

**Arbitraggi nel mercato valutario:
un'algebra matriciale per l'identificazione in tempo reale**

Candidato:
Davide Casoli

Relatore:
Prof. Emilio Barone

Correlatore:
Prof. Gaetano Casertano

Indice

1	Mercato ForEx	5
1.1	Definizione	5
1.2	La struttura del mercato	7
1.3	Volumi scambiati	8
1.4	Teoria dei mercati efficienti	10
1.5	La funzione dei mercati spot e forward	12
1.6	Modelli micro e macro-economici	16
1.6.1	Micro-models	16
1.6.2	Macro-models	19
1.7	L'importanza del flusso di ordini	19
2	Le determinanti del tasso di cambio	24
2.1	Purchasing Power Parity (PPP)	25
2.2	Uncovered Interest Parity (UIP)	27
2.3	Covered Interest Parity (CIP)	28
3	I rischi nel mercato valutario	31
3.1	Definizione	31
3.2	Rischio di cambio	33
3.3	Rischio d'interesse	33
3.4	Rischio di credito	34

3.5	Rischio di controparte	34
3.6	Rischio di liquidità	35
4	Gli arbitraggi nel mercato valutario	38
4.1	Definizione	38
4.2	Tipologie	40
4.3	Pure Arbitrage	40
4.3.1	Covered Arbitrage	41
4.3.2	ϵ -arbitrage e δ -direct-arbitrage	43
4.3.3	Arbitraggi Triangolari	47
4.4	Relative Value Arbitrage	48
4.4.1	Pairs Strategies	49
4.4.2	Carry trade e Momentum	51
4.5	Analisi empiriche	53
5	Arbitraggi e algebra matriciale	55
5.1	Le matrici e le implicazioni finanziarie	55
5.2	Il Teorema di Perron-Frobenius	56
5.3	La struttura di calcolo generale	59
5.4	Metodo <i>Cui et al. (2018)</i>	59
5.5	Metodo <i>Ma (2008)</i>	62
5.5.1	La matrice benchmark	64
5.5.2	L'Arbitrage Possibility Indicator (API)	66
5.5.3	La matrice di confronto	67
5.5.4	L'Arbitrage Earning Rate e le sue applicazione	68
5.5.4.1	Arbitraggi diretti	68
5.5.4.2	Arbitraggi triangolari	69
5.6	La relazione tra <i>API</i> e <i>AER</i>	70
5.7	La matrice perturbata	72

<i>INDICE</i>	3
6 Dati	74
6.1 Descrizione	74
6.2 Implementazione	76
Conclusione	79
A Grafici	85
Bibliografia	95

Capitolo 1

Mercato ForEx

1.1 Definizione

Il mercato valutario, conosciuto anche come mercato ForEx o FX, ha delle proprietà e delle caratteristiche peculiari che lo rendono molto interessante agli occhi degli investitori, sia in ottica speculativa che di hedging.

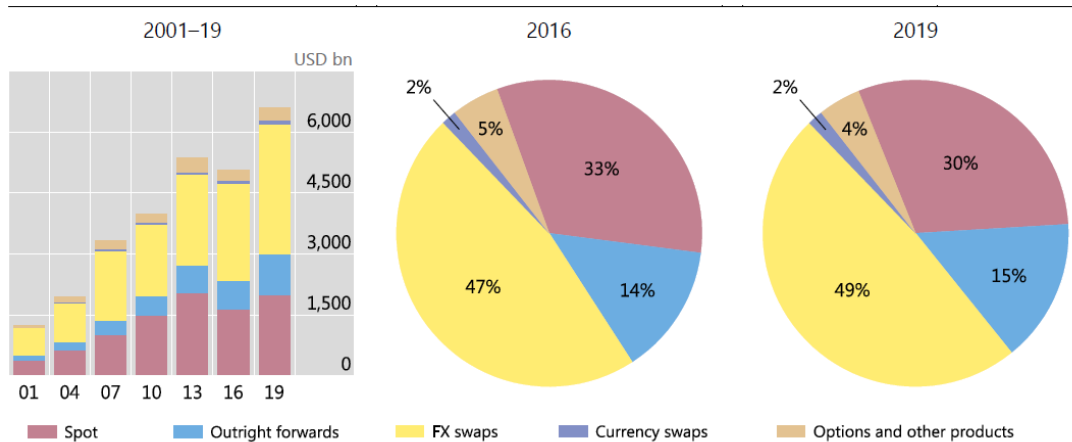
Per avere un'idea delle moli di volume e denaro che circolano all'interno di questo mercato, si può fare riferimento alla BIS Triennial Central Bank Survey. Questa statistica triennale a cura della Bank of International Settlements è la fonte di informazioni più vasta e comprensiva in termini di grandezza e struttura del mercato valutario globale, così come dei mercati OTC che ne fanno riferimento.

Il suo scopo principale è quello di migliorare il livello di trasparenza nei mercati OTC, in modo tale da aiutare gli operatori di mercato, gli investitori e le autorità di controllo e vigilanza – come le banche centrali – a monitorare lo sviluppo dei mercati finanziari.

L'attività del mercato FX è stata supervisionata ogni tre anni a partire dal 1986 dalla BIS con la collaborazione del Markets Committee. Nell'ultima analisi del 2019 sono state coinvolte le banche centrali ed altre autorità di 53 giurisdizioni diverse, raccogliendo una mole di dati proveniente da più di 1,300 tra banche ed

Foreign exchange market turnover by instrument¹

Net-net basis, daily averages in April

¹ Adjusted for local and cross-border inter-dealer double-counting, ie "net-net" basis.**Figura 1.1:** BIS Triennial Central Bank Survey, 16 September 2019

altri dealers. Da sempre uno dei mercati con il più alto tasso di scambi, ha fatto registrare nell'aprile del 2019 una media giornaliera di volumi pari al valore di \$6.6 trilioni, rispetto ai \$5.1 trilioni di tre anni prima [6]. Ciò è stato causato soprattutto dalla forte crescita dei comparti riguardanti i derivati sul ForEx, come ad esempio gli FX swaps - che nel settembre 2019 contavano il 49% del fatturato totale del mercato - e gli outright forwards, i quali hanno surclassato gli scambi sul mercato spot (scesi al 30% di share dal 33% del 2016).

Di conseguenza, questi ingenti volumi scambiati continuano ad immettere un'elevata liquidità nel mercato. Basti pensare che, a differenza del mercato azionario, nel mercato valutario si può operare durante tutto il giorno per tutti i giorni della settimana.

Un'altra caratteristica che differenzia questo mercato da quello azionario è il fatto che i prezzi che vengono quotati – oltre ad essere aggiornati con altissima frequenza – sono effettivamente scambiabili anziché puramente indicativi. Questo permette degli scambi, in termini di volumi, molto elevati ad una frequenza pressoché immediata, senza che il tutto vada ad influire sui profili di rischio e

di costo dell'operazione stessa e senza impattare direttamente sul prezzo della security (a differenza di quanto accade per le azioni) [5] [16].

Essendo uno dei mercati più vasti e liquidi in circolazione, si assume che il mercato valutario sia efficiente sia dal punto di vista teorico che empirico, anche se ciò non sempre si verifica. Un mercato efficiente, infatti, presuppone che non si possa ottenere un guadagno risk-free e che quindi non vi possano essere opportunità da cogliere in tal senso. Nel mondo reale, invece, queste opportunità si vengono a creare e diventano fruibili soprattutto grazie all'high frequency trading. Sicuramente la magnitudine e la durata – così come i profitti – derivanti da queste situazioni sono piccole ma piuttosto frequenti.

1.2 La struttura del mercato

Come precedentemente illustrato, il mercato valutario è il principale mercato finanziario del mondo. Qui gli investitori possono comprare e vendere le valute – locali o estere – a seconda dei propri bisogni.

Come precedentemente accennato, è l'unico mercato in cui gli scambi possono avvenire durante tutto l'arco della giornata, non essendoci orari di apertura o chiusura, anche se, fisiologicamente, si sono venute a creare delle fasce orarie in cui il volume di operazioni risulta in media più alto.

C'è da aggiungere che la maggior parte di questi scambi, però, avviene in pochi centri finanziari, come Singapore, New York, Tokyo, Francoforte, Londra, Parigi e Zurigo. I partecipanti a questo mercato sono principalmente governi, banche centrali, banche d'investimento e commerciali, hedge funds, brokers e investitori comuni. Ad esempio, a differenza degli altri mercati, la maggior parte dei corporate investors vi operano con lo scopo di facilitare le transazioni necessarie al proprio business, per coprirsi dal rischio di mercato e per soddisfare i propri bisogni di investimento a lungo termine [25].

Il mercato FX è un mercato principalmente over-the-counter (OTC) – ovvero privo di regolamentazione e di modalità di contrattazione standardizzate – in cui i prezzi vengono quotati dai brokers/dealers e gli scambi vengono negoziati direttamente tra i partecipanti.

Si può suddividere principalmente su due livelli, uno interbancario e un altro retail [19]. Fondamentalmente, gli scambi avvengono tra i dealers che operano nelle banche – nel mercato interbancario – e tra le banche e gli altri clienti nel mercato retail. Nessuno dei due mercati ha una location fisica in quanto sono telematici. Di conseguenza, questi scambi vengono trasmessi dagli operatori elettronicamente o per via telefonica.

Come la maggior parte degli altri mercati finanziari telematici, queste modalità di trasmissione e ricezione ordini permettono l'incontro tra domanda e offerta di investitori localizzati in tutto il mondo.

1.3 Volumi scambiati

Per quanto riguarda l'impatto che le diverse valute hanno all'interno del mercato, è opportuno citare alcuni dati provenienti dall'ultima statistica della BIS. Dalle varie analisi condotte, emerge come la valuta del dollaro americano abbia mantenuto il suo status quo di currency principale scambiata nei mercati, essendo presente da un lato per l'88% delle operazioni totali [6].

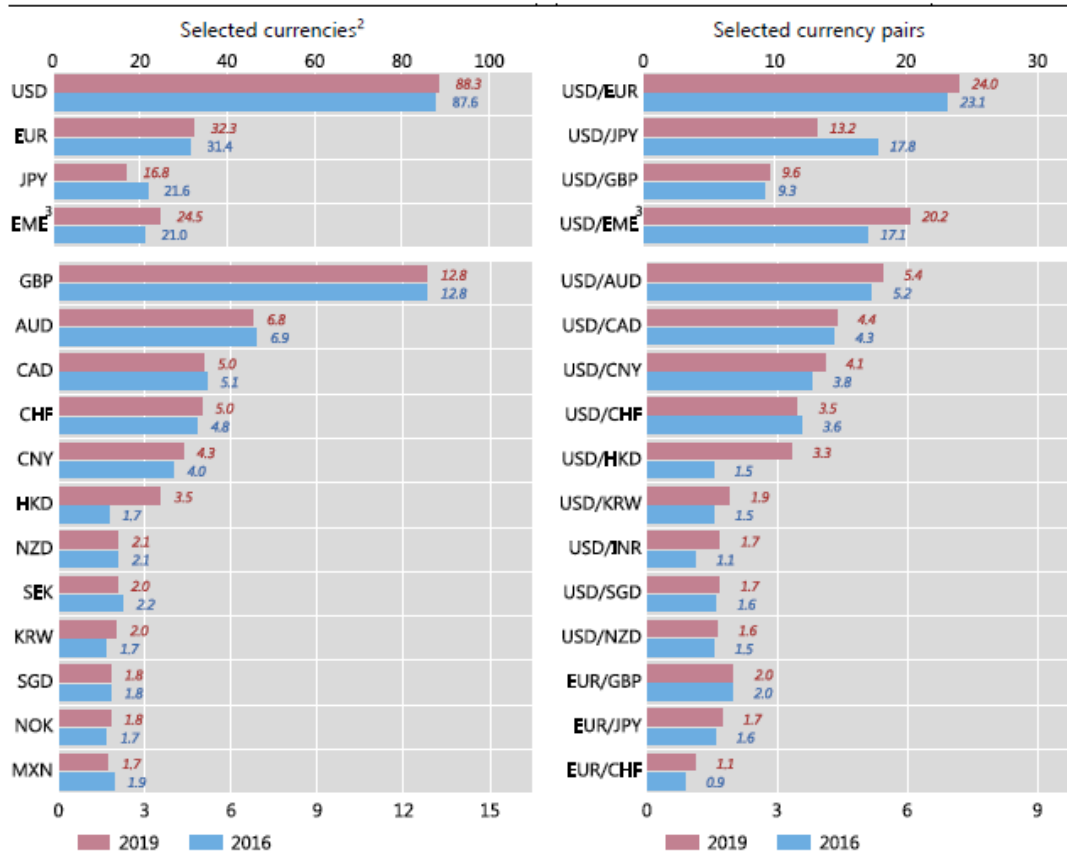
Il volume di scambi legati all'euro, invece, è aumentato al 32% rispetto al 2016 mentre quello dello yen ha perso un 5% di share, pur rimanendo al terzo posto tra le valute più scambiate con un 17% di volumi totali. Nonostante ciò, si può notare come le operazioni tra yen e altre valute – come EUR/JPY e AUD/JPY – siano aumentate durante lo scorso triennio [6].

Ancor più interessante è il fatturato medio giornaliero di alcune valute legate allo yen come JPY/TRY, JPY/ZAR e JPY/BRL che hanno quasi raddoppiato il

Foreign exchange market turnover by currency and currency pairs¹

Net-net basis, daily averages in April, in per cent

Graph 1



¹ Adjusted for local and cross-border inter-dealer double-counting, ie "net-net" basis. ² As two currencies are involved in each transaction, the sum of shares in individual currencies will total 200%. ³ EME currencies.

Figura 1.2: BIS Triennial Central Bank Survey, 16 September 2019

ricavo medio, passando da \$7 miliardi (2016) a \$12 miliardi (2019) [6].

Infine, le valute delle altre economie avanzate sono rimaste stabili nel periodo di osservazione: GBP con il 13%, AUD con il 7%, CAD con il 5% e il CHF al 5%.

Nota positiva da riscontrare nell'analisi BIS – come in quelle antecedenti al triennio – è la crescente attenzione che si sta avendo nei confronti delle valute delle economie emergenti. Ancor di più, salta all'occhio un dato importante: il 55% del global market turnover [6] avviene per via di scambi con altre istituzioni finanziarie diverse da banche, sintomo di un alto livello di investimento e speculazione.

1.4 Teoria dei mercati efficienti

La teoria dei mercati efficienti fu sviluppata, in maniera indipendente, sia da Paul A. Samuelson che da Eugene F. Fama durante gli anni Sessanta e fu una scoperta molto importante in ambito economico-finanziario in quanto diede la spinta a molte altre scoperte.

Samuelson fu il primo a generare l'idea intorno al 1965 con il suo contributo "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". La sua idea si basava sul fatto che in un mercato efficiente in termini di informazioni, le variazioni dei prezzi non potessero essere previste se opportunamente anticipate in precedenza, ovvero se avessero già incorporato le informazioni - così come le aspettative - dei partecipanti al mercato.

Al tempo stesso, questa teoria ha messo le basi sulla scelta delle meccaniche di prezzo, con o senza incertezza. Ciò fu motivo di spunto per altri ricercatori che arrivarono a costruire modelli di pricing (vedasi Black, Scholes e Merton) iniziando proprio da questa concezione di efficienza dei mercati.

Dall'altra parte, Eugene Fama era più concentrato nel misurare le proprietà statistiche appartenenti ai prezzi delle azioni e all'influenza dell'analisi tecnica e

fondamentale sull'andamento delle quotazioni [13].

Fu grazie alla sua tesi di dottorato, dal nome "The Behavior of Stock Market Prices" e pubblicata nel 1965 sul "Journal of Business", che Fama fu in grado di dare una definizione alla teoria dei mercati efficienti. Venne sostenuto come un mercato finanziario è efficiente se in ogni istante il prezzo delle attività è in grado di riflettere tutte le informazioni incorporate e disponibili a tutti i partecipanti al mercato, rendendo impossibili le operazioni di arbitraggio. È anche grazie alla concorrenza del mercato stesso se si riescono a raggiungere dei livelli di equilibrio nei prezzi.

Però se così fosse, ovvero se la teoria dei mercati efficienti reggesse veramente, si assisterebbe ad una fluttuazione casuale dei tassi di cambio in quanto essi incorporerebbero le informazioni e le aspettative dei partecipanti [45].

Proprio per testare questa ipotesi, Fama distinse tre varianti della teoria dei mercati efficienti in modo tale da poter essere soggette a test statistici [21]: la forma debole, semi-forte e forte.

Nella prima versione, ipotizzò che nei tassi di cambio venissero incorporate solamente le informazioni presenti e passate. In questo modo, gli analisti tecnici e gli algoritmi non sarebbero stati in grado di ottenere dei guadagni risk-free andando semplicemente ad analizzare i grafici passati dei tassi di cambio o le discrepanze tra coppie di valute.

Nella forma semi-forte, vennero incorporate anche quelle informazioni fondamentali che determinano i tassi di cambio. Anche in questo caso, gli stessi analisti e algoritmi non avrebbero potuto ottenere ricavi generati dalle notizie macroeconomiche o dalle informazioni derivanti dal flusso di ordini, sottolineando ancora una volta una parità all'interno del mercato.

Ed infine vi è la variante forte in cui le quotazioni dei tassi di cambio vennero concepite in modo da riflettere anche le informazioni private.

Per fare un esempio, un FX trader di una banca d'investimento non sarebbe

stato in grado di sfruttare un'opportunità di arbitraggio dovuta alle informazioni estrapolate dagli ordini dei propri clienti.

In realtà, sotto l'ipotesi debole, i tassi di cambio dovrebbero essere random e quindi gli arbitraggisti sarebbero in grado di guadagnare sulle opportunità che si verrebbero a creare per via di possibili discrepanze tra le varie coppie di valute. Mentre, per quanto riguarda le altre due ipotesi, ciò non sarebbe stato possibile.

Da questo punto si passa al così detto "arbitrage paradox" spiegato da Grossman e Stiglitz nel 1976 e che verrà discusso in seguito nei modelli macroeconomici ed alla loro scarsa affidabilità nel momento in cui le variazioni di prezzo si ipotizzano casuali.

1.5 La funzione dei mercati spot e forward

I mercati spot, in ambito valutario, possono essere visti come delle piattaforme di distribuzione in cui i dealers scambiano valute tra di loro e con i propri clienti, svolgendo – quindi – una funzione di market makers [17].

Gli stessi clienti possono eseguire le transazioni mettendosi contemporaneamente in contatto con più dealers in modo tale da ottenere la best executable quote. I dealers, d'altro canto, possono operare direttamente ed indirettamente nel mercato interbancario, a seconda di come svolgono le contrattazioni.

Bisogna aggiungere che nessun dealer conosce perfettamente lo stato del mercato interbancario, in quanto avere tutte le informazioni risulta quasi impossibile. Tuttavia, l'electronic brokerage permette agli operatori di ottenere un vasto spettro di informazioni, riguardanti sia il mercato che i prezzi dei beni – anche se i dealer difficilmente osservano i limit orders che generano poi la liquidità nel mercato [19]. Ciò che vanno ad osservare sono, principalmente, gli ordini che

le banche immettono nel mercato retail. Questi, infatti, sono la primaria fonte di informazione.

Basti pensare che i dealers che operano in banche con un bacino di utenti molto vasto e sparso in tutto il mondo hanno potenzialmente un vantaggio informativo rilevante rispetto agli altri partecipanti del mercato. Inoltre, i dealers devono costantemente avere a che fare con dei limiti, in termini di duration e grandezza delle loro posizioni. Infatti, le loro posizioni overnight sono tipicamente piccole o vicine allo zero [19].

Una volta che l'ordine è stato trasmesso, il FX dealer può scegliere se farlo eseguire nel mercato "interno" o meno. La scelta ricade sull'esigenza da parte del cliente di rimanere anonimo durante la transazione.

Questo meccanismo di esecuzione può avvenire tramite mediazione oppure può derivare da un accordo bilaterale tra le controparti.

Nel primo caso, le transazioni vengono mediate da un servizio di brokeraggio, servizio che un tempo veniva effettuato tramite telefono mentre al giorno d'oggi è svolto per mezzo di piattaforme elettroniche, come la Electronic Broking Services (EBS) a Reuters Dealing System 2000-2 (Reuters D2) [19]. In queste piattaforme, gli ordini vengono completati da un limit order book centralizzato, dove i partecipanti possono aggiungere e/o togliere i propri ordini al limite in qualsiasi momento oppure "colpire" le quote già presenti con ordini al mercato di segno opposto.

Per quanto riguarda il secondo caso, invece, gli scambi vengono effettuati tramite negoziazioni bilaterali condotte con dei sistemi di comunicazione decentralizzati, come il Reuters Dealing 3000 Spot Matching System [6].

Ovviamente queste piattaforme elettroniche hanno permesso il coinvolgimento di un numero di controparti sempre più elevato, andando così ad aumentare il volume di scambi e portando un incremento in termini di liquidità, immediatezza di esecuzione e trasparenza. Allo stesso tempo, tutte queste informazioni

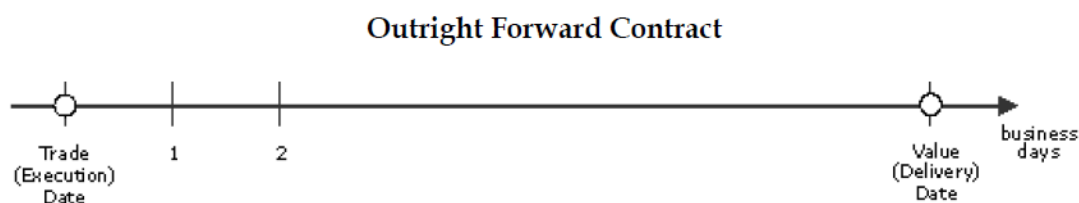
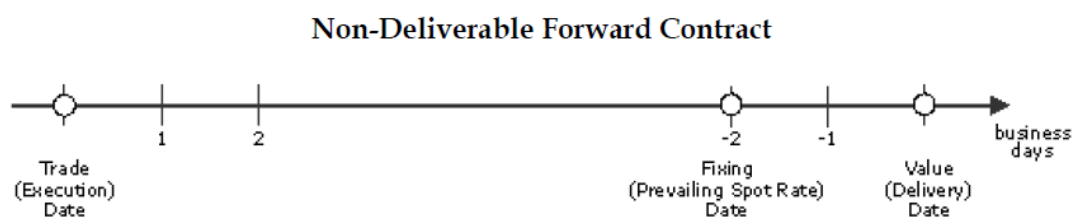
diventano utili per studiare il processo di trading, poiché rilevano la direzione, la size ed il prezzo di ogni ordine, lasciando l'investitore nell'anonimato.

Per quanto riguarda i mercati over-the-counter in generale, è opportuno ricordare che nonostante questa tipologia di mercato venga spesso utilizzata per fare trading su uno spettro di strumenti molto ampio, quando si parla di mercato forward OTC si fa spesso riferimento al mercato valutario.

Infatti, i contratti forward vengono principalmente utilizzati dai partecipanti del mercato per bloccare un tasso di cambio ad una precisa scadenza. Le due tipologie di contratti maggiormente utilizzati in ambito valutario sono gli outright forward [37] – contratti forward che vincolano i contraenti ad uno scambio fisico di fondi in una data futura ad un tasso prestabilito (senza upfront payment) – e i non-deliverable forwards [37] – contratti simili ai precedenti ma che permettono di fare hedging anche in situazioni in cui le restrizioni imposte dai governi sull'accesso alla moneta locale, o in cui le controparti non vogliono compensare il rischio con una consegna fisica dei fondi, lo impedirebbero.

Poiché questa tipologia di contratti incorpora una scadenza diversa o comunque una data di esecuzione prefissata, essi sono molto più idonei per coprirsi rispetto al tasso di cambio connesso ad un unico pagamento principale piuttosto che rispetto ad una serie di pagamenti di interessi (o di capitale) che si susseguono. In questi ultimi casi, infatti, il capitale viene solitamente coperto con dei cross currency swap, che quindi prevedono dei flussi di capitale da entrambe le parti – in maniera più continua – così come la leg riguardante gli interessi. Nonostante gli swaps risultino uno strumento più efficace rispetto ai forward in termini di copertura, questi ultimi vengono preferiti in quanto più facilmente comprensibili e più accessibili in termini di costi, anche se lasciano i pagamenti dei tassi di interesse non coperti [37].

Dal punto di vista del pricing, il tasso forward o il prezzo di un contratto forward si basa sul tasso spot al tempo in cui il contratto viene stipulato tra due

**Figura 1.3:** Outright Forward Contract**Figura 1.4:** Non-Deliverable Forward Contract

controparti, più gli opportuni aggiustamenti dovuti ai forward points [37] che rappresentano il differenziale sul tasso di interesse tra le due valute oggetto di scambio.

È intuitivo pensare come tutti questi prezzi si basino sui tassi di interesse e come il loro andamento influenzi i contratti per tutta la loro durata. Per questo, quando si parla di tassi di interesse forward, è necessario conoscere e basare le proprie considerazioni sulla curva dei tassi di interesse a scadenza.

Tornando ai forward points, potranno essere positivi o negativi a seconda della valuta che ha il tasso d'interesse più basso o più alto [37]. Naturalmente, la valuta con tasso di rendimento più alto verrà scontata maggiormente più si va avanti e viceversa. Questo per quanto riguarda i semplici contratti forward in cui si stipula un settlement fisico a scadenza.

Mentre per quanto riguarda i non-deliverable forward, la metodologia applicata è la medesima se non fosse che il tasso d'interesse di riferimento al momento della scadenza dipenderà dal tasso di cambio spot prevalente.

Ovvero, se a scadenza il tasso spot è peggiore del tasso forward, il contratto sarà un asset ed il compratore riceverà dalla controparte il pagamento dei fondi

come settlement del contratto.

Al contrario, se il contratto forward in questione risulterà come una passività poiché il tasso spot sarà migliore di quello forward, allora sarà il compratore a dover ripagare il venditore con il settlement dei fondi [37].

1.6 Modelli micro e macro-economici

Soffermandoci per un momento sulla struttura generale del mercato, i pratici del settore – così come quasi tutti i ricercatori – vedono il mercato valutario diviso in due sezioni: una sezione macroeconomica e un'altra microeconomica.

Per quanto riguarda la prima, i tradizionali modelli che ne studiano l'evoluzione dei tassi di cambio non danno molta attenzione alla struttura vera e propria degli scambi che avvengono nel mercato. Infatti, viene fatta un'assunzione implicita secondo cui i dettagli del trading (ovvero, ciò che riguarda la quotazione dei prezzi delle valute e il modo in cui vengono eseguiti gli ordini) non sono rilevanti per studiare le dinamiche dei tassi di cambio per scadenze future [19].

I modelli micro, invece, esaminano l'importanza delle informazioni nel processo di pricing delle valute e come questo stesso processo venga influenzato nel mercato spot proprio dal trading flow.

1.6.1 Micro-models

L'obiettivo principale dei modelli microeconomici è quello di costruire uno schema sui tassi di cambio che sia basato sui fondamentali della microeconomia e che sia in grado di rappresentare, in modo ragionevole, quelli che sono i punti chiave del mercato valutario.

Nello specifico, si vogliono incorporare le implicazioni istituzionali secondo cui l'informazione viene trasmessa da un agente all'altro semplicemente attraver-

so l'esecuzione degli ordini. Si vuole studiare, inoltre, cosa riflette effettivamente questo flusso di informazioni nel mercato spot. Bisogna precisare che gli studiosi dei modelli micro non sono prettamente interessati al trading in sé per sé bensì il loro focus rimane quello di studiare le dinamiche dei tassi di cambio.

Tuttavia, si è assistito recentemente ad un avvicinamento da parte delle due dottrine verso un'accettazione di come il trading process sia effettivamente molto utile per carpire le informazioni.

Grazie ad un'analisi più accurata, sono due le considerazioni principali che emergono [20].

La prima è che l'equilibrio dei tassi di cambio non esce fuori dal nulla, come alcuni potrebbero pensare, bensì si fonda esclusivamente su una funzione dei prezzi delle valute quotati dai dealers in un determinato periodo.

La seconda considerazione riguarda l'impatto che le informazioni sullo stato attuale e futuro dell'economia potranno avere sui tassi di cambio – se e quando – avranno influenzato le quotazioni dei dealers. Infatti, questi ultimi andranno a rivisitare le proprie assunzioni in risposta alle nuove informazioni rese pubbliche tramite gli annunci microeconomici, così come potranno modificare i prezzi in base al flusso di ordini che riceveranno dagli investitori.

Proprio il flusso di ordini – così come verrà spiegato in seguito – rappresenta uno strumento essenziale per estrapolare tutte le informazioni disperse, informazioni che sono fondamentali per capire i segnali sull'andamento economico così come sono in grado di incidere direttamente sui prezzi delle valute e di conseguenza sui tassi di cambio.

In riferimento a quanto detto, i modelli microeconomici che analizzano questo impatto nel mercato valutario incorporano queste due considerazioni all'interno di un semplice framework.

Nello specifico, si può prendere come esempio il modello canonico multi-dealers proposto da Lyons (1995) ed Evans e Lyons (2002). Essi hanno rappresen-

tato delle semplici fasi di quotazione e trading, assumendo che all'inizio di ogni periodo i dealers quotino i prezzi delle currencies per i propri clienti all'interno del segmento interdealer [18]. I clienti, a loro volta, invieranno i propri ordini ai dealers. Si assume inoltre che i prezzi quotati in entrambi i segmenti siano corretti per ogni quantità e che siano aperti al pubblico [18].

Giunti a questo punto nel trading environment, la scelta ottimale sul prezzo da quotare risulterà semplice: tutti i dealers quoteranno lo stesso prezzo per entrambi i segmenti (clienti ed altri dealers). Questo avviene poiché se così non fosse si verrebbero a creare delle opportunità di arbitraggio, le quali genererebbero – per loro – dei costi.

Quindi ecco la prima prova di come ogni prezzo sarà funzione delle informazioni che i dealers avranno a disposizione. Con questo non si vuole dire che ogni dealer ha le stesse informazioni, bensì il contrario. Ciò accade perché ogni dealer riceverà un flusso di ordini diverso che quindi andrà ad impattare in maniera diversa sulle aspettative del dealer. Di conseguenza, ognuno avrà a disposizione un set informativo privato che darà vita ad una sorta di eterogeneità tra i vari dealers.

