

Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Matematica finanziaria

La Duration secondo il modello di Reitano

RELATORE

Prof.ssa Paola Fersini

CANDIDATO

Federica Betunio

Anno accademico 2018-2019

Indice

INTRODUZIONE	3
CAPITOLO 1	5
1.1 BTP	5
1.2 I FATTORI DI RISCHIO	5
1.2.1 <i>Relazione tra prezzo e tassi di interesse</i>	6
1.2.2 <i>Rischio di credito</i>	7
1.2.3 <i>Rischio di tasso</i>	8
1.3 MACAULAY DURATION	10
1.4 INEFFICACIA DELLA DURATION CLASSICA	18
CAPITOLO 2	21
2.1 DURATION SECONDO IL MODELLO DI REITANO PER BTP	21
CAPITOLO 3	27
3.1 <i>SHIFT</i> NEGATIVO PER I PRIMI 5 ANNI	28
3.2 <i>SHIFT</i> ADDITIVO DURANTE GLI ULTIMI 5 ANNI DEL BTP	29
3.3 <i>SHIFT</i> ADDITIVO TRA 4 ANNI E 8 ANNI	30
3.4 <i>SHIFT</i> NELLE CURVE “ <i>RISK FREE</i> ” E <i>SPREAD</i>	31
3.5 ANALISI DI UN PORTAFOGLIO	33
CONCLUSIONI	36
BIBLIOGRAFIA	37

Introduzione

Quando un investitore decide di sottoscrivere o acquistare un titolo obbligazionario è normalmente guidato dalla prospettiva di un profitto, seppure con una propensione al rischio ridotta rispetto ad un investitore che decide di aderire ad un investimento finanziario di diversa natura (ad esempio, acquisto o sottoscrizione di azioni). L'investimento può essere effettuato in un titolo obbligazionario di durata annuale o poliennale, a tasso fisso o variabile. Nel caso di titoli poliennali (BTP – Buoni del Tesoro Poliennali) il rendimento è essenzialmente dato dalle cedole che maturano periodicamente, mentre, nel caso di titoli senza cedola come gli Zero Coupon Bond (ZCB), l'investitore, non ricevendo alcun importo durante la durata del contratto, acquisisce il rendimento dell'investimento nell'ambito dell'importo ricevuto a scadenza (in misura pari al differenziale rispetto al valore di sottoscrizione o acquisto). In entrambi i casi si ipotizza di mantenere il titolo fino a scadenza. Se il titolo viene venduto prima della scadenza (sia BTP che ZCB), l'investitore è esposto alle oscillazioni di prezzo derivanti dai movimenti di mercato. Inoltre, quanto affermato presuppone che il titolo venga acquistato all'emissione; infatti, se il titolo viene comprato dopo l'emissione, non rileva il tasso cedolare bensì il TIR (Tasso Interno di Rendimento) dell'investimento che dipende appunto dal prezzo di acquisto del titolo stesso.

L'andamento del mercato può avere impatti significativi sul rendimento economico dell'investimento. Più in particolare, nel caso di titoli a tasso variabile tali impatti si riflettono sull'importo delle cedole e, per il tramite di queste, sul TIR (Tasso Interno di Rendimento) dell'operazione; per gli strumenti obbligazionari a tasso fisso (BTP e ZCB) il mercato influenza, invece, il prezzo del titolo e, in definitiva, il TIR.

I titoli obbligazionari sono quindi esposti al rischio di tasso, che – come detto – può influenzare il valore della cedola (negli strumenti a tasso variabile) o il prezzo del titolo (nelle obbligazioni a tasso fisso). Ma, come si rappresenterà nel prosieguo, il rendimento di un investimento obbligazionario può subire variazioni anche per effetto di altri fattori di rischio come, ad esempio, il rischio di credito, il rischio di controparte, il rischio di cambio o il rischio di liquidità.

La *Duration* vuole rispondere all'esigenza di monitorare la rischiosità di un titolo. Essa si concentra, quindi, sul rischio di tasso, consentendo di verificare come si muove il valore di un investimento rispetto al tasso di interesse medio dell'investimento.

Ma, come detto, il valore di un investimento obbligazionario può subire variazioni di rendimento anche a causa di altri fattori di rischio che la *Duration* non è in grado di cogliere. Per la determinazione delle variazioni dovute a queste ulteriori componenti di rischio occorre quindi far ricorso a differenti strumenti di misurazione che, consentendo un'analisi multivariata del rischio, permettono di valutare come si muove nel tempo il valore di un investimento analizzando non un unico elemento quanto piuttosto l'insieme dei fattori in grado di influenzare detto valore. Si intende far riferimento al modello di Reitano che, in modo più ampio, consentono di verificare come si muove il valore di un titolo rispetto ad una curva di tassi di interesse¹ che, a sua volta, può essere scomposta in una componente "risk free" e una componente rappresentativa del merito creditizio dell'emittente del titolo².

Di seguito si limiterà l'analisi ai soli strumenti obbligazionari a tasso fisso (BTP), procedendo prima con l'introduzione dei due fattori di rischio oggetto di analisi (il rischio di tasso ed il rischio di credito) e, successivamente, con l'analisi della *Duration* classica (c.d. Macaulay *Duration*) e del modello di

¹ La curva dei tassi a scadenza corrisponde alla relazione che lega i rendimenti dei titoli con scadenze diverse alle rispettive maturità

² Il rischio di credito è definito come la possibilità che una delle parti del contratto non adempia agli obblighi previsti dal contratto stesso, procurando alla controparte una perdita economica. Il rischio di tasso è definito come sensibilità dei titoli in seguito alla variazione dei tassi di interesse

Reitano. Infine, si concluderà con un'esemplificazione pratica dell'applicazione del modello esaminato allo strumento obbligazionario.

Capitolo 1

1.1 BTP

I Buoni del Tesoro Poliennali (BTP) sono obbligazioni a medio-lungo termine. Sono emessi dal Dipartimento del Tesoro e presentano una cedola fissa posticipata pagata ogni 6 mesi. I BTP hanno una durata pari a 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30 e 50 anni e sono emessi mediante asta marginale. Prima di ogni asta, il Tesoro stabilisce e comunica le quantità di BTP emesse e l'incontro tra domanda e offerta pervenuta durante il processo dell'asta determina il prezzo di emissione del titolo. I risparmiatori privati non sono ammessi direttamente alle aste ma solo mediante gli intermediari finanziari autorizzati, dopo aver comunicato a questi ultimi i loro ordini in tempo utile. Inoltre, i BTP possono essere sottoscritti ad un valore nominale minimo di 1000 euro o a multipli di tale cifra.

L'asta è il processo di emissione che avviene nel mercato primario. Tuttavia, è prevista anche la negoziazione dei titoli di debito nei mercati secondari, in un momento successivo alla loro emissione. Infatti, il MOT (Mercato telematico delle Obbligazioni e dei Titoli di Stato) è il mercato secondario gestito da Borsa Italiana S.p.A. dove i risparmiatori, sempre tramite un intermediario, hanno la possibilità di vendere o comprare titoli di Stato o altri tipi di obbligazioni.

PRINCIPALI CARATTERISTICHE DEI BTP

Valuta	Euro.
Scadenze	3, 5, 7, 10, 15 e 30 anni.
Remunerazione	Cedole posticipate, semestrali ed eventuale scarto d'emissione.
Meccanismo d'asta	Asta marginale con determinazione discrezionale del prezzo di aggiudicazione e della quantità emessa.
Periodicità aste	Due volte al mese a seconda delle scadenze.
Data di regolamento	Due giorni lavorativi, sia sul mercato primario che sul mercato secondario.
Convenzioni di mercato	Giorni effettivi/giorni effettivi per il calcolo del rendimento e dei dietimi.
Modalità di rimborso	Alla pari, in unica soluzione a scadenza.

Come anticipato, il rendimento di un BTP deriva sia dal flusso cedolare sia dalla differenza tra il prezzo di sottoscrizioni o di acquisto e il valore nominale rimborsato a scadenza (pari a 100). Le cedole sono prestabilite all'emissione in misura fissa e sono costanti per tutta la vita del titolo.

Uno dei rischi a cui un investitore è esposto è il rischio di credito, ovvero l'eventualità che la Repubblica Italiana risulti insolvente nel rimborso delle cedole o del capitale. Tuttavia, gli investitori che decidono di vendere il titolo prima della scadenza possono incorrere anche nel rischio di mercato. Questo rischio è dato dalla possibilità di fluttuazioni sfavorevoli dei rendimenti che portano ad una riduzione del valore del BTP rispetto al valore di emissione o al valore di acquisto. Il rischio di mercato può dunque determinare una minusvalenza (così come una plusvalenza) per l'investitore. Tale rischio è tanto più elevato quanto maggiore è la vita residua del BTP.

1.2 I fattori di rischio

I titoli di debito sono uno dei tanti strumenti finanziari negoziati sul mercato. Questi hanno una natura marked-to-market da cui deriva una loro marcata sensibilità alla situazione economica congiunturale. Infatti, i titoli obbligazionari presentano modifiche dei propri valori, come il prezzo ed il tasso di rendimento interno, in seguito al mutamento di fattori di rischio rilevanti e alla variazione di altre condizioni economiche.

In questa sezione ci si occupa dell'analisi dei principali fattori di rischio che influenzano l'andamento del corso di un titolo: il rischio di credito ed il rischio di tasso.

1.2.1 Relazione tra prezzo e tassi di interesse

Ogni titolo a tasso fisso presenta una relazione negativa tra Prezzo (P) e tasso di interesse (i). Questa relazione è data dal fatto che il valore attuale di un titolo, tenendo conto dei rispettivi pagamenti temporali costanti dati dalle cedole e dal valore nominale pagato alla scadenza, è ottenuto attualizzando i flussi di cassa per un determinato tasso di interesse. Sapendo che i titoli di Stato come BTP sono obbligazioni poliennali di medio-lungo termine, in prima approssimazione si ipotizza che la curva dei tassi di interesse sia piatta ovvero che i tassi di interesse di ogni anno siano costanti ed uguali tra loro. Questa convenzione si applica per il calcolo del TIR.

Assumendo ciò, sappiamo che il valore attuale di un titolo si ottiene attualizzando le cedole e il valore nominale secondo il tasso di interesse costante pari al TIR.

$$P = \sum_1^n \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{Vn}{(1+i)^n}$$

Da ciò si deduce che la relazione tra Prezzo e tasso di interesse è negativa, in quanto, all'aumentare del valore dei tassi di interesse il Prezzo del titolo si riduce. Questo effetto deriva dalla circostanza che, sotto il profilo matematico, all'aumentare del tasso di interesse la sommatoria attualizzata di cedole e valore nominale risulta essere inferiore rispetto a quella ottenuta applicando un tasso di interesse attualizzante inferiore.

Andiamo a guardare un esempio concreto considerando un BTP a 3 anni a tasso cedolare semestrale del 2% e tasso interno di rendimento semestrale sempre del 2%.

t semestri	Cash flow	Cash flow attualizzati
0	0	-100
1	2	1,96078431
2	2	1,92233756
3	2	1,88464467
4	2	1,84769085
5	2	1,81146162
6	102	90,573081

Sulla base di questi dati, possiamo osservare come il prezzo del titolo risulti pari a 100³. Inoltre, si nota come il prezzo del titolo corrisponda al Valore Nominale, ovvero al valore di rimborso. Il BTP in questione si definisce quindi "alla pari" in quanto, il suo prezzo è pari al valore nominale stante l'equivalenza fra tasso cedolare e tasso di attualizzazione. In questo caso il TIR semestrale coincide con il rendimento cedolare.

Supponendo uno *shift* del tasso interno di rendimento semestrale di +1%, è possibile notare come il prezzo del titolo diminuisca.

³ In questo caso il prezzo è rappresentato come un valore negativo in quanto corrisponde ad un acquisto.

<i>t</i> semestri	Cash flow	Cash flow attualizzati
0	0	-94,582809
1	2	1,94174757
2	2	1,88519182
3	2	1,83028332
4	2	1,7769741
5	2	1,72521757
6	102	85,4233942

In questo caso non solo il prezzo del titolo è inferiore a quello calcolato in precedenza, ma lo stesso risulta inferiore anche al valore nominale. Ciò accade in quanto il tasso cedolare del 2% è inferiore al nuovo tasso interno di rendimento del 3% ed è per questo che il BTP si definisce “sotto la pari”. Nel momento in cui il tasso cedolare risulti superiore al tasso di interesse, il prezzo del titolo sarà superiore al suo valore nominale e in questo caso il BTP si definisce “sopra la pari”. Nel grafico seguente è rappresentata la funzione del valore attuale di un titolo obbligazionario a tasso fisso che evidenzia la relazione inversa tra prezzo e TIR sin qui descritta.



