

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI  
"LUISS - GUIDO CARLI"

---

LUISS 

---

DIPARTIMENTO DI *ECONOMIA E FINANZA*  
Corso di Laurea in *Banche e Intermediari Finanziari*

TESI DI LAUREA MAGISTRALE  
CATTEDRA: METODI MATEMATICI PER ECONOMIA E FINANZA

**TRANSIZIONE ENERGETICA OTTIMALE**

RELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. FAUSTO GOZZI

LAUREANDO:  
MATTEO BUTTARAZZI

CORRELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. FRANCESCO LIPPI

---

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

---



---

# Indice

---

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>IL MODELLO DA OTTIMIZZARE</b>	<b>3</b>
2.1	Crescita Economica . . . . .	4
2.2	Funzione di Utilità . . . . .	5
2.3	Combustibili Fossili . . . . .	6
2.4	Fonti di Energia Rinnovabile . . . . .	8
2.5	Vincolo di Bilancio . . . . .	10
<b>3</b>	<b>TEORIA SUL CONTROLLO OTTIMO</b>	<b>11</b>
3.1	Notazioni . . . . .	11
3.2	La Condizione Necessaria di Pontryagin . . . . .	14
3.3	Hamiltoniano Corrente . . . . .	15
3.4	Orizzonte Temporale Infinito . . . . .	16
3.4.1	Un Problema Autonomo . . . . .	18
3.5	Il Caso Generale . . . . .	19
3.6	Condizioni Sufficienti . . . . .	23
<b>4</b>	<b>APPLICAZIONE TEORICA AL MODELLO</b>	<b>27</b>
4.1	I diversi Regimi Energetici . . . . .	27
4.2	Applicazione del Principio di Massimo . . . . .	28
4.2.1	Verifica della <i>Rank Condition</i> . . . . .	30
4.2.2	Condizioni Necessarie per l'Ottimalità . . . . .	31
4.2.3	L'Economia Alimentata dai Combustibili Fossili . . . . .	32
4.2.4	L'Economia Alimentata dalle Energie Rinnovabili . . . . .	34
4.3	L'economia di Lungo Periodo . . . . .	36
4.4	Da Condizioni Necessarie a Sufficienti . . . . .	39

<b>5</b>	<b>CLIMA E CRESCITA ECONOMICA</b>	<b>44</b>
5.1	Cambiamento Climatico . . . . .	44
5.2	Calibrazione del Modello . . . . .	47
5.3	Implicazioni Economiche . . . . .	51
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>57</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>59</b>



## INTRODUZIONE

---

Le attività antropiche alterano la composizione chimica dell'atmosfera terrestre, provocando un cambiamento del clima che non può essere attribuito solamente alla naturale variabilità climatica.<sup>[3]</sup> L'aumento di gas serra nell'atmosfera è principalmente dovuto all'uso massiccio di combustibili fossili. Questi ultimi sono stati utilizzati, dagli albori della rivoluzione industriale, per energizzare processi industriali che hanno permesso più alti livelli di consumi e di benessere ad una popolazione mondiale in costante aumento.<sup>[7]</sup>

Il gruppo intergovernativo sul cambiamento climatico *IPCC* (*Intergovernmental Panel on Climate Change*) afferma che le emissioni di gas serra derivanti da combustibili fossili per la fornitura di calore, produzione di energia elettrica e trasporti, rappresentano circa il 78% delle emissioni totali tra anidride carbonica, metano e protossido di azoto, e altri elementi che determinano un innalzamento della temperatura globale.<sup>1</sup>

Gli impatti indotti dalle emissioni di gas serra, come l'aumento della temperatura media globale e l'innalzamento del livello del mare, saranno progressivi su orizzonti di lungo periodo, infatti la permanenza media in atmosfera dei gas serra è relativamente lunga.

La mitigazione dell'impatto umano sul cambiamento climatico richiederà profondi cambiamenti nella produzione e nell'uso di energia a livello globale. La natura globale dei cambiamenti climatici deriva dal fatto che, indipendentemente da dove vengono emessi, i gas serra vengono rapidamente assorbiti nell'atmosfera e diffusi in tutto il mondo. Un'azione unilaterale da parte di un singolo paese non sarebbe in grado di apportare modifiche significativamente rilevanti, si richiede pertanto un'azione correttiva a livello internazionale.<sup>[20]</sup>

Negli ultimi decenni, per contro, la produzione su larga scala di energia attraverso le risorse rinnovabili è diventata tecnologicamente fattibile. Tutto ciò mette in evidenza l'importanza di un cambiamento strutturale nel sistema energetico globale: da un sistema basato prevalentemente sull'utilizzo di combustibili fossili ad un sistema basato sull'utilizzo di fonti rinnovabili.

---

<sup>1</sup>I seguenti dati sono tratti dal sito internet ufficiale dell'*Intergovernmental Panel on Climate Change*: [www.ipcc.ch](http://www.ipcc.ch)

La fornitura limitata di combustibili fossili solleva la preoccupazione che la necessità di passare a alternative più costose imporrà costi notevoli. Spesso si sostiene che questi costi non sono ottimali e, se possibile, dovrebbero essere ridotti mediante politiche adeguate.<sup>2</sup>

Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., e Zhang X., in *"Energy Sector Innovation and Growth"* [14], analizzano la transizione energetica ottimale dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabile in un modello neoclassico di crescita economica con progressi tecnologici endogeni.

Il presente elaborato ha lo scopo di applicare le nozioni di teoria sul controllo ottimo al modello sviluppato in [14], al fine di calcolare il percorso ottimo che seguono gli investimenti sia nel settore dei combustibili fossili sia in quello delle energie rinnovabili, così da trarre le conclusioni che ne derivano sulla crescita macroeconomica.

L'elaborato è così strutturato. Nel capitolo 2 viene presentato il modello in [14] e analizzato nel dettaglio il motivo delle relazioni in esso presenti. Nel capitolo 3 viene presentata la teoria sul controllo ottimo con particolare focus sul Principio di Massimo di Pontryagin. Il Teorema di Pontryagin conduce a condizioni necessarie ma non sufficienti per l'ottimalità, sarà quindi necessario introdurre appositi teoremi per stabilire, sotto quali ipotesi, le condizioni sono anche sufficienti. Nel capitolo 4 vengono descritti i diversi regimi energetici, a cui il modello da origine, che sono rappresentati graficamente nella Figura 4 (Regime dei combustibili fossili con o senza investimenti nelle tecnologie di estrazione, regime delle energie rinnovabili con e senza investimenti in Ricerca e Sviluppo). Le nozioni teoriche apprese nel terzo capitolo vengono qui applicate al modello così da trovare equazioni differenziali che descrivono l'andamento delle variabili all'interno dei diversi regimi. Nel capitolo 5, viene calibrato il modello utilizzando i dati dell'*Energy Information Administration* (EIA), il *Survey of Energy Resources* e il *GTAP 7 Bata Base* prodotto dal *Center for Global Trade Analysis* nel Dipartimento di Economia Agraria, Purdue University. Infine, vengono presentate le implicazioni economiche del modello. Il capitolo 6 è dedicato alle conclusioni.

---

<sup>2</sup>Si veda ad esempio [8] in cui vengono discussi i possibili rischi macroeconomici dovuti alla transizione energetica.

---

### IL MODELLO DA OTTIMIZZARE

---

Il modello sviluppato da Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., e Zhang X. in [14], per studiare la transizione energetica ottimale dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabile, è così strutturato.

La funzione di utilità da ottimizzare è:

$$J(c(\cdot)) = \max \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt$$

soggetto ai vincoli differenziali:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \\ \dot{S}(t) = Q(t)R(t) \\ \dot{N}(t) = n(t) \\ \dot{H}(t) = \begin{cases} B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

Con condizioni iniziali  $k(0) = k_0 > 0, S(0) = 0, N(0) = 0, H(0) = 0$ .

Le funzioni vincolari sono:

$$\begin{cases} c(t) + i(t) + j(t) + n(t) + g(S(t), N(t))R(t) + p(t)B(t) = y(t) \\ y(t) = Ak(t) \\ R(t) + B(t) = y(t) \\ p(t) = \begin{cases} (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \text{Altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

dove:

$$g(S(t), N(t)) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(\alpha_3 + N(t))}{(\bar{S} - s)(\alpha_3 + N(t)) - \alpha_2}.$$

Nel resto del capitolo, si analizzeranno nel dettaglio tutte le relazioni presenti nel modello. Nella sezione 2.1 viene analizzata la funzione di produzione, la dinamica della dotazione di capitale e la relazione che lega l'output all'energia. Nella sezione 2.2 l'attenzione viene focalizzata sulla funzione di utilità da ottimizzare. Nella sezione 2.3 vengono esposte le relazioni che regolano i combustibili fossili: vengono presentate equazioni differenziali per la quantità totale di risorse estratte, per la tecnologia di estrazione e un'approssimazione parametrica del costo marginale dell'energia derivante dalle risorse fossili. Nella sezione 2.4 vengono presentate le relazioni che regolano le energie rinnovabili: una relazione per il costo marginale dell'energia derivante da risorse rinnovabili e un'equazione differenziale per lo stock di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili. Nella sezione 2.5 viene introdotto il vincolo di bilancio.

## 2.1 Crescita Economica

La crescita economica è solitamente definita come l'incremento dei volumi di produzione dei beni e della capacità di erogazione dei servizi in un dato sistema economico.<sup>[11]</sup> Il PIL (Prodotto Interno Lordo) è generalmente considerato come una determinante fondamentale del livello di benessere e del livello di sviluppo di una società.<sup>[16]</sup> La teoria neoclassica sulla funzione di produzione si fonda sull'ipotesi che l'output effettivamente prodotto nel sistema economico, sia funzione dello stock di capitale e dell'offerta di lavoro:

$$Y = f(K, L).$$

dove  $Y$  denota la produzione aggregata di beni e servizi,  $K$  lo stock di capitale a disposizione dell'economia e  $L$  l'offerta di lavoro nel sistema in pieno impiego. È possibile esprimere l'equazione in termini pro-capite come:

$$y = f(k).$$

La teoria della crescita endogena si propone come una rielaborazione sostanziale del modello neoclassico. In particolare, accettando le ipotesi di base di quest'ultimo, si pone l'obiettivo di inserire il progresso tecnologico nelle dinamiche economiche, con le conseguenze che ne derivano. In effetti, considerare il progresso tecnologico come una variabile endogena implica l'ammissione della possibilità per gli agenti economici di investire nel miglioramento della tecnologia. La teoria di Arrow K.<sup>[1]</sup> muta radicalmente la struttura produttiva del sistema economico. Una funzione di produzione compatibile con il processo di avanzamento tecnologico è, infatti, diversa da quella ipotizzata nel modello neoclassico e si ipotizza infatti che l'output pro-capite  $y(t)$  possa essere scritto come una funzione lineare dello stock di capitale pro-capite  $k(t)$ :

$$y(t) = Ak(t). \tag{2.1}$$

Una delle caratteristiche centrali del modello sviluppato in [14] consiste nella modellizzazione esplicita del progresso tecnologico sia nelle tecnologie di produzione di energia fossile che in quella rinnovabile. In particolare, mentre i costi di estrazione aumentano con quantità cumulata di risorse estratte, i progressi nelle tecnologie di estrazione possono tenere sotto controllo i costi di fornitura di servizi di energia da combustibili fossili per un certo periodo tempo. Il progresso tecnologico nelle energie rinnovabili è incorporato nel modello ipotizzando che le conoscenze accumulate riducano i costi di produzione fino al raggiungimento di un limite tecnologico.

La dinamica della dotazione di capitale per lavoratore  $k(t)$  si evolve secondo l'equazione differenziale:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t). \quad (2.2)$$

In  $t = 0$  la dotazione di capitale per lavoratore è pari a  $k(0) = k_0$ . Con il passare del tempo la dotazione di capitale subisce l'effetto di due componenti. L'investimento  $i(t)$  è una componente positiva che consente l'accumulazione di capitale, mentre la seconda componente, caratterizzata da un'accezione negativa, è il deprezzamento del capitale  $\delta k(t)$ . Risulta evidente che l'accumulo di capitale per lavoratore dipende dalla grandezza relativa della componente di investimento e della componente di ammortamento. Considerando la funzione di produzione  $y(t) = Ak(t)$  è funzione della sola dotazione di capitale per lavoratore, vi sarà allora crescita economica solo se l'investimento è maggiore alla componente di ammortamento.

L'energia è un input essenziale per la produzione. Si assuma che l'energia, che alimenta la crescita economica, possa provenire unicamente da due fonti: dai combustibili fossili oppure da fonti rinnovabili. Sia  $R(t) \geq 0$  la produzione pro-capite di energia derivante dalle risorse fossili e, sia  $B(t) \geq 0$  la produzione pro-capite di energia derivante dalle risorse rinnovabili. Queste risorse sono utilizzate per la fornitura di beni e servizi nel sistema economico. Si assuma per semplicità che  $B(t)$  e  $R(t)$  siano perfetti sostituti. Si assuma quindi che in ogni istante valga la relazione:

$$R(t) + B(t) = y(t). \quad (2.3)$$

## 2.2 Funzione di Utilità

Sia nella teoria della crescita endogena che nell'approccio neoclassico assume particolare rilevanza il comportamento ottimizzante dell'agente rappresentativo nell'economia. Quest'ultimo sceglie quanto consumare e quanto investire sulla base di una funzione di utilità del tipo:

$$U = \max \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c(t)) dt.$$

L'avversione al rischio è la proprietà che caratterizza un agente economico che preferisce sempre un ammontare certo rispetto a una quantità aleatoria. La funzione di utilità di un agente avverso al rischio è una funzione concava. Ricordando che:

**Definizione 1.** Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  convesso, è concava su  $A$  se  $\forall (x, y) \in A$  e  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , si ha:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Una misura del grado di avversione al rischio di un agente economico è il coefficiente *Relative Risk Aversion*, elaborato da Arrow K., Pratt J. W., basato per l'appunto, sulla concavità della funzione di utilità.

$$R_R(c) = -c \frac{u''(c)}{u'(c)}$$

dove  $u'(\cdot)$ ,  $u''(\cdot)$  sono le derivate prima e seconda della funzione di utilità  $u(\cdot)$ . La funzione di utilità in [14] è del tipo *CRRRA* (*Constant Relative Risk Aversion*) ovvero funzione di utilità con un coefficiente di avversione al rischio costante.<sup>[19]</sup>

Sia  $c(t)$  il consumo pro-capite dell'unico bene di consumo nell'economia al tempo  $t$ , e si consideri una funzione di utilità con orizzonte temporale infinito, definita da:

$$U = \max \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \quad (2.4)$$

dove  $e^{-\beta t}$  rappresenta il fattore di sconto intertemporale. Il fattore di sconto  $\beta$  decide quanto vale oggi un beneficio futuro: più è alto il tasso di sconto, meno valore ha il beneficio di oggi. Stabilire un certo tasso di sconto significa assegnare un certo grado di importanza al benessere delle generazioni future. Il fattore  $\gamma$  è il fattore di *risk aversion* e misura la concavità della funzione di utilità.

### 2.3 Combustibili Fossili

I combustibili fossili sono il petrolio, il carbone, il gas naturale e elementi utilizzati per la produzione di energia nucleare. Per loro natura, rappresentano una risorsa limitata e destinata ad esaurirsi. Elevati tassi di crescita della popolazione e di crescita economica, incidono notevolmente sulla disponibilità di risorse, aumentano, infatti, il tasso di esaurimento delle stesse.