Di fatti, proprio a causa della paura che i dealers avranno nei confronti di possibili arbitraggi, essi non quoteranno i prezzi in base alle informazioni private che posseggono. Al contrario, queste informazioni verranno utilizzate per processare gli ordini nel segmento interdealer facendo sì che ogni dealer acquisisca più informazioni da fonti diverse [18]. È per questo motivo che viene data così tanta importanza al flusso di ordini. Ad esempio, gli stessi forecast sul deprezzamento dei tassi sono molto difficili da stimare, nel momento in cui questi non si conoscono con precisione, e quindi avranno un basso impatto sui prezzi.

Si assiste, pertanto, ad un fenomeno in cui le informazioni vengono raggruppate maggiormente grazie ad un canale indiretto rispetto ad un canale diretto

(come gli annunci macroeconomici sul PIL, sulla produzione industriale ecc.).

1.6.2 Macro-models

Come è risaputo, i modelli che si basano sulla microstruttura per determinare il tasso di cambio – come i modelli di portfolio shifting – non riescono a cogliere quelli che sono i collegamenti tra la macroeconomia ed il flusso degli ordini [19]. Questo perché pongono la loro attenzione sui dettagli presenti negli scambi tra i vari partecipanti del mercato rispetto ai fattori macroeconomici che in realtà guidano le operazioni individuali.

Per cercare di colmare questo gap, nelle ultime ricerche in questo ambito, si è scelto di individuare il ruolo che il flusso degli ordini gioca nella trasmissione delle informazioni macro. Solo alcune informazioni macroeconomiche sono effettivamente disponibili in ogni momento ai partecipanti nel mercato. Le altre informazioni, invece, si trovano sparse sotto forma microeconomica.

Per quanto riguarda i tassi di cambio spot, essi identificano e mettono a disposizione ai dealers solo le informazioni che sono disponibili in quel momento, in quanto i tassi rappresentano letteralmente il prezzo di una valuta quotata. Risulta chiaro come gli spot rates riflettano informazioni disperse che vengono poi assimilate dai dealers tramite il processo di trading.

1.7 L'importanza del flusso di ordini

Ne segue che tutto il processo di formazione ed esecuzione degli ordini è di vitale importanza per comprendere le dinamiche dei tassi di cambio nel breve (e possibilmente anche nel medio) periodo. Infatti, analizzando la buying/selling pressure nel mercato valutario, si possono cogliere i collegamenti tra l'impatto di una notizia (ovvero quanto questa vada ad incidere sull'andamento del prezzo)

ed il modificarsi delle variabili fondamentali, quali determinanti del valore delle valute [17].

Nello specifico, gli FX traders cercano di ottenere quante più informazioni possibili sul valore fondamentale delle valute in modo tale da operarci, così come viene tipicamente descritto nei modelli sulle aspettative razionali. Così facendo si riesce a raggiungere un consenso generale tra gli investitori, poiché le informazioni contenute nell'order flow vengono progressivamente condivise tra i partecipanti ed incorporate nei tassi di cambio, fino a raggiungere un punto – seppur temporaneo – di equilibrio.

Il potere descrittivo dell'order flow si riflette su due diversi canali di trasmissione monetaria, quali il portfolio-balance channel ed il signalling channel.

Nel primo caso, tutte le perturbazioni che influenzano gli scambi innescano un meccanismo di rebalancing nelle scorte (portafogli) detenute dagli investitori che – di conseguenza – vorranno essere ripagati con uno shift negli expected returns [17].

Nel secondo caso, invece, si assiste ad una sorta di fallimento empirico da parte di questo approccio ai mercati. Nello specifico, l'insuccesso è dovuto alla natura lungimirante dei tassi di cambio e dall'impatto che le news hanno sui fondamentali del prezzo delle valute, quali i tassi d'interesse, i tassi di occupazione/disoccupazione e così via.

Infatti, quando le notizie incominciano a modificare la percezione futura – quindi le aspettative – sulle variabili fondamentali, i tassi di cambio reagiscono immediatamente andando a scontare questi effetti. Inoltre, poiché non tutte le notizie sono facilmente interpretabili, risulta ancor più difficile prevedere le dinamiche comportamentali.

Come è stato più volte accennato, la vasta platea di partecipanti al mercato valutario è la prima fonte di iniezione di liquidità. Questi investitori spaziano da quelli appartenenti ai rami di investimento delle società finanziarie fino ai

così detti unsophisticated traders [17], le cui operazioni rispondo alla necessità di liquidità e non sono dettate dai movimenti nei tassi di cambio.

Sia il flusso di ordini dei clienti che il flusso inter-dealer possono essere associati agli scambi di beni e servizi, al trasferimento di capitale, al trasferimento unilaterale – pubblico o privato – di fondi, o semplicemente a transazioni dovute a necessità di investimento.

Aggregando queste categorie si può notare come tutte abbiano una caratteristica in comune; il bisogno di liquidità. Perciò, gli ordini provenienti da questi investitori non saranno né price-sensitive né collegati alle variabili fondamentali delle valute. Per questo motivo, tali categorie vengono inserite sotto la dicitura di noise trading.

Di fianco a questi unsophisticated customers, operano solitamente le banche centrali, tramite i brokers e dealers. Ovviamente, il loro modus operandi è ben diverso in quanto rispondono ad un obiettivo alternativo rispetto ai primi partecipanti; la loro, infatti, sarà un'attività d'intervento.

Nel passato, queste operazioni venivano svolte direttamente nel mercato valutario. Una banca centrale contattava individualmente un FX dealer ed iniziava a negoziare la quantità di security desiderata, mantenendo l'anonimato in modo tale che questo intervento non fosse svelato alla platea di investitori [19]. Nonostante ciò, il mercato reagiva prontamente mettendo in luce quelli che erano effettivamente gli interventi.

A conferma di ciò, si veniva a creare un'ondata di transazioni inter-dealer tale da influenzare le aspettative di mercato e quindi in grado di condizionare i tassi di cambio. Nasceva un collegamento indiretto tra interventi sul mercato delle valute, il flusso di ordini ed i tassi di cambio (collegamento dovuto al portfolio-balance ed al signalling channel).

Per quanto riguarda il processo di estrazione delle informazioni ricevute tramite gli ordini da parte del segmento degli investitori semplici e quello

inter-dealer, è necessario porre l'attenzione sulla complessità dell'estrapolazione stessa dovuta ai problemi di inferenza.

In determinate circostanze, infatti, questi problemi sono facilmente risolvibili mentre in altre la situazione si complica maggiormente.

Nel primo caso, grazie ad un numero non troppo elevato di transazioni inter-dealer, si è in grado di carpire la maggior parte delle informazioni fondamentali [20]. In questo modo, il processo di assimilazione diventa più veloce e le quotazioni si aggiornano in maniera più consistente. Il risultato si afferma in un aggiornamento stabile dei prezzi mensili e settimanali, similmente a quanto potrebbe essere stimato dai modelli macroeconomici.

Invece, nel caso in cui il processo di estrapolazione assume contorni più impegnativi, l'impatto che si ha sull'aggiornamento dei prezzi diventa consistente, andando così a rallentare il processo stesso. Saranno, quindi, necessarie molte più transazioni nel segmento inter-dealer per ottenere le informazioni necessarie.

In merito a questi due tipi di scenario, è opportuno citare il lavoro svolto da Evans and Lyons (2004) sui fattori che impattano la velocità di aggregazione delle informazioni. Naturalmente, per via del fatto che le transazioni nel segmento inter-dealer avvengono in maniera quasi continua, anche le informazioni più spezzettate e disperse vengono solitamente incorporate nei prezzi (in time frame brevi) anche se queste informazioni vengono assorbite lentamente dal dealer [20]. Tuttavia, non vi è una risposta quantitativa al periodo di tempo necessario ai dealers per immagazzinare le informazioni provenienti dagli ordini.

Gli stessi autori sopra citati sono riusciti a dimostrare, attraverso varie simulazioni, come anche la lunghezza del periodo di osservazione incide sul forecast. In una finestra di due anni, infatti, i fattori macroeconomici incidono solo per un 50% di tutta la variazione nei tassi spot, nonostante l'aggregazione delle informazioni nei flussi di ordini richieda solitamente un periodo di assimilazione di circa 4 mesi [20].

Un fattore significativo è il così detto feedback trading [20]. Questo termine racchiude, ad esempio, gli stop-loss orders.

Rappresentano una tipologia positiva di feedback trading poiché grazie ad essi, attivandosi per via delle cadute nel prezzo delle currencies, si ottiene un flusso di ordini negativo proveniente dagli investitori che vorranno chiudere le posizioni per non andare ulteriormente in perdita.

Capitolo 2

Le determinanti del tasso di cambio

Ci sono molti fattori che condizionano l'andamento dei tassi di cambio. In primis, abbiamo i fattori economici quali l'imposizione fiscale, le politiche monetarie, i tassi di interesse, il surplus ed il deficit, la bilancia dei pagamenti, i livelli di inflazione, il PIL e il tasso di occupazione.

Subito dopo questa categoria vi sono i fattori politici, in quanto sono quelli che impattano velocemente sulla stabilità di un governo e generano solitamente incertezza sulle future mosse politiche.

Al terzo gradino possiamo individuare quei fattori comportamentali che incidono sull'andamento dei mercati (come il "flight to quality" osservato durante la recente crisi finanziaria).

Infine, i tassi di cambio sono influenzati – seppure in maniera più lieve rispetto ai fattori precedentemente elencati – dalle decisioni dei brokers e dealers presenti nel mercato e dal volume di domanda e offerta real time [25].

Naturalmente, nel corso degli anni si sono sviluppate numerose teorie che hanno cercato di spiegare queste dinamiche e di interpretare – in alcuni casi a prevedere – questi effetti. Tra le più importanti è opportuno menzionare la Purchasing Power Parity, la legge del prezzo unico, l'interest rate parity (covered e uncovered), l'effetto Fisher e la bilancia dei pagamenti.

A seguire daremo una breve introduzione dei primi tre modelli, in quanto sono quelli più attinenti al nostro topic seppur nessuno sia stato in grado di dimostrare, attraverso prove abbastanza robuste, il cambiamento e l'evoluzione dei tassi di cambio in un arco temporale perdurato.

2.1 Purchasing Power Parity (PPP)

La condizione della Purchasing Power Parity postula il concetto secondo cui la differenza dei prezzi tra due panieri composti dagli stessi beni ma dislocati in due Paesi differenti è retta dall'equilibrio del tasso di cambio tra i due Paesi [25].

Naturalmente, i beni che costituiscono il paniere devono avere una certa robustezza in termini di paragone con l'altro paniere. Questo perché il prezzo di questi aggregati può essere visto come un indice di prezzo generale che, pur rappresentando diversi beni e servizi di un Paese, è indicativo del livello di salute e di andamento dell'economia. Un esempio è il Consumer Price Index (CPI) statunitense.

In riferimento a questa condizione, possiamo identificarne due categorie – o per meglio dire – due forme di parità: una assoluta e una relativa.

Per quanto riguarda la forma assoluta, il tasso di cambio di equilibrio tra due Paesi viene visto come il rapporto tra il livello dei prezzi dei due Paesi. Usando una breve formula matematica, questo rapporto è dato da: $R = \frac{P}{P^*}$ dove R è il tasso di cambio, P è il livello dei prezzi nel Paese locale mentre P^* riguarda il livello dei prezzi esteri [25].

Più complessa e articolata è la seconda forma della parity – ovvero quella relativa – in quanto il tasso di cambio di equilibrio tra due Paesi diventa proporzionale al rapporto tra il cambiamento del livello dei prezzi dei singoli Paesi.

Esprimendo il tutto con una semplice formula matematica, abbiamo: $R_1 = \frac{P_1/P_0}{P_1^*/P_0^*} \cdot R_0$ dove R_1 e R_0 indicano i tassi di cambio nel periodo 0 e 1, P_1 e P_0 il livello dei prezzi domestici negli stessi periodi ed infine P_1^* e P_0^* il livello dei prezzi esteri nei medesimi time frames.

Questo modello semplicistico presenta fisiologicamente alcune restrizioni, o per meglio dire delle difficoltà, dovute al processo di costruzione e identificazione dei beni classificabili come uguali (o quantomeno simili) in termini di valore tra diversi Paesi [25].

Infatti, il prezzo di un bene in un Paese può differire dal prezzo dello stesso bene situato in un altro semplicemente per via delle diverse risorse naturali e delle differenze culturali che impattano sulla concezione e sul valore di quel bene. Proprio per questo motivo, le persone che vivono in Paesi diversi hanno tipicamente abitudini alimentari diverse, diverse funzioni di utilità di quel bene e per questo motivo avranno diverse preferenze di acquisto su quel bene.

Per cui, è chiaro come risulti difficile ottenere un paragone che sia unbiased sul prezzo di uno stesso insieme di beni. Uno dei modi per risolvere questa problematica sarebbe quello di avere un paniere identico in entrambi i Paesi oggetto di paragone e con una stessa funzione di utilità.

Annessa alla Purchasing Power Parity è la legge del prezzo unico. Essa, infatti, si riferisce ad un singolo bene anziché sul paniere precedentemente descritto. Verosimilmente, questa legge sostiene che il prezzo di un identico bene situato in due Paesi diversi varia a seconda del tasso di cambio dei due Paesi.

Due indici molto usati per avere un'idea di questo "potere d'acquisto" sono il Big Mac Index e lo Starbucks Index, entrambi introdotti dalla rivista "The Economist".

2.2 Uncovered Interest Parity (UIP)

Innanzitutto, è opportuno dare una spiegazione del concetto di base di questa tipologia di parità.

L'interest rate parity fa riferimento ad una condizione di non arbitraggio in cui gli investitori sono indifferenti rispetto al tasso di cambio in due diversi Paesi [25]. Per via di questa assunzione, un trader potrà investire in uno dei due Paesi e guadagnarci lo stesso equivalente in termini di interessi. Quando però questa condizione non viene rispettata, si vengono a creare delle opportunità di arbitraggio dalle quali gli investitori potrebbero ottenere un profitto privo di rischio.

Numerosi, infatti, sono gli arbitraggi che si basano semplicemente sul tasso di interesse, ottenuti spostando i fondi di capitale da un Paese a un altro in modo tale da ottenere rendimenti più elevati.

Solitamente lo spostamento di questo capitale avviene a breve termine e da qui deriva la covered o uncovered interest parity. Si è voluto introdurre il concetto di arbitraggio sul tasso di interesse poiché è tramite questo che si analizza l'impatto che una valuta ha nel momento in cui questo capitale viene spostato.

L'Uncovered Interest Arbitrage fa riferimento ad una situazione in cui un Paese quota un tasso di interesse più alto rispetto ad un altro e questo fa sì che un investitore sposti i propri fondi dal Paese col tasso minore a quello col tasso maggiore, in modo da guadagnare più interessi [25].

Ovviamente, una volta giunto a scadenza, l'investitore dovrà portare nel Paese di partenza questa somma di capitale, sostenendo per tutta la durata dell'holding, un rischio di tasso. Questo perché se il tasso di cambio del Paese in cui sono stati spostati i fondi diminuisce, allora l'investitore guadagnerà di meno in quanto il valore del suo capitale sarà eroso dal tasso di cambio.

Viceversa, se il tasso di cambio del Paese in cui si è investito aumenta, l'investitore guadagnerà di più.

Molti papers, però, hanno documentato il fallimento dell'Uncovered Interest Parity nelle serie storiche, partendo dal lavoro di Hansen e Hodrick (1980) fino ad arrivare a quello di Fama (1984). In entrambi i casi, viene spiegato come i tassi di interesse più alti del solito generano un ulteriore apprezzamento nel futuro e quindi gli investitori potranno guadagnare di più mantenendo in posizione le obbligazioni con questi tassi di interesse [35].

Similmente, Lustig et al. (2005, 2007) hanno mostrato come, costruendo dei portfolios con posizioni in contratti forward sui tassi di cambio, ordinati in base ai fattori forward di sconto, la relazione della UIP cede anche nella cross-section, poiché basterà mantenere i bonds acquistati in valute con tassi di interesse semplicemente più alti rispetto ad altre valute (non è necessario che i tassi siano più alti del normale) [32] [33].

2.3 Covered Interest Parity (CIP)

Il principio della Covered Interest Parity (CIP), colto per la prima volta da Keynes nel 1923, è uno dei pilastri principali della finanza.

Senza considerare il rischio di controparte, il CIP fa riferimento ad una condizione di arbitraggio che collega il premio al rischio che un forward exchange rate ha rispetto ad uno spot exchange rate in termini di vantaggio del tasso d'interesse nominale sulla valuta estera [10].

In questo caso, per evitare questo rischio sul tasso di cambio durante un arbitraggio, l'investitore può decidere di coprirsi entrando nel mercato spot e comprando un ammontare di valuta "estera" – guadagnando così un tasso d'interesse – ed ottenendo da un contratto forward il cambio dalla valuta estera in quella locale più gli interessi. Così facendo, l'investitore avrà bloccato un

guadagno sicuro – basato sui tassi di cambio – e si sarà coperto dal rischio di valuta.

Naturalmente nella realtà non è così semplice, in quanto capita spesso di imbattersi in una currency sottovalutata che verrà venduta ad un prezzo scontato e proprio tale sconto coinciderà con la differenza tra i tassi di interesse dei due Paesi, facendo sì che l'arbitraggio risulti impossibile.

Fino all'inizio della recente crisi finanziaria globale, questo concetto sembrava essere verosimilmente stabile, tanto da essere spesso utilizzato nelle assunzioni macroeconomiche di breve periodo. Ma come molti recenti studi stanno dimostrando, questa relazione non sembra reggere più in maniera così forte da quando è iniziata la crisi del 2008.

Ovviamente anche nel periodo pre-crisi si sono verificati degli scostamenti dalla CIP, ma in maniera poco significativa [10]. La mancanza di prevedibilità degli arbitraggi e la velocità con cui gli stessi si presentano per poi scomparire nuovamente, sono sintomo della robustezza di questa relazione.

Il fatto che siano sorte numerose deviazioni nel corso della crisi è alquanto fisiologico; il vero problema che queste ricerche sottolineano è il protrarsi di queste deviazioni anche negli anni che l'hanno susseguita [10].

Questi scostamenti sono importanti per due motivi: in un caso, indicano l'inefficienza dei mercati finanziari nell'allocazione delle risorse e dall'altro mostrano un cambiamento implicito nel modo di trasmettere le politiche macroeconomiche [10]. È interessante come si possano identificare delle ragioni politiche alla base di questo "sfaldamento", prima su tutte, la gestione del ciclo finanziario globale e la dipendenza delle piccole economie rispetto alle decisioni prese da parte di autorità importanti (vedasi la Federal Reserve e gli annunci sui tassi di interesse). A queste, si affiancano le differenze sui tassi d'interesse tra le varie valute ed il loro impatto nel mercato swap.

Interessante è lo spunto riportato da Rod Cross e Victor Kozyakin [13] su come

i dati della piattaforma Reuters furono utilizzati in [4] per identificare la presenza di opportunità di arbitraggio sulla covered interest parity.

Qualora la relazione avesse retto si avrebbe avuto una parità tra i differenziali dei tassi di cambio spot e forward con i differenziali dei tassi di cambio rispetto ad assets simili con scadenze analoghe. Invece, dopo aver preso in considerazione i costi di transazione, gli autori di quel paper hanno riscontrato numerose opportunità, grandi abbastanza e con una durata prolungata tali da poter essere sfruttate dai traders [4].

Capitolo 3

I rischi nel mercato valutario

3.1 Definizione

Nel mondo accademico, così come è stato sopra citato, l'arbitraggio viene spesso identificato come un'operazione risk-free.

In realtà, nel mondo reale nulla è privo di rischio e tramite questo capitolo verrà data una classificazione di quelli che sono i principali rischi che si incontrano nel mercato valutario. Allo stesso tempo bisogna tener conto di come la maggior parte delle transazioni che avvengono nel mercato delle valute sono effettuate da banche ed altre istituzioni finanziarie, principalmente per ridurre delle esposizioni o per guadagnare da situazioni economico-finanziarie favorevoli.

Per questo motivo, tali operazioni sono soggette ad una elevata gamma di rischi (alcuni collegati anche ai complessi algoritmi computerizzati che vengono utilizzati per attuare le operazioni) [41], rischi che invece un piccolo investitore non si trova spesso ad affrontare o che può più facilmente gestire.

Non bisogna però pensare che soltanto le banche possano essere esposte a queste tipologie di rischi, in quanto tutte le aziende internazionali lo sono.

Infatti, diversi business vengono influenzati dai rischi connessi alle valute, che siano collegati ai clienti, ai distributori o ai produttori stessi.

L'escalation della guerra sui dazi iniziata dagli U.S.A. ha fatto emergere ancor di più questi effetti, così come la Brexit. Basti pensare che la valuta americana si è notevolmente rafforzata per mezzo di queste manovre a discapito di molte economie emergenti. Indipendentemente dal fatto che il proprio core business si basi su ricavi provenienti dall'estero, o che si abbiano dei costi in altri Paesi, si avrà sempre un'esposizione verso le valute.

Da una ricerca condotta da HSBC e dal FT Remark su oltre duecento CFO e circa trecento tesorieri, è emerso che circa il 70% dei CFOs abbia riscontrato una diminuzione nei profitti a causa di procedure connesse al mercato valutario che non sono state adeguatamente coperte [29]. Inoltre, il 58% degli stessi direttori operanti in istituzioni finanziarie di portata globale ha sostenuto che la gestione del rischio di valuta è uno dei due rischi che occupa la maggior parte del loro tempo e il 51% ha ammesso che all'interno delle loro organizzazioni è quello valutario il rischio al quale sono meno equipaggiati [29].

Gestire questa tipologia di rischio può portare numerosi benefici, connessi ad una protezione dei margini di profitto collegati ai cash flow, ad un miglioramento in termini di forecast finanziario e di budget, all'apprendimento di come le fluttuazioni delle valute alle quali si è esposti possano impattare sul bilancio e ad un rafforzamento delle proprie capacità di prendere in prestito il capitale. Quindi, per affrontare questa problematica, bisognerebbe innanzitutto rivisitare il proprio ciclo operativo, misurare e gestire l'esposizione al rischio valutario, adottare strategie di copertura a questo rischio e creare una policy di gestione [41].

I principali fattori di rischio nel mercato valutario sono: il rischio di cambio, il rischio d'interesse, il rischio di credito, il rischio di controparte ed infine il rischio di liquidità.

3.2 Rischio di cambio

Il rischio del tasso di cambio è quel rischio causato dalle variazioni di prezzo delle valute. Si basa principalmente sul rapporto tra domanda e offerta delle valute stesse e quindi varia in base agli scostamenti dai prezzi di equilibrio.

È uno dei rischi più importanti in quanto va ad influenzare la posizione che è stata presa dall'investitore per tutto il tempo in cui rimane aperta. La magnitudine del rischio stesso può essere molto ampia anche perché dipendente da diversi fattori (fondamentali, come ad esempio cause intrinseche connesse alle valute stesse, o per motivi geopolitici).

Questa tipologia di rischio può essere mitigata attraverso l'utilizzo di alcuni strumenti come gli ETFs, i contratti forwards o futures e le opzioni.

3.3 Rischio d'interesse

Il rischio connesso al tasso di interesse fa riferimento ai ricavi/perdite generati dalle fluttuazioni dei forward spreads e dai gap derivanti dall'avvicinamento alla maturity del contratto.

Gli strumenti che ne sono più influenzati sono chiaramente i currency swaps, i contratti forwards/futures e le opzioni. Risulta chiaro come sia un rischio molto importante per gli investitori in quanto va ad impattare quasi la totalità degli strumenti negoziati nel mercato valutario.

Per minimizzare questo rischio occorre coprirsi acquistando contratti simili a quelli stipulati inizialmente ma con scadenze diverse.

3.4 Rischio di credito

Con il rischio di credito ci si riferisce alla possibilità che una controparte non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi – in maniera volontaria o non – rispetto ad una posizione aperta [30]. È un rischio che molto spesso viene affrontato dalle banche e dalle istituzioni finanziarie.

Allo stesso tempo, per il singolo trader che opera per interessi individuali, questo rischio è molto basso così come per le aziende registrate e regolate dalle autorità nei Paesi del G7.

Negli ultimi anni, la National Futures Association (NFA) e la Commodity Futures Trading Commission (CFTC) hanno marcato la loro giurisdizione nei mercati ForEx americani ed hanno continuato a perseguire quelle aziende che non hanno adempiuto ai regolamenti, in modo da mantenere un elevato grado di tutela e di trasparenza nei mercati [48]. Per quanto riguarda i Paesi europei occidentali, essi si sono adeguati alle guidelines della Financial Services Authority nel Regno Unito [48]. Proprio questa autorità è la più rigida e severa rispetto alle omonime negli altri Paesi e questo per far sì che tutte le FX companies che si trovano sotto la sua giurisdizione mantengano degli standard di qualità e trasparenza elevati.

3.5 Rischio di controparte

Questa tipologia di rischio è tra le più difficili da valutare. Infatti, può essere visto come un ibrido tra il rischio di credito e il rischio di mercato, in quanto può dipendere contemporaneamente dalla creditworthiness della controparte e dai movimenti del sottostante.

Indica l'incapacità o la mancata volontà di adempiere ai propri obblighi presenti nel contratto scambiato (a volte anche il default stesso della controparte).

Tutto ciò avviene perché nei mercati OTC – spot o forward essi siano – i contratti sulle valute, così come anche per altre tipologie di sottostante, non sono scambiati presso le borse e quindi la performance di tali contratti non è garantita da nessuna clearing house.

Descriviamo brevemente ciò che potrebbe accadere. Una banca o un broker potrebbe declinare la richiesta di esecuzione di un ordine in un mercato valutario qualora reputasse che tale ordine possa presentare un grado di rischio superiore a quello delle proprie operazioni. Dato che non vi è nessun meccanismo centrale di clearing nel garantire gli scambi OTC, ogni banca ed ogni broker applicherà la propria analisi sul grado di rischio e ciò influenzerà la propria volontà di entrare o meno in un'operazione.

In base alle policy adottate da ciascuna controparte, una banca o un broker potrà rifiutarsi di eseguire un ordine per un trader o cliente. Dal lato delle quotes, non essendoci un market place centrale in cui poter accedere ai time and sales report minuto per minuto, i principali attori di questi mercati dovranno far affidamento sulle proprie conoscenze dei prezzi di mercato e quindi su quale prezzo concordarsi per un eventuale operazione.

Inoltre, il rischio di controparte può portare ad ingenti perdite, motivo per cui si è cercato, nel periodo di post crisi, di introdurre delle camere di compensazione anche nei mercati OTC.

3.6 Rischio di liquidità

Nonostante il mercato FX sia il più liquido in assoluto, si sono riscontrati dei periodi di scarsa liquidità, soprattutto in orari poco comuni (al di fuori dalle classiche trading hours).

In aggiunta, diverse nazioni hanno imposto dei limiti di trading e/o delle restrizioni sulle variazioni di prezzo che una valuta può avere in un certo periodo.

Questo per evitare il proliferarsi di fenomeni in grado di minare la liquidità e la stabilità dei mercati.

Contrariamente a quanto si può pensare – ovvero che un arbitraggio non richiede alcun apporto di capitale – nella vita reale, per sfruttare la maggior parte degli arbitraggi, è necessario utilizzare ingenti quantità di capitale. Questo, nel caso in cui il movimento di prezzo vada contro l'arbitraggista, risulterà in una margin call e quindi a richieste di ulteriori iniezioni di capitale.

Chiaramente nel caso in cui l'investitore non abbia tale capitale da aggiungere, gli verrà chiusa la posizione e si troverà ad affrontare una perdita. Quando, però, l'arbitraggista è una banca oppure un'istituzione finanziaria, il capitale utilizzato sarà quello dei propri investitori, il quale verrà marked-to-market con una frequenza che dipende dalla tipologia del contratto ma che potrebbe comunque risultare molto volatile anche se in realtà il rischio dell'operazione non lo è.

A seguire, un investitore impaurito potrebbe decidere di prelevare il suo capitale dal fondo, mettendo quest'ultimo in una posizione ancora più critica poiché potrebbe non essere più in grado di adempiere ai propri impegni in termini di marginazione di capitale e divenendo così forzato a chiudere l'operazione in perdita. È per questo che molto spesso i mercati molto volatili non vengono scelti per attuare strategie di arbitraggio, anche se quest'ultime risultano più redditizie della media, poiché il rischio di imbattersi in problemi legati alla liquidità è molto elevato.

Vi sono anche dei casi in cui è necessario addirittura apportare del capitale all'inizio per poter sfruttare questi arbitraggi, senza considerare anche i costi di mantenimento e di marginazione. Motivo in più per cui si deve prestare attenzione al cash flow di entrate ed uscite nel momento in cui si decide di strutturare una strategia di investimento.

Ad esempio, in una strategia di arbitraggio del tipo cash-and-carry in cui vi

è un mispricing tra un'azione ed il future scritto su di essa, il profitto si otterrà alla scadenza del future. Nel frattempo, però, il future verrà marked-to-market quotidianamente, generando cash flow positivi o negativi per tutta la durata del contratto. Se non si avrà a disposizione abbastanza capitale per coprire i limiti di marginazione, allora il contratto potrebbe essere chiuso anche qualora l'operazione risultasse riskless da un punto di vista pratico.

Capitolo 4

Gli arbitraggi nel mercato valutario

4.1 Definizione

Gli arbitraggi rappresentano uno dei pilastri principali dei mercati finanziari. Da sempre oggetto di grande interesse, la loro individuazione è stata materia di studio per molti studiosi e ricercatori.

Andando brevemente a toccare la definizione di questa operazione, si ha un arbitraggio nel momento in cui si effettua uno scambio di strumenti finanziari in grado di generare un profitto senza incorrere in alcun rischio, basandosi su differenze di prezzo dello stesso strumento nel medesimo mercato o in mercati differenti.

Questa nozione è collegata direttamente con la legge del prezzo unico, la quale sostiene che strumenti identici all'interno di mercati efficienti devono avere lo stesso prezzo, indipendentemente da come vengono creati. Ovvero, se uno strumento derivato può essere creato come composizione di due asset diversi, esso dovrà avere lo stesso prezzo derivante dai due strumenti singoli, altrimenti ci si potrà imbattere in delle opportunità di arbitraggio.