1.2.2 Rischio di credito

Il rischio di credito è definito come la possibilità che una delle parti del contratto non adempia agli obblighi previsti dal contratto stesso, procurando alla controparte una perdita economica. Esso si concretizza, in particolare, con il parziale o integrale mancato pagamento dei flussi di cassa stabiliti, (cedole e/o capitale a scadenza).

L'esposizione al rischio di credito subisce modifiche quando cambiano le condizioni di partenza della capacità di rimborso della controparte. Ciò, si verifica innanzitutto con il cambiamento del merito di credito del debitore: ciò ha come prima conseguenza il cambiamento del prezzo dei titoli emessi da quest'ultimo, indipendentemente dalle oscillazioni dei tassi d'interesse risk free di mercato.

Le obbligazioni sono esposte a questo tipo di rischio, il quale si riversa anche su banche e altri intermediari finanziari oltre che gli acquirenti dei titoli stessi.

Nell'ambito del rischio di credito è possibile individuare due fattori principali:

- **Rischio di deterioramento del merito di credito:** agisce diversamente sul valore della posizione creditizia a seconda che questa sia o meno *marked-to-market*. Qui il valore contabile della posizione non rimane invariato e il deterioramento si riflette con una variazione del prezzo.
- **Rischio di *default*:** con la manifestazione dell'evento *default*, si ha una perdita immediata del valore della posizione. La perdita in questione può essere totale o parziale a seconda delle garanzie collaterali e del tasso di recupero.

Il rischio di credito è una componente rilevante nelle attività di finanziamento e, perciò, influenza le scelte degli investitori obbligazionari. Esso viene definito come un rischio asimmetrico in quanto può comportare solo una variazione in diminuzione (minusvalenza o perdita) e non anche in aumento (plusvalenza o utile) del risultato economico atteso.

Lo spread misura il merito di credito di un emittente. Per una specifica scadenza (ad esempio 10 anni) è calcolato come differenziale di rendimento tra un titolo emesso dall'emittente di cui si vuole valutare il merito di credito ed un emittente risk free.

Ad oggi, in Europa è la Germania ad essere considerata lo stato più solido e quindi i rendimenti dei Bund sono percepiti una buona approssimazione dei tassi risk free.

Per avere un riscontro pratico, è possibile osservare l'andamento del merito di credito del seguente BTP.

SCHEMA PRODOTTO			
CARATTERISTICHE EMITTENTE			
EMITTENTE			
Repubblica Italiana			
CARATTERISTICHE EMISSIONE			
Codice ISIN	Tipo Emissione	Garante	
IT0005323032	Titoli di Stato	-	
Data di Godimento	Data Stacco Prima Cedola	Data di Scadenza	
01/02/2018	01/08/2018	01/02/2028	
Periodicità della Cedola	Ammontare Emesso	Operatori a Sostegno della Liquidità	
Semestrale	4.500.000.000,00	-	
Modalità di Rimborso			
In un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale.			
CARATTERISTICHE DEL PRODOTTO			

Al momento dell'emissione, tutti i titoli generalmente sono quotati alla pari (quindi pagati al valore di 100 euro) e lo spread equivaleva a 140 punti base. Nel giorno 9 Settembre 2019, invece, secondo i dati pubblicati da Borsa Italiana, il differenziale tra il rendimento dei titoli di Stato italiani e quelli tedeschi, calcolato per un titolo a vita residua pari a circa 9 anni, è salito a 155 punti base. E quindi i titoli di Stato italiani sono considerati più rischiosi rispetto a prima.

Nel momento in cui mutano le condizioni in modo da far ritenere l'Italia un debitore più sicuro, il prezzo dei titoli sale ed il rischio di credito si riduce.

In definitiva, essendo trattati market-to-market, i titoli di stato sono estremamente sensibili e ciò si riflette nella variazione del prezzo, che tenderà a scendere: il prezzo tenderà a scendere all'aumentare del livello di rischiosità di un titolo ed a salire al miglioramento delle condizioni di stabilità dello Stato.

1.2.3 Rischio di tasso

Il rischio di tasso è definito come sensibilità dei rendimenti dei titoli in seguito alla variazione dei tassi di interesse. Infatti, questa variazione è la principale fonte di rischio di titoli emessi dallo Stato o da società *Investment Grade* posto che, per tali titoli, il rischio di default è considerato meno probabile. Il rischio di tasso si estrinseca nell'impatto che una variazione del livello dei tassi di interesse determina sul prezzo di un titolo obbligazionario. Gli effetti del rischio di tasso dipendono

sia dalla tipologia dello strumento finanziario sia dal tasso di interesse del titolo stesso. Scendendo più nel dettaglio, è possibile scomporre il rischio di tasso in due componenti:

- **Rischio di prezzo (detto anche rischio di mercato):** esso deriva dalla possibilità che il tasso interno di rendimento (TIR) sia maggiore rispetto a quello iniziale, determinando una diminuzione del prezzo del titolo. Per un'obbligazione a tasso fisso il rischio di prezzo deriva dalle possibili variazioni dei prezzi del titolo. Tale variazione dipende dai possibili movimenti dei tassi di rendimento (TIR) che si generano dopo che l'investimento è stato effettuato.
- **Rischio di reinvestimento:** deriva dall'eventualità che la variazione dei tassi di interesse generi flussi di cassa minori rispetto a quelli previsti dal TIR, ottenendo un rendimento di periodo inferiore rispetto a quello calcolato *ex ante*. Le cedole, quindi, possono essere reinvestite a tassi di interesse inferiori rispetto a quelli *ex ante*.

Il rischio di prezzo e il rischio di reinvestimento hanno effetti opposti nella determinazione del reddito complessivo di un portafoglio di titoli. Questo perché nel caso di uno *shift* positivo dei tassi di interesse, l'aumento dei tassi porta ad una riduzione del prezzo dei titoli (rischio di prezzo) ma allo stesso tempo le cedole sono reinvestite a tassi più alti, aumentando i ricavi complessivi derivanti dal reinvestimento delle cedole intermedie del portafoglio (rischio di reinvestimento).

Una esemplificazione può aiutare a comprendere meglio i concetti evidenziati.

Si supponga di avere lo stesso BTP IT0005323032 dell'esempio precedente di cui viene calcolato il cash-flow sulla base dei seguenti parametri: prezzo di acquisto pari a 100 euro con emissione alla pari; il tasso della cedola semestrale 1%; durata del titolo 10 anni.

<i>data</i>	<i>t</i>	<i>cashflow</i>
01/02/18	0	-100
01/08/18	1	1
01/02/19	2	1
01/08/19	3	1
01/02/20	4	1
01/08/20	5	1
01/02/21	6	1
01/08/21	7	1
01/02/22	8	1
01/08/22	9	1
01/02/23	10	1
01/08/23	11	1
01/02/24	12	1
01/08/24	13	1
01/02/25	14	1
01/08/25	15	1
01/02/26	16	1
01/08/26	17	1
01/02/27	18	1
01/08/27	19	1
01/02/28	20	101

In base al cash flow ottenuto, il tasso interno di rendimento semstrale del titolo è pari al 1%. Infatti, come visto in precedenza, i titoli obbligazionari che sono emessi alla pari presentano tasso cedolare uguale al tasso di rendimento interno.

Il rischio di prezzo concretamente si presenta con una variazione positiva del tasso interno di rendimento. Infatti, se durante la vita del titolo si presuppone uno shift positivo del tasso interno di rendimento che lo porta a diventare 2%, si può rilevare come il prezzo BTP venga valutato sotto la pari (cioè inferiore a 100 euro).

<i>data</i>	<i>t</i>	<i>cashflow</i>
01/02/18	0	-83,648567
01/08/18	1	1
01/02/19	2	1
01/08/19	3	1
01/02/20	4	1
01/08/20	5	1
01/02/21	6	1
01/08/21	7	1
01/02/22	8	1
01/08/22	9	1
01/02/23	10	1
01/08/23	11	1
01/02/24	12	1
01/08/24	13	1
01/02/25	14	1
01/08/25	15	1
01/02/26	16	1
01/08/26	17	1
01/02/27	18	1
01/08/27	19	1
01/02/28	20	101

1.3 Macaulay Duration

Come accennato nella parte introduttiva, l'esposizione di un investimento obbligazionario a diversi fattori di rischio in grado di influenzarne il valore economico ha determinato l'esigenza di avvalersi di appositi strumenti di monitoraggio e controllo. La *Duration* è uno strumento matematico volto appunto a monitorare la rischiosità di un titolo obbligazionario in funzione della variazione dei tassi di interesse, che può incidere sul prezzo e, in definitiva, sul valore dell'investimento finanziario.

Frederick R. Macaulay nel 1938 scrisse "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856*". Nel suo scritto afferma che il tasso di interesse è nella pratica un concetto puramente monetario, operando una distinzione tra tassi d'interesse di breve e di lungo periodo:

- I primi sono governati dalle banche centrali, che di solito intervengono direttamente con operazioni di pronti contro termine o con operazioni di mercato aperto.

- I secondi, invece, sono il risultato delle aspettative del mercato e non sono coordinabili dalle autorità di vigilanza che possono condizionarne solo in parte la dinamica.

Secondo Macaulay, se i tassi di lungo periodo “promessi” fossero “realizzati” e se i tassi di interesse di breve periodo fossero effettivamente in grado di pronosticare quelli di lungo, sarebbe indifferente per un investitore comprare obbligazioni di breve o di lungo periodo. Infatti, se un investitore comprasse un titolo a breve termine quando invece avesse bisogno di uno di lunga durata, dovrebbe continuamente reinvestirlo. Se invece comprasse un titolo di lungo termine avendo invece bisogno di uno di breve durata, allora dovrebbe venderlo quando non ne ha più bisogno. Infatti, la fluttuazione del prezzo risulterebbe quindi indipendente rispetto alla durata del titolo. Tuttavia, nel mercato reale la situazione è ben differente: infatti, all’aumentare della scadenza, un titolo di debito tende ad essere maggiormente esposto a possibili fluttuazioni di prezzo e di rendimento.

Oltre il tasso di interesse, anche scadenza, cedola e la possibilità di rimborso anticipato assumono un ruolo rilevante nella determinazione del prezzo di un titolo obbligazionario.

Un’importante ragione per cui il ritorno economico dei titoli obbligazionari varia in modo significativo è dato dalla circostanza che coloro che investono in titoli di lungo periodo di solito operano con l’intenzione di non mantenerli fino a scadenza. La conseguente vendita anticipata può creare un problema nella determinazione del prezzo di cessione del titolo in quanto bisogna assumere la conoscenza di diversi fattori:

- Pagamento nelle varie scadenze dei flussi predeterminati
- Conoscenza dei futuri tassi di interesse per il resto della durata del titolo

I suddetti fattori incidono sulla valutazione del titolo al momento della vendita anticipata e possono quindi determinare una plusvalenza o minusvalenza rispetto al prezzo di acquisto. Proprio per questa ragione Macaulay introduce la “*Duration*”, e cioè uno strumento matematico volto a calcolare il rischio di tasso di un titolo obbligazionario.

Essa è definita come la media ponderata delle scadenze dei flussi di cassa per capitale ed interessi, considerando come fattore di ponderazione il valore attuale dei flussi di cassa ed utilizzando il tasso interno di rendimento come strumento di attualizzazione.

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t * CFt}{(1 + r)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{CFt}{(1 + r)^t}}$$

Quindi la *Duration* tiene conto non solo della scadenza finale, ma anche delle scadenze di ciascun flusso di cassa.

Minore è la *Duration*, minore sarà anche il rischio di tasso. È quindi minore la possibilità di subire perdite, durante la vita del titolo. Al contrario, maggiore è la *Duration*, maggiore è la possibilità di subire perdite in funzione della maggiore esposizione del rischio di tasso.

Generalmente gli investitori avversi al rischio sono meno propensi ad essere soggetti a questa tipologia di rischio, quindi investiranno in titoli di debito aventi *Duration* inferiore. Quelli meno spaventati dalle fluttuazioni di prezzi, invece, investiranno in strumenti finanziari a *Duration* più elevata, rischiando maggiormente. Inoltre, gli investitori devono anche tener conto della possibilità di rialzo e di ribasso dei tassi interni di rendimento. Infatti, conviene investire in titoli a *Duration* più elevata nel caso in cui si preveda un ribasso dei tassi di interesse. Invece, nel caso di rialzo dei tassi di interesse, conviene investire in titoli a *Duration* breve in modo tale da ridurre le perdite di prezzo.

