$ dell'azione sia pari a $S(0)$, risulta possibile rappresentare la dinamica del suo prezzo con un diagramma ad albero caratterizzato da un singolo step, un diagramma definito per questo uni-periodale:

$$S \begin{cases} uS & \text{con probabilità } q, \\ dS & \text{con probabilità } 1 - q \end{cases}$$

Il prezzo dell'azione al termine dell'intervallo osservato sarà $S(0)u$, con probabilità q , e $S(0)d$ con probabilità $1 - q$.

Nel modello uni-periodale trattato si fa riferimento a un'opzione call in stile europeo, la scelta è determinata dall'interesse nel rispettare l'elaborato originale di Cox, Ross e Rubinstein⁸.

Il valore, C_u , assunto dall'opzione con probabilità q al termine dell'intervallo è:

$$C_u = \max(uS - X, 0)$$

Il valore C_d assunto con probabilità $1 - q$ al termine dello stesso intervallo è:

$$C_d = \max(dS - X, 0)$$

Il modello si sviluppa sulla base di un'argomentazione di non-arbitraggio.

⁷ Vd. § 2.2.1.1-Processi stocastici binomiali.

⁸ Vd. in proposito § 4.3.2-Il caso generale; dal libro "Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI" In particolare il caso di una opzione call può essere facilmente esteso al caso generale osservando che il payoff dell'opzione è descritto da $Y(t+1)=f[S(t+1)]$ dove nel caso di una call avremmo $f(x):=\max(x-K,0)$ e put $f(x):=\max(K-x;0)$

A tale scopo, si supponga di detenere un portafoglio che è investito in titoli azionari in una quota pari a Δ^9 e in quota pari a B in obbligazioni risk-free (ponendo r pari al rendimento costante delle obbligazioni risk-free):

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r}$$

È dimostrabile che la posizione assunta sul titolo obbligazionario privo di rischio è short, ciò equivale a contrarre un debito al tasso r^{10} .

La scelta di tali quote è motivata dalla possibilità di realizzare un portafoglio composto da titoli azionari e titoli obbligazionari risk-free, tale da eguagliare, con il suo payoff, il payoff assunto da un'opzione call al termine dell'intervallo discreto considerato, nell'istante $t = T$, in ogni scenario ipotizzabile.

Il valore di tale portafoglio negli istanti $t = 0$ e $t = T$ (dove T è il tempo di riferimento a seguito di un intervallo) è illustrato da un albero binomiale:

$$\Delta S + B \begin{cases} \Delta u S + r B & \text{con probabilità } q, \\ \Delta d S + r B & \text{con probabilità } 1 - q. \end{cases}$$

In assenza di opportunità di arbitraggio il valore attuale dell'opzione call, C , deve essere equivalente al valore attuale del portafoglio descritto:

$$C = \Delta S + B$$

dunque,

⁹ Si può osservare che delta rappresenta una misura del rapporto tra la variazione che caratterizza il prezzo dell'opzione a fronte di una data variazione del prezzo del sottostante. Risulta inoltre possibile dimostrare che il valore di delta è compreso tra zero e uno. Vd. in proposito § 4.3.1- Il caso della call; dal libro "Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI"

¹⁰ Si noti che il valore di B non può essere positivo, Vd. in proposito § 4.3.1- Il caso della call; dal libro "Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI"

$$C = \frac{[\left(\frac{r-d}{u-d}\right) C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) C_d]}{r}$$

Il portafoglio osservato, può essere ricavato anche tramite la logica della costruzione di un altro “hedged portfolio” (Hull, 2012). È possibile costituire un portafoglio che, se opportunamente calibrato, produca un payoff privo di rischio¹¹ in quanto costituito dall’opzione call e l’attività sottostante, dotate di payoff legati da un rapporto deterministico. Questa caratteristica, se imposta, richiede che i payoff del portafoglio costituito da una call e una data quantità di sottostante, nei due stadi teorizzati tramite l’albero binomiale siano equivalenti. L’equivalenza consente di calcolare la quota investita nel sottostante. Essa equivale ad assumere una posizione short sullo stesso, in quota pari a Δ ¹². In questo caso il portafoglio al tempo $t = T$ è caratterizzato da payoff deterministici, dunque il suo valore al tempo $t = 0$ può essere calcolato attualizzando lo stesso al tasso di interesse risk-free; solo in questo caso si assicurerà l’assenza di ogni opportunità di arbitraggio. Emerge, dunque, la possibilità di giungere ad una soluzione analoga a quella ottenuta tramite la dimostrazione precedentemente esposta:

$$C = e^{-rT} [qC_u + (1 - q)C_d] \quad (2.3)$$

con

$$q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

E’ dunque possibile definire il prezzo dell’opzione osservata in funzione di $S(0), X, u, d, r$. Significativa è l’indipendenza della relazione dalla probabilità q ; questo, infatti, consente di osservare che nella determinazione di un modello di pricing per le opzioni è possibile accettare l’ipotesi che gli investitori siano risk-neutral¹³. Si osservi, inoltre, che dato $q = (r - d)/(u - d)$, questo valore è sempre maggiore di zero e minore di uno, assumendo quindi le stesse caratteristiche di una probabilità. q E’ il valore che assume la probabilità di u (di crescita del prezzo) sotto le ipotesi di

¹¹ Vd. § 2.2.2- Il modello di Black e Scholes, per una più estesa argomentazione in tal senso.

¹² Vd. in proposito § 4.3.1- Il caso della call; dal libro “Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI”

¹³ Si noti che l’attitudine nei confronti del rischio degli operatori non è considerata, viene esclusivamente considerata una loro tendenza ad approfittare di eventuali opportunità di arbitraggio.

neutralità al rischio degli investitori, infatti sotto tale ipotesi il tasso di rendimento sull'azione sottostante è equivalente al tasso di interesse risk-free:

$$q(uS) + (1 - q)(dS) = rS$$

Dunque, facendo riferimento all'equazione (2.3), il valore dell'opzione call equivale al valore atteso dall'attualizzazione del suo futuro payoff, sotto l'ipotesi di agenti neutrali al rischio. È opportuno specificare che quanto osservato non implica che il tasso di rendimento atteso sull'opzione call osservata sia il tasso di interesse risk-free, il prezzo dell'azione infatti non assume caratteri deterministici (la probabilità di aumento o diminuzione è implicita nello stesso, non assente); implica invece che il rendimento sul portafoglio descritto sia equivalente a quello prodotto dall'opzione call ipotizzata.

Ai fini di stimare il valore assunto da u e d , sotto l'ipotesi di neutralità al rischio degli operatori, si introduca l'ipotesi per cui il processo di prezzo del sottostante sia rappresentato da un moto browniano geometrico per cui:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \epsilon_t^{14}$$

dove ϵ_t è una variabile aleatoria normale standard, il valore atteso del rendimento sul titolo azionario è pari a $\mu \Delta t$ e la sua varianza è pari a $\sigma^2 \Delta t$.

Risulta necessario definire il valore $S(0)e^{\mu T}$ del prezzo del titolo azionario, e la sua varianza $\sigma^2 T$ cosicché la distribuzione di probabilità discreta del prezzo del titolo azionario ipotizzata all'interno del modello binomiale, sia basata su parametri coerenti con quelli propri della distribuzione di probabilità del prezzo del titolo azionario ottenuta tramite l'ipotesi suddetta di moto browniano geometrico (MBG):

$$qS(0)\mu + (1 - q)S(0)d = S(0)e^{\mu T}$$

per la varianza del valore del sottostante si ha, invece:

$$qu^2 + (1 - q)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2 = \sigma^2 T$$

¹⁴Vd. § 2.2.2.- Il moto browniano geometrico; si noti l'espressione esposta è la versione discreta dell'espressione che rappresenta un moto browniano geometrico.

Da cui Cox, Ross e Rubinstein (1979) ottengono:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T}} \quad e \quad d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$$

È possibile estendere tale modello al caso di un maggior numero di intervalli, mantenendo per ogni intervallo, l'ipotesi di assenza di dividendi e il vincolo per il quale sia possibile individuare esclusivamente due possibili movimenti del prezzo: in aumento e in diminuzione. L'aggiunta di un numero maggiore di periodi nel modello non influisce sulle modalità di definizione del valore dell'opzione osservate.

Il modello basato sull'approccio di CRR non può essere però adottato per il pricing di opzioni asiatiche basate su media geometrica o aritmetica, data la peculiare struttura del loro payoff.

Il primo metodo numerico binomiale introdotto per poter calcolare il prezzo di opzioni asiatiche basate su media aritmetica, è stato introdotto da Hull e White nel 1993¹⁵. L'ostacolo principale riscontrato nello sviluppo di un albero binomiale consiste nell'esigenza di calcolare un numero elevato di valori che siano espressione della media aritmetica dei prezzi potenzialmente assunti dal titolo azionario sottostante; infatti il numero di medie aritmetiche che deve essere calcolato per un'applicazione corretta del metodo, cresce esponenzialmente al crescere del numero di frazionamenti della vita a scadenza dell'opzione. Le condizioni esposte richiedono una capacità di calcolo molto elevate.

2.2.1.1. Processi stocastici binomiali

I processi stocastici binomiali possono essere descritti a partire da una variabile di *Bernoulli* che descriva il numero di successi in t prove di un evento, la cui dinamica può essere rappresentata attraverso un albero binomiale con t stati, o intervalli discreti. $S(0)$ coincide con il valore iniziale assunto dal processo o radice dell'albero, a partire dallo stesso, ogni ramo costituisce una delle possibili traiettorie assunte dal processo. Ponendo, come osservato, la variabile u come payoff in caso di successo, e la variabile d come payoff in caso di insuccesso, il valore assunto dalla variabile al termine dell'intervallo k all'interno del periodo totale pari a t (insieme di prove, e dunque intervalli osservati), in quanto generato in un processo moltiplicativo, può essere calcolato come:

¹⁵ Hull & White, *Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options*, Journal of financial and quantitative analysis, 2002.

$$S(k) := S(0)u^k d^{t-k}$$

La probabilità, q , attribuita a ciascun possibile valore assunto $S(k)$ è descrivibile tramite la distribuzione di Bernoulli stessa:

$$P(S(t) = S(k)) = P(k; t; q) = \frac{t!}{k! (t-k)!} q^k (1-q)^{t-k}$$

Da cui è ricavabile il valore atteso di $S(t)$:

$$E[S(t)] = S(0) \sum_{k=0}^t \frac{t!}{k! (t-k)!} q^k (1-q)^{t-k} u^k d^{t-k}$$

e varianza di $S(t)$:

$$\mathbf{Var}[S(t)] = S(0)^2 \{ [u^2 q + d^2 (1-q)]^t - [uq + d(1-q)]^{2t} \}$$

2.2.2. Il modello di Black e Scholes

L'approccio di Black e Scholes¹⁶, introdotto nel 1973 sulla base di analisi riconducibili a R. Merton e P. Samuelson, nella valutazione delle opzioni su titoli azionari, fornisce un modello di pricing nel tempo continuo, in cui il prezzo del sottostante (S) segue un moto browniano geometrico. Il modello osservato può essere introdotto come “passaggio al limite” (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006) del modello di Cox, Ross e Rubinstein: frazionando l'intervallo $[0, T]$ in n intervalli di lunghezza dt è possibile dimostrare, tramite il teorema del limite centrale, che il processo binomiale moltiplicativo descritto¹⁷ tende, per n che tende ad infinito, ad un moto browniano geometrico “con coefficiente di drift pari a $\mu S(t)$ e coefficiente di diffusione pari a $\sigma^2 S^2(t)$ ” (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006).

Le ipotesi del modello sono:

- 1) Il mercato è aperto e continuo;
- 2) Il mercato è perfetto (caratteristica definita in precedenza nella trattazione);

¹⁶Si faccia riferimento a: Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI. *Manuale di finanza vol.III Modelli stocastici e contratti derivati*. Il Mulino, 2006.

John C. HULL *Options, Futures and Other Derivatives*. Eighth edition, 2012.

¹⁷ Vd. § 2.2.1.1- Processi stocastici binomiali.

- 3) Arbitraggi risk-free non sono realizzabili;
- 4) La struttura a termine dei tassi di interesse è piatta e deterministica con intensità istantanea di interesse pari a r ;
- 5) È possibile acquistare nel mercato finanziario ZCB privi di rischio di default;
- 6) Il processo del prezzo S_t del sottostante è rappresentato da un moto browniano geometrico descritto da:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \text{ }^{18}$$

L'ipotesi 4) implica che il prezzo dello ZCB unitario sia:

$$v(t, s) = e^{-r(s-t)}$$

e che i suoi prezzi futuri siano prevedibili in $t = 0$ in quanto deterministici.

Sulla base di tale ipotesi, è possibile affermare che l'unica variabile stocastica all'interno del modello, è il processo di $S(t)$, prezzo del titolo azionario sottostante.

Per la caratteristica di Markovianità¹⁹ della variabile stocastica $S(t)$, il prezzo dell'opzione $f(t)$, che si assume inizialmente essere un'opzione call, è una funzione di $S(t)$ e t :

$$f(t) = f(S(t), t)$$

$f(t)$ è un processo a traiettorie continue, e in virtù del lemma di Ito²⁰, si ha l'equazione differenziale stocastica:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

dove il coefficiente di drift e il coefficiente di diffusione sono definiti da:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right)$$

¹⁸ Equazione differenziale stocastica con μ e σ costanti.

¹⁹ Vd. § 2.2.2.1 - Moto browniano standard; nota 25.

²⁰ Vd. § 2.2.2.3- Lemma di Ito e proprietà log-normale.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S$$

Osservando il processo di prezzo dello strumento derivato e del suo titolo azionario sottostante, è possibile confermare che sono caratterizzati dalla stessa fonte di incertezza, identificabile nel processo di prezzo del titolo azionario. In ogni istante i due prezzi sono, infatti, perfettamente correlati, consentendo di strutturare un portafoglio privo di rischio costituito da una posizione nel titolo derivato ed una nel sottostante, tali per cui rendimenti positivi (negativi) generati dalla posizione sul titolo azionario possano sempre essere pienamente controbilanciati da rendimenti negativi (positivi) derivanti dalla posizione assunta sul titolo derivato. In tale circostanza il valore del portafoglio in ogni istante è conosciuto con esattezza, condizione che conferisce carattere deterministico ai rendimenti del portafoglio. Sottolineando l'ipotesi di assenza di possibilità di arbitraggio, è possibile osservare il rendimento del portafoglio deve coincidere con il tasso di interesse risk-free, r .

Il valore $W(t)$ del portafoglio al tempo t , è stocastico e dato da:

$$W(t) = f(t) + \alpha S(t)$$

e la seguente rappresenta la sua dinamica:

$$dW = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \alpha \mu S \right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S + \alpha \sigma S \right) dz$$

Nella determinazione della quota α da detenere è possibile eliminare la componente stocastica del prezzo, derivante dal processo Browniano descritto. Analogamente a quanto osservato nel modello binomiale di Cox, Ross e Rubinstein, un portafoglio privo di rischio richiede di assumere una posizione long su una quantità unitaria dell'opzione call e una posizione short sul sottostante. Ponendo:

$$\alpha := -\frac{1}{S} \frac{\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S}{\sigma}$$

La dinamica del portafoglio è:

$$dW = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \alpha \mu S \right) dt \quad (2.4)$$

Il portafoglio è “istantaneamente²¹ non rischioso” (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006) nell’istante generico t , dato che $W(t + dt)$ è prevedibile. Qualora il portafoglio generasse un rendimento maggiore del tasso di interesse r risk-free, sarebbe possibile, tramite una strategia di arbitraggio, ottenere profitti non rischiosi prendendo a prestito al tasso risk-free e investendo tale ammontare per assumere una posizione long sul portafoglio²². Solo nella condizione in cui l’incremento di valore dW nell’intervallo istantaneo dt coincida con l’interesse ottenuto impiegando una somma pari a W nell’analogo intervallo dt al tasso r risk-free, si eliminano opportunità di arbitraggio:

$$dW = Wr dt$$

Sostituendovi la (2.4) si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) - \mu \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S = rf - f \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\sigma S}{f}$$

dunque, l’equazione “differenziale alle derivate parziali di secondo ordine di tipo parabolico” (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf \quad (2.5)$$

rappresenta l’equazione di valutazione di Black e Scholes.

Tale equazione può assumere una molteplicità di soluzioni, che corrispondono a tutti i contratti derivati dotati di S come variabile sottostante. La condizione al contorno definisce il tipo di contratto

²¹ E’ necessario specificare che per mantenere privo di rischio il portafoglio nel tempo, sarà necessario cambiare frequentemente le quote dei due componenti del portafoglio, in quanto la condizione dimostrata è solo valida istantaneamente.