Lo stesso concetto di arbitraggio è la chiave di volta che sostiene e convalida la legge del prezzo unico. Per spiegare meglio questo assunto, basti pensare che se

da un lato tutti i partecipanti all'interno del mercato scambiassero prezzi (quote) che non sono in grado di generare arbitraggi, questi ultimi non si verrebbero a creare. Contemporaneamente, anche se l'assunzione di assenza di arbitraggi appare ragionevole in diversi contesti, si vengono comunque a creare delle violazioni di questa legge.

Proprio l'assenza di opportunità di arbitraggi porta al così detto "arbitrage paradox", spiegato per la prima volta da Grossman e Stiglitz (1976, 1980). Il concetto illustrato è molto intuitivo: se non si viene mai a creare alcun tipo di arbitraggio allora gli investitori non avranno abbastanza incentivi per operare in quel mercato, motivo per cui si verrebbero a creare delle opportunità di arbitraggio [28].

Una possibile soluzione per questo paradosso coincide con la presenza di arbitraggi nel breve periodo, o comunque in finestre temporali molto ristrette, in modo tale da incentivare i partecipanti ad operare nel mercato e permettendo allo stesso tempo che queste opportunità non durino a lungo.

Anche la teoria della microstruttura dei mercati spiega come le differenze di prezzo di uno stesso bene siano più frequenti in mercati poco trasparenti e poco centralizzati [42] [38]. Gli studi empirici sugli arbitraggi nei mercati finanziari in generale (a differenza di quanto accaduto con il mercato valutario) sono stati incapaci di individuarne la presenza anche in brevi time frame.

Questo è dovuto soprattutto alla continua evoluzione dei mercati e alla difficoltà di reperimento dei dati necessari agli studi; difatti, per identificare tali opportunità, è necessario studiare i dati real-time in quanto quelli quotati a fine giornata operativa non sono mai significativi in termini di arbitraggio. Inoltre, per ogni mercato finanziario oggetto di analisi, si dovrebbe fare un'accurata valutazione strutturale in modo da cogliere ogni sfumatura dal punto di vista di opportunità e di costi di transazione affrontati dagli investitori.

4.2 Tipologie

Giunti a questo punto, è opportuno separare le nozioni di pure arbitrage e relative value arbitrage [15].

Entrambe le categorie portano ad una riscossione dei profitti che può avvenire in maniera istantanea – non appena viene effettuata l'operazione di arbitraggio – oppure l'arbitraggio viene bloccato e si riceverà il cash flow successivamente (come nel caso dei cash-and-carry arbitrage).

Per quanto riguarda il mispricing dello strumento finanziario [15], si può assistere a scenari in cui lo stesso strumento viene scambiato in due mercati a due prezzi differenti oppure a scenari in cui due strumenti finanziari con cash flows identici che vengono scambiati a prezzi diversi (oppure che uno strumento il cui valore futuro è conosciuto viene scambiato ad un prezzo inferiore rispetto al risk-free rate).

4.3 Pure Arbitrage

Con pure arbitrage si definisce l'opportunità di ottenere dei ricavi risk-free al tempo t tramite una gestione statica o dinamica delle condizioni che la compongono arrivati al tempo $t + 1$, tenuti in considerazione gli eventuali costi [15].

Le finestre temporali in cui queste opportunità possono essere sfruttate variano dalla tipologia di asset e dal mercato di riferimento. Come è stato accennato, possono essere gestite in maniera statica entrando nell'operazione dall'inizio per poi liquidarla a scadenza, oppure possono essere gestite in maniera dinamica, in cui il trader inizia una serie di steps che lo porteranno via via nel tempo ad eliminare ogni rischio direzionale di mercato andando a guadagnare in maniera risk-free al completamento degli stessi.

4.3.1 Covered Arbitrage

La condizione di non arbitraggio della Covered Interest Parity (CIP) postula come non sia possibile ottenere rendimenti positivi semplicemente prendendo in prestito delle attività di finanziamento estere nella valuta locale e coprendosi dal rischio di cambio attraverso un contratto forward con stessa scadenza.

Questo è vero perché attività fruttifere domestiche e straniere possono essere considerate simili se condividono le stesse caratteristiche quali rischio di default, rischi politici e liquidità, e se hanno la stessa maturity.

La CIP può essere espressa come [4]:

$$(1 + i_d) = \frac{1}{S}(1 + i_f)F \quad (4.3.1)$$

dove i_d rappresenta il tasso d'interesse locale e i_f quello straniero, sempre su attività finanziarie simili, mentre S rappresenta il tasso di cambio nominale e F il tasso di cambio forward con scadenza uguale a quella delle attività di finanziamento.

Questa equazione, tuttavia, non copre i vari costi a cui le attività sono soggette, quali costi di transazione, costi di immagazzinamento, costi d'informazione e di processo degli ordini. Tutti questi costi, infatti, sono catturati – per la maggior parte – dallo spread dei prezzi bid e ask dei tassi d'interesse e di cambio [42].

Presi in considerazione tali spread, il covered arbitrage non sarà redditizio se:

$$(1 + i_d^a) \geq 1/S^a(1 + i_f^b)F^b \quad (4.3.2)$$

$$(1 + i_f^a) \geq S^b(1 + i_d^b)/F^a \quad (4.3.3)$$

dove gli apici a e b indicano le quotazioni ask e bid [4].

Un trader avrà a che fare con le quotazioni ask nel momento in cui prenderà

in prestito il capitale e le quotazioni bid quando lo darà in prestito. Quindi riceverà il prezzo bid quando venderà una valuta e pagherà il prezzo ask al momento dell'acquisto.

In questa direzione, è interessante il lavoro svolto da Akram et al. (2008) [4] in cui hanno analizzato le opportunità di arbitraggio che deviavano dalla CIP su tre tassi di cambio e per quattro diverse scadenze.

I risultati si riferiscono sia ai casi in cui venivano presi in prestito dei fondi nella valuta locale per poi darli in prestito nell'altra valuta quotata e viceversa [4]. Inoltre, sono state prese sotto osservazione sia tutte le deviazioni avvenute sia solo quelle profittevoli.

Considerando il primo gruppo di osservazioni, è emerso come l'ammontare delle deviazioni sia aumentato con il crescere delle maturities [4]. Ciò è dovuto al fatto che la frequenza con la quale vengono aggiornati i prezzi diventa sempre più alta man mano che le scadenze sono più lontane nel tempo.

Uno dei risultati più importanti sta nel fatto che i rendimenti medi osservati dalle deviazioni rispetto alla condizione di non arbitraggio sono negativi in tutti i casi [4]. La stessa mediana è molto vicina alla media, sintomo di come la distribuzione sia effettivamente simmetrica. Per cui, in media, questi dati suggeriscono come l'arbitraggio sulla CIP non sia redditizio.

Le spiegazioni di questo fenomeno risiedono prevalentemente nel fatto che i dealers non offrono intenzionalmente delle quote in grado di generare opportunità di arbitraggio perché consapevoli del fatto che gli investitori sarebbero pronti a trarne guadagno. Di conseguenza applicheranno sempre condizioni più stringenti affinché nessun arbitraggio si presenti [4]. Questo comportamento sposterà i rendimenti verso valori negativi.

Passando invece al lato delle deviazioni profittevoli, ciò che salta all'attenzione è il numero estremamente irrilevante rispetto al totale del campione osservato, così come il margine di profitto (da zero al 1.5% per l'euro, dallo 0.2% al 2.4%

per la sterlina britannica e dallo 0.1% allo 0.5% per lo yen giapponese) [4].

Tuttavia, queste opportunità si sono manifestate per tutti i tassi di cambio e nella maggior parte delle scadenze con un time frame medio di opportunità che spazia tra i 30 secondi a poco meno di 2 minuti [4]. Si è assistito anche alla formazione di clusters – ovvero due o più deviazioni della CIP che avvengono consecutivamente – con un range che varia da poche decine di osservazioni fino ad oltre un migliaio.

Il tutto va a sottolineare la solidità generale della CIP anche se si verificano opportunità di arbitraggio. Opportunità che possono essere sfruttate dai trader poiché economicamente appetibili e, in media, presenti in finestre temporali materialmente sfruttabili. Ciò nonostante, il trader dovrà eseguire queste operazioni in maniera quasi simultanea, poiché il rischio di esecuzione ed il rischio connesso ad un rapido cambio nel prezzo di una delle valute sono tali da annullare l'arbitraggio stesso.

4.3.2 ϵ -arbitrage e δ -direct-arbitrage

Nello studio precedentemente effettuato sono state mostrate le condizioni di arbitraggio in un mercato privo di ogni frizione (quali i costi di transazione). Nel mondo reale, però, questi costi sono presenti e molto spesso impediscono il realizzarsi di qualsiasi tipo di arbitraggio.

In questa direzione, è molto interessante il lavoro svolto da Cui et al. (2018) [14] nel quale hanno studiato due tipologie di arbitraggi che si presentano in un mercato con delle frizioni.

Andando nello specifico, per un valore sufficientemente piccolo di $\epsilon > 0$, se $|a_{ij}a_{ji} - 1| < \epsilon$ allora non sarà possibile sfruttare un'opportunità di arbitraggio sorta tra la coppia di valute (i, j) per via dei costi di transazione che risulterebbero dalla messa in atto delle operazioni [14].

La condizione di partenza è $\lambda_{max} \neq n$ che implica l'esistenza di arbitraggi.

Quindi, data una matrice positiva $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, non vi è alcun $\epsilon - arbitrage$ se $e^{-\epsilon} \leq c_{ij}c_{jk}c_{ki} \leq e^{\epsilon}$ regge per ogni $1 \leq i, j, k \leq n$ [14].

Assumendo che $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sia una matrice positiva e che non vi sia alcun $\epsilon - arbitrage$, allora esisterà una matrice priva di arbitraggi $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ (ovvero A una matrice positiva e $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$ per ogni i, j, k) tale che:

$$c_{ij}e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \leq a_{ij} \leq c_{ij}e^{\frac{7}{3}\epsilon}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.3.4)$$

Presa, in seguito, la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tale da non avere alcun $\epsilon - arbitrage$, allora si potrà definire la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ in modo che:

$$a_{ij} = \frac{c_{1j}}{c_{1i}}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.3.5)$$

Di conseguenza, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ottenuta sarà priva di arbitraggi. In più, dato che C non presenta alcun tipo di $\epsilon - arbitrage$, per definizione si avrà $e^{-\epsilon} \leq c_{ij}c_{kj}c_{ki} \leq e^{\epsilon}$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$ [14].

Partendo da questa relazione, il lavoro si struttura in modo da individuare il punto di svolta per l'osservazione di un arbitraggio. In questo senso, nel caso in cui $i = j = k$, si avrà $e^{-\frac{1}{3}\epsilon} \leq c_{ii}e^{\frac{1}{3}\epsilon}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Quindi, con $k = 1$ si ottiene:

$$c_{ij}c_{ji} \leq \frac{e^{\epsilon}}{c_{ii}} \leq \frac{e^{\epsilon}}{e^{-\frac{1}{3}\epsilon}} = e^{\frac{4}{3}\epsilon} \quad (4.3.6)$$

e similmente:

$$c_{ij}c_{ji} \geq \frac{e^{-\epsilon}}{c_{ii}} \geq \frac{e^{-\epsilon}}{e^{\frac{1}{3}\epsilon}} = e^{-\frac{4}{3}\epsilon} \quad (4.3.7)$$

Quindi:

$$a_{ij} = \frac{c_{1j}}{c_{1i}} = c_{ij} \frac{c_{1j}}{c_{1i}c_{ij}} \leq c_{ij}e^{\frac{4}{3}\epsilon} \frac{1}{c_{j1}c_{1i}c_{ij}}$$

$$\leq c_{ij}e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \quad (4.3.8)$$

E in maniera omogenea si osserverà:

$$a_{ij} \geq c_{ij}e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \quad (4.3.9)$$

andando così a confermare l'assunzione iniziale. [14]

Si ricava, quindi, che per ogni matrice positiva C , se $\frac{\lambda_{max}}{n} \notin \left[e^{-\frac{7}{3}\epsilon}, e^{\frac{7}{3}\epsilon} \right]$ allora vi sarà un'opportunità di arbitraggio.

Con una metodologia simile, al fine di calcolare la relazione legata all'autovalore massimo λ_{max} , si assume che, per ogni matrice positiva $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, se non vi sarà alcun $\epsilon - arbitrage$, allora:

$$e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \leq \frac{\lambda_{max}}{n} \leq e^{\frac{7}{3}\epsilon} \quad (4.3.10)$$

dove λ_{max} è il massimo autovalore reale di C .

In generale, per stimare l'autovalore di una matrice perturbata, si può usare il Teorema di Bauer-Fike. Ma per i nostri scopi, c'è anche una maniera alternativa per stimare il massimo autovalore λ_{max} di Perron-Frobenius appartenente a una matrice positiva.

Nello specifico, la formula di Collatz-Wielandt [39, p. 666] enuncia che per ogni matrice positiva M , esiste un

$$\lambda_{max} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \geq 0, x \neq 0} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{(Mx)_i}{x_i} \quad (4.3.11)$$

dove il minimo fa riferimento a i , in modo tale che $x_i \neq 0$. Il massimo, invece, è indicato dal vettore positivo - e maggiore di zero - x .

Riprendendo questo concetto illustrato sopra e assumendo che non vi sia alcun $\epsilon - arbitrage$, allora esisterà una matrice positiva $A = (a_{ij})_{1 \neq i, j \neq n}$ priva di arbitraggi e che soddisfa:

$$a_{ij}e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \leq c_{ij} \leq a_{ij}e^{\frac{7}{3}\epsilon} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.3.12)$$

Di conseguenza, si avrà che l'autovalore di grado massimo sarà:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \max_{x \in \mathbb{R}^n \geq 0, x \neq 0} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{(Cx)_i}{x_i} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \geq 0, x \neq 0} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}x_j}{x_i} \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}^n \geq 0, x \neq 0} \min_{i: x_i \neq 0} \frac{e^{\frac{7}{3}\epsilon} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} = ne^{\frac{7}{3}\epsilon} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Da questi passaggi si ottiene la relazione $\lambda_{max} \geq ne^{\frac{7}{3}\epsilon}$ che completa la dimostrazione. [14]

Similmente a quanto dimostrato in precedenza, si descrive un altro tipo di frizione introdotta nel mercato, una frizione che porta ad ottenere i δ – arbitrage. Anche questa tipologia è stata introdotta da Cui et al. (2018) [14] e vista la sua peculiarità, è opportuno citarlo.

Data una matrice positiva $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, non vi sarà alcun δ – arbitrage se, per ogni $1 \leq i, j \leq n$ esiste $e^{-\delta} \leq c_{ij}c_{ji} \leq e^{\delta}$. [14]

Se $\lambda_{max} < ne^{-\frac{1}{2}\delta}$, allora esisterà un δ – arbitrage. Assumendo che questa tipologia di arbitraggi non sia presente nella matrice sopra descritta, allora $a_{ii}a_{ii} \geq e^{-\delta}$ e $a_{ij} \geq e^{-\frac{1}{2}\delta}$.

Riprendendo la condizione per cui $(h_i)_{1 \leq i, j \leq n}$ è l'autovettore positivo associato a λ_{max} , si ottiene

$$\begin{aligned} n\lambda_{max} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{1 < j} \left[a_{ij} \frac{h_j}{h_i} + a_{ji} \frac{h_i}{h_j} \right] \geq ne^{-\frac{1}{2}\delta} + \sum_{1 < j} \left[a_{ij} \frac{h_j}{h_i} + \frac{e^{-\delta} h_i}{a_{ji} h_j} \right] \\ &\geq ne^{-\frac{1}{2}\delta} + \sum_{i < j} 2\sqrt{a_{ij} \frac{h_j}{h_i} \frac{e^{-\delta} h_i}{a_{ij} h_j}} = n^2 e^{-\frac{1}{2}\delta} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

che porta a dimostrare la disuguaglianza $\lambda_{max} < ne^{-\frac{1}{2}\delta}$ [14]

Difatti, si dimostra che se λ_{max} è proprio uguale a $ne^{-\frac{1}{2}\delta}$ allora non vi sarà alcuna possibilità di arbitraggio, dovuta principalmente alla presenza di δ .

4.3.3 Arbitraggi Triangolari

La condizione di arbitraggio triangolare riguarda tre tassi di cambio $S_{i/j,t}$ ($i \neq j$) che rappresentano le conversioni tra i tassi di cambio al tempo t (cioè $i, j \in EUR, USD, JPY$).

L'uguaglianza che si avrà senza tener conto dei costi di transazione sarà data da:

$$\frac{S_{EUR/JPY,t}}{S_{USD/JPY,t}} = S_{EUR/USD,t}$$

dove $S_{i/j,t}$ rappresenta l'ammontare di valuta j al tempo t necessario ad acquistare un'unità della valuta i . [27]

Se questa uguaglianza non regge, vorrà dire che ci troveremo in presenza di un'opportunità di arbitraggio che però potrà essere sfruttata solamente se la conversione tra i vari tassi di cambio verrà effettuata esattamente ai tassi che violano tale condizione.

Per fare un esempio pratico, supponiamo di avere un'unità di *EUR* e decidiamo di cambiare questa unità per un ammontare EUR/JPY di *JPY*. Una volta ottenuta questa quantità di *JPY*, vogliamo trasformarla in *USD* per una quantità di USD/JPY . Ed infine, trasformiamo questa quantità ottenuta da *USD* in *EUR*.

In una situazione di arbitraggio triangolare, queste transazioni dovrebbero generare una quantità di *EUR* – ottenuta con l'ultimo scambio dal *USD* – maggiore rispetto a quella di partenza. Similmente si potrebbe fare lo stesso ragionamento facendo prima il cambio in *USD*, poi in *JPY* ed infine in *EUR*.

$$(EUR \rightarrow JPY \rightarrow USD \rightarrow EUR)$$

Le formule che rappresentano questa condizione di parità triangolare al tempo t sono composte come segue [27]:

$$M \times S_{EUR/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{USD/JPY,t}^a} \times \frac{1}{S_{EUR/USD,t}^a} - M = 0 \quad (4.3.15)$$

$$S_{EUR/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{USD/JPY,t}^a} \times \frac{1}{S_{EUR/USD,t}^a} - 1 = 0 \quad (4.3.16)$$

e

$$S_{EUR/USD,t}^b \times S_{USD/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{EUR/JPY,t}^a} - 1 = 0$$

con a che rappresenta il prezzo ask e b il prezzo bid. Se le componenti a sinistra dell'uguale sono maggiori di 0 al tempo t allora si potranno ottenere dei profitti sfruttando l'arbitraggio.

Ovviamente questo concetto può essere ampliato su più di tre valute contemporaneamente, dando vita a $k - esimi$ arbitraggi con k che indica il numero di valute prese in questione.

4.4 Relative Value Arbitrage

Per quanto riguarda il relative value arbitrage, si intende un'operazione in grado di generare profitti risk-free gestendo in maniera statica o dinamica le varie condizioni al netto dei costi che potrebbero incorrere [15].

Questo perché le operazioni di questo genere sono perdurate nel tempo e cercano di sfruttare dei mispricing che si presentano tramite la gestione nel lungo termine dell'operazione. Di conseguenza saranno spesso soggette ad un rollover o comunque a degli scambi in prossimità delle scadenze. Gli esempi più chiari sono le pairs trading strategies ed il cash-and-carry trading.

4.4.1 Pairs Strategies

Il pairs trading è una strategia di investimento molto utilizzata dagli hedge fund che, se ben calibrata, permette di essere neutrali rispetto agli andamenti del mercato. Appartenente alla categoria dei statistical arbitrage, fu ideata da Gerry Bamberger e Nunzio Tartaglia, un gruppo di quants che lavorava presso Morgan Stanley intorno agli anni '80 [46].

L'approccio principale che viene utilizzato si basa sulla cointegrazione tra due securities, anche se sono diverse le metodologie applicabili [46]. Grazie a questo approccio, è possibile individuare un legame lineare stazionario tra due processi stocastici non stazionari – che presi singolarmente non sarebbero stabili – in modo tale da trovare una relazione che sia stabile durante il corso del tempo.

Preso un gruppo di serie storiche, esse andranno prima differenziate in modo tale da trovarne l'ordine d'integrazione affinché siano stazionarie. Dopodiché, se una loro combinazione lineare risulterà essere integrata per un numero inferiore all'ordine d'integrazione di ogni singola serie storica, allora esse saranno definite cointegrate. Solitamente in economia non si osservano delle variabili integrate con un ordine superiore a 1. Ciò accade perché le serie economiche presentano spesso un trend di lungo periodo e quindi si comportano come random walks non stazionarie.

Tale concetto fu introdotto da Engle e Granger che analizzarono le proprietà statistiche delle time series economiche intorno agli anni '90. Dal punto di vista econometrico, la cointegrazione differisce dalla correlazione, in quanto quest'ultima fa riferimento ad una relazione simile per i returns nel breve periodo, mentre la cointegrazione fonda le radici su un co-movimento dei prezzi che si regge sul lungo periodo [46]. Quindi è come se le due serie cointegrate avessero lo stesso drift stocastico [9].

L'idea base della strategia è quella di monitorare l'andamento dello spread

tra due securities per andare long sulla security sovrapprezzata e short su quella sottoprezzata.

Secondo Vidyamurthy [47] gli steps necessari per applicare delle pairs strategies sono:

- Identificare delle coppie di securities che potrebbero essere potenzialmente cointegrate. Il processo di identificazione si può basare sulle proprietà fondamentali di queste asset classes oppure su un'analisi puramente statistica sui dati storici.
- Una volta identificata la coppia di securities, andrà verificato che tali coppie siano effettivamente cointegrate da un punto di vista statistico. Ovvero, bisognerà determinare il coefficiente di cointegrazione e testare che lo spread tra le due time series sia stazionario e mean reverting nel lungo periodo.
- Infine, si passerà a determinare un delta risultante dalle due time series che permetterà di operare nel mercato e che sia maggiore rispetto allo scostamento dei prezzi dovuto al bid-ask spread.

La formula di partenza per questo processo consiste in [9]:

$$\log(P_t^A) - \gamma \log(P_t^B) = \mu + \epsilon_t \quad (4.4.1)$$

Dove:

- P_t^A indica il prezzo della security A al tempo t e P_t^B per la security b al tempo t
- μ è il valore di equilibrio
- ϵ_t sono i residui

4.4.2 Carry trade e Momentum

Queste due strategie di trading sono molto utilizzate nel mercato valutario e la prima ha anche uno stretto legame con una condizione teorica a noi molto vicina.

Con carry trade si intende quella strategia operativa per cui si prendono in prestito dei fondi in valuta con un basso tasso d'interesse e si danno in prestito fondi che invece hanno una valuta con tasso d'interesse elevato [8].

È tra le strategie più vecchie ed utilizzate in ambito FX e si basa sul fallimento della Uncovered Interest Parity. Anche per questo motivo, la carry trade strategy ha ricevuto molta attenzione in ambito accademico, motivata dallo spiegare la profittabilità di questa strategia. Giusto per citarne alcuni, importanti sono gli spunti di Fahri et al. (2009) [22], Lustig et al (2009) [34] e Rafferty (2010) [44].

Dal punto di vista pratico, assumiamo che la valuta locale sia il dollaro americano (*USD*) ed indichiamone il tasso d'interesse risk-free annesso con i_t . Di conseguenza il tasso d'interesse della valuta estera sarà i_t^* .

Senza tener conto dei costi di transazione e prendendo una posizione long nella strategia carry trade, si avrà [8]:

$$z_{t+1}^L = (1 + i_t^*) \frac{S_{t+1}}{S_t} - (1 + i_t) \quad (4.4.2)$$

Con S_t ad indicare il tasso di cambio spot in *USD* per valuta estera.

Il payoff di tale strategia sarà:

$$z_{t+1}^C = \text{sign}(i_t^* - i_t) z_{t+1}^L \quad (4.4.3)$$

La strategia del momentum, invece, consiste nel comprare (vendere) le valute le cui posizioni long aperte nel passato hanno fatto registrare rendimenti positivi (negativi) [8].

Più nello specifico, la strategia riguarda la vendita (acquisto) di un forward in valuta estera se è stato redditizio vendere (acquistare) tale contratto al tempo $t+\theta$. In molti lavori relativi alla prima strategia sopra descritta sono stati apportati degli spunti interessanti sul momentum, come in Lustig et al. (2009) [34] e Rafferty (2010) [44].

Prendendo spunto dai loro lavori, indicheremo $\tau = 1$ ad indicare il time frame di un mese. Avremo così il payoff di questa strategia:

$$z_{t+1}^M = \text{sign}(z_t^L)z_{t+1}^L \quad (4.4.4)$$

A differenza del carry trade, in questo caso viene considerata la valuta estera contro quella locale, come se nel nostro esempio fosse contro l'USD. Implementando questa strategia in asset diversi ed equamente bilanciati, si potranno costruire veri e propri momentum portfolios [8].

Evidenza empirica da parte di Burnside et al. (2011) è come la profittabilità di queste due strategie non corrisponda ad una semplice compensazione per il rischio [8], questo perché la covarianza tra i payoffs delle due strategie e i fattori di rischio non è statisticamente significativa.

Nonostante ciò, si è cercato di trovare quante più spiegazioni plausibili alla magnitudine di profittabilità, andando ad analizzare le caratteristiche durante periodi di gravi dissesti economico-finanziari o in situazioni in cui un evento poco frequente – o mai avvenuto prima – potesse presentarsi influenzando notevolmente i prezzi delle attività finanziarie (Peso problem, Friedman).

Un'altra alternativa risiede nell'esistenza di price pressures nel mercato valutario, dovute al fatto che le valute possono essere price sensitive in base alle quantità che vengono scambiate [8].

4.5 **Analisi empiriche**

In riferimento al mercato valutario, Chacholiades (1971) determinò le condizioni necessarie e sufficienti per l'instaurazione di tassi di cambio consistenti [12], Moosa (2002) invece mostrò che gli effetti generati dagli arbitraggi triangolari nel mercato forward sono simili a quelli generati nel mercato spot con l'applicazione diretta della covered interest parity [40].

Akram, Rine e Sarno (2008) hanno fornito – tra gli altri – evidenze pratiche sulla frequenza, sulla grandezza e sulla durata delle opportunità di arbitraggio, così come le loro deviazioni dalla legge del prezzo unico [4].

Sin dalle analisi empiriche riportate, invece, da Foucault et al. [24] la presenza di triangular arbitrage nel mercato valutario spot è risultata frequente ma allo stesso tempo soggetta a time frames limitati [24].

Ad esempio, Fenn et al. [23] hanno studiato la presenza dei suddetti arbitraggi grazie ai prezzi tick-by-tick, mostrando un declino di queste opportunità negli ultimi anni e andando a sottolineare il miglioramento dell'efficienza dei mercati [23].

Anche Aiba et al. [14] hanno riscontrato numerose opportunità di arbitraggi triangolari usufruibili grazie all'high frequency trading nel periodo che va dal 1991 al 1999 [1]. Tramite lo studio, è stata riscontrata – in media – una finestra giornaliera di opportunità di 90 minuti. Grazie ad un modello riprodotto nel medesimo lavoro, gli autori sono stati in grado di valutare gli effetti degli arbitraggi valutari come "interazioni" sui tassi di cambio, riportando tra le stesse un'autocorrelazione negativa in un breve arco temporale.

Pochi anni dopo, Aiba e Hatano [6] hanno studiato un modello micro in grado di descrivere le dinamiche generate da ogni dealer all'interno di più mercati valutari, aiutandosi con lo studio dell'impatto degli arbitraggi triangolari sulle fluttuazioni dei tassi di cambio [2].

Altri ricercatori, per citarne alcuni Akram et al. [13], hanno evidenziato come le deviazioni dalla interest parity generino numerose opportunità di arbitraggio [4].

Da notare come la maggior parte degli studi su questo argomento in ambito accademico sia incentrata sugli arbitraggi triangolari e non su quelli formati da più valute. I motivi spaziano dalla difficoltà di esecuzione, in maniera quasi istantanea, di scambi multipli alla crescita dei costi di transazione legati ad ogni scambio, fino alla difficoltà fisiologica di poter individuare un arbitraggio che perduri su più valute contemporaneamente.

Ciò non toglie che, per via della globalizzazione che continua a crescere, sarebbe opportuno dare attenzione ad uno scenario sempre più ampio, composto da più valute. Allo stesso modo, ripetere gli algoritmi e i calcoli che sono dietro l'individuazione di arbitraggi all'interno del mercato valutario globale, necessiterebbe di uno sforzo computazionale alquanto rilevante (risultando anche inutile), motivo per cui continuano ad essere sviluppate metodologie teoriche e pratiche sempre più smooth, in grado di identificare queste opportunità all'interno di frame work sempre più complessi e dinamici.

Risulta evidente come bisogna poi connettere questi metodi di valutazione ai programmi di esecuzione ordini, in modo tale da creare degli algoritmi automatizzati. Questa necessità è anche data dal fatto che i market makers del mercato valutario stanno espandendo in maniera sempre più veloce i loro sistemi di quotazione, così come le frequenze di aggiornamento dei dati [14].

Capitolo 5

Arbitraggi e algebra matriciale

È opportuno citare come lo sviluppo dell'algebra matriciale e della sua nozione derivino dagli sviluppi nel campo dei determinanti, che risalivano allo studio dei coefficienti nei sistemi di equazioni lineari. Tra i primi matematici che si occuparono di questi argomenti vi furono Leibnitz, Cramer – quest'ultimo presentò nel 1693 la sua formula per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari – e Lagrange. La prima volta, invece, in cui fu concepito il termine “matrice” fu in Inghilterra nel 1848 da parte di J.J. Sylvester che prese spunto dal termine inglese *womb*, a significare una disposizione di numeri. A partire da allora, si susseguì un forte interesse per la materia, in primis da parte di Arthur Cayley che ne studiò l'utilizzo dell'algebra matriciale in un lavoro del 1855. Il matematico si occupò principalmente delle trasformazioni lineari di una matrice fino a enunciare la moltiplicazione tra più matrici [49].

