



Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Tecniche di Borsa

Dalla Portfolio Theory allo studio delle anomalie del
CAPM; Tesi sull'evoluzione dell'asset pricing

Relatore:

Prof. Daniele Previtali

Candidato:

Enrico Pugnotti

Matr.212361

Anno accademico 2018/19

Indice

Introduzione

1. Portfolio theory

1.1 Modern portfolio theory di H.Markovitz

2. CAPM

2.1 Prime formulazioni di Treynor

2.2 Comparazione dei modelli (Treynor, Sharpe, Lintner, Mossin)

2.3 CAPM oggi

2.4 Tests e analisi empiriche

2.5 Critiche di Black e Roll

3. Fama e French e i modelli multifattoriali

3.1 Introduzione ai modelli multifattoriali e all'I-CAPM di Merton

3.2 APT *Arbitrage Pricing Theory*

3.3 Fama e French 3 factor

3.4 Fattori che influenzano l'asset return ed evidenze empiriche e comportamentali del Fama e French

3.4 Fama e French 5 factor e modello a 4 fattori di Carhart

4. Conclusioni

Introduzione

Obbiettivo dello studio è di proporre un'analisi dei modelli di valutazione degli *assets* attraverso un'indagine nella letteratura in chiave critica, in modo da sottolineare gli argomenti chiave e le lucide intuizioni che negli anni hanno portato alla modellistica contemporanea e alla conoscenza che abbiamo del rischio e della sua relazione con i rendimenti di ogni *asset* prezzabile.

Partendo dalla Portfolio Theory e dalle brillanti formulazioni di Markovitz, l'elaborato ripercorre la letteratura in materia di *asset pricing*, dando credito e importanza ai contributi dei vari economisti che hanno potenziato e arricchito il patrimonio di conoscenze relativo alla suddetta materia.

L'elementare concetto di diversificazione del rischio, il principio media-varianza, il *separation theorem*, il concetto di portafoglio di mercato e *risk-free asset*, le prime critiche e debolezze delle assunzioni e ipotesi del CAPM e i successivi tentativi di spiegare le anomalie del modello o di ricavare teorie con assunzioni differenti, hanno permesso sempre di più di avvicinarci ad una limpida conoscenza del funzionamento degli scambi e dei mercati.

Conoscenza che richiede una continua evoluzione negli strumenti di analisi al passo con la crescente complessità dei mercati internazionali e dell'andamento di titoli e indici.

In breve, le seguenti pagine si propongono di ricavare un percorso logico, coerente e razionale nella storia dei principali contributi annessi alla materia cercando di ricavarne un "portafoglio" di conoscenze sufficiente ad affrontare con occhio critico il contemporaneo dibattito sui modelli di previsione dei rendimenti.

1.Portfolio theory

1.1 Modern portfolio theory di H.Markovitz

L'anno è il 1952. Circa il 4,2% della popolazione degli Stati Uniti investe in borsa¹. La maggior parte del paese ritiene che investire sia un modo in cui gli individui benestanti possono giocare con i loro ampi mezzi. La Fed ha alzato il limite sui tassi di interesse un anno prima e le azioni stanno sovraperformando le obbligazioni di 25 punti percentuali². L'investimento negli indici deve ancora riguadagnare popolarità dal crollo del 1929 e gli investimenti internazionali sono inesistenti.

Nel frattempo, il venticinquenne Harry Markowitz sta mettendo insieme la sua tesi di dottorato. Si imbatte in un'idea che (nel tempo) cambierà il panorama della finanza e gli farà guadagnare un premio Nobel.

L'idea dietro al suo fondamentale articolo, “*Portfolio Selection*”, è nata per coincidenza. Mentre era in una sala d'aspetto, un broker ha suggerito casualmente a Markowitz di applicare i suoi studi statistici ai mercati azionari. Dopo aver letto “*The Theory of Investment Value*” di John Burr Williams, Markowitz si concentra sulla relazione di due concetti, che per la sua incredulità, erano stati ignorati fino a quel momento: **rischio e diversificazione**³.

Da questo punto gli studi di H.Markovitz hanno contribuito in maniera decisiva alla formulazione della *Modern Portfolio Theory*, in cui introduce al concetto di analisi di portafoglio a dispetto di quella delle singole securities.

Da qui l'elaborato “*Portfolio Selection*” cerca di ripercorrere la teoria e le deduzioni ricavate dalle osservazioni di H. Markovitz seguendo lo stesso ordine logico di presentazione del suo lavoro “*Portfolio Selection*” in cui prima introduce concettualmente gli assunti di base dei suoi ragionamenti, poi presenta la matematica dietro al principio media-varianza ed infine illustra la geometria e le rappresentazioni grafiche ricavate dalle sue formulazioni.

1.Stocks Then And Now: The 1950s And 1970s. (2008, October 01). Retrieved March 23, 2018, from <https://www.investopedia.com/articles/stocks/09/stocks-1950s-1970s.asp>.

2.Lauricella, T. (2012, February 19). ‘Retro’ Investing-Look Back to Get Ahead. Retrieved March 25, 2018, from <https://www.wsj.com/articles/SB10001424052970204880404577227043217645160>

3.Markowitz H M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. “This Week's Citation Classic”, CC/NUMBER 36 SEPTEMBER 7, 1992

Di seguito quindi le prime righe introduttive del paper in cui viene spiegato il processo di partenza dei suoi studi. Va sottolineato come Markovitz divida il processo di selezione di portafoglio in due *stage* di cui il primo basato su “osservazioni” che termina con “opinioni” sui valori futuri delle *securities*;

“THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing and variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the “expected returns-variance of returns” rule.”

(fonte: “Portfolio Selection” pp.77)

È proprio con questa introduzione nel proprio lavoro che Markovitz, sceglie di dare rilevanza al concetto di expected return-variance (E-V) e quindi, alla varianza del verificarsi dei rendimenti futuri e alla correlazione che intercorre tra i vari asset facenti parte di un portafoglio.

Nel suo lavoro “*portfolio selection*” discute il comportamento dell’investitore, rifiutando l’ipotesi che lo stesso (come *behavioural rule*) massimizza solo il rendimento atteso.

Tale ipotesi viene rifiutata basandosi sull’assunto, sviluppato e ricavato dai lavori di Williams (The Theory of Investment Value by John Burr Williams) che la diversificazione è un elemento positivo ed indispensabile, e che un portafoglio diversificato deve essere sempre preferibile ad uno non diversificato (tenendo salda l’idea che possano esistere in casi limite singoli asset preferibili a portafogli diversificati quando maggiormente efficienti dal punto di vista expected return-variance).

“The hypothesis (or maxim) that the investor does (or should) maximize discounted return must be rejected. If we ignore market imperfections the foregoing rule never implies that there is a diversified portfolio which is preferable to all non-diversified portfolios. Diversification is both observed and sensible; a rule of behavior which does not imply the superiority of diversification must be rejected both as a hypothesis and as a maxim.”

(fonte: “portfolio selection” pp.77)

Negata la regola della massimizzazione del solo rendimento atteso, dimostra e presenta con una matematica semplice il concetto di “principio (regola) di rendimento atteso-

varianza”, introducendo i fondamentali concetti di correlazione e covarianza nell’analisi di un portafoglio con differenti asset.

Gli assunti fondamentali della teoria di portafoglio secondo Markowitz sono quindi i seguenti:

1. Gli investitori intendono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio.
2. L’orizzonte temporale di investimento è uniperiodale (un mese, un anno, un triennio)
3. I costi di transazione e le imposte sono nulli, le attività sono perfettamente divisibili.
4. Gli investitori selezionano i portafogli utilizzando due parametri, il rendimento atteso $E(r)$ e il rischio (σ), intesa come la deviazione standard dei rendimenti (o alternativamente come proposto nell’articolo originale dalla varianza dei rendimenti (σ^2))
5. Il mercato è perfettamente concorrenziale.

*dalla 1. e la 4. discende il Principio della Media-Varianza che sancisce che tra due strategie di investimento è preferibile quella che presenta maggior rendimento atteso e minor deviazione standard.

Di seguito il resoconto della Matematica statistica usata da H.Markovitz, che presenta: il rendimento come combinazione lineare di una somma ponderata, e la varianza di una somma ponderata espressa tramite la covarianza.

Partiamo con il definire la nozione fondamentale di rendimento di un’attività finanziaria: definito come il rapporto tra il capitale iniziale e gli utili prodotti da operazioni di investimento o di compravendita in un periodo di tempo specificato. Il rischio può essere definito come il grado di incertezza che il mercato esprime sulla effettiva realizzazione dei rendimenti attesi. Tanto il rendimento, quanto il rischio, possono essere oggetto di misurazione ex-ante oppure sono ex-post.

Il rendimento di un titolo azionario, misurato ex-post su un periodo T , può essere espresso come:

$$R_T = \frac{P(t+T) - P(t) + D_T}{P(t)} \quad (1.1.1)$$

dove $P(t)$ e $P(t+T)$ sono i prezzi di mercato negli istanti t e $t+T$ e D_T è il dividendo per azione riconosciuto dall’emittente. L’assunzione della (1.1) presuppone che il dividendo D_T , sia percepito all’istante T e che non sia reinvestito, che i costi di transazione siano nulli, che sia nulla la ritenuta fiscale sui dividendi e, infine, che T sia l’istante di valutazione.

Il rendimento ex-ante è quello stimato all’inizio del periodo di investimento T . Poiché per i titoli azionari le variabili $P(t+T)$ e D_T non sono note con certezza è necessario, per

quantificare il rendimento atteso ex-ante, fare delle previsioni sul loro valore futuro (primo stage di observation and experience del paper di Markovitz).

L'approccio classico considera **RT**, valutato ex-ante, come una variabile casuale caratterizzata da un valore medio (**μ**), che misura il rendimento atteso sul titolo e da un livello di varianza (**σ²**), assunto come misura attendibile dell'incertezza che venga perseguito quel livello di rendimento atteso e da una **distribuzione di probabilità** che identifica statisticamente il processo generatore dei prezzi.

In formula il rendimento atteso viene definito come:

$$\mu = E[R_T] = \sum_{i=1}^N R_i * p(R_i) \quad (1.1.2)$$

dove **p(R_i)** è la probabilità che il **rendimento atteso**, per il titolo i-esimo, sia **R_i**. La probabilità è definita come limite del rapporto tra il numero degli eventi favorevoli (**N_i**) e il numero totale di osservazioni (**N**):

$$p(R_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (1.1.3)$$

La (1.2) richiede, per essere calcolata, la stima di **p(R_i)** ottenibile dai modelli di analisi delle serie storiche o dall'analisi fondamentale. Avendo a disposizione un campione di **N** osservazioni sotto forma di serie storica dei rendimenti, si potrà dunque considerare la media aritmetica delle osservazioni come uno stimatore attendibile del rendimento atteso **μ**.

Il rendimento atteso è dunque in questa ipotesi definito dalla relazione:

$$\mu_i = E[R_T] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_i(j) \quad (1.1.4)$$

Nell'ambito della moderna teoria del portafoglio un'attività finanziaria si considera tanto più rischiosa quanto più elevata risulta la probabilità che i rendimenti futuri si disperdano rispetto al valore medio stimato. Una valida misura statistica di questo effetto derivata appunto dai lavori di Markovitz è rappresentata dalla **varianza**, definita come somma degli scarti dalla media al quadrato pesati per le rispettive probabilità di realizzazione ed espressa dalla relazione.

$$\sigma^2 = Var[R] = \sum_{i=1}^N (R_i - \mu)^2 * p(R_i) \quad (1.1.5)$$

La funzione **σ²**, assunta come una stima attendibile della rischiosità finanziaria del titolo, viene valutata mediante modelli matematico-statistici. Considerando la varianza campionaria come una stima attendibile della varianza dell'intera popolazione e indicato con N il numero di osservazioni delle quali si dispone, il rischio di un'attività finanziaria si calcola utilizzando la formula seguente.

$$\sigma^2 = Var[R] = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [R_j(j) - \mu]^2 \quad (1.1.6)$$

Un'assunzione fondamentale dei lavori e del modello di Markovitz, riguarda la distribuzione delle probabilità sulla quale si regge il meccanismo di formazione dei rendimenti, la quale si ipotizza essere di tipo Gaussiano. Ciò significa considerare che i prezzi siano generati da un processo casuale che esprime un valore medio atteso uguale a μ e una varianza pari a σ^2 , assunzione assai utile dato che le variabili casuali distribuite normalmente sono descritte in modo completo dalle sole funzioni media e varianza.

Per calcolare il rischio e il rendimento di un portafoglio costituito da N titoli è necessario in particolare fare riferimento alla correlazione esistente tra i titoli e al rapporto tra la frazione di ricchezza investita su ciascun titolo e quella totale di portafoglio.

$$w_j = W_j/W \quad (1.1.7)$$

Si può dimostrare che per un portafoglio composto da n attività rischiose le espressioni del rendimento e della varianza ex-ante sono le seguenti:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i * \mu_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * C_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (1.1.8) \quad (1.1.9)$$

dove w_i è il rapporto tra la quantità di ricchezza investita sul titolo i-esimo e quella totale a disposizione dell'investitore, C_{ij} e ρ_{ij} sono rispettivamente la covarianza e il coefficiente di correlazione tra il titolo i-esimo e il titolo j-esimo.

E' importante sottolineare che i rendimenti e le varianze attese per i singoli titoli che compongono il portafoglio sono considerate variabili casuali, governate da una distribuzione di probabilità condizionata che tiene conto del legame esistente tra un titolo e la rimanente parte del mercato.

Va sottolineato poi il concetto di covarianza e correlazione, il quale effetto si può notare esplicitamente e in modo molto semplice in un ipotetico portafoglio composto da 2, titoli dove si avrà:

$$\sigma_p^2 = (X_A \sigma_A)^2 + (X_B \sigma_B)^2 + 2X_A X_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$$

$$\sigma_p = \sqrt{(X_A \sigma_A)^2 + (X_B \sigma_B)^2 + 2X_A X_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} \quad (1.1.10)$$

$$\sigma_p^2 = (X_A \sigma_A)^2 + (X_B \sigma_B)^2 + 2X_A X_B \text{Cov}_{A,B}$$

$$\sigma_p = \sqrt{(X_A \sigma_A)^2 + (X_B \sigma_B)^2 + 2X_A X_B \text{Cov}_{A,B}} \quad (1.1.11)$$

$$: E(r_p) = \sum_{i=1}^n X_i E(r_i)$$

$$(1.1.12)$$

*dove X sono i pesi percentuali dei titoli ed $E(r_i)$ è il rendimento atteso del titolo i-esimo

*Per completezza di seguito le formule che esprimono varianza e covarianza:

$$\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(r_{A,i} - \bar{r}_A)^2}{(n-1)}}; \quad \text{Cov}_{A,B} = \sum_{i=1}^n \frac{[(r_{A,i} - \bar{r}_A)(r_{B,i} - \bar{r}_B)]}{(n-1)}; \quad \rho_{A,B} = \frac{\text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

Correlazione che in particolare diventa fonte di rischio di un portafoglio; Si riconosce infatti che, se ρ è nullo la varianza del portafoglio è uguale alla media ponderata delle varianze dei singoli titoli, pesate dalla percentuale di ricchezza in essi investita.

“Similarly in trying to make variance small it is not enough to invest in many securities. It is necessary to avoid investing in securities with high covariances among themselves. We should diversify across industries because firms in different industries, especially industries with different economic characteristics, have lower covariances than firms within an industry.”

(fonte: “portfolio selection” pp.89)

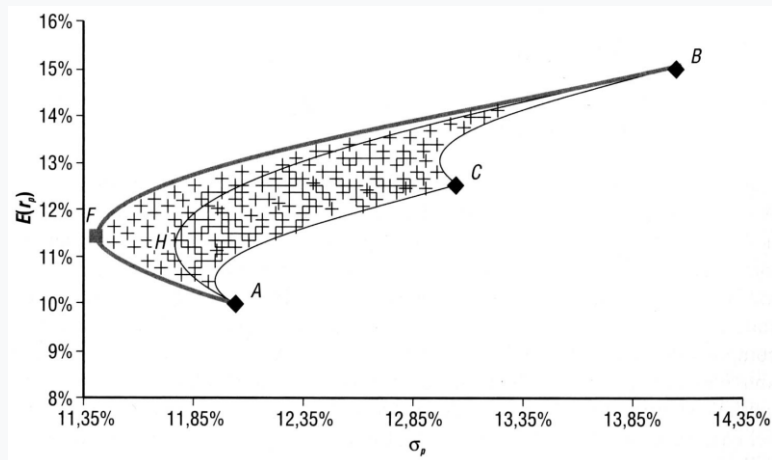
In pratica se non c’è alcuna correlazione tra i due titoli il rischio di assunzione di un portafoglio è analogo a quello che caratterizza i singoli titoli.

Se ρ è positivo allora alla crescita del rendimento di un titolo corrisponde l’aumento del rendimento del secondo titolo, la variabilità del portafoglio, in questa situazione, è maggiore di quella che caratterizza ciascun titolo.

Se è negativo, la varianza del portafoglio risulta minore di quella di ciascun titolo; si deduce che nel caso di andamenti contrapposti dei rendimenti dei titoli, il rischio di detenzione di un portafoglio si riduce.

In conclusione, anche in base agli assunti precedenti è possibile fornire una rappresentazione grafica della *Portfolio Selection* di Markowitz che permette di definire

la frontiera dei portafogli efficienti, o anche detti dominanti, in quanto necessariamente preferibili a tutti gli altri portafogli, frutto di differenti combinazioni tra vari titoli.



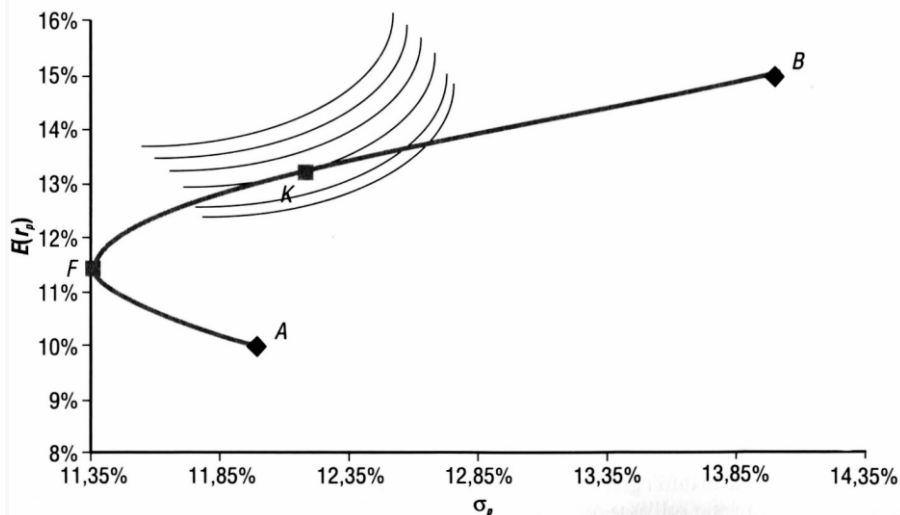
(figura 1) Fonte: Fabrizi, P.L., “Economia del mercato immobiliare”, Egea, Milano 2003

Frontiera dei portafogli efficienti nel caso di tre titoli

Il tratto FB sarà appunto la frontiera efficiente con F punto di minima varianza. La funzione di utilità attesa dell’investitore sarà espressa analiticamente da una funzione di utilità quadratica:

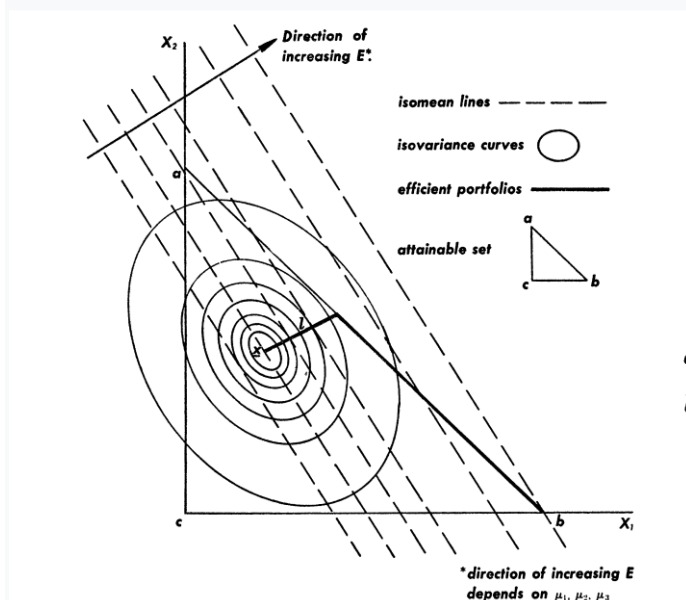
$$E[U(x)] = E(r) - \lambda \sigma^2 \quad (1.1.13)$$

L’investitore, in base alla sua personale avversione al rischio λ e alla sua conseguente disposizione delle curve di preferenza, sceglierà il portafoglio ottimale in corrispondenza del punto di tangenza fra la sua curva di indifferenza e la frontiera dei portafogli efficienti, in un grafico con ascisse σ e ordinate $E(rp)$.