La popolazione, indicata con  $Q(t)$ , è una variabile esogena nel modello. Si assuma che  $Q(t)$  cresca ad un tasso costante  $\pi$ , per cui  $Q(t) = Q_0 e^{\pi t}$ . Il costo marginale dell'energia derivante dai combustibili fossili, indicato con  $g(S(t), N(t))$  dipende dalla quantità totale di risorse estratte in un dato istante  $S(t)$  e dalla tecnologia di estrazione  $N(t)$ . La quantità totale di combustibili fossili estratti in un dato istante  $t$  è determinato dall'integrale tra 0 e  $t$  di  $Q(t)R(t)$ , per cui si ha:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = Q(t)R(t) \\ S(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

La tecnologia di estrazione  $N(t)$  dipende dagli investimenti nel settore fossile  $n(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = n(t) \\ N(0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

In [14] viene fornita un'approssimazione parametrica della relazione che intercorre tra il costo marginale dell'energia derivante dai combustibili fossili, la quantità totale di risorse estratte e la tecnologia di estrazione:

$$g(S(t), N(t)) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\bar{S} - S(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3 + N(t)}} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(\alpha_3 + N(t))}{(\bar{S} - S(t))(\alpha_3 + N(t)) - \alpha_2} \quad (2.7)$$

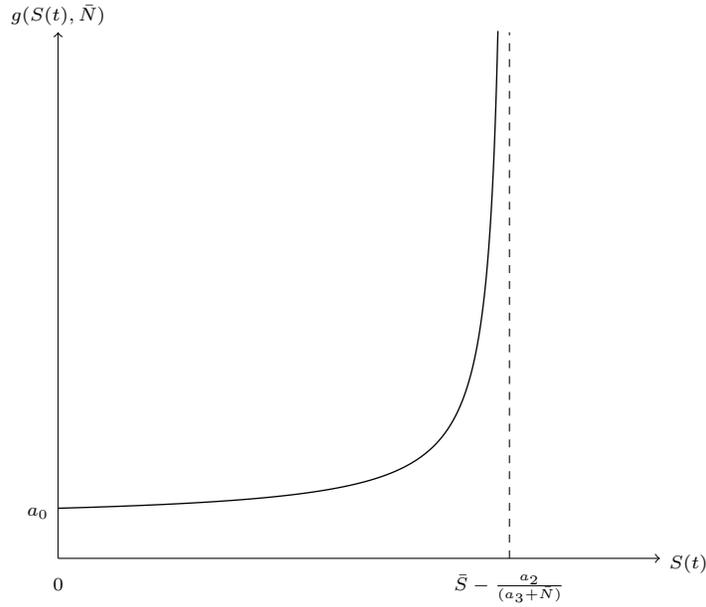


FIGURA 1: Relazione tra il costo marginale di estrazione e la quantità di risorse estratte

Le derivate parziali di  $g(S, N)$  sono:

$$\frac{\partial g(S, N)}{\partial S} = \frac{\alpha_1(\alpha_3 + N)^2}{[(\bar{S} - S)(\alpha_3 + N) - \alpha_2]^2} > 0$$

$$\frac{\partial g(S, N)}{\partial N} = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{[(\bar{S} - S)(\alpha_3 + N) - \alpha_2]^2} < 0$$

Per un dato livello di tecnologia di estrazione  $\bar{N}$ , il costo marginale di estrazione  $g(S(t), \bar{N})$  aumenta con la quantità di risorse estratte. Il livello massimo che può essere estratto in un dato istante è  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3 + \bar{N}}$

e, naturalmente, il costo marginale di estrazione aumenta più velocemente con l'avvicinarsi di tale limite. Gli investimenti in nuove tecnologie estendono temporaneamente tale livello spostando l'asintoto verticale verso destra. Considerando che:

$$\lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} \bar{S} - \frac{a_2}{(a_3 + \bar{N})} = \bar{S}$$

tale processo raggiunge, in teoria, il suo limite naturale in  $\bar{S}$  che rappresenta il valore massimo di risorse estraibili dalla terra.

Le derivate parziali del secondo ordine della funzione  $g(S(t), N(t))$  sono:

$$\frac{\partial^2 g(S, N)}{\partial S^2} = \frac{2\alpha_1(\alpha_3 + N)^3}{[(\bar{S} - S)(\alpha_3 + N) - \alpha_2]^3} > 0$$

$$\frac{\partial^2 g(S, N)}{\partial N^2} = \frac{2\alpha_1\alpha_2(\bar{S} - S)}{[(\bar{S} - S)(\alpha_3 + N) - \alpha_2]^3} > 0$$

In particolare, questo significa che lo sfruttamento cumulativo  $S(t)$  aumenta il costo marginale dell'energia derivante dal combustibile fossile a un ritmo crescente, mentre gli investimenti nella tecnologia di estrazione fossili riducono i costi a un ritmo decrescente. Inoltre si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial g(S, N)}{\partial N} = 0$$

Ciò implica che alla fine diventa anti-economico investire ulteriormente nella riduzione dei costi marginali dell'energia derivante da combustibili fossili. Pertanto, lo sfruttamento delle risorse fossili saranno probabilmente abbandonate molto prima che tutti i depositi  $\bar{S}$  siano esauriti poiché l'aumento dei costi rende le tecnologie per le energie rinnovabili più interessanti.

## 2.4 Fonti di Energia Rinnovabile

Le risorse rinnovabili presentano diversi vantaggi, tra i quali rientrano senza dubbio l'assenza di emissioni inquinanti e la loro inesauribilità. L'utilizzo di queste fonti non ne pregiudica dunque la loro disponibilità a generazioni future e sono preziose per ottenere energia riducendo al minimo l'impatto ambientale. Le risorse fossili si trovano in specifiche aree geografiche, fornendo ad alcuni paesi un vantaggio, mentre una delle caratteristiche principali delle fonti di energia rinnovabili è diffusa disponibilità. Ogni nazione che punti all'indipendenza energetica dovrebbe puntare a sviluppare energia da fonti rinnovabili. Ciononostante, secondo l'*International Energy Agency (IEA)*, le fonti rinnovabili hanno coperto nel 2017 soltanto il 25% circa della generazione mondiale di elettricità, come mostra la figura 2.<sup>[29]</sup>

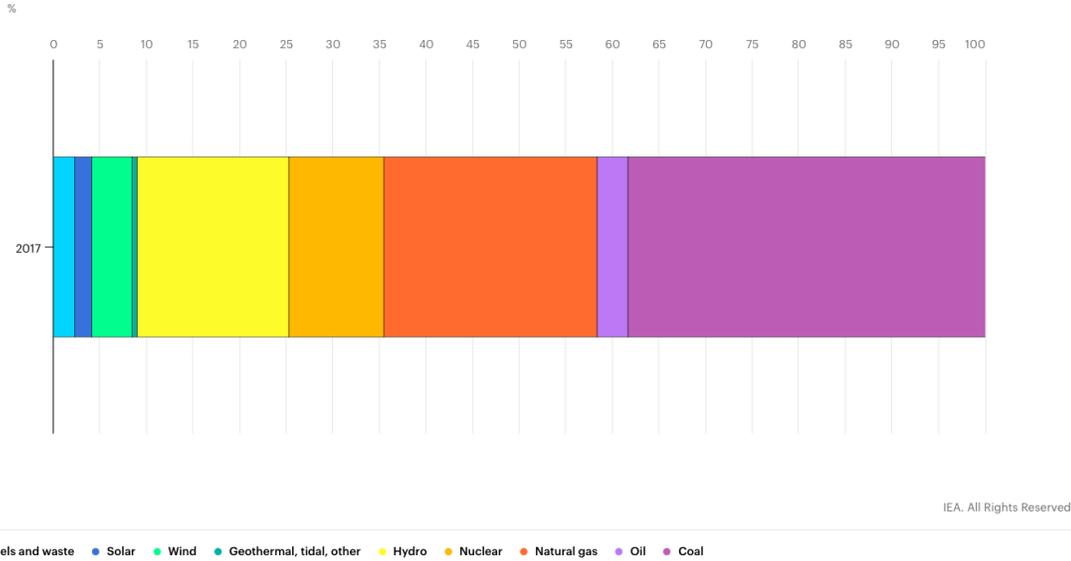


FIGURA 2: Generazione mondiale di elettricità per fonte nel 2017

FONTE: International Energy Agency

In [14] il costo marginale dell'energia derivante da fonti rinnovabili, indicato con  $p(t)$ , viene modellizzato tramite la seguente relazione:

$$p(t) = \begin{cases} (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.8)$$

dove  $\Gamma_1, \Gamma_2$  e  $\alpha$  sono parametri costanti.

Si assume che il progresso tecnologico faccia diminuire il valore di  $p(t)$ , man mano che si acquisiscono nuove conoscenze. Esiste, tuttavia, un limite  $\Gamma_2$ , determinato da vincoli fisici di produzione dell'energia, sotto il quale  $p(t)$  non può scendere.  $H(t)$  rappresenta lo stock di conoscenze sulla produzione di energie rinnovabili al tempo  $t$  e  $\Gamma_1$  rappresenta il valore iniziale di  $p(t)$  (con  $H(t) = 0$ ). Inizialmente l'energia rinnovabile sarà non competitiva rispetto ai combustibili fossili, per cui si assuma che  $\Gamma_1^{-\alpha} > g(0, 0)$ .

L'accumulo di conoscenze sulle energie rinnovabili è funzione dell'energia pro-capite derivante dall'energia rinnovabile utilizzata per produrre beni e servizi, indicata con  $B(t)$  e dall'investimento diretto in Ricerca e Sviluppo (R&D), indicato con  $j(t)$ . In [14] si assume una particolare funzione Cobb-Douglas per la dinamica dello stock di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili:

$$\dot{H}(t) = \begin{cases} B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.9)$$

Il parametro  $\psi$  misura l'efficacia relativa degli investimenti diretti in R&D rispetto all'apprendimento  $B$  nel far accumulare conoscenze  $H$  sulle nuove tecnologie energetiche. Una volta che  $H(t)$  avrà raggiunto il limite massimo, ulteriori investimenti nella tecnologia sarebbero superflui e si avrà  $j(t) = 0$ .

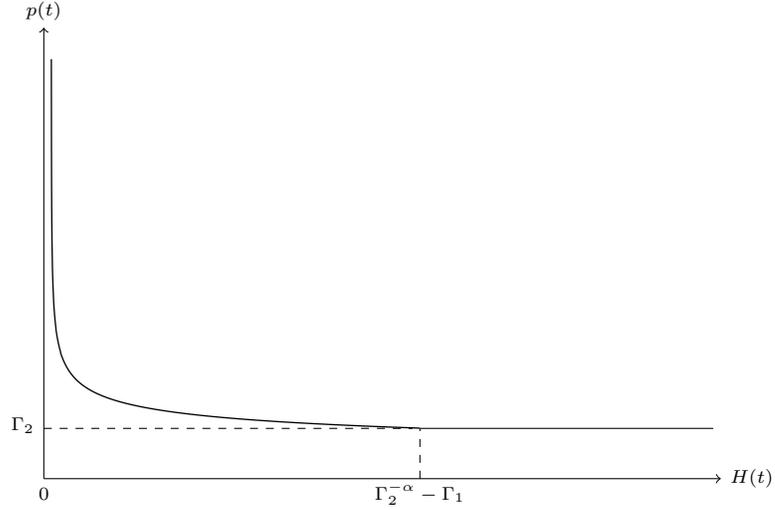


FIGURA 3: Relazione tra il costo marginale dell'energia derivante da fonti rinnovabili e lo stock di conoscenze sulla tecnologia rinnovabile

## 2.5 Vincolo di Bilancio

Occorre considerare che l'output  $y(t)$  può essere utilizzato alternativamente per investimenti nella tecnologia di estrazione  $N(t)$  o in R&D così da aumentare lo stock di conoscenze sulle energie rinnovabili  $H(t)$ , o ancora investimenti in nuovo capitale  $i(t)$ . Altresì, si può decidere di consumare l'unico bene prodotto nel sistema economico  $c(t)$ . L'output può essere utilizzato per coprire i costi di estrazione, produzione e distribuzione di energie derivante dai combustibili fossili o di produzione e distribuzione di energia rinnovabile. Deve, quindi, valere in ogni istante di tempo  $t$  la seguente relazione:

$$c(t) + i(t) + j(t) + n(t) + g(S(t), N(t))R(t) + p(t)B(t) = y(t). \quad (2.10)$$

---

## TEORIA SUL CONTROLLO OTTIMO

---

In questo capitolo presento gli strumenti matematici necessari per comprendere ed analizzare il modello presentato nel capitolo 2. Nella sezione 3.1 dopo una breve introduzione sui concetti basilari della teoria di controllo ottimo, presento la versione più semplice di un problema di controllo ottimo e nella sezione 3.2 presento le condizioni necessarie per la sua soluzione: il principio di massimo sviluppato da Lev S. Pontryagin. Tuttavia il modello da ottimizzare presenta complicazioni rispetto al problema di controllo ottimo presentato nella sezione 3.1. Mi riferisco a un fattore di sconto  $e^{-\beta t}$ , un orizzonte temporale infinito e funzioni vincolati del tipo  $h(t, x(t), u(t)) \geq 0$ . Nelle sezioni 3.3, 3.4 e 3.5 analizzo come cambiano le condizioni necessarie di Pontryagin e quali ulteriori ipotesi occorre fare per poter ottimizzare il modello. Nella sezione 3.6 presento, infine, i teoremi stabiliscono, sotto quali ipotesi, le condizioni necessarie di Pontryagin sono anche sufficienti.

### 3.1 Notazioni

Si considerino gli spazi vettoriali  $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathfrak{R}^k$ ,  $\mathcal{T} = [t_0, T] \cap \mathfrak{R}$  e sia  $0 \leq t_0 \leq T \leq +\infty$ . Nel resto della trattazione  $T$  sarà fissato, se non altrimenti stabilito.

Sia dato il sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $g : \mathcal{T} \times X \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , con  $t_0 \in \mathcal{T}$  e  $x_0 \in X$ .

La funzione  $x(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow X$ , soluzione dell'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$  con *condizione iniziale*  $x(t_0) = x_0$ , è chiamata *traiettoria*, mentre la funzione  $u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U$  è chiamata *controllo*. Ad ogni scelta del controllo  $u \in U$  corrisponde una diversa traiettoria associata a partire dallo stesso punto

iniziale  $x_0 \in X$ , è quindi possibile modificare  $u$  in modo da ottenere una traiettoria che sia preferibile ad altre per qualche motivo. Consideriamo solo i controlli a cui è associata un'unica traiettoria, diamo quindi la definizione di controlli ammissibili.

**Definizione 2.** Una funzione misurabile  $u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U$  è un *controllo ammissibile* se esiste un'unica soluzione  $x : \mathcal{T} \rightarrow X$  di:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Chiameremo tale soluzione  $x$  *traiettoria* associata ad  $u$ , mentre  $K$  sarà *l'insieme dei controlli ammissibili* associati a  $x_0$  al tempo  $t_0$ , ovvero  $K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\}$

Per assicurare che il sistema dinamico ammetta un'unica soluzione  $x$  sono necessarie adeguate ipotesi sulla dinamica  $g$ , a tal proposito, seguendo la trattazione di [12], si assuma che  $g$  sia localmente continua e Lipschitziana in  $x \in X$  uniformemente rispetto ad  $t$  e  $u$ . In particolare, si assuma che esistano due costanti  $M_1 > 0$  e  $M_2 > 0$  tali che:

$$\|g(t, x_1, u) - g(t, x_2, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_1 \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ e } \forall (t, c) \in \mathcal{T} \times U \quad (3.2)$$

e che:

$$\|g(t, x, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{\mathbb{R}^k}) \quad \forall (t, x, c) \in \mathcal{T} \times X \times U \quad (3.3)$$

Si consideri ora la funzione  $J : K \rightarrow \mathfrak{R}$  che misura la performance dei controlli, definita come:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(t, x(t), u(t)) dt + \psi(T, x(T)), \quad (3.4)$$

dove la funzione  $f : \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow \mathfrak{R}$  viene chiamata *running cost* e la funzione  $\psi : \mathcal{T} \times X \rightarrow \mathfrak{R}$  viene chiamata *terminal cost*.  $J$  è chiamato **funzionale** in quanto le variabili indipendenti di  $J$  sono a loro volta delle funzioni. Occorre notare che il funzionale  $J(t_0, x_0, u(\cdot))$  dipende solo da  $u$ , e non anche da  $x$ , in quanto sulla regione dei controlli ammissibili, la funzione  $x$  rappresenta l'unica traiettoria associata a  $u$  che soddisfa la condizione iniziale e, se presente, la condizione finale.

L'obiettivo è quello di trovare un controllo ottimo  $u^*(t)$  con  $t \in \mathcal{T}$  che massimizzi  $J(t_0, x_0, u(\cdot))$  sulla regione dei controlli ammissibili  $K$ , partendo da una condizione iniziale  $(t_0, x_0)$ . Si può, quindi, scrivere il

problema nella *forma di Bolza* come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(t, x(t), u(t)) dt + \psi(T, x(T)) \\ \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = X_0 \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

In generale, un problema di controllo ottimo in cui il  $f(t, x(t), u(t)) = 0$  e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \psi(T, x(T)) \\ \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = X_0 \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

è chiamato *Problema di Mayer*, mentre, il caso in cui  $\psi(T, x(T)) = 0$  e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(t, x, u) dt \\ \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = X_0 \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

è chiamato *Problema di Lagrange*. È ben noto (e facile da dimostrare) che queste tre formulazioni del problema di controllo ottimo sono matematicamente equivalenti. <sup>1</sup>

**Definizione 3.** Diremo che  $u^*(\cdot) \in K$  è un controllo ottimo per (3.5) se:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) \leq J(t_0, x_0, u^*(\cdot)) \quad \forall u \in K. \quad (3.8)$$

La corrispondente traiettoria  $x(\cdot; t_0, x_0; u^*(\cdot))$  associata al controllo ottimo  $u^*(\cdot)$  è una traiettoria ottimale e verrà indicata semplicemente con  $x^*(\cdot)$ .