²² Condizione opposta avrebbe luogo qualora il portafoglio generasse un rendimento minore di r .

derivato. Per la valutazione dell'opzione call ipotizzata, l'equazione generale deve essere risolta sotto la seguente condizione:

$$f(T) = \max(S(T) - x, 0)$$

La soluzione ottenuta è data da:

$$f(t) = S(t)N(d1) - Ke^{-r\tau}N(d2) \quad (2.6)$$

con:

$$d1 = \frac{\log\left[\frac{S(t)}{K}\right] + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

e:

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

dove con $N(x)$ si indica la funzione di ripartizione di una distribuzione normale standard, X è il prezzo di esercizio, σ è la volatilità, r il tasso di interesse e τ la vita a scadenza.

Le proprietà del prezzo dell'opzione call sono dimostrabili²³:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} &= -e^{-r\tau}N(d2) < 0 \\ \frac{df}{d\tau} &= \left(\frac{\sigma S}{2\sqrt{\tau}}\right)N'(d1) + rKe^{(-r\tau)}N'(d2) > 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= S\sqrt{\tau}N(d1) > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \tau Xe^{-r\tau}N(d2) > 0$$

Per il principio di arbitraggio anche il valore di un'opzione put in stile europeo deve soddisfare l'equazione generale. La condizione in questa circostanza è:

$$f(t) = \max(X - S(T), 0)$$

²³ Vd. in proposito § 5.2.6- Analisi statica della formula di Black e Scholes; dal libro "Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI."

La soluzione di questo problema differenziale è la formula di Black e Scholes per un'opzione put in stile europeo:

$$f(t) = Xe^{-r\tau}N(-d2) - S(t)N(-d1)$$

L'andamento del prezzo dell'opzione put rispetto al prezzo d'esercizio, la volatilità, il tasso di interesse, la vita a scadenza può essere dimostrato²⁴:

$$\frac{\partial f}{\partial X} > 0$$

$$\frac{df}{d\tau} = \left(\frac{\sigma S}{2\sqrt{\tau}}\right)N(d1) + rKe^{(-r\tau)}N'(d2) - rXe^{-r\tau}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} < 0$$

Appare opportuno sottolineare, infine, che l'equazione (2.5) non riporta alcun parametro tale da poter rappresentare il comportamento di avversione o meno al rischio di un agente, condizione che consente di affermare che la formula chiusa di Black e Scholes per la valutazione delle opzioni europee standard, implica un'assunzione di neutralità al rischio degli investitori.

2.2.2.1. Moto browniano standard

Nei modelli di valutazione delle opzioni basati sulla semplificatrice ipotesi di orizzonti temporali discreti, il processo di prezzo del titolo azionario può essere approssimato nella modalità esposta nel paragrafo 2.2.1.1. La rimozione di tale ipotesi, e la conseguente assunzione di un orizzonte temporale continuo richiedono diverse considerazioni circa il processo di prezzo.

Il moto browniano è un processo di diffusione. Appartiene, dunque, alla categoria dei processi stocastici nel tempo continuo, caratterizzati da continuità delle traiettorie delle variabili e Markovianità²⁵. Data la caratteristica propria delle variabili dotate di processo dinamico

²⁴ Vd. in proposito § 5.3.1- Analisi statica della formula di Black e Scholes per la put; dal libro "Manuale di finanza III Modelli stocastici e contratti derivati. Gilberto CASTELLANI, Massimo DE FELICE, Franco MORICONI."

²⁵ La proprietà di Markovianità, o processo di Markov, si riferisce al processo stocastico per cui il valore attuale di una variabile è sufficiente per predire il suo valore futuro, i valori storici risultano irrilevanti: supponendo che la distribuzione di probabilità legata alla variazione del valore della variabile in successivi istanti di tempo sia normale, la distribuzione

rappresentabile tramite moto browniano, di essere caratterizzate da incrementi indipendenti ed identicamente distribuiti (i.i.d), il processo di diffusione può essere rappresentato come la somma di incrementi indipendenti. Per un numero elevato degli addendi il teorema del limite centrale può essere applicato, il quale conferisce caratteristiche di normalità al moto. In particolare, una variabile z , ha un processo definito da un moto browniano al verificarsi di due condizioni:

- 1) La variazione Δz in un intervallo breve di tempo ΔT , è:

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta T}$$

con ϵ caratterizzato da distribuzione di probabilità del tipo normale standardizzata

- 2) I valori di Δz in due intervalli di tempo, ΔT , sono indipendenti

2.2.2.2. Moto browniano geometrico

Dalle assunzioni esposte nel paragrafo precedente, è possibile definire il moto che rappresenta il processo stocastico di prezzo dei titoli azionari (ipotizzando titoli azionari che non prevedono il pagamento di dividendi).

Il processo di prezzo $S(t)$ del titolo azionario è rappresentato da un moto browniano geometrico, “esponenziale di un moto browniano con media e varianza unitarie” (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006). Quest’ultimo si sviluppa esclusivamente per valori positivi del prezzo del contratto di opzione e per valori costanti del rendimento atteso del titolo. Per intervalli temporali $\Delta t \rightarrow 0$ e ipotizzando assenza di incertezza, si avrà che il valore atteso del drift sul valore del titolo azionario è:

$$dS = \mu S dt$$

integrando tra gli istanti temporali $t = 0$ e $t = T$:

$$S(T) = S(0)e^{\mu T}$$

Aggiungendo l’ipotesi per la quale la variabilità dei rendimenti percentuali, in un intervallo temporale infinitesimo, è costante, si deduce che la deviazione standard della variazione del prezzo in tale

di probabilità legata a tale variazione nell’intervallo di tempo dato dalla somma dei singoli intervalli suddetti sarà caratterizzata da una media e varianza dal carattere additivo.

intervallo è proporzionale al prezzo stesso. Risulta possibile, dunque, introdurre l'elemento di incertezza relativo al processo del prezzo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.8)$$

dove dz rappresenta la variazione Δz suddetta per $\Delta t \rightarrow 0$, μ rappresenta il valore atteso del rendimento del titolo azionario per un investitore in un intervallo infinitesimo, σ è la volatilità del prezzo del titolo azionario.

2.2.2.3. Lemma di Ito e proprietà lognormale

Il processo di prezzo ricavato, è essenziale nella valutazione di qualsiasi contratto derivato per il quale tale titolo sia sottostante. In particolare, il valore di un'opzione è funzione del valore del prezzo del suo sottostante e del tempo. Dal lemma di Itô emerge che il processo di una funzione G di S e t , è:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma dz$$

Ponendo $G = \ln S$ si ottiene, per quanto affermato, che il processo di G è:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

e dunque:

$$\ln S(t) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

$S(t)$ ha una distribuzione log-normale, in quanto il suo logaritmo naturale ha una distribuzione normale. Una variabile con una distribuzione log-normale può assumere qualsiasi valore compreso tra $[0, +\infty]$. Dalle proprietà della distribuzione log-normale è possibile osservare che il valore atteso di $S(t)$:

$$E(S(t)) = S(0)e^{\mu T}$$

la varianza di $S(t)$ è:

$$var(S(t)) = S(0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

2.2.2.4. Formula di Black e Scholes per il pricing di opzioni asiatiche

L'approccio di Black e Scholes può essere adottato ai fini di individuare una formula chiusa per la valutazione delle opzioni asiatiche, apportando le opportune modifiche alla formula originaria, richieste dalla struttura del payoff di tale tipologia di opzioni strutturate. Come esposto nella trattazione precedente, le opzioni asiatiche possono essere caratterizzate da media aritmetica o media geometrica. Date le diverse caratteristiche delle variabili aleatorie rappresentative del prezzo del titolo azionario, il metodo di pricing analitico, caratterizzato da formula chiusa, può essere adottato per le seconde ma non per le prime. Le opzioni asiatiche con media aritmetica possono invece essere valutate attraverso il metodo di Hull e White, che fa riferimento all'impiego di alberi binomiali, e più comodamente attraverso il metodo di Monte Carlo. È quest'ultimo l'approccio che viene adottato nella trattazione seguente e applicato in ambiente di lavoro 'R'.

Si provvede a dimostrare l'impossibilità di adottare un metodo in forma chiusa per il pricing delle opzioni asiatiche con media aritmetica.

Facendo riferimento al caso di opzioni asiatiche con media geometrica, e considerando che

$$G(t) = \left(\prod_{i=0}^n S(t_i) \right)^{1/(n+1)}$$

esprime la media geometrica, è possibile considerare un'approssimazione della formula analitica di Black e Scholes tale da poter definire, sulla base di ipotesi analoghe a quelle esposte nel paragrafo 2.2.2., il prezzo di un contratto di opzione asiatica. Il modello esposto è stato introdotto nel 1990 da Kemna e Vorst²⁶.

Il valore del payoff dell'opzione asiatica è:

$$\max(G(t) - X, 0)$$

è necessario considerare che, il prodotto di variabili aleatorie caratterizzate da distribuzione log-normale, è log-normale a sua volta.

²⁶ Vd. in proposito § -A pricing method for options based on average asset values. A.G.Z. Kemna e A.C.F. Vorst. Erasmus University Rotterdam. Journal of Banking and Finance 14 (1990) 113-129

Il valore di un contratto di opzione call con tali caratteristiche è, quindi, pari a:

$$C = e^{-rT} E\{\max [G(t) - X, 0]\} = e^{d1} S(0) N(d2) - X N(d1 - \sigma \sqrt{\frac{1}{3} T})$$

Dove, analogamente a quanto osservato con la formula di Black e Scholes, N rappresenta la funzione per la distribuzione normale standard e $d1$ e $d2$ possono essere espressi come:

$$d1 = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{6} \sigma^2 \right) T$$

$$d2 = \frac{\log \left(\frac{S(0)}{X} \right) + \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{6} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{\frac{1}{3} T}}$$

La scelta di considerare la media geometrica risulta fondamentale per poter derivare l'espressione di pricing in forma chiusa di un'opzione asiatica. Infatti, considerando il caso di un'opzione asiatica valutata sulla base della media aritmetica dei prezzi assunti dal sottostante nel medesimo intervallo temporale, è necessario sottolineare che la somma di variabili aleatorie con distribuzione log-normale non è dotata di una rappresentazione esplicita, condizione che non consente di derivare un'espressione di valutazione analitica.

2.2.2.5. Formula di Black e Scholes per il pricing di opzioni regular barrier

Come esposto nel paragrafo 1.2.2, è possibile osservare opzioni regular barrier caratterizzate da una pluralità di payoff differenti. Nella trattazione seguente si fa riferimento, esclusivamente per la valutazione di opzioni down-and-in call e down-and-out call, alla formula chiusa riportata da Hull (2012), a partire dalla formula di Black e Scholes.

Nel pricing di questa tipologia di opzioni è possibile far riferimento alla caratteristica per la quale il valore di una opzione call plain vanilla è equivalente alla somma del valore di una down-and-in call e di una down-and-out call. La detenzione di un portafoglio composto dalle ultime due, infatti, *ceteris paribus* conduce ad un payoff complessivo del portafoglio equivalente a quello che si potrebbe ottenere dalla detenzione esclusiva di opzioni call plain vanilla.

Si ottiene dunque che:

$$C_{downin} = S(0)e^{-qT} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{(-rT)} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

con:

$$\lambda = \frac{\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln\left[\frac{H^2}{S(0)X}\right]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

dove q rappresenta il dividend yield del titolo azionario sottostante.

Conseguentemente si ottiene che:

$$C_{downout} = S(0)N(d1)e^{-qT} - Xe^{-rT}N(d1 - \sigma\sqrt{T}) - S(0)e^{-qT} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{(-rT)} \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

dove per il valore di λ e y si fa riferimento agli stessi rapporti calcolati per le opzioni down-and-in call, e per $d1$ e $d2$ si fa riferimento ai rapporti esposti nel paragrafo 2.2.2.

2.2.3. Simulazioni di Monte Carlo

Boyle (1977) ha introdotto per primo l'impiego della simulazione di Monte Carlo per definire il prezzo delle opzioni, simulando dapprima il payoff di opzioni plain vanilla.

Utilizzare una tecnica di simulazione al fine di definire il valore di un'opzione richiede di simulare un numero elevato di possibili payoff che l'opzione potrebbe generare ai fini di calcolare la media aritmetica dei valori ottenuti²⁷. Le simulazioni di Monte Carlo sono basate sull'ipotesi di tassi di interesse deterministici e pari a r , consentendo così di ottenere una formula di pricing per ogni derivato, tale che:

²⁷ Per una trattazione più estesa dei passaggi necessari per effettuare la simulazione: vd. § 3.3- Simulazioni di Monte Carlo per il pricing di opzioni plain vanilla.

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} E[f(Y(T))]$$

Dove $V(T) = f(Y(T))$ rappresenta il payoff generato dal derivato in T, assumendo che Y rappresenti il sottostante del derivato generico considerato.

Nel calcolo del valore atteso si può far riferimento alla media aritmetica dei valori del payoff ottenuti dalle simulazioni effettuate, ottenendo:

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f(\tilde{Y}_N(T))]$$

dove N rappresenta il numero di processi di prezzo simulati e n indica la n-esima traiettoria simulata.

Nell'applicazione del suddetto metodo di pricing alle opzioni plain vanilla in stile europeo, si osserva che il valore di un'opzione call può essere espresso come il valore atteso del suo payoff attualizzato al tasso di interesse r, $e^{-rT} E(S(t) - X)$. Dunque l'esercizio presentato può essere semplicemente ridotto alla ricerca dei valori rappresentativi di $S(t)$. Alla luce di quanto osservato nel paragrafo 2.2.2.2 il valore del prezzo del titolo azionario sottostante l'opzione è definito da un processo stocastico, di conseguenza risulta necessario fare riferimento alla modellizzazione dei vari processi di prezzo simulati e rappresentati nell'analogo paragrafo nell'ambiente di lavoro 'R'. Sulla base di quanto osservato il valore dell'opzione ipotizzata è dato da:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} \max \left(S(0) * \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} z \right) - X, 0 \right) \quad (2.9)$$

ricordando che con n si indica il numero di simulazioni effettuate.

Il valore di un'opzione put plain vanilla in stile europeo è invece dato da:

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} \max \left(X - S(0) * \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} z \right), 0 \right)$$

Il metodo di pricing che verte sulle simulazioni di Monte Carlo rappresenta una valida alternativa all'adozione di formule chiuse o altri metodi numerici per il calcolo del prezzo dei derivati, soprattutto nei casi in cui la funzione f che esprime il payoff proprio del contratto derivato risulta essere dotata di struttura complessa. Nei capitoli 3.4 e 3.5 sono esposte, a livello pratico, le manipolazioni necessarie per poter valutare specifiche tipologie di opzioni asiatiche e opzioni regular barrier.

-Errore di stima nel metodo di Monte Carlo

A livello statistico, il metodo di Monte Carlo è differente dagli altri metodo di stima perchè non si basa su osservazioni reali derivanti da un campione, ma su simulazioni dei valori che potrebbero assumere le variabili appartenenti a tale campione. Nel contesto del pricing delle opzioni finanziarie, dunque, è necessario far riferimento anche all'errore standard della stima effettuata. Indicando con $\widehat{SN}(T)$ il valore della n -esima simulazione di $S(T)$, la varianza del campione di N simulazioni effettuate è dato da:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \{f[\widehat{SN}(T)] - \widehat{EN}\}^2$$

Dove \widehat{EN} rappresenta la media aritmetica dei valori di prezzo azionario simulati. L'errore standard della stima effettuata è dunque espresso da:

$$Dst(\widehat{EN}) = \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

L'errore standard della stima è, dunque, direttamente proporzionale alla deviazione standard campionaria e inversamente proporzionale alla radice del numero di simulazioni effettuate.

3. Applicazione di metodi di pricing su opzioni finanziarie

Durante il corso della trattazione precedente sono stati esposti tre metodi che consentono di valutare le opzioni finanziarie plain vanilla:

- 1) La formula chiusa di Black e Scholes;
- 2) Gli alberi binomiali elaborati da CRR;
- 3) Il metodo delle simulazioni di Monte Carlo.

Nonostante questi non siano gli unici metodi presentati in letteratura per definire il prezzo delle opzioni plain vanilla, sono sicuramente i più diffusi nelle pratiche finanziarie. Da qui la scelta di applicarli praticamente a contratti di opzione simulati per toccarne con mano le caratteristiche. Nella trattazione seguente sono esposti risultati e considerazioni sviluppati durante l'adozione dei diversi approcci nell'ambiente di lavoro 'R'.