(figura 2) Fonte: Fabrizi, P.L., “Economia del mercato immobiliare”, Egea, Milano 2003

di seguito una rappresentazione grafica del lavoro di Markovitz che riassume i concetti geometrici discussi nel suo paper: il comportamento del fascio di parallele da parte delle *isomean curves*, il concetto di ellissi concentriche per la rappresentazione delle *isovariance curves*, che permettono quindi di individuare nel loro centro il punto di minima varianza, la direzione della massimizzazione dell’*expected return* perpendicolare al fascio di parallele, ed infine la derivazione della frontiera efficiente ricavata tramite il triangolo abc delle combinazioni effettuabili sotto i vincoli di positività.



- a) $E = E(X_1, X_2)$
- b) $V = V(X_1, X_2)$
- c) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, 1 - X_1 - X_2 \geq 0$

(fonte: H.Markovitz, “Portfolio Selection”, pp.85)

Tuttavia, nonostante ad oggi si sia raggiunta un'interpretazione di comune accordo ci è voluto molto tempo per implementare l'MPT (*Modern portfolio theory*) sul campo. L'articolo iniziale, Portfolio Selection, era carico di grafici complessi ed equazioni che risultavano difficili da comprendere per i professionisti. Per decenni, gli investitori si sono aggrappati ai loro "istinti" nell'investire e, di conseguenza, l'MPT è rimasto bloccato all'interno dei circoli accademici. Nel 1970, William F. Sharpe pubblicò il suo libro intitolato Portfolio Theory e Capital Markets, che introdusse il Capital Asset Pricing Model (CAPM) e si basava sulla teoria di Markowitz. Insieme, CAPM e MPT hanno contribuito alla crescita degli investimenti in indici attraverso l'utilizzo di modelli "predittivi" dei rendimenti nei mercati.

2. CAPM

Il Capital Asset Pricing Model è un modello di equilibrio dei mercati finanziari, che determina una relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiosità, misurata tramite un unico "fattore di rischio", detto beta.

Il CAPM si basa sul modello di scelta del portafoglio sviluppato da Harry Markowitz (1959) e Tobin (1958).

Nel modello di Markowitz, un investitore seleziona un portafoglio al tempo $t-1$ che produce un ritorno stocastico al tempo t . Il modello assume che gli investitori sono avversi al rischio, e quando scelgono dei portafogli, si preoccupano solo della media e della varianza del rendimento dell'investimento di un solo periodo. Come risultato, gli investitori scelgono i portafogli "media-varianza-efficienti", nel senso che i portafogli:

- 1) minimizzano la varianza del rendimento dei portafogli, in base al rendimento atteso
- 2) massimizzano il rendimento atteso, data la varianza. Pertanto, l'approccio di Markowitz viene spesso definito "modello Media-Varianza".

Da una parte quindi nel "Portfolio Model" viene fornita una formulazione algebrica sui pesi degli *assets* facenti parte dei portafogli efficienti secondo il principio di media-varianza. A miglioramento il CAPM trasforma questa affermazione algebrica in una previsione verificabile riguardo alla relazione tra rischio e rendimento atteso, identificando un portafoglio che risulta essere efficiente se i prezzi delle attività rimangono coerenti con (compensano) il mercato.

Treynor (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) sono i quattro economisti che contribuiscono alla realizzazione del primo Capital Asset Pricing Model; attraverso i loro lavori contribuirono a realizzare il passaggio da quelle che erano le teorie e leggi individuate da Tobin e Markovitz fino alle relazioni di linearità tra i rendimenti attesi e la covarianza con un “portafoglio di mercato”.

Le loro intuizioni e formulazioni portano ad un primo CAPM che attraverso migliorie e modifiche nel tempo lo hanno fatto diventare quel modello di equilibrio dei mercati che si studia tuttora in ogni corso di economia dei nostri giorni e che inoltre rappresenta la base concettuale di tutti i modelli finanziari realizzati negli anni successivi fino ad oggi. Il seguente elaborato si propone di ripercorrere le intuizioni e sviluppi algebrici delle prime elaborazioni del modello cercando di rimanere il più fedeli possibile ai paper ufficiali degli autori precedentemente citati.

Il presente elaborato inoltre senza pretendere di esprimere giudizi in merito all’attività di questi grandi economisti, cerca modestamente di evidenziare il lavoro che fu svolto da Treynor individualmente, non pubblicato, e temporalmente antecedente alle pubblicazioni riconosciute di Sharpe Lintner e Mossin.

2.1 Prime formulazioni di Treynor

La prima vera formulazione e lavoro matematico su di un modello di asset pricing è realizzata individualmente da Jack L. Treynor in un manoscritto del 1961, che è stato in precedenza non disponibile al pubblico.

Nel 1958, Jack Treynor fu assunto da Arthur D. Little. Quell'estate prese tre settimane di vacanza a Evergreen, Colorado, durante il quale ha prodotto importanti note matematiche sul capital asset pricing e capital budgeting. Treynor raffinò il suo modello del 1960 nelle 45 pagine di "Market value, time and risk".

In questo paper si concentra su 3 problemi nell’effettuare *investment decision*:

1. come definire le singole decisioni di investimento considerando i flussi finanziari di progetti alternativi; considerando quindi che le prime decisioni sono finanziariamente dipendenti dalle alternative (Bieman e Smidt)
2. come definire l’effetto di una decisione rispetto al valore di mercato di una società
3. come valutare il rischio di queste decisioni.

Successivamente mette in discussione il metodo del *weighted cost of capital*, considerando come dovesse essere modificato, senza delle linee guida e delle tecniche definite, in relazione alla valutazione di nuovi progetti. Dato che il *cost of capital* può

essere determinante nel valutare profitti o perdite nette di un'azienda ne fa emergere controversie circa la sua stima.

“The difficulty with computing the weighted cost of capital (apart from the conceptual difficulty, peculiar to the traditional theory, that the current cost of capital may not be the cost of capital at the optimum capital structure) and then modifying it over a very broad range is not merely that the procedure requires judgement, but that the guidelines for judgement are almost nonexistent. Since the cost of capital applied in a particular problem can be critical in determining whether a decision represents a net gain or loss in present value, considerable controversy has centered on its estimation”

(fonte: Jack L. Treynor, Revised 4/29/15, “market value, time, and risk”)

Con questo primo documento il Dr. Treynor mira a investigare la relazione tra valore di mercato, rischio e tempo e così inizia a gettare le basi per il suo “*highly idealized*” Capital Market Model, avvicinandosi al Capital Asset Pricing partendo dalla prospettiva del *corporate cost-of-capital decision making*.

In "Market value, time and risk" elenca quindi delle prime assunzioni restrittive (critiche) per la realizzazione di un modello di equilibrio del mercato (pp.4-9). Successivamente il documento si sviluppa in due parti principali:

1. Uno studio sulle relazioni del valore di mercato in un intervallo di tempo infinitesimale e,
2. Un'estensione dei risultati del primo punto per la valutazione dei flussi di reddito nel tempo.

Treynor raggiunge conclusioni che rappresenteranno la base delle successive formulazioni nel tempo del Capital Asset Pricing Model; Considerando nei suoi sviluppi algebrici i flussi di cassa come dei vettori i cui componenti sono “i singoli flussi degli individui” relativi ad un determinato istante nel tempo k , $F_k(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$.

Diventa possibile quindi parlare in questo senso della somma di flussi di cassa $(f_k + g_k)$, con $(k = 0, 1, 2, \dots)$, dove l'operazione indicata è la somma di funzioni di flusso di cassa corrispondente allo stesso punto nel tempo. Dimostra inoltre, attraverso la considerazione degli aggregati di flussi di cassa come vettori, che somme dei medesimi (vettori) contenenti valori di mercato attualizzati al presente ($V(f_k)$) presentano proprietà di linearità.

$$V(f_k + g_k) = V(f_k) + V(g_k), \quad (2.1.1)$$

Di seguito un estratto del lavoro di Treynor che illustra ulteriori risultati riportati nelle conclusioni del suo lavoro.

Define S_k as an auxiliary operator which determines the present (time 0) market value function $v(u_1, u_2, \dots)$ from a future market value $f_k(u_1, u_2, \dots)$ at time k in accordance with the following modifications of equation (95),

$$v(u_1, u_2, \dots) = f_k(u'_1, u'_2, \dots) \exp(-rk), \quad (104)$$

$$\text{where} \quad v(t, u_1, u_2, \dots, u_n) = v_0(u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \exp[r(t-t_0)] \quad (95)$$

$$u'_j = u_j + r \int_0^k a''_j(\tau) d\tau. \quad \text{where} \quad u'_j = u_j - r \int_0^k a''_j(\tau) d\tau \quad (96)$$

Then V is defined as follows in terms of S ,

$$V(f_k) = V(f_0, f_1, f_2, \dots) = \sum_k S_k f_k. \quad (106)$$

Inspection of equation (104) shows that for any k_0 , S_k has the property

$$S_{k_0}(f_{k_0} + g_{k_0}) = S_{k_0} f_{k_0} + S_{k_0} g_{k_0}. \quad (107)$$

Hence we have

$$\begin{aligned} V(f_k + g_k) &= \sum_k S_k (f_k + g_k) = \sum_k S_k f_k + \sum_k S_k g_k \\ &= \sum_k S_k f_k + \sum_k S_k g_k \end{aligned} \quad (108)$$

$$= V(f_k) + V(g_k). \quad (109)$$

(fonte: Jack L. Treynor, "Market value time and risk" pp.44)

Con quest'ultimo sviluppo algebrico Treynor ne ricava 4 considerazioni (deduzioni) molto forti:

1. Un progetto con flussi di cassa rischiosi non assicurabili*, non è mai preferito rispetto ad un progetto con flussi certi e medesimo valore atteso; Il premio per il rischio intrapreso deve seguire regole di mercato di questo tipo.
2. L'effetto incrementale sul valore di mercato di una società che intraprende un dato progetto, è il valore di mercato del progetto (incluso l'investimento iniziale). Il costo del capitale di un progetto è interamente funzione dei flussi di cassa associati al progetto, ed è indipendente dal valore della società; (*ndr – effetto accettabile in un'analisi puramente finanziaria ma comunque discutibile*)
3. Se un'azienda prende in prestito denaro al tasso di interesse senza rischi e compensa i proventi e i rimborsi dei flussi di cassa associati ad un progetto, il valore di mercato del progetto non cambia;
4. Il rischio in un progetto di investimento può essere definito come l'aumento della sensibilità del valore di mercato della società in relazione alle "variabili rilevanti" che risultano se il progetto è intrapreso.

Questo rischio può essere valutato facendo riferimento al valore attuale nella funzione $V(u_1, u_2, \dots)$. Il contributo cumulativo dei flussi di cassa futuri al valore attuale è di solito molto più grande rispetto al contributo dei flussi di cassa correnti. Da qui il rischio di

breve termine dovuto alle variabili non assicurabili è di solito in gran parte il rischio dovuto alla possibilità di cambiamenti nelle previsioni di mercato di queste variabili, piuttosto che dell'incertezza nella liquidità futura collegata ai progetti stessi.

(ndr – la prima considerazione parla del “rischio assicurabile” che nelle assunzioni all’inizio del paper rientra in 3 set di variabili economiche: 1.insurable set, ossia quelle variabili economiche che se aggiunte a un aggregato non ne variano l’incertezza, 2.economically insignificant set, cioè quelle variabili che hanno incertezza e valore economico trascurabile e 3.any variable that is not both insurable and insignificant cioè gli asset rischiosi. Per la seconda considerazione come detto sopra si tratta di un effetto accettabile in un’analisi puramente finanziaria ma comunque discutibile.

La terza considerazione riguarda l’equilibrare i flussi in entrata e in uscita con prestiti e denaro preso a prestito al tasso riskfree senza intaccare il valore totale dei flussi di cassa di un progetto. La quarta considerazione riguarda il rischio che si genera nell’intraprendere un progetto e di come può andare a modificare la “sensibilità” del valore di una società rispetto al variare di previsioni di mercato; intraprendere un progetto può portare una società ad esporsi in determinati “settori” oppure ad essere più “sensibile” al variare del valore di mercato di determinate “variabili economiche” collegate al progetto.)

Insieme e soprattutto grazie al lavoro “Toward a theory of market value of risky asset” Treynor (1962) sviluppa quello che può essere considerato come il primo CAPM; va specificato che entrambi i lavori di Sharpe e Treynor sono stati sviluppati quasi simultaneamente, ma la “concezione” e prima stesura del CAPM di Treynor, anticipano temporalmente quella di Sharpe, nonostante siano i lavori di quest’ultimo i primi ad essere stati pubblicati su testi ufficiali e riconosciuti.

Treynor è quindi probabilmente stato il primo a definire la relazione lineare tra expected return (rendimento atteso) e covarianza con il “portafoglio di mercato”, ed anche a concludere che in equilibrio, il mercato stesso è l’unico portafoglio ottimale secondo il principio media-varianza come verrà spiegato successivamente.

Di seguito un’analisi sulla formulazione di una teoria sull’asset pricing da parte di Treynor realizzata in “Toward a theory of market value of risky asset”.

L’obiettivo di questo lavoro era quello di gettare le basi per una teoria del valore di mercato che incorporasse il concetto di rischio.

Treynor Considera un modello “*Highly idealized*” di un mercato di capitali in cui è relativamente facile vedere come i premi per il rischio impliciti nei prezzi delle azioni siano legati alle decisioni di portafoglio dei singoli investitori. In un mercato reale le complessità istituzionali, le frizioni, le tasse e alcune altre complicazioni che sono assenti nei modelli in analisi possono avere un effetto significativo sui prezzi delle azioni. Lo scopo del documento, tuttavia, non è quello di presentare un apparato completamente sviluppato per calcolare il costo del capitale in problemi pratici. Lo scopo del documento in analisi è semplicemente:

1. dimostrare che, sotto nostre ipotesi, un portafoglio ottimale (il comportamento di bilanciamento da parte del singolo investitore) conduce alla Proposizione I del famoso documento Modigliani-Miller⁵;
2. esplorare il modo in cui il rischio influenza il valore dell'investimento;
3. introdurre il concetto di assicurabilità. I rischi assicurabili hanno un effetto trascurabile sul costo del capitale.

5. enunciato che dice che la scelta tra l'emissione di debito e l'emissione di azioni/capitale proprio per finanziare un dato livello di investimento non influisce sul valore di un'impresa, cosicché non esiste un rapporto ottimale di indebitamento rispetto ai mezzi propri (se non in base alle preferenze del singolo individuo).

Vengono poi elencate le assunzioni del modello nella tabella sottostante: assunzioni che riprendono quelle realizzate da Markovitz e Tobin e che “a grandi linee” coincidono con quelle proposte nei propri lavori da Sharpe Lintner e Mossin.

Table 1 Assumptions of the models.

Assumption	Treynor (1962)	Sharpe (1964)	Lintner (1965)	Mossin (1966)
No taxes	Explicit	Implicit	Explicit	Implicit
No frictions (transactions costs)	Explicit	Implicit	Explicit	Implicit
Agents are price takers who all face identical prices	Explicit	Implicit	Explicit	Implicit
Agents maximize expected utility of future wealth	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
Utility represented as a function of return and risk	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
All agents agree that variance (or standard deviation) is the measure of security risk	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
Agents prefer more return to less and display risk aversion	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
A riskless asset (paying an exogenously determined positive rate of interest) exists, and all investors agree that it is riskless	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
All agents share the same subjective probability distribution of expected future prices	Explicit	Explicit	Explicit	Explicit
Fractional shares may be held	Implicit	Implicit	Explicit	Explicit
Short sales are allowed	Explicitly allowed	Explicitly disallowed	Explicitly allowed	Explicitly allowed
Leverage is allowed	Explicitly allowed	Explicitly disallowed	Explicitly allowed	Implicitly allowed
The number of shares of each security is constant	Implicit	Implicit	Implicit	Implicit
Agents share the same single period time horizon	Explicit	Explicit	Implicit	Implicit

(fonte: Craig W. French, “The Treynor Capital Asset Pricing Model” pp.64)

Lo sviluppo del CAPM di Treynor inizia e si basa sul concetto di *dominance* sviluppato da Tobin (1958) (concetto di portafogli dominanti e dominati), nei suoi scritti, sempre secondo Tobin l'analisi del problema del portafoglio in termini di combinazioni dominanti è possibile solo finché è disponibile un'attività priva di rischio, questo implicitamente esclude l'interest-rate risk e il price level risk considerato invece nei suoi lavori in “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”. La giustificazione dichiarata nel paper ufficiale di Treynor è che sebbene importanti in altri contesti, nell'economia statunitense sono entrambi di scarso interesse rispetto ai tipici rischi azionari (equity).

Con questa affermazione si esclude che l'investitore detenga più denaro di quello che utilizza a fini delle transazioni.

Un altro aspetto del lavoro di Treynor che diverge da quello di Tobin è l'assenza di vincoli di positività. L'investitore individuale è libero di prendere in prestito o prestare, di comprare *long* o di vendere *short*, a sua scelta, purché il suo capitale (il margine di sicurezza per i suoi creditori) rimanga intatto.

Consideriamo, quindi, un mercato in cui vi sono un certo numero di azioni disponibili per gli investitori. Come Markowitz e Tobin, consideriamo il tempo suddiviso in brevi periodi arbitrari in cui la composizione dei singoli portafogli viene mantenuta costante. Nel documento di Treynor, in cui è considerato un singolo intervallo di tempo breve, l'attenzione si concentra sulle scelte di portafoglio degli investitori all'inizio del periodo e sulle conseguenze delle scelte per i prezzi delle azioni ad inizio del periodo. Dal punto di vista del singolo investitore, i valori delle azioni in quel momento sono noti.

I valori (prezzo più il valore delle distribuzioni durante l'intervallo) alla fine del periodo corrente sono sconosciuti, quindi sono variabili casuali. (Assunzione 7 del documento di Treynor⁶) Questo implica che tutti gli investitori condividano la stessa distribuzione probabilistica “soggettiva” del valore futuro (o terminale) delle azioni.

Indichiamo il prezzo attuale (certo) di un'azione “i” con “ $v_i(0)$ ”. Indichiamo il valore futuro dell'azione “i” con “ $v_i(1)$ ” e lasciamo che il valore atteso di “ $v_i(1)$ ” sia “ $\underline{v}_i(1)$ ”. Quindi definiamo il premio per il rischio “ a_i ” dell'azione i come:

$$v_i(0) = b \underline{v}_i(1) - a_i,$$

dove “b” è il fattore di sconto di un periodo definito in termini di tasso di prestito “r” definito come:

$$b = 1 / (1 + r)$$

L'importanza di definire i premi per il rischio in questo modo diventa chiara quando dimostriamo il seguente semplice teorema. Sia “xi” il numero di azioni (i) detenute nel portafoglio di un investitore con capitale (azionario) C. Quindi la performance attesa è:

$$r C + 1 / b \sum x_i a_i$$

In altre parole, il rendimento atteso per l'investitore è la somma di:

1) un rendimento sul suo capitale al tasso di prestito privo di rischio, indipendente dal modo in cui investe, e 2) un rendimento atteso per l'assunzione del rischio che dipende solo dal rischio assunto ed è indipendente dal suo capitale. A meno che non accumuli contanti, l'investitore riceverà un rendimento sul suo capitale al tasso di prestito privo di rischio, indipendentemente da come investe i suoi soldi, più un premio per il rischio, il cui valore atteso dipende solo dai premi per il rischio per i rispettivi investimenti e la posizione che sceglie di tenere in ciascuno.

6. Gli investitori hanno una perfetta conoscenza del mercato, che interpretiamo nel senso che ogni investitore conosce: a) i prezzi attuali b) l'effetto di ogni altra azione che potrebbe avere un impatto sui valori di investimento futuri (quindi tutti conoscono anche i valori futuri)

Il concetto di rischio-premio è quindi utile per parlare del “problema di portafoglio” sotto le suddette (table 1 pagina 18) ipotesi, poiché, insieme all’incertezza associata a un dato investimento, (il rischio) è il parametro di investimento rilevante.

La dimostrazione è semplice. Il rendimento previsto “P” è il valore futuro atteso meno il valore attuale. Il valore futuro atteso è la somma algebrica dei valori futuri delle azioni e di qualsiasi debito. Supponiamo che il valore attuale del capitale netto dell’investitore sia C e che egli scelga di detenere “ x_i ” azioni di investimento (i), attualmente al prezzo di “ $v_i(0)$ ”. Quindi la differenza tra il valore del suo patrimonio netto e il valore delle sue azioni deve essere compensata nel “mercato dei prestiti”. Il valore futuro del debito è il valore attuale del debito, apprezzato al tasso di interesse.