<sup>1</sup>Si rimanda, per una dimostrazione formale a [25]

### 3.2 La Condizione Necessaria di Pontryagin

Il Principio di Massimo di Pontryagin fornisce le condizioni necessarie per l'ottimalità in problemi di ottimizzazione dinamica. Tuttavia queste condizioni non sono, in generale, sufficienti per l'ottimalità. Questo significa che se un controllo  $u$  è ottimo, allora sicuramente soddisfa le condizioni del Principio di Massimo di Pontryagin, ma non è necessariamente vero il viceversa. Naturalmente, se può essere applicato un particolare teorema in grado di garantire l'esistenza di una soluzione, confrontando tutti i possibili candidati all'ottimalità prodotti dalle condizioni necessarie, possiamo, in linea di principio, scegliere una soluzione ottimale al problema. Pensiamo, ad esempio, all'ottimizzazione statica, dove per trovare i punti stazionari ci si affida al Teorema di Fermat (per il caso non vincolato) e alla condizione di Karush-Kuhn-Tucker (per il caso vincolato). Tali condizioni sono necessarie per l'ottimalità, diventano sufficienti solo in determinate condizioni di concavità/convessità sulla funzione obiettivo e sulle funzioni vincolari. In modo analogo, nei problemi di ottimizzazione dinamica il Principio Massimo di Pontryagin rappresenta la pietra miliare nella teoria di controllo ottimo, tuttavia per stabilire se le condizioni sono anche sufficienti si utilizzerà il teorema di Mangasarian o il teorema di Arrow.

Si consideri la funzione  $(\lambda_0, \lambda) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dove  $\lambda_0$  e  $\lambda(t)$  sono chiamati moltiplicatori (o variabili di co-stato) e la funzione  $H : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  chiamata **Hamiltoniano**, definita come:

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda(t)) = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(t, x(t), u(t)). \quad (3.9)$$

**Teorema 1.** (Pontryagin). Si consideri il problema (3.5), siano  $f \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ ,  $g \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Sia  $u^*(\cdot)$  un controllo ottimo e  $x^*(\cdot)$  la traiettoria ottimale associata.

Allora esiste una coppia di moltiplicatori  $(\lambda_0^*, \lambda^*(\cdot))$  con:

- $\lambda_0^* \geq 0$  costante,
- $\lambda^*(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,

tale che:

- (*Nontriviality of the multiplier*)  $(\lambda_0^*, \lambda^*(t)) \neq (0, \mathbf{0})$ ;
- (*Pontryagin Maximum Principle, in breve PMP*)  $\forall t \in \mathcal{T}$  si ha:

$$u^*(t) \in \arg \max_{v \in K} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)), \quad \text{i.e.}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) = \arg \max_{v \in K} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)); \quad (3.10)$$

- (Adjoint Equation, in breve AE)

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\nabla_x H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \quad \text{con } t \in \mathcal{T}; \quad (3.11)$$

- (Transversality Condition)

$$\lambda^*(T) = 0. \quad (3.12)$$

**Remark (1).** In generale, è possibile avere due possibilità per  $\lambda_0$ :

- $\lambda_0 = 0$  in tal caso si ha che  $u^*$  è un controllo ottimo anormale: l'Hamiltoniano in (3.10) non dipende da  $f(t, x, u)$  e il Principio di Massimo di Pontryagin non è applicabile;
- $\lambda_0 \neq 0$  in tal caso  $u^*$  è un controllo ottimo normale e si può assumere  $\lambda_0 = 1$ .<sup>2</sup>

### 3.3 Hamiltoniano Corrente

Nel Problema di controllo ottimo relativo al modello presentato nel secondo capitolo, il funzionale da ottimizzare è della forma:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \max \int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.13)$$

dove  $e^{-\beta t}$  è un fattore di sconto. Si consideri, quindi, il problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \max \int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{x} = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = X_0 \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

L'Hamiltoniano di tale problema è  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(t, x(t), u(t))$ .

Il principio di massimo richiede di differenziare  $H$  rispetto a  $x$  e  $u$ , allora la presenza di un fattore di sconto aggiunge soltanto complessità al calcolo delle derivate. Spesso è conveniente, per tali problemi, considerare la situazione in termini di valore corrente, inteso come valore al tempo  $t$ . A tal fine si consideri

<sup>2</sup>Sia  $u^*$  un controllo ottimo normale,  $x^*$  la traiettoria ottima associata e  $(\lambda_0^*, \lambda^*)$  i moltiplicatori associati. È facile verificare che  $\bar{\lambda}_0 = 1$  e  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*}$  sono ancora moltiplicatori associati al controllo ottimo normale  $u^*$ . Allora se  $u^*$  è normale si può assumere  $\lambda_0 = 1$ .

l'Hamiltoniano corrente  $H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t))$ , definito come:

$$H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda_c(t) \cdot g(t, x(t), u(t)). \quad (3.15)$$

A tal riguardo, le condizioni necessarie di Pontryagin, se si considera l'Hamiltoniano corrente, ne risultano di conseguenza modificate. In particolare l'equazione (3.10), tenendo in considerazione che  $H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) = e^{\beta t} H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$  diventa:

$$\begin{aligned} u^*(t) &\in \arg \max_{v \in K} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)) \\ u^*(t) &\in \arg \max_{v \in K} e^{-\beta t} H_c(t, x^*(t), v, \lambda_c^*(t)) \\ u^*(t) &\in \arg \max_{v \in K} H_c(t, x^*(t), v, \lambda_c^*(t)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mentre la (3.11), tenendo conto che  $\lambda_c^*(t) = e^{\beta t} \lambda^*(t)$  diventa:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_c^*(t) &= \beta e^{\beta t} \lambda^*(t) + e^{\beta t} \dot{\lambda}^*(t) \\ &= \beta \lambda_c^*(t) - \nabla_x f(t, x^*, u^*) - e^{\beta t} \lambda^*(t) \cdot \nabla_x g(t, x^*, u^*) \\ &= \beta \lambda_c^*(t) - \nabla_x f(t, x^*, u^*) - \lambda_c^*(t) \cdot \nabla_x g(t, x^*, u^*) \\ &= \beta \lambda_c^*(t) - \nabla_x H_c(t, x^*, u^*, \lambda_c^*). \end{aligned} \quad (3.17)$$

La condizione (3.12) diventa semplicemente:

$$\lambda_c^*(T) = 0. \quad (3.18)$$

### 3.4 Orizzonte Temporale Infinito

Nel Problema di controllo ottimo relativo al modello presentato nel secondo capitolo, il funzionale da ottimizzare ha un orizzonte temporale infinito,  $T = \infty$ , è, di conseguenza, della forma:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \max \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt. \quad (3.19)$$

Si consideri il problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \max \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x} = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = X_0 \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U, u \text{ è un controllo ammissibile}\}. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

In generale, senza ulteriori assunzioni, non si è in grado di stabilire se l'integrale  $\int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt$  esista ed sia finito. Tuttavia, affinché la massimizzazione del funzionale abbia senso, occorre che tale integrale converga per ogni possibile  $(x, u)$ . Nel nostro caso  $J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt$ , dove  $\beta$  è una costante positiva, di conseguenza, se esiste una costante  $M$ , tale che  $\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \leq M$  per ogni  $(x, u)$ , allora l'integrale in (3.19) converge per ogni  $(x, u)$ . Questo è sicuramente verificato con  $\gamma > 1$ , in quanto  $\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \leq 0$  per ogni  $(x, u)$ . Con  $0 < \gamma < 1$  non è possibile assicurare che la funzione  $\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  sia limitata, ma è comunque possibile dimostrare che l'integrale  $\int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt$  esista ed sia finito.<sup>3</sup>

In tale contesto, è opportuno interrogarsi sulla validità delle condizioni necessarie fornite dal teorema di Pontryagin. Infatti, mentre le condizioni (3.10) e (3.11) sono ancora valide in un orizzonte temporale infinito, alcuni problemi incorrono per la validità della *Transversality Condition* (3.12). Senza particolari restrizioni su  $x(t)$  al tendere di  $t$  verso infinito,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) = 0,$$

semberebbe essere una naturale condizione con un orizzonte temporale infinito.

L'esempio di *Halkin* dimostra che questa conclusione non è sempre verificata. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\begin{cases} \max J(u(\cdot)) \\ J(u(\cdot)) = \int_0^{\infty} (1 - x(t))u(t) dt \\ \dot{x} = (1 - x(t))u(t) \\ x(0) = 0 \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

La soluzione dell'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = (1 - x(t))u(t)$  con condizione iniziale  $x(0) = 0$  è data da:

$$x(t) = e^{-\int_0^t u(s) ds} \left( \int_0^t u(s) e^{\int_0^s u(r) dr} ds \right) = 1 - e^{-\int_0^t u(s) ds}.$$

Utilizzando il funzionale  $J(u(\cdot)) = \int_0^{\infty} (1 - x(t))u(t) dt$  e l'equazione differenziale  $\dot{x} = (1 - x(t))u(t)$  si ottiene:

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (1 - x(t))u(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{x}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x(0))$$

Da ciò si ricava che:

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - e^{-\int_0^t u(s) ds}.$$

Un controllo  $u(t)$  è ottimo solo se il funzionale  $J(u)$  è pari ad uno. Per ottenere tale risultato occorre che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u dt = \infty$ .

Si consideri, ora, il controllo costante  $u(t) = u_0 \in (0, 1)$  è ottimo in quanto si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u_0 dt = \lim_{t \rightarrow \infty} u_0 t = \infty.$$

<sup>3</sup>Per poterlo dimostrare sono necessari altri strumenti, si rimanda quindi a [10]

L'Hamiltoniano associato è  $H = (1 - x(t))(1 + \lambda(t))u(t)$ . La condizione (2.10) del teorema di Pontryagin richiede che:

$$u_0 \in \arg \max_{v \in (0,1)} (1 - x^*(t))(1 + \lambda^*(t))v$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = (1 - x^*(t))(1 + \lambda^*(t)) = 0.$$

Dall'ultima condizione si ricava che  $\lambda^*(t) = -1$  per ogni  $t \geq 0$ , in quanto  $(1 - x^*(t)) = e^{-\int_0^t u(s) ds}$  ed è sempre diverso da 0.

Quindi la *transversality condition*  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) = 0$  non è verificata, infatti  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) = -1$  che è diverso da 0.

In generale, senza imporre particolari condizioni su  $x(t)$  non ci possiamo aspettare che la *transversality condition* (3.12) valga anche in un orizzonte temporale infinito.

Tuttavia, Philippe Michel, nel 1982 in [18], ha dimostrato che l'Hamiltoniano  $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t))$  converge a zero quando  $t$  va verso infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0 \quad (3.22)$$

### 3.4.1 Un Problema Autonomo

Si consideri la massimizzazione del seguente funzionale:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \max \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta t} f(x(t), u(t)) dt. \quad (3.23)$$

sotto l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Occorre notare che  $f$  e  $g$  sono autonome, ovvero non dipendono espressamente da  $t$ , e il funzionale ha un orizzonte temporale infinito.

Dunque, seguendo l'argomentazione di [22], è possibile scrivere:

$$\max \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta t} f(x(t), u(t)) dt =$$

$$\max e^{-\beta t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta(t-t_0)} f(x(t), u(t)) dt$$

Ponendo  $s = t - t_0$ :

$$\begin{aligned}
\max \quad & e^{-\beta t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\beta(t-t_0)} f(x(t), u(t)) dt = \\
\max \quad & e^{-\beta t_0} \int_0^{\infty} e^{-\beta s} f(x(s+t_0), u(s+t_0)) ds = \\
\max \quad & e^{-\beta t_0} \int_0^{\infty} e^{-\beta s} f(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds
\end{aligned} \tag{3.24}$$

dove  $\hat{x}(t) = x(s+t_0)$  e  $\hat{u}(t) = u(s+t_0)$  soddisfano la stessa dinamica:

$$\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t} = g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

con condizione iniziale:

$$\hat{x}(0) = x_0.$$

### 3.5 Il Caso Generale

Si considerino vincoli di uguaglianza o di disuguaglianza indicati dalla funzione  $h = (h_1, \dots, h_m) : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ .<sup>4</sup>

$$\begin{cases} h_j(t, x(t), u(t)) \geq 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m_0 \\ h_j(t, x(t), u(t)) = 0 & \text{per } m_0 + 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.25}$$

Si prenda in considerazione il problema (3.5) soggetto ai vincoli  $h_j(t, x(t), u(t))$ . Seguendo l'argomentazione di Akira Takayama [24] se non ci fossero vincoli  $h_j(t, x(t), u(t))$ , si potrebbe applicare il Teorema di Pontryagin. La condizione (3.10) del teorema di Pontryagin richiede la massimizzazione del Hamiltoniano  $H$  rispetto al controllo  $u$ , ovvero:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) = \arg \max_{v \in K} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t))$$

dove:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda_0, \lambda(t)) = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(t, x(t), u(t)).$$

Adesso se si aggiungono i vincoli (3.25) si ottiene una massimizzazione vincolata di  $H$ , ovvero:

$$\begin{aligned}
u^*(t) \quad & \in \arg \max_{v \in K} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T} \\
\text{sotto il vincolo} \quad & \begin{cases} h_j(t, x(t), u(t)) \geq 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m_0 \\ h_j(t, x(t), u(t)) = 0 & \text{per } m_0 + 1 \leq j \leq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Occorre notare che ogni funzione  $h_j(t, x, u)$  dipende espressamente da  $u(t)$ .

Risulta evidente che il problema così formulato è equivalente a trovare:

$$u^*(t) \in \arg \max_{v \in K_0} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

dove  $K_0$  è l'insieme dei controlli ammissibili  $K$  ristretto ai vincoli (2.25).

È possibile scrivere il problema di controllo ottimo nella forma generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in K} J(t_0, x_0, u(\cdot)) \\ J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(t, x(t), u(t)) dt + \psi(T, x(T)) \\ \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ h_j(t, x(t), u(t)) \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq m_0 \\ h_j(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \text{per } m_0 + 1 \leq j \leq m \\ K = \{u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{R}^k, u \text{ è un controllo ammissibile}\}. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Si consideri la funzione **Lagrangiana**  $L : \mathcal{T} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^k \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ , definita come:

$$L(t, x(t), u(t), \lambda(t), \mu(t)) = H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) + \mu(t) \cdot h(t, x(t), u(t)) \quad (3.27)$$

dove  $\mu$  sono i moltiplicatori associati ai vincoli.

**Remark (2).** Per i problemi della forma (3.20) soggetti ai vincoli (3.25) è possibile utilizzare l'Hamiltoniano corrente, di conseguenza, la Lagrangiana risulta essere:

$$L(t, x(t), u(t), \lambda_c(t), \mu(t)) = H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) + \mu(t) \cdot h(t, x(t), u(t)) \quad (3.28)$$

Così come nei problemi di massimizzazione statica con vincoli di uguaglianza o di disuguaglianza, anche nei problemi di ottimizzazione dinamica ci sono delle condizioni di qualificazione per i vincoli che devono essere soddisfatte. Seguendo l'argomentazione di Andrea Calogero [4]:

**Proposizione 1.** Una delle seguenti condizioni fornisce le qualificazioni dei vincoli di uguaglianza o di disuguaglianza in  $(u^*(t), x^*(t))$ , dove  $u^*(t)$  è il controllo ottimo e  $x^*(t)$  la traiettoria associata:

- (i) le funzioni  $h_j(t, x(t), u(t))$  sono convesse nella variabile  $u$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^n, t \in \mathcal{T}$ , con  $j = 1, \dots, m$ ;
- (ii) le funzioni  $h_j(t, x(t), u(t))$  sono lineari nella variabile  $u$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^n, t \in \mathcal{T}$ , con  $j = 1, \dots, m$ ;
- (iii) le funzioni  $h_j(t, x(t), u(t))$  sono concave nella variabile  $u$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^n, t \in \mathcal{T}$ , con  $j = 1, \dots, m$ ; in più, esiste  $u'(\cdot) \in K$  tale che  $h_j(t, x^*(t), u'(t)) > 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$ ;

(iv) **Rank Condition**  $\forall t \in \mathcal{T}$ , il rango della matrice  $m \times (m+k)$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial u}, \delta_{i,j} h_i \right)_{(x^*, u^*)}$$

dove  $\delta_{i,j}$  è chiamato "Delta di Kronocker" definito come  $\delta_{i,j} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{i,j} = 0$  se  $i \neq j$ , ovvero:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial u_k} & h_1(t,x,u) & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial u_k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_m(t,x,u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_m(t,x,u)}{\partial u_k} & 0 & \dots & h_m(t,x,u) \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)}$$

è uguale al numero  $m$  di vincoli.

Questa condizione equivale a richiedere che  $\forall t \in \mathcal{T}$  il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial u_k} \\ \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial u_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_\alpha(t,x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial h_\alpha(t,x,u)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_\alpha(t,x,u)}{\partial u_k} \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)}$$

sia uguale ad  $\alpha$ , dove  $\alpha$  è il numero di vincoli attivi in  $(x^*, u^*)$ <sup>5</sup>.

A questo punto, dato il problema di controllo ottimo vincolato (2.26), le condizioni necessarie per l'ottimalità sono date dal seguente teorema.

**Teorema 2.** Si consideri il problema (3.26), siano  $f \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ ,  $g \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ ,  $h \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$  e  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ .

Sia  $u^*(t)$  un controllo ottimo e  $x^*(t)$  la traiettoria ottimale associata.

Supponiamo che la *Rank Condition* sia verificata.

