LUISS

Dipartimento
di Impresa e Management

Cattedra Matematica finanziaria

Valutazione di un piano di investimento con il metodo di Montecarlo

Prof. Gennaro Olivieri

RELATORE

Matr.205161

CANDIDATO

Anno Accademico 2018/2019

Indice

A mia mamma.

Introduzione

L’evoluzione dell’economia, dall’antichità ai giorni nostri, ha ampliato il campo d’azione della matematica finanziaria, aiutata dalle continue scoperte che i matematici hanno raggiunto nel corso dei secoli. L’economia, punto fondamentale della vita sociale di un paese, ha avuto dalla matematica un valido aiuto per la soluzione di problemi.

La matematica finanziaria si occupa sostanzialmente di calcolare valori finanziari, cioè importi riferiti a somme di denaro disponibili in tempi diversi, ad esempio i valori degli interessi, dello sconto, del montante, del valore attuale ecc.
Con analisi o valutazioni finanziarie ci si riferisce ad una specifica area della finanza, nel caso di specie finanza aziendale, che tratta le decisioni di natura finanziaria che le società devono prendere, gli strumenti e le relative analisi e tecniche valutative usate per prendere tali decisioni. Deve quindi individuare il miglior equilibrio tra le fonti disponibili in azienda e gli impieghi su cui investire, al fine di raggiungere una perfetta gestione, sia efficiente (analisi costi/benefici) che efficace (analisi input/output).

La statistica aziendale si può definire invece come la disciplina che fornisce l'insieme degli strumenti di stampo statistico necessari per una corretta ed approfondita analisi e gestione economica del sistema-azienda.
Essa si serve dei dati reperibili mediante fonti contabili per elaborare previsioni sugli sviluppi futuri del sistema-azienda di riferimento, si delinea quindi come una più completa possibilità di analisi (di carattere ovviamente statistico) del risultato della disaggregazione aziendale nelle sue attività produttive.

Attraverso questa tesi, si tratterà la simulazione Montecarlo e si avrà la possibilità di abbracciare le materie sopracitate.
Il metodo Montecarlo è un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. Può essere utile per superare i problemi legati ai test esatti (ad esempio i metodi basati sulla distribuzione binomiale e calcolo combinatorio, che per grandi campioni generano un numero di permutazioni eccessivo).

La simulazione Montecarlo nasce in un contesto diverso da quello finanziario. Le sue prime applicazioni, infatti, sono confinate alle scienze matematiche e fisiche, con il fine di fornire un supporto alla realizzazione della Bomba Nucleare nel contesto della Guerra Fredda. La prima applicazione finanziaria della simulazione Montecarlo si deve a Phelim P. Boyle nel 1977. La pubblicazione dell'articolo "*Options: a Monte Carlo approach"* sulla nota rivista *Journal of Financial Economics* segna l'avvio di una stagione piuttosto prolifica che porterà a un grosso ampiamento della letteratura finanziaria con protagonista la simulazione, il cui nome è tratto dal noto Principato. Come si evince dal titolo del lavoro di Boyle il primo ambito applicativo della simulazione Montecarlo nel contesto finanziario è il pricing di strumenti derivati ed in particolare quello di opzioni.
Gli stessi presupposti teorici sono stati successivamente estesi al concetto di VAN e TIR, uno dei metodi più diffusi per calcolare il rischio e verificare la fattibilità degli investimenti è proprio la simulazione Montecarlo.

L'elaborato, articolato in tre capitoli, tratterà la simulazione nelle sue linee generali, con cenni ai vari ambiti di applicazione, per poi approfondirne le implementazioni finanziarie con un caso pratico, attraverso l'utilizzo del linguaggio Python.
Python è un linguaggio di programmazione ad alto livello, orientato agli oggetti, adatto, tra gli altri usi, a sviluppare applicazioni distribuite, scripting, computazione numerica e system testing e fu ideato da Guido van Rossum[1] all'inizio degli anni Novanta. Nel terzo capitolo ne verranno poi descritte le funzionalità e l'utilizzo attraverso un esempio pratico.
Per gli intermediari più esperti e che possono sopportarne i costi di implementazione, è consigliata la metodologia Montecarlo per il calcolo del *Value at Risk*[2]. Questa, infatti, permette di analizzare contesti più complessi rispetto alle tecniche analitiche e storiche e soprattutto, consente di valutare tutti rischi cui un portafoglio è esposto e le correlazioni tra essi.

[1] Guido van Rossum è un informatico olandese. Nella comunità di Python viene definito "Benevolo Dittatore a Vita", nel senso che continua a seguire il processo di sviluppo di Python, prendendo decisioni ovunque necessarie

[2] Il valore a rischio (conosciuto anche come value at risk o VaR) è una misura di rischio applicata agli investimenti finanziari. Tale misura indica la perdita potenziale di una posizione di investimento in un certo orizzonte temporale, solitamente 1 giorno, con un certo livello di confidenza, solitamente pari al 95% o 99%. È una tecnica comunemente usata da banche d'investimento per misurare il rischio di mercato delle attività che detengono in portafoglio, ma è anche un concetto più vasto che ha molteplici applicazioni.

Varie sono le discipline in cui questo metodo è utilizzato. Un esempio si riscontra in materia di fisica statistica e di ingegneria, la cui applicazione è legata alla risoluzione di problemi legati alla fluidodinamica; in economia e finanza, invece, può essere utilizzato per prezzare i derivati e le opzioni non standard, per simulare l'illuminazione naturale; in fisica medica, invece, trova uso per la pianificazione di trattamenti radioterapeutici, "in particolare nella protonterapia a pencil beam"; nella chimica computazionale il Montecarlo quantistico è un metodo per la determinazione della struttura elettronica.

Un altro esempio particolare, e maggiormente recente rispetto ai precedenti, dell'utilizzo del metodo Montecarlo è l'impiego del metodo nell'analisi scacchistica.

Capitolo 1
Il Metodo Montecarlo

1.1 Definizione e cenni storici

"Il metodo Montecarlo è un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. Può essere utile per superare i problemi legati ai test esatti (ad esempio i metodi basati sulla distribuzione binomiale e calcolo combinatorio, che per grandi campioni generano un numero di permutazioni eccessivo)"[3].
Il metodo è utilizzato per stimare situazioni ipotetiche attraverso la simulazione delle situazioni stesse: in pratica, si basa un algoritmo che genera una serie di numeri pseudo-casuali tra loro non correlati, che seguono la distribuzione di probabilità propria del fenomeno da indagare. Tali numeri rappresentano una serie di possibili realizzazioni dell'evento in esame. I numeri sono definiti "pseudo-casuali" poiché la scelta che viene effettuata dal calcolatore è comunque fatta rientrare in un *range*, stabilito a priori. La non correlazione tra i numeri è assicurata da un test chi quadrato.

[3] Definizione tratta da "Fintech la finanza digitale" a cura di Enrico Malverti, Ulrico Hoepli Editore 2018

L'origine del metodo Montecarlo viene solitamente associata alla nascita dei computer ed in particolare alle ricerche fatte nel secondo dopoguerra, sui processi di diffusione dei neutroni. In assenza di dati certi, si ritiene che il metodo sia stato elaborato negli Stati Uniti d'America con il progetto Manhattan[4]. Circa 150 anni prima Buffon[5] aveva ideato un esperimento consistente nel lancio di un ago di lunghezza nota su un foglio in cui erano rappresentate rette parallele a distanza nota tra loro. Il lancio, ripetuto molte volte, dell'ago consentiva un calcolo approssimato di PI greco. Non vi è però dubbio che il metodo ha potuto, visto l'elevato numero di replicazioni necessarie, affermarsi solo con la diffusione di computer sempre più veloci e a minor costo. La vera formalizzazione del metodo si deve a Enrico Fermi[6], John von Neumann[7] e Stanislaw Marcin Ulam[8], nell'ambito dello studio delle reazioni nucleari. Era infatti in corso la ricerca per realizzare la bomba atomica. Nel contesto bellico l'applicazione del metodo Montecarlo trova giustificazione nella necessità, durante un bombardamento aereo, di selezionare gli obiettivi da colpire su una vasta area in modo non totalmente casuale. L'utilizzo della simulazione è oggi associato a calcolatori e software che sono in grado di generare successioni di numeri casuali, difficilmente riproducibili dalla mente umana.

In realtà, però, una traccia embrionale della simulazione può essere rintracciata già nel '700 negli studi di George Louis Leclerc de Buffon. Il naturalista, matematico e cosmologo francese è ricordato per un esperimento il cui fine è quello di stimare π.

L'esperimento consiste nel lanciare uno spillo su un piano intersecato da rette parallele e consente di stimare π sulla base dell'analisi della distanza dell'ago dalle rette nei lanci ripetuti[9]. L'approssimazione ottenuta (per esempio dal matematico Mario

[4] Il Progetto Manhattan, fu la denominazione data ad un programma di ricerca e sviluppo in ambito militare che portò alla realizzazione delle prime bombe atomiche durante la seconda guerra mondiale.

[5] Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon, è stato un naturalista, matematico e cosmologo francese. Esponente del movimento scientifico legato all'Illuminismo, le sue teorie avrebbero influito sulle generazioni successive di naturalisti, in particolare sugli evoluzionisti Jean-Baptiste Lamarck e Charles Darwin.

[6] Enrico Fermi (1901-1954), è stato un fisico italiano. Vincitore del premio Nobel per la fisica nel 1938 , è ricordato principalmente per i suoi studi nell'ambito della fisica nucleare.

[7] John von Neumann (1903-1957), è stato un matematico e fisico (oltre che informatico) ungherese. È noto come una personalità poliedrica. I suoi principali contributi sono stati nell'ambito delle scienze matematiche, economiche, informatiche e fisiche.

[8] Stanislaw Ulam (1909-1984), è stato un matematico polacco. È noto soprattutto per il suo contributo nell'ambito della propulsione nucleare ad impulso.

[9] L'esperimento è descritto nell'opera Essai d'artithmètique morale, 1977.