Si procede infine ad osservare l'applicabilità dei diversi metodi ad altre tipologie di opzioni:

- 1) Le opzioni asiatiche;
- 2) Le opzioni regular barrier.

Si espongono le manipolazioni necessarie a livello empirico per impiegare i diversi metodi, laddove applicabili, e le caratteristiche degli stessi in termini di flessibilità e accuratezza alla luce della complessa struttura del payoff di queste tipologie di opzioni.

3.1. Formula di Black e Scholes: applicazione su opzioni plain vanilla

Nella trattazione seguente è esposta l'applicazione del modello chiuso di pricing di Black e Scholes nell'ambiente di lavoro 'R'.

Si ritengano valide tutte le ipotesi del modello di Black e Scholes esposte nel paragrafo 2.2.2. Inoltre si considerino i seguenti input:

- $S(0) = 100$ il valore in $t=0$ del prezzo del titolo azionario sottostante,
- $r = 0.05$ il tasso di interesse di mercato prevalente,
- $T = 1$ vita a scadenza del titolo espressa in anni,

Si consideri dapprima il caso di un'opzione call plain vanilla in stile europeo. Il calcolo del prezzo dell'opzione viene elaborato per diversi livelli di σ (che rappresenta il valore della deviazione standard del prezzo del titolo azionario sottostante) e per diversi livelli del prezzo di esercizio, i dati ottenuti sono esposti nel seguente grafico tridimensionale:

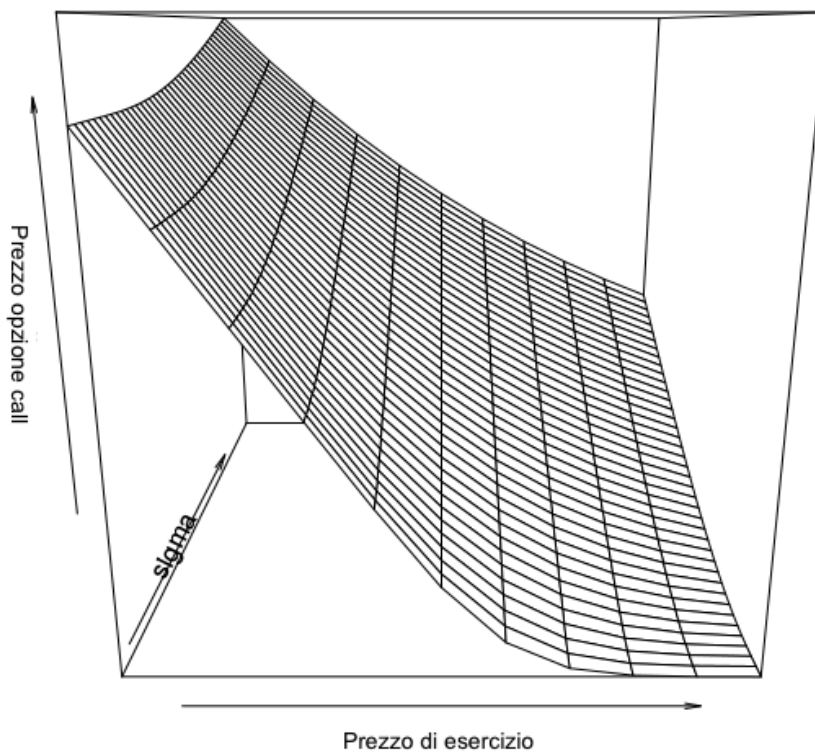


Figura 5 Grafico tridimensionale del prezzo di un'opzione call plain vanilla al variare del prezzo di esercizio (K) e della volatilità del sottostante (σ). Fonte: Elaborazione propria su 'R'.

All'interno della Figura 5, si assume $0.05 \leq \sigma \leq 0.45$ e $75 \leq X \leq 125$.

Dal grafico emergono rilevanti proprietà della formula di Black e Scholes.

Quando il prezzo del titolo azionario sottostante ha valori inferiori al prezzo di esercizio, il premio dell'opzione si riduce tendendo a zero all'aumentare di tale differenza, è possibile spiegare analiticamente questa caratteristica osservando che $N(d1)$ e $N(d2)$ nella formula assumono valori estremamente ridotti; in caso contrario il prezzo dell'opzione cresce sensibilmente, $N(d1)$ e $N(d2)$ assumono valori vicini a uno.

Risulta inoltre opportuno osservare la seguente proprietà: come osservato in J. Hull²⁸, al ridursi del valore della deviazione standard del prezzo del titolo azionario sottostante, quest'ultimo risulta equiparabile ad un'attività priva di rischio, tale che il payoff del contratto di opzione può essere conosciuto ex ante capitalizzando al tasso r per la durata T della vita a scadenza dell'opzione il valore $S(0)$ del prezzo del sottostante. Considerando il caso in cui questo valore sia maggiore del prezzo di esercizio a scadenza $S(T)$, $N(d1)$ e $N(d2)$ tendono a 1 al tendere di σ a zero ceteris paribus, in caso contrario (di opzione out of the money) questi valori, in analoghe condizioni, tendono a 0.

²⁸ Options futures and other derivatives, Tenth edition, J. HULL, 2012.

È inoltre possibile osservare che all'aumentare della deviazione standard del prezzo del titolo azionario il valore dell'opzione cresce, coerentemente con le proprietà esposta nella formula (2.7)²⁹ che può essere in questo contesto opportunamente illustrata. La crescita della deviazione standard, infatti, consente di ottenere una distribuzione di probabilità del prezzo del titolo azionario sottostante in cui una probabilità non nulla viene associata a valori di prezzo più estremi rispetto al valore atteso della distribuzione. L'agente che assume una posizione long sull'opzione call osservata, tuttavia, in virtù della non linearità del payoff del contratto di opzione, non fronteggia il maggiore 'downward risk' associato a questa caratteristica della distribuzione di probabilità del prezzo del sottostante, fronteggia, invece, esclusivamente il maggiore 'upward potential'.

Le caratteristiche del prezzo dell'opzione espresse tramite la formula di Black e Scholes possono essere più chiaramente osservate nel loro complesso attraverso i seguenti grafici³⁰:

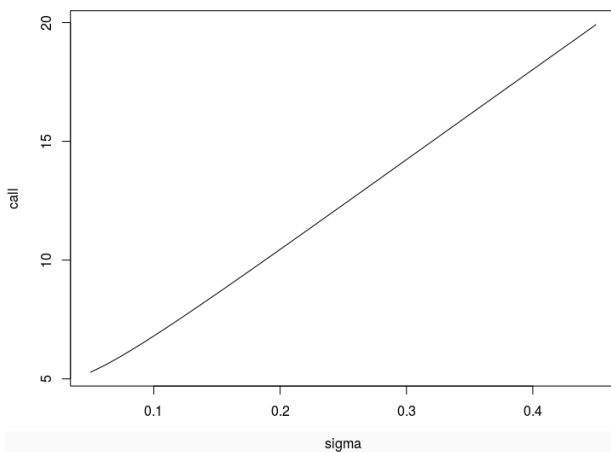


Figura 6 Prezzo dell'opzione Call in funzione della volatilità (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

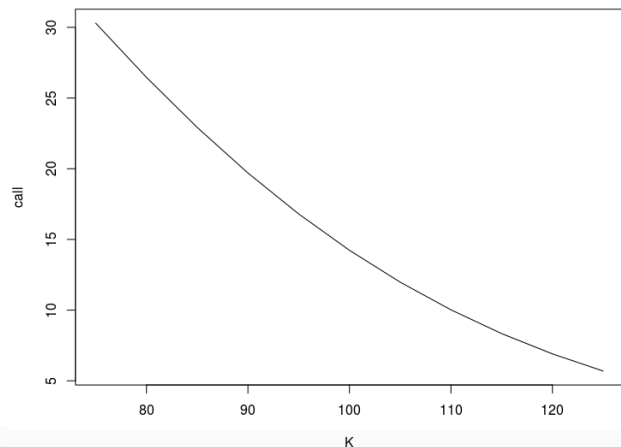


Figura 7 Prezzo dell'opzione Call in funzione del prezzo di esercizio (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

²⁹ Vd. § 2.2.2- Il modello di Black e Scholes.

³⁰ Si osservi che le caratteristiche dell'opzione call presa ad esempio sono: $S(0)=100$, $X=100$, $\sigma = 0.3$, $r=0.05$, $T=1$.

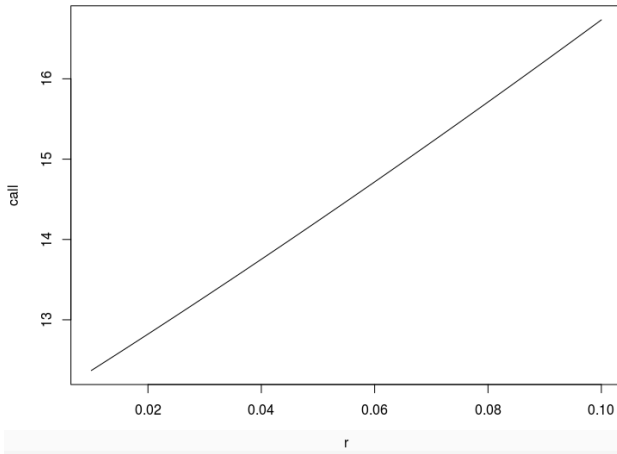


Figura 8 Prezzo dell'opzione Call in funzione di r (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

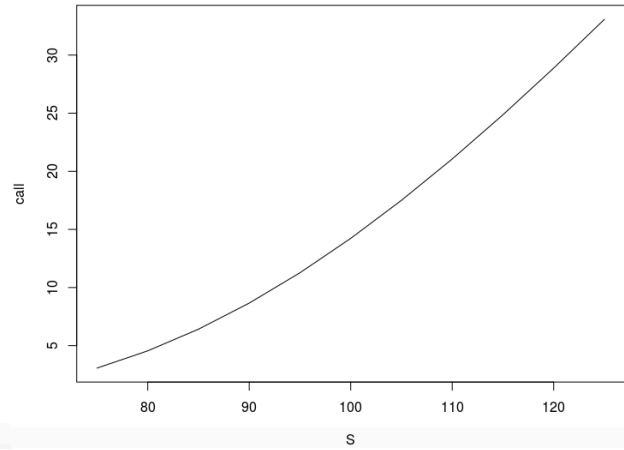


Figura 9 Prezzo dell'opzione Call in funzione di $S(t)$ (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Analogamente a quanto osservato per l'opzione call plain vanilla in stile europeo, si consideri l'applicazione della formula chiusa di Black e Scholes al caso di un'opzione put plain vanilla in stile europeo:

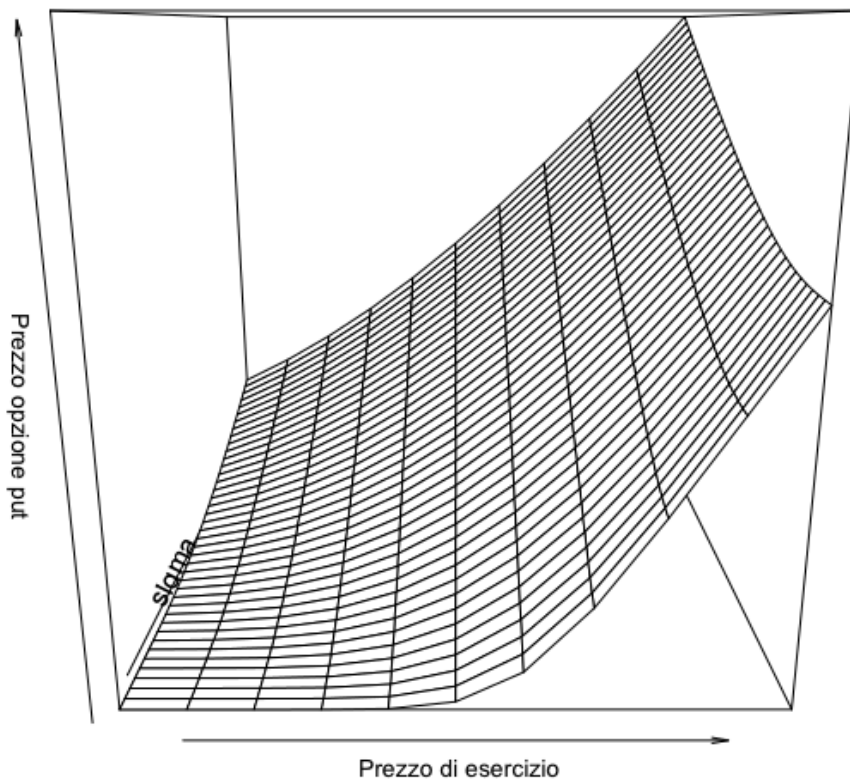


Figura 10 Grafico tridimensionale del prezzo di un'opzione put plain vanilla al variare del prezzo di esercizio (K) e della volatilità del sottostante (σ). Fonte: Elaborazione propria su 'R'.

Sulla base della stessa logica adottata nelle osservazioni inerenti alle opzioni call, è possibile sottolineare come al ridursi del prezzo di esercizio sul contratto di opzione put, a parità di deviazione standard, il valore dell'opzione tende a zero. Inoltre, secondo un ragionamento analogo a quello esposto precedentemente e in virtù di un equivalente meccanismo, è possibile spiegare che il prezzo dell'opzione aumenta all'aumentare del valore della deviazione standard del prezzo del titolo azionario sottostante, *ceteris paribus*.

3.2. Alberi binomiali di CRR: applicazione su opzioni plain vanilla

Nella trattazione seguente è presentata un'applicazione del modello Cox, Ross Rubinstein per la determinazione del prezzo di un contratto di opzione plain vanilla in stile europeo. Il modello, come osservato nel paragrafo 2.2.3³¹, è basato su intervalli discreti descritti e rappresentati da alberi binomiali.

La procedura da impiegare per procedere nell'applicazione di tale metodo di pricing, richiede in prima istanza di calcolare i possibili valori assunti dal prezzo del titolo azionario sottostante nei diversi nodi ipotizzati³². Il valore del prezzo all'origine dell'albero equivale a $S(0)$, di cui viene fornito un valore pari a 100. Nel nodo successivo l'intervallo temporale discreto $t_0 + \Delta t$, si ipotizza che il titolo azionario possa assumere un valore maggiore, pari a $S(0)u$, o minore e pari a $S(0)d$. Applicando lo stesso principio per i successivi nodi è possibile ipotizzare il processo del prezzo su intervalli discreti. Nell'applicazione esposta si procede aumentando il numero di intervalli temporali in cui si provvede a suddividere la vita a scadenza del contratto di opzione, si consideri inoltre $\sigma = 0.3$. La fase successiva della procedura consiste nel calcolo delle probabilità associate a ciascuno stato, di crescita o riduzione del prezzo del titolo azionario nel nodo successivo a quello considerato. A tal fine è opportuno introdurre l'ipotesi relativa al valore del tasso r considerato posto pari a $r = 0.05$.

<i>con $\sigma = 0,3$; si ottiene $q = 0,50267408$</i>
--

Considerando l'ipotesi nella quale il prezzo di esercizio dell'opzione sia pari a $X = 100$, si dispongono di tutti gli strumenti per procedere nel calcolo del prezzo del contratto di opzione con vita a scadenza di un anno per i diversi livelli di volatilità e numeri di intervalli.

³¹ Si faccia riferimento al paragrafo suddetto per le considerazioni teoriche alla base del modello.

³² Vd. § A -Alberi binomiali di CRR e risultati. Per osservare i processi di prezzo ottenuti tramite il codice elaborati in ambiente di lavoro 'R'.

Risulta opportuno calcolare il payoff per ogni nodo dell'albero binomiale simulato, procedendo dai valori più estremi. A ciascun payoff è assegnata una probabilità di realizzazione pari a q o $1 - q$ secondo la logica esposta nel paragrafo 2.2.3., il payoff è poi attualizzato al tasso r per la durata dell'intervallo considerato tra un nodo e il precedente:

$$f_i = e^{-r\Delta t}[qf_{i+1} + (1 - q)f_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dove f_i rappresenta il payoff calcolato per il nodo i , n rappresenta il numero dei livelli ai quali corrispondono diversi nodi individuabili alle estremità finali degli intervalli considerati.

Il procedimento è completato quando si raggiunge il primo nodo dell'albero binomiale, in quanto quest'ultimo rappresenta il prezzo del contratto di opzione considerato, $f_0 = C$.