Allora esiste una terna di moltiplicatori  $(\lambda_0^*, \lambda^*(t), \mu^*(t))$  con:

- $\lambda_0^* \geq 0$  costante,
- $\lambda^*(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,
- $\mu^*(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua a tratti (ma continua nei punti di discontinuità di  $u^*(t)$ ),

tale che:

- $(\lambda_0^*, \lambda^*(t), \mu^*(t)) \neq (0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ ;

<sup>5</sup>Un vincolo  $h_j(t, x, u) \leq 0$  si dice attivo se  $h_j(t, x, u) = 0$ .

- $\mu_j^*(t)h_j(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$  per  $j = 1, \dots, m$  e  $\mu_j^*(t) \geq 0$  per  $j = 1, \dots, m_0$ .

Tali moltiplicatori soddisfano le seguenti condizioni:

- (PMP)  $\forall t \in \mathcal{T}$  si ha:

$$\begin{aligned} u^*(t) &\in \arg \max_{v \in K_0} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)), \quad \text{i.e.} \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) &= \arg \max_{v \in K_0} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

dove per  $(t, x(t)) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ ,  $K_0$  è definito da:

$$\begin{aligned} K_0 = \{v \in K : & h_j(t, x(t), v) \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq m_0, \\ & h_j(t, x(t), v) = 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq m\}; \end{aligned}$$

- (Adjoint Equation) In  $\mathcal{T}$  si ha:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\nabla_x L(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), \mu^*(t)); \quad (3.30)$$

- (Transversality Condition)

$$\lambda^*(T) = \lambda_0^* \nabla_x \psi(T, x(T)); \quad (3.31)$$

- In  $\mathcal{T}$  si ha:

$$\nabla_u L(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), \mu^*(t)) = 0. \quad (3.32)$$

**Remark (3).** Le condizioni necessarie per l'ottimalità per il problema di controllo ottimo (3.26), considerando l'hamiltoniano corrente (3.15) e un orizzonte temporale infinito ( $T = \infty$ ), sono date da:

- $\forall t \in \mathcal{T}$  si ha:

$$u^*(t) \in \arg \max_{v \in K_0} H_c(t, x^*(t), v, \lambda_c^*(t)), \quad (3.33)$$

dove per  $(t, x(t)) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ ,  $K_0$  è definito da:

$$\begin{aligned} K_0 = \{v \in K : & h_j(t, x(t), v) \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq m', \\ & h_j(t, x(t), v) = 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq m\}; \end{aligned}$$

- In  $\mathcal{T}$  si ha:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\nabla_x L(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_c^*(t), \mu^*(t)); \quad (3.34)$$

- In  $\mathcal{T}$  si ha:

$$\nabla_u L(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_c^*(t), \mu^*(t)) = 0. \quad (3.35)$$

### 3.6 Condizioni Sufficienti

È opportuno ora stabilire se, con determinate assunzioni, le condizioni necessarie presentate risultano anche sufficienti per l'ottimalità. Nel 1966 Mangasarian, in [17], provò che, partendo dal problema (2.5), le condizioni necessarie di Pontryagin unite con la concavità della funzione hamiltoniana rispetto alle variabili di stato e alle variabili di controllo, sono sufficienti per l'ottimalità.

**Teorema 3** (Mangasarian). Sia  $(x^*(t), u^*(t))$  una coppia ammissibile per il problema (3.5). Supponiamo che  $(x^*(t), u^*(t))$  soddisfi le condizioni necessarie del Teorema di Pontryagin per il problema (3.5) con variabili di costato  $\lambda(t)$ , e sia  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  il valore della funzione Hamiltoniana.

Se  $H(\cdot)$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u)$  su un insieme aperto convesso contenente tutti i possibili valori ammissibili di  $(x(\cdot), u(\cdot))$  quando la variabile di co-stato è  $\lambda(t)$ , allora  $u^*(t)$  è un controllo ottimo e  $(x^*(t), u^*(t))$  rappresentano il massimo globale di  $J[\cdot]$ .

Se  $H(\cdot)$  è una funzione strettamente concava sotto le stesse condizioni, allora  $(x^*(t), u^*(t))$  rappresentano l'unico massimo globale di  $J[\cdot]$ .

Occorre determinare quali condizioni, sotto le quali, l'Hamiltoniano  $H(\cdot)$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u)$ , il seguente teorema ci aiuta in tal senso.

**Teorema 4.** Una combinazione lineare non-negativa di funzioni concave è ancora una funzione concava. Ovvero, se  $f_i(\cdot) : X \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , sono funzioni concave su un sottoinsieme convesso  $X \subset \mathfrak{R}^n$ , allora  $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\mathbf{x})$ , dove  $\alpha_i \in \mathfrak{R}_+$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , è ancora una funzione concava su  $X \subset \mathfrak{R}^n$ .

Quindi, se  $f(t, x(t), u(t))$  e  $g(t, x(t), u(t))$  sono funzioni concave rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ , e  $\lambda(t) \geq 0 \forall t \in [t_o, T]$ , allora, dal teorema 4, l'Hamiltoniano  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ , in quanto è una combinazione lineare non-negativa di funzioni concave.

In modo analogo, se  $f(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava e  $g(t, x(t), u(t))$  è una funzione convessa rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ , e  $\lambda(t) \leq 0 \forall t \in [t_o, T]$ , allora, come conseguenza del teorema 4, l'Hamiltoniano  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u)$

$\forall t \in [t_o, T]$ . Questo perché possiamo considerare  $\delta(t) = -\lambda(t)$  e quindi l'Hamiltoniano è dato da:

$$\begin{aligned} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) = \\ &= f(t, x(t), u(t)) + \delta(t)[-1 \times g(t, x(t), u(t))] \end{aligned}$$

dove  $\delta(t) \geq 0$  e  $[-g(\cdot)]$  è una funzione concava. Allora, l'Hamiltoniano è concavo in quanto è una combinazione lineare non-negativa di funzioni concave.

Se  $g(t, x(t), u(t))$  è lineare in  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ , allora è sia concava che convessa in  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$  allora se  $f(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava anche  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$  scegliendo opportunamente il segno di  $\lambda(t)$ .

**Remark (4).** Per il problema (3.5), se  $f(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava in  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ , e una delle seguenti condizioni è verificata:

(i)  $g(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$  e  $\lambda(t) \geq 0 \forall t \in [t_o, T]$ ,

(ii)  $g(t, x(t), u(t))$  è una funzione convessa rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$  e  $\lambda(t) \leq 0 \forall t \in [t_o, T]$ ,

(iii)  $g(t, x(t), u(t))$  è una funzione lineare rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$ ,

allora  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  è una funzione concava rispetto a  $(x, u) \forall t \in [t_o, T]$  e le condizioni necessarie del Teorema di Pontryagin sono anche sufficienti.

Una parziale generalizzazione di questo risultato è stata fornita da Arrow [2] nel 1968, in cui si richiede la concavità rispetto alle variabili di stato dell'Hamiltoniano massimizzato rispetto ai controlli.

**Definizione 4.** Sia  $M : \mathcal{T} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$  l'Hamiltoniano massimizzato rispetto ai controlli, definito come:

$$M(t, x(t), \lambda(t)) \stackrel{def}{=} \max_{v \in K} H(t, x(t), v, \lambda(t))$$

dove  $H(t, x(t), v, \lambda(t))$  è l'Hamiltoniano del problema (3.5).

**Teorema 5 (Arrow).** Sia  $(x^*(t), u^*(t))$  una coppia ammissibile per il problema (3.5). Supponiamo che  $(x^*(t), u^*(t))$  soddisfa le condizioni necessarie del Teorema di Pontryagin per il problema (3.5) con variabili di costato  $\lambda(t)$ , e sia  $M(t, x(t), \lambda(t)) \stackrel{def}{=} \max_{v \in K} H(t, x(t), v, \lambda(t))$  il valore del Hamiltoniano massimizzato. Se  $M(\cdot)$  è una funzione concava rispetto a  $x$  su un insieme aperto convesso contenente tutti i possibili valori ammissibili di  $x(\cdot)$  quando la variabile di co-stato è  $\lambda(t)$ , allora la coppia  $(x^*(t), u^*(t))$  rappresenta

il massimo globale di  $J[\cdot]$ .

Se  $M(\cdot)$  è una funzione strettamente concava sotto le stesse condizioni, allora  $J[x^*(\cdot), u^*(\cdot)] > J[x(\cdot), u(\cdot)]$  e  $x^*(t)$  è unico, ma  $u^*(t)$  non è necessariamente unico.

Il teorema di Arrow sostituisce l'ipotesi di concavità del Hamiltoniano  $H(\cdot)$  in  $(x, u)$  del teorema di Mangasarian con l'ipotesi di concavità del Hamiltoniano massimizzato  $M(\cdot)$ . Il teorema di Mangasarian può essere visto come un caso particolare del teorema di Arrow, infatti se  $H(\cdot)$  è concavo in  $(x, u)$ , allora sicuramente  $M(\cdot)$  è concavo in  $x$ . Il seguente teorema lo dimostra:

**Teorema 6.** Se  $F(\cdot) : X \times U \rightarrow \Re$  è concava su un insieme convesso  $X \subset \Re^n$  e  $U \subset \Re^m$ , allora:

$$\phi(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \max_u F(x, u)$$

è una funzione concava di  $x$ .

Occorre tuttavia notare che anche se  $H(\cdot)$  non è concava in  $(x, u)$  è comunque possibile che  $M(\cdot)$  sia concava in  $x$ , perciò il teorema di Arrow è applicabile ad una classe più ampia di problemi di controllo ottimo rispetto al teorema di Mangasarian.

Per i problemi di controllo ottimo soggetti a vincoli del tipo  $h(t, x(t), u(t)) \geq 0$  il seguente teorema assicura che le condizioni necessarie, stabilite nel Teorema 2, sono anche sufficienti quando tutte le funzioni coinvolte sono concave.

**Teorema 7.** Si consideri il problema (3.26), siano  $f \in C^1(\mathcal{T} \times \Re^n \times \Re^k)$ ,  $g \in C^1(\mathcal{T} \times \Re^n \times \Re^k)$ ,  $h \in C^1(\mathcal{T} \times \Re^n \times \Re^k)$  e  $\psi \in C^1(\Re^n)$ .

Sia  $u^*(t)$  un controllo ottimo,  $x^*(t)$  la traiettoria associata e  $(\lambda_0^*, \lambda^*(t), \mu^*(t))$  i moltiplicatori associati che soddisfano le condizioni del Teorema 2. Se:

- (i) Le funzioni  $f(t, x(t), u(t))$ ,  $g(t, x(t), u(t))$ ,  $h(t, x(t), u(t))$ ,  $\psi(t, x(t))$  sono tutte concave e differenziabili in  $(x, u)$  per ogni  $t \in [t_0, T]$  fissati,
- (ii)  $\lambda_0^* = 1$  e  $\lambda^*(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [t_0, T]$  fissati,

allora la coppia  $(x^*(t), u^*(t))$  rappresenta il massimo globale del problema.

Se:

(i') Le funzioni  $f(t, x(t), u(t))$ ,  $g(t, x(t), u(t))$ ,  $h(t, x(t), u(t))$ ,  $\psi(t, x(t))$  sono tutte strettamente concave e differenziabili in  $(x, u)$  per ogni  $t \in [t_0, T]$  fissati,

(ii)  $\lambda_0^* = 1$  e  $\lambda^*(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [t_0, T]$  fissati,

allora la coppia  $(x^*(t), u^*(t))$  rappresenta l'unico massimo globale del problema.

Con l'orizzonte temporale infinito, utilizzando la *Transversality Condition* proposta da Philippe Michel, ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0 \quad (3.36)$$

non siamo in grado di stabilire se le condizioni necessarie sono anche sufficienti. Seguendo l'argomentazione di Andrea Calogero [4], il seguente teorema fornisce le condizioni che devono essere soddisfatte, in un orizzonte temporale infinito, affinché le condizioni necessarie di Pontryagin siano anche sufficienti.

**Teorema 8.** Si consideri il problema di controllo ottimo con orizzonte temporale infinito (3.20). siano  $f \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ ,  $g \in C^1(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ . Sia la regione dei controlli  $U$  convessa. Sia  $u^*(t)$  un controllo estremale normale,  $x^*(t)$  la traiettoria ottimale associata e  $\lambda^*(t)$  i moltiplicatori associati, i.e. la terna  $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$  soddisfa la condizione (3.10) *PMP* e la condizione (3.11) *Adjoint Equation* del Teorema 1 (Pontryagin). Si supponga che:

- La funzione  $(x, u) \rightarrow H(t, x, u, \lambda(t))$  sia, per ogni  $t \in \mathcal{T}$ , concava;
- Per ogni traiettoria ammissibile  $x(t)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) \cdot (x(t) - x^*(t)) \geq 0. \quad (3.37)$$

Allora  $u^*(t)$  è ottimo.

## APPLICAZIONE TEORICA AL MODELLO

Le nozioni sulla teoria di controllo ottimo apprese nel capitolo precedente, vengono qui applicate al modello. Nella sezione 4.1 di questo capitolo vengono presentati i diversi regimi energetici a cui il modello da origine. Nella sezione 4.2, dopo aver verificato le condizioni sul rango, l'applicazione del principio di massimo conduce a una serie di equazioni differenziali per ogni differente regime energetico. La sezione 4.3 è incentrata sull'economia di lungo periodo, la particolare semplicità del regime energetico dell'energia rinnovabile in cui non ci sono più investimenti in Ricerca e Sviluppo, permette una risoluzione più agevole. La sezione 4.4 è dedicata alla verifica delle condizioni che occorre soddisfare affinché le condizioni necessarie siano anche sufficienti.

### 4.1 I diversi Regimi Energetici

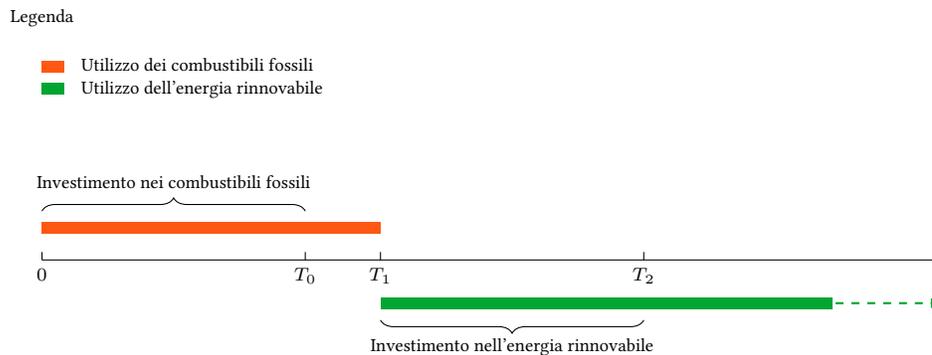


FIGURA 4: Evoluzione dei regimi energetici

Inizialmente tutti i servizi energetici sono forniti unicamente dai combustibili fossili, in quanto il marginale costo di estrazione è inferiore ai costi relativi alla produzione di energia tramite fonti rinnovabili,  $g(0, 0) < \Gamma_1^{-\alpha}$ . I combustibili fossili sono tuttavia, per loro natura, una risorsa limitata e destinata ad esaurirsi. Il costo marginale di estrazione aumenta, inevitabilmente, con la quantità di risorse estratte  $S(t)$ . Il livello massimo che può essere estratto in un dato istante è  $\bar{S} - \frac{a_2}{(a_3 + N)}$  e, naturalmente,  $g(S(t), N(t))$  aumenta più velocemente con l'avvicinarsi di tale limite. Gli investimenti in nuove tecnologie  $n(t) > 0$  moderano l'aumento del costo marginale di estrazione in quanto estendono temporaneamente tale livello. Tuttavia, gli investimenti nell'energia fossile, devono essere effettuati a un ritmo crescente per tenere sotto controllo i costi che crescono man mano che le risorse si esauriscono. Sia  $T_0$  il momento in cui cessano gli investimenti nella tecnologia di estrazione,  $n(t) = 0$ . Poco dopo, in  $T_1$  i combustibili fossili diventano non competitivi e l'economia inizierà ad essere alimentata esclusivamente dalle energie rinnovabili, per cui  $R(t) = 0$  e  $B(t) > 0$ . Dopo  $T_1$  sia l'accumulo di esperienze che l'investimento diretto in R&S,  $j(t) > 0$ , aumentano  $H(t)$ , ovvero lo stock di conoscenze sulle energie rinnovabili, e il costo marginale delle energie rinnovabili decresce nel tempo. In  $T_2$ ,  $H(t)$  avrà raggiunto il suo limite massimo, indicato con  $(\Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1)$ . Da questo momento in poi  $j(t) = 0$  e il costo marginale delle energie rinnovabili  $p(t)$  sarà costante e pari a  $\Gamma_2$ .