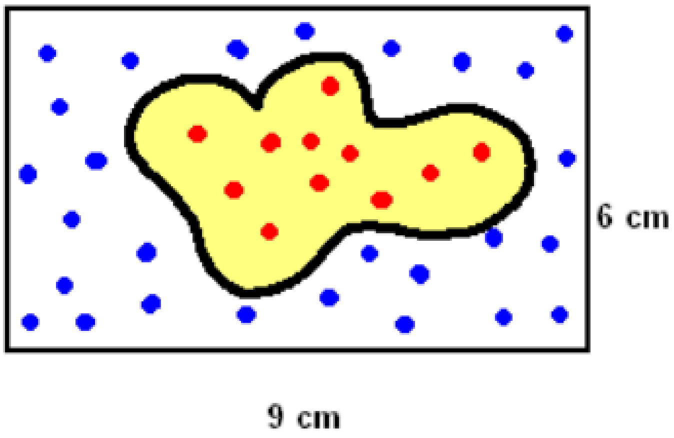
Lazzarini nel ‘900) è piuttosto soddisfacente vista l’assenza di conoscenze tecniche e metodi di risoluzione moderni.
Oggi la simulazione assume connotati (e di conseguenza modalità di applicazione) differenti a seconda del contesto applicativo.
E’ sorprendente che una tecnica probabilistica, come questo metodo, si sia rivelata utile in problemi deterministici di calcolo numerico come la stima di integrali non calcolabili in forma chiusa.
Se ne fornisce un pratico esempio: si consideri la necessità del calcolo dell’area di un rettangolo; ricorrendo alla pratica formula del prodotto tra altezza e lunghezza, il calcolo sarà estremamente agevole. Nell’esempio[10] della figura che segue l’area del rettangolo sarà 6*9=54 cm^2.
Si supponga ora di delimitare una superficie chiusa irregolare all’interno di questo rettangolo.
Come se ne può calcolare l’area?
Poiché non è possibile determinarla con una semplice espressione, come nel caso dell’area del rettangolo, bisogna ricorrere a metodi alternativi.
Un primo metodo potrebbe consistere nel ritagliare la figura delimitando dapprima il rettangolo. Si potrebbe poi pesare il frammento di carta rettangolare, ricavando così l’area della porzione in proporzione rispetto al peso totale. L’area cercata sarà approssimativamente:

AreaIrregolare=AreaRettangolo*PesoCartoncinoAreaIrregolare/PesoCartoncinoRettangolo

Un metodo alternativo consiste nel tracciare un numero elevato di punti sul disegno distribuendoli uniformemente e contare quanti sono caduti all’interno della superficie irregolare. Se il numero dei punti sarà elevato e la loro distribuzione uniforme allora l’area sarà approssimativamente:
AreaIrregolare=AreaRettangolo*PuntiAll‘InternoDell’AreaIrregolare/NumeroComplessivoDiPunti

Nella figura che segue:
AreaIrregolare=54cm^2*11/38=15.6cm^2

[10] L’esempio è tratto dal link seguente: http://www.financerisks.com



Questo è un caso di utilizzo della simulazione Montecarlo per un problema di calcolo di aree, ovvero di integrazione.

Il metodo Montecarlo ha un ruolo rilevante tra i metodi di simulazione stocastica che, assieme alla simulazione dinamica, costituisce uno dei più importanti capitoli della simulazione su computer.
Un tempo la simulazione era considerata l'ultima spiaggia "da usarsi quando tutto il resto fallisce" ma, grazie all'avvento di calcolatori sempre più veloci e a minor costo, oggi costituisce uno dei più importanti strumenti disponibile ai matematici applicati per risolvere problemi. Citiamo tra questi: calcolo dei premi delle compagnie di assicurazione, regolazione dei semafori cittadini, dimensionamento del traffico telefonico, code o attese ai caselli autostradali, per gli esami clinici, o più banalmente in banca o dal barbiere, gestione degli ordini, del magazzino e della produzione, marketing e distribuzione, budgeting e finanza; rischio nelle durate e nei costi di un progetto, gioco d'azzardo, ecc.

1.2 Applicazione e caratteristiche del Metodo Montecarlo

Non c'è un solo metodo Montecarlo, in realtà il termine descrive una classe di approcci molto utilizzati per una larga categoria di problemi. Tuttavia, questi approcci tendono a seguire un particolare schema:

- Definire un dominio di possibili dati in input.
- Generare input casuali dal dominio con una certa distribuzione di probabilità determinate.
- Eseguire un calcolo deterministico utilizzando i dati in ingresso (input).
- Aggregare i risultati dei calcoli singoli nel risultato finale.

L'invenzione della simulazione si deve alla comparsa dei primi calcolatori. Montecarlo, infatti, risolve quei problemi la cui soluzione è analiticamente molto complessa o "impossibile". Montecarlo, comunque, non è l'unica tipologia di simulazione esistente; di fatto, questa è ricondotta ad una categoria molto più ampia: anche l'orologio che si porta al polso, ad esempio, è un simulatore, in quanto riproduce, attraverso il movimento delle lancette, quello (apparente) del sole intorno alla terra. Esistono, a tal proposto, differenti categorie di simulazione, che possono essere ricondotte a quattro:

- *Simulazione deterministica di fenomeni deterministici*: è il caso dell'orologio sopracitato, o delle simulazioni di bilancio, o anche dei modelli di simulazione di Dinamica Industriale quando presentano una domanda del bene da produrre che varia con legge deterministica;
- *Simulazione deterministica di fenomeni stocastici*: è il caso dello studio di sostanze radioattive mediante modelli matematici;
- *Simulazione stocastica di fenomeni deterministici*: è il caso del calcolo dell'integrale definito di una funzione e del calcolo del π attraverso l'esperimento dell'ago;
- *Simulazione stocastica di fenomeni stocastici*: in questa sede si considera la simulazione con il metodo di Montecarlo[11].

Per l'applicazione del metodo è poi necessario che vi sia analogia negli esperimenti, ovvero che venga reiterato *n* volte lo stesso esperimento, e che i risultati

[11] Rif. Metodi quantitativi per le decisioni, Giappichelli editore

dell’esperimento siano indipendenti, ovvero è necessario che non si influenzino a vicenda.
Una caratteristica di questo metodo è quella di scegliere i punti in modo casuale, ma vengono scelti con maggior probabilità i punti che appartengono alle regioni che contribuiscono maggiormente al calcolo dell'integrale rispetto a quelli che appartengono a regioni di basso contributo. In altre parole, i punti dovrebbero essere scelti secondo una distribuzione simile in forma alla funzione integranda. Comprensibilmente, fare ciò è difficile tanto quanto risolvere l'integrale, ma ci sono altri metodi di approssimazione possibili: a partire da quelli che costruiscono una funzione integrabile simile a quella da integrare, fino ad arrivare ad una delle procedure adattive.

I metodi di Montecarlo richiedono la generazione dei valori (numeri casuali) di variabili aleatorie di cui sono note le distribuzioni di probabilità.
Una sequenza di numeri casuali è una sequenza di numeri che non hanno alcuna relazione di successione tra di loro (ma che seguono, tutti, una stessa distribuzione di probabilità).
Per “generare” sequenze di numeri casuali adeguate, un processo non estremamente semplice, è possibile affidarsi a processi fisici intrinsecamente aleatori:
-decadimenti radioattivi
-rumore termico
-sistemi turbolenti (cesto delle palline del lotto).

L’idea stessa di utilizzare un calcolatore (quindi un’oggetto puramente deterministico e di conseguenza prevedibile), per generare un numero casuale[12], quindi imprevedibile, sembra costituire una sfida impossibile.
Gli algoritmi utilizzati per generare sequenze di numeri pseudo-casuali al calcolatore hanno periodo di ripetizione molto lungo e basso livello di correlazione tra un elemento della sequenza e quello successivo.
Esempio (Middle Square, Von Neumann, 1946):
dato un numero intero di 10 cifre (seme della sequenza) lo si eleva al quadrato e si prendono le 10 cifre centrali come numero successivo:
44231778342 = 19564502151188931556.

[12] Rif. Metodi quantitativi per le decisioni, Giappichelli Editore - Torino

Provando per esercizio ad implementare questo metodo.

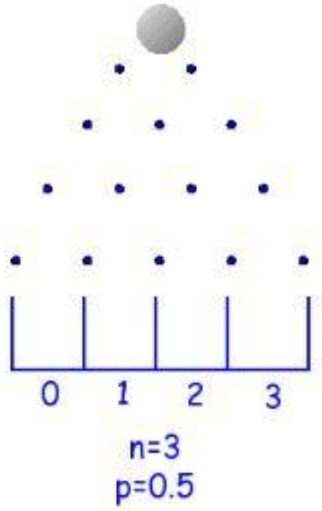
In ambiente C/C++ esiste un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti.
La funzione si chiama:
long int random(); ed è definita in stdlib.h.
Ogni chiamata a random()
ritorna un intero compreso tra 0 e RAND MAX (che, nelle macchine a 32 bits vale di solito 2^31−1).
Se sono necessari numeri compresi in [0,1] si usa:
double rnd = (double)random()/RANDMAX;
Dato un intervallo di numeri casuali uniformemente distribuiti in [0,1] con una semplice trasformazione è possibile ottenere numeri casuali in un intervallo generico [x *min*, x *max*].

É utile poter fissare il "seme" della sequenza in modo da poter generare sequenze diverse o esattamente la stessa sequenza (per scopi di debugging): a seme uguale corrisponde sequenza uguale.
void srandom (long int);
L'inizializzazione va fatta una sola volta per tutte all'inizio del programma.
Se si vuole una sequenza differente ad ogni esecuzione del programma si può usare la funzione long int time (time_t *t); che restituisce il numero di secondi dal 1° gennaio 1970 (se non si è interessati a riempire la struttura time_t *t si può passare il puntatore nullo).

Una interessante applicazione della generazione di distribuzioni uniformi è la generazione di processi binomiali.
Tale distribuzione si base su eventi (prove) caratterizzati da due soli risultati possibili.

Esempio classico: *n* lanci di una moneta.

Altra visualizzazione della binomiale è il tavolo binario. Si tratta di un piano inclinato con una serie di chiodi piantati in modo da formare un reticolo regolare.
Una biglia, urtando un chiodo, può passare a destra o a sinistra con uguale probabilità (p= 0,5).



n= numero di righe di chiodi;

k= posizione di arrivo (oppure numero di successi dell’evento “passaggio a destra”).

Nei paragrafi successivi sarà analizzato e sviluppato un esempio nel dettaglio, il lancio dei dadi.

1.3 Esempio di applicazione: il calcolo dell'integrale

Come esempio di applicazione consideriamo il calcolo dell'integrale definito tra gli estremi a, b, di una funzione f(x) con $0<f(x)\leq c$.

Nei casi più semplici, l'operazione di integrazione può essere svolta mediante il ricorso a metodi quali l'integrazione per parti, sostituzione e serie. Nelle situazioni meno immediate, però, è necessario ricorrere all'uso di un calcolatore e la simulazione Montecarlo offre una semplice soluzione, utile soprattutto nei casi di integrali multidimensionali. È comunque fondamentale notare che il risultato fornito da questa simulazione rappresenta esclusivamente un'approssimazione dell'integrale e non il suo valore preciso.