La *Duration* classica è quindi definita come uno strumento di valutazione del rischio di tasso di uno strumento finanziario. Per comprendere l'importanza di questo strumento e come questa sia in grado di misurare tale rischio, è necessario introdurre il concetto di Modified Duration.

La *Modified Duration* è un ulteriore calcolatore del rischio di tasso il quale misura la sensibilità (o anche elasticità) del valore di un titolo obbligazionario al variare dei tassi di interesse. Questa coincide con la derivata prima della funzione Prezzo, derivata rispetto al tasso di interesse, e coincide con il concetto di volatilità ovvero la sensibilità del prezzo alla variazione dei tassi di interesse. Nel caso in cui si tenga conto dei tassi di interesse istantanei (e quindi calcolando il prezzo nel continuo), la derivata del prezzo rispetto al tasso di interesse rapportata al prezzo del titolo coincide con la *Duration* negativa:

$$\frac{\frac{dV(\delta)}{d\delta}}{V(\delta)} = \frac{-\sum_{s=1}^n s * Rs * e^{-\delta s}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{s=1}^n s * Rs * e^{-\delta s}}{\sum_{s=1}^n Rs * e^{-\delta s}} = -D(\delta)$$

Si ottiene come risultato una *Duration* negativa proprio a rappresentare la relazione negativa tra tassi di interesse e prezzo. Infatti, questi elementi si muovono in maniera simmetrica ma opposta.

Tuttavia, nel passaggio dal continuo al discreto, la volatilità di un titolo non coincide più perfettamente con la sua *Duration* negativa ma bensì con la *Modified Duration*. A spiegazione di ciò, si rinvia alla seguente dimostrazione della derivata di un titolo per i tassi di interesse non più istantanei ma discreti.

$$\frac{\frac{d(Vi)}{di}}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} * \frac{\sum_{s=1}^n s * Rs * (1+i)^{-s}}{V(i)} = -\frac{1}{(1+i)} * \frac{\sum_{s=1}^n s * Rs * (1+i)^{-s}}{\sum_{s=1}^n Rs * (1+i)^{-s}} = -\frac{1}{1+i} * D(i)$$

Qui si può notare come non sussista un'uguaglianza perfetta tra *Duration* e volatilità ma è necessario dividere la *Duration* per il fattore $1+i$ in modo tale da ottenere la volatilità. La *Duration* divisa per il fattore $1+i$ è definita quindi *Modified Duration*.

Si può utilizzare lo sviluppo di Taylor per mostrare come la *Modified Duration* possa essere usata per stimare la variazione del prezzo di un titolo in seguito ad uno *shift* dei tassi di interesse:

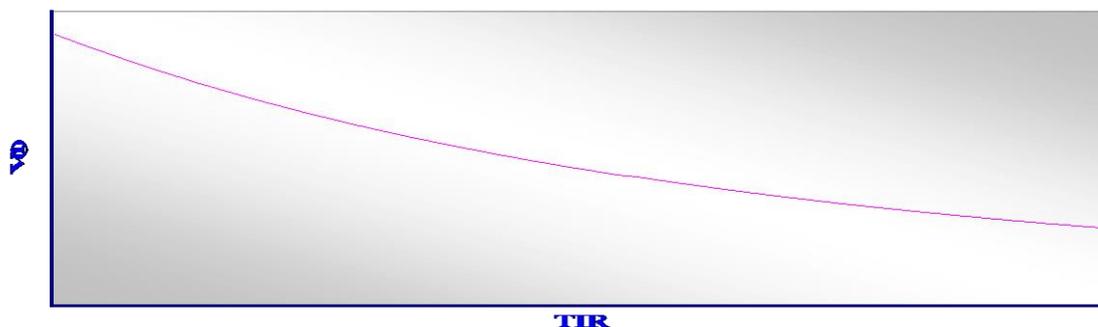
$$V(i + \Delta i) \cong V(i) + \frac{dV(i)}{di} * \Delta i = V(i) - \frac{D(i)}{1+i} * V(i) * \Delta i$$

per cui si ha:

$$\frac{V(i + \Delta i) - V(i)}{V(i)} \cong -\frac{D(i)}{1+i} * \Delta i$$

In generale, la funzione prezzo $V(i)$, come già visto, ha un andamento di questo tipo:

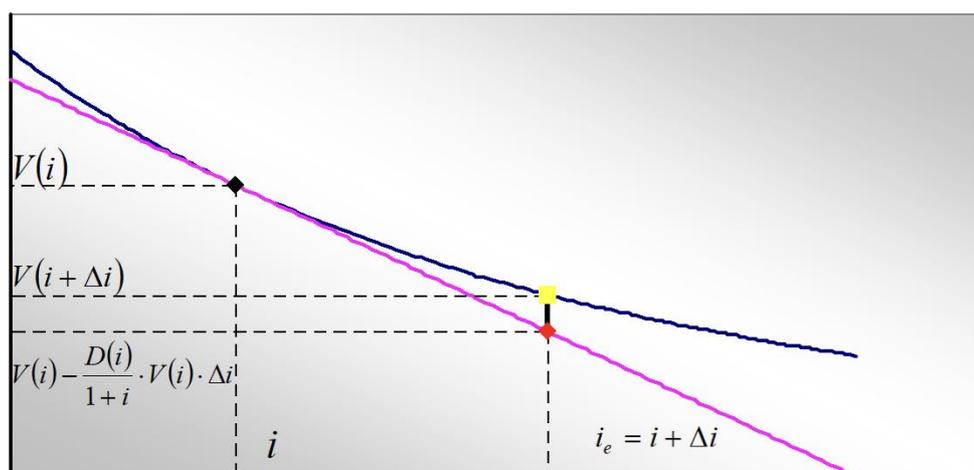
Andamento della funzione $V(i)$



Stimare una variazione del prezzo in seguito ad uno *shift* dei tassi di interesse vuol dire misurare la variazione sulla retta tangente, quindi non calcolare la variazione direttamente sulla funzione. Si ottiene ciò in quanto è stata limitata l'approssimazione al primo termine della serie di Taylor. Tuttavia, tale approssimazione porta ad un errore derivante dall'andamento della curva del valore del titolo al variare del tasso di interesse.

Si può notare ciò nel seguente grafico:

Funzione $V(i)$ e Retta Tangente



A mano a mano che ci si allontana dal punto di tangenza, la qualità dell'approssimazione si deteriora e i valori stimati dalla retta tangente si allontanano dal valore effettivo. Questo è uno dei limiti della *Duration* classica.

Fino ad ora è stata data una rappresentazione matematica della *Duration*. Concretamente, essa è l'epoca ottima di smobilizzo ossia quell'epoca in cui, considerando il risultato dell'attività di reinvestimento delle cedole antecedenti l'epoca *Duration* ed il valore di realizzo, ossia l'attualizzazione dei flussi di cassa successivi a tale epoca, l'investimento consente di ottenere lo stesso TIR calcolato al momento iniziale dell'investimento, indipendentemente dai movimenti dei tassi di rendimento di mercato. Ciò è visibile nel seguente esempio.

Si supponga di avere il medesimo BTP degli esempi precedenti. È noto che il tasso interno di rendimento è del 1% e che la *Duration* si uguale a 18,22 semestri. Si supponga inoltre di reinvestire le cedole prima della *Duration* e di attualizzare quelle successive ad un TIR del 1%. Si otterranno i seguenti valori.

<i>epoca</i> <i>Duration</i>	<i>Valore</i> <i>Reimpiego</i>	<i>Valore realizzo</i>	<i>Valore</i> <i>smobilizzo</i>
18,2260085	17,64438272	102,2396643	119,884047

Pertanto, il valore di smobilizzo del titolo all'epoca della *Duration* è pari a 119,88. Al momento del calcolo del tasso interno di rendimento del nuovo cash flow, si conferma un TIR semestrale circa del 1%.

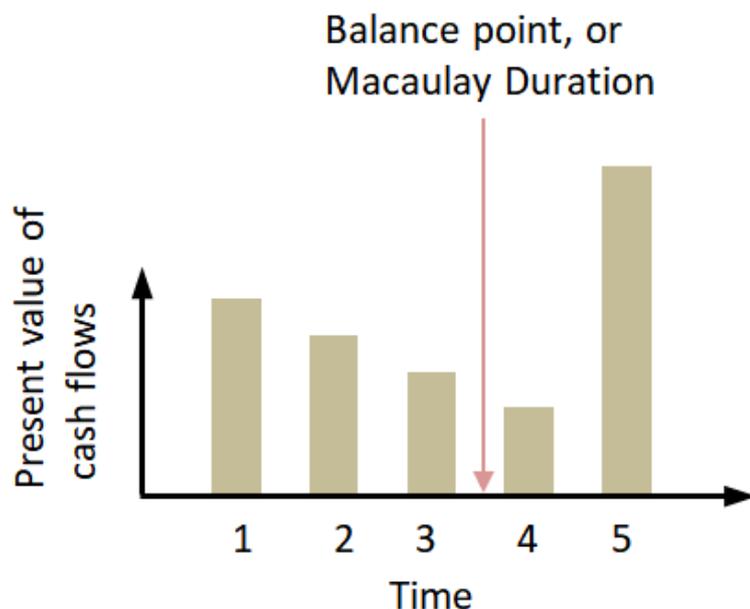
Di seguito il caso in cui si reinvestono le cedole ad un tasso interno di rendimento semestrale dell'2%. Si ottengono i seguenti dati.

<i>epoca</i> <i>Duration</i>	<i>Valore</i> <i>Reimpiego</i>	<i>Valore realizzo</i>	<i>Valore</i> <i>smobilizzo</i>
18,2260085	21,52777321	98,35222679	119,88

Anche con uno shift negativo del TIR, il reimpiego e il realizzo delle cedole porta ad un valore di smobilizzo all'epoca della *Duration* identico pari a 119,88. Inoltre, andando a calcolare il nuovo tasso interno di rendimento, esso risulta sempre pari circa al 1%.

Ciò dimostra che la *Duration* è un baricentro in quanto, indipendentemente dalle variazioni del tasso interno di rendimento di partenza, l'investimento rende effettivamente il TIR di partenza.

A rendere più chiara tale conclusione, è possibile rappresentare la struttura di uno titolo come una tavola di legno dove sono posti i vari pesi. All'estrema sinistra è posizionato il peso dato dal Prezzo di acquisto; all'estrema destra invece si trova, invece, il peso dato dal Valore nominale di rimborso. Centralmente si possono trovare i diversi pesi delle cedole costanti. Il ruolo della *Duration* è quello del baricentro: il punto che determina l'equilibrio tra il flusso di cassa attuale e i flussi futuri.



(fonte: <http://investexcel.net/vba-macaulay-duration/>)

La *Duration* dipende da diversi elementi:

- **Scadenza:** la *Duration* è correlata positivamente alla vita residua di un titolo. Maggiore è la durata residua e maggiore è la *Duration* e quindi il rischio di volatilità.
- **Tasso interno di rendimento:** in questo caso la correlazione è negativa in quanto a maggiori livelli del tasso di interesse, corrisponde un minor rischio di volatilità.
- **Cedole:** anche qui si nota che la *Duration* è inversamente correlata all'ammontare delle cedole; per cui all'aumentare delle cedole diminuisce la *Duration* e viceversa. Ciò vale anche per la numerosità delle cedole.

Di seguito tre esempi pratici per mostrare come varia la *Duration* al variare di ciascuno degli elementi esposti sopra.

Si utilizza sempre lo stesso BTP e viene calcolata la *Duration* mantenendo invariate scadenza, tasso interno di rendimento e cedole.

<i>data</i>	<i>t</i>	<i>cashflow</i>	<i>cash flow attualizzato</i>	<i>Cash flow*t</i>	
01/02/18	0	-100			
01/08/18	1	1	0,99009901	0,99009901	
01/02/19	2	1	0,98029605	1,9605921	
01/08/19	3	1	0,97059015	2,91177044	
01/02/20	4	1	0,96098034	3,84392138	
01/08/20	5	1	0,95146569	4,75732844	Duration
01/02/21	6	1	0,94204524	5,65227141	18,2260085
01/08/21	7	1	0,93271805	6,52902638	
01/02/22	8	1	0,92348322	7,38786578	
01/08/22	9	1	0,91433982	8,22905842	
01/02/23	10	1	0,90528695	9,05286955	
01/08/23	11	1	0,89632372	9,85956089	
01/02/24	12	1	0,88744923	10,6493907	
01/08/24	13	1	0,8786626	11,4226138	
01/02/25	14	1	0,86996297	12,1794816	
01/08/25	15	1	0,86134947	12,9202421	
01/02/26	16	1	0,85282126	13,6451402	
01/08/26	17	1	0,84437749	14,3544173	
01/02/27	18	1	0,83601731	15,0483117	
01/08/27	19	1	0,82773992	15,7270584	
01/02/28	20	101	82,7739915	1655,47983	

La *Duration* di questo BTP è uguale a 18,22 semestri quindi 9,13anni.