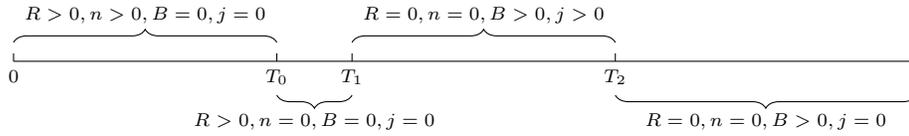


FIGURA 4.1: Evoluzione dei regimi energetici

## 4.2 Applicazione del Principio di Massimo

Analizziamo il caso in cui il limite tecnologico non è ancora stato raggiunto, quindi  $H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1$ , allora possiamo riscrivere il problema di controllo ottimo presentato nel secondo capitolo. Il funzionale da ottimizzare, dato dalla relazione:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt,$$

sarà:

$$J(c(\cdot)) = \max \int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt.$$

I vincoli differenziali della forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sono:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) & k(0) = k_0 > 0 \\ \dot{S}(t) = Q(t)R(t) & S(0) = 0 \\ \dot{N}(t) = n(t) & N(0) = 0 \\ \dot{H}(t) = B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} & H(0) = 0. \end{cases}$$

Le funzioni vincolari:

$$\begin{cases} h_j(t, x(t), u(t)) \geq 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m_0, \\ h_j(t, x(t), u(t)) = 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

sono:

$$\begin{cases} Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} B(t) = 0 \\ R(t) + B(t) - Ak(t) = 0 \\ j(t) \geq 0 \\ R(t) \geq 0 \\ n(t) \geq 0 \\ B(t) \geq 0 \end{cases}$$

Si considerino i controlli  $u(t) = \{c(t), i(t), j(t), R(t), n(t), B(t)\}$ , e le variabili di stato  $x(t) = \{k(t), H(t), S(t), N(t)\}$ , inoltre si considerino le variabili di co-stato al valore corrente  $\lambda_c(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)\}$ . L'Hamiltoniano corrente del problema, dato dalla relazione:

$$H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda_c(t) \cdot g(t, x(t), u(t)),$$

sarà:

$$H_c = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda_1(t)(i(t) - \delta k(t)) + \lambda_2(t)Q(t)R(t) + \lambda_3(t)n(t) + \lambda_4(t)B(t)^\psi j(t)^{1-\psi}. \quad (4.1)$$

Considerando i moltiplicatori associati ai vincoli  $\mu(t) = \{\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t), \mu_5(t), \mu_6(t)\}$ , la lagrangiana associata a tale problema di controllo ottimo, definita come:

$$L(t, x(t), u(t), \lambda_c(t), \mu(t)) = H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) + \mu(t) \cdot h(t, x(t), u(t)),$$

risulta essere:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda_1(t)(i(t) - \delta k(t)) + \lambda_2(t)Q(t)R(t) + \lambda_3(t)n(t) + \lambda_4(t)B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} + \\
&+ \mu_1(t)(R(t) + B(t) - Ak(t)) + \mu_2(t)[Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - \\
&- g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t)] + \mu_3(t)j(t) + \mu_4(t)n(t) + \mu_5(t) + \\
&+ R(t) + \mu_6(t)B(t) + \sigma(t)(\Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 - H(t)).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

#### 4.2.1 Verifica della Rank Condition

Tra le funzioni vincolari ci sono due vincoli di uguaglianza:

$$\begin{cases} Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \\ R(t) + B(t) - Ak(t) = 0 \end{cases}$$

inoltre tra  $t = 0$  e  $t = T_0$ , si ha  $R(t) > 0$ ,  $n(t) > 0$ ,  $B(t) = 0$ ,  $j(t) = 0$ , per cui ci sono 4 vincoli attivi. Per soddisfare la Rank Condition occorre che la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial B} \end{pmatrix}$$

abbia rango 4. È facile verificare che la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & g(S, N) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha effettivamente rango 4, per cui la Rank Condition è soddisfatta tra  $t = 0$  e  $t = T_0$ .

Tra  $t = T_0$  e  $t = T_1$  si ha  $R(t) > 0$ ,  $n(t) = 0$ ,  $B(t) = 0$ ,  $j(t) = 0$ , per cui ci sono 5 vincoli attivi. La matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & g(S, N) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 5, per cui la *Rank Condition* è soddisfatta tra  $t = T_0$  e  $t = T_1$ .

Tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$  si ha  $R(t) = 0$ ,  $n(t) = 0$ ,  $B(t) > 0$ ,  $j(t) > 0$ , per cui ci sono 4 vincoli attivi. La matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -(\Gamma_1 + H)^{-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4, per cui la *Rank Condition* è soddisfatta tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$ .

#### 4.2.2 Condizioni Necessarie per l'Ottimalità

A questo punto, applicando il **Teorema 2** e utilizzando in particolare il **Remark (3)**, le condizioni per la ricerca del massimo rispetto ai controlli sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c} = c(t)^{-\gamma} - \mu_2(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial i} = \lambda_1(t) - \mu_2(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial j} = \lambda_4(t)(1 - \psi)B(t)^\psi j(t)^{-\psi} - \mu_2(t) + \mu_3(t) = 0 \\ \mu_3(t)j(t) = 0 \\ \mu_3(t) \geq 0 \\ j(t) \geq 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n} = \lambda_3(t) - \mu_2(t) + \mu_4(t) = 0 \\ \mu_4(t)n(t) = 0 \\ \mu_4(t) \geq 0 \\ n(t) \geq 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial R} = \lambda_2(t)Q(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t)g(S(t), N(t)) + \mu_5(t) = 0 \\ \mu_5(t)R(t) = 0 \\ \mu_5(t) \geq 0 \\ R(t) \geq 0 \\ R(t) + B(t) - Ak(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial B} = \lambda_4(t)\psi B(t)^{\psi-1}j(t)^{1-\psi} + \mu_1(t) - \mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} + \mu_6(t) = 0 \\ \mu_6(t)B(t) = 0 \\ \mu_6(t) \geq 0 \\ B(t) \geq 0 \\ R(t) + B(t) - Ak(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Le equazioni differenziali rispetto alle variabili di co-stato sono:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \beta\lambda_1(t) - \frac{\partial L}{\partial k} = (\beta + \delta)\lambda_1(t) + \mu_1(t)A - \mu_2(t)A \quad (4.9)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \beta\lambda_2(t) - \frac{\partial L}{\partial S} = \beta\lambda_2(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N(t))}{\partial S}R(t) \quad (4.10)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = \beta\lambda_3(t) - \frac{\partial L}{\partial N} = \beta\lambda_3(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S(t), N)}{\partial N}R(t) \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_4(t) = \beta\lambda_4(t) - \frac{\partial L}{\partial H} = \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1}B(t) + \sigma(t) \\ \sigma(t)(\Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 - H(t)) = 0 \\ \sigma(t) \geq 0 \\ \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 - H(t) \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

### 4.2.3 L'Economia Alimentata dai Combustibili Fossili

Nel regime energetico iniziale, l'economia è alimentata esclusivamente dai combustibili fossili, si ha  $R(t) > 0$  e  $B(t) = 0$ . Ciò implica che dal sistema (4.7) si ottiene che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2(t)Q(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t)g(S(t), N(t)) = 0 \\ \mu_5(t) = 0 \\ R(t) > 0 \\ R(t) = Ak(t) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Con  $i(t) \neq 0$ , dal sistema (4.4) si ottiene  $\lambda_1 = \mu_2$ . Se  $\lambda_1(t) = \mu_2(t)$  allora  $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_2(t)$ , e dalla relazione (4.9), tenendo presente che  $\mu_1(t) = -\lambda_2(t)Q(t) + \mu_2(t)g(S(t), N(t))$  si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_2(t) &= (\beta + \delta)\mu_2(t) + \mu_1(t)A - \mu_2(t)A \\ &= (\beta + \delta + g(S(t), N(t))A - A)\mu_2(t) - \lambda_2(t)Q(t)A.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Con  $0 \leq t \leq T_0$  gli investimenti nelle tecnologie di estrazione sono positivi:  $n(t) > 0$ , allora dal sistema (4.6) si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_3 = \mu_2 \\ \mu_4(t) = 0 \\ n(t) > 0 \end{cases}\quad (4.15)$$

Se  $\lambda_3(t) = \mu_2(t)$ , allora  $\dot{\lambda}_3(t) = \dot{\mu}_2(t)$ .

Il regime energetico iniziale è quindi descritto da cinque equazioni differenziali, ovvero:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \quad (4.16)$$

$$\dot{S}(t) = Q(t)Ak(t) \quad (4.17)$$

$$\dot{N}(t) = n(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \beta\lambda_2(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N(t))}{\partial S}R(t) \quad (4.19)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta + g(S(t), N(t))A - A)\mu_2(t) - \lambda_2(t)Q(t)A \quad (4.20)$$

dove  $Q(t) = Q_0e^{\pi t}$ .

Con  $T_0 \leq t \leq T_1$  gli investimenti nelle tecnologie di estrazione sono nulli:  $n(t) = 0$ . Questo significa che non vale più la relazione  $\lambda_3(t) = \mu_2(t)$ , si hanno, dunque, equazioni differenziali separate per  $\lambda_3(t)$  e  $\mu_2(t)$ . Inoltre, in questa regione  $N(t)$  è costante e pari a  $\bar{N} = N(T_0) = \int_0^{T_0} n(t) dt$ .

Le equazioni differenziali che descrivono il regime energetico sono:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \quad (4.21)$$

$$\dot{S}(t) = Q(t)Ak(t) \quad (4.22)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \beta\lambda_2(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N(t))}{\partial S}R(t) \quad (4.23)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = \beta\lambda_3(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S(t), N)}{\partial N}R(t) \quad (4.24)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta + g(S(t), N(t))A - A)\mu_2(t) - \lambda_2(t)Q(t)A \quad (4.25)$$

dove  $Q(t) = Q_0e^{\pi t}$ .

#### 4.2.4 L'Economia Alimentata dalle Energie Rinnovabili

Con  $t > T_1$  si ha  $R(t) = 0$  e  $B(t) > 0$ . Ciò implica  $B(t) = Ak(t)$ , quindi l'economia è alimentata esclusivamente dalle energie rinnovabili. Con  $T_1 \leq t \leq T_2$  gli investimenti in ricerca e sviluppo sono positivi:  $j(t) > 0$ , allora dal sistema (4.5) si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_4(t)(1 - \psi)B(t)^\psi j(t)^{-\psi} - \mu_2(t) = 0 \\ \mu_3(t) = 0 \\ j(t) > 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

e di conseguenza è possibile scrivere la prima equazione del sistema come:

$$j(t) = \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} B(t). \quad (4.27)$$

Occorre notare che non si può avere contemporaneamente  $B(t) = 0$  e  $j(t) > 0$ , per cui gli investimenti in ricerca e sviluppo  $j(t)$  iniziano esattamente in  $t = T_1$  e non prima.

L'equazione differenziale per  $H(t)$  è data da:

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} \\ &= B(t)^\psi \left\{ \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} B(t) \right\}^{1-\psi} \\ &= \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{(1-\psi)\psi} B(t) \\ &= \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{(1-\psi)\psi} Ak(t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dal sistema (4.8) si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_4(t)\psi B(t)^{\psi-1} j(t)^{1-\psi} + \mu_1(t) - \mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} = 0 \\ \mu_6(t) = 0 \\ B(t) > 0 \\ B(t) = Ak(t) \end{cases} \quad (4.29)$$

È possibile riscrivere la prima equazione del sistema, considerando l'equazione (4.27) come:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} - \lambda_4(t)\psi B(t)^{\psi-1} j(t)^{1-\psi} \\ &= \mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} - \lambda_4(t)\psi B(t)^{\psi-1} \left\{ \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} B(t) \right\}^{1-\psi} \\ &= \mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} - \psi \left( \frac{1 - \psi}{\mu_2(t)} \right)^{\frac{1-\psi}{\psi}} \lambda_4(t)^{\frac{1}{\psi}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dal sistema (4.4) si ottiene  $\lambda_1(t) = \mu_2(t)$  e ciò implica  $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_2(t)$ , quindi l'equazione differenziale per la variabile di co-stato  $\lambda_1(t)$  (3.9), utilizzando l'equazione (4.30), si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_2(t) &= (\beta + \delta - A)\mu_2(t) + \mu_1(t)A \\
&= (\beta + \delta - A)\mu_2(t) + A\left\{\mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} - \psi\left(\frac{1-\psi}{\mu_2(t)}\right)^{\frac{1-\psi}{\psi}}\lambda_4(t)^{\frac{1}{\psi}}\right\} \\
&= (\beta + \delta - A + A\mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha})\mu_2(t) - A\psi\left(\frac{1-\psi}{\mu_2(t)}\right)^{\frac{1-\psi}{\psi}}\lambda_4(t)^{\frac{1}{\psi}}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$  il limite tecnologico non viene raggiunto, quindi  $H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1$ , allora ciò implica che dal sistema (4.12) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_4(t) = \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1}B(t) \\ \sigma(t) = 0 \\ \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 - H(t) > 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

La prima equazione del sistema si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_4(t) &= \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1}B(t) \\
&= \dot{\lambda}_4(t) = \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1}Ak(t) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Dal vincolo di bilancio si ottiene

$$\begin{aligned}
i(t) &= Ak(t) - c(t) - j(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}B(t) \\
&= Ak(t) - c(t) - j(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}Ak(t) \\
&= Ak(t) - c(t) - \left[\frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1-\psi)\right]^{\frac{1}{\psi}}Ak(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}Ak(t) \\
&= Ak(t) - \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}} - \left[\frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1-\psi)\right]^{\frac{1}{\psi}}Ak(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}Ak(t). \quad (4.34)
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale per il capitale  $k(t)$ , utilizzando l'equazione (4.34), è data da:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= i(t) - \delta k(t) \\
&= Ak(t) - \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}} - \left[\frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1-\psi)\right]^{\frac{1}{\psi}}Ak(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}Ak(t) - \delta k(t). \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Riassumendo, le equazioni differenziali per le variabili di stato  $H(t)$  e  $k(t)$  e per le variabili di co-stato  $\mu_2(t)$  e  $\lambda_4(t)$ , che descrivono l'evoluzione dell'economia tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$ , sono:

$$\dot{H}(t) = \left[\frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1-\psi)\right]^{(1-\psi)\psi} Ak(t) \quad (4.36)$$

$$\dot{k}(t) = Ak(t) - \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}} - \left[\frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1-\psi)\right]^{\frac{1}{\psi}}Ak(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}Ak(t) - \delta k(t) \quad (4.37)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta - A + A\mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha})\mu_2(t) - A\psi\left(\frac{1-\psi}{\mu_2(t)}\right)^{\frac{1-\psi}{\psi}}\lambda_4(t)^{\frac{1}{\psi}} \quad (4.38)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1}Ak(t). \quad (4.39)$$

### 4.3 L'economia di Lungo Periodo

Con  $t > T_2$ , il limite tecnologico viene raggiunto, gli investimenti in ricerca e sviluppo non sono più necessari:  $J(t) = 0$ . Il costo marginale dei servizi energetici  $p(t)$  è costante e pari a  $\Gamma_2$ .

Il funzionale da ottimizzare è:

$$J(c(\cdot)) = \max \int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt.$$

I vincoli differenziali sono:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \\ \dot{H}(t) = 0. \end{cases}$$

Le funzioni vincolari sono:

$$\begin{cases} Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0 \\ B(t) - Ak(t) = 0 \end{cases}$$

Considerando i controlli  $u(t) = \{c(t), i(t), B(t)\}$ , e l'unica variabile di stato rimanente  $x(t) = \{k(t)\}$ , allora a questo punto la lagrangiana del problema è:

$$\begin{aligned} L(x(t), u(t), \lambda_c(t), \mu(t)) &= \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda_1(t)(i(t) - \delta k(t)) + \mu_1(t)(B(t) - Ak(t)) + \\ &+ \mu_2(t)[Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2(t)B(t)] + \mu_6(t)B(t). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Prima di applicare il principio del massimo occorre verificare la condizione sul rango. Tra le funzioni vincolari ci sono due vincoli di uguaglianza, inoltre si ha  $R(t) = 0$ ,  $n(t) = 0$ ,  $j(t) = 0$ ,  $B(t) > 0$ , per cui ci sono 5 vincoli attivi. Affinché la *Rank Condition* sia soddisfatta occorre che la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_1(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_2(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_3(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_4(t,x,u)}{\partial B} \\ \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial c} & \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial i} & \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial j} & \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial R} & \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial n} & \frac{\partial h_5(t,x,u)}{\partial B} \end{pmatrix}$$

abbia rango 5. È facile verificare che la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha effettivamente rango 5, per cui la *Rank Condition* è soddisfatta con  $t > T_2$ .