Sia dato un integrale[13] I della funzione f limitata sull'intervallo [a,b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Sia M un maggiorante della funzione f sull'intervallo [a,b]. Per delimitare l'approssimazione è anzitutto necessario tracciare un rettangolo di base [a,b] e altezza M. In tal modo, infatti, l'area sottesa dalla funzione f(x), ovvero l'integrale di f(x) sarà certamente minore dell'area del suddetto rettangolo. Entra adesso in gioco la simulazione Montecarlo.

Definiamo x e y sono entrambi numeri casuali. Consideriamo un punto nel piano di coordinate (x;y).

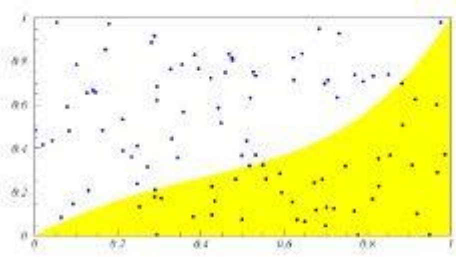
Ciò che interessa è conoscere la probabilità che tale punto si trovi all'interno del grafico della funzione f, ovvero la probabilità che $y\leq f(x)$. Tale probabilità coincide con il rapporto tra:

l'area sottesa dalla funzione f, che coincide con l'integrale definito I;

l'area A del rettangolo con base [a,b] e altezza M:

$$A= (b-a)M$$

[13]La trattazione segue Integrazione numerica, M. Tumminiello, V. Lacagnina, A. Consiglio, Università degli studi di Palermo, 2015.



Per cui:

$$P(y \leq f(x)) = \frac{I}{A} = \frac{I}{(b-a)\mathrm{M}}$$

L'obiettivo è trovare I, l'unico termine non noto risulta essere P(y≤ f(x)). La simulazione Montecarlo assolve la funzione di stimare tale probabilità. Si generino n coppie di numeri casuali (xi; yi), con:

- i=1,…..,n
- $xi \in$ [a,b]
- $yi \in$ [0,M]

Sulla base della generazione di tali vettori bidimensionali di numeri casuali, vi sarà una certa quantità di casi per cui $yi \leq$ f(xi). Tale quantità sarà denotata con U e varia al variare dei vettori generati. È perciò bene notare che non si tratta di un numero certo ma di una approssimazione la cui precisione incrementa all'aumentare del numero di vettori generati. L'approssimazione di P(y≤ f(x)) sarà quindi pari a

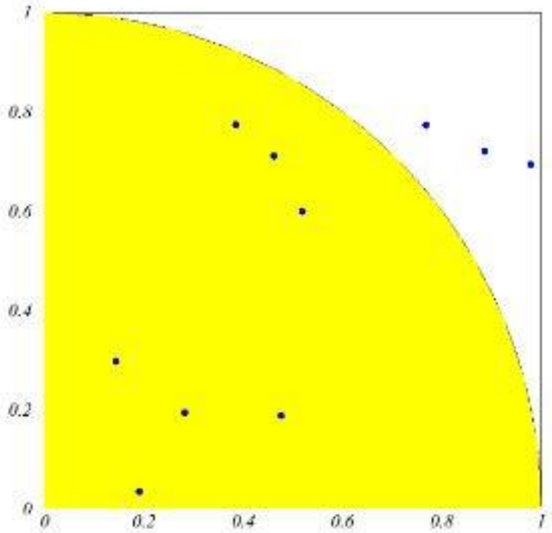
$$\rho = U/n$$

Avendo trovato il valore dell'ultima incognita, è possibile procedere con la stima dell'integrale I:

$$\mathrm{I} \cong \rho\ (b\text{-}a)\mathrm{M} = \frac{U}{n}(b\text{-}a)\mathrm{M}$$

Se in particolare si sceglie come funzione l'equazione del cerchio nell'intervallo [0,1]×[0,1] si può determinare il valore di π:

$$\pi = 4I = 4\frac{N_{fav}}{N_{tot}}$$



Quando diventa conveniente valutare un integrale con il metodo Montecarlo?

Si ricordi che ogni estrazione implica il calcolo della funzione integranda (per stabilire se $y < f(x)$ cioè se il punto è contenuto nell'area).

Si consideri una funzione a m dimensioni, definendo N il numero di valutazione della funzione integrale:

- Simpson: fissato a n il numero di campionamenti per dimensione N vale n^m
- Montecarlo: la precisione migliora come $1/\sqrt{N}$

Quando a parità di tempo di esecuzione i due metodi danno precisioni simili con stesso tempo di esecuzione? La risposta non è semplice perché dipende da com'è strutturata la funzione.

In generale però per $m > 4$ il metodo Montecarlo comincia a diventare competitivo.

1.4 Lancio dei dadi e probabilità

Il nome Montecarlo fu inventato, successivamente ai lavori di Ulam, Fermi, Von Neumann, da Nicholas Constantine Metropolis proprio in riferimento alla nota tradizione, nei giochi d'azzardo praticati nel casinò dell'omonimo quartiere situato Principato di Monaco nel sud della Francia. Può sembrare superficiale riferirsi a questi giochi eppure il calcolo delle probabilità nacque da problemi discussi e basati sull'esito del lancio dei dadi, basti citare: Cardano, Pascal, Fermat, Galilei, Huygens.

Le definizioni/concezioni di probabilità[14] sono quattro:

- Classica (Pascal-Laplace): rapporto tra casi favorevoli e casi possibili (considerati equiprobabili).
- Frequentista (Von Mises): limite (all'infinito) del rapporto tra casi favorevoli e totali.
- Soggettivistica (De Finetti): stima, soggettiva, della probabilità di successo di un evento.
- Assiomatica (Kolmogorov): qualunque numero compreso tra 0-1 che rispetti definite proprietà.

Le prime tre definizioni sono "costruttiviste" indicano cioè una via per calcolare le probabilità, la quarta non lo è, ma indica gli assiomi a cui deve sottostare un sistema coerente di calcolo delle probabilità. Da osservare che le prime tre concezioni (Classica, Frequentista, Soggettivistica) soddisfano tutte le condizioni poste dai requisiti di coerenza della teoria Assiomatica.
Interessante ricordare che sul concetto di probabilità si sono esercitate alcune delle migliori menti, molti del secolo scorso, provenienti da contesti disciplinari assai diversi (sia umanisti che scientifici): matematici (Bayes, Kolmogorov, De Finetti), filosofi (Russell, Wittgenstein, Popper), economisti (Keynes, Von Mises), Fermat era un magistrato che si dilettava di matematica.

Un esempio[15]:

[14] Rif. A.N. Kolmogorov, "Teoria delle probabilità", Teknos, Roma 1995.

[15] Esempio tratto dal sito di informazione matematica matematicamente.it

Partendo dal lancio di un dado non truccato. Le facce del cubo sono sei dunque le probabilità di uscita di ogni numero sono 1/6 = 16.666… %. Si osservi che per calcolare la probabilità abbiano implicitamente applicato la definizione Classica di probabilità: caso favorevole 1 casi possibili 6.

Dato lo spazio campionario S, se gli eventi elementari sono equiprobabili, ovvero hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi, e in numero finito, allora la probabilità di un evento A è data dal rapporto tra i casi favorevoli (ovvero il numero di eventi elementari in A) e i casi possibili (ovvero il numero di eventi dello spazio campionario S), quindi:

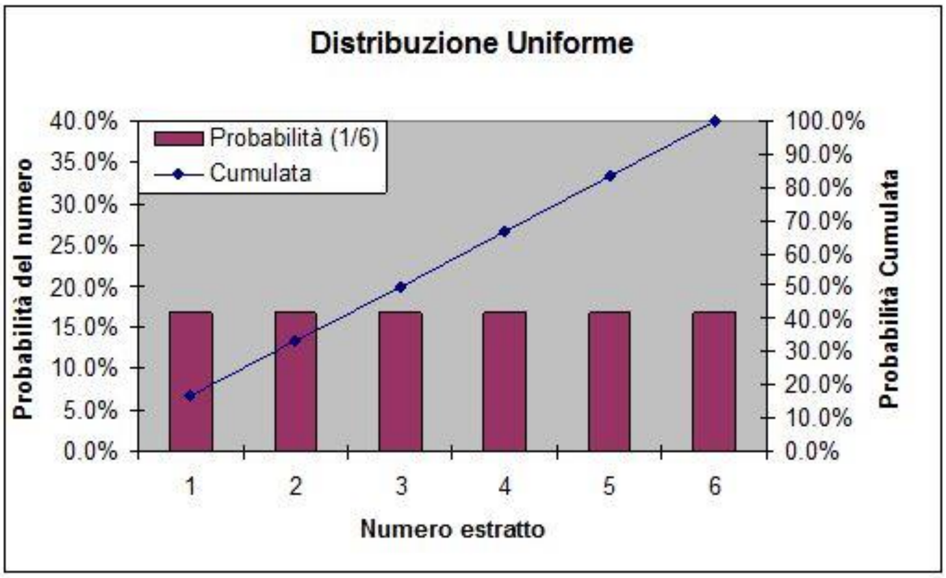
- spazio campionario: S
- n eventi A_i, con i=1,2,…..,n
- tali eventi sono equiprobabili, ovvero formalmente $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$

La probabilità di ciascun evento A_i è allora pari a:

$$P(A_i) = 1/n$$

Lo spazio campionario S è costituito da sei eventi, ciascuno corrispondente ad una faccia del dado, che sono tutti equiprobabili. La distribuzione di probabilità risulta quindi:

Esiti possibili 6:	Probabilità (1/6)	Cumulata
1	16.7%	16.7%
2	16.7%	33.3%
3	16.7%	50.0%
4	16.7%	66.7%
5	16.7%	83.3%
6	16.7%	100.0%
Totale	100.0%	



Sono stati introdotti alcuni concetti fondamentali.

L'istogramma, che rappresenta la probabilità di ciascun numero, si chiama distribuzione (o densità) della probabilità. Le funzioni di distribuzione della probabilità possono essere discrete (come nel gioco dei dadi, nella roulette, le persone in coda o servite, ecc.) oppure possono essere continue (altezze o peso delle persone, durata di una telefonata, di una attività, ecc.). L'istogramma riportato sopra rappresenta una distribuzione discreta uniforme (in cui tutti i valori hanno la stessa probabilità). Le distribuzioni uniformi, sia nel discreto che nel continuo (rappresentabili con un rettangolo) sono molto importanti perché a partire da esse è possibile generare distribuzioni di ogni tipo (ad esempio con il metodo di inversione della funzione cumulata).