Si assuma di variare il tasso interno di rendimento ipotizzando uno *shift* del +1%, quindi il nuovo tasso interno di rendimento è del 2%.

<i>data</i>	<i>t</i>	<i>cashflow</i>	<i>cash flow attualizzato</i>	<i>Cash flow*t</i>
01/02/18	0	-100		
01/08/18	1	1	0,98039216	0,98039216
01/02/19	2	1	0,96116878	1,92233756

01/08/19	3	1	0,94232233	2,826967		
01/02/20	4	1	0,92384543	3,6953817		
01/08/20	5	1	0,90573081	4,52865405	Duration	15,06894434
01/02/21	6	1	0,88797138	5,32782829		
01/08/21	7	1	0,87056018	6,09392125		
01/02/22	8	1	0,85349037	6,82792297		
01/08/22	9	1	0,83675527	7,53079739		
01/02/23	10	1	0,8203483	8,203483		
01/08/23	11	1	0,80426304	8,84689343		
01/02/24	12	1	0,78849318	9,46191811		
01/08/24	13	1	0,77303253	10,0494228		
01/02/25	14	1	0,75787502	10,6102503		
01/08/25	15	1	0,74301473	11,1452209		
01/02/26	16	1	0,72844581	11,655133		
01/08/26	17	1	0,71416256	12,1407636		
01/02/27	18	1	0,70015937	12,6028687		
01/08/27	19	1	0,68643076	13,0421844		
01/02/28	20	101	67,9701046	1359,40209		

In questo caso la nuova *Duration* è di 15,01semestri, quindi 7,53 anni. Per cui, come affermato in precedenza, il rapporto tra tasso interno di rendimento e *Duration* presenta una correlazione negativa dove all'aumentare dei tassi di interesse diminuisce la *Duration* e viceversa.

Di seguito la rappresentazione del caso di uno shift negativo del tasso interno di rendimento che lo porta ad essere 0,5%.

<i>data</i>	<i>t</i>	<i>cashflow</i>	<i>cash flow</i> <i>attualizzato</i>	<i>Cash</i> <i>flow*t</i>		
01/02/18	0	-100				
01/08/18	1	1	0,99502488	0,99502488		
01/02/19	2	1	0,9900745	1,98014901		
01/08/19	3	1	0,98514876	2,95544628		
01/02/20	4	1	0,98024752	3,92099009		
01/08/20	5	1	0,97537067	4,87685334	Duration	20,0634544
01/02/21	6	1	0,97051808	5,82310847		
01/08/21	7	1	0,96568963	6,75982741		
01/02/22	8	1	0,9608852	7,68708163		
01/08/22	9	1	0,95610468	8,60494212		
01/02/23	10	1	0,95134794	9,51347941		
01/08/23	11	1	0,94661487	10,4127635		
01/02/24	12	1	0,94190534	11,3028641		
01/08/24	13	1	0,93721924	12,1838502		
01/02/25	14	1	0,93255646	13,0557905		
01/08/25	15	1	0,92791688	13,9187532		
01/02/26	16	1	0,92330037	14,772806		

01/08/26	17	1	0,91870684	15,6180163
01/02/27	18	1	0,91413616	16,4544509
01/08/27	19	1	0,90958822	17,2821762
01/02/28	20	101	91,4113533	1828,22707

La nuova *Duration* espressa in anni è pari circa 10. È quindi confermata la correlazione negativa tra il tasso interno di rendimento e la *Duration*. Tale correlazione negativa sussiste anche tra cedola e *Duration*. Infatti, in caso di un BTP avente tasso cedolare semestrale del 2%, la *Duration* sarebbe stata inferiore. Quest'ultima sarebbe stata invece maggiore nel caso di un tasso cedolare semestrale inferiore al 1%.

Nel caso di un titolo poliennale che non presenti cedole, ossia nel caso di uno Zero Coupon Bond, la *Duration* equivale alla scadenza dell'obbligazione stessa. Questo è intuibile in quanto lo ZCB non presenta cedole intermedie ma solo due flussi di cassa: acquisto al tempo 0 e vendita al tempo n. Per cui, oltre al nozionale che viene rimborsato alla scadenza non ci sono pesi intermedi volti a modificare il baricentro della struttura del titolo. Di fatti, la *Duration* di uno ZCB coincide sempre con la scadenza di questa tipologia di titolo.

La *Duration* è uno strumento utilizzabile non solo per i singoli titoli ma anche per portafogli. In questo caso il suo valore equivale alla media ponderata delle *Duration* associabili ad ogni strumento finanziario appartenente ad un portafoglio. Qui l'investitore deciderà di annettere determinate obbligazioni nel proprio portafoglio in modo tale da soddisfare i propri obiettivi, stabilendo la sensibilità più adatta per il proprio portafoglio di titoli. Generalmente conviene costruire portafogli con *Duration* lunga nel caso in cui si preveda un ribasso dei tassi di interesse. Nel caso in cui ci si aspetti un rialzo dei tassi di interesse, è conveniente costituire un portafoglio a *Duration* breve in modo tale da poter ridurre le perdite di prezzo. Tuttavia, la *Duration* è uno strumento che può immunizzare unicamente le variazioni di prezzo determinate dal movimento parallelo dei tassi di interesse, ossia da uno shift dei tassi di interesse di pari entità per tutte le scadenze della struttura dei tassi di interesse. Nel caso di una variazione di prezzo determinata da uno shock di altra natura, la *Duration* non sempre riesce a intervenire in maniera efficiente.

Di seguito un esempio pratico relativo la *Duration* di un portafoglio di titoli che presenta le seguenti componenti:

1. 5 BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 10%, di durata 10 anni ed a prezzo unitario di 133,90 euro.
2. 3 BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 8%, di durata 5 anni ed a prezzo unitario di 112,99 euro
3. 2 BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 7,5%, di durata 7 anni ed a prezzo unitario di 113,21 euro
4. 4 ZCB emessi alla pari, di durata 10 anni ed a prezzo unitario di 58,54 euro

Si proceda innanzitutto al calcolo dei singoli flussi dei titoli.

t	Flussi di A	Flussi di B	Flussi di C	Flussi di D
0	-133,90 €	-112,99 €	-113,21 €	-58,54 €
1	10,00 €	8,00 €	7,50 €	0,00 €
2	10,00 €	8,00 €	7,50 €	0,00 €
3	10,00 €	8,00 €	7,50 €	0,00 €
4	10,00 €	8,00 €	7,50 €	0,00 €

5	10,00 €	108,00 €	7,50 €	0,00 €
6	10,00 €		7,50 €	0,00 €
7	10,00 €		107,50 €	0,00 €
8	10,00 €			0,00 €
9	10,00 €			0,00 €
10	110,00 €			100,00 €
Duration	7,21955	4,35704	5,78128	10

Si perviene poi ad un unico flusso dato dall'unione dei quattro differenti cash flow. Infine, è calcolata la *Duration* dal flusso del portafoglio.

Portafoglio	
T	Flussi
0	-1.469,05 €
1	89,00 €
2	89,00 €
3	89,00 €
4	89,00 €
5	389,00 €
6	65,00 €
7	265,00 €
8	50,00 €
9	50,00 €
10	950,00 €
TIR	5,388%
Duration	6,80098

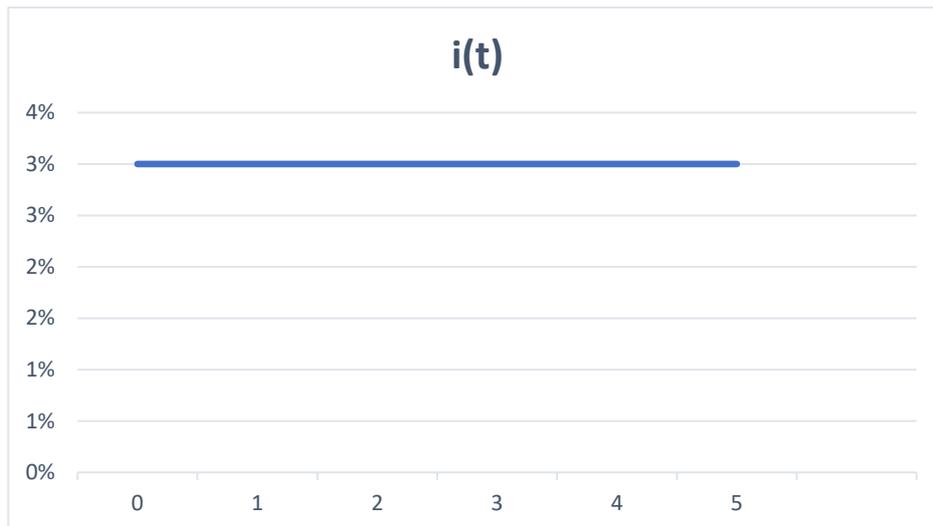
1.4 Inefficacia della Duration Classica

La *Duration* è uno strumento molto noto in ambito finanziario ed ancora oggi estremamente utilizzato. Tuttavia, essa presenta dei problemi che la rendono inefficace in determinati casi.

Innanzitutto, la *Duration* fornisce valori simmetrici: infatti, calcolando la variazione della funzione prezzo al variare dei tassi di interesse, si suppone che l'andamento della curva sia identico sia a destra che a sinistra del punto di tangenza.

Tuttavia, nei mercati reali, due titoli, aventi la stessa *Duration*, possono avere un andamento differente all'aumentare o al diminuire dei tassi di interesse; per cui tale variazione non è detto che sia simmetrica. Quindi con la sola *Duration* tale diversità non si apprezza. È per questo che bisognerebbe tener conto anche del grado di curvatura della funzione, ovvero della convessità del titolo o del portafoglio.

Inoltre, nonostante la *Duration* sia uno strumento ampiamente utilizzato e noto, essa considera unicamente una curva di tassi di interesse piatta in cui si assume che i tassi di interesse associati alle diverse scadenze future siano tutti pari allo stesso valore, ad esempio il 3%, come nel grafico di seguito riportato:



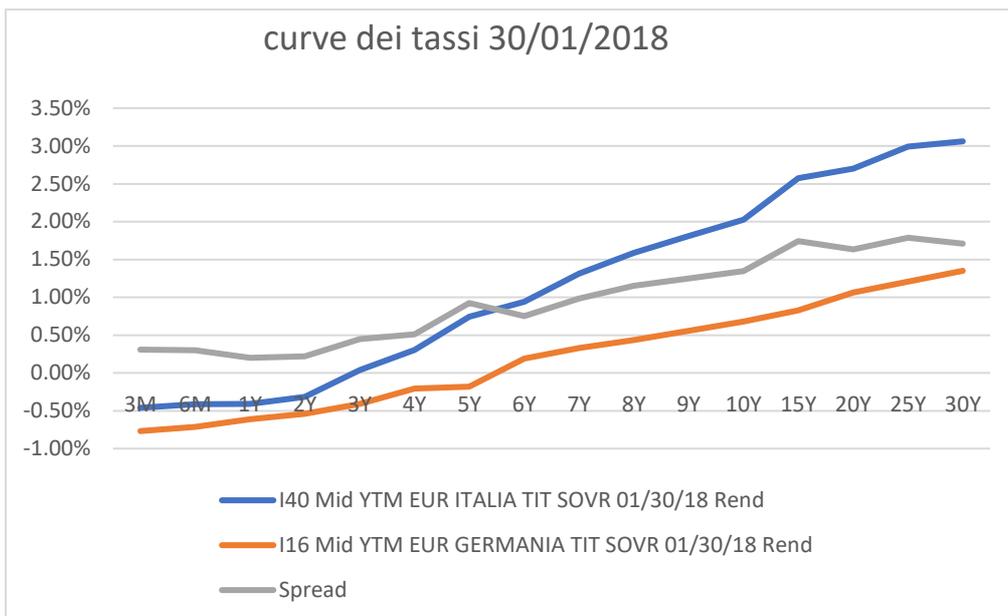
Data la struttura dei tassi di interesse sopra evidenziata, Macaulay ipotizza unicamente uno shift parallelo dei tassi di interesse. Tuttavia, nella realtà è raro che si presenti un caso del genere: infatti, per i BTP la struttura dei tassi non è piatta bensì variabile. Proprio per queste ipotesi, al verificarsi di movimenti, la *Duration* fallisce.