Dimostrazione: la rendita attesa è:

$$\begin{aligned} & (1 + r) [C - \sum x_i v_i(0)] + \sum x_i \underline{v}_i(1) - C \\ & = rC - (1 + r) \sum x_i v_i(0) + \sum x_i \underline{v}_i(1) \\ & = rC + \sum x_i [\underline{v}_i(1) - (1 + r) v_i(0)] \end{aligned}$$

Se definiamo:

$$v_i(0) = b \underline{v}_i(1) - a_i,$$

allora:

$$\begin{aligned} & b \underline{v}_i(1) - v_i(0) = a_i \\ & \underline{v}_i(1) - v_i(0) / b = \underline{v}_i(1) - (1 + r) v_i(0) \\ & = (1 + r) a_i. \end{aligned}$$

Sostituendo nell’espressione del rendimento atteso, abbiamo:

$$rC + \sum x_i [(1 + r) a_i] = rC + 1 / b \sum x_i a_i.$$

Consideriamo il comportamento di un investitore che sta tentando di trovare un equilibrio ottimale tra incertezza e rendimento atteso. Dovrebbe essere chiaro che:

1. Con riferimento al problema di ottimizzazione del singolo investitore, il livello delle prestazioni attese è determinato dal valore di μ , definito da:

$$\mu = \sum a_i x_i$$

2. Ne consegue che dalla nostra ipotesi che tutti gli investitori sono avversi al rischio, l’incertezza è ridotta al minimo per il livello di rendimento atteso posseduto da una combinazione ottimale.

L’insieme di combinazioni con questa proprietà dominerà tutte le altre combinazioni nel senso di Tobin.

Gli investitori possono differire, a seconda del loro capitale e delle attitudini verso il rischio, nella quantità assoluta della combinazione dominante di investimenti rischiosi che intraprendono, ma se le loro previsioni (probabilistiche) del valore futuro concordano,

allora la composizione (proporzione) delle attività rischiose deve essere la stessa. Come i teorici della *portfolio theory* menzionati in precedenza, utilizziamo le varianze e le covarianze per caratterizzare l'incertezza nel rendimento delle azioni. Definita la matrice di covarianza A_{ij} come:

$$A_{ij} = E [(v_i(t) - \underline{v}_i(t)) (V_j(t) - \underline{v}_j(t))]$$

dove E indica il valore atteso dell'espressione tra parentesi. Quindi la varianza dell'errore σ^2 in un portafoglio contenente x_i azioni dell'equity (i) è $\sigma^2 = \sum x_i A_{ij} x_j$. Viene considerato ora l'inverso di A_{ij} , utilizzato per lo sviluppo algebrico, che indichiamo con B_{ij} :

$$\sum A_{ij} B_{jk} = \delta_{ik}.$$

Per trovare le proporzioni ottimali, riduciamo al minimo la varianza del portafoglio soggetta al vincolo del rendimento atteso,

$$rC + 1/b \sum x_i a_i$$

che è uguale a una costante arbitraria k . Per una determinata equity dell'investitore il vincolo diventa,

$$\mu = \sum a_i x_i = k.$$

L'obiettivo, quindi, è minimizzare:

$$\sum x_i A_{ij} x_j = \sigma^2,$$

soggetto a:

$$\mu = \sum x_i a_i = k.$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, otteniamo

$$\sum A_{ij} x_j = \lambda / 2 a_i,$$

dove abbiamo

$$x_j = \lambda / 2 \sum B_{ji} a_i.$$

Sostituendo, otteniamo

$$\sum a_j x_j - k = \lambda / 2 \sum a_j B_{ji} a_i - k = 0,$$

o

$$\lambda = 2k / \sum a_j B_{ji} a_i,$$

$$x_j = \lambda / 2 \sum B_{ji} a_i,$$

Riferendosi alla relazione suddetta,

$$\sum A_{ij} x_j = \lambda / 2 a_i,$$

moltiplichiamo per x_i ciascun termine all'interno della sommatoria per i,

$$\sum x_i A_{ij} x_j = \lambda / 2 \sum x_i a_i = \lambda / 2 k = \sigma^2$$

L'espressione risultante per σ^2 ci consente di scrivere il rapporto μ^2 / σ^2 come

$$\mu^2 / \sigma^2 = k^2 / \lambda k / 2 = 2k / \lambda.$$

Ma noi abbiamo:

$$\lambda = 2k / \sum a_j B_{ji} a_i$$

così che per μ^2 / σ^2 otteniamo:

$$\mu^2 / \sigma^2 = \sum a_j B_{ji} a_i$$

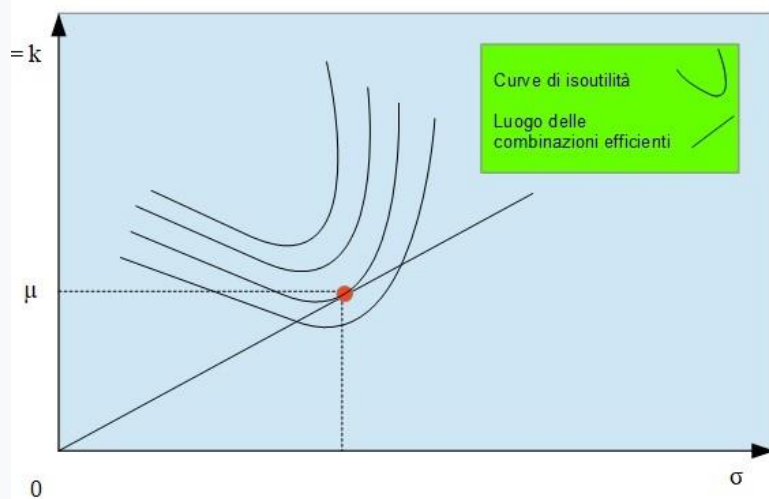
che è indipendente da k .

Tutte le combinazioni efficienti hanno quindi lo stesso rapporto tra il premio per il rischio e l'errore standard. L'insieme efficiente è una linea retta sul diagramma, che passa attraverso l'origine.

Il modo in cui le curve di utilità costante si mappano sul piano cartesiano $k(\mu) - \sigma$, dipenderà dal capitale dell'investitore, dal tasso di prestito e dai suoi gusti.

Per un investitore che è avverso al rischio, l'utilità generalmente aumenta quando ci si sposta da sud-est a nord-ovest sul diagramma.

La tangenza del luogo delle combinazioni efficienti (L'"*opportunity locus*" di Tobin) con una curva di isoquanto rappresentante l'utilità, determinerà il premio di rischio atteso, μ , per l'investitore in questione.



(fonte: elaborazione propria)

Per gli investitori ($\mathbf{m}$) e ($\mathbf{n}$), rispettivamente, le combinazioni ottimali ad esempio sono date da:

$$x_{j,m} = \lambda_m / 2 \sum B_{ji} a_i,$$

e,

$$x_{j,n} = \lambda_n / 2 \sum B_{ji} a_i.$$

Per il j -esimo asset abbiamo

$$x_{j,m} / x_{j,n} = \lambda_m / \lambda_n$$

Le partecipazioni di due investitori sono quindi identiche, entro un fattore di proporzionalità.

Sia quindi X_j il numero di azioni richieste dagli investitori in circolazione nel mercato e sia Λ definito da,

$$\Lambda = \sum \lambda_n.$$

Poi abbiamo:

$$\begin{aligned} X_j &= \sum x_{j,n} = \frac{1}{2} [\sum \lambda_n] \sum B_{ji} a_i \\ &= \frac{1}{2} \Lambda \sum B_{ji} a_i \end{aligned}$$

La condizione di compensazione del mercato è:

$$X_j = \underline{X}_j$$

dove $\underline{X}_j$ è il numero di azioni dell'asset j in circolazione. Se il mercato deve essere compensato (clear), i premi per il rischio a_i devono soddisfare:

$$\frac{1}{2} \Lambda \sum B_{ji} a_j = \underline{X}_j$$

Risolvendo per a_k otteniamo

$$a_k = 2 / \Lambda \sum A_{kj} \underline{X}_j.$$

La sommatoria è la covarianza del k -esimo asset con il mercato nel suo insieme. Definito k_n come la performance prevista del portafoglio del n -esimo investitore:

$$k_n = \sum x_{i,n} a_i$$

Quindi è prevista la prestazione K per il mercato nel suo insieme

$$K = \sum k_n = \sum x_{i,n} a_i = \sum \underline{X}_i a_i$$

Usando questa equazione e la precedente, possiamo eliminare Λ dall'espressione per a_k .

$$\begin{aligned} \sum \underline{X}_k a_k &= 2 / \Lambda \sum \underline{X}_k A_{kj} \underline{X}_j = K \\ 2 / K \sum \underline{X}_k A_{kj} \underline{X}_j \end{aligned}$$

Quindi abbiamo per i valori di equilibrio di a_k ,

$$a_k = K \sum A_{kj} \underline{X}_j / \sum \underline{X}_k A_{kj} \underline{X}_j$$

Nel nostro mercato azionario idealizzato, quindi, il premio per il rischio per azione dell' i -esimo investimento è proporzionale alla covarianza dell'investimento con il valore totale di tutti gli investimenti nel mercato.

Ciò, secondo Treynor, suggerisce che può essere utile nei problemi di capital budgeting distinguere tra rischi che per loro natura possono ragionevolmente essere considerati indipendenti dalle fluttuazioni del livello generale del mercato (rischio specifico) e da quelli che non possono (rischio sistematico). Gli investimenti che sono rischiosi solo nel primo senso sono chiamati rischi assicurabili e hanno un costo del capitale pari al tasso di prestito (risk free).

Riprendendo i procedimenti sviluppati da Tobin (1958), Treynor imposta il suo lavoro per trovare una relazione lineare; come presentato tramite le formule precedenti.

Quanto detto sopra, a grandi linee, vuole definire il rendimento atteso nei termini di uno “scalare non negativo” “ k ” (μ), e procede minimizzando il portafoglio varianza soggetto al rendimento atteso (expected performance), forma una lagrangiana (metodo dei moltiplicatori di lagrange) e l’inversa della matrice delle covarianze; Arrivando dopo alcune sostituzioni algebriche alla “*reward per risk equality*” $\mu^2/\sigma^2=2k/\lambda$.

Dando la definizione del coefficiente di lagrange (come utilità marginale della ricchezza dati prezzi costanti) dimostra che “ k ” è una funzione lineare di σ .

Questo è vero perché il “*reward per risk ratio*” è uguale alla sommatoria della matrice di covarianza inversa moltiplicata per i premi per il rischio degli asset.

Arrivati a questo punto, fino alla fine del suo paper, Treynor elabora e discute delle conclusioni ricavate dalle relazioni algebriche precedentemente ottenute; conclusioni simili a quelle ottenute dal Dr. Lintner in” *The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budget*” che si ispira anch’esso ai concetti del *Separation theorem* sviluppato da Tobin⁷.

Tali conclusioni possono essere riassumibili in 3 punti:

1. In equilibrio, la stessa combinazione di asset rischiosi, sarà la combinazione ottimale per ogni investitore (separation theorem).
2. L’ammontare investito in ogni asset rischioso sarà equivalente al rapporto tra il valore di mercato dell’ i -esimo asset rischioso e il valore di mercato aggregato di tutti gli asset rischiosi.
3. E che ogni ammontare investito in ogni singolo asset rischioso deve essere positivo.

7. James Tobin ... in un documento del 1958 diceva che se possiedi titoli rischiosi e sei in grado di prendere in prestito – acquistare titoli “*on margin*” – o prestare – acquistare beni privi di rischio – e lo fai allo stesso tasso, allora la frontiera efficiente è un portafoglio unico di titoli rischiosi più soldi presi a prestito o prestati. Il teorema di separazione di Tobin si può riassumere nella risoluzione di due problemi: nel trovare prima la combinazione ottimale di titoli rischiosi e poi decidere se prestare o prendere in prestito, a seconda dell’atteggiamento nei confronti del rischio. Ha quindi dimostrato che se esiste un solo portafoglio oltre ai prestiti, deve essere quello di mercato.

2.2 Comparazione dei modelli

Il CAPM è stato costruito partendo e basandosi, come già detto, sull'assunto del singolo orizzonte periodale di Markovitz e Tobin. Sharpe, nel suo lavoro dove mira a interpretare e capire il comportamento dei mercati di capitali, arriva a idealizzare una "capital market line" insieme ad una relazione tra rendimenti attesi e rischio, e, ad una concezione del mercato composto soltanto di due prezzi: Quello "del tempo", rappresentato dal "*pure interest rate*", e quello "del rischio" (pendenza della CML) che è il rendimento aggiuntivo per unità di rischio.

Va anche detto (per esempio) che Sharpe, nei suoi lavori, non arriva alla conclusione che il mercato stesso è l'unico portafoglio ottimale, ma successive rielaborazioni delle sue teorie (E.Fama 1968) offrono risultati che considerano anche altri aspetti dei suoi ragionamenti e che in particolare rendono coerenti i modelli di Lintner e Sharpe ed indirettamente quello di Treynor che giunge alle stesse conclusioni di Lintner.

Infine Mossin in "*Equilibrium in a Capital Asset Market*" fornisce specificazioni e chiarimenti delle condizioni di equilibrio raggiunte da Sharpe in un documento chiaro ed immediatamente comprensibile.

I modelli di Treynor Sharpe Lintner e Mossin hanno molto in comune e di seguito viene presentata un'altra tabella che cerca di riassumere i punti condivisi dei propri lavori e le assunzioni generali toccate o meno in ognuno dei documenti redatti dagli economisti precedentemente citati.

Table 2 Characteristics of the models.

Model type	Single-period/multi-period	Discrete time/continuous time	Market/consumption oriented	Mean–variance objective function
Treynor (1962)	Single	Discrete	Market	Yes ^a
Sharpe (1964)	Single	Discrete	Market	Yes ^b
Lintner (1965)	Single	Discrete	Market	Yes ^b
Mossin (1966)	Single	Discrete	Market	Yes ^a
Requirements	Requires market clearing	Requires nonsingular covariance matrix	Allows short sales	Allows leverage
Treynor (1962)	Implicit	Implicit	Yes	Yes
Sharpe (1964)	No	No	No	No
Lintner (1965)	Implicit	Yes	Yes	Yes
Mossin (1966)	Explicit	Yes	Yes	Not addressed
Conclusions	Market itself is efficient	In equilibrium, the same combination of risky assets will be optimal for every investor	Amount invested in each risky asset will equal the ratio of market value of the asset to the total market value of all assets	Amount invested in each risky asset will be a positive amount
Treynor (1962)	Yes	Yes	Yes	Yes
Sharpe (1964)	No	No	No	Yes
Lintner (1965)	Yes	Yes	Yes	Yes
Mossin (1966)	Yes	Yes	Yes	Yes
Exposition method	Employs first-order conditions			
Treynor (1962)	Yes			
Sharpe (1964)	No			
Lintner (1965)	Yes			
Mossin (1966)	Yes			

^aObjective function stated in terms of terminal wealth and variance.

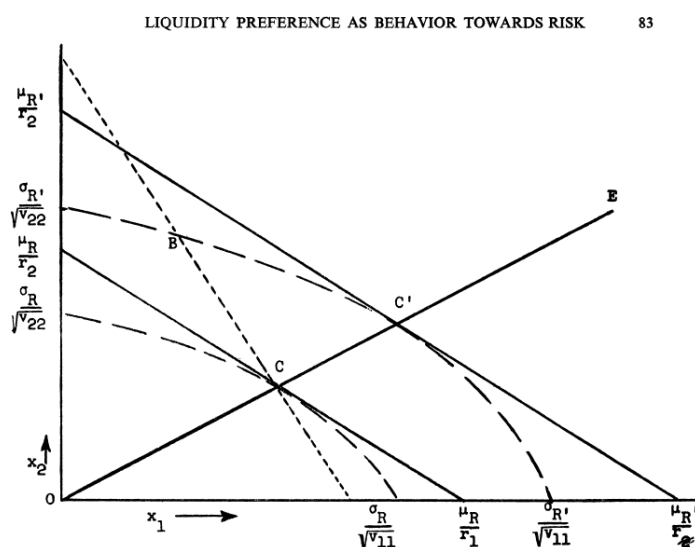
^bObjective function stated in terms of percent return and standard deviation.

(fonte: Craig W. French, “The Treynor Capital Asset Pricing Model”, pp.66)

L’elemento in comune più calzante, condiviso e su cui si basano tutti e 4 i modelli sono le assunzioni di Markovitz (1952,1959) e Tobin (1958) i quali costruiscono le proprie intuizioni sulla letteratura della “*utility-of-wealth*”; la quale assume che gli agenti sono avversi al rischio con funzioni di utilità attesa del benessere convesse (serie di ellissi che nel primo quadrante di uno spazio cartesiano, figurano come curve), rappresentate come curve di indifferenza nello spazio media-varianza.

Treynor in “*toward a theory of market value of risky assets*” ripercorre quasi gli stessi sviluppi matematici del lavoro presenti in “*Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk*”, il punto di separazione critico tra lo sviluppo logico di Treynor (e successivamente di Sharpe, Lintner e Mossin) e quello di Tobin, a parte negli obbiettivi posti inizialmente nei propri lavori, è l’utilizzo di due assunzioni fondamentali: l’esistenza di un “*lending market*” perfetto, e la presenza di aspettative omogenee.

E' stato l'utilizzo di queste due assunzioni estremamente restrittive e irrealistiche che hanno permesso a Treynor di rispondere alla domanda rimasta in sospeso di Tobin: "In equilibrium what is the composition of E?" (quale è la composizione del punto E, nel grafico del lavoro di Tobin, della retta dove sono situati tutti i portafogli dominanti?) Cioè il punto dove $\sum x=1$, ossia il punto dove l'investitore detiene solo asset rischiosi pur rimanendo sulla frontiera dei portafogli efficienti. Tobin raggiunse nei suoi lavori l'intuizione che in presenza di *cash asset* (risk free assets) e *non-cash asset* (risky asset) la preferenza dell'investitore sarebbe ricaduta sempre su un



unico portafoglio ottimale costituito da "una composizione" di asset rischiosi in proporzioni fisse.

(fonte: Tobin, J., 1958,

"Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk", pp.83)

direttamente dal lavoro di Tobin:

"There will be some point on the ray (say OE in Figure 3.6) at which the investor's holdings of non-cash assets will exhaust his investment balance ($\sum x_i = 1$) and leave nothing for cash holding. Short of that point the balance will be divided among cash and non-cash assets in proportion to the distances along the ray; in Figure 3.6 at point C for example, OC/OE of the balance would be non-cash, and CE/OE cash. But the convenient fact that has just been proved is that the proportionate composition of the non-cash assets is independent of their aggregate share of the investment balance. This fact makes, it possible to describe the investor's decisions as if there were a single non-cash asset, a composite** (illustrated in Tobin by E, in Sharpe by ϕ and in Lintner by M; Treynor and Mossin do not offer a graphical representation) formed by combining the multitude of actual non-cash assets in fixed proportions."

(fonte: Tobin, "Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk", pp.84)

Uno dei primi obbiettivi raggiunti da Treynor nei suoi paper è appunto rispondere a questa domanda:” quali sono queste “*fixed propotion*” rispondendo:” *ideally the investor will hold shares in each equity in proportion to the total number of shares available in the market*”. Treynor Mossin e Lintner arrivano alla conclusione che il portafoglio ottimale di asset rischiosi corrisponde al “portafoglio di mercato” cioè un portafoglio contenente tutti gli asset rischiosi presenti in un mercato in proporzioni fisse e positive.

Dai lavori di Sharpe si giunge a queste conclusioni solo grazie alle interpretazioni e chiarimenti offerte da Fama nel 1968:

“...Optimum portfolios for all investors will involve some combinations of the riskless asset F and the portfolio of risky assets M . There will be no incentive to hold risky assets not in M . If M does not contain all the risky assets in the market, or if it does not contain them in exactly the proportions in which they are outstanding, then there will be some assets that no one will hold.

This is inconsistent with equilibrium, since in equilibrium all assets must be held. Thus... M must be the market portfolio; that is, M consists of all risky assets in the market, each weighted by the ratio of its total market value to the total market value of all risky assets...the market portfolio M is the only efficient portfolio of risky assets.”

(fonte:Fama 1986)

Riguardo ad un altro aspetto condiviso dai 4 lavori, Tobin nei suoi elaborati non permette esplicitamente di attuare *leverage*, i portafogli dominanti analizzati sono ristretti al solo *risk free asset* prestato e non preso a prestito ($\sum x=1$) estendendo il suo “*opportunity locus*” solo fino al punto E.

Treynor estende la semiretta dei portafogli dominanti oltre il punto E e come già detto in precedenza elimina i vincoli di positività imposti dai lavori di Tobin, lasciando il singolo investitore libero di prestare o prendere a prestito comprare *long* e vendere *short* a seconda delle sue preferenze. Mossin non esprime nulla riguardo la questione mentre anche Lintner permette che *l’asset risk free* venga preso a prestito. Sharpe non consente esplicitamente il *leverage* attraverso i suoi vincoli di non negatività su tutti gli asset ma ne discute comunque la possibilità:

”If the investor can borrow... this is equivalent to disinvesting (in the risk free asset). The effect of borrowing... can be found simply by letting α (the proportion of wealth invested in the riskless asset) take on negative values...”.

(fonte: Sharpe Capital Asset Prices: A Theory of Market..., pp.433)

Tutti e 4 i teorici esprimono portafogli ottimali usando il vettore rendimento atteso e la matrice covarianza/varianza; Markovitz usa per primo questo metodo per analizzare solo gli asset rischiosi, il suo set efficiente nello spazio *mean-variance* non dimostra relazioni

lineari, dove Tobin, Treynor, Mossin, Sharpe e Lintner usano un *riskless asset* per ricavare una relazione lineare in un *opportunity locus/efficient set/capital market line/market opportunity line/market line*.