La totalità del procedimento, elaborato in ambiente di lavoro 'R' secondo le modalità suddette, è esposto graficamente tramite il software 'DerivaGem', ai fini di ottenere una chiara sintesi di tutte le sue fasi.

si assume $\sigma_2 = 0.3$; si introducono un numero di intervalli pari a $n = (2; 10)$

Per ogni nodo:

Valore superiore = Prezzo del sottostante

Valore inferiore = Prezzo dell'opzione

$X = 100$

Fattore di sconto = 0.9753

$u = 1,2363$

$d = 0,8089$

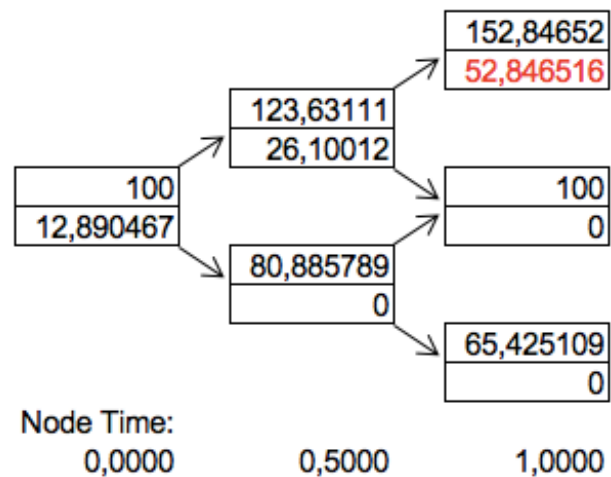


Figura 11 Albero binomiale impiegato per il pricing di opzione call plain vanilla. $n=2$. Fonte: DerivaGem

Per ogni nodo:
 Valore superiore = Prezzo del sottostante
 Valore inferiore = Prezzo dell'opzione
 $X = 100$
 Fattore di sconto = 0.9950
 $u = 1,0995$
 $d = 0,9095$

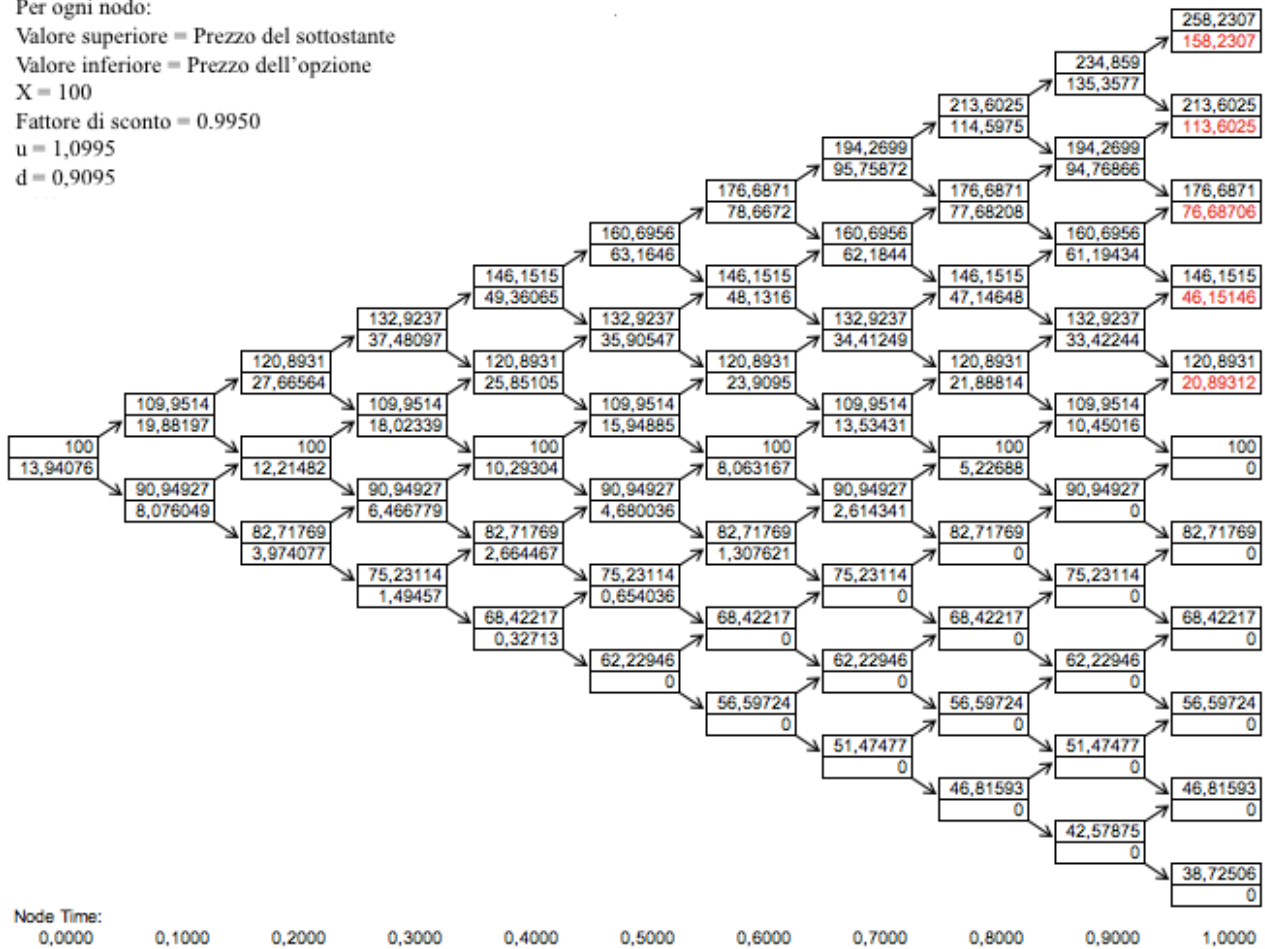


Figura 12 Albero binomiale impiegato per il pricing di opzione call plain vanilla. $n=10$. Fonte: DerivaGem

Come esposto nella legenda in alto, il valore del prezzo dell'opzione call plain vanilla in stile europeo può essere osservato nella casella inferiore del primo nodo. Si ottiene $C = 13,94076$ con $n = 10$ intervalli.

Con analoghe elaborazioni è possibile calcolare il prezzo di opzioni put:

	$\sigma_1 = 0,2$	$\sigma_2 = 0,3$	$\sigma_3 = 0,4$
numero intervalli = 2	4.663444	8.013409	11.37383
numero intervalli = 10	5.376351	9.063707	12.76197

Tabella 1 Prezzo opzione put calcolato tramite metodo CRR. Fonte: elaborazioni proprie in 'R'.

3.2.1. Confronto tra modelli di pricing su opzioni plain vanilla: Black e Scholes e CRR

Nella trattazione seguente si procede alla comparazione tra l'approccio adottato da Black e Scholes nel calcolo del prezzo di un contratto di opzione, e l'approccio adottato da Cox, Ross e Rubinstein.

Il confronto ha lo scopo di catturare elementi relativi all'efficacia, efficienza ed accuratezza dei diversi approcci, che possono risultare rilevanti a livello operativo.

La comparazione proposta ha ad oggetto una opzione call plain vanilla in stile europeo caratterizzata da $S(0) = 100$, $X = 100$ (prezzo di esercizio) e $\sigma = 0,3$.

La formula di Black e Scholes rappresenta un metodo di pricing in forma chiusa dei contratti di opzione plain vanilla. Tra la varietà dei contratti di opzione esistenti, solo per pochi è possibile riscontrare la possibilità di elaborare un'espressione in forma chiusa del loro prezzo, ad esempio come osservato nel paragrafo 2.2.2.4. tale formula è ricavabile per opzioni asiatiche caratterizzate da media geometrica ma non per opzioni asiatiche caratterizzate da media aritmetica. Nel pricing delle opzioni plain vanilla in stile europeo, tuttavia, la formula di Black e Scholes rappresenta un mezzo largamente impiegato in quanto diretto e immediato; all'interno dell'analisi esposta il prezzo ricavato secondo questo approccio viene dunque impiegato come benchmark nel confronto con i risultati ottenuti assumendo approcci alternativi. L'accuratezza della formula, inoltre, può essere imputata all'ipotesi di un processo di prezzo del titolo azionario che ha luogo nel tempo continuo, caratteristica che conferisce a questo approccio un vantaggio rispetto al metodo di pricing di CRR. A partire da tale considerazione è possibile sottolineare che la formula di Black e Scholes è interpretabile come un "passaggio al limite del modello binomiale" (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006). Ai fini di fornire una dimostrazione empirica di tale affermazione, si consideri il seguente confronto tra il prezzo di un'opzione call plain vanilla in stile europeo calcolato tramite l'applicazione di entrambi i metodi. Ricordando che $r = 0.05$, $T = 1$, $S(0) = 100$, $X = 100$, $\sigma = 0.3$ si ottiene il seguente grafico.

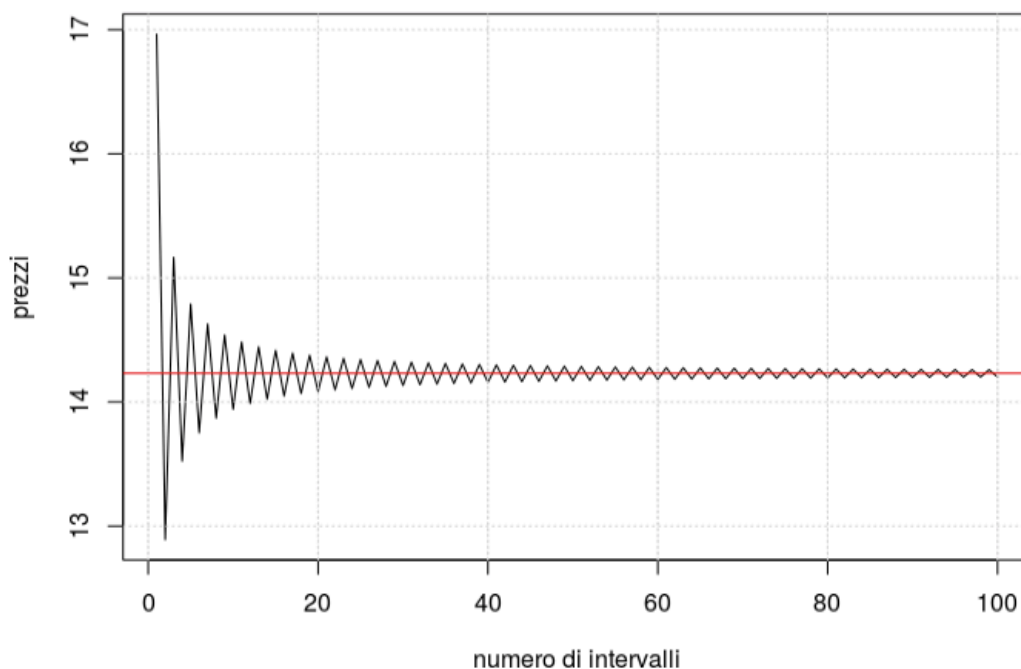


Figura 13 Convergenza del prezzo calcolato tramite alberi binomiali al prezzo calcolato tramite formula chiusa, al variare del numero di intervalli degli alberi binomiali. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

La Figura 13 espone la differenza, in nero, tra i valori del prezzo dell'opzione calcolati applicando gli alberi binomiali e la formula chiusa di Black e Scholes, in rosso. Sull'asse delle ascisse si indica il numero di intervalli considerati per ciascuna osservazione. Il grafico consente di evidenziare come il prezzo calcolato tramite l'approccio di CRR converga a quello ottenuto tramite formula chiusa all'aumentare del numero di intervalli in cui viene suddivisa la vita a scadenza dell'opzione europea nel modello binomiale³³. Nel dettaglio, il prezzo ottenuto attraverso la riduzione ulteriore di Δt , ipotizzando 100 intervalli è $C = 14.2018$, valore molto vicino al prezzo $C = 14.2313$ calcolato tramite formula chiusa. Nell'operatività è possibile predeterminare un valore di errore tollerato nel calcolo del prezzo dell'opzione, per porre un limite all'incremento del numero di intervalli considerati.

È tuttavia necessario sottolineare che a livello operativo, nonostante la possibilità di ottenere risultati quasi coincidenti attraverso i due metodi (la differenza emerge dalla terza cifra decimale con 500 intervalli³⁴) l'approccio di CRR risulta essere molto più strutturato a livello di calcolo, quando comparato all'immediatezza dell'applicazione della formula chiusa.

3.3. Simulazioni di Monte Carlo: applicazione su opzioni plain vanilla

Nella trattazione seguente sono esposti i risultati derivanti dall'esecuzione della simulazione di Monte Carlo nell'ambiente di lavoro 'R' coerentemente con quanto esposto, in termini teorici, nel paragrafo 2.2.3. Il codice impiegato è elaborato a partire da quanto esposto nel paragrafo 2.2.2.2: si assumono processi di prezzo azionario rappresentati da un moto browniano geometrico, facendo, dunque, riferimento alla formula (2.8).

Il procedimento necessario per poter valutare il contratto di opzione tramite le simulazioni di Monte Carlo richiede diverse fasi:

- 1) Simulare una molteplicità di processi di prezzo del sottostante nell'ipotesi di processo dinamico rappresentato tramite un moto browniano geometrico e di neutralità al rischio di tutti gli agenti;
- 2) Calcolare il payoff dell'opzione call plain vanilla facendo riferimento al valore di $S(T)$ ottenuto da ogni processo simulato nel punto 1;
- 3) Calcolare la media dei payoff ottenuti per ottenere la stima del valore atteso del payoff;
- 4) Attualizzare il valore ottenuto al tasso r per ottenere una stima del prezzo del contratto di opzione.

³³ Si osservi che si ipotizza $1 \leq n \leq 100$.

³⁴ Valore ottenuto con CRR= 14.22536; valore ottenuto con Black e Scholes= 14.231255.

Per elaborare nell'ambiente di lavoro 'R' il processo dei prezzi azionari è necessario individuare l'equivalente discreto della (2.8), che per valori sufficientemente ridotti di Δt rappresenta un'approssimazione sufficientemente valida del processo dinamico dei prezzi. Si faccia dunque riferimento "all'equivalente discreto di Eulero" (Castellani, De Felice, Moriconi, 2006) di tale equazione differenziale stocastica:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

Considerando $\mu=0.05$; $\sigma = 0.3$; e valore iniziale $S(0) = 100$; è possibile ottenere i seguenti percorsi di prezzo su 250 giorni³⁵:

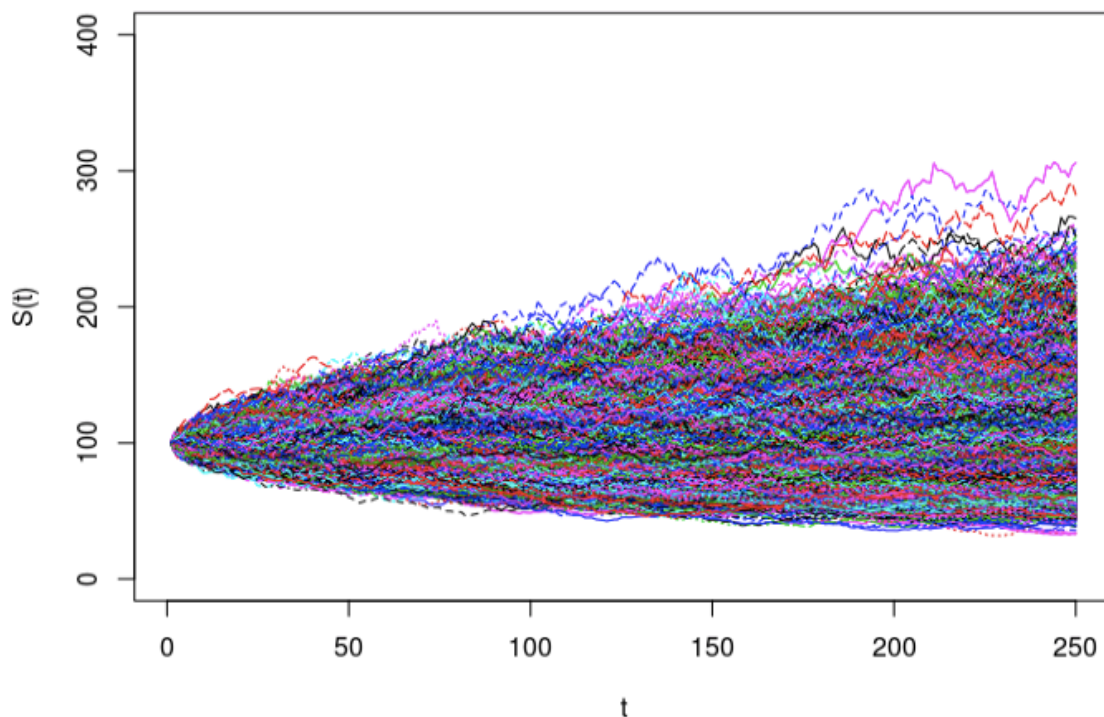


Figura 14 processi di prezzo azionario su 250 giorni di lavoro con $\sigma = 0.3$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

È inoltre ricavata la distribuzione di probabilità dei prezzi del titolo azionario relativa a vari istanti temporali, ai fini di osservare come, al crescere della vita a scadenza considerata, emerga più chiaramente la convergenza verso una distribuzione *log-normale*; proprietà esposta nel paragrafo 2.2.2.3.