5.1 Le matrici e le implicazioni finanziarie

Tra i vari strumenti matematici utilizzati per lo studio e lo sviluppo di algoritmi in ambito finanziario, vi sono le matrici. La loro utilità viene dal fatto che i numeri presenti al loro interno possono indicare dei dati – quali prezzi,

quotazioni, stime etc. – e allo stesso modo possono essere interpretati tramite semplici equazioni matematiche.

In diverse applicazioni economico-finanziarie, le matrici possono dare delle approssimazioni veloci su processi e calcoli molto complessi, o che richiederebbero altresì un ingente sforzo in termini computazionali. Proprio per i motivi sopracitati, nel mercato valutario, la teoria delle matrici ha suscitato molto interesse vista la sua duttilità e praticità.

Basti considerare che tutti i tassi di cambio presenti nel mercato sono dei rapporti dati da due valute.

5.2 Il Teorema di Perron-Frobenius

Il teorema di Perron-Frobenius fu scoperto inizialmente nel 1907 da parte di Oskar Perron e fu poi integrato da Georg Frobenius nel 1917. I due matematici sostennero che presa una matrice quadrata, composta da termini reali, essa avrà sempre un autovalore massimo al quale vi è associato un autovettore che può essere scelto in modo tale da avere delle componenti strettamente positive (Frobenius dimostrò la validità anche per delle specifiche classi di matrici non negative) [50].

Innanzitutto, è opportuno inizializzare la matrice che andremo ad osservare.

Chiamiamo la matrice A una matrice del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

Data la matrice positiva $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$:

- Esiste sempre un autovalore $\lambda_{PF} \geq 0$ chiamato anche *radice di Perron*. A tale autovalore sarà associato un autovettore $v_{PF} \geq 0$
- Se tale matrice A è anche irriducibile, allora $\lambda_{PF} > 0$ e $v_{PF} > 0$. Tale autovettore sarà l'unico di modulo massimo con $m_a(\lambda_{PF}) = 1$ [26]
- $\min_{i \leq i \leq n} \frac{(Bx)_i}{x_i} \leq \lambda_{max} \leq \max_{i \leq i \leq n} \frac{(Bx)_i}{x_i}$

Il suddetto teorema è molto importante per individuare la presenza di arbitraggi poiché indica una caratteristica molto particolare ed utile: la presenza, all'interno di una matrice positiva, di un autovalore massimo uguale all'ordine della matrice.

Se non esiste alcuna opportunità di arbitraggio, allora $\lambda_{max} = n$, dove λ_{max} è l'autovalore di grado massimo della matrice A .

A sostegno di quanto enunciato, è opportuno proporre i procedimenti utilizzati da Cui et al. (2018) per coniugare il Teorema di Perron-Frobenius alla condizione di non arbitraggio.

La condizione di esclusione per un arbitraggio triangolare afferma che per ogni i, j, k deve valere:

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$$

Ciò vuol dire che un trader non può ottenere dei profitti semplicemente cambiando, in maniera sequenziale, una valuta per un'altra (preso in considerazione il set di tre valute differenti ma tra loro collegate).

Da un punto di vista matematico, affinché questa relazione sia valida, bisogna assumere che $i = j = k$, in modo tale da avere $a_{ii} = 1$.

Assumendo inoltre che non vi sia alcun arbitraggio diretto tra due valute - ovvero che $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ per ogni i, j - basterà calcolare l'autovettore associato

al massimo autovettore della matrice A per ottenere una sequenza di valori g_1, \dots, g_n con $g_i > 0$.

Le componenti di questo autovettore andranno ad identificare ogni elemento presente all'interno della matrice A (al di fuori della diagonale) tali che:

$$a_{12} = \frac{g_1}{g_2}, a_{13} = \frac{g_1}{g_3}, \dots, a_{1n} = \frac{g_1}{g_n}$$

Ad esempio, se si assume che $g_1 = 1, g_2 = \frac{1}{a_{12}}, \dots, g_n = \frac{1}{a_{1n}}$ e dato che $a_{1j}a_{ij}a_{j1} = 1$ si avrà:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{1i}a_{j1}} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}} = \frac{g_i}{g_j}$$

Come si può vedere, questa relazione sopra descritta è abbastanza chiara da dimostrare.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

Nel rispetto del Teorema di Perron-Frobenius, esisterà, all'interno di una matrice positiva, un autovalore associato ad un autovettore positivo. Di conseguenza, si avrà $\lambda_{max} = n$ e questo completa la prova [14].

La situazione incontrata durante l'analisi di questi fenomeni è associata in maniera diretta alla condizione di non arbitraggio. Ovvero, l'affermazione secondo cui $\lambda_{max} = n$ è falsa, poiché non sarà mai perfettamente uguale a n . Chiaramente si parla di approssimazioni in termini di millesimi ma che nei casi in cui diventano più consistenti permettono di osservare opportunità di arbitraggio.

Un esempio viene dato da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \epsilon & 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & 1 & 1 + \epsilon \\ 1 + \epsilon & 1 - \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

dove ϵ è un numero maggiore di zero tale che $1 - \epsilon > 0$.

Il risultato sarà una matrice positiva A con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \epsilon & 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & 1 & 1 + \epsilon \\ 1 + \epsilon & 1 - \epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ancora una volta, per mezzo del Teorema di Perron-Frobenius, si avrà che $\lambda_{max} = 3$ ma risulta evidente che vi saranno delle opportunità di arbitraggio dovute al noise ϵ [14].

5.3 La struttura di calcolo generale

Al fine di rappresentare la metodologia di calcolo utilizzata per l'identificazione degli arbitraggi e delle triplette di valute che rappresentano tali arbitraggi, è necessario riproporre la struttura seguita.

Sono stati presi in considerazione due tipi di approcci diversi: il primo basato su un'analisi diretta della matrice composta dai tassi di cambio, e il secondo basato su alcune possibili modifiche da apportare a questa matrice.

5.4 Metodo Cui et al. (2018)

Tutta questa struttura si basa su una matrice A composta da $n \times n$ tassi di cambio [14] del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

Tale matrice diventa il punto di partenza per l'implementazione di un codice di calcolo - trasformabile in un algoritmo automatizzato di trading data-driven – in grado di identificare le triplete di valute che generano gli arbitraggi e di sfruttarne la loro magnitudine.

Il metodo utilizzato per il calcolo di potenziali arbitraggi risiede nel prodotto dei tassi di cambio per ogni gruppo di valuta per poi compararne il risultato con l'unità in modo da quantificarne lo scarto percentuale.

Sarà, quindi, necessario scrivere un codice in grado di riprodurre n matrici per n prezzi e settare in modo iterativo il prodotto per tre tassi di cambio diversi ma accomunati da una valuta. Chiaramente, il vincolo di tre valute può essere ampliato a k valute (quante se ne vogliono considerare) purché esse siano accomunate da una relazione del tipo:

$$a_{ij}a_{jx}a_{xy} \dots a_{ni} = (\neq)1$$

In questo modo, conoscendo ex ante le tipologie di tassi che si andranno a calcolare, si saprà perfettamente da dove proviene l'ipotetico arbitraggio.

In maniera simile, Cui et al. (2018) hanno ampliato il concetto al caso in cui non si conoscano di preciso i tassi di cambio. Ovvero, nel caso in cui una volta ottenuto l'output ne risulti ignota la provenienza.

È opportuno spiegare brevemente la metodologia utilizzata. La tipologia di arbitraggio più banale – l'arbitraggio diretto – ottenuta mediante il prodotto $a_{ij}a_{ji}$ per ogni i, j può essere diversamente interpretata come il prodotto tra la matrice A e la sua trasposta $A_{ij}^T = \{a_{ji}\}$. [14].

Da qui si può estendere il concetto verso l'arbitraggio triangolare in modo tale da costruire tre matrici tridimensionali con le seguenti identità:

$$A_1(i, j, k) = a_{ij}, \quad A_2(i, j, k) = a_{jk}, \quad A_3(i, j, k) = a_{ki}$$

Si inizia partendo dalla matrice A_1 , ottenuta dalle n copie della matrice originale $A_{n \times n}$. Come risultato, le matrici A_2 e A_3 potranno essere ottenute scambiando gli assi di A_1 e, da un punto di osservazione puramente visivo, questo passaggio rappresenta una semplice rotazione di un cubo tridimensionale (o trasposizione matriciale) [14].

Ad esempio, se si cambiano gli assi di A_1 da i, j, k a k, i, j , allora il valore di $A_1(i, j, k) = a_{ij}$ sarà trasferito al posto del termine k, i, j in A_2 . Quindi $A_2(k, i, j) = a_{ij}$ diventerà $A_2(i, j, k) = a_{jk}$.

Allo stesso modo, scambiando l'asse di A_1 da i, j, k a j, k, i , il valore - per esempio - di $A_1(i, j, k) = a_{ij}$ sarà trasferito alle coordinate j, k, i in A_3 . Quindi $A_3(j, k, i) = a_{ij}$ e $A_3(i, j, k) = a_{ki}$.

Dopo aver costruito le tre matrici, è possibile identificare i profitti derivanti dai possibili arbitraggi triangolari grazie alle composizioni delle suddette matrici:

$$A_x = A_1 \circ A_2 \circ A_3, \quad A_x(i, j, k) = a_{ij}a_{jk}a_{ki} \quad (5.4.2)$$

Tramite questo calcolo si otterranno quindi non solo i gruppi di valute che generano gli arbitraggi ma anche i profitti derivanti dallo sfruttamento degli stessi.

Ovviamente questa idea di fondo si può ampliare anche per gruppi con più di tre valute. In questo caso, gli arbitraggi dati da k valute prendono il nome di k – *point* arbitrage [36]. Basti pensare che un arbitraggio triangolare indica la situazione in cui $k = 3$ mentre l'arbitraggio diretto si ha con $k = 2$. Brevemente, se $k \geq 4$ il processo rimane comunque simile a quello sopra descritto: si dovranno

costruire k matrici k dimensionali e calcolare la composizione di ogni matrice come: [14]

$$A_k := A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_k, \quad A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) := a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} \quad (5.4.3)$$

5.5 Metodo Ma (2008)

In riferimento alla seconda metodologia seguita, si inizia prendendo n valute e ipotizzando che ognuna di esse abbia un valore intrinseco – denominato g_i – in modo tale da poterle rappresentare tramite un vettore trasposto chiamato $G = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_n]^T$ con $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ [36]. Tale autovettore coincide con l'autovettore associato al massimo autovalore di una matrice A del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

È grazie a questo autovettore che si può costruire la matrice arbitrage-free benchmark.

A questo punto, vanno identificate le colonne che vanno da 1 a n con i così detti currency-issuing countries, ovvero i Paesi nei quali il tasso di cambio viene scambiato, e le righe che vanno da 1 a n con le diverse valute.

Avremo quindi una disposizione matriciale secondo cui potremmo associare ad ogni elemento chiamato $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ il rapporto tra due valute i e j provenienti da due Paesi o regioni diverse [36].

Definiamo questa matrice come:

$$B := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_{n1} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.5.1)$$

Tale matrice è importante in quanto contiene determinate caratteristiche: [36]

- $b_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in [1, n]$
- $b_{ij} = \frac{1}{b_{ji}} \quad \forall i, j \in [1, n]$
- $b_{ik}b_{kj} = b_{ij} \quad \forall i, j, k \in [1, n]$
- La matrice ha un autovalore $\lambda_{max} = n$ ed il corrispettivo autovettore indica il valore intrinseco
- Diagonale unitaria, in quanto il rapporto del tasso di cambio di ogni valuta con se stessa è uguale a 1

La prima caratteristica è abbastanza intuitiva, in quanto ogni tasso di cambio dovrà necessariamente essere maggiore di zero.

La seconda ipotesi, invece, merita più attenzione poiché rappresenta il punto chiave dell'arbitraggio diretto. Infatti, se per comprare un'unità di valuta X occorre una quantità Y di un'altra valuta, allora il rapporto $\frac{1}{X}$ deve corrispondere a Y . Qualora questa relazione non dovesse reggere, ci si troverà di fronte ad un arbitraggio diretto.

Per quanto riguarda la terza ipotesi, si basa su un ampliamento del concetto descritto sopra, spiegando così il valore di un tasso di cambio principale con il prodotto tra due diversi tassi, con uno che incorpora una delle due valute principali [12].

Infine, tramite la quarta relazione diventa facile dimostrare come $BG = nG$. Quest'ultimo rapporto implica che i tassi di cambio siano determinati dal rapporto dei loro valori intrinseci.

5.5.1 La matrice benchmark

A questo punto, la matrice arbitrage-free benchmark [12] sarà la matrice di partenza. Se si dovessero presentare deviazioni da questi valori, allora vorrebbe dire che si saranno venute a creare delle finestre di arbitraggio.

Prendendo una qualsiasi matrice formata da quotazioni reali dei tassi di cambio, possiamo notare che le ipotesi sopra descritte sono verosimilmente soddisfatte, o comunque approssimate al millesimo in maniera non influente da sfruttare degli arbitraggi.

Questa matrice "reale" torna molto utile poiché può essere vista come una matrice A perturbata. Anche in questo caso gli arbitraggi verranno identificati attraverso il massimo autovalore λ_{max} e dal corrispondente autovettore G . Se $\lambda_{max} = n$ allora non vi saranno arbitraggi, altrimenti si osserveranno delle opportunità da poter sfruttare.

Cerchiamo adesso di spiegare la relazione che vi è tra l'autovalore λ_{max} , il corrispondente autovettore e le opportunità di arbitraggio. Appare ovvio come la matrice dei tassi di cambio sia una matrice strettamente positiva, dovuta all'esistenza ed unicità di un λ_{max} e del suo autovettore. Per mezzo di questo autovettore associato (G) si potrà costruire la matrice B in cui ogni elemento è dato dal rapporto tra i vari elementi di G [36].

È opportuno ricordare che da questa matrice di partenza si otterrà la matrice perturbata B da cui si ricava ulteriormente la comparative value matrix C , i cui elementi sono $c_{ij} = \frac{b_{ij}}{a_{ij}}$, con $c_{ij} = 1$ per ogni $i = j$ e $c_{ij} \approx 1$ per ogni $i \neq j$.

Dato che A è una matrice positiva, per il Teorema di Perron-Frobenius esiste un autovettore positivo h tale che:

$$Ah = \lambda_{max}h \quad (5.5.2)$$

Tale uguaglianza si può riscrivere come:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j = \lambda_{max}h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Di conseguenza, sostituendo questa relazione, si avrà:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{h_j}{h_i} \quad (5.5.3)$$

A questo punto sarà necessario sommare le varie i per ottenere la relazione di non arbitraggio: [36]

$$\begin{aligned} n\lambda_{max} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = n + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = \\ &= n + \sum_{i < j} \left[a_{ij} \frac{h_j}{h_i} + a_{ji} \frac{h_i}{h_j} \right] \geq n + \sum_{i < j} 2\sqrt{a_{ij} \frac{h_j}{h_i} a_{ji} \frac{h_i}{h_j}} = \\ &= n + \sum_{i < j} 2 = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \\ &= n^2 \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

dove si è assunta la disuguaglianza aritmetico-geometrica $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ per ogni $x, y > 0$ e l'uguaglianza tra i cambi $a_{ij}a_{ji} = 1$.

Si è quindi provato che, presa in considerazione l'ipotesi di assenza di arbitraggi diretti per mezzo di $a_{ij}a_{ji} = 1$, $\lambda_{max} \geq n$ regge e si avrà $\lambda_{max} = n$ se e solo se, per ogni i, j si avrà:

$$a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = a_{ji} \frac{h_i}{h_j} = \frac{1}{a_{ij}} \frac{h_i}{h_j}$$

che equivale a dire:

$$a_{ij} = \frac{h_i}{h_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (5.5.5)$$

Tutto questo implica che non vi sono arbitraggi triangolari se si assume che $\lambda_{max} = n$.

È facile notare che λ_{max} è direttamente correlato ai coefficienti c_{ij} . Quindi, se non vi sarà alcuna deviazione dalla matrice B , allora ogni $c_{ij} = 1$ e la matrice A sarà uguale alla B , con autovalore di grado massimo $\lambda_{max} = n$ e nessuna opportunità di arbitraggio presente [36].

Se invece c_{ij} devia anche leggermente dall'unità, vorrà dire che λ_{max} devia leggermente da n e quindi questa discrepanza tra i due valori andrà a segnalare l'esistenza di un possibile arbitraggio, poiché i valori si scostano da quelli della matrice arbitrage-free [36].

Al fine di analizzare ogni scenario, è utile osservare la relazione tra $\lambda_{max} - n$ e le possibili discrepanze tra c_{ij} e l'unità, sotto delle circostanze generali.

Il caso più particolare è quello in cui $c_{ij} = 1$ per ogni $i, j = 1 \dots n$ in quanto vuol dire che la matrice benchmark e quella perturbata sono identiche [36].

Poiché:

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [c_{ij} + c_{ji}] \quad (5.5.6)$$

allora la matrice benchmark avrà l'autovalore di modulo massimo $\lambda_{max} = n$ e il corrispondente autovettore sarà $G = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_n]^T$ con $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ [36].

5.5.2 L'Arbitrage Possibility Indicator (API)

Giunti a questo punto, iniziamo a descrivere alcuni strumenti che ci torneranno utili per l'identificazione dei profitti derivanti dagli arbitraggi e per trovare il percorso dal quale questi si vengono a creare.

Per motivi di chiarezza, definiamo l'indicatore Arbitrage Possibility Indicator (API) [36] come:

$$API = \frac{|\lambda_{max} - n|}{n - 1} \quad (5.5.7)$$

Questo rapporto è in grado di identificare le deviazioni di λ_{max} da n , indicando il grado di scostamento dalla matrice arbitrage free.

Quindi, $API = 0$ indicherà l'assenza di arbitraggi, mentre $API > 0$ – poiché in valore assoluto non potrà essere inferiore a zero – implicherà opportunità di arbitraggio [36]. Ovviamente più grande sarà il valore dell'indicatore e più ampie saranno queste finestre.

5.5.3 La matrice di confronto

Nel momento in cui viene divisa la matrice B con la matrice A , si ottiene una matrice C così detta comparative matrix value [36] in cui ogni valore presente al suo interno è dato dal rapporto tra gli elementi di B e A :

$$C := (c_{ij}) = (b_{ij}/a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.5.8)$$

Come si può notare, anche questa matrice presenta delle caratteristiche comuni alla matrice B . Infatti, se un valore casuale $c_{ij} = 1$ vorrà dire che quel tasso di cambio non sarà né sopravvalutato né sottovalutato bensì corrisponderà al suo valore intrinseco.

Se invece $c_{ij} < 1$ (> 1) allora la valuta i nel Paese j sarà sottovalutata (sopravvalutata) e per questo si potrà sfruttare l'arbitraggio.

Un semplice metodo per ottenere un profitto è comprare un bene quando il suo prezzo è basso e rivenderlo quando il prezzo è alto. Applicando questo

concetto, saremo interessati a trovare i valori massimi e minimi all'interno della matrice.

Indichiamo tali valori con: [36]

$$c_{max} = \max_{1 \leq i, j \leq n} (c_{ij}) = c_{i_{max}, j_{max}} \quad ; \quad c_{min} = \min_{1 \leq i, j \leq n} (c_{ij}) = c_{i_{min}, j_{min}}$$

In accordo con questo principio, dovremmo comprare la valuta I_{min} nel Paese J_{min} e vendere la valuta I_{max} nel Paese J_{max} . Per far ciò, bisognerà operare con degli scambi tra valute in modo da guadagnare sull'apprezzamento o deprezzamento dei tassi.

Ecco qui che entra in gioco il concetto di multiple arbitrage. Infatti, già da questo esempio si evince come ci siano quattro valute coinvolte.

Di conseguenza, nel caso generale, sarà necessario un arbitraggio quadrangolare per completare l'operazione e quindi saranno necessarie almeno due fasi di scambio [36]. Ad esempio, pensiamo che la sterlina sia sottovalutata in Europa e che lo yen sia sopravvalutato in America. In questo caso si potrebbe ricadere in un arbitraggio quadrangolare o triangolare, in base al modo in cui si riesce ad ottenere il maggior guadagno correndo il minor rischio.

A prescindere dal numero di valute coinvolte, la relazione viene indicata da questi valori massimi e minimi nei vari Paesi.

5.5.4 L'Arbitrage Earning Rate e le sue applicazione

5.5.4.1 Arbitraggi diretti

In base a quanto sopra descritto, nel momento in cui si avrà una condizione tale che $I_{max} = J_{min}$ e $J_{max} = I_{min}$ allora due elementi della matrice saranno simmetrici rispetto alla diagonale e si avrà un arbitraggio diretto [36].

Un arbitrageur potrà – quindi – prendere in prestito la valuta J_{min} per comprare la valuta I_{min} nel Paese J_{min} e venderla per la valuta I_{max} nella location J_{max} .

In questo modo, l'arbitrage earning rate sarà:

$$AER = \frac{1}{a_{(I_{min}, J_{min})} \cdot a_{(I_{max}, J_{max})}} - 1 \quad (5.5.9)$$

Poiché $a_{(I,J)} = b_{(I,J)} \cdot c_{(I,J)}$ si avrà:

$$AER = \frac{1}{b_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot b_{(I_{max}, J_{max})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1$$

E grazie alla relazione $\frac{1}{b_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})}}$ si ottiene:

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1 \quad (5.5.10)$$

Nonostante si evince che l'earning rate dipenda dagli elementi della matrice A , il risultato finale dipenderà dagli elementi corrispondenti nella matrice C , dovute alle proprietà dell'arbitrage-free matrix.

Infatti, se andassimo a calcolare i possibili guadagni di un arbitraggio attuato con i fondi già posseduti (senza quindi andare a prendere in prestito una valuta per poi riutilizzarla) vedremmo come l' AER tenderà a infinito [36].

D'ora in poi, quando si parlerà di AER lo si farà sempre in riferimento ad una quantità di valuta presa in prestito.

5.5.4.2 Arbitraggi triangolari

In questa tipologia di arbitraggio, nel momento in cui avremo $I_{max}=I_{min}$ o $J_{max} = J_{min}$ vorrà dire che i due elementi dell'arbitraggio si troveranno rispetti-

vamente o nella stessa riga o nella stessa colonna; per questo motivo si osserverà un arbitraggio triangolare [36].

Nel primo caso, ovvero quando le valute si troveranno nella stessa riga, un investitore che usa la valuta J_{min} nel Paese J_{min} comprerà la valuta I_{min} e la venderà per J_{max} nella location J_{max} per poi ricomprare la stessa valuta in J_{min} .

L'AER ottenuto sarà: [36]

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1 \quad (5.5.11)$$

Nell'altro caso, invece, quando i due tassi di cambio si troveranno nella stessa colonna – $J_{min} = J_{max}$ – l'investitore prenderà in prestito la valuta J_{min} nel Paese J_{min} , comprerà la valuta I_{min} e la venderà nel Paese I_{max} per la valuta I_{max} .

A questo punto, venderà l'ammontare di I_{max} per la valuta J_{min} nella location J_{max} , ottenendo così il seguente AER:

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} \quad (5.5.12)$$

5.6 La relazione tra API e AER

Prendiamo il caso di due valute.

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(2, 2)$ tale che:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli, l'autovalore di grado massimo sarà $\lambda_{max} = 1 + \sqrt{a_{12}a_{21}}$ e l'API risulterà $API = |\sqrt{a_{12}a_{21}} - 1|$ [36].

Di conseguenza, se $a_{12}a_{21} \neq 1$ e se si suppone che $a_{12}a_{21} = 1 + \epsilon$, allora la ϵ risulterà essere positiva e leggermente maggiore di zero.

Questo farà sì che $AER = \epsilon$, mentre $API = |\sqrt{1 + \epsilon} - 1| \approx \frac{\epsilon}{2}$. Grazie a ciò si dimostra che $AER = 2 \cdot API$.

Il tutto sta a significare che nel caso di un arbitraggio diretto, l'arbitrage earning rate sarà circa due volte l'arbitrage possibility indicator. Naturalmente se il valore finale dovesse essere negativo, la relazione reggerebbe e l'arbitraggio verrebbe colto utilizzando un'operazione di segno opposto.

Mostriamo adesso un'applicazione di come identificare il percorso ottimale di arbitraggio. Innanzitutto, bisogna prendere una matrice composta da tassi di cambio realmente quotati, una matrice arbitrage-free regolata dalle relazioni ed ipotesi sopra menzionate ed infine la matrice data dal rapporto tra la prima e la seconda matrice in grado di segnalare eventuali deviazioni dai prezzi reali. Della prima matrice, si calcola il massimo autovalore e l'autovettore collegato, in modo tale da verificare l'esistenza o meno di opportunità di arbitraggio. Una volta fatto ciò, verrà costruita la seconda matrice B in cui ogni valore è dato da $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ con g_i e $g_j \in G$.

A questo punto, dividendo la matrice B per la matrice A , si otterrà la comparative value matrix. Questa matrice è di fondamentale importanza per capire quale valuta è sopra(sotto)valutata rispetto a quale tasso di cambio. Molto spesso le deviazioni si vengono a identificare nella stessa riga o nella stessa colonna, dando vita ai così detti arbitraggi triangolari [36].

I risultati ottenuti possono essere rappresentati graficamente in maniera tale da evidenziare maggiormente la presenza di queste opportunità e la loro magnitudine.

Idealmente, nei grafici sono presenti dei picchi che indicano le deviazioni dalla relazione arbitrage-free. Questi picchi andranno fisiologicamente a decrescere e scomparire nell'arco della giornata.

È giusto sottolineare come queste valutazioni iniziali sono state protrate senza considerare i costi di transazione, i quali – una volta aggiunti – andran-

no ad impattare notevolmente riducendo la magnitudine degli arbitraggi. Di conseguenza, anche l'AER risulterà più piccolo.

5.7 La matrice perturbata

Per quanto riguarda la matrice perturbata – ovvero la matrice in cui si possono identificare i percorsi delle opportunità di arbitraggio – è opportuno analizzarla sia nel caso in cui questi arbitraggi sono presenti, al fine di identificare il punto di partenza dal quale si possono rilevare tali opportunità, che nel caso in cui reggono le ipotesi di non arbitraggio (diretto e triangolare).

Nel primo caso, iniziamo col ricercare una qualsiasi ipotetica forma di arbitraggio. Tramite dei semplici calcoli si evince come $c_{ij} \times c_{ji} \approx 1$ per ogni $i \neq j$. Si suppone, quindi, che $c_{ij} \times c_{ji} = 1 + \epsilon_{ij}$, con tale ϵ positiva. Assumendo inoltre che $c_{ij} = 1 + \delta_{ij}$ e andando a sostituire questa relazione nella formula $n\lambda_{max} - n$ si ottiene: [36]

$$\lambda_{max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\lambda_{ij}^2}{1 + \lambda_{ij}} \right] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\epsilon_{ij}}{c_{ij}} \right] \quad (5.7.1)$$

Da tale relazione si evince come λ_{max} è direttamente connesso alle discrepanze δ_{ij} . Difatti, se δ_{ij} devia da 0, allora $\lambda_{max} - n$ devierà leggermente da 0, indicando così il manifestarsi di opportunità di arbitraggio.

Nell'altro caso in cui la matrice risulterebbe essere free of direct arbitrage, si avrà $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$.

Infatti, partendo da:

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = \frac{a_{ji}}{(g_i/g_j)} = \frac{(1/a_{ji})}{1/(g_j/g_i)} = \frac{1}{(a_{ji}/b_{ji})} = \frac{1}{c_{ji}} \quad (5.7.2)$$

ovvero $c_{ij} = \frac{1}{c_{ji}}$.

Giunti a questo punto, al fine di spiegare l'identificazione di scostamenti dai valori di equilibrio di λ_{max} , è opportuno assumere $\epsilon = 0$ [36].

Da qui si avrà:

$$\lambda_{max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\lambda_{ij}^2}{1 + \lambda_{ij}} \right] \quad (5.7.3)$$

Questo sarà utile per spiegare come $\lambda_{max} = n$ se e solo se $\delta_{ij} = 0$ o se $c_{ij} = 1$ per ogni $i, h \in [1, n]$ [14].

In altre parole, la matrice perturbata A , in cui non vi sono arbitraggi diretti, sarà free of triangular arbitrage (e di qualsiasi altro tipo di arbitraggio) se l'autovettore di modulo massimo sarà uguale al numero di valute n .

Capitolo 6

Dati

6.1 Descrizione

In riferimento al dataset che è stato utilizzato, è stata necessaria un'accurata ricerca di quali potessero essere i migliori data providers per il mercato valutario e quali i periodi da analizzare.

Per quanto riguarda i providers, la scelta è stata indirizzata verso Thomson Reuters Eikon anziché su Electronic Broking Services. Così come anche la EBS (di proprietà della ICAP), entrambe sono electronic limit order [11], ovvero in cui è possibile piazzare gli ordini in maniera automatizzata.

Inoltre, entrambe hanno delle peculiarità: la EBS detiene il maggior numero di scambi sull'euro-dollaro, dollaro-yen e sull'euro-yen mentre Reuters ha dalla sua i maggiori scambi in termini di sterlina-dollaro [11].

Inoltre, il sistema di EBS in quanto dealer facilita le varie istituzioni nel controllo delle linee di credito bilaterali delle controparti che vi partecipano [31]. Questo fa sì che ogni istituzione possa settare dei limiti di credito nei confronti di tutti i partecipanti al sistema. In questo modo, si vengono a creare delle restrizioni in termini di ordini eseguibili (bid, ask e altri deal). Tale prezzo quotato, di conseguenza, non sarà per forza eseguibile da ogni controparte ma

solo da chi rispetta i determinati limiti imposti.

I dati utilizzati per l'analisi riguardano le quotazioni bid dei sei principali tassi di cambio in termini di liquidità e di volumi scambiati nel mercato FX. Questi includono i seguenti Paesi: Stati Uniti d'America, Europa, Giappone, Regno Unito, Svizzera e Svezia.

Le quotazioni sono state estrapolate dalla piattaforma Thomson Reuters Eikon per mezzo del componente aggiuntivo su Excel. Tramite la costruzione di semplici formule, sono stati presi i prezzi di chiusura di ogni minuto a partire dal giorno 16 Ottobre 2019 00:00 fino al 09 Gennaio 2020 23:59. Ovviamente, vi sono state molte quotazioni che risultavano mancanti, motivo per cui questi dati sono stati calcolati in maniera iterativa ipotizzando una crescita degli stessi basata sulla media dei tassi di rendimento, nello stesso periodo, rispetto ai tassi di cambio aventi la valuta mancante.