Per ricavare il suo “*ray of dominant sets*” Tobin usa il multiplo di lagrange per minimizzare la varianza per rendimento atteso medio, tecnica utilizzata anche da Markovitz Treynor Lintner e Mossin.

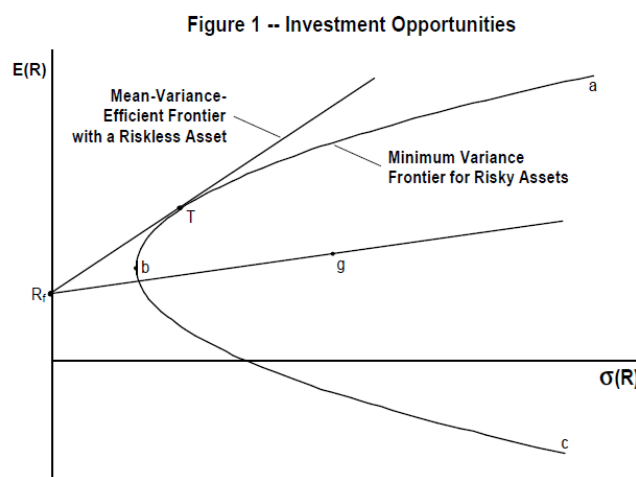
2.3 CAPM oggi

Il Capital Asset Pricing Model, presente nella gran parte dei libri di testo oggi, è una versione migliorata e resa più chiara di quelli che erano i modelli di Sharpe-Lintner-Mossin. Per evitare confusione si riassumono ripetono e chiariscono concetti ricavati dagli sviluppi presentati nei capitoli precedenti dell’elaborato.

Il CAPM considera 4 assunzioni aggiuntive rispetto a quelle presentate da Markovitz:

- 1.L’orizzonte uniperiodale adottato da ogni investitore è lo stesso per tutti gli investitori.
- 2.Ogni investitore può investire oppure prendere in prestito – senza alcuna limitazione – a un tasso privo di rischio (risk-free); tale tasso è uguale per tutti gli investitori.
- 3.Gli investitori hanno aspettative omogenee circa i rendimenti attesi e le varianze e le covarianze dei rendimenti attesi questo rispetto tutte le attività rischiose nelle quali essi possono investire.
- 4.Non esistono tasse, né costi di transazione, né altre imperfezioni del mercato.

La Figura 1 descrive le opportunità di portafoglio e “racconta” lo sviluppo grafico del CAPM. L’asse orizzontale mostra il rischio di portafoglio, misurato dalla deviazione standard del rendimento del portafoglio; l’asse verticale mostra il rendimento atteso.



La curva abc, che è chiamata la frontiera della varianza minima, traccia combinazioni di rendimento atteso e rischio per i portafogli di attività rischiose che riducono al minimo il rapporto rendimento-varianza a diversi livelli di rendimento atteso. (Questi portafogli non includono il tasso privo di rischio).

(fonte: E. F. Fama and K. R. French, “The Capital Asset Pricing Model...”, pp.27)

Il compromesso tra rischio e rendimento atteso per la varianza minima dei portafogli è evidente. Ad esempio, un investitore che vuole un alto rendimento atteso, punto a, deve accettare un’elevata volatilità.

Mentre al punto T, l’investitore può avere un ritorno previsto intermedio con minore volatilità.

Se non ci sono fondi presi a prestito o prestiti senza rischi, solo i portafogli sopra il punto b, lungo abc sono mean-variance-efficient, dal momento che questi portafogli massimizzano anche il rendimento atteso, date le loro varianze di ritorno.

L’aggiunta di fondi presi a prestito e prestiti senza rischi trasforma l’insieme efficiente in una linea retta (vedi semiretta tangente nel punto T alla curva abc).

Considerando un portafoglio che investe la proporzione x di fondi in un titolo privo di rischio e 1-x in qualche portafoglio g (composto da titoli rischiosi), allora:

Se tutti i fondi sono investiti in un titolo privo di rischio, cioè, vengono concessi in prestito a un tasso di interesse privo di rischio – il risultato è il punto R_f nella Figura 1, un portafoglio con varianza zero e un tasso di rendimento privo di rischio.

Mentre combinazioni di prestiti privi di rischio e investimenti positivi si collocano sulla linea retta tra R_f e g. Punti a destra di g sulla linea rappresentano fondi presi a prestito al tasso privo di rischio, con i proventi del prestito utilizzati per aumentare gli investimenti nel portafoglio g.

In breve, portafogli che combinano fondi presi a prestito privi di rischio o fondi prestati con dei portafogli rischiosi si collocano lungo una semiretta che parte da R_f e passa per g nella Figura 1.

Per ottenere quindi portafogli a media-varianza efficienti, disponibili con fondi presi a prestito o prestati senza rischi, va tracciata una linea da R_f in Figura 1 in alto e a sinistra il più lontano possibile, verso il portafoglio di tangenza T.

Possiamo quindi vedere che tutti i portafogli efficienti sono combinazioni di attività prive di rischi (fondi presi a prestito o prestati privi di rischi) con un unico portafoglio rischioso di tangibilità, T.

Questo risultato chiave deriva dal “teorema della separazione” di Tobin (1958).

La formulazione e teoria del CAPM è ora chiara.

Con completo accordo sulla distribuzione dei rendimenti, tutti gli investitori vedono la stessa serie di opportunità (figura 1) e combinano lo stesso portafoglio rischioso di tangenza T (la stessa proporzione) con prestiti o fondi presi a prestito privi di rischio.

Poiché tutti gli investitori detengono lo stesso portafoglio di attività rischiose, tale portafoglio deve contenere valori ponderati rispetto al loro valore di mercato in rapporto al valore complessivo delle attività rischiose.

Nello specifico, il peso di ciascun bene rischioso nel portafoglio di tangenza, che ora chiamiamo M (per il “Mercato” da Fama), deve essere il valore di mercato totale di tutte le unità in circolazione del bene diviso per il totale valore di mercato di tutte le attività rischiose.

Inoltre, è necessario impostare il tasso privo di rischio (insieme ai prezzi delle attività rischiose) per “liberare” (*Market clear*) il mercato dai prestiti senza rischi.

In breve, le ipotesi del CAPM implicano che il portafoglio di mercato M deve essere sulla frontiera della varianza minima se il mercato delle attività è compensato e in equilibrio (*clear*).

Ciò significa che la relazione algebrica che vale per qualsiasi portafoglio di minima varianza deve valere per il portafoglio di mercato. In particolare, se ci sono N attività rischiose;

$$E(R_i) = E(R_{M}) + [E(R_M) - E(R_{M})]\beta_{iM}, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.3.1)$$

(Minimum variance condition for M)

In questa equazione, $E(R_i)$ è il rendimento atteso del bene i e β_{iM} , il beta del mercato del bene i, rappresenta la covarianza del suo rendimento con il rendimento di mercato diviso per la varianza dei rendimenti di mercato;

$$\beta_M = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} \quad (2.3.2)$$

(Market Beta)

Il primo termine sul lato destro della condizione di varianza minima, $E(R_M)$, è il rendimento atteso su attività che hanno beta di mercato pari a zero, il che significa che i loro guadagni sono non correlati al rendimento di mercato.

Il secondo termine è un premio per il rischio – il beta del mercato degli asset i , β_{iM} , moltiplica il premio per unità di beta, che è il rendimento atteso sul mercato, $E(R_M)$, meno $E(R_M)$. Poiché il beta di mercato del bene i è anche la pendenza nella regressione dei suoi rendimenti,

$$\sigma^2(R_M) = \text{Cov}(R_M, R_M) = \text{Cov}(\sum_{i=1}^N x_{iM} R_i, R_M) = \sum_{i=1}^N x_{iM} \text{Cov}(R_i, R_M). \quad (2.3.3)$$

un'interpretazione comune (e corretta) del beta è che rappresenta e misura la sensibilità del rendimento del bene alla variazione del rendimento del mercato.

Ma c'è un'altra interpretazione del beta più in linea con lo spirito del modello di portafoglio che è alla base del CAPM.

Il rischio del portafoglio di mercato, misurato dalla varianza del suo rendimento (il denominatore di β_{iM}), è la media ponderata dei rischi di covarianza delle attività in M (i numeratori di β_{iM} per diverse risorse). Quindi, β_{iM} rappresenta anche il rischio di covarianza del bene i in M , misurato rispetto alla media del rischio di covarianza delle attività, che non è altro che la varianza del rendimento di mercato.

In termini economici, β_{iM} è proporzionale al rischio che ogni dollaro/euro investito in attività contribuisce al portafoglio di mercato.

L'ultimo passo nello sviluppo del modello Treynor – Sharpe – Lintner – Mossin è usare l'ipotesi dei prestiti *riskfree* per individuare $E(R_M)$, cioè il rendimento atteso su attività a beta zero.

Il rendimento di un bene rischioso non è correlato al rendimento di mercato quando la media delle covarianze del bene con i rendimenti su altre attività compensa semplicemente la varianza dei ritorni (rendimenti) del bene (se il suo beta è pari a zero). Tale attività rischiosa è senza rischi nel portafoglio di mercato nel senso che non contribuisce alla variazione del rendimento del mercato.

Quando esistono prestiti privi di rischi, il rendimento atteso per le attività che sono non correlate al rendimento di mercato, $E(R_M)$, deve essere uguale al tasso privo di rischio, R_f . La relazione tra rendimento atteso e beta diventa quindi l'equazione del CAPM,

$$E(R_i) = R_f + [E(R_M) - R_f] \beta_{iM}, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.3.4) \text{ (CAPM)}$$

In parole, il rendimento atteso su qualsiasi attività i è il tasso di interesse privo di rischio, R_f , più un premio per il rischio, che è il beta del mercato del bene, β_{iM} , moltiplicato per il premio per unità di rischio beta, $[E(R_M) - R_f]$. Resta il fatto che ottenere fondi e prestarli ad un tasso *riskfree* è un'assunzione irrealistica.

Fischer Black (1972) sviluppa una versione del CAPM senza prestiti *riskfree*. Dimostra il risultato chiave del CAPM – che il portafoglio di mercato medio-varianza-efficiente può essere ottenuto consentendo short selling illimitate di attività rischiose.

In breve, di nuovo in Figura 1, se non c'è alcuna risorsa priva di rischi, gli investitori scelgono i portafogli lungo la frontiera media-varianza-efficienza da A a B. I prezzi di compensazione del mercato implicano che quando si aggregano i portafogli efficienti scelti dagli investitori per le loro (positive) porzioni di ricchezza investita, il portafoglio risultante è il portafoglio di mercato.

Il portafoglio di mercato è quindi un portafoglio di portafogli efficienti scelti dagli investitori. Con la vendita allo scoperto illimitata di attività rischiose, portafogli composti di portafogli efficienti sono anch'essi efficienti. Pertanto, il portafoglio di mercato è efficiente, il che significa che la condizione di varianza minima per M sopra riportata è valida.

Le relazioni tra rendimento atteso e beta di mercato di Black, e la versione del CAPM di Treynor-Litner-Sharpe-Mossin differiscono solo in termini di ciò che ognuno dice di $E(R_{zM})$, il rendimento atteso su attività non correlate al mercato. La versione di Black dice solo che $E(R_{zM})$ deve essere inferiore rispetto al rendimento atteso sul mercato, quindi il premio per il beta è positivo. Al contrario, nel CAPM di Treynor-Sharpe-Lintner-Mossin, $E(R_{zM})$ deve essere il tasso di interesse privo di rischio, R_f , e il premio per unità di rischio beta è $E(R_M) - R_f$.

L'ipotesi che le vendite allo scoperto siano illimitate è tanto irrealistica quanto quella dell'accesso a prestiti *riskfree* illimitati. Se non ci sono attività prive di rischio e le vendite allo scoperto di attività rischiose non sono consentite, gli investitori che operano secondo media-varianza scelgono ancora portafogli efficienti (punti sopra b nella curva abc in Figura 1). Ma quando non vi sono vendite allo scoperto di attività rischiose e attività prive di rischio, l'algebra dell'efficienza del portafoglio dice che i portafogli composti da portafogli efficienti non possono implicitamente essere anch'essi efficienti.

Ciò significa che il portafoglio di mercato, che è un portafoglio efficiente di portafogli scelti dagli investitori, in genere non è efficiente. E la relazione CAPM tra rendimento atteso e beta di mercato è persa.

Questo non esclude le previsioni sul rendimento atteso e beta rispetto ad altri portafogli efficienti- se la teoria può specificare portafogli che devono essere efficienti se il mercato è compensato (*clear*). Ma finora questo si è dimostrato impossibile.

In breve, l'equazione familiare del CAPM che riporta i rendimenti attesi delle attività ai loro beta di mercato è solo un'applicazione al portafoglio di mercato della relazione tra rendimento atteso e beta che esiste in qualsiasi portafoglio efficiente dal punto di vista media-varianza. L'efficienza del portafoglio di mercato si basa su molte ipotesi irrealistiche, inclusa un'omogeneità delle aspettative completa e senza restrizioni, attività *riskfree* (nella realtà non esistono attività effettivamente senza rischio e con certezza assoluta dei rendimenti) o *short selling* senza restrizioni di attività rischiose. Ma tutti i modelli interessanti comportano semplificazioni irrealistiche, motivo per cui devono essere testati e verificati rispetto a dati empirici.

2.4 Test e analisi empiriche

Negli anni successivi alle prime formulazioni è stata prestata particolare attenzione ai modelli di equilibrio generale di *capital asset pricing*. Di questi i più noti sono come già citato sono i modelli *mean-variance* originariamente sviluppati da Sharpe (1964) e Treynor (1961), e chiariti da Lintner (1965°; 1965b), Mossin (1966), Fama (1968°; 1968b) e Long (1972). Vengono poi sviluppati da Treynor (1965), Sharpe (1966) e Jensen (1968; 1969) modelli di valutazione del portafoglio che si basano e presentano similitudini con questi modelli.

Iniziamo considerando le 4 assunzioni aggiuntive ai modelli di *portfolio theory* di Markovitz. Consideriamo il principale risultato del modello come la “dichiarazione”, della relazione tra premio per il rischio atteso su singoli asset e il loro rischio sistematico, la relazione è:

$$E(\tilde{R}_j) = E(\tilde{R}_M)\beta_j \quad (2.4.1)$$

dove le tilde denotano variabili casuali e:

$$E(\tilde{R}_j) = \frac{E(\tilde{P}_t) - P_{t-1} + E(\tilde{D}_t)}{P_{t-1}} - r_{Ft} = \text{expected excess returns on the } j\text{th asset}$$

$\tilde{D}_t$ = dividends paid on the j th security at time t

r_{Ft} = the riskless rate of interest

$E(\tilde{R}_M)$ = expected excess returns on a "market portfolio" consisting of an investment in every asset outstanding in proportion to its value

$$\beta_j = \frac{\text{cov}(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} = \text{the "systematic" risk of the } j\text{th asset.}$$
(2.4.2)

La relazione (2.3.1) dice che l'*excess return* atteso su qualsiasi asset è direttamente proporzionale al suo beta β .

Se definiamo α_j come:

$$\alpha_j = E(\tilde{R}_j) - E(\tilde{R}_M)\beta_j \quad (2.4.3)$$

Allora la relazione (2.4.3) implica che α in ogni asset deve essere uguale a zero.

Se corretta dal punto di vista empirico, la relazione data da (2.4.1) ha implicazioni ad ampio raggio per problemi di *Capital budgeting*, analisi costi-benefici, selezione di portafoglio e per altri problemi economici che richiedono conoscenza della relazione tra rischio e rendimento.

Prove presentate da Jensen (1968; 1969) sul rapporto tra il rendimento atteso e il rischio sistematico di un ampio campione di fondi comuni di investimento suggeriscono che la (2.4.1) potrebbe fornire una descrizione adeguata della relazione tra rischio e rendimento per i titoli. D'altra parte, prove presentate da Douglas (1969), Lintner (1965°) e molti altri come Miller e Scholes (1972) sembrano indicare che il modello non fornisce una descrizione così completa della struttura dei rendimenti dei titoli.

In particolare, il lavoro svolto da Miller e Scholes suggerisce che gli α dei singoli asset dipendono in modo sistematico dai loro β : asset con beta elevato tendono ad avere alpha negativi, mentre quelli con beta basso presentano tendenze ad avere alpha positivi.

Da qui nasce la vera e propria esigenza di verificare, se ci siano, "anomalie" rilevanti dal punto di vista statistico del CAPM di base. Verifica che viene condotta principalmente tramite due metodi che mirano a confermare o meno i risultati chiave del CAPM.

Test del CAPM si basano su tre implicazioni della relazione tra rendimento atteso e beta del mercato impliciti nel modello. Innanzitutto, che i rendimenti attesi su tutte le attività

hanno relazioni lineari rispetto ai loro beta e nessun'altra variabile ha un potere esplicativo (marginale).

Secondo, il premio relativo al beta è positivo, il che significa che il rendimento atteso sul portafoglio di mercato supera il rendimento atteso delle attività i cui rendimenti non sono correlati al rendimento di mercato.

Terzo, nel modello Treynor-Sharpe-Lintner-Mossin, le attività non correlate al mercato hanno rendimenti previsti pari al tasso di interesse privo di rischio e il premio in relazione al beta è il rendimento atteso sul mercato meno il tasso senza rischi. La maggior parte dei test di queste previsioni utilizza regressioni *cross-section* o di serie temporali (*time series regression*).

Entrambi gli approcci risalgono ai primi test del modello.

I primi test di *cross-section regression* si concentrano sulle previsioni del modello Treynor-Sharpe-Lintner-Mossin sull'intercetta e la pendenza nella relazione tra rendimento atteso e beta di mercato.

L'approccio consiste nel condurre un'analisi della sezione trasversale dei rendimenti medi delle attività sulle stime dei beta delle attività. Il modello prevede che l'intercetta in queste regressioni sia il tasso di interesse privo di rischio, R_f e il coefficiente relativo a beta è il rendimento atteso sul mercato superiore al tasso privo di rischio, $E(R_M) - R_f$.

Due problemi in questi test sono diventati rapidamente evidenti. Innanzitutto, le stime dei beta per i singoli beni sono imprecise, creando un problema di errore di misurazione quando sono utilizzati per spiegare i rendimenti medi. In secondo luogo, gli scarti (*residuals*) della regressione hanno fonti comuni di variazione, come gli effetti connessi ai rendimenti medi di un settore industriale.

La correlazione positiva negli scarti produce “anomalie” al ribasso nelle consuete stime dei minimi quadrati ordinari degli errori standard nella pendenza della *cross-section regression*.

Per migliorare la precisione dei beta stimati, ricercatori come Blume (1970), Friend e Blume (1970) e Black, Jensen e Scholes (1972) lavorano con portafogli, piuttosto che con singoli titoli. Poiché i rendimenti attesi e i beta di mercato si combinano allo stesso modo dei portafogli, se il CAPM spiega i rendimenti dei titoli, spiega anche i rendimenti dei portafogli.

Stime dei beta per portafogli diversificati sono più precise delle stime per singoli titoli. Così, l'utilizzo dei portafogli nelle *cross-section regression* dei rendimenti medi sui beta riduce gli errori critici nel problema delle variabili.

Il raggruppamento, tuttavia, riduce il *range (gamma)* dei beta e riduce la significatività delle statistiche. Per mitigare questo problema, i ricercatori ordinano i titoli rispetto ai beta quando formano i portafogli; il primo portafoglio contiene titoli con i beta più bassi, e così via, fino all'ultimo portafoglio con asset beta più alti. Questa metodologia e tali procedimenti sono ora standard nei test empirici.

Nel lavoro di analisi empirica realizzato da Black Jensen e Scholes, l'equazione:

$$\bar{R}_j = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_j + \tilde{u}_j \quad (2.4.4)$$

È stata utilizzata per condurre stime nel loro lavoro “*The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests*” e contrariamente alla teoria, γ_0 , sembra risultare significativamente diverso da zero e, γ_1 , significativamente differente da, $(R_m - R_f)$, ossia la pendenza della market line prevista dal modello.

I risultati dei loro lavori dopo aver condotto vari test sulla validità del modello rappresentato dalla relazione (2.3.3) portano a risultati e conclusioni che indicano che la “classica” formulazione dell'asset pricing model data da (2.3.1) non conferisce un'accurata descrizione della struttura dei rendimenti dei titoli.

I test confermano il verificarsi di differenziali positivi e negativi del parametro α .

La loro analisi li porta a dire che i dati analizzati con le loro tecniche possono rappresentare al meglio i rendimenti attesi dei titoli grazie ad un *two-factor model* come:

$$E(\tilde{r}_j) = E(\tilde{r}_z)(1 - \beta_j) + E(\tilde{r}_M)\beta_j \quad (2.4.5)$$

Dove le, r , indicano i rendimenti totali e $E(r_z)$ è il rendimento atteso di un secondo fattore, che viene chiamato “beta-factor”, poiché il suo coefficiente è una funzione del β dell'asset.