³⁵ Il numero di simulazioni effettuate è pari a $n = 10000$. $\Delta t=1/252$ (si ipotizzano dapprima osservazioni giornaliere).

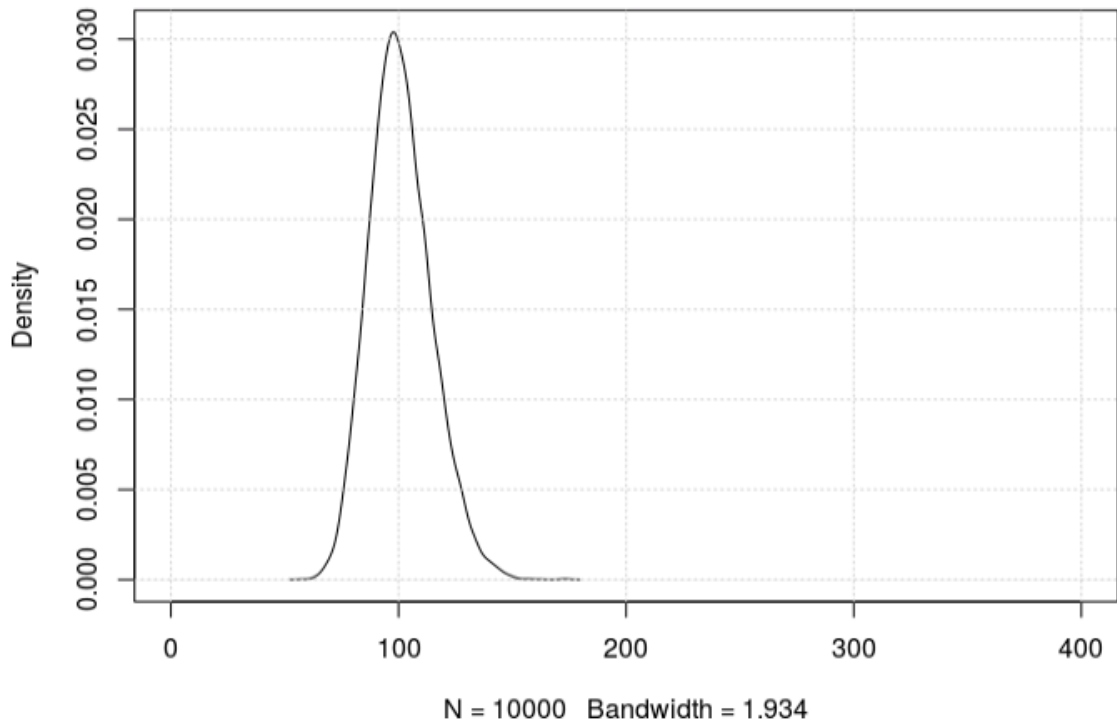


Figura 15 Distribuzione di probabilità dei prezzi in $t=50$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

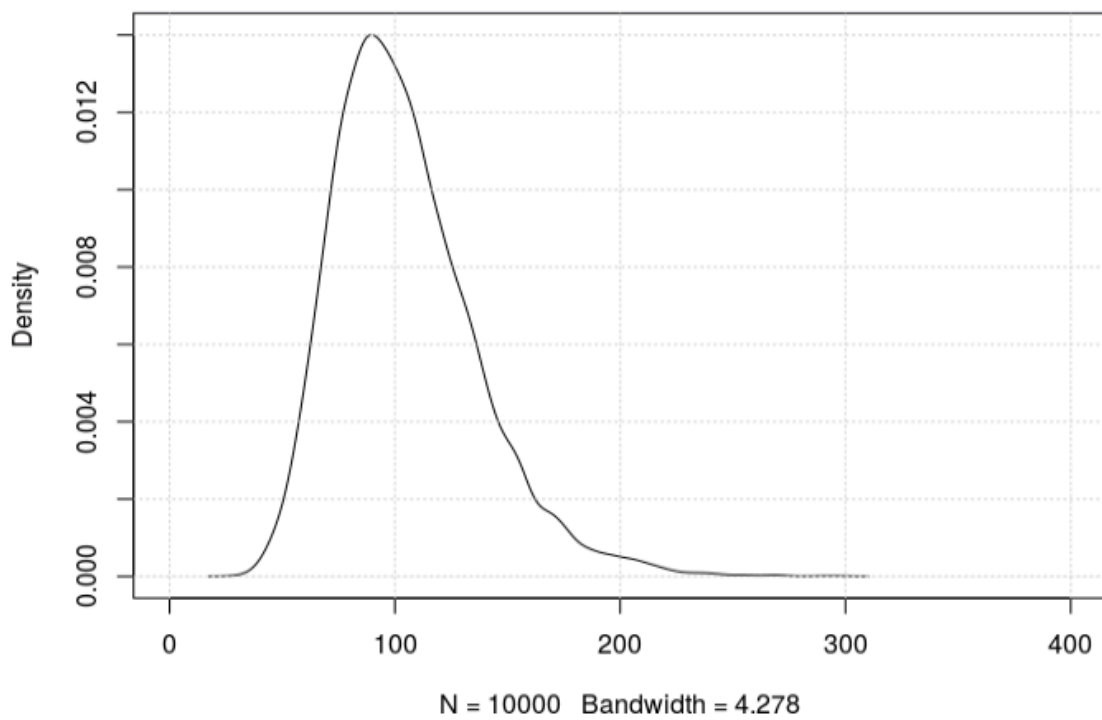


Figura 16 Distribuzione di probabilità dei prezzi in $t=250$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Ceteris paribus, considerando $\sigma = 0.4$, si ottengono i seguenti percorsi di prezzo:

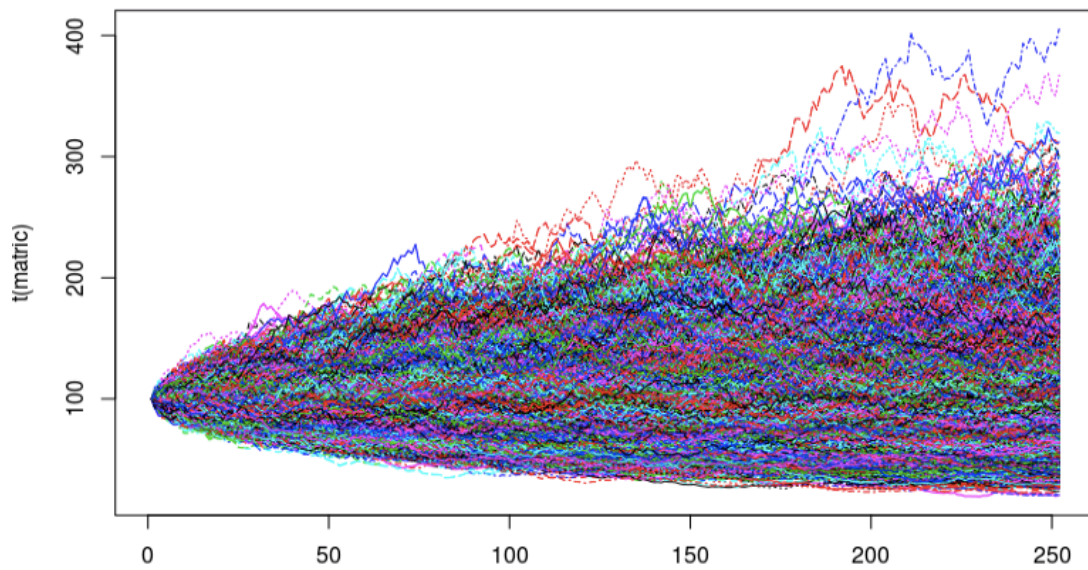


Figura 17 processi di prezzo azionario con $\sigma = 0.4$. Fonte: elaborazione propria su 'r'

Procedendo nell'osservare le distribuzioni di probabilità dei prezzi nei vari intervalli, analoghi a quelli precedentemente ipotizzati, si ottiene:

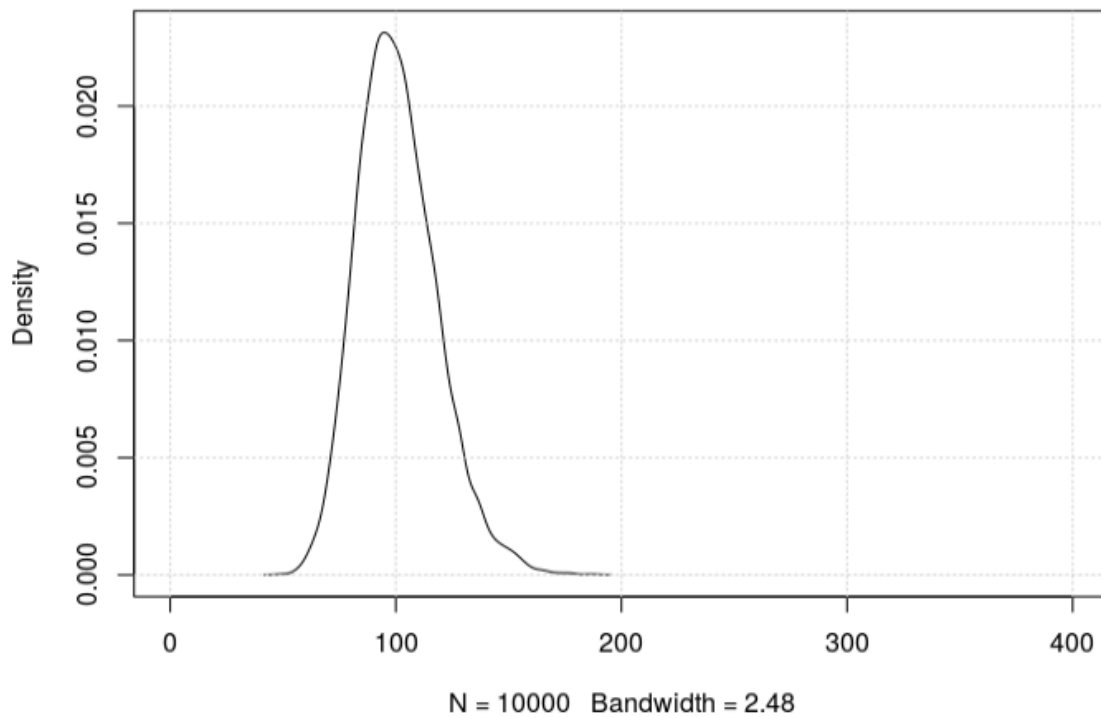


Figura 18 distribuzione di probabilità dei prezzi in $t=50$. Fonte: elaborazione propria su 'R'

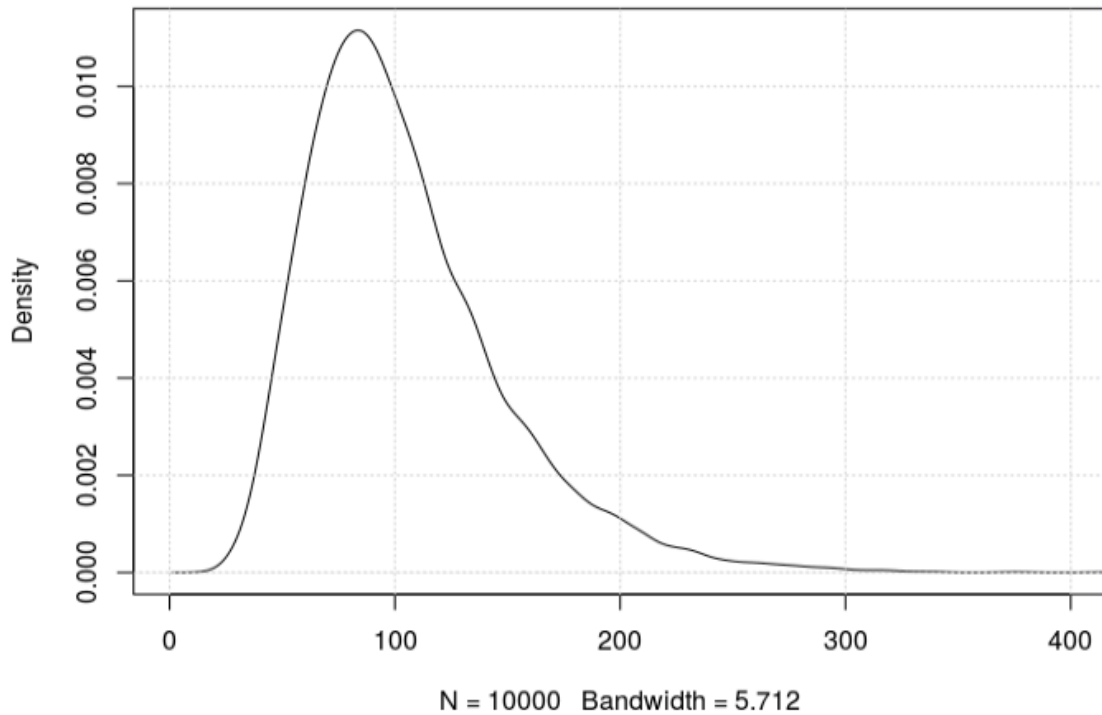


Figura 19 distribuzione di probabilità dei prezzi in $t=250$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Al crescere della volatilità e della durata dell'intervallo considerato, i prezzi assumono una distribuzione più asimmetrica.

Considerando i primi tre momenti delle distribuzioni di probabilità simulate, per la media si ottiene:

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$
$t = 50$	101.138	101.17
$t = 250$	105.069	105.03

Tabella 2 Media della distribuzione per diversi orizzonti temporali e diversi valori di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Per la deviazione standard della distribuzione si ottiene:

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$
$t = 50$	13.38	17.83
$t = 250$	32.22	43.434

Tabella 3 Deviazione standard della distribuzione per diversi orizzonti temporali e diversi valori di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Calcolando l'indice di asimmetria per le varie distribuzioni si ottiene:

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$
$t = 50$	0.389	0.522
$t = 250$	0.888	1.22

Tabella 4 Indice di asimmetria della distribuzione per diversi orizzonti temporali e diversi valori di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Il calcolo del prezzo dell'opzione per i diversi livelli σ : (0.3; 0.4) è poi effettuato seguendo gli step 3 e 4. I valori ottenuti sono indicati nella tabella seguente:

	$\sigma_1 = 0,3$	$\sigma_2 = 0,4$
$n = 10000$	14.2335	18.04084

Tabella 5 Prezzi opzione call diversi valori di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Analoghe considerazioni vengono effettuate per il pricing di opzioni put plain vanilla in stile europeo, i risultati sono i seguenti:

	$\sigma_2 = 0,3$	$\sigma_3 = 0,4$
$n = 10000$	9.4032	13.19638

Tabella 6 Prezzi opzione put per diversi valori di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

3.3.1. Confronto tra modelli di pricing su opzioni plain vanilla: Black e Scholes e simulazioni di Monte Carlo

Nella trattazione seguente si procede alla comparazione tra l'approccio adottato da Black e Scholes nel calcolo del prezzo di un contratto di opzione, e il metodo delle simulazioni di Monte Carlo. Analogamente a quanto osservato nel paragrafo 3.2.1, la comparazione proposta ha ad oggetto una opzione call plain vanilla in stile europeo caratterizzata da $S(0) = 100$, $X = 100$ (prezzo di esercizio) e $\sigma = 0,3$.

Le considerazioni relative all'accuratezza del metodo di simulazione di Monte Carlo si fondano su osservazioni vicine a quelle effettuate per il metodo di CRR. Le variabili che possono influire sulla convergenza del prezzo calcolato tramite questo approccio verso quello calcolato con la formula chiusa, ancora adottata come benchmark, sono:

- 1) Il numero di processi simulati;
- 2) l'ampiezza degli intervalli discreti Δt ;
- 3) La volatilità che caratterizza la dinamica del prezzo azionario.