Inoltre, uno dei principali limiti della *Duration* classica è dato dalla circostanza che essa fornisce informazioni sintetiche, consentendo di stimare il delta prezzo derivante dalla combinazione di un solo tasso risk free medio e di un solo spread medio. La *Duration* consente dunque di valutare l'impatto del delta tasso risk free e del delta spread in modo "medio" e quindi, in alcuni casi, non sufficientemente accurato. Quindi, autonomamente considerata, essa non consente di gestire movimenti non paralleli delle curve risk free e delle curve spread.

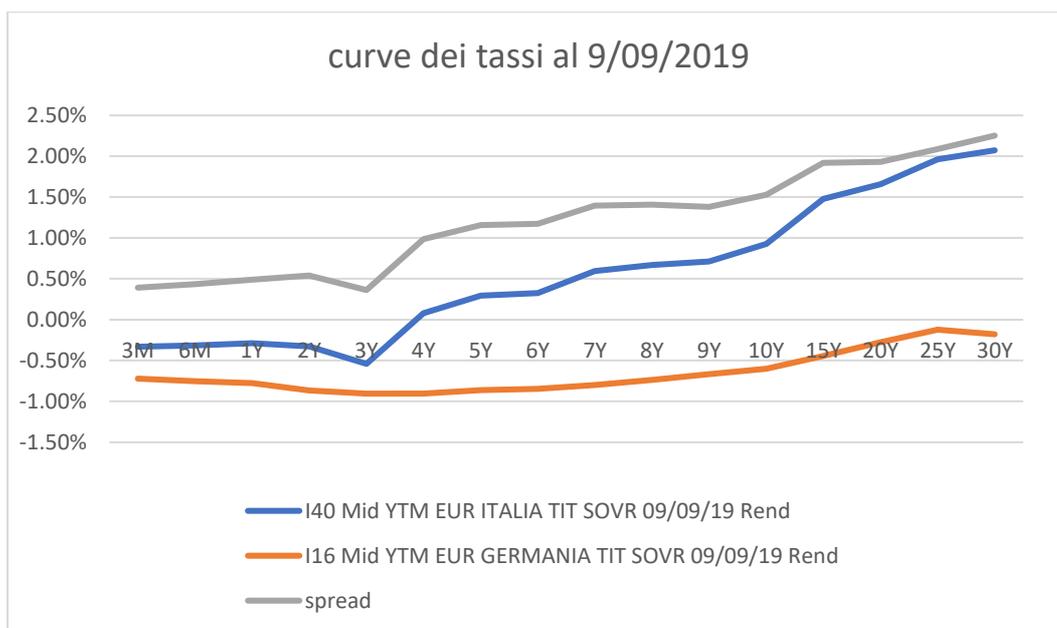
In seguito alla crisi del debito sovrano i portafogli di titoli che impiegano generalmente la sola *Duration* hanno iniziato a presentare segnali di debolezza in uno scenario macroeconomico in cui non è più presente una sola curva di tassi ed un'unica fonte di rischi.

In particolare, nei mercati dei capitali non esiste un solo tasso uguale per tutte le scadenze future ma, considerando una singola area valutaria almeno una curva dei tassi considerabile "risk free" e una molteplicità di curve spread che riflettono il merito creditizio dei diversi emittenti, con valori generalmente variabili ad ogni scadenza futura. A tal riguardo, di seguito si notino la curva dei tassi risk free (rappresentata dal rendimento dei Bund) e quella dello spread (dato dalla differenza tra rendimento dei titoli italiani e quello dei Bund).

Di seguito si riportano le curve dei Bund, BTP e Spread al giorno 30/1/2018.



Invece, le curve degli stessi strumenti al 9/09/2019 risultano.



Come si evince dai grafici su riportati, il mercato dei capitali presenta una molteplicità di curve dei rendimenti che variano nel tempo e generalmente in modo non parallelo. Quindi, in un contesto di mercato estremamente articolato, le analisi basate sulla sola *Duration*, che ragiona considerando un singolo tasso interno di rendimento e solo movimenti paralleli dello stesso, devono essere necessariamente arricchiti con strumenti di analisi più sofisticati.

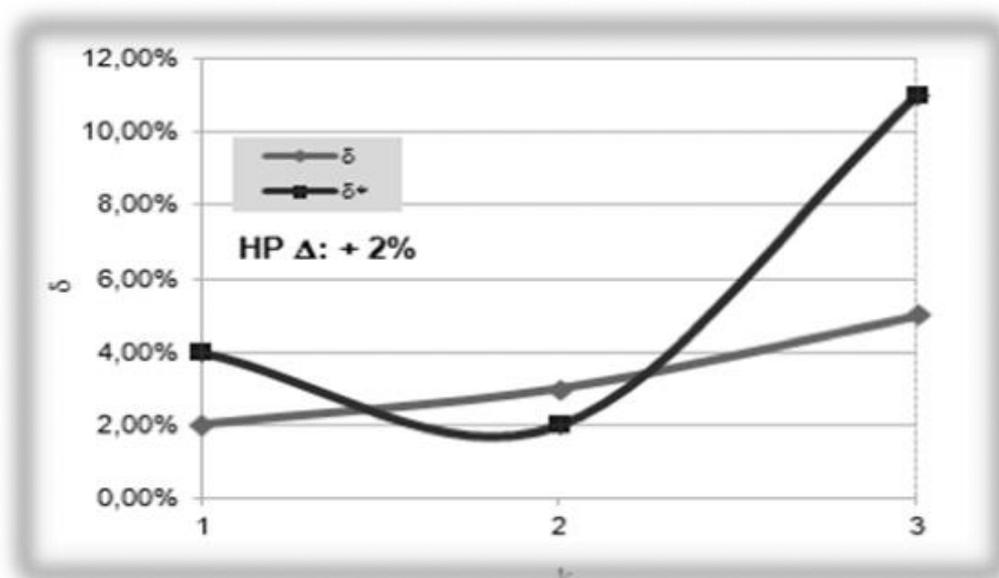
Capitolo 2

Come affermato nel capitolo precedente, la Macaulay *Duration* risulta essere in parte inefficace in quanto fornisce informazioni sintetiche. Infatti, tramite questo strumento si può stimare il delta prezzo derivante da un solo tasso risk free medio e da un solo spread medio. Ciò fa sì che la *Duration* classica non sia in grado di gestire da sola movimenti non paralleli delle curve risk free e delle curve spread. Inoltre, essa si concentra solo sul rischio di tasso. Tuttavia, come si è avuto modo di vedere, un titolo non è solo influenzato dalla variazione del tasso interno di rendimento medio ma anche da altri fattori. In tale contesto il modello di Reitano che prevede un'analisi multivariata, consente, se applicato ai BTP, di valutare come si muove il valore dell'investimento nell'ipotesi di movimenti non paralleli della curva dei rendimenti "risk free" e della curva "spread". Il modello di Reitano non considera un unico fattore di rischio complessivo ma l'insieme dei fattori che influenzano il valore di un'obbligazione. Infatti, il modello consente di verificare in modo più ampio come si muove il valore di un titolo rispetto ad una curva dei tassi di rendimento, che è il risultato di due singole curve: la curva dei tassi risk free e quella degli spread.

Inoltre, i risultati ottenuti con il modello di Reitano sono utili nell'attività di analisi dei risultati ottenuti con tecniche di calcolo anche più complesse come ad esempio il Value at Risk che è metrica molto sofisticata ma in alcuni casi troppo sintetica e quindi non idonea ad individuare in modo immediato le principali fonti di vulnerabilità di uno specifico investimento in titoli obbligazionari.

2.1 Duration secondo il modello di Reitano per BTP

Robert R. Reitano propone un nuovo concetto di *Duration*. La sua analisi prima di tutto prevede uno studio di *Duration* parziale che consente di quantificare il potenziale effetto derivante da un cambiamento non parallelo della curva dei rendimenti. Un esempio di *shift* non parallelo è rappresentato graficamente nel seguente modo:



(fonte: *Partial Durations: The Case of Fixed and Floating Rate Bonds*)

Robert Reitano quindi introduce una *Duration* direzionale. Assume come ipotesi che lo *shift* dei tassi di interesse non sia unico per tutte le scadenze della curva, ma che questi si possano muovere e che lo facciano in maniera differente a seconda della scadenza considerata. Questo modello si applica

unicamente a titoli di debito aventi cedola fissa quali ad esempio i BTP. Reitano usa quindi un modello multivariato. Alla base del suo modello vi è l'analisi di una struttura dei tassi non piatta in cui a differenti scadenze corrispondono differenti tassi. Infatti, la curva dei tassi di interesse è variabile ed è sintetizzabile in un vettore di n-punti. Assumendo ciò, la funzione del Prezzo può quindi essere modellata in termini di queste n variabili esterne.

Dal vettore di n tassi, Reitano elabora quindi il modello della "derivata parziale". In questo modello lo *shift* dei tassi di interesse è rappresentato come: $(\Delta\delta)$. Tale variazione è calcolata secondo il metodo multivariato.

Invece, la funzione del prezzo è definita come:

$$P(\delta + \Delta\delta)$$

Una volta definiti i punti del vettore dei tassi di interesse del mercato, la derivata parziale $D_k(0, \delta_k)$ riferita al k-esimo punto della curva dei tassi di interesse corrisponde a:

$$D_k(0, \delta_k) = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \delta_k}$$

I termini di questa equazione sono dati da: $\partial \delta_k$ che corrisponde all'infinitesima variazione del k-esimo punto nella curva dei tassi di interesse; ∂P invece è il risultato della variazione del prezzo. Nel momento in cui lo *shift* dei tassi di interessi è parallelo, si può calcolare la tradizionale *Duration* la quale è data semplicemente dalla somma delle n *Duration* parziali.

Chiaramente, il calcolo della *Duration* parziale è più efficace nel caso in cui si presenti uno *shift* rotazionale non additivo dei tassi di interesse. Per essere in grado di calcolare l'effetto di uno *shift* rotazionale della curva di tassi a scadenza, è necessario tener conto di due vettori, entrambi definiti sulla stessa base temporale. Tali vettori sono:

- $\delta^{\rightarrow} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n)$
- $Z^{\rightarrow} = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n)$

Il primo vettore rappresenta le informazioni sui tassi di interessi correnti del mercato. Il secondo invece rappresenta lo *shift* direzionale dei tassi di interesse. Questo vettore, di fatto rappresenta i possibili *shift* dei tassi di interesse.

Una volta noti il prezzo di un BTP, $P(0, \delta^{\rightarrow})$, e la sua *Duration* $D(0; \delta^{\rightarrow})$, possiamo calcolare la variazione del valore del titolo obbligazionario a cedola fissa usando l'equazione di Taylor (proprio come si è visto nel capitolo 1):

$$\Delta P \cong P(0; \delta^{\rightarrow}) \cdot (1 - D(0; \delta^{\rightarrow}) \cdot \Delta \delta^{\rightarrow})$$

Usando l'equazione di Taylor e ipotizzando solo una variazione di δ_k , il nuovo prezzo del BTP è dato dalla seguente equazione:

$$P(\Delta \delta_k) \cong P(0; \delta^{\rightarrow}) \cdot (1 - D_k(0; \delta_k) \cdot \Delta \delta_k)$$

Inoltre, la *Modified Duration* (nonché parziale) D_k^M risulta:

$$D_k^M \cong -\frac{P(\Delta \delta_k) - P(0; \delta^{\rightarrow})}{P(0; \delta^{\rightarrow}) \cdot \Delta \delta_k}$$

Dal momento in cui si sta analizzando una curva di tassi di interesse a scadenza i quali non sono il risultato di altre componenti, si noti che sia la *Duration* che la *Modified Duration* possono essere scomposte in una sommatoria:

$$D(0;\delta) \cong z_1 D_1(\delta) + z_2 D_2(\delta) + \dots + z_k D_k(\delta) + \dots + z_n D_n(\delta)$$

Qui $z_k D_k(\delta)$, con $k=1, 2, \dots, n$, rappresenta il contributo del k -esimo cash flow, relativo la direzione del vettore Z^{\rightarrow} , della *Duration*.