I fogli Excel consentono l'accesso a due generatori di numeri pseudo casuali uniformi: la funzione =Casuale() che genera numeri casuali uniformi distribuiti con continuità tra 0 ed 1 e la funzione Casuale.tra(n1;n2) che genera numeri discreti (interi) compresi tra n1 e n2. Questa seconda funzione è stata utilizzata nel workbook Excel (iterazioni) per simulare, con il metodo Montecarlo, il lancio di 1- 4 dadi.

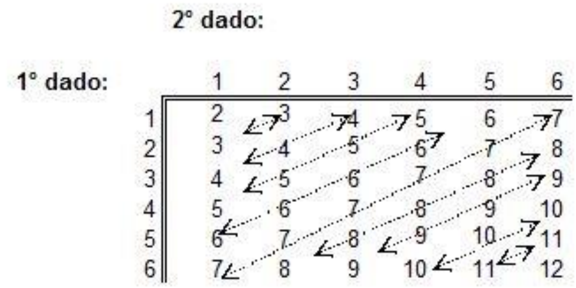
Nel grafico riportato sopra la retta (tra 16.7% e 100%) rappresenta la funzione di ripartizione (o cumulata delle probabilità).

Questa linea rappresenta il progressivo, da 1 a 6, delle probabilità del lancio di un dado. Nel linguaggio dell'analisi matematica rappresenta l'integrale della funzione di densità di probabilità (nell'esempio l'istogramma). La funzione di probabilità cumulata ha un utilizzo pratico ed importante perché serve, in molti casi, a misurare la probabilità di successo, mentre il suo complemento ad uno (la retro cumulata) serve a misurare la probabilità (o il rischio) d’insuccesso.

Il problema della definizione della funzione di probabilità diventa molto più complesso da un punto di vista analitico, all’aumentare del numero di dadi considerati.

Cosa succede infatti nel lancio di due dadi?

In questo caso i risultati possibili (escludendo dai risultati il numero 1 perché si considera la somma) variano da due a dodici. Molte persone ritengono che anche in questo caso la distribuzione di probabilità sia uniforme, come nel lancio di un dado. Così non è, e per convincersene basta guardare la tabella riportata di seguito che mostra tutti gli esiti possibili:


2° dado:

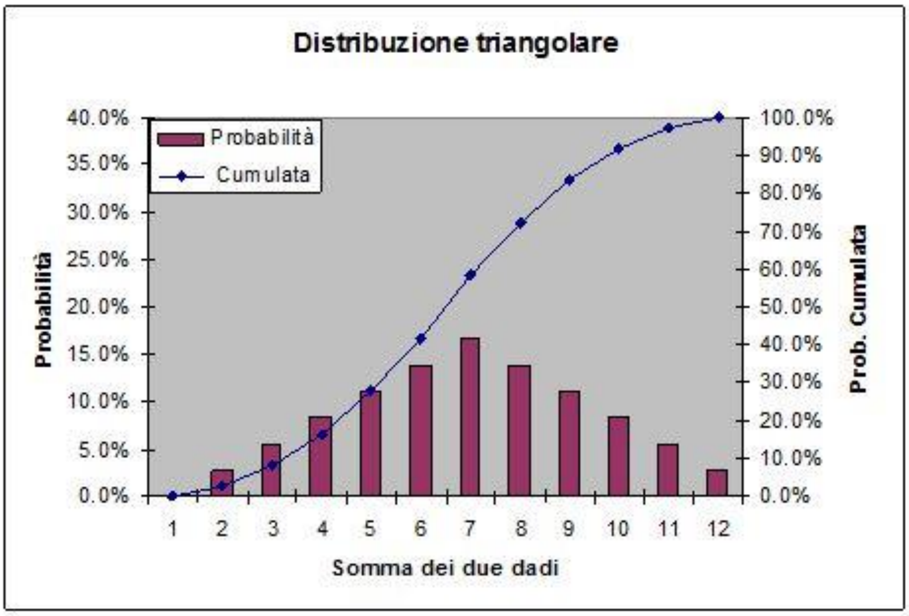
1° dado:	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Lancio di due dadi: (Somma valori)

E’ subito evidente che il 2 e il 12 possono uscire solo con una combinazione (1+1 e 6+6) mentre il 7 (che ha la probabilità massima) può uscire con 6 combinazioni diverse.

Ecco sotto la tabella e il grafico della densità di probabilità e della funzione di ripartizione (o cumulata) calcolate per ogni Esito possibile.

Esiti possibili 11: (6×6=36 Combinazioni)	Probabilità	Cumulata
2	2.8%	2.8%
3	5.6%	8.3%
4	8.3%	16.7%
5	11.1%	27.8%
6	13.9%	41.7%
7	**16.7%**	**58.3%**
8	13.9%	72.2%
9	11.1%	83.3%
10	8.3%	91.7%
11	5.6%	97.2%
12	2.8%	100.0%
Totale	**100.0%**	



Dunque, sommando due distribuzioni uniformi si ottiene una distribuzione triangolare. Se con due soli dadi il problema è ancora risolvibile in forma chiusa, all'aumentare del numero di dadi è difficile trovare la probabilità di un evento senza ricorrere ad un calcolatore, come anticipato precedentemente attraverso quindi Microsoft Excel.

La simulazione[16] può essere eseguita in questo modo:

Al primo lancio (effettuato inserendo 1 nella cella E1) l'istogramma andrà fuori scala in quanto il 100% è concentrato in un solo esito e il fondo scala degli istogrammi è stato posto al 40%. Dopo alcuni lanci, effettuati premendo ripetutamente F9 – Ricalcolo, l'istogramma rientrerà nella scala prefissata. Se invece si desidera simulare il lancio di dadi in rapida successione è sufficiente mantenere premuto il tasto F9. La velocità dipende dal computer e dalla versione Excel. E' sempre possibile lanciare una simulazione, sospenderla e riprenderla in un altro momento, come è possibile in ogni momento ripartire con una nuova sequenza: E1 = 0. Questo workbook consente di iniziare a toccare con mano l'affermazione che il metodo Montecarlo, implementato su computer, permette di effettuare esperimenti matematici, altrimenti impossibili a questa disciplina.

[16] Pierangelo Cignoli, "Introduzione alla Simulazione", Giappichelli, Torino 1976.

Capitolo 2
Valutazione degli investimenti

2.1 Definizione e metodologie di valutazione degli investimenti

Con investimento, in economia, ci si riferisce “all'attività finanziaria di un soggetto economico detto investitore atta all'incremento di beni capitali mediante l'acquisizione o creazione di nuove risorse da usare nel processo produttivo al fine ultimo di ottenere un maggior profitto futuro o incrementare la propria soddisfazione personale”[17].

In matematica finanziaria, la valutazione degli investimenti è definita come quell’attività di pianificazione economico-finanziaria volta a verificare l’impatto che l’implementazione di un determinato progetto comporta in termini di redditività, dove per progetto d’investimento si intende l’insieme di attività produttive o finanziarie in cui l'azienda o il privato cittadino impegna disponibilità liquide o capitali (costo dell'investimento) con l'obiettivo di conseguire, in contropartita, un flusso di benefici futuri complessivamente superiori ai costi iniziali sostenuti ovvero ottenere un guadagno netto dopo un tempo determinato (payback period).

La valutazione degli investimenti[18] è quindi parte della pianificazione aziendale. Il problema che viene affrontato dalla valutazione degli investimenti è, nella sostanza, un problema di scelta. Ogni azienda o privato deve, infatti, prendere delle decisioni d'investimento, dirette ad allocare i soli progetti che "creano valore" tenendo conto delle limitate risorse disponibili (fattori produttivi). Per poter risolvere tale problema di scelta fra possibili alternative è necessario poter discriminare le diverse possibilità in base ad un'unità di misura che deve essere in grado di evidenziare sia la validità dell'iniziativa, sia i correlati effetti economico – finanziari. E’ assunto che l'unità di misura cui fare riferimento in questo caso sia il valore economico dell'iniziativa.
Il costo di un investimento è dato dai flussi finanziari in uscita o minori flussi in entrata, connessi alla sua attuazione. I benefici ad esso associati sono costituiti da flussi finanziari in entrata ovvero a minori flussi in uscita (dove ritorni e costi futuri sono

[17] Definizione fornita dal glossario economico del sito bizandbit.com

[18] Rif. Aswath Damodaran, Valutazione delle aziende, Apogeo.

elementi di carattere previsionale). In tal modo un'operazione d'investimento può essere rappresentata da una successione seppur stimata di future entrate ed uscite monetarie denominata "flusso di cassa".

Altro fattore determinante nella valutazione degli investimenti è il tempo.
La rilevanza del fattore tempo dipende da un effetto di carattere finanziario che lo lega al valore del denaro e secondo cui, a parità di altre condizioni, ad un allungamento dei tempi di rientro delle risorse investite in un progetto corrisponde una contrazione dei benefici di ordine finanziario.
Il trascorrere del tempo introduce, peraltro, un ulteriore livello d'incertezza nel processo di valutazione in quanto, all'ampliarsi degli intervalli di riferimento, le previsioni sulle variabili da cui dipendono i risultati dell'operazione tendono progressivamente a perdere di significatività.
Ulteriore elemento essenziale del processo di valutazione è il tasso d'interesse scelto a riferimento.
Il tasso d'interesse al quale si attualizzano i flussi finanziari (in entrata ed in uscita) è denominato costo opportunità del capitale perché rappresenta un'alternativa alla quale si rinuncia per intraprendere il particolare progetto d'investimento analizzato.
Altri importanti elementi da considerare per la valutazione razionale della perseguibilità di un investimento sono:

- il rischio associato all'investimento: la propensione al rischio dell'investitore è una delle variabili principali nella scelta della tipologia di investimento (ad esempio, nel caso di investitore privato, per la scelta tra mercato azionario piuttosto che obbligazionario);
- le previsioni di andamento (al rialzo o al ribasso) del mercato finanziario sul quale si intenda investire;
- la periodicità dei flussi di reddito previsti in entrata ed in uscita.