Osservato questo fenomeno, Black (1970) è stato in grado di dimostrare che eliminando l'assunzione della possibilità di prestare e prendere a prestito al *riskless asset*; genera un asset pricing model che permette di trovare il rendimento atteso di un asset, in equilibrio, attraverso l'equazione (2.3.4).

I suoi risultati forniscono una definizione esplicita del beta-factor, r_z , come il rendimento di un portafoglio che ha covarianza zero con il rendimento del portafoglio di mercato r_m , tale modello viene anche spesso chiamato zero-beta CAPM.

Molti altri modelli possono essere ricavati dalla modifica/eliminazione delle assunzioni del Capital Asset Model Tradizionale, i quali richiedono, $\gamma_0 \neq 0$ e $\gamma_1 \neq E(R_m)$.

Questi modelli, di fatto, mettono in luce il problema della misurazione di R_m (esistenza di asset non includibili nel portafoglio di mercato, esistenza di tasse differenziali sui dividendi e *capital gains*).

La maggiore influenza nel lavoro di Black Jensen e Scholes comunque mira a testare la forma tradizionale del CAPM (γ_0 è diverso da zero?).

2.5 Critiche di Black e Roll

Dal 1970 si è sviluppata una vasta letteratura empirica relativa alla verifica e validità delle assunzioni e implicazioni del CAPM, numerosi studi si sono interrogati sulle teorie e sui ragionamenti su cui si basa il CAPM.

Due famosi esempi di questi tentativi sono i lavori di Black e Roll rispettivamente “Beta and return” e “A Critique of the Asset’s Pricing Theory’s Tests: Part I”.

“beta and return”

In “Beta and Return” Black elabora il suo lavoro partendo da un’affermazione di E.Fama che sosteneva: “*beta as the sole variable explaining returns on stocks is dead.*” Insieme a “*that the relation between average return and beta is completely flat* “. Black nel documento in questione sostiene che Fama stia interpretando male i dati e i risultati che ottiene nel 1992.

Black Jensen Miller e Scholes tra il 1931 e il 1965 scoprono che la stima della pendenza della *market line* relativa al rendimento medio e al rischio, è inferiore, rispetto alla pendenza della *market line* definita dal CAPM rispetto al rendimento/rischio.

Se vengono scelti punti finali e iniziali in modo preciso si possono trovare due decenni in cui la “market line” è sostanzialmente piatta. Il fenomeno di appiattimento della *market line* significa che le *low-beta stock* fanno meglio rispetto alle predizioni del CAPM mentre le *high-beta stock* fanno peggio (Black dimostra nel 1972 che restrizioni nei prestiti possono causare *overperformance* nelle *low beta stocks*).

Prima di descrivere l’analisi effettuata nel suo documento, Black, si sofferma a parlare del concetto di “*data mining*”: quando un ricercatore prova a condurre uno studio/ricerca in molti modi diversi includendo varie combinazioni di *explanatory factors*, periodi vari, modelli vari si dice che sta facendo *data mining*. Se un Ricercatore riporta solo gli studi che confermano le sue teorie, diventa difficile interpretare l’importanza statistica dei

risultati ottenuti. Con abbastanza *data mining* tutti i risultati che sembrano significanti potrebbero essere solo accidentali.

Black in pratica come dichiara in “Beta and Return” ripercorre le metodologie di analisi del lavoro Black-Jensen-Scholes (utilizza infatti per la sua analisi il two-factor model), utilizza dati mensili e il metodo di raccolta dati in portafogli, particolarmente efficace per analisi dati in lunghi periodi poiché i titoli in analisi subiscono molti cambiamenti.

Brevemente Black considera 10 differenti portafogli contenenti asset dal più piccolo al più grande rischio sistematico, il portafoglio 10(1) contiene asset con il minor (maggiore) rischio sistematico.

Per ogni portafoglio Black stima l'*excess return* e i beta dai dati storici dal 1931 fino al 1991.

Inizia seguendo le stesse metodologie utilizzate nel lavoro Black-Jensen-Scholes ottenendo anche risultati molto simili nel periodo di analisi in comune, utilizzando inoltre le azioni NYSE come B-J-S.

EXHIBIT 2
Monthly Regressions: 1931 to 1965

Item	Black-Jensen-Scholes Study Portfolio Number										M
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1. β	1.56	1.38	1.25	1.16	1.06	0.92	0.85	0.75	0.63	0.50	1.00
2. α	-0.01	-0.02	-0.01	0.00	-0.01	0.00	10.01	0.01	0.02	0.02	
3. $t(\alpha)$	-0.43	-1.99	-0.76	-0.25	-0.89	0.79	0.71	1.18	2.31	1.87	
4. $\rho(\tilde{R}_t, \tilde{R}_m)$	0.96	0.99	0.99	0.99	0.99	1.98	0.99	0.98	0.96	0.90	
5. $\rho(\tilde{e}_t, \tilde{e}_{t-1})$	0.05	-0.06	0.04	-0.01	-0.07	-0.12	0.13	0.10	0.04	0.10	
6. $\sigma(\tilde{e})$	0.14	0.07	0.06	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.08	
7. μ	0.26	0.21	0.21	0.20	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.11	0.17
8. σ	0.50	0.43	0.39	0.36	0.33	0.29	0.25	0.24	0.20	0.17	0.31

Item	Current Study Portfolio Number										M
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1. β	1.53	1.36	1.24	1.17	1.06	0.92	0.84	0.76	0.63	0.48	1.00
2. α	-0.02	-0.02	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	
3. $t(\alpha)$	-0.78	-2.12	-1.30	-0.54	-1.38	0.55	0.72	1.64	1.74	2.21	
4. $\rho(\tilde{R}_t, \tilde{R}_m)$	0.97	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	0.98	0.96	0.90	
5. $\rho(\tilde{e}_t, \tilde{e}_{t-1})$	0.05	-0.06	0.00	-0.13	-0.11	-0.07	0.10	0.06	0.11	0.15	
6. $\sigma(\tilde{e})$	0.12	0.06	0.06	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.07	
7. μ	0.26	0.22	0.21	0.21	0.18	0.17	0.16	0.15	0.13	0.12	0.18
8. σ	0.49	0.43	0.39	0.37	0.33	0.29	0.27	0.24	0.20	0.17	0.31

(fonte: Fischer Black, “Beta and return”, pp.80)

Nell'allegato sopra, viene riportata la tabella di paragone della stima dei dati nello stesso periodo di analisi di B-J-S.

Nell'Allegato 2, le prime due righe mostrano la pendenza e l'intercetta di una regressione del rendimento in eccesso su un rendimento in eccesso *equally-weighted* del portafoglio di mercato. Viene scelto il portafoglio di mercato *equally-weighted* piuttosto che il portafoglio *value-weighted* solo per comodità. La riga 3 mostra una misura statistica standard di "significatività" dell'intercetta. La riga 4 mostra la correlazione tra i rendimenti in eccesso del portafoglio e del mercato, mentre la riga 5 mostra la correlazione seriale stimata dei residui (errori). La riga 6 fornisce la deviazione standard stimata del residuo (errore). Le righe 7 e 8 indicano la media del campione e la deviazione standard del rendimento in eccesso del portafoglio. Poiché le medie, le correlazioni e le deviazioni standard cambiano, si tratta di stime delle loro medie nel periodo. Tutto è espresso in termini annuali, anche se BJS danno i loro valori in termini mensili.

Risultati simili vengono raggiunti per l'intero periodo dal 1931 al 1991.

Il CAPM, sembra più forte di quanto non fosse per il periodo 1931-1965 in cui le azioni a basso beta hanno fatto meglio delle previsioni CAPM e quelle ad alto beta hanno fatto peggio. In effetti, come mostra l'Allegato 4, i risultati dal 1965 sono stati molto forti. Durante l'intero periodo di venticinque anni, il mercato è cresciuto di quantità normali o più, ma i portafogli low-beta hanno fatto bene tanto quanto i portafogli high-beta. Questo è ciò a cui si riferivano Fama e French [1992] quando dicevano che la pendenza della *market line* relativa al rendimento/beta è piatta.

EXHIBIT 4

Monthly Regressions: 1966 through 1991

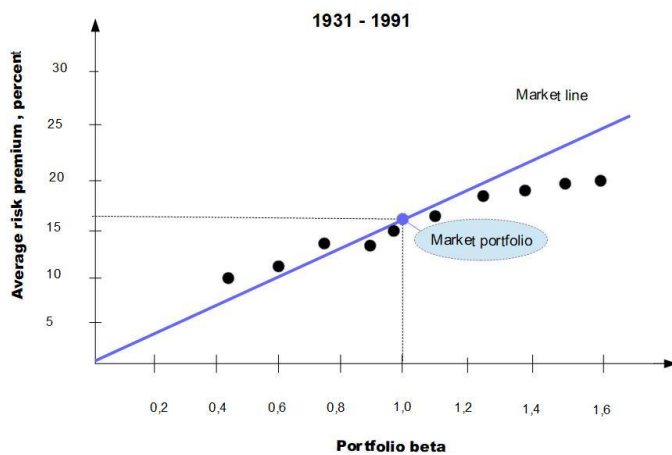
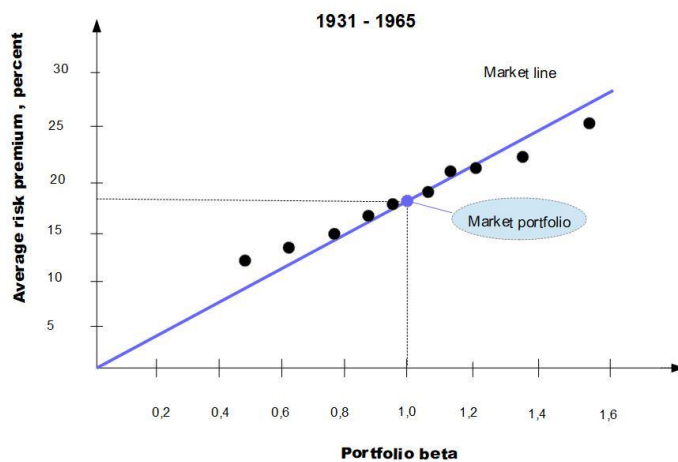
Item	Portfolio Number										M
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1. β	1.50	1.30	1.17	1.09	1.03	0.95	0.87	0.78	0.67	0.51	1.00
2. α	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01	0.03	
3. $t(\alpha)$	-3.24	-0.93	-1.02	-0.24	-0.57	1.31	0.63	0.81	0.94	1.79	
4. $\rho(\tilde{R}, \tilde{R}_m)$	0.96	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	0.97	0.93	0.82	
5. $\rho(\tilde{e}_t, \tilde{e}_{t-1})$	-0.02	-0.02	0.00	0.04	0.06	0.02	-0.03	-0.02	0.09	0.12	
6. $\sigma(\tilde{e})$	0.08	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.05	0.08	
7. μ	0.06	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06	0.08
8. σ	0.31	0.26	0.24	0.22	0.21	0.19	0.18	0.16	0.14	0.12	0.20

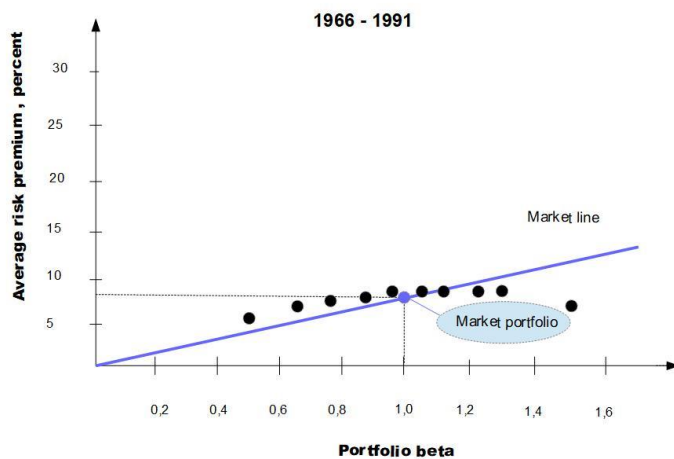
(fonte: Fischer Black, "Beta and return", pp.81)

Con questi risultati confrontando l'exhibit 2 e l'exhibit 4 si può notare come nel periodo 1931-1965 gli (α) delle *high-beta stocks* presentino valori negativi (*underperformance*) ma con rendimenti (μ) comunque superiori rispetto alle *low-beta stocks*. Mentre nei 25 anni trascorsi dal 1966 al 1991 i rendimenti rimangono praticamente gli stessi sia tra *high*

beta e *low beta stocks* mantenendo comunque le *overperformance* delle *low-beta stocks* questo dimostra come la pendenza del CAPM raggiunga un livello praticamente piatto, ciò significa che anche il relativo premio per il rischio risulta essere praticamente non rilevante e molto vicino allo zero.

Da queste in poi nascono opinioni e giudizi divergenti riguardo al modello, che comunque mettono pesantemente in discussione l'efficacia e affidabilità del CAPM.





(fonte: elaborazione propria)

“A Critique of the Asset's Pricing Theory's Tests: Part I”

Roll nel 1977 mette in dubbio la possibilità di testare efficacemente il CAPM e suggerisce come prove empiriche siano inconcludenti. La sua argomentazione si basa su due considerazioni fondamentali:

- 1 Un test di validità del CAPM che si basa sul *two-factor model* di Black, ammette solo un'ipotesi testabile: che il portafoglio di mercato sia media-varianza efficiente.
- 2 Il portafoglio di mercato di fatto non è realmente osservabile, poiché dovrebbe includere ogni singolo asset presente in un mercato.

Pertanto, negli studi empirici i ricercatori sono costretti a impiegare “*market proxies*” e di conseguenza questi test sono inconcludenti/non risolutivi.

Quindi, i test di validità del CAPM, come già detto cercano di verificare l'esistenza di una relazione lineare tra i rendimenti attesi delle attività e i loro beta con la proxy di mercato. Questi test si basano su “*time-series*” e metodi “*cross-section*” di cui abbiamo già discusso.

Poiché il portafoglio di mercato e la *market proxy* in genere non coincidono, i test del CAPM possono portare a due diversi errori statistici:

- 1) Errore di tipo I: il test rifiuta il CAPM quando è valido (cioè quando esiste una relazione lineare), in quanto il portafoglio di mercato è efficiente, mentre il proxy di mercato non lo è.
- 2) Errore di tipo II: il test accetta il CAPM quando non è valido, in quanto il portafoglio di mercato non è efficiente ma la proxy di mercato lo è.

3. Multifactor model and Fama e French

Fino a qui abbiamo potuto cogliere l'eleganza del CAPM come modello, il quale però si basa su un set di assunzioni di base molto restrittive e distanti dalla realtà. Una volta messa in discussione la relazione rischio-rendimento delle assunzioni di base, la comunità degli economisti ha iniziato ad interrogarsi non solo su nuovi modelli ma soprattutto su variazioni nelle assunzioni di base del CAPM. Lo Zero-beta CAPM di Black è un esempio della direzione presa dai vari sviluppi dei modelli pre-esistenti.

Di seguito vengono illustrati e discussi i principali modelli di *asset pricing* e le intuizioni fondamentali connessi ad essi.

Partendo dall'Intertemporal-CAPM di Merton che introduce il concetto di modello multifattoriale, usando il concetto di consumo e *hedging*, e passando dalle intuizioni dell'*Arbitrage Pricing Theory* di Ross, che propone un modello di equilibrio dei mercati basandosi sul concetto di arbitraggio, arriviamo al Fama e French a tre fattori la cui efficacia, basata su evidenze empiriche, è stata ormai riconosciuta ed accolta dalla comunità accennando poi infine le intuizioni e i punti di maggior rilievo dietro i modelli più recenti, quello a 4 fattori di Carhart e quello a 5 fattori di Fama e French.

3.1 Introduzione ai modelli multifattoriali e all'I-CAPM di Merton

L'Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM) è un modello di *asset pricing* basato sul consumo (CCAPM) che presuppone che gli investitori coprano (facciano *hedging*) le posizioni rischiose. ICAPM è un'estensione del CAPM ed è stata introdotta dal premio Nobel Robert Merton nel 1973 nella raccolta dei suoi lavori "*Continuous-Time Finance*".

Prendiamo ora in considerazione l'assunzione del CAPM che afferma che solo la media e la varianza della ricchezza (*wealth*) contano per gli investitori.

Consideriamo queste domande:

1. E' preferibile avere una ricchezza di \$(€) 1,1 milioni e un prezzo del petrolio di 400 \$(€) al barile o \$(€) 1 milione e prezzo del petrolio a 40 \$(€) al barile? Se si è un grande consumatore di energia, si suppone che sia più conveniente un po' meno denaro e un prezzo dell'energia considerevolmente più basso. Lo scenario a basso costo dell'energia ti lascia con più da spendere anche in altri beni di consumo.
2. E' preferibile avere un patrimonio di \$(€) 1 milione e un tasso di interesse reale del 10% o \$(€) 1,1 milioni e un tasso reale dell'1%? Si presume che possa essere più

conveniente un po' meno denaro ma con la possibilità di investirlo per guadagnare rendimenti più elevati. Il flusso di consumo potrebbe facilmente essere più elevato nello scenario di ricchezza inferiore - tasso più elevato.

Questi esempi mostrano che gli investitori dovrebbero preoccuparsi di più del rischio e del rendimento della loro ricchezza misurata in dollari (euro). Dovrebbero essere più interessati al flusso di consumo che la ricchezza può comprare per loro. Pertanto, per gli investitori ottimizzare sulla media e la varianza del valore dei loro portafogli diventa problematico, o non esattamente corretto da un punto di vista di utilità. L'assunzione esclude la preoccupazione per la correlazione dei rendimenti delle attività con l'inflazione o con i prezzi di importanti beni di consumo come abitazioni o energia. Esclude inoltre la preoccupazione della correlazione tra i rendimenti delle attività e i parametri delle "investment opportunity set", ad esempio, i cambiamenti nella volatilità dei rendimenti delle attività.

La domanda extra di attività che possono essere utilizzate per coprire questi "rischi extra-mercato" aumenterebbe i loro prezzi e ridurrebbe i loro premi di rischio relativi alla previsione del CAPM.

Simili fattori di rischio extra-mercato sorgerebbero in un modello multiperiodale, che però di fatto vengono ignorati quando viene adottata l'Assunzione che limita gli investitori a un orizzonte temporale comune di singolo periodo.

Consideriamo un possibile declino dei tassi di interesse futuri. Gli investitori sarebbero infelici a proposito di questo evento nella misura in cui ridurrebbe il reddito atteso dei loro investimenti attesi futuri. Attività i cui rendimenti saranno più elevati quando i tassi di interesse diminuiranno (ad es. obbligazioni a lungo termine) coprirebbero questo rischio e quindi, dato un ipotetico aumento nella domanda dei medesimi, richiederebbero prezzi più elevati e premi a rischio più basso. A causa di tali esigenze e domanda di copertura, la correlazione con qualsiasi parametro che riguarda future opportunità di investimento può comportare una "violazione" dell'equazione mean-beta del CAPM.

Robert C. Merton ha rivoluzionato l'economia finanziaria elaborando un modello di *asset pricing* che ci consente di esaminare gli impatti di queste esigenze di copertura. Nel suo modello di base, Merton "rilassa" il presupposto del "periodo unico" degli investitori. Immagina individui che ottimizzano un piano di consumo/investimento a vita e che adattano continuamente il/le loro consumo/decisioni di investimento a variazioni di ricchezza, prezzi e opportunità di investimento.

In un caso speciale, quando l'incertezza sui rendimenti del portafoglio è l'unica fonte di rischio e le opportunità di investimento rimangono invariate nel tempo (cioè, non vi è alcun cambiamento in tassi privo di rischio o nella distribuzione di probabilità del rendimento sul portafoglio di mercato o dei singoli titoli), il cosiddetto modello di determinazione del prezzo delle attività di capitale intertemporale (ICAPM) prevede la stessa relazione ritorno-beta prevista dal semplice CAPM.

Ma la situazione cambia quando includiamo ulteriori fonti di rischio. Questi rischi extra sono di due tipi generalmente. Uno riguarda i cambiamenti nei parametri che descrivono le opportunità di investimento; quali tassi futuri privi di rischio, rendimenti attesi o *asset risk*. Supponiamo che il tasso di interesse reale può variare nel tempo. Se cala in un periodo futuro, il livello di ricchezza di un individuo supporterà un flusso inferiore di consumi reali. Piani di spesa futuri, ad esempio, per le spese di vecchiaia, possono essere messi a repentaglio. Nella misura in cui i rendimenti di alcuni titoli sono correlati alle variazioni del tasso privo di rischio, è possibile formare un portafoglio per coprire tale rischio e quindi gli investitori aumenteranno (*bid-up*) il prezzo (e ridurranno (*bid-down*) il rendimento atteso) di tali attività di copertura. Gli investitori sacrificheranno alcuni rendimenti attesi se riescono a trovare attività i cui rendimenti saranno più elevati quando altri parametri (in questo caso, il tasso reale privo di rischio) cambiano negativamente.