A questo punto, le condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c} = c(t)^{-\gamma} - \mu_2(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial i} = \lambda_1(t) - \mu_2(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial B} = \mu_1(t) - \mu_2(t)\Gamma_2 + \mu_6(t) = 0 \\ \mu_6(t)B(t) = 0 \\ \mu_6(t) \geq 0 \\ B(t) \geq 0 \\ B(t) - Ak(t) = 0 \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

L'equazione differenziale rispetto all'unica variabile di co-stato  $\lambda_1(t)$  è:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \beta\lambda_1(t) - \frac{\partial L}{\partial k} = (\beta + \delta)\lambda_1(t) + \mu_1(t)A - \mu_2(t)A. \quad (4.44)$$

Dal sistema (4.43), considerando che  $B > 0$  si ottiene:

$$\begin{cases} \mu_1(t) = \Gamma_2\mu_2(t) \\ \mu_6(t) = 0 \\ B(t) > 0 \\ B(t) = Ak(t) \\ Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

Dal sistema (4.42) si ottiene  $\lambda_1(t) = \mu_2(t)$  e di conseguenza  $\dot{\lambda}_1 = \dot{\mu}_2$ . Sostituendo queste relazioni nell'equazione differenziale per l'unica variabile di co-stato  $\lambda_1(t)$  (4.44) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_2(t) &= (\beta + \delta - A)\mu_2(t) + \mu_1(t)A \\ &= (\beta + \delta - A)\mu_2(t) + (\mu_2(t)\Gamma_2)A \\ &= (\beta + \delta - A + \Gamma_2 A)\mu_2(t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Indicando con  $\bar{A}$  la quantità costante  $(\beta + \delta - A + \Gamma_2 A)$ , si può riscrivere l'ultima equazione come:

$$\dot{\mu}_2(t) = \bar{A}\mu_2(t). \quad (4.47)$$

Indicando con  $K_0$  il valore iniziale di  $\mu_2(t)$ , allora

$$\mu_2(t) = k_0 e^{\bar{A}t}. \quad (4.48)$$

Per ricavare l'equazione differenziale per il capitale  $k(t)$ , si utilizza il vincolo di bilancio

$Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t) = 0$ , dove però dal sistema (4.43)  $B(t) = Ak(t)$  e, dal sistema (4.41),  $c(t) = \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}}$ .

$$\begin{aligned} i(t) &= Ak(t) - c(t) - \Gamma_2 B(t) \\ &= (1 - \Gamma_2)Ak(t) - c(t) \\ &= (1 - \Gamma_2)Ak(t) - \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= (1 - \Gamma_2)Ak(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}. \end{aligned}$$

A questo punto, si può osservare che  $(1 - \Gamma_2)A = \beta + \delta - \bar{A}$ , ne deriva che:

$$i(t) = (\beta + \delta - \bar{A})k(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}. \quad (4.49)$$

Ricordando che  $\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t)$ , allora

$$\dot{K}(t) = (\beta - \bar{A})k(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}. \quad (4.50)$$

Indicando con  $c_0$  il valore iniziale di  $K(t)$  allora tale equazione differenziale ha soluzione:

$$\begin{aligned} k(t) &= c_0 e^{(\beta - \bar{A})t} - \int_0^t k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}s}{\gamma}} e^{(\beta - \bar{A})(t-s)} ds \\ &= c_0 e^{(\beta - \bar{A})t} - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{(\beta - \bar{A})t} \int_0^t e^{-\frac{\bar{A}s}{\gamma}} e^{-(\beta - \bar{A})s} ds \\ &= c_0 e^{(\beta - \bar{A})t} - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{(\beta - \bar{A})t} \int_0^t e^{[(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta]s} ds \\ &= c_0 e^{(\beta - \bar{A})t} - \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

L'Hamiltoniano  $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t))$  sarà:

$$H = \frac{c^*(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\beta t} + \lambda_1^*(t) e^{-\beta t} (i^*(t) - \delta k^*(t)) \quad (4.52)$$

con  $\lambda_1(t) = \mu_2(t)$  e  $\mu_2(t) = k_0 e^{\bar{A}t}$  si ottiene:

$$H = \frac{c^*(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\beta t} + k_0 e^{\bar{A}t} e^{-\beta t} (i^* - \delta k^*), \quad (4.53)$$

dove:

$$\begin{aligned} (i^*(t) - \delta k^*(t)) &= (\beta + \delta - \bar{A})k^*(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} - \delta k^*(t) \\ &= (\beta - \bar{A})k^*(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \\ &= (\beta - \bar{A})c_0 e^{(\beta - \bar{A})t} - \left(1 + \frac{\beta - \bar{A}}{(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta}\right) k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$H = \frac{c^*(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\beta t} + c_0 k_0 (\beta - \bar{A}) - \left[ 1 + \frac{\beta - \bar{A}}{(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta} \right] k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{[(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta]t} \quad (4.54)$$

Utilizzando, la *Transversality Condition*, proposta da Philippe Michel, ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0$$

si ottiene  $c_0 = 0$  e deve inoltre valere:

$$(\gamma - 1)\bar{A} < \beta\gamma. \quad (4.55)$$

Da ciò ne deriva che il valore di  $k(t)$  nell'economia di lungo periodo è dato dalla relazione:

$$k^*(t) = \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} \quad (4.56)$$

Riassumendo, le relazioni che descrivono l'andamento delle variabili nell'economia di lungo periodo sono:

$$B(t) = Ak(t) \quad (4.57)$$

$$\mu_2(t) = k_0 e^{\bar{A}t} \quad (4.58)$$

$$c(t) = k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \quad (4.59)$$

$$i(t) = (\beta + \delta - \bar{A})k(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \quad (4.60)$$

$$k(t) = \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} \quad (4.61)$$

#### 4.4 Da Condizioni Necessarie a Sufficienti

L'applicazione del principio di massimo conduce a condizioni necessarie ma non sufficienti per l'ottimalità. Per poter stabilire se le condizioni sono anche sufficienti ci avvaliamo del teorema 7. Occorre, quindi, controllare la concavità/convessità delle funzioni  $f(t, x(t), u(t))$ ,  $g(t, x(t), u(t))$ ,  $h(t, x(t), u(t))$ . Ricordando che:

**Teorema 9.** Sia  $f : A \subseteq \mathfrak{R}$  con  $A \in \mathfrak{R}^n$  aperto e convesso e sia  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ ; allora:

- $f$  è convessa su  $A$  se e solo se, per ogni  $x \in A$ ,  $Hf(x)$  è semidefinito positivo,
- $f$  è concava su  $A$  se e solo se, per ogni  $x \in A$ ,  $Hf(x)$  è semidefinito negativo.

dove:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Si considerino i controlli  $u(t) = \{c(t), i(t), j(t), R(t), n(t), B(t)\}$ , e le variabili di stato  $x(t) = \{k(t), H(t), S(t), N(t)\}$ .

Tra  $t = 0$  e  $t = T_0$  occorre verificare la concavità/convessità delle seguenti funzioni:

- $f(t, x(t), u(t)) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  è una funzione lineare in  $x$ , mentre la matrice Hessiano rispetto ai controlli  $u$

$$H_u f(t, x, u) = \begin{pmatrix} -\gamma c^{-(\gamma+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

è semidefinita negativa con  $\gamma > 0$ , in quanto gli autovalori di  $H_u f(t, x, u)$  sono tutti  $\leq 0$ , per cui

$f(t, x(t), u(t))$  è concava in  $u$ .

- $g_1(t, x(t), u(t)) = i(t) - \delta k(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $g_2(t, x(t), u(t)) = Q(t)R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $g_3(t, x(t), u(t)) = n(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_1(t, x(t), u(t)) = Ak(t) - c(t) - i(t) - n(t) - g(S(t), N(t))R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_2(t, x(t), u(t)) = R(t) - Ak(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_3(t, x(t), u(t)) = R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_4(t, x(t), u(t)) = n(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .

Tra  $t = T_0$  e  $t = T_1$  occorre verificare la concavità/convessità delle seguenti funzioni:

- $f(t, x(t), u(t)) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  è una funzione lineare in  $x$  e concava in  $u$ .
- $g_1(t, x(t), u(t)) = i(t) - \delta k(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .

- $g_2(t, x(t), u(t)) = Q(t)R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_1(t, x(t), u(t)) = Ak(t) - c(t) - i(t) - g(S(t), N(t))R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_2(t, x(t), u(t)) = R(t) - Ak(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_3(t, x(t), u(t)) = R(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .

Tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$  occorre verificare la concavità/convessità delle seguenti funzioni:

- $f(t, x(t), u(t)) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  è una funzione lineare in  $x$  e concava in  $u$ .
- $g_1(t, x(t), u(t)) = i(t) - \delta k(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $g_2(t, x(t), u(t)) = B(t)^\psi j(t)^{1-\psi}$  è lineare in  $(x)$ , mentre la matrice Hessiana rispetto ai controlli  $u$  sarà:

$$H_u g_4(t, x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(\psi-1)B^\psi j^{-(\psi+1)} & 0 & 0 & -\psi(\psi-1)B^{(\psi-1)}j^{-\psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi(\psi-1)B^{(\psi-1)}j^{-\psi} & 0 & 0 & \psi(\psi-1)B^{(\psi-2)}j^{(1-\psi)} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

I minori principali di ordine 1 sono  $\{0, 0, \psi(\psi-1)B^\psi j^{-(\psi+1)}, 0, 0, \psi(\psi-1)B^{(\psi-2)}j^{(1-\psi)}\}$ , mentre tutti i minori principali di ordine superiore ad 1 sono uguali a 0. Ricordando che:

**Teorema 10.** Una matrice simmetrica  $A \in M(n, n)$  è

- semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono  $\geq 0$ ;
- semidefinita negativa se e solo se tutti i suoi minori principali sono  $\leq 0$  quando di ordine dispari,  $\geq 0$  quando di ordine pari;
- indefinita altrimenti.

Quindi l'Hessiano  $H_u g_4(t, x, u)$  è semidefinito negativo, considerando che  $0 \leq \psi \leq 1$ .

- $h_1(t, x, u) = Ak - c - i - j - (\Gamma_1 + H)^{-\alpha} B$  è lineare in  $(u)$ . Mentre la matrice Hessiana rispetto alle variabili di stato:

$$H_x h_1(t, x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(\alpha+1)B(\Gamma_1 + H)^{-(\alpha+2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

tenendo conto che  $0 < \alpha < 1$ , è semidefinita negativa, in quanto tutti gli autovalori di  $H_x h_1(t, x, u)$  sono  $\leq 0$ . Quindi  $h_1$  è concava rispetto a  $x$ .

- $h_2(t, x(t), u(t)) = B(t) - Ak(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_3(t, x(t), u(t)) = j(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_4(t, x(t), u(t)) = B(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .

Con  $t > T_2$  occorre verificare la concavità/convessità delle seguenti funzioni:

- $f(t, x(t), u(t)) = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  è una funzione lineare in  $x$  e concava in  $u$ .
- $g_1(t, x(t), u(t)) = i(t) - \delta k(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_1(t, x(t), u(t)) = Ak(t) - c(t) - i(t) - \Gamma_2 B(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_2(t, x(t), u(t)) = B(t) - Ak(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .
- $h_3(t, x(t), u(t)) = B(t)$  è lineare in  $(x, u)$ .

In base a quanto stabilito nel teorema 8, in un orizzonte temporale infinito, affinché le condizioni necessarie siano anche sufficienti, deve valere, per ogni traiettoria ammissibile  $x(t)$ , la seguente relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) \cdot (x(t) - x^*(t)) \geq 0.$$

Al fine di dimostrare la sussistenza di tale relazione, ricordiamo che  $k(t) \geq 0$  per ogni  $t \in \mathcal{T}$  e

$$k^*(t) = \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}}. \quad (4.66)$$

Quindi per ogni traiettoria ammissibile vale:

$$-\frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} \leq k(t) - \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} = k(t) - k^*(t). \quad (4.67)$$

Sappiamo inoltre che  $\lambda^*(t) = \lambda_1(t)e^{-\beta t} = k_0 e^{\bar{A}t} e^{-\beta t}$ , per cui:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) \cdot (x(t) - x^*(t)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} -\lambda^*(t) \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} = \quad (4.68)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_0^{(1-\frac{1}{\gamma})} e^{[(1-\frac{1}{\gamma})\bar{A}-\beta]t}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} \quad (4.69)$$

Considerando che in quanto, dalla relazione (4.55)  $(1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A} - \beta \leq 0$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_0^{(1-\frac{1}{\gamma})} e^{[(1-\frac{1}{\gamma})\bar{A}-\beta]t}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} = 0, \quad (4.70)$$

e quindi è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) \cdot (x(t) - x^*(t)) \geq 0 \quad (4.71)$$

Per le funzioni concave deve valere, in base a quanto stabilito nel teorema 7,  $\lambda^*(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [t_0, T]$ . A questo punto possiamo concludere che se  $\mu_2(t)$  e  $\lambda_4(t)$  sono  $\geq 0$  per ogni  $t \in [T_1, T_2]$ , allora le condizioni necessarie sono anche sufficienti.

---

### CLIMA E CRESCITA ECONOMICA

---

In questo capitolo, vedremo nella sezione 5.1 qual è una breve presentazione sul prezzo ambientale che stiamo pagando per avere una crescita economica sostenuta. Nella sezione 5.2 verrà calibrato il modello presentato nel capitolo 2, così da analizzare le implicazioni economiche che esso comporta nella sezione 5.3. Così da scoprire che l'utilizzo di risorse rinnovabili non compromette la crescita economica.

#### 5.1 Cambiamento Climatico

Le emissioni di gas serra<sup>1</sup> sono aumentate notevolmente dall'era preindustriale, trainate in gran parte dalla crescita economica e della crescita della popolazione. Ciò ha condotto a concentrazioni atmosferiche di anidride carbonica, metano e protossido di azoto a livelli senza precedenti. Nella figura 5 sono rappresentati i cambiamenti relativi alla concentrazione media di Gas Serra nell'atmosfera, osservati dal 1750 al 2015. In verde l'anidride carbonica, in rosso il protossido di azoto e in giallo il metano. È possibile notare come le concentrazioni di anidride carbonica ( $CO_2$ ), metano ( $CH_4$ ) e protossido di azoto ( $N_2O$ ) hanno mostrato aumenti del 40%, 150% e 20%, rispettivamente.

L'effetto serra è un particolare meccanismo di regolazione della temperatura del Pianeta, che consiste nell'accumulo all'interno della stessa atmosfera di una parte dell'energia termica dal Sole. I gas Serra permettono, infatti, l'entrata della radiazione solare, mentre ne ostacolano l'uscita. Una diretta conseguenza dell'aumento dei Gas Serra è quindi un incremento della temperatura media globale, in quanto l'atmosfera trattiene un numero maggiore di radiazioni. La figura 6 mostra il preoccupante incremento della temperatura media globale dal 1850 al 2015, i diversi colori rappresentano diversi data sets.

---

<sup>1</sup>I gas serra individuati dal Protocollo di Kyoto sono i seguenti:  $CO_2$  (anidride carbonica),  $CH_4$  (metano),  $N_2O$  (protossido di azoto),  $HFC$  (idrofluorocarburi)  $PFC$  (perfluorocarburi),  $SF_6$  (esafluoruro di zolfo)