Alcune delle metodologie di valutazione usualmente adottate in regime finanziario di capitalizzazione composta sono le seguenti:

- Flusso di cassa attualizzato (in inglese Discounted Cash Flow): attualizzazione dei flussi monetari differenziali associati al progetto d'investimento attraverso l'utilizzo di un tasso di attualizzazione di riferimento. La somma algebrica delle entrate ed uscite attualizzate rappresenta il Valore attuale netto - VAN del progetto (in inglese Net present value - NPV).

- Tasso interno di rendimento (TIR o in inglese Internal rate of return - IRR): individuazione del tasso di attualizzazione che azzera algebricamente le entrate ed uscite associate al progetto e confronto del tasso individuato con un tasso di confronto (benchmark).
- Periodo di rimborso (in inglese Pay Back Period): calcolo del numero di anni necessario per compensare l'investimento attraverso flussi positivi. In pratica è la prima scadenza in cui si verifica un'inversione di segno nei saldi di cassa.

Tali metodologie, che considerano esclusivamente le variabili finanziarie di tipo quantitativo, non sono le uniche ma sono quelle maggiormente condivise nella teoria e nella prassi valutativa. Nei paragrafi successivi di questo capitolo saranno analizzati nello specifico sia il VAN che il TIR con relativo esempio.

Nella descrizione del metodo Montecarlo ci si riferisce indirettamente al caso di valutazione di investimento in condizioni di rischio, ossia nella situazione in cui le previsioni dei flussi di cassa dell'investimento sono legate a parametri o variabili statistiche.

Il vantaggio dell'utilizzo del metodo Montecarlo è quello di poter definire, non solo un valore puntuale e unico dell'indicatore selezionato di convenienza dell'investimento, ma una serie di valori che determinano le probabilità relative ad ognuno di essi e tracciare così una distribuzione probabilistica. Questo aspetto si traduce in una possibile valutazione della rischiosità del progetto di investimento considerando i parametri relativi (varianza, covarianza, scarto quadratico medio).

Dal punto di vista pratico, è utile definire in via preliminare i quattro elementi fondamentali: parametri, input esogeni, output e modello.

Se ne fornisce una breve descrizione nel dettaglio:

- I parametri sono una delle due forme di input del modello; questo tipo di variabili sono scelte dal costruttore del modello e per definizione sono indicati come controllabili da quest'ultimo.
- Gli input esogeni sono l'altra forma di informazione preliminare del processo. In questo caso le variabili in questione sono, come si evince dal nome, indipendenti

dall’influenza e dal controllo dell’analista ma per essere gestiti sono descrivibili in termini probabilistici.

- Gli output sono semplicemente i risultati della simulazione. Nel caso in esame sono gli indicatori di validità economica summentovati.
- Il modello infine, rappresenta la serie di funzioni che determinano il processo di trasformazione degli input in output.

Nei casi in cui la determinazione univoca dell’output tramite funzioni degli input risulti difficoltosa o riduttiva per l’analisi del fenomeno di studio, il metodo Montecarlo può diventare particolarmente utile.
In questi casi, è possibile modificare l’approccio al problema, passando da una ricerca di una soluzione matematica ad uno studio probabilistico.
Se durante la simulazione il numero *N* di lanci è sufficientemente elevato, le variabili di input saranno combinate così tante volte da fornire un calcolo dell’output non esatto ma possibile e probabile.
All’aumentare di *N*, sfruttando le probabilità statistiche, si può assumere che la significatività e l’affidabilità della simulazione aumenti in maniera simmetrica.
Con l’avvio della simulazione per ognuno degli *N* lanci, tutti gli input vengono sorteggiati in maniera casuale, rispettando la distribuzione probabilistica definita e i coefficienti di correlazione tra le variabili.
Per semplicità e comodità di analisi è utile organizzare i valori di output in istogrammi delle frequenze così da poter tracciare le distribuzioni di probabilità.

2.2 Valore attuale netto (VAN)

Il criterio del Valore Attuale Netto (VAN) si basa sul principio secondo il quale un'iniziativa merita di essere presa in considerazione solo se i benefici che ne possono derivare sono superiori alle risorse utilizzate. Il VAN è il risultato economico complessivo derivante dalla attuazione di un progetto, valutato all'epoca iniziale.
Nella costruzione della formula di calcolo del VAN si parte dalla legge di capitalizzazione adattandola ad operazioni che producono flussi di cassa distribuiti lungo diversi periodi, pertanto il VAN risulta dato dall'espressione seguente[19]:

$$VAN = -C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Ovvero:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

Dove si considerino:
t: scadenze temporali;
Ct: flusso finanziario (positivo o negativo) al tempo t;
i: tasso di interesse al quale viene effettuata l'operazione (usualmente è utilizzato il tasso che rappresenta il costo medio ponderato del capitale o Weighted Average Cost of Capital - WACC);
Secondo tale criterio il progetto di investimento preferito è quello che presenta il VAN maggiore.
In definitiva il VAN è dato dalla sommatoria dei flussi di cassa attesi attualizzati ad un tasso che ne esprima correttamente il rischio.
Un investimento è tanto più rischioso quanto più i possibili risultati che da esso conseguono sono dispersi attorno alla media.

[19] Aswath Damodaran, Valutazione delle aziende, Apogeo.

Vediamo come procedere operativamente per valutare la convenienza di un investimento.

Nell'ottica prospettica del business planning, occorre redigere un piano finanziario analitico che consenta di prevedere l'andamento nel corso degli anni delle grandezze patrimoniali, economiche e finanziarie coinvolte nella realizzazione del progetto. In altri termini occorre redigere prospetti di Stato Patrimoniale, Conto Economico e Rendiconto Finanziario previsionali, in cui si darà rappresentazione (sia pure sotto forma di valori attesi) del profilo dei costi/ricavi generati dal progetto, delle attività patrimoniali necessarie alla sua realizzazione e delle fonti di finanziamento alle quali si prevede di attingere.

Ai fini della valutazione del progetto di investimento, la redazione del piano finanziario ha lo scopo di quantificare anno per anno l'ammontare delle risorse finanziarie che il progetto genera, da considerare naturalmente al netto delle risorse immesse (ovvero degli investimenti). Le risorse generate dal progetto potranno essere liberamente impiegate per remunerare gli azionisti ed i finanziatori. Una volta quantificate, in termini di flussi di cassa, e tenendo conto della loro collocazione temporale, si tratta di capire se l'ammontare di queste risorse è sufficiente ad offrire una remunerazione adeguata ai soggetti coinvolti oppure no.

Si immagini di voler lanciare un progetto di start-up nel 2017, e di dover a tal fine sostenere un investimento complessivo di € 200.000, di cui € 100.000 da subito e la rimanente parte nei due anni successivi. Si ipotizzi inoltre di finanziare gli investimenti in parte con capitale proprio (€ 50.000 versati nel 2017) ed in parte mediante finanziamento bancario (€ 120.000) erogato anch'esso nel corso del primo anno di attività. Si preveda infine che l'attività cominci fin dal 2017 a generare profitti e che quindi il fabbisogno residuo per la realizzazione degli investimenti venga coperto proprio dalle risorse generate dall'attività corrente.

Inizio progetto: anno 2017

Investimento in immobilizzazioni

€ 100.000 anno 2017

€ 50.000 anno 2018

€ 50.000 anno 2019

Si supponga di redigere un piano finanziario analitico per i primi 5 anni di attività e di pervenire quindi al seguente prospetto di rendiconto finanziario previsionale. Lo schema utilizzato consente di evidenziare una grandezza che risponde perfettamente alle esigenze di analisi fin qui esposte: il Flusso di Cassa Operativo, che rappresenta proprio l'ammontare delle risorse generate dall'attività operativa (al netto degli investimenti) destinabili alla remunerazione degli azionisti e dei finanziatori.

Si definisce VAN del progetto la sommatoria dei valori attuali al momento della valutazione dei flussi di cassa operativi che l'attività è in grado di generare in un orizzonte temporale dato. In questo caso, si assuma come momento della valutazione l'inizio dell'anno 2017 e come orizzonte temporale i 5 anni di attività rappresentati nel piano finanziario previsionale. Vengono riportati di seguito i flussi di cassa operativi in relazione al momento temporale in cui questi si realizzano:

Date	01/01/2017	31/12/2017	31/12/2018	31/12/2019	31/12/2020	31/12/2021
Flussi di cassa operativi	-100.000	44.317	42.830	39.642	34.444	46.888

I flussi di cassa operativi sono calcolati al netto delle uscite legate agli investimenti. Con riferimento al flusso di cassa operativo del primo anno di attività (negativo per un totale di € -55.683) è stato ipotizzato che l'esborso legato all'investimento venga effettuato immediatamente, all'inizio del periodo di previsione, ovvero al 1° Gennaio 2017 e che, invece, il ritorno dell'investimento, inteso come flusso di cassa generato dalla gestione corrente (€ 44.317) divenga disponibile non prima della chiusura dell'anno. Il flusso di cassa operativo totale per l'anno 2017, come espresso dal rendiconto finanziario annuale, è dato dalla somma dell'investimento iniziale e del flusso di cassa della gestione corrente. Occorre tener presente che la rappresentazione che ci occorre per calcolare correttamente il VAN deve far riferimento agli istanti temporali in cui i flussi si manifestano, a differenza del rendiconto annuo che fa riferimento all'intero arco dell'anno anziché ad istanti di tempo determinati ed esprime la somma di tutti i flussi di cassa ottenuti nell'intervallo temporale di un anno. Per gli anni successivi, è ipotizzato, in maniera analoga, che ciascun flusso di cassa indicato

(che è il frutto della dinamica di entrate ed uscite avvenute durante tutto l'arco dell'anno) divenga disponibile al 31/12 del relativo anno.
Attualizzare il valore di somme di denaro (in entrata o in uscita), la cui realizzazione avviene in tempi futuri rispetto al momento dell'attualizzazione, significa calcolare il valore di quelle stesse somme ad una data di valutazione antecedente a quella/e in cui esse si realizzano. Nei più comuni modelli di attualizzazione impiegati, ciò richiede la definizione di un tasso di attualizzazione che consenta di trasformare, ad esempio, il valore dei € 34.444 che prevediamo di ottenere al 31/12/2020 nel loro controvalore alla data di valutazione (01/01/2017).