È necessario sottolineare che nella possibilità di simulare un maggior numero di processi o processi caratterizzati da intervalli discreti più ridotti, si fronteggia un trade-off rappresentato dai limiti posti dal calcolatore stesso impiegato per eseguire gli algoritmi necessari per simulare il modello nell'ambiente di lavoro 'R'³⁶. È inoltre necessario sottolineare che è possibile ritenere³⁷ che un

³⁶ Il calcolatore impiegato è MacBook Air con processore 1,6 GHz Intel Core i5 e memoria 2GB 1333 MHz DDR3.

³⁷ Vd. in proposito § -Castellani, De Felice, Moriconi, *Manuale di finanza vol.III*, 2006

numero di simulazioni pari a 10000 sia sufficiente per ottenere una stima del prezzo dell'opzione oggetto di valutazione dotata di un errore standard considerato comunemente accettabile. Questa argomentazione risulta valida in quanto subordinata al vincolo di un valore della volatilità del processo del sottostante pari a quello medio osservato nel mercato azionario, dunque per $0.2 \leq \sigma \leq 0.3$.

Per consentire di comprendere a livello visivo l'incisività delle prime due variabili considerate sulle simulazioni dei processi di prezzo del sottostante titolo azionario, si osservino i due casi proposti:

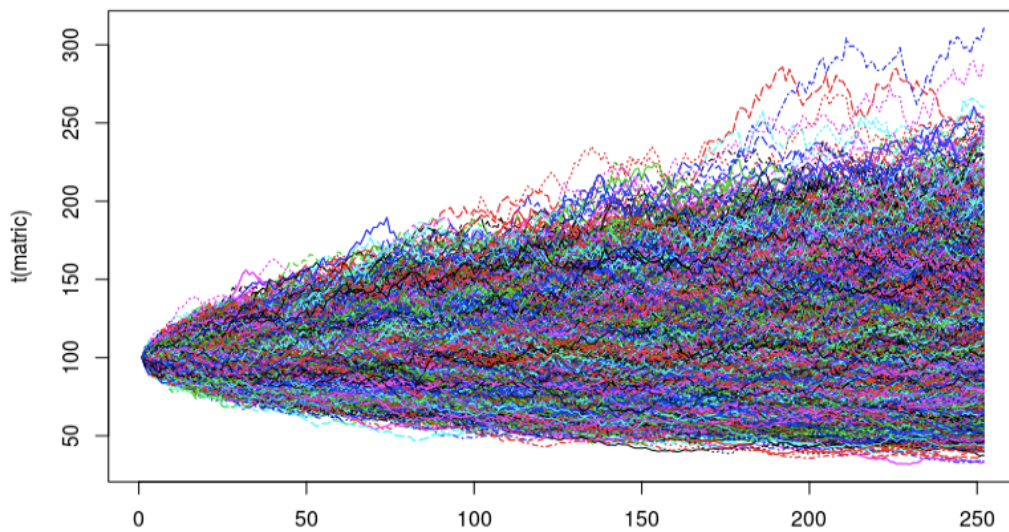


Figura 20 10000 simulazioni, intervalli giornalieri, $\sigma=0.3$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

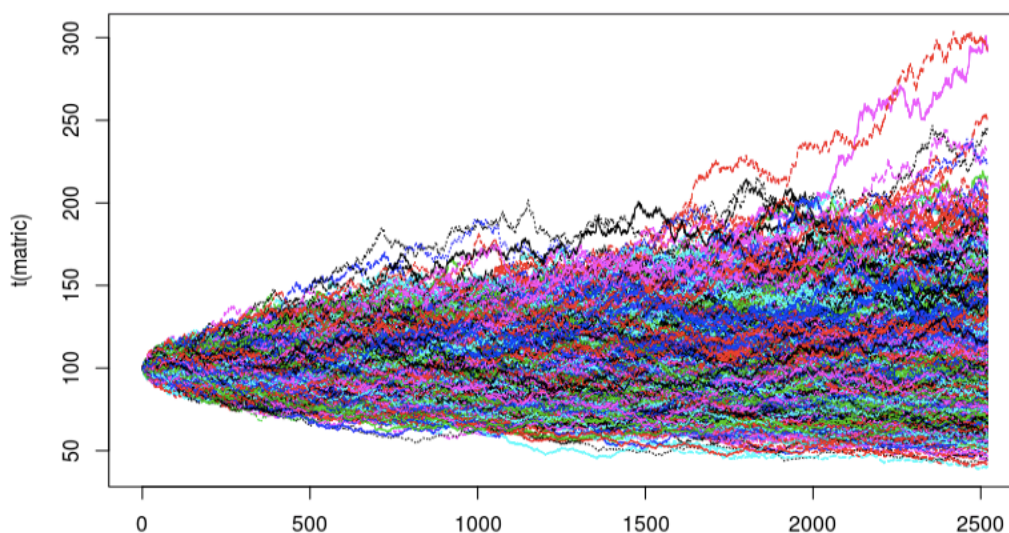


Figura 21 1000 simulazioni, 10 osservazioni al giorno, $\sigma=0.3$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Nel grafico seguente si osserva la differenza, in nero, tra il prezzo ottenuto tramite la simulazione di Monte Carlo e il benchmark di riferimento, in rosso, relativo al prezzo calcolato tramite la formula di Black e Scholes. Sull'asse delle ascisse si indica il numero di processi di prezzo simulati, a parità del numero di intervalli considerati³⁸.

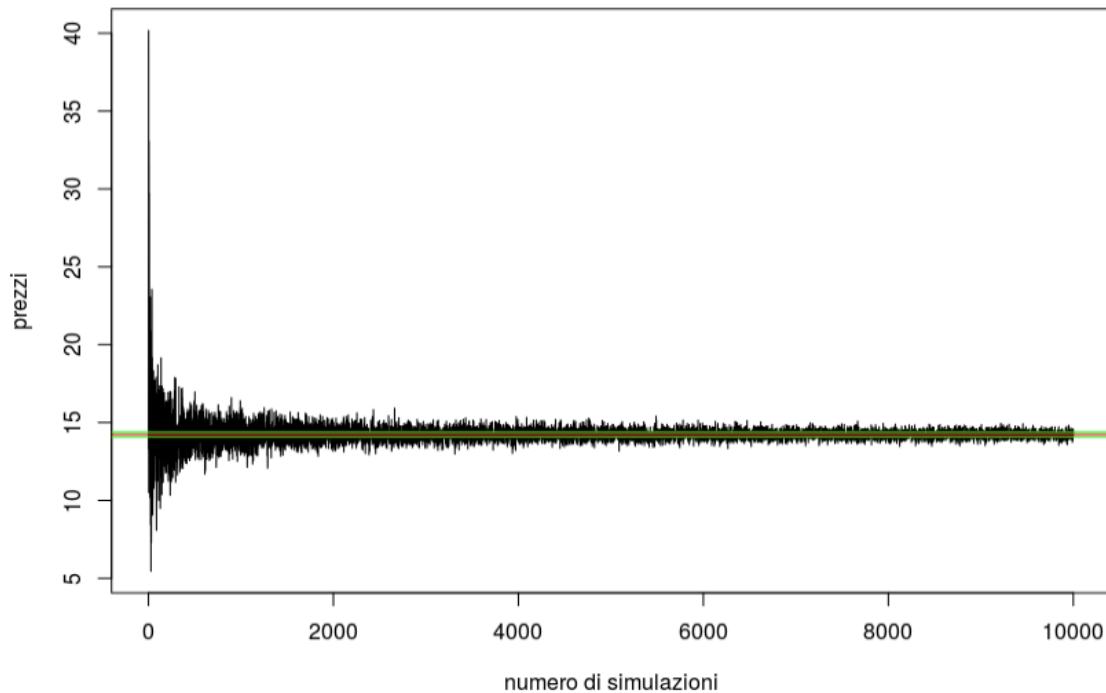


Figura 22 Simulazioni di Monte Carlo e Black e Scholes a confronto per un numero crescente di simulazioni, con $\sigma=0.3$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Alcuni dei valori ottenuti accrescendo progressivamente il numero di simulazioni, sono:

Black e Scholes		14.231255
Monte Carlo		
Simulazioni=1000	14.537	
Simulazioni=10000	14.234	
Simulazioni=90000	14.232	

Tabella 7 Confronto tra prezzi ottenuti a seguito di diversi numeri di simulazioni di Monte Carlo. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

³⁸ Si considerano osservazioni giornaliere, in tutto 250 in riferimento al numero di giorni lavorativi in un anno. Si osservi che le simulazioni considerate sono: $n=1:10000$

È possibile aumentare il numero di osservazioni giornaliere effettuate, mantenendo costante il valore $n=10000$ di simulazioni dei processi di prezzo condotte.

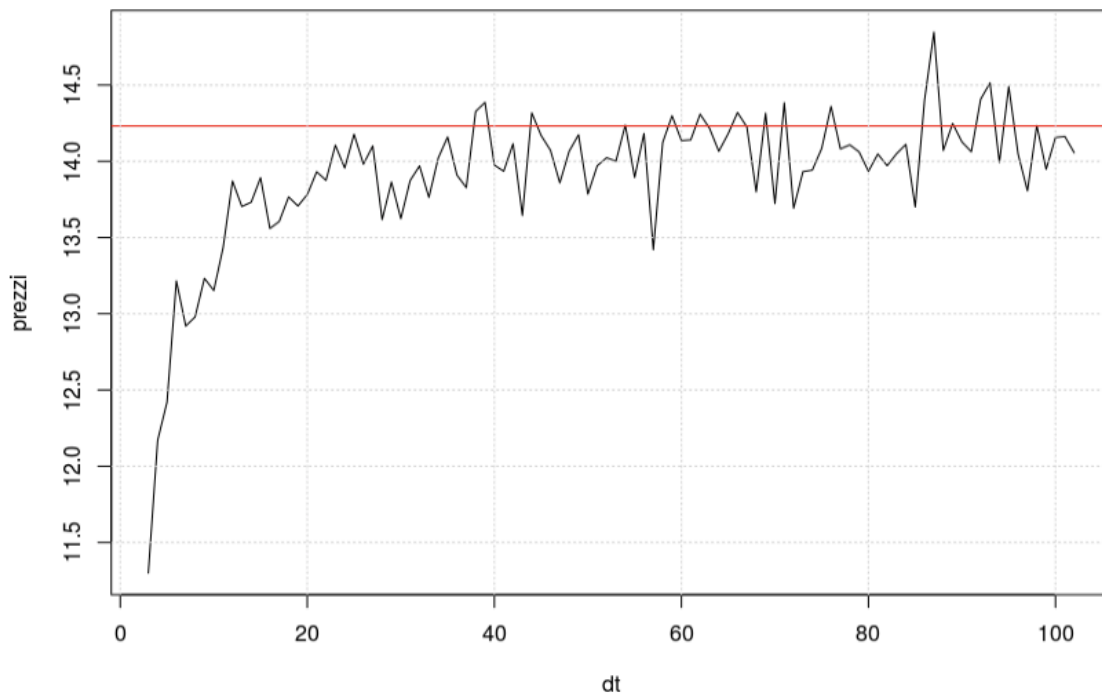


Figura 23 Simulazioni di Monte Carlo e Black e Scholes a confronto per un numero crescente di osservazioni giornaliere, con $\sigma=0.3$.
Fonte: elaborazione propria su 'R'

Nella Figura 23 si osserva la convergenza del prezzo calcolato tramite le simulazioni al valore del benchmark, in rosso, per un numero crescente di osservazioni annuali.

Infine paragonando il grafico contenuto nella Figura 22 con il seguente grafico, è possibile osservare come la convergenza, sia più rapida all'aumentare del numero di processi simulati quando la volatilità del sottostante è più ridotta. Le linee verdi nella Figura 22 rappresentano un margine di errore tollerato nella stima del prezzo del contratto di opzione posto pari a $margin e = C_{Black-Scholes} \pm 0.158$, analoga procedura è effettuata nel caso di un contratto di opzione caratterizzato da $\sigma=0.05$ a parità di altre condizioni. Il valore di 0.158 è calcolato coerentemente con le osservazioni esposte nel paragrafo 2.2.3 circa l'errore standard della stima di Monte Carlo, imponendo un valore della volatilità del processo $\sigma=0.05$ e un numero di simulazioni $N=10000$.

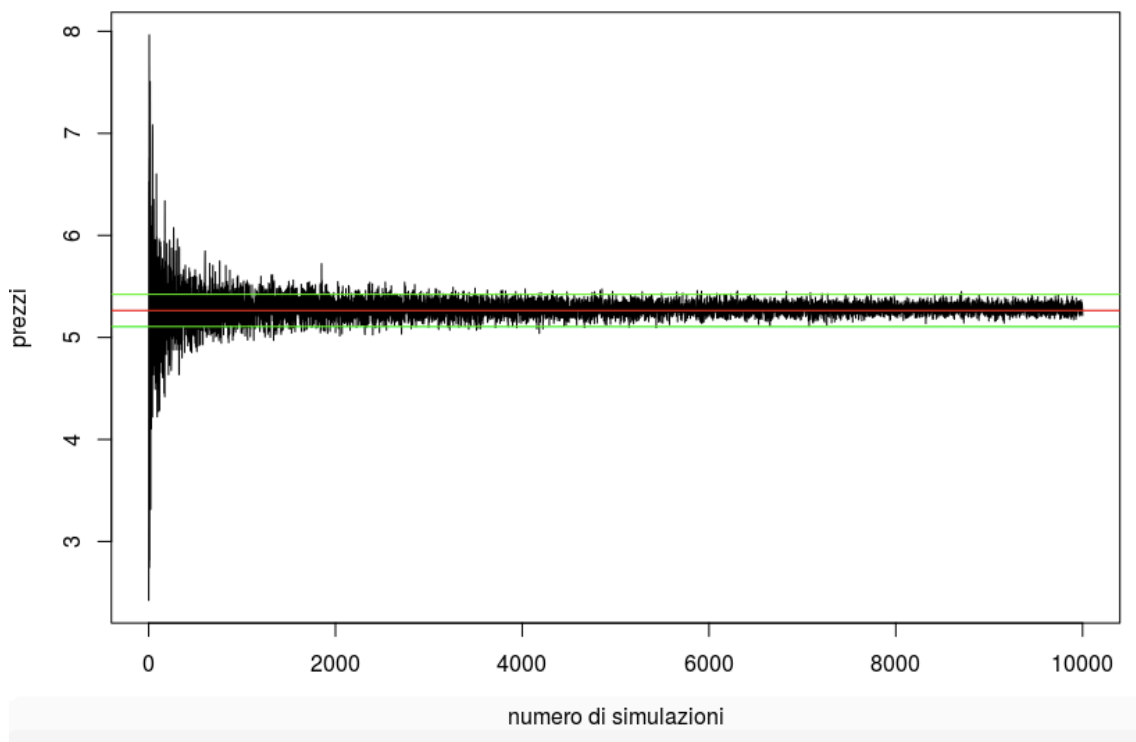


Figura 24 Simulazioni di Monte Carlo e Black e Scholes a confronto per un numero crescente di simulazioni, con $\sigma=0.05$. Fonte: elaborazione propria su 'R'

Emerge chiaramente come i prezzi stimati tramite la simulazione rientrino all'interno dei margini in verde con una convergenza visibilmente maggiore nella Figura 24.

Nel mondo reale l'accuratezza del metodo presentato non è l'unica variabile rilevante; alla luce delle tecniche di high-frequency trading la variabile temporale risulta di elevata importanza nei mercati finanziari. L'esecuzione dell'algorithmo è immediata quando si provvede all'applicazione della formula di Black e Scholes, il tempo di esecuzione è trascurabile nello svolgimento degli alberi binomiali di Cox, Ross e Rubinstein, ma non è trascurabile nell'applicazione del metodo delle simulazioni di Monte Carlo.

Il maggior livello di accuratezza osservato, con un numero di simulazioni pari a 90000, richiede un tempo pari a 1.46 minuti³⁹ per l'esecuzione dell'algorithmo che consente di ottenere il valore di prezzo; un livello di accuratezza elevato è anche ottenuto quando si mantengono i valori del numero di simulazioni ed intervalli ad un livello intermedio, in riferimento alle osservazioni ipotizzate nella trattazione, pari a 1630 osservazioni annuali, per un numero di processi simulati pari a 10000. Anche in questo caso l'algorithmo richiede un tempo di applicazione notevole di 1.03 minuti. La struttura

³⁹ Si utilizza una funzione di misurazione del tempo impiegato per l'esecuzione dell'algorithmo posta all'interno dell'algorithmo stesso, nativa del software.

dell'algoritmo, il software di programmazione utilizzato e la conseguente qualità dell'algoritmo, il calcolatore impiegato sono variabili che influenzano la durata dell'esecuzione dell'algoritmo⁴⁰.