Oltre a ciò, è stato necessario un meticoloso lavoro di pulizia dati, poiché non tutti i time frame erano disponibili per le stesse valute. Inoltre, poiché i suddetti dati vengono inseriti all'interno di una matrice con delle caratteristiche peculiari, i valori speculari sono stati calcolati in rapporto a 1, nel rispetto delle leggi di mercato.

È stata assunta tale ipotesi in quanto è ragionevole ipotizzare la mancanza di un arbitraggio diretto tra lo stesso tasso di cambio nel Paese opposto.

È abbastanza realistico assumere che più della maggior parte degli scambi spot effettuati in via elettronica vengono rappresentati all'interno di questo dataset. I dati estrapolati riguardano i prezzi quotati ad una frequenza di un minuto e consistono nel miglior prezzo bid nel sistema di riferimento. Sono tutti prezzi executable, di conseguenza identificano fedelmente il prezzo di mercato in quell'istante.

6.2 Implementazione

Una volta ottenuti i dati necessari, sono stati avviati due procedimenti di analisi. Il primo è basato sulla metodologia di Cui et al. (2018) attraverso la quale le opportunità di arbitraggio, dopo aver ipotizzato che i prezzi bid e ask siano legati dalle seguenti relazioni:

$$B_{ij} = 1/A_{ji} \quad ; \quad A_{ij} = 1/B_{ji} \quad (6.2.1)$$

assumono due possibili scenari: uno in cui i profitti sono descritti da

$1/A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\dots A_{i_ki_1}$ e l'altro in cui sono descritti da $B_{i_1i_2}B_{i_2i_3}\dots B_{i_ki_1}$.

Nel primo caso, la strategia da compiere è la seguente: comprare $1/A_{i_1i_2}$ unità della valuta i_2 usando un'unità di i_1 , quindi comprare $1/A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}$ unità della valuta i_3 usando $1/A_{i_1i_2}$ unità di i_2 e via dicendo.

L'operazione dovrà essere chiusa comprando $1/A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\dots A_{i_{k-1}i_k}$ unità di i_1 usando $1/A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\dots A_{i_{k-1}i_k}$ unità di i_k .

Quindi vengono scambiate $1/A_{i_1i_2}A_{i_2i_3}\dots A_{i_{k-1}i_k}$ unità di i_1 con un'unità di i_1 .

Se il primo rapporto risulta essere maggiore di 1, allora queste transazioni genereranno un profitto e di conseguenza un'opportunità di arbitraggio.

Nel secondo caso, invece, si fa riferimento alle quotazioni bid, per cui i profitti generati dal mantenere una posizione di 1 unità di i_2 saranno dati dall'acquisto di $B_{i_1i_2}$ unità di i_1 , cambiati in $B_{i_3i_1}$ quantità di i_3 e infine per $B_{i_2i_3}$ quantità di i_2 .

A tal proposito, sono state create solamente delle matrici con i prezzi bid, in quanto le violazioni di arbitraggi diretti sono pressoché inesistenti.

Per prima cosa, utilizzando il metodo computazionale di Cui et al. (2018), sono stati calcolati, tramite l'utilizzo del linguaggio di programmazione Python, tutti i possibili arbitraggi triangolari ottenibili in una matrice 6×6 composta dai

dati su 6 principali valute, quali:

(EUR, USD, JPY, GBP, CHF, SEK)

La struttura adottata per queste matrici è la stessa di quella analizzata sopra:

$$B := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 6} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{16} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \dots & b_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_{61} & \dots & \dots & \dots & b_{66} \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

dove $b_{ij} = \frac{1}{b_{ji}} \quad \forall i, j \in [1, 6]$

Da queste matrici, si è calcolato il prodotto tra tre tassi di cambio diversi, in modo tale che con l'ultimo passaggio si riusciva a riacquistare la valuta di partenza (es. EUR/USD, USD/JPY, JPY/EUR).

Iterando tale processo per ogni riga e colonna sulle n matrici- corrispondenti agli n dati inseriti - si sono generati 3,614,520 tra profitti e perdite. Nello specifico, sono stati raccolti 1,355,445 prezzi.

Il secondo procedimento, invece, fa riferimento al lavoro condotto da *Ma* (2008) in cui le opportunità di arbitraggio vengono identificate e calcolate sviluppando la matrice dei tassi di cambio di partenza. Da questa matrice, si calcolano i rispettivi autovalori e gli autovettori associati.

Nel momento in cui il massimo autovalore differisce da n - con n che identifica il numero di valute presenti nella matrice - vorrà dire che vi saranno dei possibili arbitraggi. A questo punto, viene preso l'autovettore associato a tale autovalore di grado massimo e si crea una nuova matrice, i cui elementi sono dati dal rapporto degli elementi dell'autovettore stesso.

Si otterrà, quindi, una nuova matrice simile a quella di partenza ma con dei valori alterati. Una volta fatto ciò, si procede alla composizione di una nuova

matrice data dal rapporto della prima con la seconda e così facendo si avrà una matrice in cui si possono identificare quei tassi di cambio che sono sottovalutati o sopravvalutati.

Basterà catturare i valori massimi e minimi di questa matrice e se essi apparterranno alla stessa o colonna si procederà all'identificazione di un tasso di cambio che possa fungere da ponte per i due tassi principali.

Infine, per identificare i rendimenti di queste opportunità di arbitraggio, verrà calcolato l'*AER* corrispettivo.

Conclusione

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti tramite l'analisi dei dati sopra descritti.

In riferimento al primo metodo utilizzato, sono risultati numerosi scostamenti dalla relazione di non arbitraggio, motivo per cui si sono osservate tante potenziali opportunità.

Infatti, anche se con scostamenti insignificanti, quasi la totalità dei dati ottenuti si discosta dall'unità. Nonostante ciò, non è ragionevole assumere che queste opportunità possano essere sfruttate ottenendo effettivamente un profitto.

Bisogna ricordare che questi dati sono stati ottenuti in assenza dei costi di transazione, i quali - anche se considerati in piccola parte - erodono gran parte del profitto. Sono molto poche, invece, le opportunità propriamente fruibili.

Tramite la Tabella 6.1 sono mostrati i valori più alti, in media, per i mille arbitraggi maggiormente favorevoli e i valori massimi sulla media totale degli arbitraggi.

La terna di tassi di cambio che ha fatto registrare la media più alta sui primi mille arbitraggi è quella composta dalle valute

(JPY/USD, USD/GBP, GBP/JPY)

con un valore di 1.00440.

Mentre, considerando la media sul totale dei valori (90,363 valori per ogni

Valute	Media Top 1000	Media Arb. Trng.
JE,EG,GJ	1.00340	1.00017
JU,UG,GJ	1.00440	1.00025
EU,UG,GE	1.00338	0.99996
UG,GCH,CHU	1.00326	0.99990
UG,GS,SU	1.00314	0.99980
EJ,JG,GE	1.00104	0.99982
JE,ECH,CHJ	1.00267	1.00028
GJ,JS,SG	1.00178	1.00021
UE,EG,GU	1.00173	1.00003
CHJ,JS,SCH	1.00410	1.00163

Tabella 6.1: Media Rendimenti Arbitraggi Triangolari

Valute M1	Max Arb. Trng. M1	Valute M2	Max Arb. Trng. M2
JE,EG,GJ	1.01268	JE,JG,EG	1.01268
JU,UG,GJ	1.00966	JU,JG,UG	1.00960
EU,UG,GE	1.00939	EU,EG,UG	1.00935
UG,GCH,CHU	1.00924	UG,UCH,GCH	1.00925
UG,GS,SU	1.00921	UG,US,GS	1.00926
EJ,JG,GE	1.00840	EJ,EG,JG	1.01268
JE,ECH,CHJ	1.00811	JE,JCH,ECH	1.00806
GJ,JS,SG	1.00796	GJ,GS,JS	1.00755
UE,EG,GU	1.00796	UE,UG,EG	1.00935
CHJ,JS,SCH	1.00755	CHJ,CHS,JS	1.00710

Tabella 6.2: Valori Massimi Rendimenti Arbitraggi Triangolari

colonna), il gruppo

$$(CHF/JPY, JPY/SEK, SEK/CHF)$$

ha fatto registrare lo scostamento più elevato con 1.00163.

Ciò che salta all'occhio è la presenza della sterlina britannica su 8 dei 10 gruppi di valute più redditizi e quella dello yen giapponese che si trova in 6 delle 10 terne.

Una risposta all'elevata presenza della sterlina inglese si appoggia sulle turbolenze dell'ultimo periodo generate dalla Brexit e quindi dai repentini scostamenti di prezzo della valuta.

Inoltre, nella Tabella 6.2 è possibile osservare come la massima opportunità di arbitraggio sia stata fatta registrare dalla terna dei tassi

$$(JPY/EUR, EUR/GBP, GNP/JPY)$$

con un valore di 1.01268 che corrisponde ad un 1.26% di profitto.

Il secondo metodo di calcolo ha fatto registrare dei risultati quasi identici al primo, se non fosse per alcuni gruppi - quali (UE, UG, EG) e (EJ, EG, JG) - in cui si sono rilevati degli scostamenti maggiori, sintomo del fatto che risultava più proficuo prendere in prestito del denaro in partenza.

Rispetto a quest'ultimo concetto, è opportuno fare una precisazione. Infatti, in alcuni casi risulterà più conveniente finanziare le proprie operazioni ma bisognerà comunque tenere in considerazione il tasso d'interesse al quale si dovrà restituire la somma presa in prestito.

Naturalmente questo studio non vuole andare oltre l'identificazione di opportunità di arbitraggio.

Nelle figure a seguire sono stati riportati gli arbitraggi triangolari individuati e comparati ai massimi autovalori corrispondenti. È stata scelta una rappresentazione del genere in modo tale da poter notare la magnitudine degli arbitraggi rispetto ai propri autovalori.

Nella Figura 6.1 sono state rappresentate le migliori dieci terne di valute, in termini di profitti. Si evince una chiara corrispondenza tra autovalori con valori più estremi e arbitraggi con valori più alti. Inoltre, emerge una certa relazione lineare tra i valori agli estremi e quelli vicini all'unità, con un forte addensamento negli intorno dei valori di equilibrio.

In contrasto con la 6.1, nella Figura 6.2 - in cui sono state rappresentate tutte le restanti terne di valute - gli arbitraggi, così come gli autovalori, appaiono raggruppati in degli intorno non molto ampi, volti a significare una stabilità per

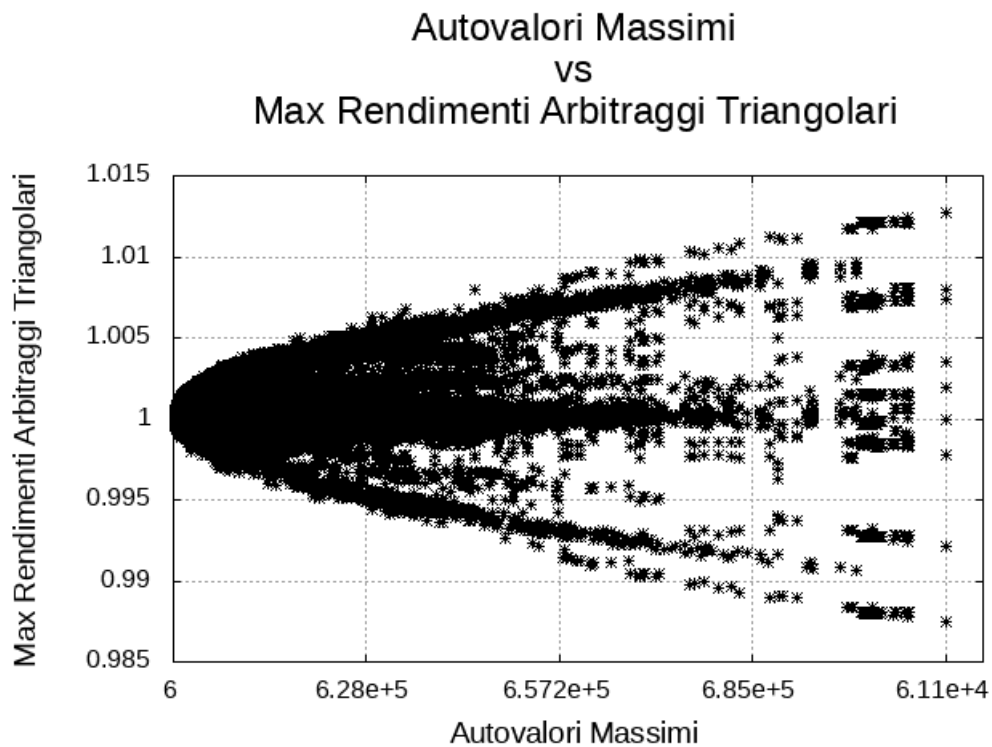


Figura 6.1: Top 10 Terne Arbitraggi Triangolari

quanto riguarda le condizioni di non arbitraggio.

Infine, nella Figura 6.3 si possono vedere tutte le opportunità di arbitraggio - e non - individuate con lo studio. La peculiarità di questa immagine sta nel fatto che la figura risulta essere simmetrica orizzontalmente rispetto all'unità.

A completare il tutto, si è voluta rappresentare la frequenza degli arbitraggi individuati per mezzo di un istogramma (Figura 6.4). Anche in questo caso vi è una forte condensazione di valori intorno all'unità mentre quelli più esterni vanno via via diminuendo, anche se si notano dei picchi a determinate frequenze.

È opportuno aggiungere che, al fine di ottenere una rappresentazione grafica quanto più comprensibile, sono stati tolti dall'istogramma quei dati che risultavano essere estremi, poiché andavano a condizionare negativamente la distribuzione dei dati, impedendo di carpirne le informazioni.

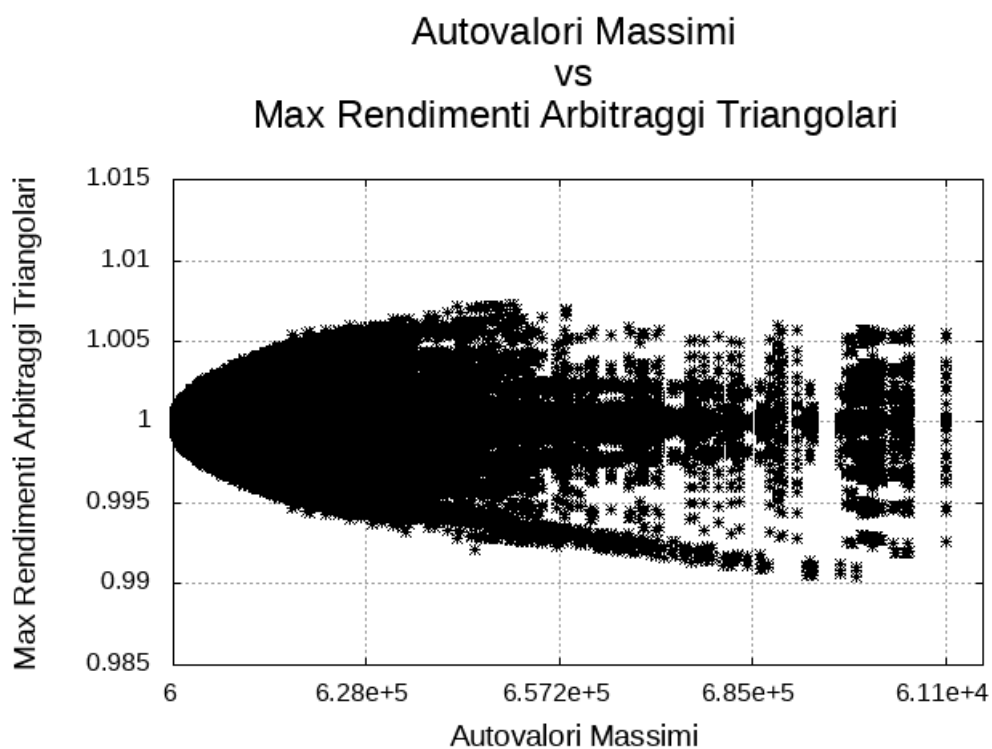


Figura 6.2: Terne Arbitraggi Triangolari senza Top 10

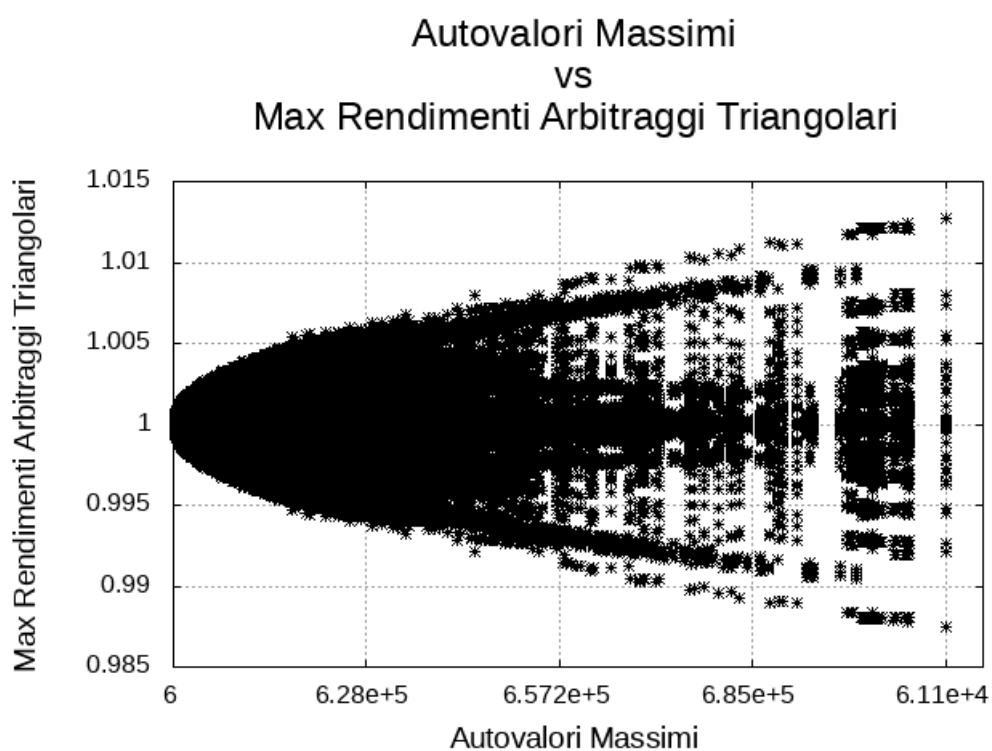


Figura 6.3: Arbitraggi Triangolari Totali

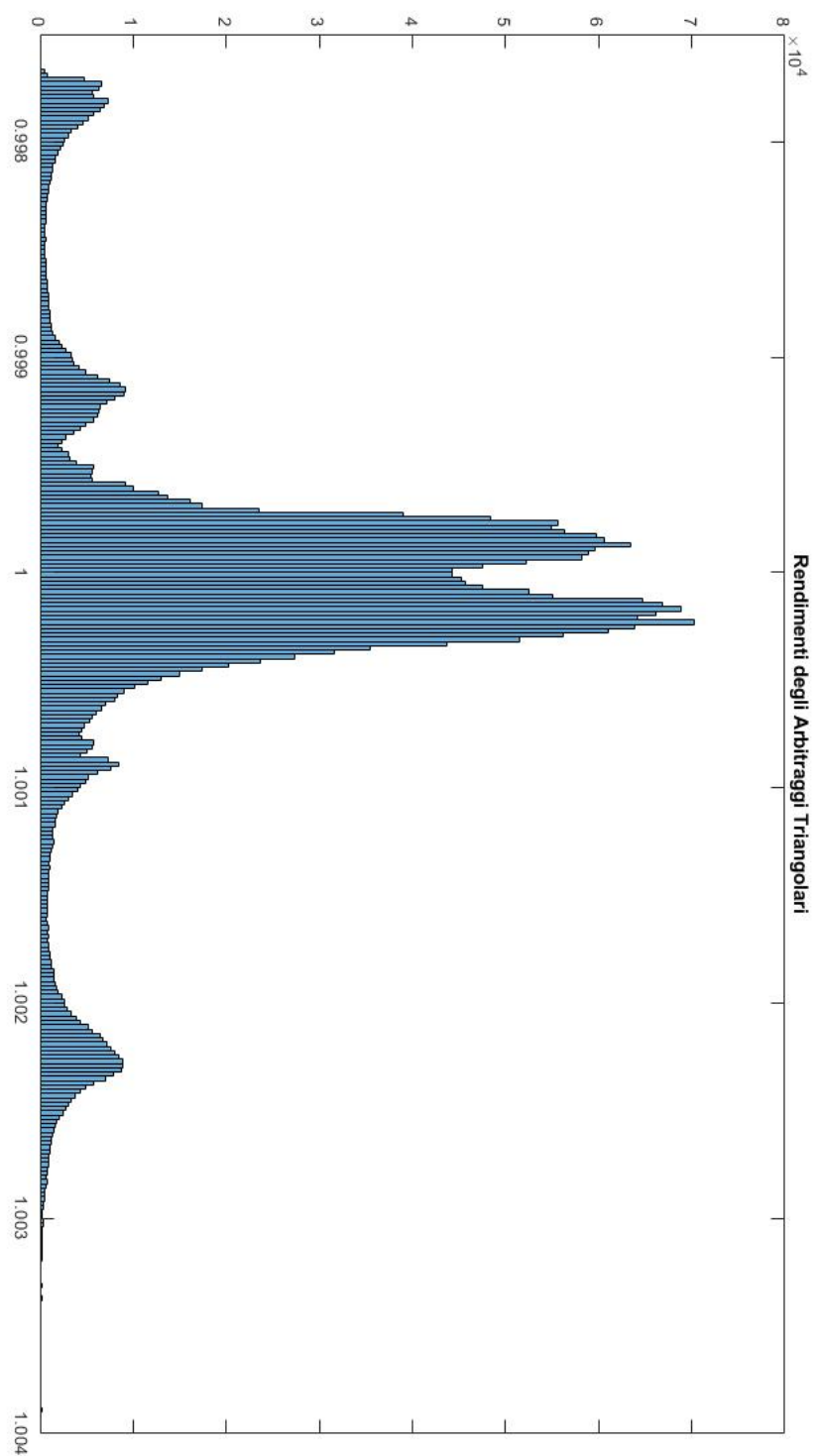


Figura 6.4: Istogramma Arbitraggi Triangolari Totali

Appendice A

Grafici

Di seguito vengono riportati il codice sorgente di Python 3.7.4, utilizzato per calcolare gli arbitraggi triangolari all'interno del campione dati, e il codice sorgente di Gnuplot, utilizzato per rappresentare graficamente i risultati ottenuti dal precedente programma.

```

N = 6

m_6 = list()
for _ in range(0,N,1):
    m_6.append([None,None,None,None,None,None])

with open("input.csv","r",encoding = "utf-8") as f:
with open("risultati.csv","w",encoding="utf-8") as f2:
    for row in f:
        row = row.strip()
        row = row.split(',')
        for i in range(0,len(row),1):
            row[i] = float(row[i])

        m_6[0][0] = 1
        m_6[0][1] = row[0]
        m_6[0][2] = row[1]
        m_6[0][3] = row[2]
        m_6[0][4] = row[3]
        m_6[0][5] = row[4]
        m_6[1][0] = 1/row[0]
        m_6[1][1] = 1
        m_6[1][2] = row[5]
        m_6[1][3] = row[6]
        m_6[1][4] = row[7]
        m_6[1][5] = row[8]
        m_6[2][0] = 1/row[1]
        m_6[2][1] = 1/row[5]
        m_6[2][2] = 1
        m_6[2][3] = row[9]
        m_6[2][4] = row[10]
        m_6[2][5] = row[11]
        m_6[3][0] = 1/row[2]
        m_6[3][1] = 1/row[6]
        m_6[3][2] = 1/row[9]
        m_6[3][3] = 1
        m_6[3][4] = row[12]
        m_6[3][5] = row[13]
        m_6[4][0] = 1/row[3]
        m_6[4][1] = 1/row[7]
        m_6[4][2] = 1/row[10]
        m_6[4][3] = 1/row[12]
        m_6[4][4] = 1
        m_6[4][5] = row[14]
        m_6[5][0] = 1/row[4]
        m_6[5][1] = 1/row[8]
        m_6[5][2] = 1/row[11]
        m_6[5][3] = 1/row[13]
        m_6[5][4] = 1/row[14]
        m_6[5][5] = 1

prodotti=str()

for x in range(0,4,1):
    for riga in range(1+x,5,1):
        for colonna in range(0,5-riga,1):

```



```
prodotti+=str(m_6[x][riga]*m_6[riga][riga+colonna+1]*m_6[riga+colonna+1][x])+'  
  
for i in range(2,6,1):  
    prodotti+=str(m_6[1][0]*m_6[0][i]*m_6[i][1])+'  
  
for ac in range(0,2,1):  
    for x in range(3,6,1):  
        prodotti+=str(m_6[2][ac]*m_6[ac][x]*m_6[x][2])+'  
  
for ac in range(0,3,1):  
    for x in range(4,6,1):  
        prodotti+=str(m_6[3][ac]*m_6[ac][x]*m_6[x][3])+'  
  
for ac in range(0,3,1):  
    prodotti+=str(m_6[4][ac]*m_6[ac][5]*m_6[5][4])+'  
else:  
    prodotti+=str(m_6[4][ac+1]*m_6[ac+1][5]*m_6[5][4])+'\n'  
  
f2.write(prodotti)
```

Figura A.1: Codice Python - Calcolo Arbitraggi Triangolari, Metodo 1

```

import numpy as np
from numpy import linalg as LA

N = 6

m_6 = list()
for _ in range(0,N,1):
    m_6.append([None,None,None,None,None,None])

with open("input.csv", 'r', encoding = "utf-8") as f:
    with open("risultati.csv", 'w', encoding="utf-8") as f2:
        for row in f:
            row = row.strip()
            row = row.split(',')
            for i in range(0,len(row),1):
                row[i] = float(row[i])

            m_6[0][0] = 1
            m_6[0][1] = row[0]
            m_6[0][2] = row[1]
            m_6[0][3] = row[2]
            m_6[0][4] = row[3]
            m_6[0][5] = row[4]
            m_6[1][0] = 1/row[0]
            m_6[1][1] = 1
            m_6[1][2] = row[5]
            m_6[1][3] = row[6]
            m_6[1][4] = row[7]
            m_6[1][5] = row[8]
            m_6[2][0] = 1/row[1]
            m_6[2][1] = 1/row[5]
            m_6[2][2] = 1
            m_6[2][3] = row[9]
            m_6[2][4] = row[10]
            m_6[2][5] = row[11]
            m_6[3][0] = 1/row[2]
            m_6[3][1] = 1/row[6]
            m_6[3][2] = 1/row[9]
            m_6[3][3] = 1
            m_6[3][4] = row[12]
            m_6[3][5] = row[13]
            m_6[4][0] = 1/row[3]
            m_6[4][1] = 1/row[7]
            m_6[4][2] = 1/row[10]
            m_6[4][3] = 1/row[12]
            m_6[4][4] = 1
            m_6[4][5] = row[14]
            m_6[5][0] = 1/row[4]
            m_6[5][1] = 1/row[8]
            m_6[5][2] = 1/row[11]
            m_6[5][3] = 1/row[13]
            m_6[5][4] = 1/row[14]
            m_6[5][5] = 1

eig_v = np.array(m_6)
w, v = LA.eig(eig_v)
w = w.real
v = v.real

```

```
max_w = w[0]
max_index = 0
for i in range(1, len(w), 1):
    if w[i] > max_w:
        max_w = w[i]
        max_index = i

max_p = str(w[0])
for _ in range(0, 1, 1):
    max_p += str(max_p) + ','
else:
    max_p += str(max_p) + '\n'

f2.write(max_p)
```

Figura A.2: Codice Python - Calcolo λ_{max} , Metodo 1

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA

m_A = list()
m_B = list()
eigve = list()
for _ in range(0,N,1):
    m_A.append([None,None,None])
    m_B.append([None,None,None])
    eigve.append(None)

somma = 0
somma1 = 0
somma2 = 0

with open("input.csv","r",encoding = "utf-8") as f:
    for ac,row in enumerate(f):
        row = row.strip()
        row = row.split(',')
        for i in range(0,N,1):
            row[i] = float(row[i])

        m_A[0][0] = 1
        m_A[0][1] = row[0]
        m_A[0][2] = row[1]
        m_A[1][0] = 1/row[0]
        m_A[1][1] = 1
        m_A[1][2] = row[2]
        m_A[2][0] = 1/row[1]
        m_A[2][1] = 1/row[2]
        m_A[2][2] = 1
        A = np.array(m_A)
        #print(A)

    eig_v = np.array(m_A)
    w, v = LA.eig(eig_v)
    w = w.real
    v = v.real
    max_w = w[0]
    max_index = 0
    for i in range(1,len(w),1):
        if w[i] > max_w:
            max_w = w[i]
            max_index = i

    eigve[0] = v[0][0]
    eigve[1] = v[1][0]
    eigve[2] = v[2][0]

    eig_vx = np.array(eigve)
    #print(eig_vx)

    m_B[0][0] = 1
    m_B[0][1] = eig_vx[0]/eig_vx[1]
    m_B[0][2] = eig_vx[0]/eig_vx[2]
```

```
m_B[1][0] = eig_vx[1]/eig_vx[0]
m_B[1][1] = 1
m_B[1][2] = eig_vx[1]/eig_vx[2]
m_B[2][0] = eig_vx[2]/eig_vx[0]
m_B[2][1] = eig_vx[2]/eig_vx[1]
m_B[2][2] = 1

B = np.array(m_B)
#print(B)

C = B/A

max_v = np.amax(C)
min_v = np.amin(C)

op = 1/(min_v)*(max_v)/(min_v)-1 #AER
somma += op
```

Figura A.3: Codice Python - Calcolo Arbitraggi Triangolari, Metodo 2

```
set terminal png;
set output "PuntiMassimi.png";
set datafile separator ",";

set grid;
set autoscale;
unset key; # disabilita la leggenda

set title "Autovalori Massimi\nvs\nMax Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ", 18";
set xlabel "Autovalori Massimi" font ",14";
set ylabel "Max Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ",14";
set xrange [6:6.000012];
set xtics ("6" 6, "6.28e+5" 6.000002862, "6.572e+5" 6.0000057255, "6.85e+5" 6.000008588,
"6.11e+4" 6.000011451);