Nel corretto dimensionamento del tasso di attualizzazione entrano in gioco diverse considerazioni, per le quali si rimanda a specifica trattazione.
Per gli scopi del presente lavoro, si può concludere che se si sceglie come tasso di attualizzazione il costo medio ponderato del capitale (WACC) si ottiene un valore attuale dei flussi previsionali che consente di prendere una decisione consapevole circa la convenienza economica del progetto ed inoltre di quantificare in termini monetari il valore reale che il progetto genera rispetto ad investimenti alternativi.
Il WACC è una media (ponderata) del rendimento richiesto dagli azionisti (che equivale al ritorno medio offerto da investimenti con lo stesso profilo di rischio) e della remunerazione che va riconosciuta ai finanziatori in termini di interessi sul debito. Dunque, si considerano tre differenti ipotesi:
-Il VAN del progetto è positivo: in tal caso l'attività crea valore e ne crea in misura adeguata, ovvero in quantità pari o superiore al rendimento offerto da investimenti comparabili.
-Il VAN è negativo: il progetto offre un rendimento inferiore a quello richiesto dagli investitori, che pertanto avrebbero maggiore convenienza a scegliere progetti alternativi, giacché il presente non garantirebbe una remunerazione equa, ovvero potrebbe nel caso peggiore comportare perdite rispetto alle risorse investite.
-Il VAN è pari a zero: in tal caso, l'attività è a rendimento nullo, ovvero offre un rendimento esattamente in linea a quello di attività comparabili, ovvero pari al WACC.
Supponendo che il WACC sia pari al 12%, il VAN può essere calcolato come segue.
Misurando il tempo in anni, il momento della valutazione (01/01/2017) corrisponderà all'istante t = 0, il momento di chiusura dell'anno 2017 corrisponderà a t = 1, il 31/12/2018 sarà t = 2 e così via.

Si avrà pertanto:

$$VAN = \sum_{t=0}^{5} FCO_t \cdot (1+WACC)^{-t} = FCO_0 + \frac{FCO_1}{(1+WACC)} + \frac{FCO_2}{(1+WACC)^2} + \frac{FCO_3}{(1+WACC)^3} + \frac{FCO_4}{(1+WACC)^4} + \frac{FCO_5}{(1+WACC)^5} =$$

$$= -100.000 + \frac{44.317}{1,12} + \frac{42.830}{(1,12)^2} + \frac{39.642}{(1,12)^3} + \frac{34.444}{(1,12)^4} + \frac{46.888}{(1,12)^5} = € \, 50.424$$

L'analisi del valore attuale netto conferma in definitiva che il progetto risulta conveniente in quanto crea valore in misura superiore a quanto offerto da investimenti alternativi il cui costo-opportunità del capitale è pari al 12%.
In conclusione, il VAN consente di misurare in termini monetari il valore creato da un progetto di investimento ed individua inoltre un criterio oggettivo per stabilire se conviene intraprendere il progetto oppure no. Richiede tuttavia la definizione di uno standard di redditività attesa (il WACC), doppiamente interpretabile come rendimento offerto da investimenti alternativi oppure come costo del capitale, ovvero la remunerazione attesa da azionisti e finanziatori.

Per la valutazione di progetti di investimenti contraddistinti da forte incertezza nei flussi di cassa attesi e nella quantificazione del rischio e dalla possibilità di un intervento del management successivo all'inizio del progetto il criterio del VAN potrebbe risultare inadeguati. Infatti, un progetto che presenti tali caratteristiche di "incertezza" e "governabilità" violerebbe le ipotesi implicite sottostanti il concetto di VAN. Inoltre, se i progetti presentano molteplici cambiamenti di segno si ipotizza una situazione alquanto irrealistica: l'ipotesi per cui operazioni di investimento e di finanziamento, utilizzano lo stesso identico tasso.
Il VAN risulta comunque uno strumento adeguato ai fini del pricing di titoli obbligazionari a reddito fisso o di ambiti applicativi affini in termini di stabilità e prevedibilità delle performance (titoli azionari con politica di stabilizzazione dei dividendi, investimenti sostitutivi in campo industriale, "cash cows").
Si determinano diversi valori del VAN per ciascun progetto da valutare in base a tre scenari alternativi di fondo: pessimistico, ottimistico e di massima verosimiglianza.

Attraverso una simulazione Montecarlo ciascuna delle combinazioni generate in modo casuale dà luogo ad un particolare VAN. Associando a ciascun VAN la relativa frequenza è possibile costruire la distribuzione di probabilità dei possibili valori del VAN.

Si consideri come esempio un investimento di ampliamento della struttura produttiva di una società, utilizzando come strumento di valutazione economica il VAN, occorrerà definire i parametri rilevanti quali investimento iniziale atteso e flusso di circolante della gestione corrente, definire il modello che consiste nell'algoritmo che genera valori del VAN in funzione dei due parametri rilevanti individuati, infine definire il range dei possibili valori che le due variabili rilevanti possono assumere e determinare la loro distribuzioni di probabilità.

Distribuzione probabilità investimento iniziale:

distribuzione probabilità investimento iniziale (F_0)		
Valore	**Probabilità**	**Numeri casuali assegnati**
60	0,2	da 1 a 20
65	0,4	da 21 a 600
67	0,3	da 61 a 90
70	0,1	da 91 a 100
Totale	1	

Distribuzione probabilità livello del flusso circolante corrente:

distribuzione probabilità livello del flusso di circolante corrente (Ft)		
Valore	**Probabilità**	**Numeri casuali assegnati**
18	0.15	da 1 a 15
24	0.45	da 16 a 60
28	0.25	da 61 a 85
30	0.15	da 86 a 100
Totale	1	

Occorre adesso selezionare una funzione di generazione di numeri casuali.

Una serie di coppie di numeri casuali vengono generate, di cui il primo associato all'investimento iniziale richiesto e il secondo al livello di flusso di circolante della gestione corrente.

Risultati della Simulazione:

Risultati della Simulazione				
1° numero casuale	Investimento Iniziale	2° numero casuale	Flusso di Circolante	VAN
34	65	36	24	11
53	65	18	24	11
95	70	28	24	6
39	65	14	18	-8
…	…	…	…	…

Sono generate così 19 coppie di numeri casuali e si giunge alla definizione di 20 valori del VAN che vanno da un minimo di 8 a un massimo di 35.
Tali valori sono il risultato di 20 delle possibili combinazioni ottenibili dalle serie di valori associati alle variabili chiave. Avendo costruito la distribuzione di probabilità del VAN è possibile determinarne il valore atteso.

Il valore ottenuto suggerisce che il progetto possa essere intrapreso, fatto salva qualsiasi altra considerazione in merito ad aspetti ed obiettivi aziendali che non coincidono con il valore attuale netto atteso.
In definitiva il VAN nel contesto della valutazione degli investimenti, presenta alcuni limiti che attengono soprattutto alla corretta ponderazione del fattore rischio. La sua

Inadeguatezza va letta non soltanto alla luce dell'incertezza dei flussi e della rischiosità, ma anche con riferimento alla possibilità che il decisore intervenga in fasi successive all'implementazione del progetto "flessibilità manageriale".

2.3 Tasso interno di rendimento (TIR)

La determinazione del Tasso Interno di Rendimento è data dalla risoluzione dell'equazione rispetto alla variabile *i*, posto il valore del VAN pari a zero.
In questo senso il tasso i rappresenta il costo massimo dei mezzi finanziari che l'azienda può assumere in relazione a quel determinato progetto. Il tasso interno di rendimento non può essere calcolato direttamente, ma, come detto, si deve risolvere ricorsivamente la seguente equazione polinomiale:

$$-C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} = 0$$

Il TIR è, quindi, il tasso per il quale il VAN è nullo.
Seguendo la logica del TIR per la valutazione di un investimento, quest'ultimo sarà economicamente vantaggioso quando il TIR del progetto sarà maggiore del costo opportunità del capitale.

Per quanto intuitiva e concettualmente valida, anche la valutazione tramite TIR presenta dei limiti strutturali e concettuali.
In primis va sottolineato che con una notevole quantità di flussi il calcolo stesso diventa particolarmente ostico e per la risoluzione è necessario l'utilizzo di un computer.
A questo problema vanno aggiunti i seguenti svantaggi:
I) L'inversa proporzionalità dei valori attuali netti e del tasso di sconto non è assicurata in tutte le serie di free cash flow;
II) Qualora nei flussi si alternino entrate ed uscite si genereranno plurimi TIR, tanti quanti l'alternanza dei segni dei flussi, per lo stesso investimento. In questi casi il ricorso al TIR non è attuabile e bisogna ricorrere a metodologie alternative come VAN, Payback ratio ecc.
III) Il confronto tra TIR e VAN è sempre consigliato; progetti con VAN minori potrebbero essere favoriti scegliendo in base al TIR. Questo succede soprattutto quando le dimensioni degli investimenti sono molto differenti o in situazioni di particolari distribuzioni temporali dei flussi.

IV) Il TIR ipotizza un tasso di attualizzazione dei flussi costante durante tutta la vita del progetto, condizione che non è facilmente verificabile nella realtà.

Come per gli altri metodi di calcolo ciò evidenzia l'opportunità di calcolare, per una valutazione più completa di un progetto di investimento, quanti più indici possibile.
Nel dettaglio "Il TIR è definito come quello specifico tasso di attualizzazione per cui il VAN di un progetto risulta pari a zero ed esprime il tasso di rendimento reale del progetto"[20].
Il TIR potrebbe richiamare concettualmente il WACC anche se tra i due ci sono notevoli differenze. Il Weighted Average Cost of Capital infatti, è il tasso che esprime il costo medio ponderato delle fonti di capitale. Il WACC, infatti, non esprime una misura di redditività ma il costo al quale si reperiscono fondi e quindi con il quale occorre confrontare il rendimento del progetto per stabilire se l'investimento conviene.
Nel paragrafo dedicato al VAN è stato stabilito che un progetto di investimento crea valore se il VAN del progetto è maggiore di zero. In maniera equivalente, si può affermare che un progetto è conveniente da un punto di vista finanziario se il suo TIR è superiore al WACC (o in generale superiore al tasso di attualizzazione scelto per il calcolo del VAN). Si comprende allora che il criterio del TIR stabilisce essenzialmente che il rendimento di un progetto deve essere superiore al costo-opportunità del capitale, ovvero deve essere maggiore del ritorno offerto da progetti alternativi aventi lo stesso profilo di rischio.

TIR > WACC Intraprendere progetto/Progetto conveniente

Si consideri il seguente scenario. Supponiamo di investire € 1.000 il 31/12/2016 e di ottenere a seguito dell'investimento entrate pari ad € 400 per ciascuno dei tre anni successivi. Sono necessarie le seguenti domande:
Il progetto crea valore o distrugge valore?
A quanto ammonta il valore creato?
Qual è il rendimento effettivo dell'investimento?
Il rendimento ottenuto è adeguato al rischio che mi sono assunto investendo risorse per € 1.000?