3.4. Valutazione di opzioni asiatiche

Le opzioni asiatiche possono essere classificate in opzioni asiatiche con media aritmetica e opzioni asiatiche con media geometrica sulla base del tipo di media che viene calcolato ai fini della determinazione del loro payoff. Come esposto nel paragrafo 2.2.2.4., una manipolazione della formula di Black e Scholes per il pricing di opzioni plain vanilla consente di ottenere una formula chiusa per il pricing di opzioni asiatiche basate su media geometrica; tuttavia non è possibile ottenere lo stesso risultato per il pricing di opzioni asiatiche basate su media aritmetica. Quello esposto rappresenta un esempio evidente di casi in cui la formula chiusa, nonostante la sua immediatezza e accuratezza comprovata, non rappresenta un metodo di valutazione potenzialmente adottabile in virtù delle caratteristiche complesse del payoff del contratto azionario.

La flessibilità ed adattabilità del metodo delle simulazioni di Monte Carlo, in questa circostanza risultano caratteristiche essenziali, che consentono di individuare un metodo adeguato per il pricing di opzioni asiatiche con media aritmetica. L'impiego di un metodo basato sulla generazione di alberi binomiali non rappresenta un'alternativa valida per via della complessità del calcolo, come esposto precedentemente nella trattazione⁴¹.

Nell'interesse di definire il prezzo di tale contratto strutturato, risulta necessario seguire gli stessi step esposti nel paragrafo 3.3 e modificare la struttura del payoff considerata per le opzioni plain vanilla. A tale fine, l'espressione (2.9) è adattata alla struttura del payoff proprio di un'opzione asiatica, sotto le ipotesi di media aritmetica dei prezzi del sottostante. Non è sufficiente, in questo contesto, simulare il valore assunto da $S(T)$ nell'istante $t=T$ di scadenza dell'opzione in stile europeo, risulta invece necessario fare riferimento ad un numero di valori intermedi assunti dal titolo azionario sottostante durante l'intervallo considerato.

Sotto l'ipotesi per cui il periodo di riferimento per il calcolo del payoff, sia coincidente con la vita a scadenza del contratto di opzione stesso nella sua interezza, è opportuno considerare tutti i possibili prezzi assunti dal sottostante tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = T$ di scadenza, fondando il calcolo sulla totalità del processo di prezzo azionario simulato, osservabile nella Figura 21 per $\sigma=0.3$. Osservando la dinamica del sottostante come ipotizzata nel paragrafo 2.2.2.2, e considerando che:

⁴⁰ N=90000 processi di prezzo tempo: 1.460148 minuti; N=50000 processi di prezzo tempo: 48.58845 secondi; N: 1/2520 frazionamenti e N=1000 processi di prezzo, tempo: 12.06116 secondi; N: 1/1630 frazionamenti e N=10000 processi di prezzo: 1.031886 minuti.

⁴¹ Vd. § 2.2.1.-Modello di *pricing* binomiale di Cox, Ross e Rubinstein (CRR) e Hull e White.

$$S_{media} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$$

dove n rappresenta il numero di possibili valori assunti da un processo di prezzo del sottostante simulato tra l'istante $t = 0$ e $t = T$; risulta possibile ottenere che il valore di un'opzione call asiatica è descritto da:

$$C_{Asiatica} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{(-rT)} \max(S_{media} - X, 0)$$

La discretizzazione del processo del sottostante, già simulata nel paragrafo 2.2.2.2, è necessaria per poter elaborare la simulazione nell'ambiente di lavoro 'R', tuttavia potrebbe condurre a possibili errori nel calcolo di $C_{Asiatica}$. Tali errori emergono dalla condizione per cui non tutti i prezzi assunti nel tempo continuo dal sottostante titolo azionario possono essere presi in considerazione.

Ponendo $S(0) = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $X = 100$ e $T = 1$, si ottiene:

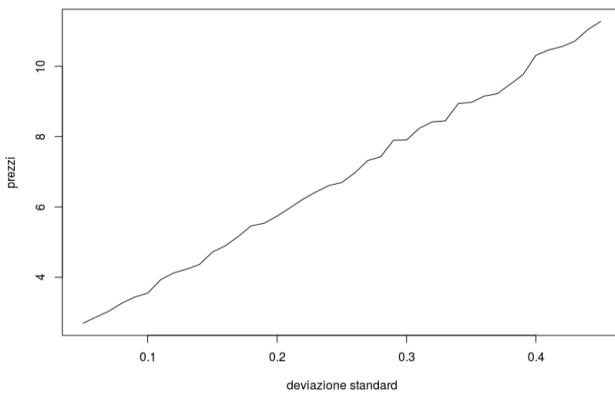


Figura 25 Prezzo dell'opzione asian call in funzione di sigma (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

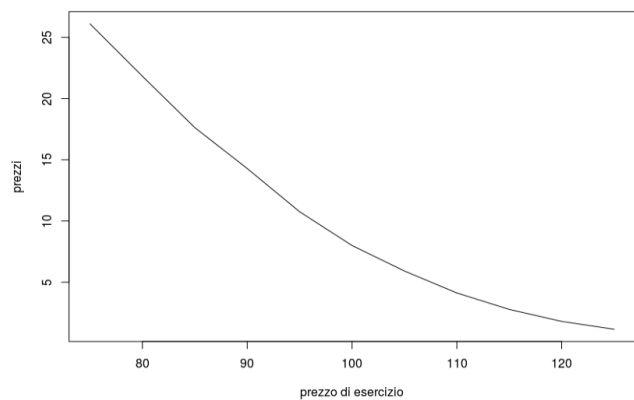


Figura 26 Prezzo dell'opzione asian call in funzione di X (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

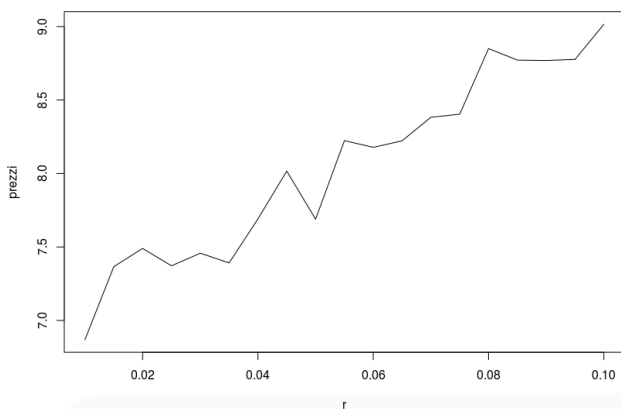


Figura 27 Prezzo dell'opzione asian call in funzione di r (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

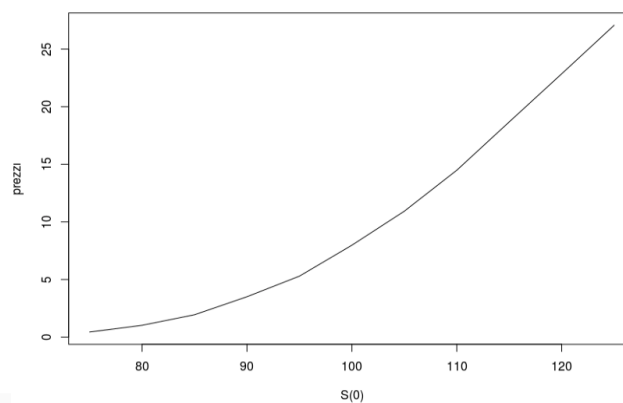


Figura 28 Prezzo dell'opzione asian call in funzione di $S(0)$ (ceteris paribus). Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Nonostante la diversa tipologia di opzione finanziaria, è possibile paragonare i grafici esposti nelle Figure 25-28 con quelli esposti nelle Figure 7-10 per sottolineare come la discretizzazione temporale incida sui risultati ottenuti dai diversi studi, ed in particolare incida su di essi al variare di r e σ .

3.5. Valutazione di opzioni regular barrier

Le opzioni a barriera vengono ad esistenza o cessano di esistere quando il prezzo del titolo azionario sottostante raggiunge un dato livello definito barriera. Per questa categoria di opzioni non è solo possibile distinguere tra il payoff che differenzia le opzioni call dalle put, è infatti possibile osservare quattro categorie di payoff⁴²:

- 1) Up-and-in put;
- 2) Down-and-in call,
- 3) Up-and-out put;
- 4) Down-and-out call.

Nella trattazione seguente si fa riferimento ad un'opzione down-and-in call e un'opzione down-and-out call caratterizzate da $S(0) = 100, T = 1, r = 0.05, X = 100$ e $\sigma = 0,3$.

Ai fini di ottenere una visualizzazione grafica del payoff che rappresenta la base di ogni metodo di pricing applicabile, si osservi la seguente simulazione:

⁴² Vd. § 1.1.2.-Le opzioni regular barrier. per una trattazione più estesa della differenza tra le quattro tipologie di opzioni regular barrier citate.

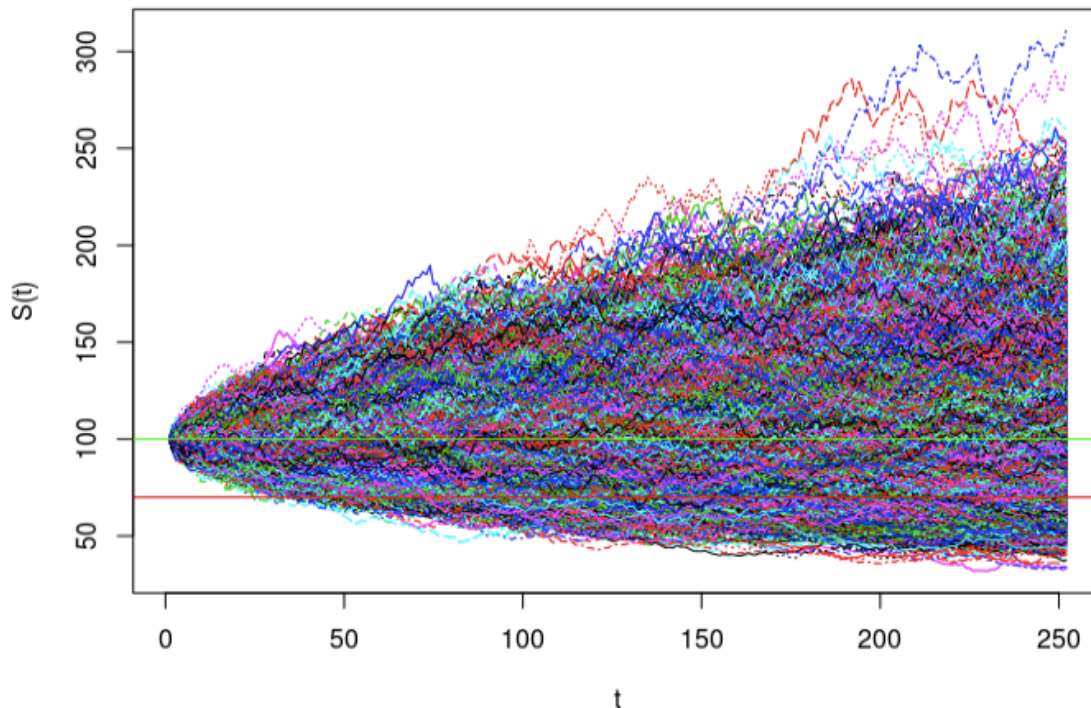


Figura 29 Processi di prezzo del sottostante e barriere. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

La Figura 30 espone la simulazione di processi di prezzo del titolo azionario sottostante e l'ipotesi di due alternative barriere B: in corrispondenza di un valore $B = 100$ e $B = 70$.

Per il pricing diretto di opzioni down-and-in call, è possibile ricorrere ad una formula chiusa ottenuta a partire dalla formula di Black e Scholes per le opzioni plain vanilla⁴³, ottenendo i seguenti risultati:

	$B = 100$	$B = 70$
$\sigma_1 = 0,3$	14.2312	0.0924

Tabella 8 Prezzo opzione down-and-in call calcolato tramite formula chiusa per diversi valori di B. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Alternativamente è possibile impiegare il metodo delle simulazioni di Monte Carlo, che anche in questo contesto risulta essere sufficientemente flessibile da potersi adattare alla complessa struttura del payoff di opzioni regular barrier. È necessario seguire, a tal proposito, gli stessi step elencati nel paragrafo 3.3: in questo contesto è necessario considerare che, come le opzioni asiatiche, le regular barrier appartengono alla categoria delle opzioni path-dependent; dunque la valutazione delle stesse secondo il metodo di Monte Carlo richiede di far riferimento a tutto il processo di prezzo azionario simulato dal tempo $t=0$ a $t=T$. In questo contesto, dato che non tutti i prezzi assunti dal sottostante possono essere presi in considerazione, si genera una sistematica sopravvalutazione delle opzioni down-and-out, vice versa avviene per le opzioni down-and-in. Tuttavia, per risolvere la problematica è sufficiente accrescere il numero di simulazioni effettuate.

⁴³ Vd. § 2.2.2.5.- Manipolazione della formula di Black e Scholes per il pricing di opzioni regular barrier.

Tramite le simulazioni di Monte Carlo è possibile ottenere il seguente grafico, in cui si espone la variazione del prezzo in funzione della barriera.

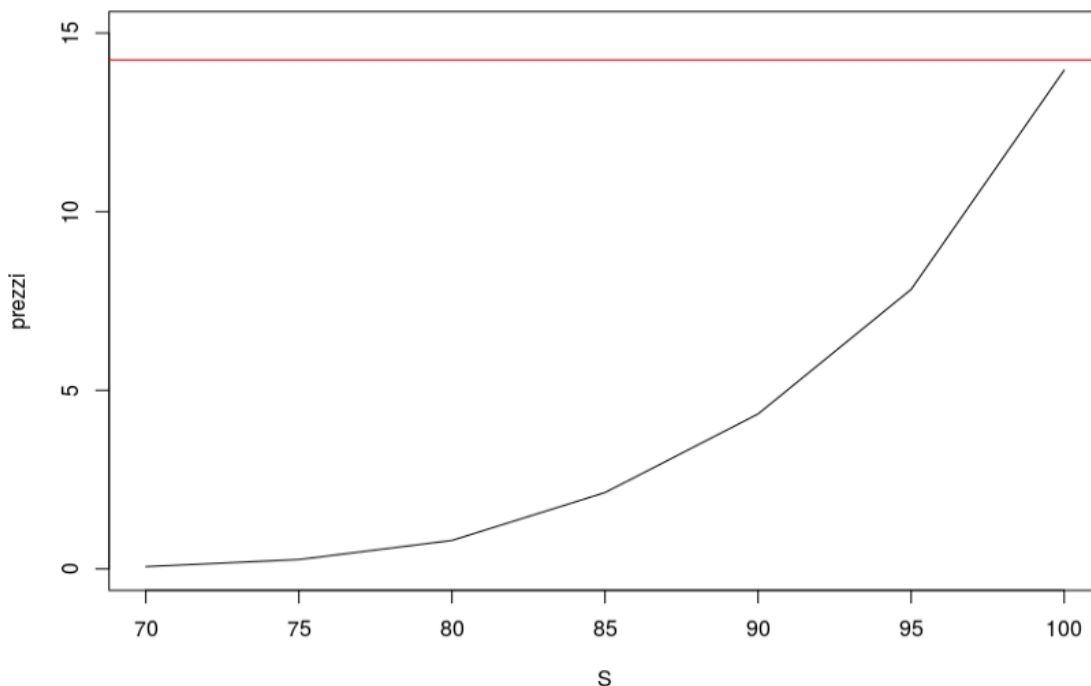


Figura 30 Prezzo di opzione down-and-in call in funzione della barriera. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

È possibile osservare che al convergere del valore della barriera verso $B = 100$ il prezzo dell'opzione down-and-in converge a quello di un'opzione plain vanilla call con le stesse caratteristiche, in rosso. È possibile sfruttare la proprietà per la quale:

$$C_{downout} = C - C_{downin}$$

per il pricing tramite formula chiusa di opzioni down-and-out call, ottenendo:

	$B = 100$	$B = 70$
$\sigma_1 = 0,3$	0.187	14.1576

Tabella 9 Prezzo opzione down-and-out call calcolato tramite formula chiusa per diversi valori di B. Fonte: elaborazione propria su 'R'