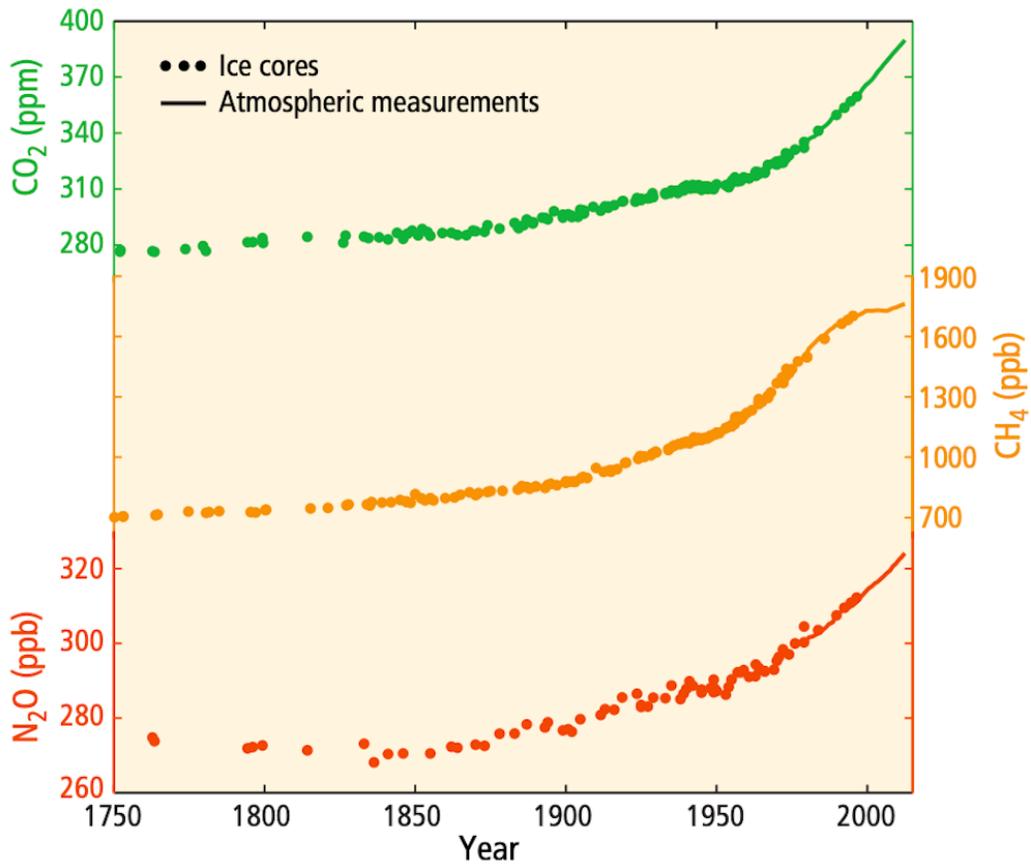


FIGURA 5: Concentrazione media globale di Gas Serra nell'atmosfera

FONTE: IPCC AR5 Synthesis Report

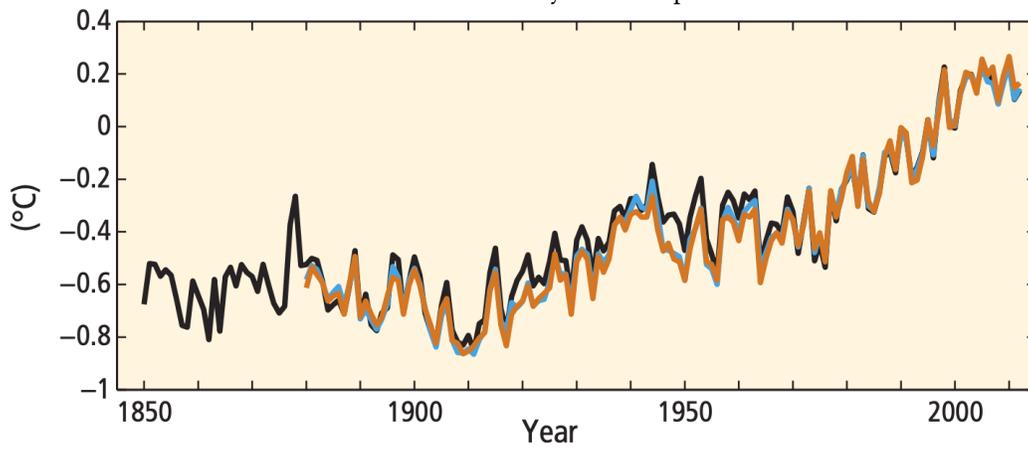


FIGURA 6: Temperatura media globale

FONTE: IPCC AR5 Synthesis Report

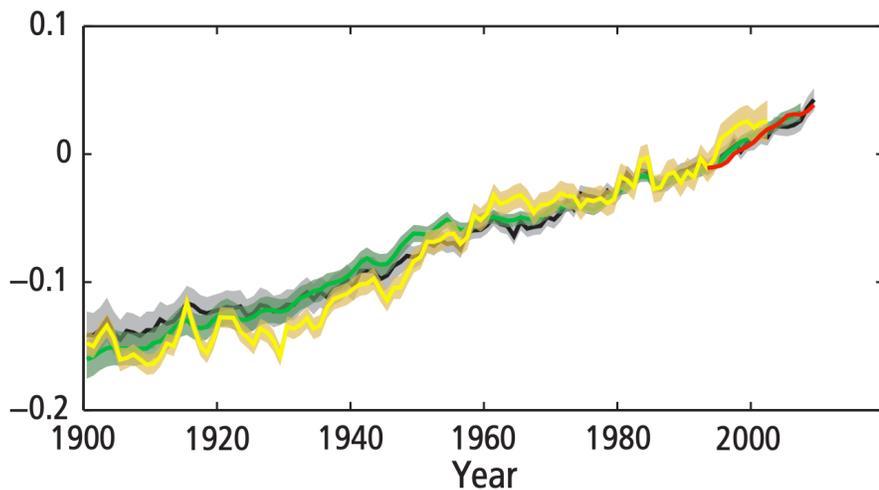


FIGURA 7: Variazioni del livello del mare registrate tra il 1880 ed il 2015

FONTE: IPCC AR5 Synthesis Report

Un'altra conseguenza delle emissioni di  $CO_2$  è il riscaldamento degli oceani. Tuttavia, avviene ad un ritmo inferiore rispetto a quello dell'atmosfera a causa della maggiore capacità termica. Negli 50 anni le calotte glaciali di Groenlandia e dell'Artico sono diminuite complessivamente di circa il 4% annuo, provocando distaccamenti di enormi parti di ghiaccio. La figura 7 rappresenta la variazione in metri (m) del livello del mare registrate tra il 1880 ed il 2015.

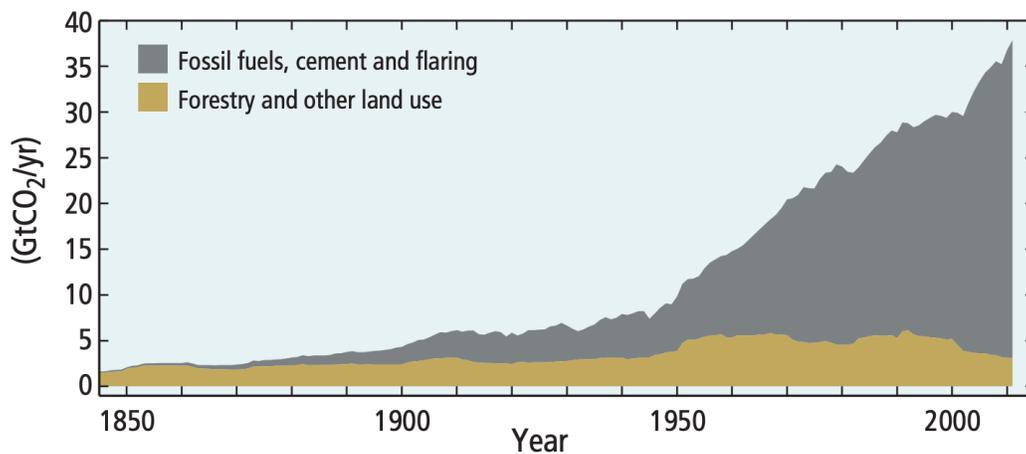


FIGURA 8: Emissioni annuali di  $CO_2$  tra il 1850 e il 2010

FONTE: IPCC AR5 Synthesis Report

I principali *drivers* del cambiamento climatico sono quindi individuabili nella crescita della popolazione e nella crescita economica. Si può attribuire, con ragionevole certezza, alle attività umane, e in particolare al

massiccio utilizzo di combustibili fossili, la responsabilità di emissioni anomale di gas serra nell'atmosfera.

La figura 8 mostra le emissioni annuali di  $CO_2$  a causa dell'attività umana dal 1850 al 2010: in giallo le emissioni derivanti da silvicoltura e da altri usi del suolo, in grigio le emissioni derivanti dai combustibili fossili, produzione di cemento e combustioni.

L'emissione continuativa di gas a effetto serra causerà un sempre maggiore riscaldamento terrestre e cambiamenti duraturi nel sistema climatico, aumentando la probabilità di conseguenze gravi, pervasive e irreversibili per persone ed ecosistemi. Limitare gli impatti del cambiamento climatico richiede riduzioni sostanziali delle emissioni di gas a effetto serra.<sup>[32]</sup>

I costi ambientali derivanti dall'utilizzo di combustibili fossili sottolineano l'urgenza di un cambiamento nel sistema energetico: da un sistema basato sull'utilizzo di combustibili fossili ad un sistema basato sull'utilizzo di energia rinnovabile. Dopo aver calibrato il modello, analizziamo quindi le implicazioni economiche che derivano da una transizione energetica.

## 5.2 Calibrazione del Modello

Il modello, analizzato analiticamente nel capitolo 4, viene calibrato utilizzando i dati dell'*Energy Information Administration* (EIA), il *Survey of Energy Resources* e il *GTAP 7 Bata Base* prodotto dal *Center for Global Trade Analysis* nel Dipartimento di Economia Agraria, Purdue University<sup>2</sup>. Dopo aver calcolato il percorso ottimale di investimento sia nel settore dei combustibili fossili che in quello delle energie rinnovabili, Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T.e Zhang X., in [14], si focalizzano sulle conseguenze dei costi energetici per la crescita macroeconomica, anche nel periodo di transizione dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabile.

Si considera l'attuale livello di popolazione come unitario,  $Q_0 = 1$ , e la popolazione futura come multiplo del livello corrente. Si supponga che il tasso di crescita della popolazione mondiale sia dell'1%.<sup>3</sup> Il fattore di sconto  $\beta$  decide quanto vale oggi un beneficio futuro: più è alto il tasso di sconto, meno valore ha il beneficio di oggi. Stabilire un certo tasso di sconto significa assegnare un certo grado di importanza al benessere delle generazioni future. In linea con le assunzioni generalmente fatte per calibrare modelli di crescita economica, si assume che il fattore di sconto  $\beta = 0.05$ . Il parametro  $\gamma$  misura la concavità della funzione di utilità. In [14] si assume che un coefficiente  $\gamma$  pari a 4.

Nel database GTAP, le esportazioni mondiali aggregate equivalgono alle importazioni mondiali aggregate, quindi il PIL mondiale è uguale al consumo più investimenti e le spese pubbliche. La spesa pubblica è una variabile che non compare nel modello, quindi è stata sottratta dal valore dell'output prima di calibrare le altre variabili. Ponendo  $y(0) = 1$ , la quota di investimenti del settore privato è 0.2273. Sia quindi

<sup>2</sup>Per maggiori informazioni si veda:[28], [30], [31].

<sup>3</sup>Ciò è coerente con una semplice estrapolazione dei recenti tassi di crescita mondiale riportati da "Food And Agriculture Organization of the United Nations".[27].

$i(0) + n(0) = 0.2273$ . Convertendo le stime dello stock di capitale in unità di PIL, si ottiene  $k(0) = 3.6071$  e da ciò ne deriva che il rapporto tra output  $y(0)$  e capitale  $k(0)$ , ovvero  $A$  è uguale a 0.2772. Si utilizza inoltre un tasso di deprezzamento del capitale del 4%. Dal vincolo di bilancio ne consegue che  $c(0) + g(0,0)R(0)$  è pari a 0.7727. Il costo di fornitura di energia  $g(0,0)R(0)$  legato all'estrazione, raffinamento e distribuzione di carbone, petrolio e gas naturale, utilizzando i dati settoriali dal database GTAP, è posto pari a 0.1107. Da ciò ne deriva quindi  $c(0) = 0.6620$ . Dalla condizione di primo ordine  $c(t)^{-\lambda} - \mu_2(t) = 0$  si ricava  $\mu_2(0) = c(0)^{-\lambda}$ .

Da sito web di EIA, si ottengono dati, risalenti al 2004, per la produzione mondiale di combustibili fossili. La produzione mondiale di petrolio è stata di  $175.948 * 10^{15}$  BTU, di gas naturale  $100.141 * 10^{15}$  BTU e di carbone  $116.6 * 10^{15}$  BTU. La produzione mondiale di combustibili fossili è stata quindi di  $392.689 * 10^{15}$  BTU. Si pone  $R(0) = 1$  e in base a ciò viene stabilito il valore delle altre variabili energetiche.

$$\frac{0.1107}{R(0)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\bar{S} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \quad (5.1)$$

Per ottenere una stima delle risorse totali di combustibili fossili  $\bar{S}$  si utilizzano le stime effettuate dal *World Energy Council* sui milioni di tonnellate di carbone, milioni di barili di petrolio, e trilioni di metri cubi di gas naturale. Questi dati sono stati, successivamente, convertiti in BTU utilizzando i fattori di conversione disponibili presso l'EIA. Il risultato è  $115.2 * 10^{30}$  BTU. A questo viene aggiunto la stima del volume di idrati di metano che rappresentano una risorsa di energia passibile di sfruttamento. Il *National Energy Technology Laboratory (NETL)* ha stimato risorse potenziali di circa  $719.6 * 10^{30}$  BTU. Aggiungendo questa stima al totale di petrolio, gas naturale e risorse di carbone si ottiene un valore per  $\bar{S} = 834.8 * 10^{30}$  BTU. Con  $R(0) = 1$ ,  $\bar{S} = 2126.0527$ .

Occorre specificare i valori per i parametri  $\alpha_i$  nella funzione  $g(S(t), N(t))$ . Notando che  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$  è il limite di risorse estraibili in  $t = 0$  e con  $N(0) = 0$ , allora  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$  può essere associato con le attuali riserve di combustibile fossile disponibili per la produzione di energia senza ulteriori investimenti, indicati con  $n$  nel modello. Utilizzando i dati sulle riserve di combustibili fossili degli Stati Uniti come guida, si ottiene il 6% annuo per il tasso di declino per i giacimenti petroliferi, l'8% annuo per il tasso di declino del gas naturale e il 6% annuo per il tasso di declino delle miniere di carbone. In base a queste cifre, viene ipotizzato che il tasso di declino annuo dei combustibili fossili sia uguale alla media ponderata di queste cifre, ovvero

$$\frac{175.948 * 0.06 + 100.141 * 0.08 + 116.6 * 0.06}{392.689} = 0.0651$$

Il valore iniziale di  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$  sarà  $\frac{1}{0.0651}$  ovvero 15.361, di conseguenza:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 2110.538 \quad (5.2)$$

Utilizzando i dati GTAP sulle quote di capitale per settore, si stima che circa il 3,66% degli investimenti annuali avviene nei settori della distribuzione di petrolio, gas naturale, carbone ed elettricità. Poiché  $i(0) +$

$n(0) = 0.2273$ , si ha che  $n(0) = 0.0083$ . Si utilizza tale dato come valore target aggiuntivo. Pertanto, in  $t = 0$  si ha

$$\alpha_1 = \frac{g_S(S(t), N(t))}{0.0651} \quad (5.3)$$

$$\alpha_0 = g(S(t), N(t)) - 0.0651 * \alpha_1 \quad (5.4)$$

Otteniamo così quattro equazioni nelle quattro incognite  $\alpha_i$ .

Per quanto riguarda la curva di apprendimento  $p(t) = (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha}$  la letteratura fornisce diverse stime per  $\alpha$ . Il concetto di curve di apprendimento si basa sull'osservazione empirica che i costi di una tecnologia diminuiscono in misura costante ad ogni raddoppio della produzione cumulativa. Il concetto non derivava da principi fondamentali, ma descrive un fenomeno identificato per la prima volta nella costruzione di aeroplani da Wright (1936).<sup>[6]</sup> Una percentuale di apprendimento  $x$  corrisponde a un valore di  $\alpha$  pari a  $\alpha = -\ln(1-x)/\ln(2)$ . Questa relazione implica che un raddoppio della misura dell'esperienza  $\alpha$  comporta una riduzione dei costi di  $x\%$ . In uno studio sulle turbine eoliche [6], Coulomb e Neuhoff (2006) hanno trovato valori di  $\alpha$  tra 0.158 e 0.197. Grubler e Messner, in [13] hanno stimato un valore per  $\alpha = 0.36$  usando i dati sui pannelli solari. Bentham et. al. (2008) riportano diversi studi che hanno trovato una percentuale di apprendimento di circa il 20%,  $\alpha = 0.322$  per i pannelli solari. Concludendo, il valore di  $\alpha$  potrebbe variare da un minimo di 0.15 a un massimo di 0.36, quindi gli autori del paper [14] hanno scelto un valore medio di  $\alpha = 0.25$ .

L'altro parametro che influenza l'incentivo a investire in fonti di energia rinnovabili è il valore iniziale di  $\Gamma_1^{-\alpha}$ , ovvero il costo dell'utilizzo di energia rinnovabile come fonte di energia primaria. Secondo un documento dell'EIA, il costo dell'eolico onshore è circa il doppio del costo delle turbine a gas a ciclo combinato (CCGT), mentre l'eolico offshore è circa quattro volte più costoso, il solare termico più di cinque volte più costoso e il fotovoltaico solare più di sei volte più costoso. Tuttavia, questi costi non tengono conto dei costi operativi e di gestione. Come approssimazione di tali dati, si suppone che  $\Gamma_1^{-\alpha}$  sia circa 4 volte il valore iniziale di  $g(0,0)$ . Si assume inoltre che le tecnologie rinnovabili possono alla fine subire una riduzione dei costi di cinque volte, quindi  $\Gamma_2 = \Gamma_1/5$ . Ciò comporta un costo energetico inferiore all'attuale costo delle tecnologie per i combustibili fossili.

Occorre, infine, specificare un valore per  $\psi$ , l'efficacia relativa degli investimenti diretti in R&D rispetto all'apprendimento  $B(t)$  nel far accumulare conoscenze  $H(t)$  sulle nuove tecnologie energetiche. Klaassen et. al. (2005) in [15] hanno stimato che l'investimento diretto in R&S è circa il doppio più produttivo rispetto all'apprendimento  $B(t)$ , conseguentemente si assume che  $\psi = 0.33$ .

La seguente tabella riassume i valori scelti per i parametri e il valore iniziale per le variabili endogene.