[20] Definizione data dal sito di analisi finanziaria cloudfinance.it

Date	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	31/12/2019
Flussi di cassa [€]	-1.000	+400	+400	+400

Per decidere in maniera consapevole se accettare o meno un investimento che preveda flussi finanziari come quelli indicati nello schema ed allo stesso tempo per stabilire il valore reale creato dal progetto, non è possibile ragionare in senso assoluto ma bisogna individuare un parametro di confronto, ovvero fare riferimento ad operazioni di investimento alternative che abbiano lo stesso profilo di rischio dell'investimento considerato. Si supponga allora che esistano progetti di investimento comparabili che garantiscono un rendimento del 7%. A quali condizioni dovrei preferire (o scartare) il progetto descritto in precedenza? La risposta è, in effetti, piuttosto intuitiva: si accetta il progetto se mi rende più del 7%, altrimenti conviene intraprendere uno degli investimenti alternativi che il mercato offre.

Un esempio concreto per il calcolo del TIR per verificare operativamente se il progetto è conveniente.

Individuato lo standard di redditività al quale fare riferimento, pari al 7%, il VAN dell'investimento si ottiene attualizzando i flussi di cassa al 31/12/2016, che si assume come momento temporale in cui effettuare la valutazione, ad un tasso pari, appunto al 7%.

$$VAN = -1.000 + \sum_{t=1}^{3} 400 \cdot (1+7\%)^{-t} = -1.000 + \frac{400}{1,07} + \frac{400}{(1,07)^2} + \frac{400}{(1,07)^3} = € \, 49,73$$

Il valore attuale del progetto è positivo, quindi, secondo il criterio del VAN è conveniente rispetto ad investimenti alternativi il cui rendimento è mediamente del 7%.

Difatti, calcolando il TIR, si ottiene che il rendimento effettivo del progetto considerato è superiore al 7%:

TIR = 9,70%.

Si ottiene quindi una conferma di quanto si è mostrato calcolando il VAN: conviene investire in un simile progetto.
Come si calcola operativamente il TIR del progetto considerato? In teoria, risolvendo la seguente equazione in funzione dell'incognita *i*:

$$-1.000 + \frac{400}{(1+i)} + \frac{400}{(1+i)^2} + \frac{400}{(1+i)^3} = 0$$

In pratica, invece, è necessario ricorrere ad un programma che implementi la risoluzione numerica di problemi di questo tipo (ad es. Microsoft Excel), dato che non è possibile trovare una relazione analitica generale che esprima l'incognita in funzione dei dati noti per la totalità delle situazioni possibili.

L'applicabilità del criterio del TIR è tuttavia limitata ad alcune casistiche particolarmente semplici, come quella descritta dall'esempio precedente in cui, come si può notare, l'investimento viene effettuato in un'unica soluzione all'inizio del periodo di previsione e ad esso seguono flussi di cassa tutti di segno positivo. Esistono purtroppo svariate casistiche in cui il TIR non è calcolabile (nel senso che non esiste un numero reale che soddisfi l'equazione) oppure esistono TIR multipli e dunque non è possibile dare una valutazione univoca dell'investimento.

A titolo esemplificativo, per mostrare il limite del TIR appena citato, si consideri il seguente scenario, nel quale ad un investimento iniziale fa seguito un'entrata di cassa dopo un anno e successivamente una uscita di cassa.

Date	**31/12/2016**	**31/12/2017**	**31/12/2018**
Flussi [€]	-1.000	+3.000	-2.500

Ebbene, si può dimostrare che il VAN di questo progetto è sempre negativo, qualunque sia il tasso di attualizzazione al quale il valore attuale netto è calcolato (ad esempio, il

VAN al 7% è pari a € -379). Ciò implica che non esiste alcun tasso di attualizzazione per cui il VAN sia pari a zero, dunque per il progetto in questione non c'è nessun TIR.

E allora, come si può stabilire se questo progetto rende di più o di meno di investimenti comparabili? Semplicemente utilizzando il criterio del VAN, che rimane applicabile anche ad una situazione del genere e, nello specifico, rivela che il progetto in questione ha sempre un VAN negativo per qualsiasi tasso di attualizzazione e quindi va scartato indipendentemente dallo standard con il quale lo si raffronti.

Esaminando un altro caso piuttosto comune, si supponga di dover sostenere un investimento iniziale pari ad € 1.000, seguito da una serie di flussi di cassa positivi e da una uscita di cassa finale prevista per l'ultimo anno del piano. Uno scenario del genere non è affatto inverosimile e può verificarsi, ad esempio, nel caso in cui le imposte vengano pagate l'anno successivo al periodo di competenza oppure per quei progetti che prevedono significativi costi di dismissione.

Date	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	31/12/2019	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022
Flussi [€]	-1.000	+800	+150	+150	+150	+150	-150

Se ci si chiedesse quale sia il TIR di un progetto di investimento che prevede i flussi indicati, ci si troverebbe di fronte ad un doppio valore: -50% e +15,2%. Infatti, il VAN del progetto risulta pari a zero per entrambi i valori indicati. E allora, che rendimento garantisce il progetto, -50% oppure 15,2%? Conviene intraprenderlo?

Da un punto di vista tecnico, l'equazione che consente di ottenere il TIR presenta in questo caso due soluzioni diverse e ciò si deve al fatto che i flussi di cassa cambiano segno 2 volte nella serie. Abbiamo infatti un'uscita seguita da un flusso di cassa positivo (primo cambiamento di segno) e registriamo un ulteriore cambiamento nel segno dei flussi tra il 2021 e il 2022 quando si passa da un valore positivo ad uno negativo.

Purtroppo, in tutti i casi in cui si hanno due o più variazioni nel segno dei flussi di cassa, non esiste un unico TIR ma si hanno TIR multipli: questo perché, nel calcolo del tasso interno di rendimento, ci si trova davanti ad un'equazione polinomiale di grado *n* e dunque la soluzione non sarà quasi in nessun caso unica.

Le circostanze in cui ciò accade possono essere molteplici e questo pone serie limitazioni alla possibilità di utilizzare il TIR come misura di rendimento, prima ancora che come criterio per la valutazione di investimenti. Da questo ultimo punto di vista, per fortuna, possiamo ricorrere ancora una volta al calcolo del VAN e prendere una decisione consapevole, indipendentemente dal fatto che non si riesca a calcolare il tasso interno di rendimento del progetto. Nel caso specifico, ad esempio, il VAN del progetto, con riferimento ad un tasso di attualizzazione del 7%, è pari a € 122,53, dunque spingerebbe ad accettare il progetto. Dal punto di vista della misurazione della redditività, invece, è opportuno in questo caso ricorrere ai tradizionali indicatori contabili.

Un'ulteriore limitazione all'impiego del TIR come criterio per la valutazione di progetti di investimento si può presentare nel caso in cui si utilizzi un modello di attualizzazione in cui il costo del capitale non è fisso ma varia da un anno all'altro.
Ciò può accadere qualora si scegliesse di stimare il WACC calcolando un valore dello stesso per ciascun anno del piano previsionale, in modo da tenere conto, ad esempio, di eventuali variazioni significative della struttura finanziaria dell'azienda tra un anno e l'altro. Se allora il costo del capitale cambia di anno in anno, con quale valore conviene confrontare il TIR del progetto per capire se è conveniente? Piuttosto che ragionare su come effettuare una media correttamente ponderata dei diversi valori WACC, si può, ancora una volta, ricorrere al calcolo del VAN e prendere una decisione sulla base di questo.

Come nel caso del VAN, per i progetti non puramente di investimento (ovvero per i progetti che presentano variazioni di segno nel cash flow), questo criterio non è applicabile in quanto il tasso che viene determinato è unico, mentre nei mercati finanziari difficilmente i tassi di investimento e finanziamento coincidono.

In conclusione, il TIR consente di determinare il tasso di rendimento di un progetto di investimento o di qualsiasi attività economica e, al contempo, di valutarne la convenienza rispetto a progetti alternativi. Nell'ottica dell'analisi finanziaria, l'impiego del TIR come misura di redditività è senz'altro da preferirsi rispetto ai tradizionali indicatori contabili. Tenendo sempre in considerazione le limitazioni del metodo precedentemente discusse, rimane salva la possibilità di valutarne la convenienza ricorrendo al criterio del VAN che, al contrario del TIR, è applicabile in ogni circostanza.

Capitolo 3
Simulazione Montecarlo: il caso pratico

3.1 Il programma Python

Python è un linguaggio di programmazione ad alto livello, orientato agli oggetti, adatto, tra gli altri usi, a sviluppare applicazioni distribuite, scripting, computazione numerica e system testing.
Fu ideato da Guido van Rossum[21] all'inizio degli anni novanta. Il nome fu scelto per via della passione di van Rossum per i Monty Python e per la loro serie televisiva Monty Python's Flying Circus. Python è spesso paragonato a Ruby, Tcl, Perl, Java, JavaScript, Visual Basic o Scheme.
È un linguaggio multi-paradigma che ha tra i principali obiettivi: dinamicità, semplicità e flessibilità. Supporta il paradigma object oriented, la programmazione strutturata e molte caratteristiche di programmazione funzionale e riflessione.
Le caratteristiche più immediatamente riconoscibili di Python sono le variabili non tipizzate e l'uso dell'indentazione per la definizione delle specifiche. Altre caratteristiche distintive sono l'overloading di operatori e funzioni tramite delegation, la presenza di un ricco assortimento di tipi e funzioni di base e librerie standard, sintassi avanzate quali slicing e list comprehension.

[21] Guido van Rossum è un informatico olandese, creatore del linguaggio di programmazione Python. Nella comunità di Python viene definito "Benevolo Dittatore a Vita", nel senso che continua a seguire il processo di sviluppo di Python, prendendo decisioni ovunque necessarie.

3.2 Montecarlo attraverso il programma Python

In quest'ultimo paragrafo si riporterà un esempio pratico sulla valutazione di un progetto di investimento attraverso il metodo di Montecarlo.

La creazione del programma è stata effettuata tramite linguaggio Python 3 e il sito utilizzato è Repl[22].

Il programma calcolerà il Van di un progetto di investimento di 5 anni i cui ricavi sono funzioni di due variabili: numero di clienti e prezzo per transazione. Reitererà questo calcolo *n* volte (numero di iterazioni) e restituirà la media degli *n* VAN ottenuti e i relativi indici.

In primo luogo, si definiscono le costanti; esse rimarranno tali per l'intero funzionamento del programma (anche se è comunque possibile, attraverso l'utilizzo di array, modificarle, ma non occorrerà in questa sede).