Adottando il metodo di Monte Carlo per un'opzione down-and-out call si ottiene il seguente grafico:

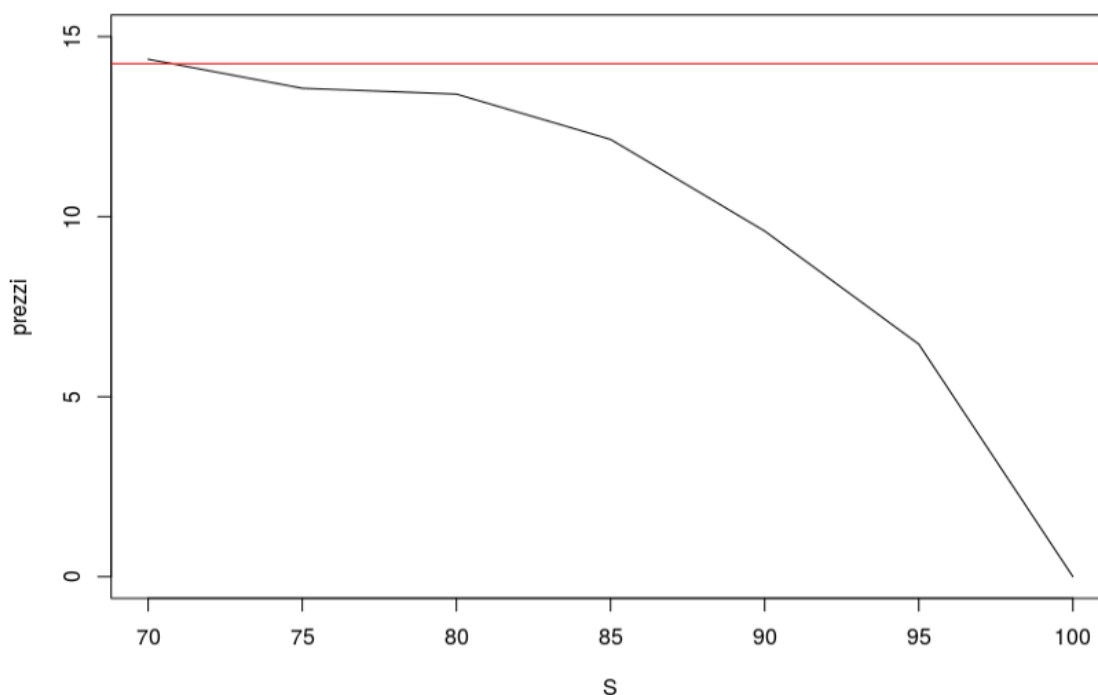


Figura 31 Prezzo di opzione down-and-out call in funzione della barriera. Fonte: elaborazione propria su 'R'

La proprietà è dimostrata empiricamente sia tramite i risultati esposti nelle Tabelle 9 e 10 (ricordando che il prezzo di un'opzione plain vanilla call con analoghe caratteristiche, calcolato nei paragrafi precedenti, è $C = 14.2312$), sia tramite le simulazioni di Monte Carlo adottate ai fini di elaborare i grafici esposti nelle Figure 31 e 32. Il valore di un'opzione call regular barrier, dunque, non può mai superare il valore di un'opzione call plain vanilla corrispondente.

Risulta, inoltre, rilevante esporre il prezzo dell'opzione regular barrier al variare della volatilità del sottostante. Ipotizzando $S(0) = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $X = 100$ e $B = 70$ e un'opzione down-and-in call, è possibile osservare come per un ridotto valore della volatilità σ l'opzione assuma un valore nullo in quanto si riduce fortemente la sua probabilità di venire ad esistenza.

Per $\sigma = 0.05$ si ottiene infatti:

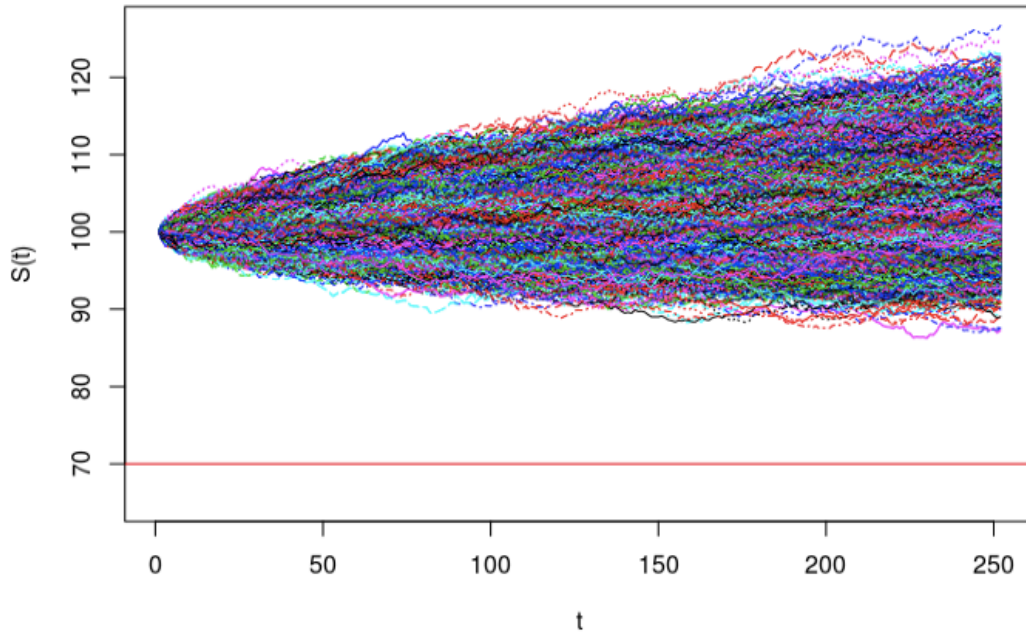


Figura 32 Processi di prezzo con $\sigma=0.05$ e barriera $B=70$. Fonte: elaborazione propria su 'R'.

In rosso è raffigurata la barriera di prezzo, emerge chiaramente la differenza tra questo caso caratterizzato da $\sigma = 0.05$ e quello osservato nella Figura 30 per $\sigma = 0.3$.

Nel grafico seguente, a dimostrazione di quanto affermato, si paragona il prezzo di un'opzione plain vanilla, in rosso, ottenuto in funzione di diversi livelli assunti da σ con il prezzo di un'opzione down-and-in call, in nero, ottenuto in funzione di analoghi livelli di σ ottenuto tramite Monte Carlo.

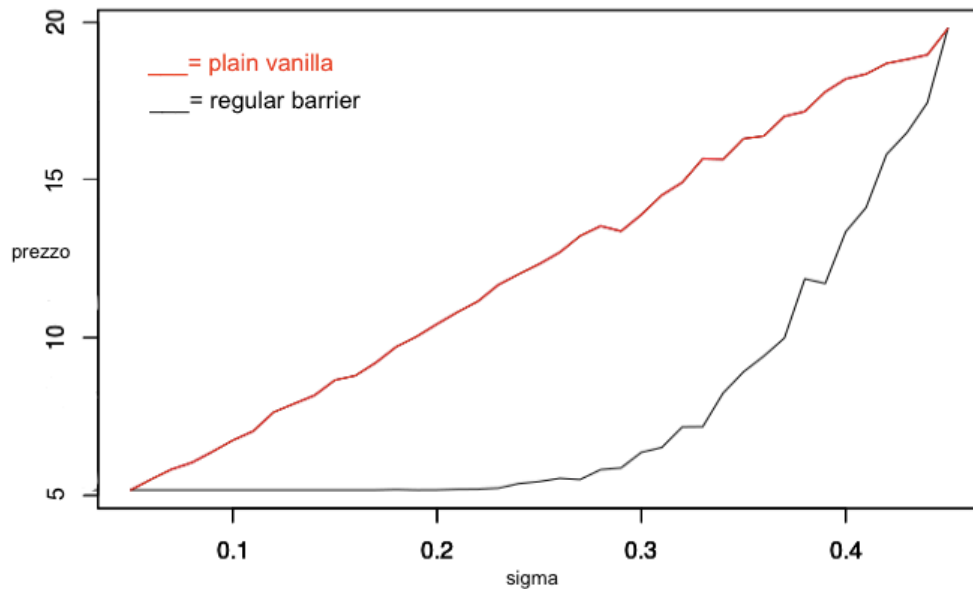


Figura 33 prezzo di opzione plain vanilla call e prezzo di opzione down-and-in call in funzione di σ . Fonte: elaborazione propria su 'R'.

Conclusioni

Nell'elaborato, il confronto tra i più diffusi metodi di valutazione delle opzioni finanziarie, emerge tramite la concreta adozione dei metodi stessi su simulati contratti di opzione. Solo attraverso un coinvolgimento pratico, fondato su una completa base teorica, è possibile far affiorare tutte le caratteristiche dei metodi, superare i limiti analitici e puramente teorici ed infine fronteggiare gli ostacoli operativi.

Nella valutazione delle opzioni plain vanilla, emerge chiaramente la comodità operativa della formula di Black e Scholes: quest'ultima consente l'individuazione immediata e diretta di un unico valore di prezzo, dati i parametri di riferimento, facendo risultare come relativamente meno efficiente qualsiasi altro metodo di pricing di opzioni dotate di payoff standardizzato. Il metodo delle elaborazioni degli alberi binomiali, di Cox, Ross e Rubinstein, riduce la complessità logica e analitica dell'approccio di Black e Scholes, consentendo di ottenere una rapida convergenza verso il prezzo ottenuto tramite formula chiusa al crescere del numero di intervalli considerati. Rappresenta tuttavia un modello oneroso a livello computazionale. L'accuratezza ed efficacia del metodo delle simulazioni di Monte Carlo dipende fortemente dalle capacità dei calcolatori impiegati, ponendo degli ostacoli costituiti dalla durata dell'esecuzione dell'algoritmo, dal numero di intervalli e processi di prezzo simulabili sulla base delle caratteristiche fisiche del mezzo impiegato nell'esecuzione del rispettivo algoritmo, dalla volatilità del processo di prezzo azionario. Potendo superare questa tipologia di problemi attraverso computer con maggiori capacità di calcolo o codici più efficienti, si riscontra una forte dipendenza dell'accuratezza del metodo dalla volatilità del prezzo del titolo azionario sottostante, tale da poter ridurre la convenienza riscontrata nell'adozione di questo approccio per la valutazione di opzioni plain vanilla caratterizzate da un sottostante dotato di elevata volatilità.

La valutazione delle opzioni asiatiche, data la maggiore complessità dello schema di payoff del contratto, fa emergere ulteriori caratteristiche dei metodi di pricing. A differenza del caso in cui il payoff dipende dal valore della media geometrica dei prezzi assunti dal titolo azionario sottostante in uno specifico intervallo temporale, nel caso in cui l'opzione asiatica si basi su media aritmetica è necessario considerare che la somma di variabili aleatorie con distribuzione log-normale non è dotata di una rappresentazione esplicita. Questa condizione è tale per cui, nessun metodo di pricing basato sull'individuazione di una formula chiusa possa essere adottato per la valutazione di opzioni asiatiche appartenenti a tale categoria. Risulta opportuno, dunque, provvedere al confronto di metodi di pricing

numerici. L'impiego di un modello basato su alberi binomiali richiede di condurre delle manipolazioni, effettuate da Hull e White, di elevata difficoltà computazionale. È dunque evidente l'inefficienza del metodo. I vantaggi riscontrati nell'adozione del metodo delle simulazioni di Monte Carlo, emergono chiaramente quando quest'ultimo viene adottato ai fini di valutare opzioni finanziarie strutturate. Il metodo di Monte Carlo risulta essere fortemente flessibile: può essere manipolato per potersi adattare ai più complessi payoff, è coerente con l'ipotesi di processi dinamici di prezzo rappresentabili tramite moto browniano geometrico, si basa sulla simulazione dei processi di prezzo del sottostante consentendo di elaborare metodi di valutazione adatti alle opzioni path-dependent.

Nella valutazione delle opzioni regular barrier emerge il confronto tra flessibilità computazionale del metodo delle simulazioni di Monte Carlo ed immediatezza della formula chiusa. Nella valutazione delle opzioni regular barrier attraverso il metodo di Monte Carlo, la mancata considerazione di alcuni dei valori assunti dal sottostante, causata dalla necessità di simulare nel tempo discreto un numero limitato di processi di prezzo, potrebbe generare problematiche relative alla sopravvalutazione di opzioni down-and-out e sottovalutazione di opzioni down-and-in. La possibilità di fronteggiare tali limiti accrescendo il numero di simulazioni effettuate richiede capacità elevate del calcolatore impiegato nei casi in cui la barriera è collocata in corrispondenza dei valori estremi della distribuzione.

Negli esempi di opzioni finanziarie riportati emerge chiaramente la superiorità in termini di efficacia ed accuratezza dei metodi di valutazione in forma chiusa, analogamente risultano innegabili i limiti di tali approcci analitici dovuti alla loro scarsa flessibilità ed adattabilità.

Risulta, altresì, opportuno considerare che il metodo delle simulazioni di Monte Carlo rappresenta una risposta esaustiva all'introduzione nel mercato di opzioni caratterizzate da payoff progressivamente più complessi e strutturati, elaborati nell'ambito dell'ingegneria finanziaria, e alla luce delle crescenti capacità computazionali dei calcolatori diffusi in commercio e dei software di programmazione, in grado di produrre algoritmi dotati di elevata efficienza. In tale contesto risulta premiata, dunque, la malleabilità dei metodi numerici.

Bibliografia

BLACK F., SCHOLES M., *The pricing of options and corporate liability*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, 1973.

COX J. C., ROSS S. A., RUBINSTEIN M., *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics 7, 1979, 229-263.

DE FELICE M. D., MORICONI F., CASTELLANI G., *Manuale di finanza: Modelli stocastici e contratti derivati*, vol. III, 2006, Milano.

HULL J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, eighth edition, 2012, New York.

HULL J. C., WHITE A., *Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options*, Journal of financial and quantitative analysis, 2002.

KEMNA A.G.Z., VORST A.C.F., *A pricing method for options based on average asset values*, Journal of Banking and Finance 14, 1990, Erasmus University Rotterdam.

SGUERA F., *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, Marzo 1999, ALEA WEB [http://aleasrv.cs.unitn.it/techalea.nsf/FA28AACD2A0B4147C12568FC0058AD11/%24FILE/Sguera2.pdf?OpenAgent&L=/techalea.nsf/FA28AACD2A0B4147C12568FC0058AD11/\\$FILE/Sguera2.pdf](http://aleasrv.cs.unitn.it/techalea.nsf/FA28AACD2A0B4147C12568FC0058AD11/%24FILE/Sguera2.pdf?OpenAgent&L=/techalea.nsf/FA28AACD2A0B4147C12568FC0058AD11/$FILE/Sguera2.pdf)

Appendice

A. Alberi binomiali di CRR: risultati ottenuti su 'R'

Risultati:

prezzi per $\sigma_2 = 0,3$

Distribuzione prezzi sottostante

1) Numero di intervalli = 2

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	100.00000		
[2,]	80.88579	123.6311	
[3,]	65.42511	100.0000	152.8465

2) Numero di intervalli = 10

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	
[1,]	100.00000					
[2,]	90.94927	109.95141				
[3,]	82.71769	100.00000	120.89312			
[4,]	75.23114	90.94927	109.95141	132.92369		
[5,]	68.42217	82.71769	100.00000	120.89312	146.15146	
[6,]	62.22946	75.23114	90.94927	109.95141	132.92369	
[7,]	56.59724	68.42217	82.71769	100.00000	120.89312	
[8,]	51.47477	62.22946	75.23114	90.94927	109.95141	
[9,]	46.81593	56.59724	68.42217	82.71769	100.00000	
[10,]	42.57875	51.47477	62.22946	75.23114	90.94927	
[11,]	38.72506	46.81593	56.59724	68.42217	82.71769	
	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]	[,11]
[6,]	160.6956					
[7,]	146.1515	176.6871				
[8,]	132.9237	160.6956	194.2699			
[9,]	120.8931	146.1515	176.6871	213.6025		
[10,]	109.9514	132.9237	160.6956	194.2699	234.8590	
[11,]	100.0000	120.8931	146.1515	176.6871	213.6025	258.2307

Prezzi opzione call come da [1,1] matrice:

1) Numero di intervalli = 2

	[,1]
[1,]	12.89047

2) Numero di intervalli = 10

	[,1]
[1,]	1.394076e+01