# GRAFICO SOLO MAX
plot "input.csv"\
using 1:3 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:6 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:15 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:16 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:23 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:26 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:27 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:29 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:37 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:40 with points pt 3 lw 1 lc "black"
```

Figura A.4: Codice Gnuplot per i "Top 10 Max Triangular Arbitrage"

```

set terminal png;
set output "TuttiPunti-Max.png";
set datafile separator ",";

set grid;
set autoscale;
unset key; # disabilita la leggenda

set title "Autovalori Massimi\nvs\nMax Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ", 18";
set xlabel "Autovalori Massimi" font ",14";
set ylabel "Max Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ",14";
set yrange [0.985:1.015];
set xrange [6:6.000012];
set xtics ("6" 6, "6.28e+5" 6.000002862, "6.572e+5" 6.0000057255, "6.85e+5" 6.000008588,
"6.11e+4" 6.000011451);

# GRAFICO NORMALE
plot "input.csv"\
using 1:2 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:4 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:5 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:7 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:8 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:9 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:10 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:11 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:12 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:13 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:14 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:17 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:18 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:19 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:20 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:21 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:22 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:24 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:25 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:28 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:30 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:31 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:32 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:33 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:34 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:35 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:36 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:38 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:39 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:41 with points pt 3 lw 1 lc "black"

```

Figura A.5: Codice Gnuplot per gli "All Triangular Arbitrage without Top 10 Max"

```

set terminal png;
set output "TuttiPuntiEMax.png";
set datafile separator ",";

set grid;
set autoscale;
unset key; # disabilita la leggenda

set title "Autovalori Massimi\nvs\nMax Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ", 18";
set xlabel "Autovalori Massimi" font ",14";
set ylabel "Max Rendimenti Arbitraggi Triangolari" font ",14";
set xrange [6:6.000012];
set xtics ("6" 6, "6.28e+5" 6.00002862, "6.572e+5" 6.000057255, "6.85e+5" 6.000085588,
"6.11e+4" 6.00011451);