Finora, si ha avuto modo di osservare che la *Duration* e la *Modified Duration* possano essere scomposte semplicemente in una sommatoria delle singole *Duration* dei *cash flow*, le quali presentano come pesi lo *shift* direzionale dei tassi di interesse. Tuttavia, in seguito alla crisi del debito sovrano dell'Eurozona, è stato riscontrato che il tasso di interesse non possa essere calcolato in maniera assoluta. Infatti, la curva dei tassi di interesse a scadenza deve essere scomposta in due sotto componenti: componente relativa al "merito di credito" e componente "risk free". Questo accade in quanto non è più possibile affermare che lo Stato finanzia basandosi su una stessa curva di tassi dipendente principalmente dai tassi di interesse risk free. Infatti, oggi il merito di credito non risulta più una componente residuale ma ha acquistato molta rilevanza.

Pertanto, da questa scomposizione risulta che la curva dei tassi di interesse a scadenza sia data dalla curva dei tassi risk free e la curva dello spread. Inoltre, il rischio di credito e di tasso vengono rappresentati attraverso vettori. Di fatto, è possibile scomporre la curva dei tassi di interesse in due vettori:

- v^{\rightarrow} il vettore dei differenti fattori di rischio. Questo vettore ha due dimensioni in quanto si prendono in considerazione il rischio di credito, rappresentato da σ , ed il rischio di tasso, indicato con τ .
- $w^{\rightarrow T}$ il vettore dei differenti pesi attribuiti ai rischi. Assumendo che i pesi per ogni rischio siano rispettivamente 1, il vettore risulterà $w^{\rightarrow T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pertanto, il tasso di interesse δ risulta essere scomposto in:

$$\delta = v^{\rightarrow} \cdot w^{\rightarrow T} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre, il prezzo del titolo obbligazionario a cedola fissa è espresso con la seguente equazione:

$$P(0; \delta) = \sum_{k=1}^n ck * \exp\{-\tau \cdot tk\} \cdot \exp(-\sigma \cdot tk)$$

Di seguito si svolge la derivata parziale del prezzo per ciascun fattore rischio esaminato. Pertanto, si ottengono due differenti misure di sensibilità del prezzo:

$$\frac{\partial P(0;\delta)}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^n ck * \exp\{-\tau \cdot tk\} \cdot \exp(-\sigma \cdot tk)$$

$$\frac{\partial P(0;\delta)}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^n ck * \exp\{-\tau \cdot tk\} \cdot \exp(-\sigma \cdot tk)$$

La seguente scomposizione non introduce ancora una nuova misura della Duration.

A questo punto si può stimare, tramite l'approssimazione in serie di Taylor, la variazione del prezzo attesa in seguito ad una modifica dei fattori di rischio. A differenza della *Duration* classica, si noti che si calcola la variazione del prezzo tenendo conto delle due componenti del vettore tassi di interesse: il rischio di credito ed il rischio tasso. Pertanto, l'equazione risulta:

$$P(0; \delta + \Delta \delta) \cong P(0; \delta) + \frac{\partial P(0; \delta)}{\partial \sigma} \cdot \Delta \sigma + \frac{\partial P(0; \delta)}{\partial \tau} \cdot \Delta \tau$$

Nel momento in cui si considera un vettore di n tassi a scadenza, è possibile decomporre il vettore tassi di interesse del seguente modo:

$$\delta \rightarrow = V \cdot W$$

Dove $\delta \rightarrow$ è il vettore tasso di interessi avente n componenti. V è la matrice [nx2] che rappresenta i due fattori di rischio: rischio di credito e rischio di tasso. W è invece la matrice [2 x1] che rappresenta i pesi dei due fattori di rischio. Le due matrici risulteranno quindi:

$$V = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sigma_1 \\ \tau_2 & \sigma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \tau_k & \sigma_k \\ \vdots & \vdots \\ \tau_n & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$W = (w_1 \ w_2)$$

Di conseguenza, il vettore tasso di interesse è uguale a:

$$\delta \rightarrow = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sigma_1 \\ \tau_2 & \sigma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \tau_k & \sigma_k \\ \vdots & \vdots \\ \tau_n & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot (w_1 \ w_2)$$

Data la seguente scomposizione della curva dei tassi di interesse, la *Duration*, è definibile nel seguente modo:

$$D(0; \delta \rightarrow) = \frac{1}{P(0; \delta \rightarrow)} \cdot \{ \sum_{k=1}^n c_k * \exp\{-\tau \cdot t_k\} + \sum_{k=1}^n c_k * \exp\{-\sigma \cdot t_k\} \}$$

Di conseguenza, concentrandoci sull'interazione tra la scomposizione dei fattori di rischio ed il concetto di *Duration* parziale, è possibile computare le prime derivate parziali rispetto ai fattori τ_k e σ_k . Da ciò, risulta che la k-esima *Duration* parziale sia espressa nel seguente modo:

$$D_k = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \delta k} = \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-tk \cdot \delta k\}}{P}$$

A questo punto è possibile scomporre le *Duration* parziali per ogni fattore di rischio.

$$DD_k(\tau) = \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P}$$

$$DD_k(\sigma) = \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P}$$

Si noti che per ogni t_k è necessario considerare due distinte *Duration*. Tali *Duration* tuttavia sono analiticamente uguali ma dipendono da due differenti fattori di rischio che, come già affermato in precedenza, sono il rischio di credito ed il rischio di tasso.

A questo punto la *Duration* parziale per il k -esimo punto della curva dei tassi equivale alla somma delle due *Duration* parziali:

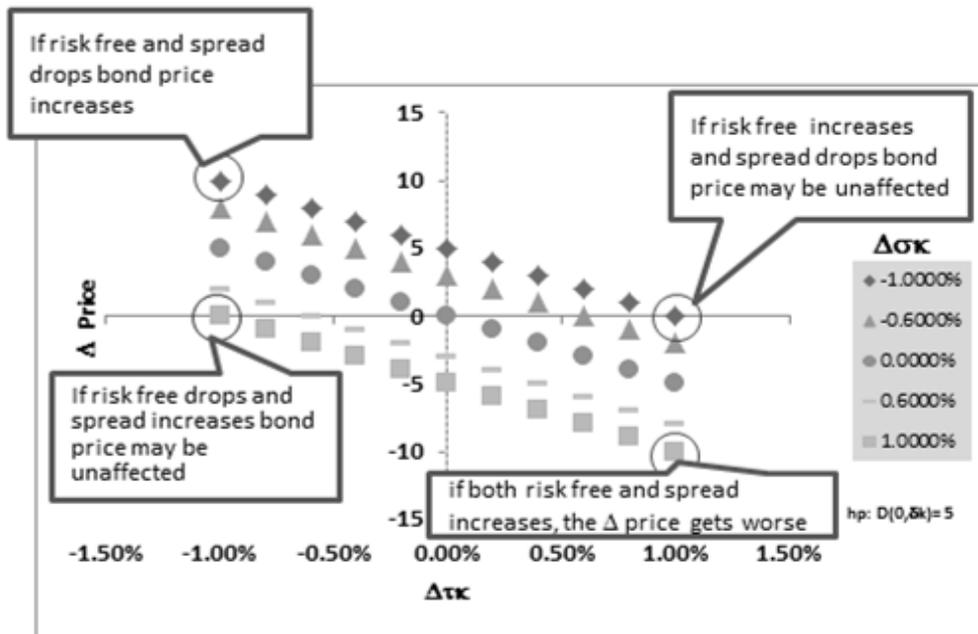
$$DD_k = \omega_1 \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P} + \omega_1 \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P}$$

La *Duration* totale è una combinazione lineare delle due parziali. Questa è utile per stimare l'effetto totale dei due fattori di rischio sul prezzo.

Pertanto, la variazione del prezzo è stimata con la seguente formula:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k$$

Noi abbiamo usato questa scomposizione di *Duration* tenendo conto solo di due fattori ma tale metodo matematico può essere impiegato per k *Duration* parziali rappresentate da una matrice $[k \times n]$. In questa matrice, k rappresenta il numero di periodi corrispondenti a tutti i *cash flow* di un titolo obbligazionario a cedola fissa; n invece rappresenta il numero di tutti i fattori di rischio che influenzano l'andamento del prezzo del titolo stesso. Questa scomposizione è molto utile in quanto permette agli analisti di valutare in modo immediato gli effetti dei movimenti di fattori di rischio che generalmente presentano una correlazione negativa.



(fonte: *Partial Durations: The Case of Fixed and Floating Rate Bonds*)

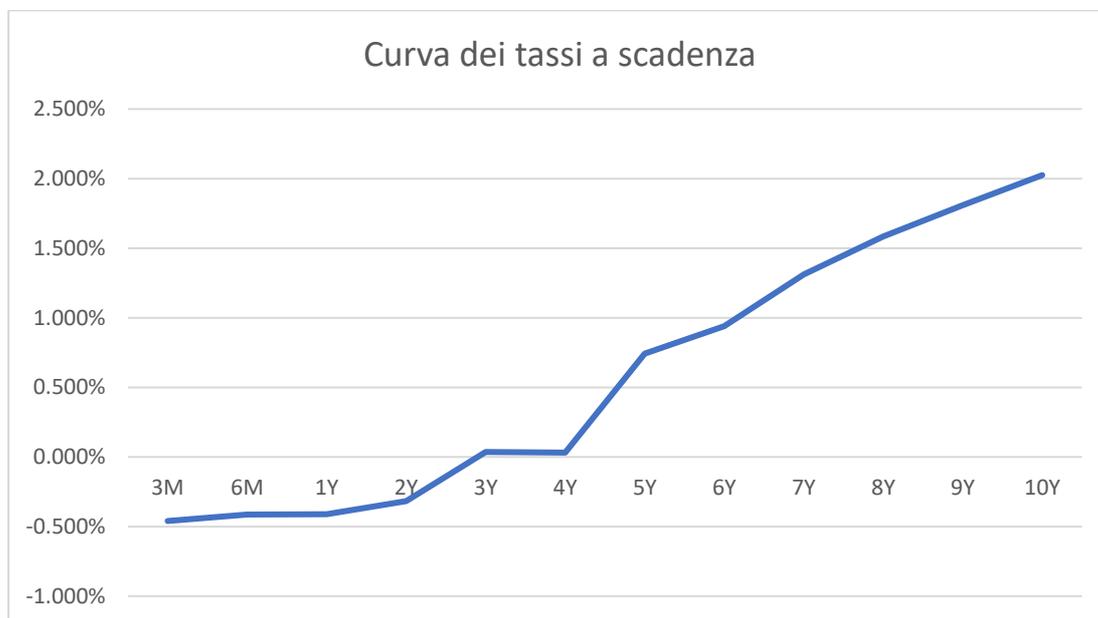
Infatti, si può notare che nel momento in cui i rischi presentano una correlazione positiva e diminuiscono, il prezzo del titolo obbligazionario aumenta. Allo stesso modo se entrambi i rischi aumentano, il prezzo del BTP diminuisce. Tuttavia, risulta difficile la previsione nel momento in cui i due fattori di rischio presentano una correlazione negativa. Infatti, si potrebbe creare una situazione in cui il movimento opposto del rischio di credito e di tasso si compensano non creando alcuna variazione nel prezzo dell'obbligazione.

Capitolo 3

In questo capitolo vengono illustrati dei casi concreti in cui è possibile vedere l'applicazione della *Duration* classica e della *Duration* implementata dal modello di Reitano. I casi ipotizzati sono tutti riferiti al medesimo BTP ad eccezione dell'ultimo che prende in considerazione un portafoglio titoli:

SCHEMA PRODOTTO			Borsa Italiana
CARATTERISTICHE EMITTENTE			
EMITTENTE			
Repubblica Italiana			
CARATTERISTICHE EMISSIONE			
Codice ISIN	Tipo Emissione	Garante	
IT0005323032	Titoli di Stato	-	
Data di Godimento	Data Stacco Prima Cedola	Data di Scadenza	
01/02/2018	01/08/2018	01/02/2028	
Periodicità della Cedola	Ammontare Emesso	Operatori a Sostegno della Liquidità	
Semestrale	4.500.000.000,00	-	
Modalità di Rimborso			
In un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale.			
CARATTERISTICHE DEL PRODOTTO			

Nei mercati dei capitali, a data di emissione del titolo, ossia il giorno 30/01/2018, la curva dei tassi a scadenza non è costante, bensì variabile. Essa è rappresentata dal seguente grafico.



Nei capitoli precedenti è stata calcolata la *Duration* classica di questa obbligazione. Tuttavia, si era ipotizzato di attualizzare le cedole ad un tasso costante, ovvero il TIR.