L'altra fonte aggiuntiva di rischio riguarda i prezzi dei beni di consumo che possono essere acquistati con qualsiasi importo di ricchezza. Consideriamo il rischio di inflazione. Oltre al livello atteso e alla volatilità della ricchezza nominale, gli investitori devono preoccuparsi del costo della vita, di ciò che questi dollari possono acquistare. Pertanto, il rischio di inflazione è un'importante fonte di rischio extra-mercato e gli investitori potrebbero essere disposti a sacrificare un rendimento atteso per l'acquisto di titoli i cui rendimenti saranno più elevati quando il costo della vita cambia negativamente. In tal caso, la richiesta di copertura di titoli che aiutano a proteggere dal rischio di inflazione influenzerebbero la scelta del portafoglio e quindi il rendimento atteso. Si può spingere ulteriormente questa conclusione, sostenendo che la domanda di copertura “empiricamente significativa” per importanti sottosettori delle spese dei consumatori può aumentare; ad esempio, gli investitori possono “aumentare” (*bid-up*) i prezzi azionari delle società energetiche che copriranno l'incertezza dei prezzi dell'energia. Questo tipo di effetto può caratterizzare qualsiasi attività che copra importanti fonti di rischio extra-mercato. Più in generale, supponiamo di poter identificare K fonti di rischio extra-mercato e trovare portafogli di copertura associati a K . Quindi, l'equazione ritorno-beta attesa dell'ICAPM di Merton sarebbe generalizzare un'SML (*security market line*) in una versione multi-indice:

$$E(R_i) = \beta_{iM}E(R_M) + \sum_{k=1}^K \beta_{ik}E(R_k) \quad (3.1.1)$$

dove β_{iM} è il familiare beta del titolo sul portafoglio di mercato e β_{ik} è la beta sul k-esimo portafoglio di copertura. L'equazione prevede che il premio per il rischio per il titolo i sia la somma della compensazione che genera per tutte le fonti di rischio rilevanti a cui è esposto. Il primo termine è il normale premio al rischio per l'esposizione al rischio di mercato. Gli altri termini (nel segno di sommatoria) sono premi di rischio di riferimento per ciascuna fonte di rischio extra-mercato moltiplicata per il beta del titolo rispetto a tale fonte di rischio. Pertanto, questa espressione generalizza la SML a un fattore in un mondo con molteplici fonti di rischio sistematico.

Allo stato attuale, tuttavia, il modello multifattoriale non è altro che una descrizione dei fattori che influenzano i ritorni dei titoli. Non esiste una "teoria" nell'equazione. L'ovvia domanda lasciata senza risposta da un modello di fattore come l'equazione 3.1.1 è da dove proviene $E(R_k)$, in altre parole, cosa determina il tasso di rendimento in eccesso atteso da un titolo. È qui che abbiamo bisogno di un modello teorico di previsione dei rendimenti di equilibrio del mercato. Portiamo quindi ora l'attenzione all'*Arbitrage pricing theory*, o teoria dei prezzi d'arbitraggio per aiutarci a determinare il valore atteso, $E(R)$.

3.2 APT *Arbitrage Pricing Theory*

Negli anni successivi alle formulazioni del CAPM ci sono stati numerosi tentativi di produrre e realizzare teorie alternative per spiegare l'*asset pricing* e l'equilibrio dei mercati finanziari. Una teorizzazione che ha centrato questo obiettivo e che ha anche aperto le porte ai nuovi modelli contemporanei è quella di Ross (1976) in "*The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*".

Ross nel suo lavoro vuole proporre un modello alternativo a quello di *Capital Asset Pricing* introdotto da Treynor-Sharpe-Lintner-Mossin che diventa in quegli anni e fino ai giorni nostri lo strumento di analisi più utilizzato per spiegare i fenomeni osservati nei mercati di capitali di *asset* rischiosi.

L'*Arbitrage Pricing Theory* (APT) si sviluppa sulla base delle intuizioni del CAPM, aggiungendo all'unico fattore "correlazione al rischio di mercato", una molteplicità di altri fattori, che sono rilevanti nel contesto della determinazione del valore delle attività finanziarie.

L'APT si fonda sul presupposto che gli investitori approfittino di ogni opportunità di arbitraggio: se due attività finanziarie (o due portafogli) presentano la stessa esposizione al rischio, ma diversi rendimenti attesi, gli investitori acquistano l'attività con maggiore rendimento atteso, facendone aumentare il prezzo (quindi diminuire il rendimento atteso) e ripristinando l'equilibrio.

Anche il modello multifattoriale (APT) fa una distinzione, come il CAPM, tra il rischio diversificabile e quello non diversificabile, ma si differenzia nell'approccio alla misurazione del rischio non diversificabile (o di mercato): il CAPM ipotizza che il rischio di mercato sia connesso solo con il portafoglio di mercato, mentre l'APT ammette molteplici fonti del rischio di mercato (sistematico), rappresentate da variazioni inattese delle variabili macroeconomiche fondamentali come per esempio: variazioni nella struttura dei tassi di interesse, variazioni nei tassi di cambio, variazioni nei tassi di incremento del PIL reale, variazione del tasso di inflazione... Tali fenomeni detti "fattori" misurano la sensibilità dell'investimento a ciascuna variazione di tali variabili con uno specifico coefficiente beta.

Si ha così che il rendimento di un'attività i è una relazione lineare fra n fattori, ciascuno dei quali è una variabile casuale con media zero. In termini algebrici:

$$\tilde{x}_i = E_i + \beta_i \tilde{\delta} + \tilde{\epsilon}_i, \quad (3.2.1)$$

(fonte: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing)

Dove $\tilde{\epsilon}_i$ è il rischio diversificabile dell'attività, e $\beta_i \tilde{\delta}$ è l'insieme dei fattori fondamentali con i rispettivi beta e rappresentano il rischio non diversificabile (di mercato) espresso da: $\beta_i \tilde{\delta} = \beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \dots + \beta_{in} f_n$.

Con β_i che rappresenta la sensibilità dell'investimento a variazioni inattese del fattore i ; e f_i che rappresenta variazioni inattese del fattore i .

I portafogli di riferimento (*benchmark*) nell'APT sono portafogli di fattori ben diversificati costruiti per avere un beta di 1 su uno dei fattori e un beta di zero su qualsiasi altro fattore. Possiamo pensare a ciascun portafoglio di fattori come a un *tracking portfolio*. I rendimenti di tale portafoglio tracciano l'evoluzione di una particolare fonte di rischio macroeconomico ma non sono correlati con altre fonti di rischio.

Come il CAPM, l'APT prevede una *security market line* che collega i rendimenti attesi al rischio, ma il percorso che conduce alla SML è piuttosto diverso. L'APT di Ross si basa su tre proposizioni chiave: (1) I rendimenti dei titoli possono essere descritti da un modello fattoriale; (2) Vi sono titoli sufficienti per diversificare il rischio idiosincratico; e (3) Mercati efficienti non consentono la persistenza di opportunità di arbitraggio.

Nell'APT crolla quindi l'assunzione del CAPM delle aspettative necessariamente omogenee dei rendimenti; rimane invece l'aspettativa omogenea riguardo i beta dei fattori e i relativi premi per il rischio.

Il modello in esame richiede quindi di stimare il beta e il premio per il rischio relativo a ciascun fattore. Questo, di solito, viene fatto applicando la cosiddetta "analisi fattoriale" ai dati storici relativi ai rendimenti, per poter ottenere:

1. Il numero di fattori che hanno inciso sui dati esaminati
2. La misura del beta di ciascuna attività, rispetto a ciascun fattore
3. Una stima del premio per il rischio relativo a ciascun fattore.

L'APT è un modello di rischio-rendimento superiore o inferiore al CAPM? Abbiamo bisogno di entrambi i modelli?

L'APT svolge molte delle stesse funzioni del CAPM. Ci fornisce un punto di riferimento per i tassi di rendimento che possono essere utilizzati nel *capital budgeting*, nella valutazione dei titoli o nella valutazione della performance degli investimenti. Inoltre, l'APT evidenzia la distinzione cruciale tra rischio non diversificabile (fattori di rischio sistematico), che richiede una ricompensa sotto forma di premio per il rischio e rischio diversificabile, che non richiede tale premio.

In molti modi, l'APT è un modello estremamente accattivante. Si basa sul presupposto altamente plausibile che un mercato dei capitali razionale precluda opportunità di arbitraggio. Una violazione delle relazioni sui prezzi dell'APT provocherebbe una pressione estremamente forte per ripristinare uno scompenso anche se solo un numero limitato di investitori viene a conoscenza del disequilibrio. Inoltre, l'APT fornisce un rapporto rendimento-beta atteso utilizzando un portafoglio ben diversificato che può essere costruito da un gran numero di titoli. Non si basa sul portafoglio di mercato incalcolabile e impossibile da osservare di tutte le attività alla base del CAPM.

Un portafoglio di indici ben diversificato può essere sufficiente per l'APT. Nonostante questi evidenti vantaggi, l'APT non domina pienamente il CAPM.

Il CAPM fornisce una dichiarazione inequivocabile sulla relazione ritorno-beta atteso per tutti i titoli, mentre l'APT implica che questa relazione vale per tutti ma forse realmente solo per un ristretto numero di titoli. Inoltre, sebbene l'APT sia costruito sulla base di portafogli ben diversificati, anche portafogli di grandi dimensioni possono presentare rischi residui non trascurabili (fattori di rischio specifico dei singoli titoli).

Nonostante queste carenze, l'APT è prezioso. Innanzitutto, bisogna ricordare che il CAPM richiede che quasi tutti gli investitori siano ottimizzatori della varianza media.

L'APT ci libera da questo presupposto. È sufficiente che un ristretto numero di arbitraggisti scruti il mercato alla ricerca di opportunità di arbitraggio. Inoltre, quando sostituiamo il portafoglio di mercato non osservabile del CAPM con un portafoglio di indici ampio e osservabile che potrebbe non essere efficiente, non possiamo più essere sicuri che il CAPM preveda premi di rischio di tutte le attività senza distorsioni. Pertanto, nessuno dei due modelli è privo di limitazioni. Alla fine, tuttavia, è degno di nota e confortante il fatto che, nonostante i percorsi molto diversi che adottano per arrivarci, entrambi i modelli arrivano alla stessa *security market line*. Soprattutto, evidenziano entrambi la distinzione tra rischio specifico e sistematico, che è al centro di tutti i moderni modelli di rischio e rendimento.

3.3 Fama e French 3 factors model

L'APT ci mostra come molteplici fattori di rischio permettono di realizzare una SML a più fattori. Ma come possiamo identificare le fonti più probabili/importanti di rischio sistematico? Un approccio viene dal CAPM multifattoriale di Merton, in cui i fattori di rischio extra-mercato sono dovuti a richieste di copertura (*hedging*) contro una gamma di rischi associati a opportunità di investimento o di consumo. Un altro approccio, che oggi è più pervasivo, utilizza caratteristiche ricavate da solide basi empiriche per procurarsi *proxy* per misurare l'esposizione al rischio sistematico. I fattori scelti come fonti di rischio sono variabili che, in base alle evidenze passate, hanno previsto bene i rendimenti medi e che pertanto potrebbero catturare i principali premi per il rischio. Un esempio di questo approccio è il modello a tre fattori di Fama e French e le sue varianti, che hanno dominato negli ultimi anni la ricerca empirica nei rendimenti dei titoli.

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{iSMB} SMB_t + \beta_{iHML} HML_t + e_{it} \quad (3.3.1)$$

dove:

SMB = Small Minus Big (ovvero il rendimento di un portafoglio di titoli di piccole dimensioni (*size*) in eccesso rispetto al rendimento di un portafoglio di titoli di grandi dimensioni).

HML = High Minus Low (ovvero il rendimento di un portafoglio di titoli con un elevato rapporto book-to-market in eccesso rispetto al rendimento di un portafoglio di titoli con un basso rapporto book-to-market).

Ciò significa che R_{Mt} , SMB_t , HML_t , rappresentano i premi relativi ai fattori presi in esame e β_{iM} , β_{iSMB} , β_{iHML} , rappresentano la correlazione con tale premio.

Si noti che in questo modello l'indice di mercato (β_{im}) cattura il rischio sistematico derivante da fattori macroeconomici.

Gli altri due fattori extra-mercato sono scelti in base ad osservazioni di lunga data secondo cui le dimensioni dell'impresa, misurate dalla capitalizzazione di mercato (il valore di mercato delle azioni in circolazione, *market equity*) e dal rapporto *book-to-market* (valore contabile per azione diviso per il prezzo di mercato delle azioni) prevedono deviazioni dei rendimenti medi delle azioni da livelli coerenti con il CAPM. Fama e French giustificano questo modello su basi empiriche; SMB e HML non sono candidati ovvi come fattori di rischio rilevanti, ma le analisi sostenute nei loro lavori conducono a pensare che queste variabili possono essere ottime proxy di variabili fondamentali molto più difficili da misurare.

Considerando l'equazione sul documento ufficiale di Fama e French.

$$R_i - R_f = \alpha_i + b_i(R_M - R_f) + s_i \text{SMB} + h_i \text{HML} + \varepsilon_i. \quad (3.3.2)$$

In questa equazione si possono chiaramente osservare i premi attesi e i fattori di sensitività o *loadings* b_i , s_i , e h_i , che rappresentano le pendenze nelle *time-series regression*.

Fama e French nel 1995 dimostrano come la *book-to-market equity* e la pendenza relativa a HML fanno da indicatore di approssimazione (*proxy*) per periodi di “relativa difficoltà” delle aziende/titoli (*relative distress*). Come verrà spiegato nelle righe successive, tale periodo di “relativa difficoltà”, si traduce in un'importante situazione, per aziende e azioni annesse, che ne alterano i rendimenti futuri, quindi anche i rendimenti previsti dai modelli presi in esame.

La dipendenza dei rendimenti dal rapporto *book-to-market* è indipendente dal beta di mercato, il che suggerisce che le società con un elevato rapporto *book-to-market* sono relativamente deprezzate o che il rapporto *book-to-market* funge da proxy per un fattore di rischio che influenza i rendimenti attesi di equilibrio. In effetti, Fama e French hanno scoperto che, dopo aver controllato le dimensioni e il *book-to-market effect*, il beta di mercato sembrava non avere il potere di spiegare i rendimenti medi dei titoli. Questa scoperta è una sfida importante alla nozione di mercati razionali, perché sembra implicare che un fattore che dovrebbe influenzare i rendimenti, il rischio sistematico, sembra non avere importanza, mentre un fattore che non dovrebbe importare, il rapporto *book-to-market*, sembra in grado di prevedere rendimenti futuri. In particolare, aziende “deboli” con basse entrate tendono ad avere un basso BE/ME e pendenze positive (si) relative a HML, mentre succede il contrario con aziende “forti”. Il lavoro di Fama e French vuole

quindi sottolineare, richiamando anche il lavoro di Chan e Chen (1991)⁸, come esista una covarianza dei rendimenti connessa con i periodi negativi e di difficoltà di aziende/azioni (*relative distress*) che non è catturato dal ritorno del portafoglio di mercato ma viene solo compensato dai rendimenti medi.

In poche parole, aziende con basso E/P (*earnings/price*), basso C/P (*cash flow/price*), e alte previsioni di crescita delle vendite/ricavi, sono solitamente aziende “forti” che hanno pendenza negativa rispetto all’HML, dato che il rendimento medio dell’HML è fortemente positivo, questi *loadings* negativi (basso E/P e basso C/P), simili alla pendenza HML per le azioni con basso BE/ME, implicano rendimenti attesi più bassi, nell’equazione 3.3.2. Al contrario, come le azioni con alto BE/ME, azioni con alto E/P, alto C/P o aspettativa di crescita sulle vendite basse tendono ad avere pendenze/*loadings* positivi sull’HML, sono quindi in “relativo periodo di difficoltà” (*relative distress*), e hanno maggiori rendimenti medi.

Di seguito vengono riportate le prime righe del documento scritto dai due economisti “*Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies*” che mirano appunto ad approfondire tali anomalie come basi empiriche su cui si sviluppa buona parte del modello:

“Researchers have identified many patterns in average stock returns, for example, DeBondt and Thaler (1985) find a reversal in long-term returns; stocks with low long-term past returns tend to have higher future returns. In contrast, Jegadeesh and Titman (1993) find that short-term return tend to continue; stocks with higher returns in the previous twelve months tend to have higher future returns. Others show that a firm’s average stock return is related to its size (ME, stock price times numbers of shares), book-to-market equity (BE/ME, the ratio of the book value of common equity to its market value), earnings/price (E/P), cash flow/price (C/P), and past sales growth.(Banz (1981), Basu (1983), Rosenberg, Reid and Lanstein (1985), and Lakonishok, Shleifer and Vishny (1994).) Because these patterns in average stock returns are not explained by the CAPM, they are typically called anomalies.”

(fonte:” Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies” pp.55)

Tali “anomalie” rappresentano il vero punto di partenza dei modelli multifattoriali e del loro tentativo di spiegare variazioni nei rendimenti non calcolati dal CAPM.

8. “Structural and Return Characteristics of Small and Large Firms”, K. C. Chan and Nai-Fu Chen

Queste anomalie frequentemente citate, sono di fatto statistiche di facile reperibilità nel mercato che servono apparentemente per predire rendimenti aggiustati per il rischio “anormali” o premi per il rischio significativi. Ne sono un esempio gli studi di Basu⁹ (1977) che evidenziano come portafogli con rapporto *price/earnings* basso hanno generato nel tempo rendimenti più alti rispetto a rapporti più alti di P/E, oppure lo “*small-firm effect*” di Banz¹⁰ (1981) che dimostra come dividendo le azioni dell’NYSE in dieci portafogli per dimensione delle aziende (dal più piccolo al più grande), dal 1926 al 2015 i rendimenti medi sono stati più alti in modo consistente nei portafogli di aziende di piccole dimensioni.

Fama e French sostengono che questi effetti possono essere spiegati come manifestazioni di premi per il rischio. Usando il loro modello a tre fattori, mostrano che le azioni con beta più alti (noti anche come *loadings* di fattori in questo contesto) in termini di dimensioni (*size*) o *book-to-market ratio* hanno rendimenti medi più elevati; Fama e French interpretano questi rendimenti come prova di un premio per il rischio associato al fattore considerato (es. rapporto *book-to-market*).

Il modello a tre fattori svolge quindi un lavoro migliore rispetto al CAPM, che utilizza un solo fattore, per spiegare strettamente i rendimenti dei titoli. Mentre le dimensioni o i rapporti *book-to-market* di per se non sono ovviamente fattori di rischio, potrebbero fungere da proxy per determinanti di rischio “più fondamentali” come detto precedentemente.

Fama e French sostengono che questi modelli di rendimento possono quindi essere coerenti con un mercato efficiente in cui i rendimenti sono coerenti con il rischio.

L'interpretazione opposta è offerta da Lakonishok, Shleifer e Vishny, (1996) che sostengono che questi fenomeni sono la prova di mercati inefficienti, più specificamente, di errori sistematici nelle previsioni degli analisti azionari. Tali analisti proiettano le performance passate troppo lontano nel futuro, e quindi sopravvalutano le imprese con recenti buone prestazioni e sottovalutano le imprese con recenti scarse prestazioni. Alla fine, quando i partecipanti al mercato riconoscono i loro errori, i prezzi si “invertano” (fenomeno del *price reverse*). Questa spiegazione è coerente con il “*reversal effect*” di DeBondt e Thaler e anche, in una certa misura, con gli effetti delle piccole imprese (*size effect*) e del *book-to-market effect* perché le imprese con forti cali di prezzo possono tendere a essere quelle piccole o con rapporti *book-to-market* elevati.

9. “Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios: a test of the efficient market hypothesis”, S. Basu (1977)

10. “The relationship between return and market value of common stocks”, Rolf W. Banz

Se Lakonishok, Shleifer e Vishny hanno ragione, dovremmo scoprire che gli analisti, sistematicamente, sbagliano quando prevedono i rendimenti più recenti delle aziende "vincenti" rispetto a quelle "perdenti"¹¹. Uno studio di La Porta¹² (1996) è coerente con questo modello. Trova che l'equity delle aziende per le quali gli analisti prevedono bassi tassi di crescita dei rendimenti performano meglio di quelle con aspettative di crescita più alte. Gli analisti sembrano eccessivamente pessimisti rispetto alle imprese con basse prospettive di crescita e eccessivamente ottimisti sulle imprese con elevate prospettive di crescita. Quando queste aspettative troppo estreme vengono "corrette", le imprese a bassa crescita superano quelle a forte crescita.

Il documento "*Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies*" spiega, dopo le righe introduttive citate sopra, come l'equazione precedente (3.3.1), redatta da Fama e French raccolga e catturi molte delle anomalie del CAPM anch'esse precedentemente citate. In particolare, prima di presentare tutte le analisi empiriche e le evidenze raccolte dal modello a dimostrazione di come il Fama e French a tre fattori raccolga la gran parte dei rendimenti medi delle anomalie del CAPM, i due autori discutono di come la loro interpretazione dei test condotti possa avere delle problematiche o errori di base.

I problemi e le critiche principali che sorgono contro questo modello sono:

1.a detta dei due autori il "ragionevole scetticismo" causato dal "*premium for distress*" o il rendimento medio del rendimento del portafoglio *High Minus Low*.