# GRAFICO NORMALE + EVID.MAX
plot "input.csv"\
using 1:2 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:3 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:4 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:5 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:6 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:7 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:8 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:9 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:10 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:11 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:12 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:13 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:14 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:15 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:16 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:17 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:18 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:19 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:20 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:21 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:22 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:23 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:24 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:25 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:26 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:27 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:28 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:29 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:30 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:31 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:32 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:33 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:34 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:35 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:36 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:37 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:38 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:39 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:40 with points pt 3 lw 1 lc "black",\
'' using 1:41 with points pt 3 lw 1 lc "black"

```

Figura A.6: Codice Gnuplot per gli "All Triangular Arbitrage"

Bibliografia

- [1] **Aiba, Y., Hatano, N., Takayasu, H., Marumo, K. and Shimizu, T.** - "Triangular arbitrage as an interaction among foreign exchange rates". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*. 310, 467-479; (2002).
- [2] **Aiba, Y. and Hatano, N.** - "A microscopic model of triangular arbitrage". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*. 371, 572-584; (2006).
- [3] **Akram, Q. F., Rime, D. and Sarno, L.** - "Arbitrage in the Foreign Exchange Market: Turning on the Microscope"; February 2006.
- [4] **Akram, Q. F., Rime D. and Sarno, L.** - "Journal of International Economics". 76(2), 237-253; 2008.
- [5] **Almgren, R. and Chriss, N.** - "Optimal execution of portfolio transactions". *Journal of Risk*, 3, 5-40; (2001).
- [6] **Bank For International Settlements: Triennial Central Bank Survey – "Foreign Exchange turnover in April 2019, Monetary and Economic Department"**; 16 September 2019.
- [7] **Balaji, T.** – "Microstructure and Adjustment Process in Foreign Exchange Markets: Short-Term Dynamics"; December 2003.
- [8] **Burnside, C., Eichenbaum, M.S. and Rebelo, S.** - "CARRY TRADE AND MOMENTUM IN CURRENCY MARKETS", NBER WORKING PAPER SERIES; April 2011.
- [9] **Caan, S.** – Draft on Statistical Arbitrage.
- [10] **Cerutti, E., Obstfeld, M. and Zhou, H.: International Monetary Fund: IMF Working Paper** - "Covered Interest Parity Deviations: Macroeconomic Determinants"; January 19.
- [11] **Chaboud, A., Chiquoine, B., Hjalmarsson, E. and Vega, C.** - "Rise of the Machines: Algorithmic Trading in the Foreign Exchange Market"; 5 July 2013.
- [12] **Chacholiades, M.** - "The Sufficiency of Three-Point Arbitrage to Ensure Consistent Cross rates of Exchange". *Southern Economic Journal*, 38, 86-88; (1971).

- [13] **Cross, R. and Kozyakin, V.** - "Fact and fictions in FX arbitrage processes"; 25 February 2015.
- [14] **Cui, Z., Qian, W., Taylor, S. and Zhu, L.** - "Detecting Arbitrage in the Foreign Exchange Market"; 18 April 2018
- [15] **Dubil, R.** - "An Arbitrage Guide to Financial Markets"; Wiley Finance; 2004.
- [16] **Engle, R. F., Ferstenberg, R. and Russell, J. R.** - "Measuring and modeling execution cost and risk". Working paper (2006).
- [17] **European Central Bank: Vitale, P.** – "A MARKET MICROSTRUCTURE ANALYSIS OF FOREIGN EXCHANGE INTERVENTION"; Working Paper Series NO 629; May 2006.
- [18] **Evans, M., and Lyons, R.** - "Order flow and exchange rate dynamics". *Journal of Political Economy*, 110: 170-180; (2002a).
- [19] **Evans, M. D. D.** - "The Microstructure of Currency Markets"; July 2010.
- [20] **Evans, M. D. D.** - "Foreign Exchange Market Microstructure"; 13 March 2019.
- [21] **Fama, E. F.** - "Journal of Finance 25 383–417 Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York", N.Y. December, 28–30; 1969 (May, 1970).
- [22] **Farhi, E., Fraiburger, S., Gabaix, X., Ranciere, R. and Verdelhan, A.** - "Crash risk in currency markets". NBER Working Paper 15062; 2009.
- [23] **Fenn, D. J., Howison, S. D., McDonald, M., Williams, S. and Johnson, N. F.** - "The mirage of triangular arbitrage in the spot foreign exchange market". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 12, 1105-1123; (2009)
- [24] **Foucault, T., Kozhan, R., and Tham, W. W.** - "Toxic arbitrage". *The Review of Financial Studies*, 30(4), 1053-1094; (2017).
- [25] **Glantz, M. and Kissell, R.** - "Multi-Asset Risk Modeling: Techniques for a Global Economy in an Electronic and Algorithmic Trading Era"; 2014.
- [26] **Gozzi F.** - "Corsi di metodi matematici per economia e finanza". pag. 128; Settembre - Dicembre 2019
- [27] **Gradojevic, N., Gencay, R. and Erdemlioglu, D.** - "A new wavelet-based ultra-high-frequency analysis of triangular currency arbitrage"; 16 May 2019.
- [28] **Grossman, S. J. and Stiglitz, J. E.** - "American Economic Review", 66 246–253; 1976.

- [29] **HSBC** – "Rethinking Treasury: How CFOs and corporate treasurers are rising to the risk management challenge" – Executive Summary; First quarter 2018.
- [30] **Hull, C. J. and Barone E.**, - "Opzioni, futures e altri derivati". Decima edizione; Gennaio 2018
- [31] **Ito, T., Yamada, K., Takayasu, M. and Takayasu, H.** - "FREE LUNCH! ARBITRAGE OPPORTUNITIES IN THE FOREIGN EXCHANGE MARKETS"; November 2012.
- [32] **Lustig, H. and Verdelhan, A.** - "The Cross-Section of Foreign Currency Risk Premia and Consumption Growth Risk". Working Paper NBER 11104; May 2005.
- [33] **Lustig, H. and Verdelhan, A.** - "The Cross-Section of Foreign Currency Risk Premia and Consumption Growth Risk". American Economic Review, 97 (1), 89–117; March 2007.
- [34] **Lustig, H., Roussanov, N. and Verdelhan, A.** - "Common risk factors in currency markets". SSRN Paper 1139447; 2009.
- [35] **Lustig, H., Roussanov, N. and Verdelhan, A.** - "Common Risk Factors in Currency Markets"; 3 May 2011.
- [36] **Ma, M.** - "Identifying Foreign Exchange Arbitrage Opportunities through Matrix Approach"; 11 January 2008.
- [37] **MFX: Microfinance Currency Risk Solutions** – "Understanding FX Forwards, A Guide for Microfinance Practitioners".
- [38] **Lyons, R.K.** - "The Microstructure Approach to Exchange Rates". Cambridge, USA:MIT Press; (2001).
- [39] **Meyer, C. D.** - "Matrix analysis and applied linear algebra (Vol. 71)". SIAM. ISBN 0-89871-454-0; (2000)
- [40] **Moosa, I.** - "Triangular arbitrage in the spot and forward foreign exchange markets". Quantitative Finance, Volume 1, Issue 4 April 2001, pages 387 – 390; (2002).
- [41] **Nordea Markets** – "Open Insights: 5 steps to manage your currency risk"; 01 November 2019.
- [42] **O'Hara, M.** - "Microstructure Theory". Oxford, UK: Blackwell Publishers; (1995).
- [43] **Primavera, M.** - "Mercati efficienti e bolle speculative: cicli economici, finanza e psicologia: L'analisi di cointegrazione".

-
- [44] **Rafferty, B.** - "The returns to currency speculation and global currency realignment risk". Mimeo, Duke University; 2010.
- [45] **Samuelson, P.** - "Industrial Management Review", 6 41–49; 1965.
- [46] **Takayanagi, S. and Ishikawa, K.** - "Introduction to pair trading: Based on cointegration".
- [47] **Vidyamurthy, G.** - "Pairs Trading, Quantitative Methods and Analysis". John Wiley Sons, Canada; 2004.
- [48] <https://www.tradingacademy.com/financial-education-center/forex-risks.aspx>
- [49] <https://web.archive.org/web/20120910034016/http://darkwing.uoregon.edu/vitulli/441.sp04/LinAlgHistory.html>
- [50] https://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem#cite_ref-1

**Arbitraggi nel mercato valutario:
un'algebra matriciale per l'identificazione in tempo reale**

Riassunto

Candidato:
Davide Casoli

Relatore:
Prof. Emilio Barone

Correlatore:
Prof. Gaetano Casertano

Introduzione

Tramite questa tesi si è voluto studiare ed analizzare l'esistenza, o meno, di arbitraggi all'interno del mercato valutario.

Il lavoro è stato diviso in sei capitoli, in modo tale da coprire l'ampia gamma di caratteristiche ed informazioni.

Nel primo capitolo si è analizzato il mercato ForEx nella sua ampiezza e complessità, andando ad analizzarne la struttura così come l'evoluzione ed i volumi scambiati al suo interno.

A seguire, nel secondo capitolo si è voluto spiegare quali sono le determinanti principali dei tassi di cambio, in quanto sono stati fondamentali per questo studio.

Nel terzo capitolo, invece, si è voluto spiegare quali sono i rischi che un investitore, indipendentemente dalla sua categoria, deve affrontare quando opera nel mercato valutario ed alcune guidelines su come gestirli meglio.

Dopodiché, si apre il quarto capitolo in cui vengono descritte le varie categorie di arbitraggi che si possono incontrare nel mercato FX, con le annesse spiegazioni.

Avendo assimilato le informazioni necessarie per comprendere gli arbitraggi che si possono individuare, nel quinto capitolo si apre la teoria delle matrici con le sue applicazioni ai tassi di cambi. Nello stesso capitolo vengono descritti anche i due principali metodi che sono stati utilizzati per studiare l'impatto e la presenza degli arbitraggi triangolari.

Infine, nel sesto capitolo vengono descritti i dati raccolti e le istruzioni che sono state seguite per la loro implementazione.

Il mercato valutario

Il mercato valutario, conosciuto anche come mercato ForEx o FX, ha delle proprietà peculiari che lo rendono molto interessante agli occhi degli investitori, sia in ottica speculativa che di hedging.

Da sempre uno dei mercati con il più alto tasso di scambi, ha fatto registrare nell'aprile del 2019 una media giornaliera di volumi pari al valore di \$6.6 trilioni, rispetto ai \$5.1 trilioni di tre anni prima [6]. Ciò è stato causato soprattutto dalla forte crescita dei comparti riguardanti i derivati sul ForEx, come ad esempio gli FX swaps - che nel settembre 2019 contavano il 49% del

fatturato totale del mercato - e gli outright forwards, i quali hanno surclassato gli scambi sul mercato spot (scesi al 30% di share dal 33% del 2016).

Di conseguenza, questi ingenti volumi scambiati continuano ad immettere un'elevata liquidità nel mercato. Basti pensare che, a differenza del mercato azionario, nel mercato valutario si può operare durante tutto il giorno per tutti i giorni della settimana.

Un'altra caratteristica che differenzia questo mercato da quello azionario è il fatto che i prezzi che vengono quotati – oltre ad essere aggiornati con altissima frequenza – sono effettivamente scambiabili anziché puramente indicativi. Questo permette degli scambi, in termini di volumi, molto elevati ad una frequenza pressoché immediata, senza che il tutto vada ad influire sui profili di rischio e di costo dell'operazione stessa e senza impattare direttamente sul prezzo della security (a differenza di quanto accade per le azioni) [5] [16].

La struttura del mercato

Giunti a questo punto, si è voluto approfondire la struttura del mercato in modo da avere una concezione di ciò che accade al suo interno. Il mercato FX è un mercato principalmente over-the-counter (OTC) – ovvero privo di regolamentazione e di modalità di contrattazione standardizzate – in cui i prezzi vengono quotati dai brokers/dealers e gli scambi vengono negoziati direttamente tra i partecipanti.

Si può suddividere principalmente su due livelli, uno interbancario e un altro retail [19]. Fondamentalmente, gli scambi avvengono tra i dealers che operano nelle banche – nel mercato interbancario – e tra le banche e gli altri clienti nel mercato retail. Nessuno dei due mercati ha una location fisica in quanto sono telematici. Di conseguenza, questi scambi vengono trasmessi dagli operatori elettronicamente o per via telefonica.

Come la maggior parte degli altri mercati finanziari telematici, queste modalità di trasmissione e ricezione ordini permettono l'incontro tra domanda e offerta di investitori localizzati in tutto il mondo.

Volumi scambiati

Per quanto riguarda l'impatto che le diverse valute hanno all'interno del mercato, è opportuno citare alcuni dati proveniente dall'ultima statistica della BIS. Dalle varie analisi condotte, emerge come la valuta del dollaro americano abbia mantenuto il suo status quo di currency

principale scambiata nei mercati, essendo presente da un lato per l'88% delle operazioni totali [6].

Il volume di scambi legati all'euro, invece, è aumentato al 32% rispetto al 2016 mentre quello dello yen ha perso un 5% di share, pur rimanendo al terzo posto tra le valute più scambiate con un 17% di volumi totali. Nonostante ciò, si può notare come le operazioni tra yen e altre valute – come EUR/JPY e AUD/JPY – siano aumentate durante lo scorso triennio [6].

Ancor più interessante è il fatturato medio giornaliero di alcune valute legate allo yen come JPY/TRY, JPY/ZAR e JPY/BRL che hanno quasi raddoppiato il ricavo medio, passando da \$7 miliardi (2016) a \$12 miliardi (2019) [6].

Infine, le valute delle altre economie avanzate sono rimaste stabili nel periodo di osservazione: GBP con il 13%, AUD con il 7%, CAD con il 5% e il CHF al 5%.

La funzione dei mercati spot e forward

I mercati spot, in ambito valutario, possono essere visti come delle piattaforme di distribuzione in cui i dealers scambiano valute tra di loro e con i propri clienti, svolgendo – quindi – una funzione di market makers [17].

Gli stessi clienti possono eseguire le transazioni mettendosi contemporaneamente in contatto con più dealers in modo tale da ottenere la best executable quote. I dealers, d'altro canto, possono operare direttamente ed indirettamente nel mercato interbancario, a seconda di come svolgono le contrattazioni.

L'importanza del flusso di ordini

Ne segue che tutto il processo di formazione ed esecuzione degli ordini è di vitale importanza per comprendere le dinamiche dei tassi di cambio nel breve (e possibilmente anche nel medio) periodo. Infatti, analizzando la buying/selling pressure nel mercato valutario, si possono cogliere i collegamenti tra l'impatto di una notizia (ovvero quanto questa vada ad incidere sull'andamento del prezzo) ed il modificarsi delle variabili fondamentali, quali determinanti del valore delle valute [17].

Nello specifico, gli FX traders cercano di ottenere quante più informazioni possibili sul valore fondamentale delle valute in modo tale da operarci, così come viene tipicamente descritto nei modelli sulle aspettative razionali. Così facendo si riesce a raggiungere un consenso generale

tra gli investitori, poiché le informazioni contenute nell'order flow vengono progressivamente condivise tra i partecipanti ed incorporate nei tassi di cambio, fino a raggiungere un punto – seppur temporaneo – di equilibrio.

Le determinanti del tasso di cambio

Una volta analizzato il mercato valutario, l'attenzione è stata spostata sui meccanismi che vanno a determinare i tassi di cambio.

Infatti, essi dipendono da numerose condizioni e variabili che mutano in continuazione, sia per cause fisiologiche di mercato che per eventi particolari. Ci sono molti fattori che condizionano l'andamento dei tassi di cambio. In primis, abbiamo i fattori economici quali l'imposizione fiscale, le politiche monetarie, i tassi di interesse, il surplus ed il deficit, la bilancia dei pagamenti, i livelli di inflazione, il PIL e il tasso di occupazione.

Subito dopo questa categoria vi sono i fattori politici, in quanto sono quelli che impattano velocemente sulla stabilità di un governo e generano solitamente incertezza sulle future mosse politiche.

Al terzo gradino possiamo individuare quei fattori comportamentali che incidono sull'andamento dei mercati (come il "flight to quality" osservato durante la recente crisi finanziaria).

Infine, i tassi di cambio sono influenzati – seppure in maniera più lieve rispetto ai fattori precedentemente elencati – dalle decisioni dei brokers e dealers presenti nel mercato e dal volume di domanda e offerta real time [25].

Purchasing Power Parity (PPP)

La condizione della Purchasing Power Parity postula il concetto secondo cui la differenza dei prezzi tra due panieri composti dagli stessi beni ma dislocati in due Paesi differenti è retta dall'equilibrio del tasso di cambio tra i due Paesi [25].

Naturalmente, i beni che costituiscono il paniere devono avere una certa robustezza in termini di paragone con l'altro paniere. Questo perché il prezzo di questi aggregati può essere visto come un indice di prezzo generale che, pur rappresentando diversi beni e servizi di un Paese, è indicativo del livello di salute e di andamento dell'economia.

Esprimendo il tutto con una semplice formula matematica, abbiamo: $R_1 = \frac{P_1/P_0}{P_1^*/P_0^*} \cdot R_0$ dove R_1 e R_0 indicano i tassi di cambio nel periodo 0 e 1, P_1 e P_0 il livello dei prezzi domestici negli stessi periodi ed infine P_1^* e P_0^* il livello dei prezzi esteri nei medesimi time frames.

Questo modello semplicistico presenta fisiologicamente alcune restrizioni, o per meglio dire delle difficoltà, dovute al processo di costruzione e identificazione dei beni classificabili come uguali (o quantomeno simili) in termini di valore tra diversi Paesi [25].

Uncovered Interest Parity (UIP)

Innanzitutto, è opportuno dare una spiegazione del concetto di base di questa tipologia di parità.

L'interest rate parity fa riferimento ad una condizione di non arbitraggio in cui gli investitori sono indifferenti rispetto al tasso di cambio in due diversi Paesi [25]. Per via di questa assunzione, un trader potrà investire in uno dei due Paesi e guadagnarci lo stesso equivalente in termini di interessi. Quando però questa condizione non viene rispettata, si vengono a creare delle opportunità di arbitraggio dalle quali gli investitori potrebbero ottenere un profitto privo di rischio.

L'Uncovered Interest Arbitrage fa riferimento ad una situazione in cui un Paese quota un tasso di interesse più alto rispetto ad un altro e questo fa sì che un investitore sposti i propri fondi dal Paese col tasso minore a quello col tasso maggiore, in modo da guadagnare più interessi [25].

Ovviamente, una volta giunto a scadenza, l'investitore dovrà portare nel Paese di partenza questa somma di capitale, sostenendo per tutta la durata dell'holding, un rischio di tasso. Questo perché se il tasso di cambio del Paese in cui sono stati spostati i fondi diminuisce, allora l'investitore guadagnerà di meno in quanto il valore del suo capitale sarà eroso dal tasso di cambio.

Viceversa, se il tasso di cambio del Paese in cui si è investito aumenta, l'investitore guadagnerà di più.

Covered Interest Parity (CIP)

Il principio della Covered Interest Parity (CIP), colto per la prima volta da Keynes nel 1923, è uno dei pilastri principali della finanza.

Senza considerare il rischio di controparte, il CIP fa riferimento ad una condizione di arbitraggio che collega il premio al rischio che un forward exchange rate ha rispetto ad uno spot exchange rate in termini di vantaggio del tasso d'interesse nominale sulla valuta estera [10].

In questo caso, per evitare questo rischio sul tasso di cambio durante un arbitraggio, l'investitore può decidere di coprirsi entrando nel mercato spot e comprando un ammontare di valuta "estera" – guadagnando così un tasso d'interesse – ed ottenendo da un contratto forward il cambio dalla valuta estera in quella locale più gli interessi. Così facendo, l'investitore avrà bloccato un guadagno sicuro – basato sui tassi di cambio – e si sarà coperto dal rischio di valuta.

Naturalmente nella realtà non è così semplice, in quanto capita spesso di imbattersi in una currency sottovalutata che verrà venduta ad un prezzo scontato e proprio tale sconto coinciderà con la differenza tra i tassi di interesse dei due Paesi, facendo sì che l'arbitraggio risulti impossibile.

Il fatto che siano sorte numerose deviazioni nel corso della crisi è alquanto fisiologico; il vero problema che queste ricerche sottolineano è il protrarsi di queste deviazioni anche negli anni che l'hanno susseguita [10].

Questi scostamenti sono importanti per due motivi: in un caso, indicano l'inefficienza dei mercati finanziari nell'allocazione delle risorse e dall'altro mostrano un cambiamento implicito nel modo di trasmettere le politiche macroeconomiche [10]. È interessante come si possano identificare delle ragioni politiche alla base di questo "sfaldamento", prima su tutte, la gestione del ciclo finanziario globale e la dipendenza delle piccole economie rispetto alle decisioni prese da parte di autorità importanti (vedasi la Federal Reserve e gli annunci sui tassi di interesse). A queste, si affiancano le differenze sui tassi d'interesse tra le varie valute ed il loro impatto nel mercato swap.

I rischi nel mercato valutario

Prese in atto le determinanti dei tassi di cambio, le leggi che vi sono dietro - e dopo aver illustrato l'evoluzione del mercato FX - si è deciso di mettere in luce quelli che sono i rischi più importanti in cui un investitore, retail o private, si imbatte.

Nel mondo accademico, così come è stato sopra citato, l'arbitraggio viene spesso identificato come un'operazione risk-free.

In realtà, nel mondo reale nulla è privo di rischio e tramite questo capitolo verrà data una classificazione di quelli che sono i principali rischi che si incontrano nel mercato valutario.

L'escalation della guerra sui dazi iniziata dagli U.S.A. ha fatto emergere ancor di più questi effetti, così come la Brexit. Basti pensare che la valuta americana si è notevolmente rafforzata per mezzo di queste manovre a discapito di molte economie emergenti. Indipendentemente dal fatto che il proprio core business si basi su ricavi provenienti dall'estero, o che si abbiano dei costi in altri Paesi, si avrà sempre un'esposizione verso le valute.

Da una ricerca condotta da HSBC e dal FT Remark su oltre duecento CFO e circa trecento tesorieri, è emerso che circa il 70% dei CFOs abbia riscontrato una diminuzione nei profitti a causa di procedure connesse al mercato valutario che non sono state adeguatamente coperte [29]. Inoltre, il 58% degli stessi direttori operanti in istituzioni finanziarie di portata globale ha sostenuto che la gestione del rischio di valuta è uno dei due rischi che occupa la maggior parte del loro tempo [29].

Gestire questa tipologia di rischio può portare numerosi benefici, connessi ad una protezione dei margini di profitto collegati ai cash flow, ad un miglioramento in termini di forecast finanziario e di budget, all'apprendimento di come le fluttuazioni delle valute alle quali si è esposti possano impattare sul bilancio e ad un rafforzamento delle proprie capacità di prendere in prestito il capitale. Quindi, per affrontare questa problematica, bisognerebbe innanzitutto rivisitare il proprio ciclo operativo, misurare e gestire l'esposizione al rischio valutario, adottare strategie di copertura a questo rischio e creare una policy di gestione [41].

I principali fattori di rischio nel mercato valutario sono: il rischio di cambio, il rischio d'interesse, il rischio di credito, il rischio di controparte ed infine il rischio di liquidità.

Rischio di cambio

Il rischio del tasso di cambio è quel rischio causato dalle variazioni di prezzo delle valute. Si basa principalmente sul rapporto tra domanda e offerta delle valute stesse e quindi varia in base agli scostamenti dai prezzi di equilibrio.

È uno dei rischi più importanti in quanto va ad influenzare la posizione che è stata presa dall'investitore per tutto il tempo in cui rimane aperta. La magnitudine del rischio stesso può essere molto ampia anche perché dipendente da diversi fattori (fondamentali, come ad esempio cause intrinseche connesse alle valute stesse, o per motivi geopolitici).

Questa tipologia di rischio può essere mitigata attraverso l'utilizzo di alcuni strumenti come gli ETFs, i contratti forwards o futures e le opzioni.

Rischio d'interesse

Il rischio connesso al tasso di interesse fa riferimento ai ricavi/perdite generati dalle fluttuazioni dei forward spreads e dai gap derivanti dall'avvicinamento alla maturity del contratto.

Gli strumenti che ne sono più influenzati sono chiaramente i currency swaps, i contratti forwards/futures e le opzioni. Risulta chiaro come sia un rischio molto importante per gli investitori in quanto va ad impattare quasi la totalità degli strumenti negoziati nel mercato valutario.

Per minimizzare questo rischio occorre coprirsi acquistando contratti simili a quelli stipulati inizialmente ma con scadenze diverse.

Rischio di credito

Con il rischio di credito ci si riferisce alla possibilità che una controparte non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi – in maniera volontaria o non – rispetto ad una posizione aperta [30]. È un rischio che molto spesso viene affrontato dalle banche e dalle istituzioni finanziarie.

Allo stesso tempo, per il singolo trader che opera per interessi individuali, questo rischio è molto basso così come per le aziende registrate e regolate dalle autorità nei Paesi del G7.

Rischio di controparte

Questa tipologia di rischio è tra le più difficili da valutare. Infatti, può essere visto come un ibrido tra il rischio di credito e il rischio di mercato, in quanto può dipendere contemporaneamente dalla creditworthiness della controparte e dai movimenti del sottostante.

Indica l'incapacità o la mancata volontà di adempiere ai propri obblighi presenti nel contratto scambiato (a volte anche il default stesso della controparte). Tutto ciò avviene perché nei mercati OTC – spot o forward essi siano – i contratti sulle valute, così come anche per altre tipologie di sottostante, non sono scambiati presso le borse e quindi la performance di tali contratti non è garantita da nessuna clearing house.

Inoltre, il rischio di controparte può portare ad ingenti perdite, motivo per cui si è cercato, nel periodo di post crisi, di introdurre delle camere di compensazione anche nei mercati OTC.

Rischio di liquidità

Nonostante il mercato FX sia il più liquido in assoluto, si sono riscontrati dei periodi di scarsa liquidità, soprattutto in orari poco comuni (al di fuori dalle classiche trading hours).

In aggiunta, diverse nazioni hanno imposto dei limiti di trading e/o delle restrizioni sulle variazioni di prezzo che una valuta può avere in un certo periodo. Questo per evitare il proliferarsi di fenomeni in grado di minare la liquidità e la stabilità dei mercati.

Contrariamente a quanto si può pensare – ovvero che un arbitraggio non richiede alcun apporto di capitale – nella vita reale, per sfruttare la maggior parte degli arbitraggi, è necessario utilizzare ingenti quantità di capitale. Questo, nel caso in cui il movimento di prezzo vada contro l'arbitraggista, risulterà in una margin call e quindi a richieste di ulteriori iniezioni di capitale.

Gli arbitraggi nel mercato valutario

Definizione

Gli arbitraggi rappresentano uno dei pilastri principali dei mercati finanziari. Da sempre oggetto di grande interesse, la loro individuazione è stata materia di studio per molti studiosi e ricercatori.

Andando brevemente a toccare la definizione di questa operazione, si ha un arbitraggio nel momento in cui si effettua uno scambio di strumenti finanziari in grado di generare un profitto senza incorrere in alcun rischio, basandosi su differenze di prezzo dello stesso strumento nel medesimo mercato o in mercati differenti.

Lo stesso concetto di arbitraggio è la chiave di volta che sostiene e convalida la legge del prezzo unico. Per spiegare meglio questo assunto, basti pensare che se da un lato tutti i partecipanti all'interno del mercato scambiassero prezzi (quote) che non sono in grado di generare arbitraggi, questi ultimi non si verrebbero a creare. Contemporaneamente, anche se l'assunzione di assenza di arbitraggi appare ragionevole in diversi contesti, si vengono comunque a creare delle violazioni di questa legge.

Tipologie

Giunti a questo punto, è opportuno separare le nozioni di pure arbitrage e relative value arbitrage [15].

Entrambe le categorie portano ad una riscossione dei profitti che può avvenire in maniera istantanea – non appena viene effettuata l'operazione di arbitraggio – oppure l'arbitraggio viene bloccato e si riceverà il cash flow successivamente (come nel caso dei cash-and-carry arbitrage).

Pure Arbitrage

Con pure arbitrage si definisce l'opportunità di ottenere dei ricavi risk-free al tempo t tramite una gestione statica o dinamica delle condizioni che la compongono arrivati al tempo $t + 1$, tenuti in considerazione gli eventuali costi [15].

Le finestre temporali in cui queste opportunità possono essere sfruttate variano dalla tipologia di asset e dal mercato di riferimento. Come è stato accennato, possono essere gestite in maniera statica entrando nell'operazione dall'inizio per poi liquidarla a scadenza, oppure possono essere gestite in maniera dinamica, in cui il trader inizia una serie di steps che lo porteranno via via nel tempo ad eliminare ogni rischio direzionale di mercato andando a guadagnare in maniera risk-free al completamento degli stessi.

Covered Arbitrage

La condizione di non arbitraggio della Covered Interest Parity (CIP) postula come non sia possibile ottenere rendimenti positivi semplicemente prendendo in prestito delle attività di finanziamento estere nella valuta locale e coprendosi dal rischio di cambio attraverso un contratto forward con stessa scadenza.

Questo è vero perché attività fruttifere domestiche e straniere possono essere considerate simili se condividono le stesse caratteristiche quali rischio di default, rischi politici e liquidità, e se hanno la stessa maturity.

La CIP può essere espressa come [4]:

$$(1 + i_d) = \frac{1}{S}(1 + i_f)F$$

dove i_d rappresenta il tasso d'interesse locale e i_f quello straniero, sempre su attività finanziarie simili, mentre S rappresenta il tasso di cambio nominale e F il tasso di cambio forward con scadenza uguale a quella delle attività di finanziamento.

È interessante il lavoro svolto da Akram et al. (2008) [4] in cui hanno analizzato le opportunità di arbitraggio che deviavano dalla CIP su tre tassi di cambio e per quattro diverse scadenze.

Arbitraggi con frizioni

Nello studio precedentemente effettuato sono state mostrate le condizioni di arbitraggio in un mercato privo di ogni frizione (quali i costi di transazione). Nel mondo reale, però, questi costi sono presenti e molto spesso impediscono il realizzarsi di qualsiasi tipo di arbitraggio.

In questa direzione, è molto interessante il lavoro svolto da Cui et al. (2018) [14] nel quale hanno studiato due tipologie di arbitraggi che si presentano in un mercato con delle frizioni.

Andando nello specifico, per un valore sufficientemente piccolo di $\epsilon > 0$, se $|a_{ij}a_{ji} - 1| < \epsilon$ allora non sarà possibile sfruttare un'opportunità di arbitraggio sorta tra la coppia di valute (i, j) per via dei costi di transazione che risulterebbero dalla messa in atto delle operazioni [14].

La condizione di partenza è $\lambda_{max} \neq n$ che implica l'esistenza di arbitraggi.

Quindi, data una matrice positiva $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, non vi è alcun $\epsilon - arbitrage$ se $e^{-\epsilon} \leq c_{ij}c_{jk}c_{ki} \leq e^\epsilon$ regge per ogni $1 \leq i, j, k \leq n$ [14].

Assumendo che $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sia una matrice positiva e che non vi sia alcun $\epsilon - arbitrage$, allora esisterà una matrice priva di arbitraggi $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ (ovvero A una matrice positiva e $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$ per ogni i, j, k) tale che:

$$c_{ij}e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \leq a_{ij} \leq c_{ij}e^{\frac{7}{3}\epsilon}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Preso, in seguito, la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tale da non avere alcun $\epsilon - arbitrage$, allora si potrà definire la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ in modo che:

$$a_{ij} = \frac{c_{1j}}{c_{1i}}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Di conseguenza, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ottenuta sarà priva di arbitraggi. In più, dato che C non presenta alcun tipo di $\epsilon - arbitrage$, per definizione si avrà $e^{-\epsilon} \leq c_{ij}c_{kj}c_{ki} \leq e^\epsilon$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$ [14].

Partendo da questa relazione, il lavoro si struttura in modo da individuare il punto di svolta per l'osservazione di un arbitraggio. In questo senso, nel caso in cui $i = j = k$, si avrà $e^{-\frac{1}{3}\epsilon} \leq c_{ii}e^{\frac{1}{3}\epsilon}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Quindi, con $k = 1$ si ottiene:

$$c_{ij}c_{ji} \leq \frac{e^\epsilon}{c_{ii}} \leq \frac{e^\epsilon}{e^{-\frac{1}{3}\epsilon}} = e^{\frac{4}{3}\epsilon}$$

e similmente:

$$c_{ij}c_{ji} \geq \frac{e^{-\epsilon}}{c_{ii}} \geq \frac{e^{-\epsilon}}{e^{\frac{1}{3}\epsilon}} = e^{-\frac{4}{3}\epsilon}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} a_{ij} = \frac{c_{1j}}{c_{1i}} &= c_{ij} \frac{c_{1j}}{c_{1i}c_{ij}} \leq c_{ij} e^{\frac{4}{3}\epsilon} \frac{1}{c_{j1}c_{1i}c_{ij}} \\ &\leq c_{ij} e^{-\frac{7}{3}\epsilon} \end{aligned}$$

E in maniera omogenea si osserverà:

$$a_{ij} \geq c_{ij} e^{-\frac{7}{3}\epsilon}$$

andando così a confermare l'assunzione iniziale. [14]

Si ricava, quindi, che per ogni matrice positiva C , se $\frac{\lambda_{max}}{n} \notin \left[e^{-\frac{7}{3}\epsilon}, e^{\frac{7}{3}\epsilon} \right]$ allora vi sarà un'opportunità di arbitraggio.

Arbitraggi Triangolari

La condizione di arbitraggio triangolare riguarda tre tassi di cambio $S_{i/j,t}$ ($i \neq j$) che rappresentano le conversioni tra i tassi di cambio al tempo t (cioè $i, j \in EUR, USD, JPY$).

L'uguaglianza che si avrà senza tener conto dei costi di transazione sarà data da:

$$\frac{S_{EUR/JPY,t}}{S_{USD/JPY,t}} = S_{EUR/USD,t}$$

dove $S_{i/j,t}$ rappresenta l'ammontare di valuta j al tempo t necessario ad acquistare un'unità della valuta i . [27]

Se questa uguaglianza non regge, vorrà dire che ci troveremo in presenza di un'opportunità di arbitraggio che però potrà essere sfruttata solamente se la conversione tra i vari tassi di

cambio verrà effettuata esattamente ai tassi che violano tale condizione.

Per fare un esempio pratico, supponiamo di avere un'unità di *EUR* e decidiamo di cambiare questa unità per un ammontare EUR/JPY di *JPY*. Una volta ottenuta questa quantità di *JPY*, vogliamo trasformarla in *USD* per una quantità di USD/JPY . Ed infine, trasformiamo questa quantità ottenuta da *USD* in *EUR*.

In una situazione di arbitraggio triangolare, queste transazioni dovrebbero generare una quantità di *EUR* – ottenuta con l'ultimo scambio dal *USD* – maggiore rispetto a quella di partenza. Similmente si potrebbe fare lo stesso ragionamento facendo prima il cambio in *USD*, poi in *JPY* ed infine in *EUR*.

$$(EUR \rightarrow JPY \rightarrow USD \rightarrow EUR)$$

Le formule che rappresentano questa condizione di parità triangolare al tempo t sono composte come segue [27]:

$$M \times S_{EUR/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{USD/JPY,t}^a} \times \frac{1}{S_{EUR/USD,t}^a} - M = 0$$

$$S_{EUR/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{USD/JPY,t}^a} \times \frac{1}{S_{EUR/USD,t}^a} - 1 = 0$$

e

$$S_{EUR/USD,t}^b \times S_{USD/JPY,t}^b \times \frac{1}{S_{EUR/JPY,t}^a} - 1 = 0$$

con a che rappresenta il prezzo ask e b il prezzo bid. Se le componenti a sinistra dell'uguale sono maggiori di 0 al tempo t allora si potranno ottenere dei profitti sfruttando l'arbitraggio.

Ovviamente questo concetto può essere ampliato su più di tre valute contemporaneamente, dando vita a $k - esimi$ arbitraggi con k che indica il numero di valute prese in questione.

Relative Value Arbitrage

Per quanto riguarda il relative value arbitrage, si intende un'operazione in grado di generare profitti risk-free gestendo in maniera statica o dinamica le varie condizioni al netto dei costi che potrebbero incorrere [15].

Questo perché le operazioni di questo genere sono perdurate nel tempo e cercano di sfruttare dei mispricing che si presentano tramite la gestione nel lungo termine dell'operazione. Di

conseguenza saranno spesso soggette ad un rollover o comunque a degli scambi in prossimità delle scadenze. Gli esempi più chiari sono le pairs trading strategies ed il cash-and-carry trading.

Pairs Strategies

Il pairs trading è una strategia di investimento molto utilizzata dagli hedge fund che, se ben calibrata, permette di essere neutrali rispetto agli andamenti del mercato. Appartenente alla categoria dei statistical arbitrage, fu ideata da Gerry Bamberger e Nunzio Tartaglia, un gruppo di quants che lavorava presso Morgan Stanley intorno agli anni '80 [46].

L'approccio principale che viene utilizzato si basa sulla cointegrazione tra due securities, anche se sono diverse le metodologie applicabili [46]. Grazie a questo approccio, è possibile individuare un legame lineare stazionario tra due processi stocastici non stazionari – che presi singolarmente non sarebbero stabili – in modo tale da trovare una relazione che sia stabile durante il corso del tempo.

L'idea base della strategia è quella di monitorare l'andamento dello spread tra due securities per andare long sulla security sovrapprezzata e short su quella sottoprezzata.

La formula di partenza per questo processo consiste in [9]:

$$\log(P_t^A) - \gamma \log(P_t^B) = \mu + \epsilon_t$$