Si definisce *i*=0,14 il tasso al quale si attualizzerà. Solitamente il tasso che utilizzano le imprese per compiere questo calcolo è il WACC.

Si definisce poi, per semplicità di calcolo, il fattore di attualizzazione *v*. Il fattore di attualizzazione corrisponde al reciproco del fattore di capitalizzazione (=1+*i*).

Infine, si definisce la costante 'NumeroCicli' come il numero di iterazioni che il calcolatore compirà, impostato a 10000[23].

```
#COSTANTI
i=0.14
v=1/(1+i)
NumeroCicli=10000
```

Successivamente si definiscono le variabili globali, ovvero quei valori che muteranno durante il funzionamento del programma.

[22]Repl.it è il sito utilizzato. Un Read–Eval–Print Loop, noto anche come un interactive toplevel o linguaggio shell, è un ambiente di programmazione semplice e interattivo che accetta input da parte di un singolo utente, li valuta e restituisce il risultato all'utente; un programma scritto in un ambiente REPL viene eseguito a tratti.

[23] L'utilizzo del cancelletto (#) consente di scrivere delle note che non verranno lette dal calcolatore.

Si definisce 'sommaVAN' (linea 6) la variabile all'interno della quale verrà memorizzato ogni VAN calcolato, uno per ogni iterazione, sommandolo a quello precedente; questa variabile è utile ai fini del calcolo della media.

All'interno delle variabili 'minVAN' e 'maxVAN' (linee 7,8) verranno memorizzati rispettivamente il VAN minimo e il VAN massimo, riscontrati all'interno delle *n* iterazioni.

Inizialmente il valore massimo del VAN è impostato a 0, il minimo a -1 (valore impossibile per un VAN, ma è preso come inizio ciclo); nel corso del programma cambieranno valore, il cui funzionamento è spiegato successivamente.

Infine, la variabile 'arrVAN' (linea 9) è una lista[24], inizialmente vuota, alla quale verranno aggiunte ad ogni iterazione tutti i VAN; questa variabile è utile ai fini del calcolo della varianza.

```
5    #VARIABILI GLOBALI
6    sommaVAN=0
7    minVAN=-1
8    maxVAN=0
9    arrVAN = []
```

Successivamente verranno importate le funzioni.

Python, infatti, consente di importare, da una libreria, funzioni che non sono di base all'interno del programma, ma che possono essere utilizzate grazie alla funzione '*import*'. '*Import random*' viene utilizzata per importare una funzione che consenta al programma di scegliere un numero all'interno di un range prestabilito, come si vedrà in seguito. Con la funzione "*from*" si prende da una libreria solo una specifica funzione, nel caso specifico la funzione "*var*", per calcolare la varianza, dalla libreria "*numpy*", che la contiene.

[24] Con il termine "lista" ci si riferisce a una serie di numeri o di stringhe in successione.

```
10  #import funzioni
11  import random
12  from numpy import var
```

Si definisce successivamente la funzione per il calcolo del cash flow che avverrà poi nelle linee successive (19-24).

Attraverso la funzione "*def* "si definisce un'ulteriore funzione, nominata Cashflow, che dipende da due variabili: il numero di clienti e il prezzo per transazione.

Il programma tuttavia ne considera quattro; questo perché il prezzo e il numero dei clienti, attraverso la funzione "*random.randrange*[25]" sopra citata, oscillano casualmente (o pseudo-casualmente) tra un prezzo minimo e un numero di clienti minimo e tra un prezzo massimo e un numero di clienti massimo. Una volta richiamate le variabili con la funzione "*return*", il programma restituisce il risultato della funzione sopra definita.

```
13  #Funzione per il calcolo del cash flow
14  def CashFlow(num_clienti_min, num_clienti_max,
    prezzo_min, prezzo_max):
15      n=random.randrange(num_clienti_min,
        num_clienti_max)
16      p=random.randrange(prezzo_min,prezzo_max)
17      return (n*p)
```

Successivamente si calcolano i cash flow per ciascun anno (da 1 a 5):

[25] La funzione (random.randrange) corrisponde alla funzione "casuale.tra" di Microsoft Eexcel.

La funzione "*for*" introduce un ciclo: ovvero per ogni numero (x) che va da 0 ad *n* (numero di cicli) il calcolatore calcolerà il cash flow richiamando la funzione definita prima.

Come è stato anticipato, il numero di clienti varia da un minimo, che ora si imposta a 10, ad un massimo di 100. I ricavi per cliente variano invece da un minimo di €10mila ad un massimo di €50mila.

Si precisa che i dati sono stati inseriti casualmente supponendo una piccola-media impresa; il numero di clienti e i ricavi per cliente, sono stati supposti fissi per tutti e 5 gli anni per semplicità di calcolo. In una situazione reale entrambi dovrebbero variare con il variare del tempo per le politiche di prezzo e per il condizionamento di altri fattori, che però qui non vengono considerati.

```
#Calcolo del cash flow
for x in range(0, NumeroCicli):
    X1=CashFlow(10, 100 , 10000, 50000)
    X2=CashFlow(10, 100, 10000, 50000)
    X3=CashFlow(10, 100, 10000, 50000)
    X4=CashFlow(10, 100, 10000, 50000)
    X5=CashFlow(10, 100, 10000, 50000)
```

Si procede dunque calcolando gli *n* VAN, che il calcolatore registrerà al suo interno ma non stamperà, a meno che non sia richiesto. Ricordiamo la formula del VAN:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

Attraverso il calcolo del VAN è possibile procedere calcolando gli indici: media, minimo massimo, varianza e deviazione standard.

Con *arrVan.append*(VAN) si aggiunge alla lista "*arrVAN*" gli *n* VAN calcolati volta per volta, questo perché la funzione "var" necessita di una stringa con al suo interno tutti i numeri per i quali la varianza deve essere calcolata; la funzione *".append()"* si utilizza proprio per aggiungere una stringa alla fine della lista.

Attraverso la funzione “*if:*” è possibile calcolarne il massimo e il minimo. Nello specifico, se una condizione è verificata, il programma ne produrrà conseguentemente un’altra. Nel caso particolare, se il VAN è minore del minimo, allora salverà il VAN appena riscontrato come minimo; in caso contrario il minimo rimarrà il VAN minore riscontrato fino a quel momento. La stessa dinamica si verifica anche per il valore massimo.

```
#Calcolo del VAN e degli indici
    VAN=(X1*v**(1))+(X2*v**(2))+(X3*v**(3))+(X4*v**(4))+(X5*v**(5))
    #varianza
    arrVAN.append(VAN)
    #minimo
    if minVAN == -1 :
        minVAN = VAN
    if VAN < minVAN :
        minVAN=VAN
    #massimo
    if VAN > maxVAN:
        maxVAN=VAN
    #somma per la media
    sommaVAN=sommaVAN+VAN
```

Infine, attraverso la funzione “print” è possibile stampare ciò che il programma ha calcolato. Nel caso specifico: la Media, che sarà pari alla somma di tutti gli n VAN calcolati diviso per le n iterazioni; il minimo e il massimo pari a minVAN e maxVAN; la varianza, calcolata attraverso la funzione var e la lista contenente tutti i VAN; la deviazione standard pari alla radice quadrata della varianza.

```python
#Stampa dei valori
print ('Media VAN=',    sommaVAN/NumeroCicli)
print ('Minimo VAN=',   minVAN)
print ('Massimo VAN=', maxVAN)
print ('Varianza =',    var(arrVAN))
print ('Deviazione standard=', (var(arrVAN))**(1/2))
```

L'output finale sarà il seguente:

```
Media VAN= 5614682.654753215
Minimo VAN= 1274535.012894893
Massimo VAN= 11944074.65452797
Varianza = 2659114481329.833
Deviazione standard= 1630679.1472665102
```

Infine, si riportano i dati in una tabella e si calcolano i percentili e la normale

MEDIA	5.614.682,65 €
MASSIMO	11.944.074,65 €
MINIMO	1.274.535,01 €
DEVIAZIONE STANDARD	1.630.679,15 €
VARIANZA	2.659.114.481.329,83 €
5%	2.932.215,46 €
10%	3.527.413,35 €

15%	3.918.776,34 €
20%	4.244.912,17 €
25%	4.513.974,23 €
30%	4.758.576,10 €
35%	4.986.871,18 €
40%	5.207.012,87 €
45%	5.407.586,40 €
50%	5.614.682,65 €
55%	5.821.778,91 €
60%	6.022.352,44 €
65%	6.242.494,13 €
70%	6.470.789,21 €
75%	6.715.391,08 €
80%	6.984.453,14 €
85%	7.310.588,97 €
90%	7.701.951,96 €
95%	8.297.149,85 €

Conclusioni

Il metodo Montecarlo è in grado di fornirci un semplice strumento addizionale per il pricing di numerosi strumenti finanziari anche data la disponibilità di add-in per fogli elettronici in grado di semplificare il processo di iterazione.

Occorre peraltro tener conto che il risultato è dipendente dal numero di iterazioni e dalla “qualità” del processo di generazione dei numeri casuali necessari a simulare la componente non deterministica del processo stocastico.

Nel corso di questi capitoli si è descritto come la simulazione Montecarlo possa fornire degli strumenti utili per la risoluzione di problemi finanziari complessi da un punto di vista analitico, che non presentano soluzioni in forma chiusa. Si tratta, quindi, di uno strumento certamente molto utile, poiché, al di là delle difficoltà applicative, permette la risoluzione di problematiche analiticamente “impossibili” da elaborare.

La simulazione Montecarlo non deve essere considerata uno strumento in grado di sopperire all’assenza di conoscenze circa il parametro da stimare, al fine di considerare attendibili i risultati ottenuti sono necessari degli studi che permettano l’implementazione della simulazione con parametri di input che siano il più verosimili possibile.

Bibliografia

-A.C. Monto, Introduzione alla statistica, ESI

- A.N. Kolmogorov, Teoria delle probabilità, Teknos, Roma 1995

-C.Crenca, P.Fersini, G.Melisi, G.Olivieri, M.Pelle, Matematica Finanziaria, Pearson

- Aswath Damodaran, Valutazione delle aziende, Apogeo

-Fabrizio Cacciafesta, Matematica Generale, Giappichelli, Torino

- Francesco Meson, Metodi quantitativi per le decisioni, Giappichelli, Torino

- Pierangelo Cignoli, "Introduzione alla Simulazione", Giappichelli, Torino 1976

-Risk Analysis and Simulation, Palisade

- http://www.financerisks.com