Kothari, Shanken, e Sloan¹³ (1995) sostengono che buona parte di tale premio sia generata dal *survivorship bias* nel numero di aziende con alto rapporto *book-to-market*. (*survivorship bias*: errore che si genera nel concentrarsi su persone o cose che hanno superato un processo di selezione e trascurando quelli che non lo hanno fatto, in genere a causa della loro mancanza di visibilità. Ciò può portare a false conclusioni in diversi modi. L'inclinazione alla sopravvivenza può portare a convinzioni eccessivamente ottimistiche perché i fallimenti vengono ignorati, ad esempio quando le società che non esistono più vengono escluse dalle analisi delle prestazioni finanziarie.).

\

11. "Does the Stock Market Overreact?", Werner F. M. De bondt, Richard Thaler, 1985

12. "Expectations and the Cross-Section of Stock Returns", Rafael La Porta, 1996

13. "Another Look at the Cross-section of Expected Stock Returns", S. P. Kothari, Jay Shanken, Richard G. Sloan

2. Un altro punto di vista riguarda il fatto che l'individuazione di tale *distress premium* sia solo a causa di *data snooping* o *data mining bias* (*data mining bias*: i ricercatori tendono a cercare e correggere i risultati che dimostrano l'importanza di alcune variabili che però sono efficaci solo nei loro esempi).

3. Un terzo punto di vista è che tale *distress premium* sia reale ma irrazionale; il risultato di *over-reaction* che conducono ad un deprezzamento delle aziende/titoli in difficoltà (*distressed stock*).

3.4 Fattori che influenzano l'asset return ed evidenze empiriche e comportamentali del Fama e French

Fama e French hanno fatto di più del semplice documentare il ruolo empirico di *size* e *book-to-market ratio* nello spiegare i tassi di rendimento. Hanno anche introdotto un metodo generale per generare portafogli di fattori e applicato il loro metodo a queste caratteristiche/fattori delle aziende. Esplorare questa innovazione è un modo utile per comprendere gli *step* empirici di un modello di valutazione delle attività multifattoriale. Supponiamo di scoprire, come fecero Fama e French, che la capitalizzazione di borsa (o "capitalizzazione di mercato") sembra prevedere i valori alfa¹⁴ in un'equazione CAPM. In media, minore è la capitalizzazione di mercato, maggiore è l'alfa di un titolo. Questa scoperta aggiungerebbe la dimensione all'elenco di anomalie che confutano il CAPM. Ma supponiamo di ritenere che le dimensioni siano legate alla sensibilità di un titolo ai cambiamenti nelle future opportunità di investimento. Quindi, ciò che appare come alfa in un CAPM a fattore singolo è in realtà una fonte di rischio extra-mercato in un CAPM a più fattori. Se questo può sembrare inverosimile, ecco di seguito un esempio che smentisce la cosa: quando gli investitori anticipano una recessione del mercato, adeguano i loro portafogli per ridurre al minimo la loro esposizione alle perdite. Supponiamo che le piccole azioni siano generalmente colpite più duramente nei mercati in calo, situazione simile a quella di un beta più grande in tempi difficili. Quindi gli investitori eviteranno tali titoli a favore di azioni meno sensibili alle recessioni, quelle delle grandi imprese. Ciò spiegherebbe un premio per il rischio connesso alle piccole dimensioni oltre al beta sui rendimenti di mercato contemporanei. Un "alfa" relativo alla dimensione può essere invece un premio al rischio ICAPM per le attività con maggiore sensibilità al deterioramento delle future opportunità di investimento.

14. $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$ per valori alfa si intendono i valori di discostamento da una SML ricavata da una equazione index model del CAPM

Fama e French propongono un metodo per quantificare il premio per il rischio dimensionale. Ricordiamo che la distribuzione della dimensione aziendale è asimmetrica: alcune aziende grandi e molte aziende piccole. Dal momento che il NYSE (il mercato principale in cui vengono condotte le analisi degli studi citati) è la piazza di scambio in cui vengono commerciati i titoli più grandi, Fama e French per prima cosa determinano la mediana delle azioni del NYSE. Usano poi questa mediana per classificare tutti i titoli statunitensi negoziati (NYSE + AMEX + NASDAQ) come grandi o piccoli e creano un portafoglio di titoli di aziende di grandi dimensioni e un altro di titoli di aziende di piccole dimensioni. Infine, ciascuno di questi portafogli viene ponderato secondo il procedimento *value-weighted* per una diversificazione efficiente.

Come nell'APT, Fama e French costruiscono un portafoglio con fattore di dimensione/investimento nullo (*zero-net-investment size-factor portfolio*) andando *long*, cioè comprando, il portafoglio con le aziende di piccole dimensioni e *short*, vendendo il portafoglio con titoli di aziende di grandi dimensioni.

Il rendimento di questo portafoglio, chiamato SMB (piccolo meno grande), è semplicemente il rendimento del portafoglio di titoli di piccole dimensioni meno il rendimento del portafoglio di titoli di grandi dimensioni. Se la dimensione (*size*) ha un prezzo, questo portafoglio presenterà un premio per il rischio.

Poiché il portafoglio SMB è altamente diversificato, se si unisce al portafoglio di indici di mercato in un modello APT a due fattori con dimensioni come fonte di rischio extra-mercato. Nella SML a due fattori, il premio per il rischio su qualsiasi attività dovrebbe essere determinato dai suoi *loadings* (beta) sui portafogli nei due fattori. Questa è un'ipotesi verificabile. Fama e French usano questo approccio per formare fattori sia di *size* che di *book-to-market ratio*.

Per creare questi due fattori di rischio extra-mercato, ordinano due volte le azioni per dimensione e BE/ME. Suddividono poi la popolazione azionaria degli Stati Uniti in tre gruppi in base al rapporto BE/ME: il 30% inferiore (basso), il 40% medio (medio) e il 30% superiore (alto). Vengono quindi creati sei portafogli basati sulle intersezioni delle dimensioni e dei BE/ME: *small/low*; *small/medium*; *small/high*; *big/low*; *big/medium*; *big/high*. Ognuno di questi sei portafogli è ponderato in base al valore, *value-weighted*. I rendimenti dei portafogli Grandi e Piccoli sono:

$$R_S = \frac{1}{3}(R_{SL} + R_{SM} + R_{SH}); R_B = \frac{1}{3}(R_{BL} + R_{BM} + R_{BH}) \quad (3.4.1)$$

Analogamente, i rendimenti dei portafogli high and low (Value and Growth) sono:

$$R_H = 1/2(R_{SH} + R_{BH}); R_L = 1/2(R_{SL} + R_{BL}) \quad (3.4.2)$$

I rendimenti degli *zero-net-investment factor* SMB (Small meno Big, ovvero Long Small e Short Big) e HML (High meno Low, ovvero Long High BE/ME e Short Low BE/ME) sono creati da questi portafogli:

$$R_{SMB} = R_S - R_B; R_{HML} = R_H - R_L \quad (3.4.3)$$

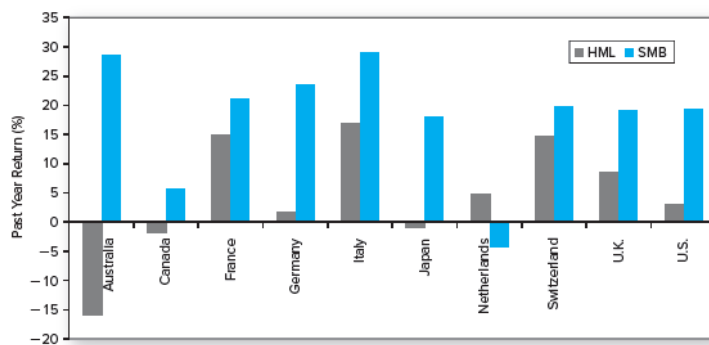
Misuriamo la sensibilità dei singoli titoli rispetto ai fattori attraverso la stima dei relativi beta, ottenuta dalle regressioni dei rendimenti in eccesso delle azioni rispetto al rendimento in eccesso dell'indice di mercato, nonché su R_{SMB} e R_{HML} . Questi beta dovrebbero, se usati simultaneamente e in gruppo, prevedere il premio per il rischio totale. Se quindi sono gli unici fattori di rischio, i rendimenti in eccesso su tutte le attività dovrebbero essere spiegati in modo completo dai premi di rischio generati da questi fattori/*loadings*. In altre parole, se questi fattori spiegano completamente i rendimenti delle attività, l'intercetta dell'equazione 3.3.2 dovrebbe essere uguale a zero.

Spiegazione empirica

Nel considerare fattori empirici che influenzano *l'asset return* vanno citati i lavori di Lieu e Vassalou e di Petkova e Zhang.

“Can book-to-market, size and momentum be risk factors that predict economic growth?”

Lieu e Vassalou mostrano che i portafogli composti come precedentemente (HML o SMB) sembrano prevedere la crescita del PIL, e quindi potrebbero effettivamente catturare alcuni aspetti del rischio del ciclo economico. Ogni barra della Figura (3.4.4) è la differenza media nel rendimento del portafoglio HML o SMB negli anni precedenti alla buona crescita del PIL rispetto agli anni con una crescita del PIL scarsa. Valori positivi indicano che il portafoglio fa meglio negli anni precedenti a buone performance macroeconomiche.



(3.4.4)
(Fonte investment)

Differenza in termini di rendimento dei portafogli SML HML nell'anno precedente alla crescita del PIL superiore alla media rispetto all'anno con crescita inferiore alla media. I rendimenti del portafoglio di SML e HML tendono ad essere più alti negli anni precedenti una migliore crescita del PIL.

Il predominio di valori positivi li porta a concludere che i rendimenti sui portafogli HML e SMB sono positivamente correlati alla crescita futura nella macroeconomia, e quindi possono essere proxy per il rischio collegato ai cicli economici. Pertanto, almeno una parte dei premi di *size* e *value* può riflettere ricompense razionali per una maggiore esposizione al rischio.

“Is value riskier than growth?”

Petkova e Zhang tentano inoltre di vincolare il premio di rendimento medio sui *value portfolio* (vengono chiamati così i portafogli “valore” cioè con alto BE/ME) ai premi di rischio.

Il loro approccio utilizza un CAPM “condizionale”. Nel CAPM convenzionale, trattiamo sia il premio per il rischio di mercato sia i beta connessi alle aziende come parametri dati, al contrario, il CAPM condizionale consente a entrambi questi termini di variare nel tempo e possibilmente di co-variare. Se il beta di un titolo è più elevato quando il premio per il rischio di mercato è elevato, si genera un’associazione positiva che porta a una “sinergia” nel suo premio per il rischio, che è il prodotto del suo beta incrementale e del premio per il rischio di mercato. Cosa potrebbe portare a tale associazione tra beta e premio per il rischio di mercato?

Zhang si concentra sugli investimenti irreversibili. Rileva che le imprese classificate come società di valore, *value stock* (con elevati rapporti book-to-market) avranno in media maggiori quantità di capitale tangibile. L’irreversibilità degli investimenti mette tali imprese più a rischio in caso di recessioni economiche perché in una grave recessione soffriranno della capacità in eccesso degli attivi già in essere. Al contrario, le imprese in

crescita, *growth stock* sono in grado di affrontare meglio una recessione rinviando i piani di investimento. La maggiore esposizione delle aziende con alto *book-to-market* alle recessioni comporterà beta relativi al mercato più bassi. Inoltre, alcune prove suggeriscono che anche il premio per il rischio di mercato è più elevato nei mercati ribassisti, quando gli investitori avvertono una maggiore pressione economica e ansia. La combinazione di questi due fattori potrebbe impartire una correlazione positiva tra il beta delle imprese a BE/ME elevate e il premio per il rischio di mercato. Per quantificare queste nozioni, Petkova e Zhang tentano di adattare sia il beta che il premio per il rischio di mercato a un insieme di "variabili di stato", ovvero variabili che sintetizzano lo stato dell'economia. Queste sono:

DIV = Rendimento da dividendi di mercato

DEFLT = spread di default sulle obbligazioni societarie (tassi Baa - Aaa)

TERM = spread struttura a termine (tassi del Tesoro a 10 anni - 1 anno)

TB = tasso di fatturazione a 1 mese

Petkova e Zhang stimano una regressione, ma prima sostituiscono queste variabili di stato con la beta come segue:

$$\begin{aligned} R_{HML} &= \alpha + \beta R_{Mt} + e_i \\ &= \alpha + \underbrace{[b_0 + b_1 \text{DIV}_t + b_2 \text{DEFLT}_t + b_3 \text{TERM}_t + b_4 \text{TB}_t]}_{= \beta_t \leftarrow \text{a time-varying beta}} R_{Mt} + e_i \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

(fonte: investment)

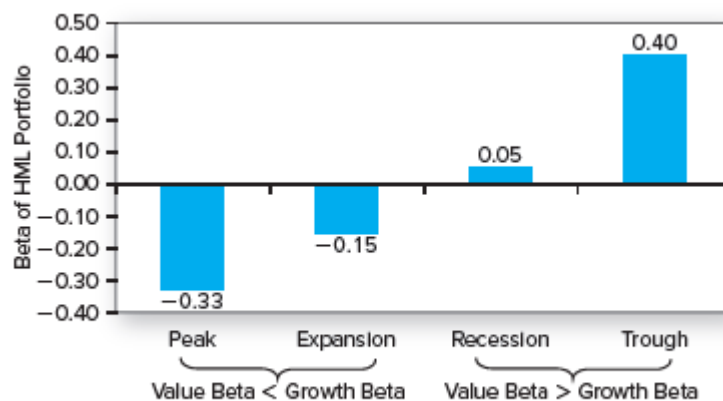
La strategia consiste nello stimare i parametri da b_0 a b_4 e quindi adattare i beta utilizzando i valori delle quattro variabili di stato in ciascuna data. In questo modo, possono stimare i beta in ciascun periodo. Allo stesso modo, si possono stimare direttamente i determinanti di un premio per il rischio di mercato variabile nel tempo, usando lo stesso insieme di variabili di stato:

$$r_{Mt} - r_{ft} = c_0 + c_1 \text{DIV}_t + c_2 \text{DEFLT}_t + c_3 \text{TERM}_t + c_4 \text{TB}_t + e_t \quad (3.4.6)$$

(fonte: investment)

Il valore adeguato di questa regressione è la stima del premio per il rischio di mercato. Petkova e Zhang esaminano la relazione tra beta e premio per il rischio di mercato. Definiscono lo stato dell'economia in base all'entità del premio. Un picco è definito nei periodi con i premi di rischio più bassi del 10%; un periodo di depressione ha il premio per il rischio più elevato del 10%. I risultati, presentati nella Figura 3.4.7, supportano la nozione di un valore anticiclico del beta: il beta del portafoglio HML è negativo nelle

situazioni di cicli economici espansionistici, il che significa che il beta delle azioni *value* (book-to-market elevato) è inferiore a quello delle azioni *growth* (basso B/M), ma è vero il contrario nelle recessioni. Mentre la covarianza tra il beta di HML e il premio per il rischio di mercato non è sufficiente a spiegare da sola il premio di rendimento medio sui portafogli *value*, suggerisce tuttavia che almeno una parte della spiegazione può essere un premio di rischio razionale.



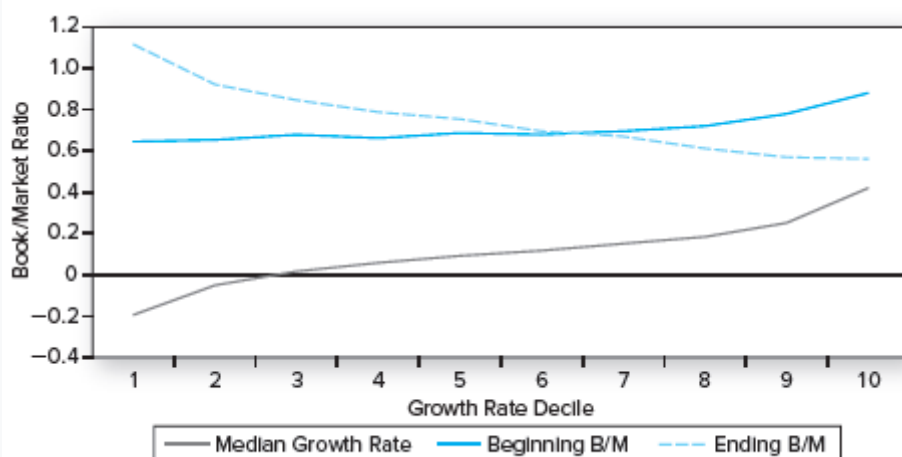
(3.4.7)

(fonte:investment)

Beta HML in diversi stati economici. Il beta del portafoglio HML è più elevato quando il premio per il rischio di mercato è più elevato.

Spiegazione comportamentale

Dall'altro lato del dibattito, diversi autori sostengono che il premio per il valore (*value stock premium*) è una manifestazione di irrazionalità del mercato. L'essenza dell'argomentazione è che gli analisti tendono a estrapolare le prestazioni recenti troppo lontano nel futuro, e quindi tendono a sopravvalutare il valore delle imprese con buone prestazioni recenti. Quando il mercato si rende conto del suo errore, i prezzi di queste aziende diminuiscono. Pertanto, in media, le "imprese glamour/che vanno di moda", che sono caratterizzate da recenti buone prestazioni, prezzi elevati e rapporti book-to-market più bassi, tendono a sottoperformare le "imprese *value*" perché i loro prezzi elevati riflettono un eccessivo ottimismo rispetto a quelle con più alto rapporto *book-to-market*. La Figura 3.4.8, tratta da uno studio di Chan, Karceski e Lakonishok, sostiene la "reazione eccessiva". Le imprese sono classificate in decili in base alla crescita del reddito negli ultimi cinque anni.



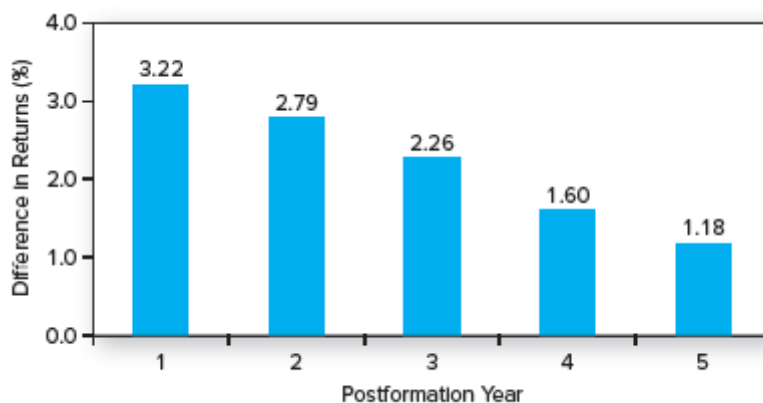
(3.4.8)

(fonte: "investment")

Il rapporto book-to-market riflette la crescita passata, ma non le prospettive di crescita futura. B/M tende a diminuire con la crescita del reddito registrata alla fine di un periodo di cinque anni, ma in realtà aumenta leggermente con i futuri tassi di crescita del reddito.

Per costruzione, i tassi di crescita aumentano uniformemente dal primo al decimo decile (vedere la linea scura continua nella figura). Il rapporto book-to-market per ciascun decile alla fine del periodo di cinque anni (la linea tratteggiata colorata) segue molto bene la crescita recente: B/M diminuisce costantemente con la crescita negli ultimi cinque anni. Questa è la prova che la crescita passata viene estrapolata e quindi ridotta nel prezzo. L'elevata crescita passata porta a prezzi più alti e rapporti B/M inferiori. Ma B/M all'inizio di un periodo di cinque anni mostra una scarsa o addirittura un'associazione positiva con la crescita successiva (la linea a tinta unita), il che implica che la capitalizzazione di mercato oggi è inversamente correlata alle prospettive di crescita. In altre parole, le aziende con B/M basso (imprese glamour/di moda) non sperimentano una crescita del reddito medio migliore, che anzi spesso si rivela essere peggiore rispetto ad altre aziende. L'implicazione è che il mercato ignora le prove del fatto che la crescita passata non può essere estrapolata lontano nel futuro. Il rapporto book-to-market può riflettere la crescita passata meglio della crescita futura, in linea con l'errore di estrapolazione.

Ulteriori prove dirette a sostegno dell'errore di estrapolazione sono fornite da La Porta, Lakonishok, Shleifer e Vishny, che esaminano l'andamento del prezzo delle azioni quando gli utili effettivi vengono resi pubblici. Le imprese sono classificate come *growth* vs *value stock* e viene quindi esaminata la differenza nella loro performance del prezzo delle azioni rispetto agli annunci sugli utili per quattro anni dopo la data di classificazione.



(3.4.9)

(fonte:investment)

Rendimenti *value* meno rendimenti *growth* relativi agli annunci sugli utili del 1971–1992. Gli effetti dell'annuncio sono misurati per ciascuno dei quattro anni successivi alla classificazione come valore rispetto a un'impresa in crescita.