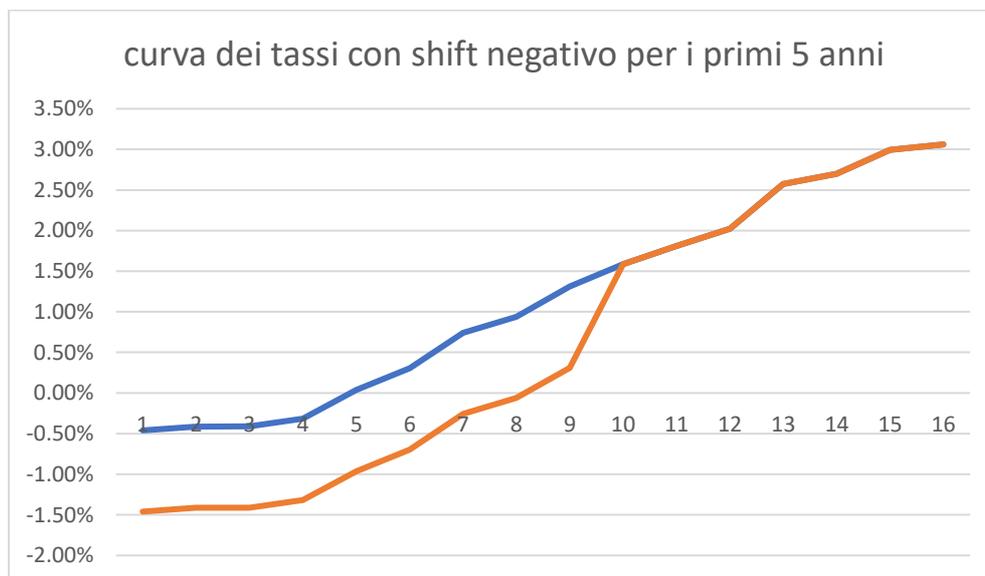
Diversamente, la *Duration* classica calcolata secondo la curva dei tassi di interesse a scadenza risulta come di seguito:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF_t}{(1+r(0,t))^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r(0,t))^t}} = 9,13 \text{ anni}$$

Nel prosieguo, vengono analizzati casi volti a dimostrare la maggior capacità di stimare le possibili variazioni di un titolo che si ha con il modello di Reitano rispetto all'approccio basato sulla *Duration* classica introdotta da Macaulay.

3.1 Shift negativo per i primi 5 anni

In questo primo caso si vuole riportare un esempio di *shift* negativo della curva dei tassi di interesse per i primi 5 anni del BTP analizzato. La nuova curva dei tassi presenta il seguente andamento:



La variazione del Prezzo stimata dalla *Duration* Classica corrisponde a:

$$\Delta P \cong P(0; \delta^{\rightarrow}) \cdot (1 - D(0; \delta^{\rightarrow})) \cdot \Delta \delta^{\rightarrow} = 8,94$$

Pertanto, si prevede che lo *shift* negativo dei tassi di interesse porti ad un rialzo del prezzo pari a 8,94 euro, dando un prezzo finale di 108,94.

Si procede, quindi, al confronto con la *Duration* di Reitano. Tale *Duration* corrisponde a

$$DD_k = \omega_1 \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P} + \omega_1 \frac{tk \cdot ck \cdot \exp\{-\tau tk\} \cdot \exp\{-\sigma tk\}}{P} = 9,08$$

Dalle valutazioni effettuate si vede come applicando il modello di Reitano si ottiene una *Duration* complessiva sostanzialmente simile a quella di Macaulay.

La variazione di prezzo stimata è pari a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = 0,22$$

Pertanto, si può notare come i due strumenti forniscano valori molto distanti.

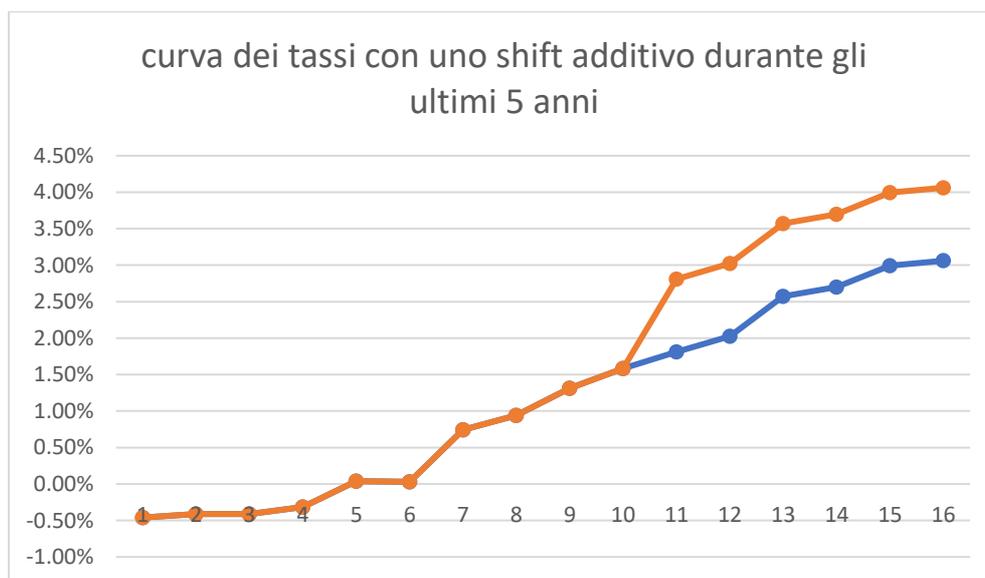
Il prezzo effettivo riscontrato dalla variazione parziale della curva dei tassi a scadenza è pari a 100,89. Di conseguenza, è possibile notare come, in questo caso, la *Duration* classica sia limitante e poco attendibile. Infatti, come si è avuto già modo di osservare, essa è adatta ad analizzare la volatilità del prezzo di un titolo nel caso di uno *shift* parallelo della curva dei tassi di interesse. Tuttavia, essa fallisce nel caso di uno *shift* rotazionale e non additivo.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift	Prezzo stimato con Macaulay
100	100,89	108,94
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Macaulay	errore stima prezzo Reitano
100,22	8,05	-0,67

3.2 Shift additivo durante gli ultimi 5 anni del BTP

In questo secondo esempio si ipotizza che la curva dei tassi a scadenza presenti uno *shift* additivo pari all'1% solo per i tassi relativi alla seconda metà della scadenza del titolo.

In questo caso la curva dei tassi a scadenza presenta il seguente andamento:



Pertanto, la variazione del prezzo del titolo stimata dalla *Duration* classica equivale a:

$$\Delta P \cong P(0; \delta \rightarrow) \cdot (1 - D(0; \delta \rightarrow)) \cdot \Delta \delta \rightarrow = -8,17$$

La stima secondo il modello di Reitano corrisponde a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = -8,87$$

Si può notare che i due strumenti propongono due risultati molto vicini tra di loro. Essi, inoltre, stimano correttamente la variazione del prezzo, il quale risulta essere pari a 92,41 in seguito allo *shift* additivo della curva dei tassi.

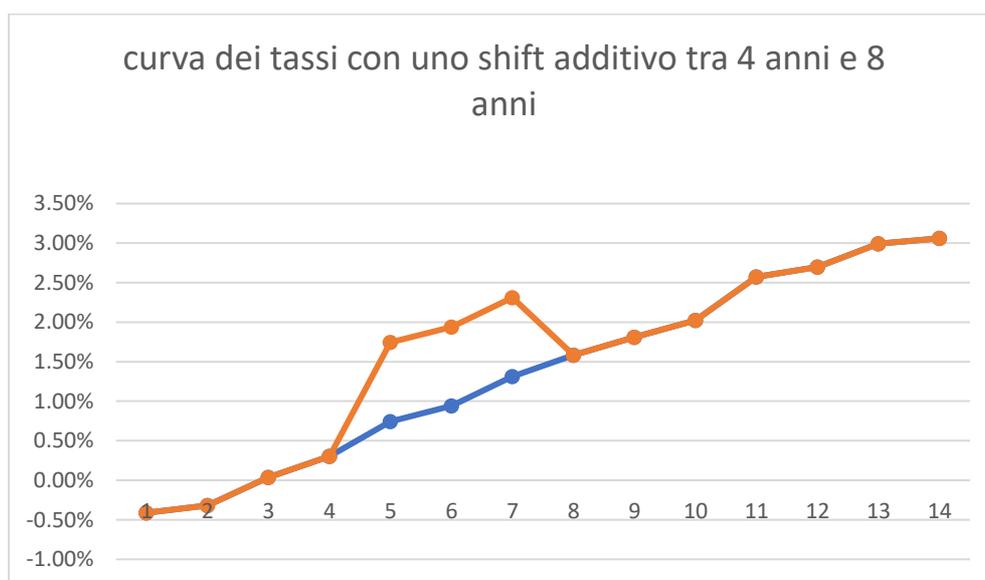
In questo caso la *Duration* classica svolge una stima veritiera in quanto il *cash flow* che influenza maggiormente il valore delle due *Duration* è il Valore Nominale, il quale è registrato come ultimo *cash flow* del BTP essendone il valore di rimborso.

Dunque, riscontrando uno *shift* additivo della curva dei tassi di interesse per gli ultimi *cash flow* della vita del BTP, la *Duration* classica presenterà un'analisi attendibile della variazione del prezzo nonostante si registri uno *shift* rotazionale della curva dei tassi di interesse.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift	Prezzo stimato con Macaulay
100	92,41	90,83
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Macaulay	errore stima prezzo Reitano
91,13	-1,58	-1,28

3.3 Shift additivo tra 4 anni e 8 anni

In questo caso si riscontra una curva dei tassi a scadenza che presente il seguente andamento:



La stima del prezzo secondo la *Duration* classica equivale a:

$$\Delta P \cong P(0; \delta \rightarrow) \cdot (1 - D(0; \delta \rightarrow)) \cdot \Delta \delta \rightarrow = -8,93$$

La variazione di prezzo stimata dal modello di Reitano risulta:

$$P(0; \delta \rightarrow + \Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = -0,46$$

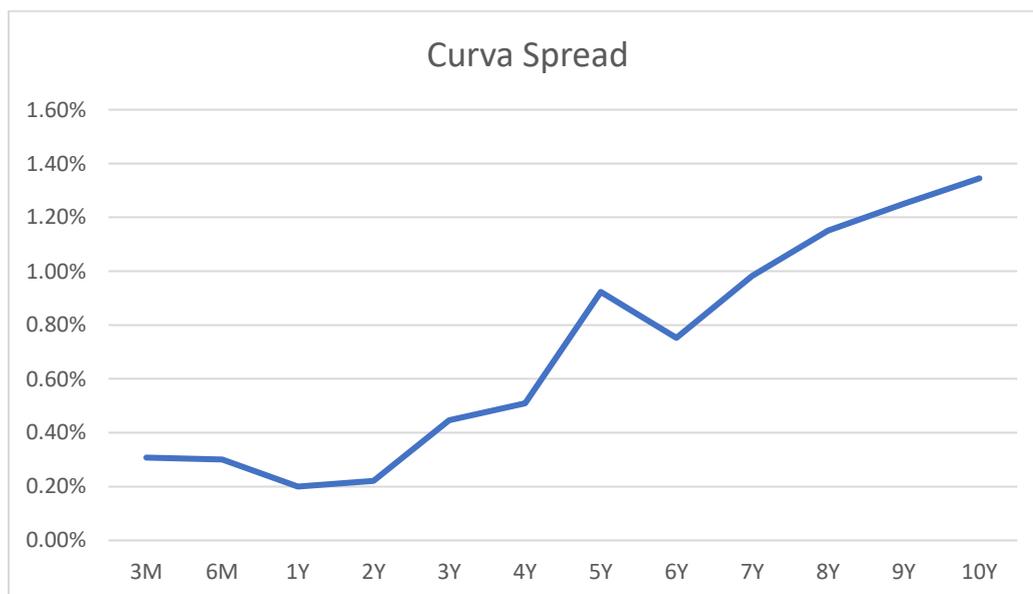
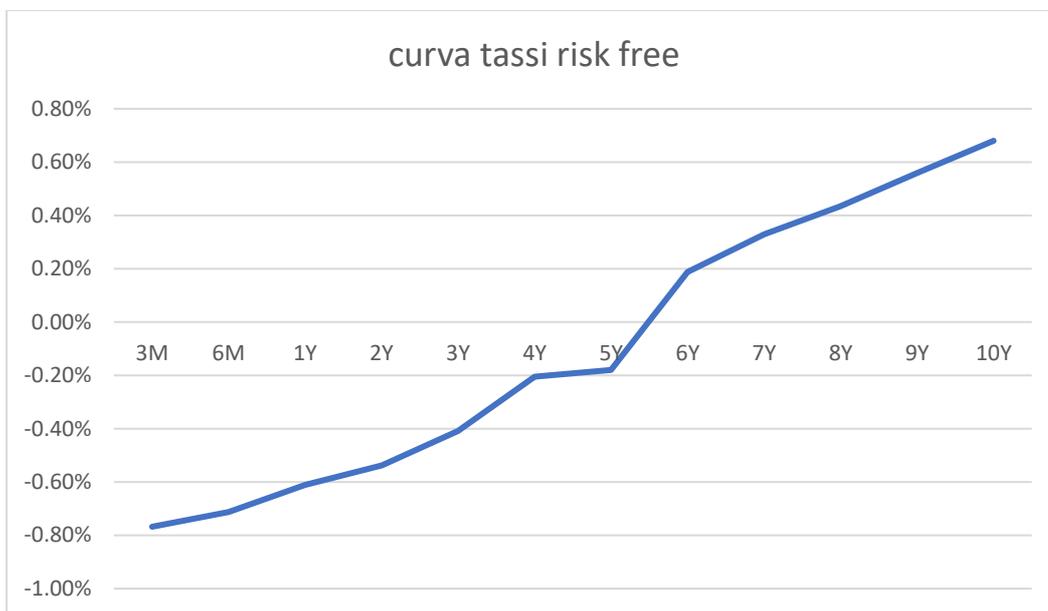
Si può nuovamente notare la forte differenza delle stime dei due strumenti finanziari. Anche in questo caso, la *Duration* classica risulta essere un metodo inefficace per determinare la variazione di prezzo. Di fatto, essa è idonea principalmente nel momento in cui si analizza uno strumento che presenta una variazione parallela della curva dei tassi di interesse oppure nel caso di uno *shift* non parallelo dove si colloca la scadenza del titolo.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift	Prezzo stimato con Macaulay
100	100,67	91,07
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Macaulay	errore stima prezzo Reitano
99,54	-9,6	-1,13