Dove:

- P_t^A indica il prezzo della security A al tempo t e P_t^B per la security b al tempo t
- μ è il valore di equilibrio
- ϵ_t sono i residui

Carry trade e Momentum

Queste due strategie di trading sono molto utilizzate nel mercato valutario e la prima ha anche uno stretto legame con una condizione teorica a noi molto vicina.

Con carry trade si intende quella strategia operativa per cui si prendono in prestito dei fondi in valuta con un basso tasso d'interesse e si danno in prestito fondi che invece hanno una valuta con tasso d'interesse elevato [8].

Dal punto di vista pratico, assumiamo che la valuta locale sia il dollaro americano (*USD*) ed indichiamone il tasso d'interesse risk-free annesso con i_t . Di conseguenza il tasso d'interesse della valuta estera sarà i_t^* .

Senza tener conto dei costi di transazione e prendendo una posizione long nella strategia carry trade, si avrà [8]:

$$z_{t+1}^L = (1 + i_t^*) \frac{S_{t+1}}{S_t} - (1 + i_t)$$

Con S_t ad indicare il tasso di cambio spot in *USD* per valuta estera.

Il payoff di tale strategia sarà:

$$z_{t+1}^C = \text{sign}(i_t^* - i_t) z_{t+1}^L$$

La strategia del momentum, invece, consiste nel comprare (vendere) le valute le cui posizioni long aperte nel passato hanno fatto registrare rendimenti positivi (negativi) [8].

Più nello specifico, la strategia riguarda la vendita (acquisto) di un forward in valuta estera se è stato redditizio vendere (acquistare) tale contratto al tempo $t \sim \theta$.

A differenza del carry trade, in questo caso viene considerata la valuta estera contro quella locale, come se nel nostro esempio fosse contro l'*USD*. Implementando questa strategia in asset diversi ed equamente bilanciati, si potranno costruire veri e propri momentum portfolios [8].

Arbitraggi e algebra matriciale

È opportuno citare come lo sviluppo dell'algebra matriciale e della sua nozione derivino dagli sviluppi nel campo dei determinanti, che risalivano allo studio dei coefficienti nei sistemi di equazioni lineari. Tra i primi matematici che si occuparono di questi argomenti vi furono Leibnitz, Cramer – quest'ultimo presentò nel 1693 la sua formula per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari – e Lagrange. La prima volta, invece, in cui fu concepito il termine “matrice” fu in Inghilterra nel 1848 da parte di J.J. Sylvester [49].

Le matrici e le implicazioni finanziarie

Tra i vari strumenti matematici utilizzati per lo studio e lo sviluppo di algoritmi in ambito finanziario, vi sono le matrici. La loro utilità viene dal fatto che i numeri presenti al loro interno

possono indicare dei dati – quali prezzi, quotazioni, stime etc. – e allo stesso modo possono essere interpretati tramite semplici equazioni matematiche.

Il Teorema di Perron-Frobenius

Il teorema di Perron-Frobenius fu scoperto inizialmente nel 1907 da parte di Oskar Perron e fu poi integrato da Georg Frobenius nel 1917. I due matematici sostennero che presa una matrice quadrata, composta da termini reali, essa avrà sempre un autovalore massimo al quale vi è associato un autovettore che può essere scelto in modo tale da avere delle componenti strettamente positive (Frobenius dimostrò la validità anche per delle specifiche classi di matrici non negative) [50].

Innanzitutto, è opportuno inizializzare la matrice che andremo ad osservare.

Chiamiamo la matrice A una matrice del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Data la matrice positiva $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$:

- Esiste sempre un autovalore $\lambda_{PF} \geq 0$ chiamato anche *radice di Perron*. A tale autovalore sarà associato un autovettore $v_{PF} \geq 0$
- Se tale matrice A è anche irriducibile, allora $\lambda_{PF} > 0$ e $v_{PF} > 0$. Tale autovettore sarà l'unico di modulo massimo con $m_a(\lambda_{PF}) = 1$ [26]
- $\min_{i \leq i \leq n} \frac{(Bx)_i}{x_i} \leq \lambda_{max} \leq \max_{i \leq i \leq n} \frac{(Bx)_i}{x_i}$

Il suddetto teorema è molto importante per individuare la presenza di arbitraggi poiché indica una caratteristica molto particolare ed utile: la presenza, all'interno di una matrice positiva, di un autovalore massimo uguale all'ordine della matrice.

Se non esiste alcuna opportunità di arbitraggio, allora $\lambda_{max} = n$, dove λ_{max} è l'autovalore di grado massimo della matrice A .

A sostegno di quanto enunciato, è opportuno proporre i procedimenti utilizzati da Cui et al. (2018) per coniugare il Teorema di Perron-Frobenius alla condizione di non arbitraggio.

La condizione di esclusione per un arbitraggio triangolare afferma che per ogni i, j, k deve valere:

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$$

Ciò vuol dire che un trader non può ottenere dei profitti semplicemente cambiando, in maniera sequenziale, una valuta per un'altra (preso in considerazione il set di tre valute differenti ma tra loro collegate).

Da un punto di vista matematico, affinché questa relazione sia valida, bisogna assumere che $i = j = k$, in modo tale da avere $a_{ii} = 1$.

Assumendo inoltre che non vi sia alcun arbitraggio diretto tra due valute - ovvero che $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ per ogni i, j - basterà calcolare l'autovettore associato al massimo autovettore della matrice A per ottenere una sequenza di valori g_1, \dots, g_n con $g_i > 0$.

Le componenti di questo autovettore andranno ad identificare ogni elemento presente all'interno della matrice A (al di fuori della diagonale) tali che:

$$a_{12} = \frac{g_1}{g_2}, a_{13} = \frac{g_1}{g_3}, \dots, a_{1n} = \frac{g_1}{g_n}$$

La struttura di calcolo generale

Al fine di rappresentare la metodologia di calcolo utilizzata per l'identificazione degli arbitraggi e delle triplete di valute che rappresentano tali arbitraggi, è necessario riproporre la struttura seguita.

Sono stati presi in considerazione due tipi di approcci diversi: il primo basato su un'analisi diretta della matrice composta dai tassi di cambio, e il secondo basato su alcune possibili modifiche da apportare a questa matrice.

Metodo Cui et al. (2018)

Tutta questa struttura si basa su una matrice A composta da $n \times n$ tassi di cambio [14] del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tale matrice diventa il punto di partenza per l'implementazione di un codice di calcolo - trasformabile in un algoritmo automatizzato di trading data-driven - in grado di identificare le triplete di valute che generano gli arbitraggi e di sfruttarne la loro magnitudine.

Il metodo utilizzato per il calcolo di potenziali arbitraggi risiede nel prodotto dei tassi di cambio per ogni gruppo di valuta per poi compararne il risultato con l'unità in modo da quantificarne lo scarto percentuale.

Sarà, quindi, necessario scrivere un codice in grado di riprodurre n matrici per n prezzi e settare in modo iterativo il prodotto per tre tassi di cambio diversi ma accomunati da una valuta. Chiaramente, il vincolo di tre valute può essere ampliato a k valute (quante se ne vogliono considerare) purché esse siano accomunate da una relazione del tipo:

$$a_{ij}a_{jx}a_{xy}\dots a_{ni} = (\neq)1$$

In questo modo, conoscendo ex ante le tipologie di tassi che si andranno a calcolare, si saprà perfettamente da dove proviene l'ipotetico arbitraggio.

Ovviamente l'idea di fondo si può ampliare anche per gruppi con più di tre valute. In questo caso, gli arbitraggi dati da k valute prendono il nome di k - *point* arbitrage [36]. Basti pensare che un arbitraggio triangolare indica la situazione in cui $k = 3$ mentre l'arbitraggio diretto si ha con $k = 2$. Brevemente, se $k \geq 4$ il processo rimane comunque simile a quello sopra descritto: si dovranno costruire k matrici k dimensionali e calcolare la composizione di ogni matrice come:

[14]

$$A_k := A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_k, \quad A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) := a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$$

Metodo Ma (2008)

In riferimento alla seconda metodologia seguita, si inizia prendendo n valute e ipotizzando che ognuna di esse abbia un valore intrinseco - denominato g_i - in modo tale da poterle rappresentare tramite un vettore trasposto chiamato $G = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_n]^T$ con $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ [36]. Tale autovettore coincide con l'autovettore associato al massimo autovalore di una matrice A

del tipo:

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

È grazie a questo autovettore che si può costruire la matrice arbitrage-free benchmark.

A questo punto, vanno identificate le colonne che vanno da 1 a n con i così detti currency-issuing countries, ovvero i Paesi nei quali il tasso di cambio viene scambiato, e le righe che vanno da 1 a n con le diverse valute.

Avremo quindi una disposizione matriciale secondo cui potremmo associare ad ogni elemento chiamato $b_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$ il rapporto tra due valute i e j provenienti da due Paesi o regioni diverse [36].

Definiamo questa matrice come:

$$B := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Tale matrice è importante in quanto contiene determinate caratteristiche: [36]

- $b_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in [1, n]$
- $b_{ij} = \frac{1}{b_{ji}} \quad \forall i, j \in [1, n]$
- $b_{ik}b_{kj} = b_{ij} \quad \forall i, j, k \in [1, n]$
- La matrice ha un autovalore $\lambda_{max} = n$ ed il corrispettivo autovettore indica il valore intrinseco
- Diagonale unitaria, in quanto il rapporto del tasso di cambio di ogni valuta con se stessa è uguale a 1

La matrice benchmark

A questo punto, la matrice arbitrage-free benchmark [12] sarà la matrice di partenza. Se si dovessero presentare deviazioni da questi valori, allora vorrebbe dire che si saranno venute a creare delle finestre di arbitraggio.

Questa matrice “reale” torna molto utile poiché può essere vista come una matrice A perturbata. Anche in questo caso gli arbitraggi verranno identificati attraverso il massimo autovalore λ_{max} e dal corrispondente autovettore G . Se $\lambda_{max} = n$ allora non vi saranno arbitraggi, altrimenti si osserveranno delle opportunità da poter sfruttare.

Cerchiamo adesso di spiegare la relazione che vi è tra l’autovalore λ_{max} , il corrispondente autovettore e le opportunità di arbitraggio. Appare ovvio come la matrice dei tassi di cambio sia una matrice strettamente positiva, dovuta all’esistenza ed unicità di un λ_{max} e del suo autovettore. Per mezzo di questo autovettore associato (G) si potrà costruire la matrice B in cui ogni elemento è dato dal rapporto tra i vari elementi di G [36].

È opportuno ricordare che da questa matrice di partenza si otterrà la matrice perturbata B da cui si ricava ulteriormente la comparative value matrix C , i cui elementi sono $c_{ij} = \frac{b_{ij}}{a_{ij}}$, con $c_{ij} = 1$ per ogni $i = j$ e $c_{ij} \approx 1$ per ogni $i \neq j$.

Dato che A è una matrice positiva, per il Teorema di Perron-Frobenius esiste un autovettore positivo h tale che:

$$Ah = \lambda_{max}h$$

Tale uguaglianza si può riscrivere come:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j = \lambda_{max}h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Di conseguenza, sostituendo questa relazione, si avrà:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{h_j}{h_i}$$

A questo punto sarà necessario sommare le varie i per ottenere la relazione di non arbitraggio:

[36]

$$\begin{aligned}
n\lambda_{max} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = n + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = \\
&= n + \sum_{i < j} \left[a_{ij} \frac{h_j}{h_i} + a_{ji} \frac{h_i}{h_j} \right] \geq n + \sum_{i < j} 2 \sqrt{a_{ij} \frac{h_j}{h_i} a_{ji} \frac{h_i}{h_j}} = \\
&= n + \sum_{i < j} 2 = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \\
&= n^2
\end{aligned}$$

dove si è assunta la disuguaglianza aritmetico-geometrica $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ per ogni $x, y > 0$ e l'uguaglianza tra i cambi $a_{ij}a_{ji} = 1$.

Si è quindi provato che, presa in considerazione l'ipotesi di assenza di arbitraggi diretti per mezzo di $a_{ij}a_{ji} = 1$, $\lambda_{max} \geq n$ regge e si avrà $\lambda_{max} = n$ se e solo se, per ogni i, j si avrà:

$$a_{ij} \frac{h_j}{h_i} = a_{ji} \frac{h_i}{h_j} = \frac{1}{a_{ij}} \frac{h_i}{h_j}$$

che equivale a dire:

$$a_{ij} = \frac{h_i}{h_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Tutto questo implica che non vi sono arbitraggi triangolari se si assume che $\lambda_{max} = n$.

È facile notare che λ_{max} è direttamente correlato ai coefficienti c_{ij} . Quindi, se non vi sarà alcuna deviazione dalla matrice B , allora ogni $c_{ij} = 1$ e la matrice A sarà uguale alla B , con autovalore di grado massimo $\lambda_{max} = n$ e nessuna opportunità di arbitraggio presente [36].

Se invece c_{ij} devia anche leggermente dall'unità, vorrà dire che λ_{max} devia leggermente da n e quindi questa discrepanza tra i due valori andrà a segnalare l'esistenza di un possibile arbitraggio, poiché i valori si scostano da quelli della matrice arbitrage-free [36].

L'Arbitrage Possibility Indicator (API)

Giunti a questo punto, iniziamo a descrivere alcuni strumenti che ci torneranno utili per l'identificazione dei profitti derivanti dagli arbitraggi e per trovare il percorso dal quale questi si vengono a creare.

Per motivi di chiarezza, definiamo l'indicatore Arbitrage Possibility Indicator (API) [36] come:

$$API = \frac{|\lambda_{max} - n|}{n - 1}$$

Questo rapporto è in grado di identificare le deviazioni di λ_{max} da n , indicandone il grado di scostamento dalla matrice arbitrage free.

Quindi, $API = 0$ indicherà l'assenza di arbitraggi, mentre $API > 0$ – poiché in valore assoluto non potrà essere inferiore a zero – implicherà opportunità di arbitraggio [36]. Ovviamente più grande sarà il valore dell'indicatore e più ampie saranno queste finestre.

La matrice di confronto

Nel momento in cui viene divisa la matrice B con la matrice A , si ottiene una matrice C così detta comparative matrix value [36] in cui ogni valore presente al suo interno è dato dal rapporto tra gli elementi di B e A :

$$C := (c_{ij}) = (b_{ij}/a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Come si può notare, anche questa matrice presenta delle caratteristiche comuni alla matrice B . Infatti, se un valore casuale $c_{ij} = 1$ vorrà dire che quel tasso di cambio non sarà né sopravvalutato né sottovalutato bensì corrisponderà al suo valore intrinseco.

Se invece $c_{ij} < 1$ (> 1) allora la valuta i nel Paese j sarà sottovalutata (sopravvalutata) e per questo si potrà sfruttare l'arbitraggio.

L'Arbitrage Earning Rate e le sue applicazione

Arbitraggi diretti

In base a quanto sopra descritto, nel momento in cui si avrà una condizione tale che $I_{max} = J_{min}$ e $J_{max} = I_{min}$ allora due elementi della matrice saranno simmetrici rispetto alla diagonale e si avrà un arbitraggio diretto [36].

Un arbitrageur potrà – quindi – prendere in prestito la valuta J_{min} per comprare la valuta I_{min} nel Paese J_{min} e venderla per la valuta I_{max} nella location J_{max} .

In questo modo, l'arbitrage earning rate sarà:

$$AER = \frac{1}{a_{(I_{min}, J_{min})} \cdot a_{(I_{max}, J_{max})}} - 1$$

Poiché $a_{(I,J)} = b_{(I,J)} \cdot c_{(I,J)}$ si avrà:

$$AER = \frac{1}{b_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot b_{(I_{max}, J_{max})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1$$

E grazie alla relazione $\frac{1}{b_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})}}$ si ottiene:

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1$$

Nonostante si evince che l'earning rate dipenda dagli elementi della matrice A , il risultato finale dipenderà dagli elementi corrispondenti nella matrice C , dovute alle proprietà dell'arbitrage-free matrix.

Arbitraggi triangolari

In questa tipologia di arbitraggio, nel momento in cui avremo $I_{max}=I_{min}$ o $J_{max} = J_{min}$ vorrà dire che i due elementi dell'arbitraggio si troveranno rispettivamente o nella stessa riga o nella stessa colonna; per questo motivo si osserverà un arbitraggio triangolare [36].

Nel primo caso, ovvero quando le valute si troveranno nella stessa riga, un investitore che usa la valuta J_{min} nel Paese J_{min} comprerà la valuta I_{min} e la venderà per J_{max} nella location J_{max} per poi ricomprare la stessa valuta in J_{min} .

L'AER ottenuto sarà: [36]

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}} - 1$$

Nell'altro caso, invece, quando i due tassi di cambio si troveranno nella stessa colonna – $J_{min} = J_{max}$ – l'investitore prenderà in prestito la valuta J_{min} nel Paese J_{min} , comprerà la valuta I_{min} e la venderà nel Paese I_{max} per la valuta I_{max} .

A questo punto, venderà l'ammontare di I_{max} per la valuta J_{min} nella location J_{max} , ottenendo

così il seguente *AER*:

$$AER = \frac{1}{c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{min}, J_{min})} \cdot c_{(I_{max}, J_{max})}}$$

La relazione tra *API* e *AER*

Prendiamo il caso di due valute.

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(2, 2)$ tale che:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli, l'autovalore di grado massimo sarà $\lambda_{max} = 1 + \sqrt{a_{12}a_{21}}$ e l'*API* risulterà $API = |\sqrt{a_{12}a_{21}} - 1|$ [36].

Di conseguenza, se $a_{12}a_{21} \neq 1$ e se si suppone che $a_{12}a_{21} = 1 + \epsilon$, allora la ϵ risulterà essere positiva e leggermente maggiore di zero.

Questo farà sì che $AER = \epsilon$, mentre $API = |\sqrt{1 + \epsilon} - 1| \approx \frac{\epsilon}{2}$. Grazie a ciò si dimostra che $AER = 2 \cdot API$.

La matrice perturbata

Per quanto riguarda la matrice perturbata – ovvero la matrice in cui si possono identificare i percorsi delle opportunità di arbitraggio – è opportuno analizzarla sia nel caso in cui questi arbitraggi sono presenti, al fine di identificare il punto di partenza dal quale si possono rilevare tali opportunità, che nel caso in cui reggono le ipotesi di non arbitraggio (diretto e triangolare).

Nel primo caso, iniziamo col ricercare una qualsiasi ipotetica forma di arbitraggio. Tramite dei semplici calcoli si evince come $c_{ij} \times c_{ji} \approx 1$ per ogni $i \neq j$. Si suppone, quindi, che $c_{ij} \times c_{ji} = 1 + \epsilon_{ij}$, con tale ϵ positiva. Assumendo inoltre che $c_{ij} = 1 + \delta_{ij}$ e andando a sostituire questa relazione nella formula $\lambda_{max} - n$ si ottiene: [36]

$$\lambda_{max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\lambda_{ij}^2}{1 + \lambda_{ij}} \right] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\epsilon_{ij}}{c_{ij}} \right]$$

Da tale relazione si evince come λ_{max} è direttamente connesso alle discrepanze δ_{ij} . Difatti, se δ_{ij} devia da 0, allora $\lambda_{max} - n$ devierà leggermente da 0, indicando così il manifestarsi di opportunità di arbitraggio.

Nell'altro caso in cui la matrice risulterebbe essere free of direct arbitrage, si avrà $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$.

Infatti, partendo da:

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = \frac{a_{ji}}{(g_i/g_j)} = \frac{(1/a_{ji})}{1/(g_j/g_i)} = \frac{1}{(a_{ji}/b_{ji})} = \frac{1}{c_{ji}}$$

ovvero $c_{ij} = \frac{1}{c_{ji}}$.

Giunti a questo punto, al fine di spiegare l'identificazione di scostamenti dai valori di equilibrio di λ_{max} , è opportuno assumere $\epsilon = 0$ [36].

Da qui si avrà:

$$\lambda_{max} - n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{\lambda_{ij}^2}{1 + \lambda_{ij}} \right]$$

Questo sarà utile per spiegare come $\lambda_{max} = n$ se e solo se $\delta_{ij} = 0$ o se $c_{ij} = 1$ per ogni $i, h \in [1, n]$ [14].

In altre parole, la matrice perturbata A , in cui non vi sono arbitraggi diretti, sarà free of triangular arbitrage (e di qualsiasi altro tipo di arbitraggio) se l'autovettore di modulo massimo sarà uguale al numero di valute n .

Dati

Descrizione

In riferimento al dataset che è stato utilizzato, è stata necessaria un'accurata ricerca di quali potessero essere i migliori data providers per il mercato valutario e quali i periodi da analizzare.

Per quanto riguarda i providers, la scelta è stata indirizzata verso Thomson Reuters Eikon anziché su Electronic Broking Services. Così come anche la EBS (di proprietà della ICAP), entrambe sono electronic limit order [11], ovvero in cui è possibile piazzare gli ordini in maniera automatizzata.

I dati utilizzati per l'analisi riguardano le quotazioni bid dei sei principali tassi di cambio in termini di liquidità e di volumi scambiati nel mercato FX. Questi includono i seguenti Paesi: Stati Uniti d'America, Europa, Giappone, Regno Unito, Svizzera e Svezia.

Le quotazioni sono state estrapolate dalla piattaforma Thomson Reuters Eikon per mezzo del componente aggiuntivo su Excel. Tramite la costruzione di semplici formule, sono stati presi i prezzi di chiusura di ogni minuto a partire dal giorno 16 Ottobre 2019 00:00 fino al 09 Gennaio 2020 23:59. Ovviamente, vi sono state molte quotazioni che risultavano mancanti,

motivo per cui questi dati sono stati calcolati in maniera iterativa ipotizzando una crescita degli stessi basata sulla media dei tassi di rendimento, nello stesso periodo, rispetto ai tassi di cambio aventi la valuta mancante.

Oltre a ciò, è stato necessario un meticoloso lavoro di pulizia dati, poiché non tutti i time frame erano disponibili per le stesse valute. Inoltre, poiché i suddetti dati vengono inseriti all'interno di una matrice con delle caratteristiche peculiari, i valori speculari sono stati calcolati in rapporto a 1, nel rispetto delle leggi di mercato.

È stata assunta tale ipotesi in quanto è ragionevole ipotizzare la mancanza di un arbitraggio diretto tra lo stesso tasso di cambio nel Paese opposto.

È abbastanza realistico assumere che più della maggior parte degli scambi spot effettuati in via elettronica vengono rappresentati all'interno di questo dataset. I dati estrapolati riguardano i prezzi quotati ad una frequenza di un minuto e consistono nel miglior prezzo bid nel sistema di riferimento. Sono tutti prezzi executable, di conseguenza identificano fedelmente il prezzo di mercato in quell'istante.

Implementazione

Una volta ottenuti i dati necessari, sono stati avviati due procedimenti di analisi. Il primo è basato sulla metodologia di Cui et al. (2018) attraverso la quale le opportunità di arbitraggio, dopo aver ipotizzato che i prezzi bid e ask siano legati dalle seguenti relazioni:

$$B_{ij} = 1/A_{ji} \quad ; \quad A_{ij} = 1/B_{ji}$$

assumono due possibili scenari: uno in cui i profitti sono descritti da

$$1/A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_{k-1} i_k} \text{ e l'altro in cui sono descritti da } B_{i_1 i_2} B_{i_2 i_3} \dots B_{i_{k-1} i_k}.$$

Nel primo caso, la strategia da compiere è la seguente: comprare $1/A_{i_1 i_2}$ unità della valuta i_2 usando un'unità di i_1 , quindi comprare $1/A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3}$ unità della valuta i_3 usando $1/A_{i_1 i_2}$ unità di i_2 e via dicendo.

L'operazione dovrà essere chiusa comprando $1/A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_{k-1} i_k}$ unità di i_1 usando

$$1/A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_{k-1} i_k} \text{ unità di } i_k.$$

Quindi vengono scambiate $1/A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_{k-1} i_k}$ unità di i_1 con un'unità di i_1 .

Se il primo rapporto risulta essere maggiore di 1, allora queste transazioni genereranno un profitto e di conseguenza un'opportunità di arbitraggio.

Nel secondo caso, invece, si fa riferimento alle quotazioni bid, per cui i profitti generati dal mantenere una posizione di 1 unità di i_2 saranno dati dall'acquisto di $B_{i_1 i_2}$ unità di i_1 , cambiati in $B_{i_3 i_1}$ quantità di i_3 e infine per $B_{i_2 i_3}$ quantità di i_2 .

A tal proposito, sono state create solamente delle matrici con i prezzi bid, in quanto le violazioni di arbitraggi diretti sono pressoché inesistenti.

Per prima cosa, utilizzando il metodo computazionale di *Cui et al. (2018)*, sono stati calcolati, tramite l'utilizzo del linguaggio di programmazione Python, tutti i possibili arbitraggi triangolari ottenibili in una matrice 6×6 composta dai dati su 6 principali valute, quali:

(*EUR, USD, JPY, GBP, CHF, SEK*)

La struttura adottata per queste matrici è la stessa di quella analizzata sopra:

$$B := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 6} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{16} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \dots & b_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ b_{61} & \dots & \dots & \dots & b_{66} \end{bmatrix}$$

dove $b_{ij} = \frac{1}{b_{ji}} \quad \forall i, j \in [1, 6]$

Da queste matrici, si è calcolato il prodotto tra tre tassi di cambio diversi, in modo tale che con l'ultimo passaggio si riusciva a riacquistare la valuta di partenza

(es. *EUR/USD, USD/JPY, JPY/EUR*). Iterando tale processo per ogni riga e colonna sulle n matrici- corrispondenti agli n dati inseriti - si sono generati 3,614,520 tra profitti e perdite. Nello specifico, sono stati raccolti 1,355,445 prezzi.

Il secondo procedimento, invece, fa riferimento al lavoro condotto da *Ma (2008)* in cui le opportunità di arbitraggio vengono identificate e calcolate sviluppando la matrice dei tassi di cambio di partenza. Da questa matrice, si calcolano i rispettivi autovalori e gli autovettori associati.

Nel momento in cui il massimo autovalore differisce da n - con n che identifica il numero di valute presenti nella matrice - vorrà dire che vi saranno dei possibili arbitraggi. A questo punto, viene preso l'autovettore associato a tale autovalore di grado massimo e si crea una nuova matrice, i cui elementi sono dati dal rapporto degli elementi dell'autovettore stesso.

Si otterrà, quindi, una nuova matrice simile a quella di partenza ma con dei valori alterati.

Una volta fatto ciò, si procede alla composizione di una nuova matrice data dal rapporto della prima con la seconda e così facendo si avrà una matrice in cui si possono identificare quei tassi di cambio che sono sottovalutati o sopravvalutati.

Basterà catturare i valori massimi e minimi di questa matrice e se essi apparterranno alla stessa o colonna si procederà all'identificazione di un tasso di cambio che possa fungere da ponte per i due tassi principali.

Infine, per identificare i rendimenti di queste opportunità di arbitraggio, verrà calcolato l'*AER* corrispettivo.

Conclusione

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti tramite l'analisi dei dati sopra descritti.

In riferimento al primo metodo utilizzato, sono risultati numerosi scostamenti dalla relazione di non arbitraggio, motivo per cui si sono osservate tante potenziali opportunità.

Infatti, anche se con scostamenti insignificanti, quasi la totalità dei dati ottenuti si discosta dall'unità. Nonostante ciò, non è ragionevole assumere che queste opportunità possano essere sfruttate ottenendo effettivamente un profitto.

Bisogna ricordare che questi dati sono stati ottenuti in assenza dei costi di transazione, i quali - anche se considerati in piccola parte - erodono gran parte del profitto. Sono molto poche, invece, le opportunità propriamente fruibili.

Tramite la seguente Tabella 1 sono mostrati in valori più alti, in media, per i mille arbitraggi maggiormente favorevoli e i valori massimi sulla media totale degli arbitraggi.

La terna di tassi di cambio che ha fatto registrare la media più alta sui primi mille arbitraggi è quella composta dalle valute

(JPY/USD, USD/GBP, GBP/JPY)

con un valore di 1.00440.

Mentre, considerando la media sul totale dei valori (90,363 valori per ogni colonna), il gruppo

(CHF/JPY, JPY/SEK, SEK/CHF)

ha fatto registrare lo scostamento più elevato con 1.00163.

Ciò che salta all'occhio è la presenza della sterlina britannica su 8 dei 10 gruppi di valute più redditizi e quella dello yen giapponese che si trova in 6 delle 10 terne.

Una risposta all'elevata presenza della sterlina inglese si appoggia sulle turbolenze dell'ultimo periodo generate dalla Brexit e quindi dai repentini scostamenti di prezzo della valuta.

Inoltre, nella Tabella 2 è possibile osservare come la massima opportunità di arbitraggio sia stata fatta registrare dalla terna dei tassi

$$(JPY/EUR, EUR/GBP, GNP/JPY)$$

con un valore di 1.01268 che corrisponde ad un 1.26% di profitto.

Il secondo metodo di calcolo ha fatto registrare dei risultati quasi identici al primo, se non fosse per alcuni gruppi - quali (UE, UG, EG) e (EJ, EG, JG) - in cui si sono rilevati degli scostamenti maggiori, sintomo del fatto che risultava più proficuo prendere in prestito del denaro in partenza.

Rispetto a quest'ultimo concetto, è opportuno fare una precisazione. Infatti, in alcuni casi risulterà più conveniente finanziare le proprie operazioni ma bisognerà comunque tenere in considerazione il tasso d'interesse al quale si dovrà restituire la somma presa in prestito.

Naturalmente questo studio non vuole andare oltre l'identificazione di opportunità di arbitraggio.

Nelle figure a seguire sono stati riportati gli arbitraggi triangolari individuati e comparati ai massimi autovalori corrispondenti. È stata scelta una rappresentazione del genere in modo tale da poter notare la magnitudine degli arbitraggi rispetto ai propri autovalori.

Nella Figura 1 sono state rappresentate le migliori dieci terne di valute, in termini di profitti. Si evince una chiara corrispondenza tra autovalori con valori più estremi e arbitraggi con valori più alti. Inoltre, emerge una certa relazione lineare tra i valori agli estremi e quelli vicini all'unità, con un forte addensamento negli intorni dei valori di equilibrio.

In contrasto con la prima figura, nella Figura 2 - in cui sono state rappresentate tutte le restanti terne di valute - gli arbitraggi, così come gli autovalori, appaiono raggruppati in degli intorni non molto ampi, volti a significare una stabilità per quanto riguarda le condizioni di non arbitraggio.

Infine, nella Figura 3 si possono vedere tutte le opportunità di arbitraggio - e non - individuate con lo studio. La peculiarità di questa immagine sta nel fatto che la figura risulta essere simmetrica orizzontalmente rispetto all'unità.

A completare il tutto, si è voluta rappresentare la frequenza degli arbitraggi individuati per mezzo di un istogramma (Figura 4). Anche in questo caso vi è una forte condensazione di valori intorno all'unità mentre quelli più esterni vanno via via diminuendo, anche se si notano dei picchi a determinate frequenze.

È opportuno aggiungere che, al fine di ottenere una rappresentazione grafica quanto più comprensibile, sono stati tolti dall'istogramma quei dati che risultavano essere estremi, poiché andavano a condizionare negativamente la distribuzione dei dati, impedendo di carpirne le informazioni.

Valute	Media Top 1000	Media Arb. Trng.
JE,EG,GJ	1.00340	1.00017
JU,UG,GJ	1.00440	1.00025
EU,UG,GE	1.00338	0.99996
UG,GCH,CHU	1.00326	0.99990
UG,GS,SU	1.00314	0.99980
EJ,JG,GE	1.00104	0.99982
JE,ECH,CHJ	1.00267	1.00028
GJ,JS,SG	1.00178	1.00021
UE,EG,GU	1.00173	1.00003
CHJ,JS,SCH	1.00410	1.00163

Tabella 1: Media Rendimenti Arbitraggi Triangolari

Valute M1	Max Arb. Trng. M1	Valute M2	Max Arb. Trng. M2
JE,EG,GJ	1.01268	JE,JG,EG	1.01268
JU,UG,GJ	1.00966	JU,JG,UG	1.00960
EU,UG,GE	1.00939	EU,EG,UG	1.00935
UG,GCH,CHU	1.00924	UG,UCH,GCH	1.00925
UG,GS,SU	1.00921	UG,US,GS	1.00926
EJ,JG,GE	1.00840	EJ,EG,JG	1.01268
JE,ECH,CHJ	1.00811	JE,JCH,ECH	1.00806
GJ,JS,SG	1.00796	GJ,GS,JS	1.00755
UE,EG,GU	1.00796	UE,UG,EG	1.00935
CHJ,JS,SCH	1.00755	CHJ,CHS,JS	1.00710

Tabella 2: Valori Massimi Rendimenti Arbitraggi Triangolari

Autovalori Massimi vs Max Rendimenti Arbitraggi Triangolari

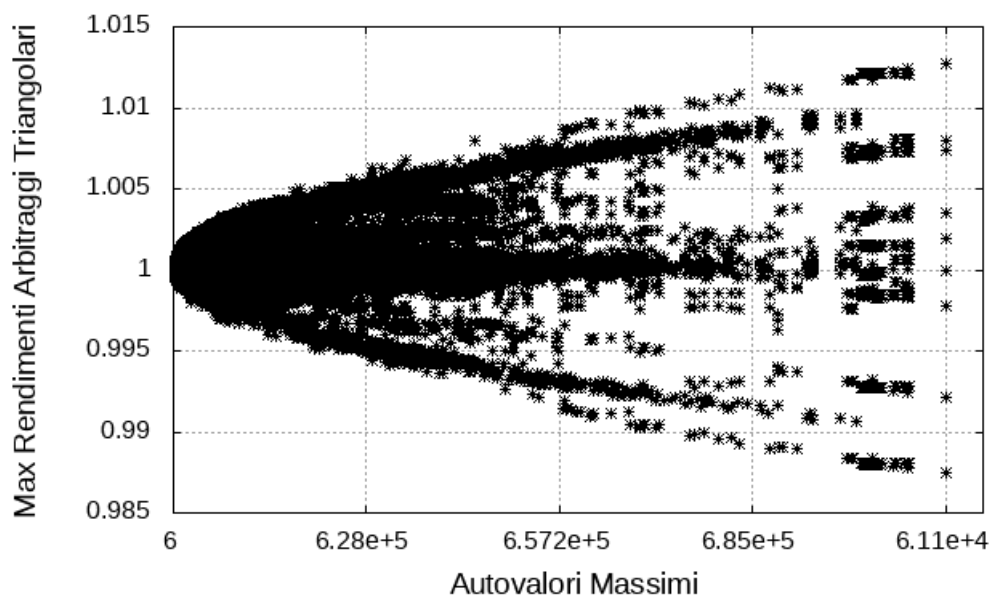


Figura 1: Top 10 Terne Arbitraggi Triangolari

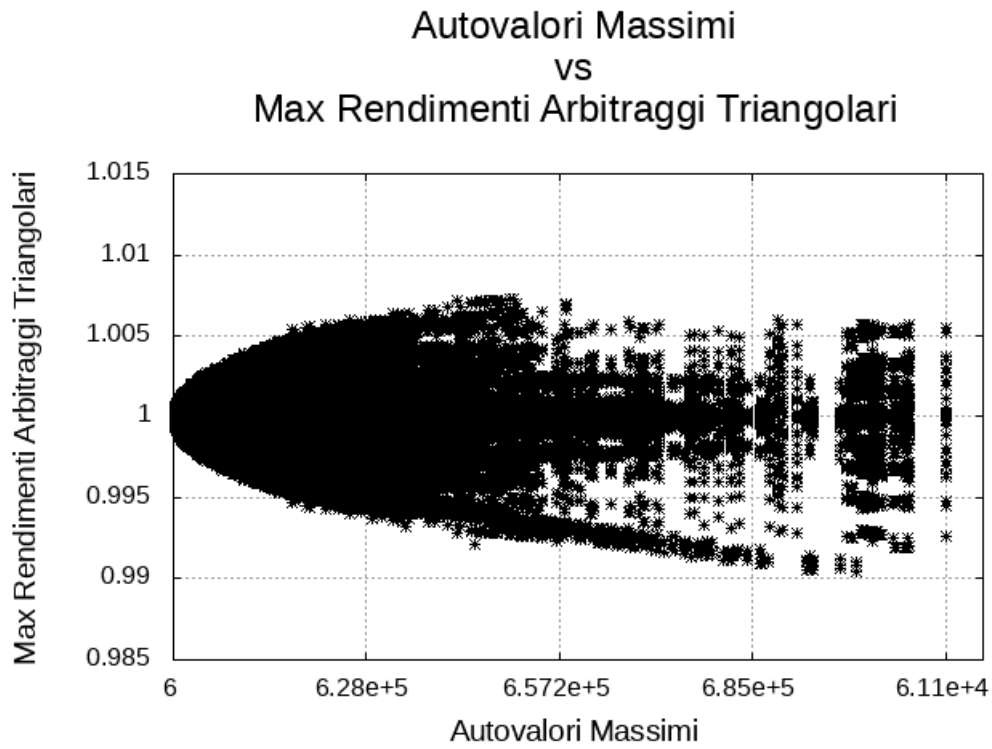


Figura 2: Terne Arbitraggi Triangolari senza Top 10

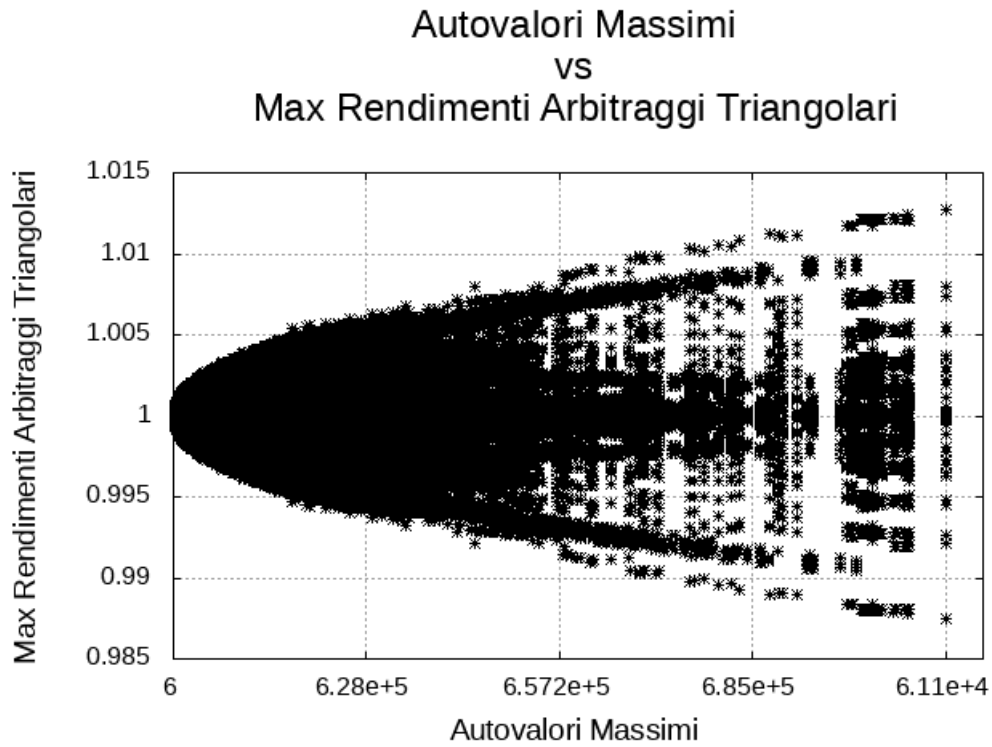


Figura 3: Arbitraggi Triangolari Totali

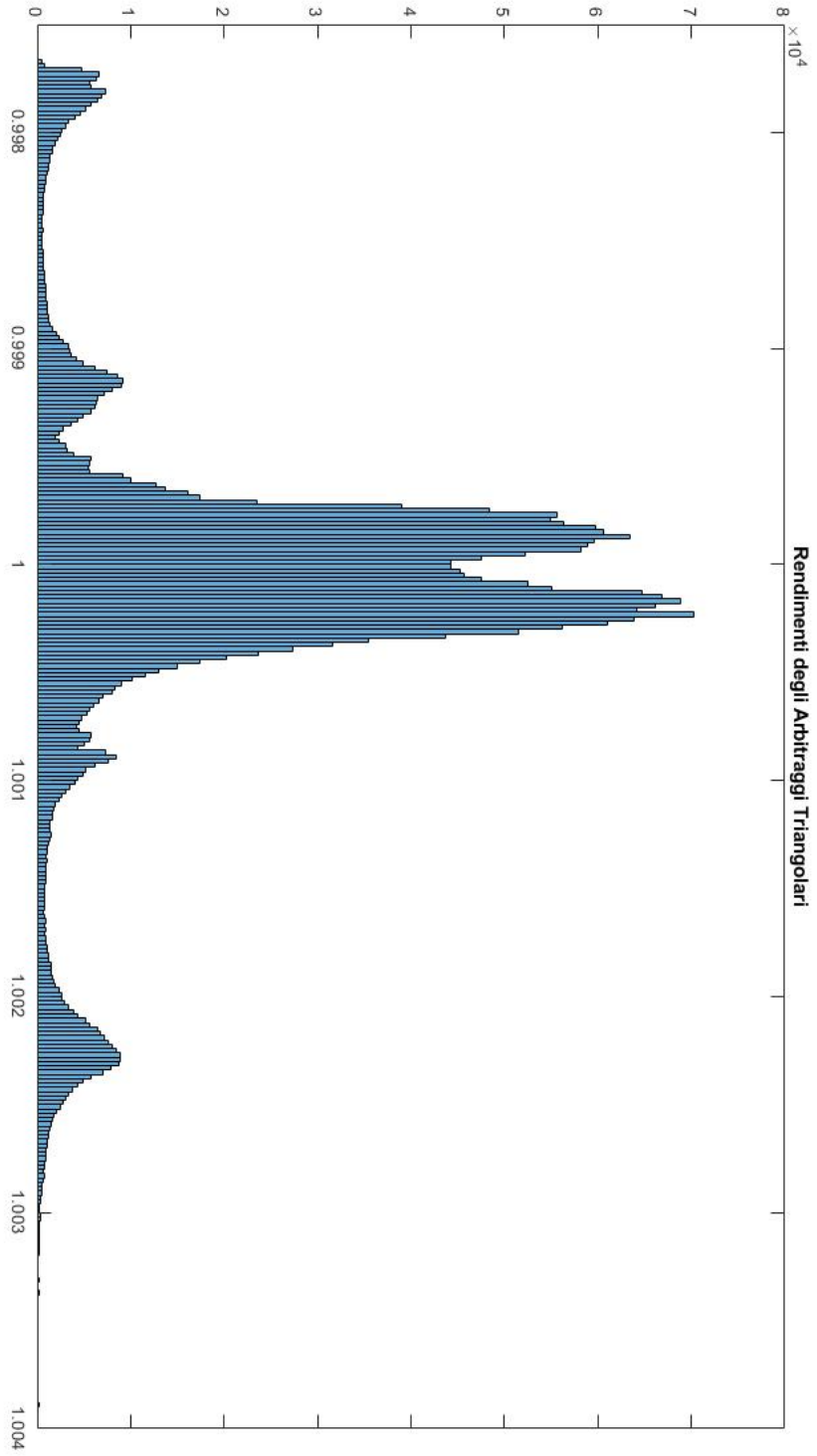


Figura 4: Istogramma Arbitraggi Triangolari Totali

Bibliografia

- [1] **Aiba, Y., Hatano, N., Takayasu, H., Marumo, K. and Shimizu, T.** - "Triangular arbitrage as an interaction among foreign exchange rates". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*. 310, 467-479; (2002).
- [2] **Aiba, Y. and Hatano, N.** - "A microscopic model of triangular arbitrage". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*. 371, 572-584; (2006).
- [3] **Akram, Q. F., Rime, D. and Sarno, L.** - "Arbitrage in the Foreign Exchange Market: Turning on the Microscope"; February 2006.
- [4] **Akram, Q. F., Rime, D. and Sarno, L.** - "Journal of International Economics". 76(2), 237-253; 2008.
- [5] **Almgren, R. and Chriss, N.** - "Optimal execution of portfolio transactions". *Journal of Risk*, 3, 5-40; (2001).
- [6] **Bank For International Settlements: Triennial Central Bank Survey** – "Foreign Exchange turnover in April 2019, Monetary and Economic Department"; 16 September 2019.
- [7] **Balaji, T.** – "Microstructure and Adjustment Process in Foreign Exchange Markets: Short-Term Dynamics"; December 2003.
- [8] **Burnside, C., Eichenbaum, M.S. and Rebelo, S.** - "CARRY TRADE AND MOMENTUM IN CURRENCY MARKETS", NBER WORKING PAPER SERIES; April 2011.
- [9] **Caan, S.** – Draft on Statistical Arbitrage.
- [10] **Cerutti, E., Obstfeld, M. and Zhou, H.: International Monetary Fund: IMF Working Paper** - "Covered Interest Parity Deviations: Macroeconomic Determinants"; January 19.
- [11] **Chaboud, A., Chiquoine, B., Hjalmarsson, E. and Vega, C.** - "Rise of the Machines: Algorithmic Trading in the Foreign Exchange Market"; 5 July 2013.
- [12] **Chacholiades, M.** - "The Sufficiency of Three-Point Arbitrage to Ensure Consistent Cross rates of Exchange". *Southern Economic Journal*, 38, 86-88; (1971).
- [13] **Cross, R. and Kozyakin, V.** - "Fact and fictions in FX arbitrage processes"; 25 February 2015.
- [14] **Cui, Z., Qian, W., Taylor, S. and Zhu, L.** - "Detecting Arbitrage in the Foreign Exchange Market"; 18 April 2018
- [15] **Dubil, R.** - "An Arbitrage Guide to Financial Markets"; Wiley Finance; 2004.
- [16] **Engle, R. F., Ferstenberg, R. and Russell, J. R.** - "Measuring and modeling execution cost and risk". Working paper (2006).

- [17] **European Central Bank: Vitale, P.** – "A MARKET MICROSTRUCTURE ANALYSIS OF FOREIGN EXCHANGE INTERVENTION"; Working Paper Series NO 629; May 2006.
- [18] **Evans, M., and Lyons, R.** - "Order flow and exchange rate dynamics". *Journal of Political Economy*, 110: 170-180; (2002a).
- [19] **Evans, M. D. D.** - "The Microstructure of Currency Markets"; July 2010.
- [20] **Evans, M. D. D.** - "Foreign Exchange Market Microstructure"; 13 March 2019.
- [21] **Fama, E. F.** - "Journal of Finance 25 383–417 Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York", N.Y. December, 28–30; 1969 (May, 1970).
- [22] **Farhi, E., Fraiburger, S., Gabaix, X., Ranciere, R. and Verdelhan, A.** - "Crash risk in currency markets". NBER Working Paper 15062; 2009.
- [23] **Fenn, D. J., Howison, S. D., McDonald, M., Williams, S. and Johnson, N. F.** - "The mirage of triangular arbitrage in the spot foreign exchange market". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 12, 1105-1123; (2009)
- [24] **Foucault, T., Kozhan, R., and Tham, W. W.** - "Toxic arbitrage". *The Review of Financial Studies*, 30(4), 1053-1094; (2017).
- [25] **Glantz, M. and Kissell, R.** - "Multi-Asset Risk Modeling: Techniques for a Global Economy in an Electronic and Algorithmic Trading Era"; 2014.
- [26] **Gozzi F.**, - "Corsi di metodi matematici per economia e finanza". pag. 128; Settembre - Dicembre 2019
- [27] **Gradojevic, N., Gencay, R. and Erdemlioglu, D.** - "A new wavelet-based ultra-high-frequency analysis of triangular currency arbitrage"; 16 May 2019.
- [28] **Grossman, S. J. and Stiglitz, J. E.** - "American Economic Review", 66 246–253; 1976.
- [29] **HSBC** – "Rethinking Treasury: How CFOs and corporate treasurers are rising to the risk management challenge" – Executive Summary; First quarter 2018.
- [30] **Hull, C. J. and Barone E.**, - "Opzioni, futures e altri derivati". Decima edizione; Gennaio 2018
- [31] **Ito, T., Yamada, K., Takayasu, M. and Takayasu, H.** - "FREE LUNCH! ARBITRAGE OPPORTUNITIES IN THE FOREIGN EXCHANGE MARKETS"; November 2012.
- [32] **Lustig, H. and Verdelhan, A.** - "The Cross-Section of Foreign Currency Risk Premia and Consumption Growth Risk". Working Paper NBER 11104; May 2005.
- [33] **Lustig, H. and Verdelhan, A.** - "The Cross-Section of Foreign Currency Risk Premia and Consumption Growth Risk". *American Economic Review*, 97 (1), 89–117; March 2007.
- [34] **Lustig, H., Roussanov, N. and Verdelhan, A.** - "Common risk factors in currency markets". SSRN Paper 1139447; 2009.
- [35] **Lustig, H., Roussanov, N. and Verdelhan, A.** - "Common Risk Factors in Currency Markets"; 3 May 2011.
- [36] **Ma, M.** - "Identifying Foreign Exchange Arbitrage Opportunities through Matrix Approach"; 11 January 2008.

- [37] **MFX: Microfinance Currency Risk Solutions** – "Understanding FX Forwards, A Guide for Microfinance Practitioners".
- [38] **Lyons, R.K.** - "The Microstructure Approach to Exchange Rates". Cambridge, USA:MIT Press; (2001).
- [39] **Meyer, C. D.** - "Matrix analysis and applied linear algebra (Vol. 71)". SIAM. ISBN 0-89871-454-0; (2000)
- [40] **Moosa, I.** - "Triangular arbitrage in the spot and forward foreign exchange markets". Quantitative Finance, Volume 1, Issue 4 April 2001, pages 387 – 390; (2002).
- [41] **Nordea Markets** – "Open Insights: 5 steps to manage your currency risk"; 01 November 2019.
- [42] **O'Hara, M.** - "Microstructure Theory". Oxford, UK: Blackwell Publishers; (1995).
- [43] **Primavera, M.** - "Mercati efficienti e bolle speculative: cicli economici, finanza e psicologia: L'analisi di cointegrazione".
- [44] **Rafferty, B.** - "The returns to currency speculation and global currency realignment risk". Mimeo, Duke University; 2010.
- [45] **Samuelson, P.** - "Industrial Management Review", 6 41–49; 1965.
- [46] **Takayanagi, S. and Ishikawa, K.** - "Introduction to pair trading: Based on cointegration".
- [47] **Vidyamurthy, G.** - "Pairs Trading, Quantitative Methods and Analysis". John Wiley Sons, Canada; 2004.
- [48] <https://www.tradingacademy.com/financial-education-center/forex-risks.aspx>
- [49] <https://web.archive.org/web/20120910034016/http://darkwing.uoregon.edu/vitul-li/441.sp04/LinAlgHistory.html>
- [50] https://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem#cite_ref-1