La Figura 3.4.9 dimostra che le azioni *growth* hanno sottoperformato le azioni *value* che sono coinvolte con questi annunci. Per concludere quindi quando le notizie sugli utili effettivi sono rese pubbliche, il mercato è relativamente deluso dalle azioni che ha trattato come imprese in crescita (*growth*).

3.5 Fama e French 5 factor e modello a 4 fattori di Carhart

Negli ultimi anni oltre al Fama e French a tre fattori sono emersi due ulteriori modelli, anch'essi costruiti basandosi su anomalie empiriche e potenziando appunto il Fama e French a 3 fattori.

“Charhart 4 factor”

Da quando è stato introdotto il modello a tre fattori Fama e French, un quarto fattore è stato aggiunto nelle analisi dei rendimenti dei titoli. Questo è il fattore momentum.

Come abbiamo visto precedentemente (nell'estratto del lavoro di Fama e french), Jegadeesh e Titman hanno scoperto la tendenza al persistere di buone o cattive performance delle azioni per diversi mesi. Carhart ha aggiunto questo effetto “slancio” (momentum) al modello a tre fattori come strumento per valutare la performance dei fondi comuni. Il fattore è costruito nello stesso modo degli altri portafogli (SML e HML) ed è indicato da WML (vincitori meno perdenti, *winners minus losers*). Le versioni di questo fattore prendono vincitori e vinti in base a 1-12 mesi di rendimenti passati. Carhart ha

scoperto che gran parte di quello che sembrava essere l'alfa di molti fondi comuni potrebbe in realtà essere spiegato come dovuto ai loro carichi o sensibilità al momento del mercato.

Il modello originale Fama e French aumentato con un fattore di momentum è diventato un modello a quattro fattori comune utilizzato per valutare la performance anormale di portafogli azionari.

Naturalmente, questo ulteriore fattore presenta ulteriori enigmi di interpretazione. Caratterizzare i fattori originali del Fama e French come riflettori di evidenti fonti di rischio è già una sfida. Un fattore di slancio/momentum sembra ancora più difficile da posizionare e giustificare con evidenze razionali in quanto riflette un compromesso tra rischio e rendimento verificabile quasi solamente come anomalia empirica e non come un vero e proprio comportamento prevedibile e razionale dei mercati.

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_{i,m}(r_m - r_f) + \beta_{i,SMB}SMB + \beta_{i,HML}HML + \beta_{i,MOM}MOM + \varepsilon_i$$

(3.5.1)

MOM o WML: consiste in un portafoglio il cui premio è ottenuto dal differenziale tra i rendimenti delle azioni con elevati rendimenti passati meno i rendimenti delle azioni con bassi rendimenti passati.

“A Five-Factor Asset Pricing Model”

In un documento pubblicato nel 2013 gli stessi Fama e French propongono e spiegano un modello a detta dei loro studi, migliorato grazie all'introduzione di due nuovi fattori.

Tale *Five-Factor Asset Pricing Model*, è modello a cinque fattori che mira a catturare dimensione (*size*), valore (*value*), redditività (*profitability*) e decisioni di investimento (*investment patterns*) nei rendimenti azionari medi; il modello, come presentato nelle analisi empiriche del documento, fornisce prestazioni migliori rispetto al modello a tre fattori di Fama e French (FF 1993). Il problema principale del modello a cinque fattori è la sua incapacità di catturare i rendimenti più bassi su titoli di piccole dimensioni i cui rendimenti si comportano come quelli delle aziende che investono molto nonostante la bassa redditività. Inoltre, Con l'aggiunta della *profitability* e degli *investment patterns*, il fattore *value*, se considerato come nell'analisi precedente del modello a tre fattori FF diventa ridondante per la descrizione dei rendimenti medi nel campione che viene esaminato.

Vi sono molte prove che i rendimenti medi delle azioni sono correlati al *book-to-market equity ratio*, B/M. Vi sono anche prove che la redditività e gli investimenti si aggiungono alla descrizione dei rendimenti medi fornita dal rapporto B/M. Possiamo utilizzare quindi il Dividend Discount Model per spiegare perché queste variabili sono correlate ai rendimenti medi. Il modello afferma che il valore di mercato di una quota di azioni è il valore attualizzato dei dividendi previsti per azione,

$$m_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} E(d_{t+\tau}) / (1+r)^{\tau} . \quad (3.5.1)$$

In questa equazione m_t è il prezzo dell'azione al momento t , $E(d_{t+\tau})$ è il dividendo atteso per azione per il periodo $t + \tau$ e r è (approssimativamente) il rendimento medio atteso a lungo termine delle azioni o, più precisamente, il tasso di rendimento interno sui dividendi previsti. L'equazione (3.5.1) dice che se al tempo t , le azioni di due società hanno gli stessi dividendi attesi ma prezzi diversi, le azioni con un prezzo inferiore hanno un rendimento atteso (medio lungo termine) più elevato. Se il prezzo è razionale, i futuri dividendi del titolo con il prezzo più basso devono avere un rischio maggiore. Le previsioni tratte dalla (3.5.1), qui e sotto, sono, tuttavia, le stesse se il prezzo è razionale o irrazionale.

Con un po' di manipolazione, possiamo estrarre le implicazioni dell'equazione (3.5.1) per le relazioni tra rendimento atteso e redditività attesa, investimento previsto e B/M. Miller e Modigliani (1961) mostrano che il tempo t e il valore totale di mercato delle azioni dell'impresa implicito dalla (3.5.1) è,

$$M_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} E(Y_{t+\tau} - dB_{t+\tau}) / (1+r)^{\tau} . \quad (3.5.2)$$

In questa equazione $Y_{t+\tau}$, rappresenta l'*equity* totale del periodo $t+\tau$ e $dB_{t+\tau} = B_{t+\tau} - B_{t+\tau-1}$ è la variazione di patrimonio netto totale (*equity totale*). Dividendo per il valore contabile (*book equity*) dà:

$$\frac{M_t}{B_t} = \frac{\sum_{\tau=1}^{\infty} E(Y_{t+\tau} - dB_{t+\tau}) / (1+r)^{\tau}}{B_t} . \quad (3.5.3)$$

L'equazione (3.5.3) fornisce tre dichiarazioni sui rendimenti attesi delle azioni. Innanzitutto, fissata ogni variabile nella (3.5.3) tranne il valore corrente dell'azione, M_t , e il rendimento atteso dell'azione, r ; Un valore inferiore di M_t , o equivalentemente un rapporto azionario book-to-market più elevato, B_t / M_t , implica un rendimento atteso più elevato. Successivamente, fissando M_t e i valori di tutte le altre variabili nella (3.5.3) tranne gli utili futuri attesi e il rendimento delle azioni attese; L'equazione ci dice che guadagni attesi più elevati implicano un rendimento atteso più elevato. Infine, per i valori

fissi di B_t , M_t e utili attesi, una maggiore crescita attesa nel valore contabile/investimenti, implica un rendimento atteso inferiore. Dichiarato in termini forse più familiari, (3.5.3) afferma che B_t / M_t è una proxy efficace per il rendimento atteso perché la capitalizzazione di mercato M_t risponde anche alle previsioni di utili e investimenti.

La sfida di ricerca posta dalla 3.5.3 è stata quella di identificare le proxy per i guadagni (*profitability*) e investimenti previsti (*investment patterns*). Novy-Marx (2012) identifica una proxy per la redditività attesa che è fortemente correlata al rendimento medio. Aharoni, Grundy e Zeng (2013) documentano una relazione più debole ma statisticamente affidabile tra investimento e rendimento medio. (Vedi anche Haugen e Baker 1996, Cohen, Gompers e Vuolteenaho 2002, Fairfield, Whisenant e Yohn 2003, Titman, Wei e Xie 2004, Fama e French 2006, 2008.) Le prove disponibili suggeriscono anche che gran parte della variazione medie, i rendimenti relativi alla redditività e agli investimenti non vengono spiegati dal modello a tre fattori di Fama e French (FF 1993). Questo ci porta a esaminare un modello che aggiunge fattori di redditività e investimento al mercato, dimensione e fattori B/M del modello a tre fattori di Fama e French.

È noto che molte “variabili di anomalie” causano problemi per il modello a tre fattori, quindi è ragionevole chiedersi perché Fama e French abbiano scelto la redditività e i fattori di investimento per migliorare il modello. La loro risposta contenuta nel documento è che sono le scelte naturali ricavate dalle equazioni 3.5.1 e 3.5.3.

Il modello a tre fattori di Fama e French (1993) è progettato per catturare la relazione tra rendimento medio, dimensione (capitalizzazione di mercato, prezzo moltiplicato per le azioni in circolazione) e la relazione tra rendimento medio e rapporti di prezzo come B/M. Al tempo dell’articolo del 1993, questi erano i due andamenti noti più collegati con i rendimenti lasciati inspiegabili dal CAPM.

Test del modello a tre fattori si concentrano sulla regressione delle serie storiche,

$$R_{it} - R_{ft} = a_i + b_i(R_{Mt} - R_{ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + e_{it}. \quad (3.5.4)$$

In questa equazione come detto nel capitolo precedente, R_{it} è il rendimento del titolo o del portafoglio i per il periodo t , R_{ft} è il rendimento privo di rischio, R_{Mt} è il rendimento del portafoglio di mercato value-weight (VW), SMB_t è il rendimento di un portafoglio diversificato di azioni di piccole dimensioni meno il rendimento su un portafoglio diversificato di grandi titoli, HML_t è la differenza tra i rendimenti su portafogli diversificati di titoli B / M alti e bassi, e e_{it} è un residuo a media zero. Considerando i parametri come valori reali anziché come stime, se l’esposizione dei fattori b_i , s_i e h_i acquisisce tutte le variazioni dei rendimenti attesi, l’intercettazione a_i è zero per tutti i titoli e portafogli i .

Le prove di Novy-Marx (2012), Titman, Wei e Xie (2004), e altri dicono che la 3.5.4 è un modello incompleto per i rendimenti attesi perché i suoi tre fattori non includono nell'analisi gran parte della variazione dei rendimenti media in relazione alla redditività e agli investimenti. Motivati da queste evidenze e dall'equazione di valutazione, aggiungiamo redditività e fattori di investimento al modello a tre fattori,

$$R_{it} - R_{ft} = a_i + b_i(R_{M,t} - R_{ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it} \quad (3.5.5)$$

In questa equazione RMW_t è la differenza tra i rendimenti di portafogli diversificati di titoli con redditività solida e debole, e CMA_t è la differenza tra i rendimenti di portafogli diversificati di titoli di società a basso e alto investimento, che definiamo prudente e aggressivo. Se le esposizioni ai cinque fattori, b_i , s_i , h_i , r_i e c_i , rilevano tutte le variazioni dei rendimenti attesi, l'intercetta a_i nella 3.5.5 è zero per tutti i titoli e portafogli i .

Vengono suggerite in seguito due interpretazioni dell'ipotesi di intercetta zero. Appoggiandosi a Huberman e Kandel (1987), il primo propone che il portafoglio di tangenza efficiente media-varianza, che valuta tutti gli asset, combini l'asset privo di rischio, il portafoglio di mercato, SMB, HML, RMW e CMA. L'interpretazione più ambiziosa propone la 3.5.5 come equazione di regressione per una versione del modello di Merton (1973) in cui fino a quattro variabili di stato non specificate portano a premi di rischio che non vengono catturati dal fattore di mercato. Secondo questo punto di vista, *Size*, *B/M*, *OP* e *Inv.* non sono esse stesse variabili di stato e SMB, HML, RMW e CMA non sono portafogli che imitano le variabili di stato. Invece, nello spirito di Fama (1996), i fattori sono solo portafogli diversificati che forniscono diverse combinazioni di esposizioni a variabili di stato sconosciute.

Insieme al portafoglio di mercato e all'asset privo di rischio, i portafogli dei fattori abbracciano il relativo insieme efficiente multifattoriale. In questo scenario, il ruolo dell'equazione di valutazione (3.5.3) è di suggerire fattori che ci consentono di catturare gli effetti di rendimento attesi delle variabili di stato senza identificarli.

In conclusione, Se la parsimonia è un problema, i risultati del documento suggeriscono che l'HML è un fattore ridondante, nel senso che il suo rendimento medio elevato è completamente catturato dalle esposizioni a $RM - RF$, SMB, e in particolare RMW e CMA.

Pertanto, nelle applicazioni in cui l'unico interesse sono i rendimenti anormali (misurati dalle intercettazioni di regressione), i test condotti dai due economisti suggeriscono che un modello a quattro fattori che elimina l'HML funziona così come il modello a cinque fattori. Ma se uno è anche interessato a inclinazioni del portafoglio verso dimensioni,

valore, redditività e premi di investimento, il modello a cinque fattori è la scelta più corretta.

Infine, il documento più vicino a quello redatto da Fama e French è quello di Hou, Xue e Zhang (2012). Esaminano un modello a quattro fattori che, oltre a RM - RF, include fattori molto simili a SMB, RMW e CMA, che controllano congiuntamente dimensioni, redditività e investimenti. Non commentano perché l'HML non sia presente nel modello e confrontano solo le prestazioni del loro modello a quattro fattori con quello del CAPM, il modello a tre fattori FF e il modello a quattro fattori di Carhart (1997), che, come già detto, aggiunge un fattore di momentum. La loro indagine sui modelli è più limitata di quella di Fama e French e non considerano definizioni di fattori alternativi. Ancora più importante, si occupano principalmente di spiegare i rendimenti associati a variabili di anomalie non utilizzate per costruire i loro fattori e si concentrano sui portafogli VW di specie univariate su ciascuna variabile. I portafogli peso-valore per specie univariate su variabili diverse da *Size* sono in genere dominati da grandi azioni e uno dei messaggi principali qui e in Fama e French (1993, 2012, 2014) è che i problemi più gravi dei modelli di valutazione delle attività rimangono le piccole attività/azioni.

4. Conclusioni

Il seguente elaborato ripercorre l'evoluzione della modellistica e della letteratura relativa all'asset pricing e all'equilibrio di mercato. Partendo, come primo punto, dalla Portfolio theory di Markovitz che fa del principio media-varianza e della diversificazione del rischio il fulcro di tale teoria, si passa per le teorizzazioni di Treynor-Sharpe-Lintner-Mossin i quali, ognuno con contributi differenti, realizzano quello che chiamiamo *Capital Asset Pricing Model*; Il modello di equilibrio dei mercati su cui ancora oggi si basa tutta la modellistica contemporanea.

Il CAPM rivoluziona il modo di concepire gli indici, il rischio e i mercati in generale. L'intuizione della combinazione di un ipotetico portafoglio contenente tutti gli asset di mercato con un tasso considerato *risk-free*, (cioè quegli asset meno rischiosi in circolazione di cui i rendimenti spesso dipendono direttamente dalle economie e potere degli stati) e il concetto di diversificazione introdotto da Markovitz trovano piena realizzazione nei concetti di rischio specifico e rischio sistematico del CAPM.

Il presente studio, come già accennato in precedenza, mira modestamente a dare credito alle brillanti elaborazioni di Treynor rimaste per molti anni non pubblicate. Sharpe e Lintner raggiungono, a ridosso di quegli anni ma successivamente a Treynor, conclusioni simili ma di più difficile comprensione. Treynor centra in poche parole e con chiarezza tutti i concetti su cui si baseranno lavori simili negli anni successivi. Il lavoro di Treynor, d'altro canto, è tale anche grazie agli sforzi e sviluppi concettuali svolti precedentemente in maniera brillante da Tobin. Tobin, che di fatto attraversa anni prima gli importanti concetti di consumo, utilità, liquidità, introduce il *separation theorem* e le prime *Capital Market Line* per provare a spiegare l'equilibrio dei mercati.

Riguardo al CAPM infine, fondamentale contributo va riconosciuto anche nel chiarissimo lavoro di Mossin che ha permesso di interpretare al meglio tutte le teorizzazioni antecedenti al suo lavoro in maniera semplice ed intuitiva.

Arrivati alle vere e proprie formulazioni del CAPM il passo successivo inevitabile sono stati i tentativi di dimostrazioni empiriche di un modello così logico, razionale e teoricamente perfettamente funzionante. Tentativi di dimostrazioni che hanno portato alla realizzazione che forse il CAPM, per come era stato applicato, non era così perfetto ma presentava errori sistemici e sistematici a detta di molti non di poco conto. Discostamenti sistematici nella previsione dei rendimenti che vengono chiamati anomalie e l'impossibilità di osservare il "vero" portafoglio di mercato hanno spinto la comunità degli economisti a trovare risposte a queste anomalie con modelli alternativi.

L'I-CAPM di Merton, l'APT di Ross, il Fama e French a 3 e 5 fattori, il modello a 4 fattori di Carhart, sono i principali tentativi di realizzare modelli alternativi per riempire i "vuoti" generati dal CAPM. Tra questi modelli alcuni usano teorizzazioni più eleganti per cercare di cambiare le assunzioni di base del CAPM come per esempio l'APT e riformulare una teoria che possa rispondere in modo più efficace al dilemma di un modello o un'equazione che racchiuda l'equilibrio dei mercati. Altri come ad esempio i Fama e French si basano su evidenze empiriche generate da indici di performance, coefficienti di mercato e altre statistiche relative all'andamento nei mercati dei titoli per prevedere al meglio le anomalie ed avvicinare il più possibile le previsioni ai rendimenti futuri sacrificando "l'integrità" del modello e generando imprecisioni che non vengono propriamente motivate e spiegate con l'adeguata ragione.

Di fatto stanno sempre più acquisendo credibilità le spiegazioni comportamentali di tali ultimi modelli. Spiegazioni che fanno della presenza di irrazionalità di fondo nei mercati la loro argomentazione cardine.

In conclusione, il CAPM resta giustamente il modello più utilizzato e studiato ancora oggi data la sua coerenza e grazie alle lucide assunzioni e ipotesi alla base dello stesso. Modello che però ha dimostrato che con il crescere della complessità dei mercati, degli scambi e degli strumenti coinvolti rischia di perdere sempre più precisione iniziando a lasciare il posto, in alcune interpretazioni più specifiche, a modelli multifattoriali costruiti su misura di anomalie rilevate negli anni successivi al CAPM.

L'irrazionalità, le anomalie e la crescente complessità dei mercati rendono e renderanno sempre più difficile racchiudere il concetto di equilibrio in poche semplici formule; per questo motivo siamo ancora lontani dal modello perfetto ma la risposta a questo dilemma potrebbe essere più vicina di quello che pensiamo.

Bibliografia

- Tobin, J., 1958, “Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk,” *Review of Economic Studies*, Vol. 25, No. 2 (Feb., 1958), pp. 65-86.
- Harry Markowitz, “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
- Jack L. Treynor, “market value, time, and risk”, SSRN, Independent, August 8, 1961, Revised 4/29/15 by Craig William French.
- Jack L. Treynor, “toward a theory of market value of risky assets”, SSRN, Independent, Fall 1962, Last revised: 2 Sep 2015.
- Sharpe, W.F., 1964, “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk,” *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3. (Sep., 1964), pp. 425-442.
- Lintner, J., 1965, “The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budget,” *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1. (Feb., 1965), pp. 13-37.
- Mossin, J., 1966, “Equilibrium in a Capital Asset Market,” *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966, pp. 768-783..
- Fama, E. and MacBeth, J., 1973, “Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests,” *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 607-636.
- Fama, E. and French, K., 1992, “The Cross-Section of Expected Stock Returns,” *Journal of Finance*, Vol. XLVII, No 2, pp. 427-467.
- Eugene F. Fama and Kenneth R. French, “The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence” *Journal of Economic Perspectives*—Volume 18, Number 3, Pagine 25–46 .
- Black, F., Jensen, M. e Scholes, M., 1972, *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests*, in M. Jensen (ed.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger Publishers Inc., 1972.
- Black, F., 1972, “Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing,” *Journal of Business*, Vol. 45, No. 3 (Jul., 1972), pp. 444-455.
- Roll, R., 1977, “A Critique of the Asset’s Pricing Theory’s Tests: Part I,” *Journal of Financial Economics*, pp.129-176.
- Craig W. French, “The Treynor Capital Asset Pricing Model”, *journal of investment management*, Vol 1, No 2, (2003), pp.60-72.

- W.F.M. DeBondt and R.H. Thaler, “Does the stock market overreact?”, Journal of Finance, Vol. 40, No. 3, Papers and Proceedings of the Forty-Third Annual Meeting American Finance Association, Dallas, Texas, December 28-30, 1984. (Jul., 1985), pp. 793-805.
- F. Fama and K. French, “Size, value, and momentum in international stock returns”, Journal of Financial Economics, Volume 105, Issue 3, September 2012, Pages 457-472.
- Lakonishok, A. Shleifer and R.W. Vishny, “Contrarian Investment, Extrapolation, and Risk”, Journal of Finance, December 1994, Vol. XLIX, No. 5, pp. 1541-1578.
- Bodie Z., Kane A., Marcus A.J. (2018) “Investments”, Mcgraw-hill, 11th edition..
- Ross, S. (1976) “The arbitrage theory of capital asset pricing”, Journal of Economic Theory, Volume 13, Issue 3, December 1976, Pages 341-360.
- Eugene F. Fama, Kennet R. French, “A five-factor asset pricing model”, journal of Financial Economics, Volume 116, Issue 1, April 2015, Pages 1-22.