3.4 Shift nelle curve “risk free” e spread

Come illustrato nel capitolo precedente, la curva dei tassi di interesse a scadenza è scomponibile in componenti rappresentate da due vettori: il vettore “*risk free*” ed il vettore *spread*.

Data la curva dei tassi a scadenza analizzata in questo capitolo, i due vettori tasso presentano i seguenti andamenti:



In questa sezione vengono riportati quattro casi:

1. caso di uno *shift* additivo della curva *risk free*;

2. caso di uno *shift* negativo della curva *spread*
3. caso di uno *shift* negativo della curva *risk free*
4. caso di uno *shift* positivo della curva *spread*

Ciò permette di comprendere come varia il prezzo a seconda di ogni componente della curva dei rendimenti associata ad uno specifico emittente, quale ad esempio la Repubblica Italiana.

Nel caso in cui si aspetti uno *shift* additivo di tutta la curva dei tassi *risk free*, il c.d. modello di Reitano, stima una variazione del prezzo pari a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = -9,14$$

Il prezzo effettivamente riscontrato sul mercato riporta una riduzione pari a 8,52, scendendo a 92,14.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	92,14
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Reitano
90,86	-1,28

Diversamente, nel caso di uno *shift* negativo della curva dello *spread*, la variazione di prezzo che si riscontra tramite la *Duration* di Reitano equivale a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = 9,14$$

Il prezzo effettivamente riscontrato sul mercato equivale a 110,12.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	110,12
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Reitano
109,14	-0,98

Inoltre, nel caso di uno *shift* negativo della curva *risk free*, la variazione di prezzo che si riscontra tramite la *Duration* di Reitano equivale a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = 9,14$$

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	110,12
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Reitano
109,14	-0,98

Il prezzo effettivamente riscontrato sul mercato equivale a 110,12.

Diversamente, nel caso di uno *shift* positivo della curva dello *spread*, la variazione di prezzo che si riscontra tramite la *Duration* di Reitano equivale a:

$$P(0; \delta \rightarrow +\Delta \delta k \rightarrow) \cong P(0; \delta \rightarrow) + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \sigma k} \cdot \Delta \sigma k + \frac{\partial P(0; \delta \rightarrow)}{\partial \tau k} \cdot \Delta \tau k = -9,14$$

Il prezzo effettivamente riscontrato sul mercato riporta una riduzione pari a 8,52, scendendo a 92,14.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	92,14
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Reitano
90,86	-1,28

Si può, dunque, notare che gli *shift* delle curve, uguali ma di segno invertito, forniscono due risultati simmetrici di segno opposto.

Inoltre, la stima della variazione di prezzo secondo la *Duration* classica in seguito allo shift additivo e negativo di tutta la curva dei tassi di interesse permette di fornire un'abbastanza puntuale stima della variazione del prezzo. Ciò si verifica in quanto la variazione della curva dei tassi a scadenza si estende su tutta la curva invece di concentrarsi unicamente in una parte.

Infatti, in caso di uno shift positivo della curva dei tassi si ottengono i seguenti risultati:

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	92,14
Prezzo stimato con Macaulay	errore stima prezzo macaulay
91,84	-0,3

Invece, in caso di uno shift negativo della curva dei tassi, si ottengono i seguenti risultati:

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift
100	110,12
Prezzo stimato con Macaulay	errore stima prezzo Macaulay
109,86	-0,255

3.5 Analisi di un portafoglio

In questo ultimo caso viene analizzata la variazione che subisce il prezzo di un Portafoglio di titoli in seguito alla variazione dei tassi di interesse.

Si ipotizzi di attualizzare i flussi del portafoglio per la medesima curva dei tassi rappresentata dal seguente grafico:



Inoltre, si ipotizzi di studiare il seguente portafoglio dato da:

- 5 BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 10%, di durata 10 anni ed a prezzo unitario di 133,90 euro.
- BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 8%, di durata 5 anni ed a prezzo unitario di 112,99 euro
- BTP emessi alla pari, a tasso cedolare annuo del 7,5%, di durata 7 anni ed a prezzo unitario di 113,21 euro
- 4 ZCB emessi alla pari, di durata 10 anni ed a prezzo unitario di 58,54 euro

Il prezzo del Portafoglio calcolato secondo la curva dei tassi di interesse a scadenza equivale a 1898,05 euro.

Nel momento in cui si ipotizza uno *shift* additivo in tutta la curva dei tassi, la *Duration* classica stima una variazione negativa di prezzo pari a 163,46 euro. Lo strumento elaborato da Reitano prevede, invece, che il prezzo del portafoglio diminuisca di 133,33 euro.

La variazione effettivamente riscontrata del prezzo del portafoglio equivale ad una riduzione negativa pari a 125 euro.

Pertanto, viene nuovamente dimostrata l'inefficienza della *Duration* classica nell'analisi della variazione del prezzo in seguito a *shift* non paralleli della curva dei tassi a scadenza. Inoltre, tale inefficienza risulta ancora più accentuata nella stima delle modifiche del prezzo di un portafoglio. Invece, il modello di *Duration* implementata da Reitano permette di fornire una stima più precisa proprio perché impiega un modello multivariato in cui analizza la variazione rotazionale e non additiva della curva dei tassi di interesse a scadenza.

Prezzo originario	Prezzo effettivo post shift	Prezzo stimato con Macaulay
1898,05	1773,05	1734,59
Prezzo stimato con Reitano	errore stima prezzo Macaulay	errore stima prezzo Reitano
1764,72	-38,46	-8,33

Conclusioni

Come si è evidenziato nell'ambito del presente lavoro, il risultato economico di un investimento obbligazionario è influenzato da una molteplicità di fattori di rischio.

Ci si è concentrati, in particolare, sul rischio tasso di un titolo obbligazionario a tasso fisso che può determinare variazioni del prezzo del titolo e del risultato del reinvestimento delle cedole previste prima della scadenza, incidendo sul Tasso Interno di Rendimento (TIR) dell'investimento.

Gli investitori finanziari hanno dunque l'esigenza di monitorare l'andamento di tali fattori di rischio in un'ottica di ottimizzazione della propria *asset allocation*, di predisposizione di adeguati strumenti di mitigazione del rischio e, in definitiva, di contenimento della complessiva esposizione al rischio.

In tal ambito, la *Duration* classica si pone come strumento matematico volto, appunto, al monitoraggio del rischio di tasso e dei suoi effetti sul risultato economico derivante da un investimento obbligazionario. Tuttavia, tale metrica produce risultati sufficientemente attendibili nel caso in cui ci si trovi di fronte ad uno *shift* parallelo della curva dei tassi di interesse a scadenza. Allo stesso modo, è stato dimostrato come la *Duration* classica sia uno strumento efficace di monitorare il rischio di tasso nei casi di *shift* rotazionali della parte della curva su cui si colloca la scadenza finale del titolo. Di contro, tale strumento ha evidenziato importanti limiti ai fini di un attendibile controllo del rischio in esame nei casi di *shift* rotazionali concernenti le parti che non comprendono la scadenza del titolo. Analoghi limiti sono emersi con riferimento al monitoraggio dell'andamento di un portafoglio di titoli, caratterizzato dalla presenza di molteplici titoli e condizionato dalla possibile attivazione di diverse fonti di rischio, con la conseguente esigenza di distinguere, con riferimento ad una singola area valutaria, una curva dei tassi "*risk free*" rispetto a curve *spread* esplicative del merito creditizio dei diversi emittenti e con valori generalmente variabili ad ogni scadenza futura.

La presenza dei limiti descritti nella *Duration* classica proposta da Macaulay ha reso necessario l'implementazione di un modello in grado di colmare le lacune evidenziate e di pervenire a risultati maggiormente attendibili nelle molteplici e complesse fattispecie richiamate: ci si riferisce in particolare al c.d. modello di Reitano il quale, in sintesi, crea un "nuovo Framework" che, basandosi su un'analisi multivariata, fornisce derivate parziali per i diversi fattori di rischio sottostanti l'investimento, consentendo un più puntuale controllo dei movimenti del prezzo di un titolo attesi a fronte di molteplici variazioni dei diversi fattori rischio idonei ad impattare le curve dei rendimenti che possono influenzare il valore di un investimento in un singolo strumento e/o in un portafoglio composto da molteplici investimenti in titoli obbligazionari.

Bibliografia

Assofondi pensione, *Rischio di credito*, 2010

Borsa Italiana, *MOT STATISTICS*, Gennaio 2012 in https://www.borsaitaliana.it/borsaitaliana/statistiche/mercati/motstat/2012/motstat201201_pdf.htm

Coleman T. S., *A Guide to Duration, DV01, and Yield Curve Risk Transformation*, 2011

Crenca C., Fersini P., Melisi, Olivieri G., Pelle M., *Matematica Finanziaria*, 2017, Capitolo 6

Dipartimento del Tesoro, *Buoni Poliennali del Tesoro(BTP)*, in http://www.dt.tesoro.it/export/sites/sitodt/modules/documenti_it/debito_publico/titoli_di_stato/BTP.pdf

Foschini G., Francetti F., Buttarazzi S., Fersini P., *Partial Durations: The Case of Fixed and Floating Rate Bonds*, in *Global Review of Accounting and Finance*, Vol. 6. No. 2., 2015

FTA Online News, *I BTP: cosa sono, quanto rendono e quanto sono rischiosi*, 2018 in <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/btp.htm>

Heese, J. Carron, *Il rischio di tasso d'interesse: cos'è e come gestirlo*, 2018, in Morgan Stanley Distribution, Inc

Il Sole 24 Ore Mercati, *BTP*, in https://mercati.ilssole24ore.com/obbligazioni/titoli-di-stato/btp/1?refresh_ce=1

Macaulay F. R., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856*, in *National Bureau of Economic Research*, 1938

Matarazzo B., *Duration e immunizzazione finanziaria*, in Lumsa website, 2016

MEF Dipartimento del Tesoro, *Principali Tassi di interesse*, in http://www.dt.tesoro.it/it/debito_publico/dati_statistici/principali_tassi_di_interesse/

Saunders A., Millon Cornett M., Anolli M., Alemanni B., *Economia degli intermediari finanziari*, 2015, Capitoli 6, 11, 17

World Government Bond, *Italy Government Bonds- Yields Curve*, in <http://www.worldgovernmentbonds.com/country/italy/>