**TABELLA 1: Parametri calibrati e valore iniziale delle variabili**

<b>Parametri e variabili</b>	<b>Breve descrizione</b>	<b>Valore</b>
$Q(0)$	Popolazione iniziale	1.0
$\pi$	Tasso di crescita della popolazione*	0.01
$\beta$	Fattore di sconto	0.05
$\gamma$	Coefficiente di avversione al rischio	4.0
$y(0)$	Output pro-capite iniziale*	1.0
$k(0)$	Stock di capitale pro-capite iniziale**	3.6071
$\delta$	Tasso di deprezzamento del capitale	0.04
$A$	Livello della tecnologia in $t = 0$	0.2772
$i(0)$	Investimento iniziale pro-capite in capitale $k^{**}$	0.219
$n(0)$	Investimento iniziale pro-capite nella tecnologia rinnovabile $N^{**}$	0.0083
$c(0)$	Consumo pro-capite iniziale**	0.662
$g(0, 0)$	Costo marginale iniziale pro-capite dei combustibili fossili	0.1107
$R(0)$	Produzione mondiale di combustibili fossili in $t = 0^*$	1.0
$\bar{S}$	Valore massimo di risorse estraibili* * *	2126.0527
$\bar{S} - \alpha_2/\alpha_3$	Riserve iniziali di combustibili fossili disponibili* * *	15.361
$\alpha$	Produttività della conoscenza sui costi marginali delle energie rinnovabili	0.25
$\psi$	Effetto dell'apprendimento sulla conoscenza delle energie rinnovabili	0.33
$p(0) = \Gamma_1$	Costo marginale iniziale pro-capite delle energie rinnovabili	0.4428
$\Gamma_2$	Costo marginale finale pro-capite delle energie rinnovabili	0.08856

\* Posto uguale ad 1.0 e utilizzato come unità di misura per altre variabili.

\*\* Misurato in unità di  $y(0)$ .

\* \* \* Misurato in unità di  $R(0)$ .

### 5.3 Implicazioni Economiche

La transizione energetica dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabile avviene dopo  $T_1 = 88.41$  anni. Nel regime fossile la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 4.22% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3,68% annuo. Nel regime rinnovabile con investimenti in ricerca e sviluppo, la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 3.11% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3.33%. Nell'economia di lungo periodo, il capitale pro capite, i consumi, gli investimenti in capitale e il consumo di energia crescono tutti allo stesso tasso del 4.07% annuo.

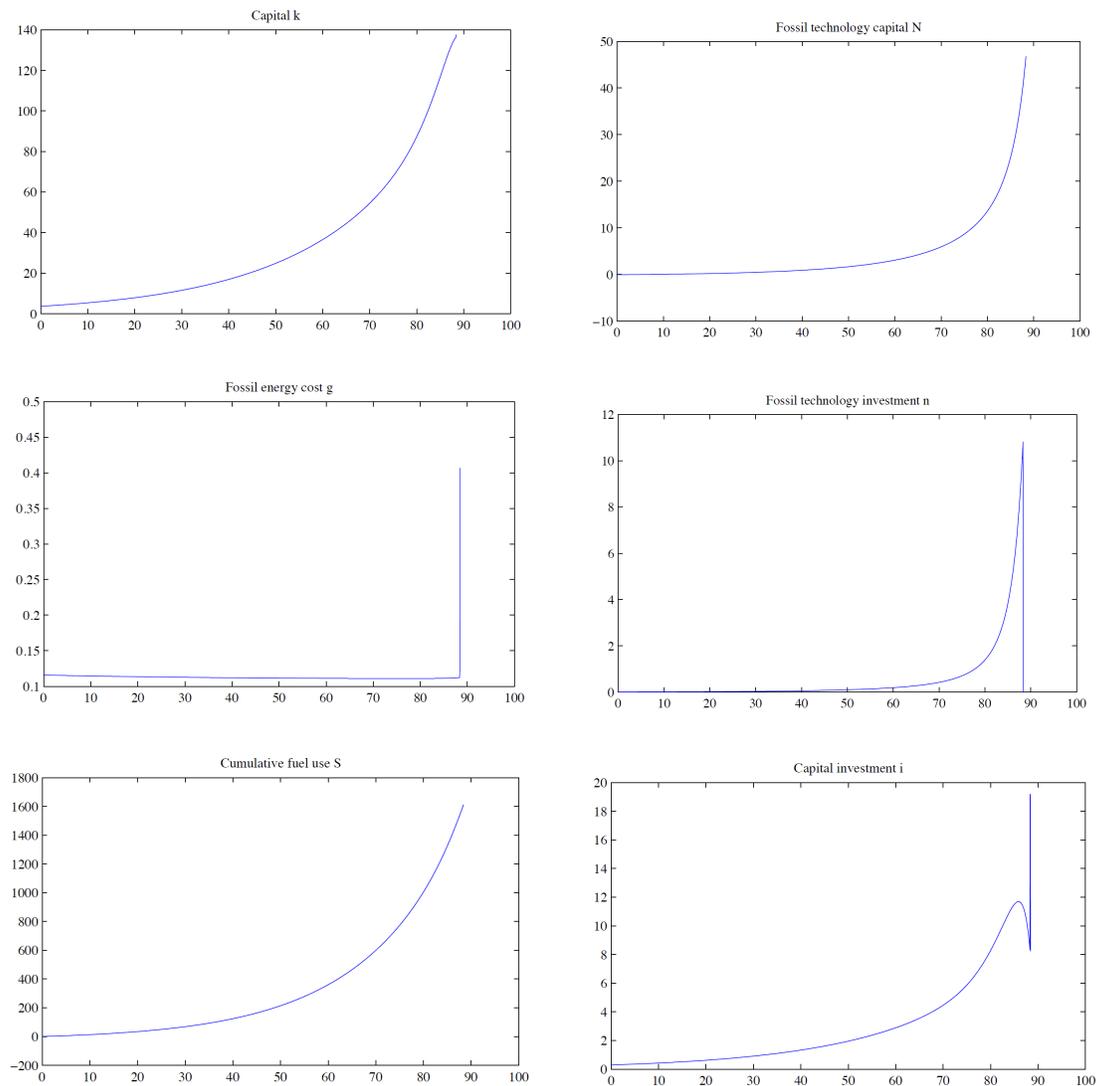


FIGURA 9: Regime dei combustibili fossili

La figura 9 mostra l'andamento delle principali variabili nel regime dei combustibili fossili. Prima di precipitare a zero  $n(t)$  aumenta drasticamente poiché sono necessarie quantità crescenti di investimenti per compensare gli effetti dell'esaurimento delle risorse fossili e mantenere i costi di estrazione  $g(S(t), N(t))$  pressoché costanti. L'incremento di  $n(t)$  conduce ad alcune conseguenze per la crescita economica. Dal vincolo di bilancio, infatti, si osserva che  $i(t)$  risulta limitato dagli ingenti investimenti nelle tecnologie fossili e ciò rallenta l'accumulo di capitale  $k(t)$ . Il periodo durante il quale  $n(t) = 0$  è molto breve, dura soltanto 0,0982 anni ( $T_0 = 88.31$ ). Una volta che gli investimenti nelle tecnologie di estrazione cessano, i costi di estrazione aumentano notevolmente e subito dopo segue la transizione alle energie rinnovabili.

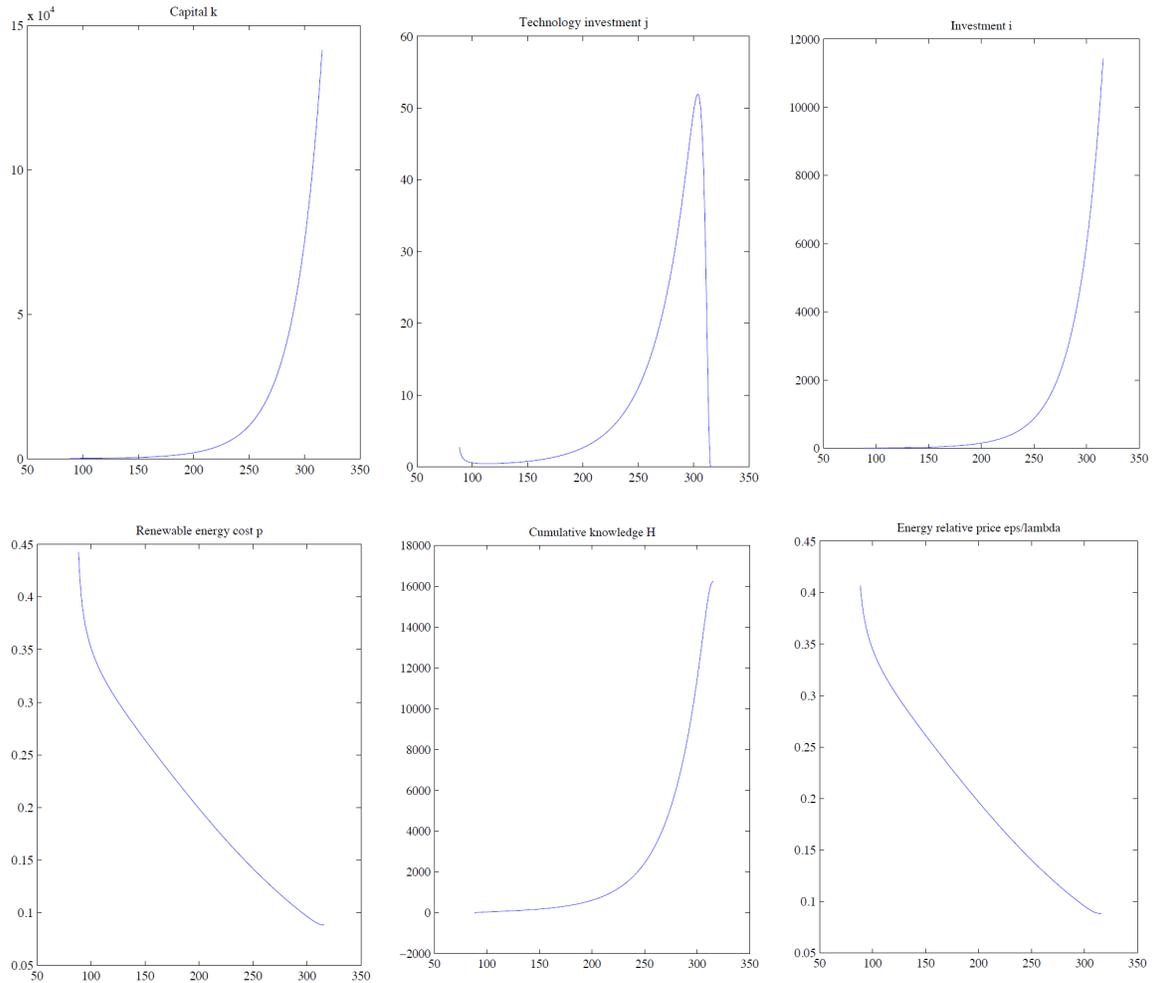


FIGURA 10: Regime delle energie rinnovabili

Il comportamento delle principali variabili nel regime delle energie rinnovabili con investimenti in R&D è raffigurato nella figura 10. L'energia rinnovabile viene utilizzata per altri 227.39 anni ( $T_2 = 315.8$ ) prima che  $H(t)$  raggiunge il suo limite massimo  $\Gamma_2^{-\alpha} - \Gamma_1$ . Una volta che il limite tecnologico viene raggiunto, gli investimenti in Ricerca e Sviluppo  $j(t)$  non sono più necessari e scendono a zero. La crescita economica

e il consumo pro-capite non sono limitati dal forte peso degli investimenti. Il prezzo dell'energia  $p(t)$ , inizialmente molto elevato, si riduce con il tempo di circa l'80% attraverso l'accumulo di conoscenze e tramite gli investimenti  $j(t)$ .

Dopo uno sguardo generale, ci soffermiamo ora ad analizzare alcuni dettagli dei due regimi energetici. La figura 11 rappresenta il costo di estrazione  $g(S(t), N(t))$  in funzione dello sfruttamento di risorse  $S(t)$  per diversi anni. Il costo di estrazione rimane abbastanza costante durante il regime dei combustibili fossili: ciò è dovuto all'investimento  $n(t)$  nell'estrazione di combustibili fossili e nell'efficienza energetica che consente alla funzione  $g(S(t), N(t))$  di restare costante anche se  $S(t)$  aumenta. Il progresso tecnologico nella produzione e nell'uso dei combustibili fossili consente loro di rimanere competitivi per un periodo di tempo più lungo. In ultima analisi, il modello prevede che saranno sfruttate circa l'80% delle risorse di combustibile fossile tecnicamente recuperabili.

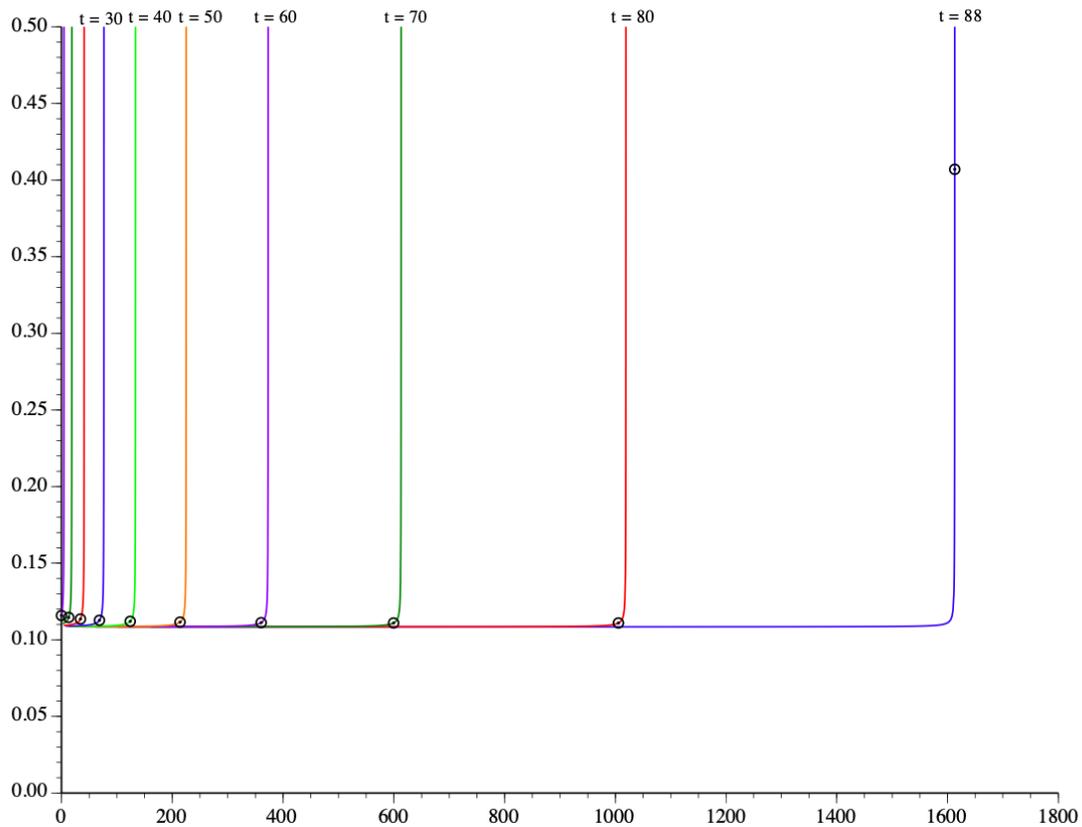


FIGURA 11:  $g(S(t), N(t))$  in funzione di  $S(t)$  per differenti

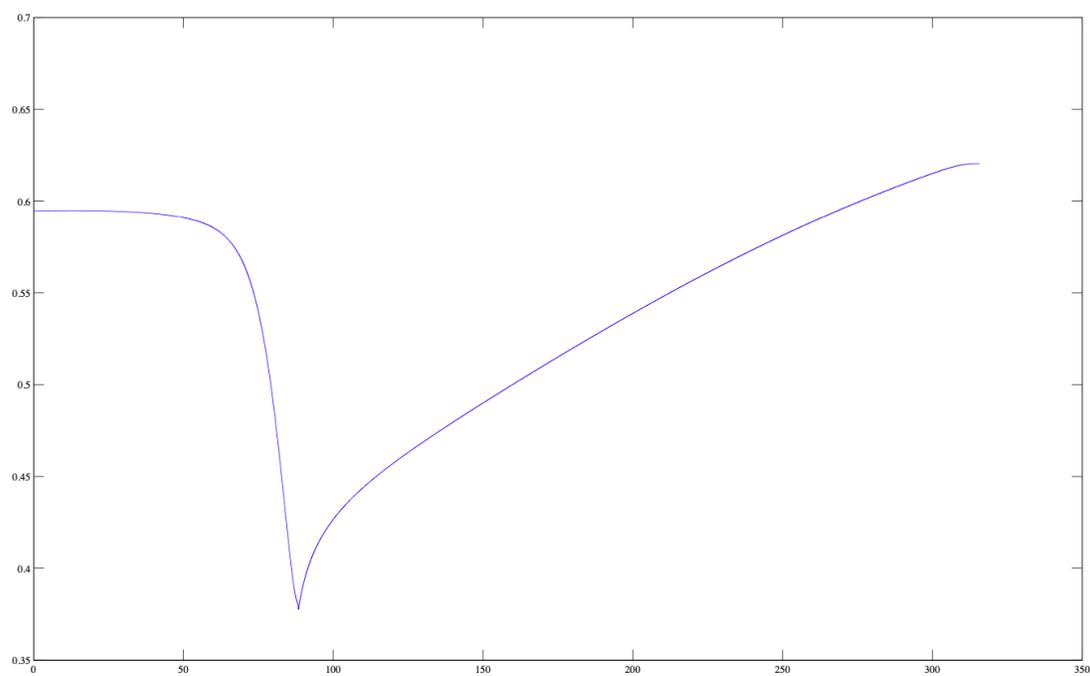


FIGURA 12: Quota di consumo pro-capite  $c(t)$

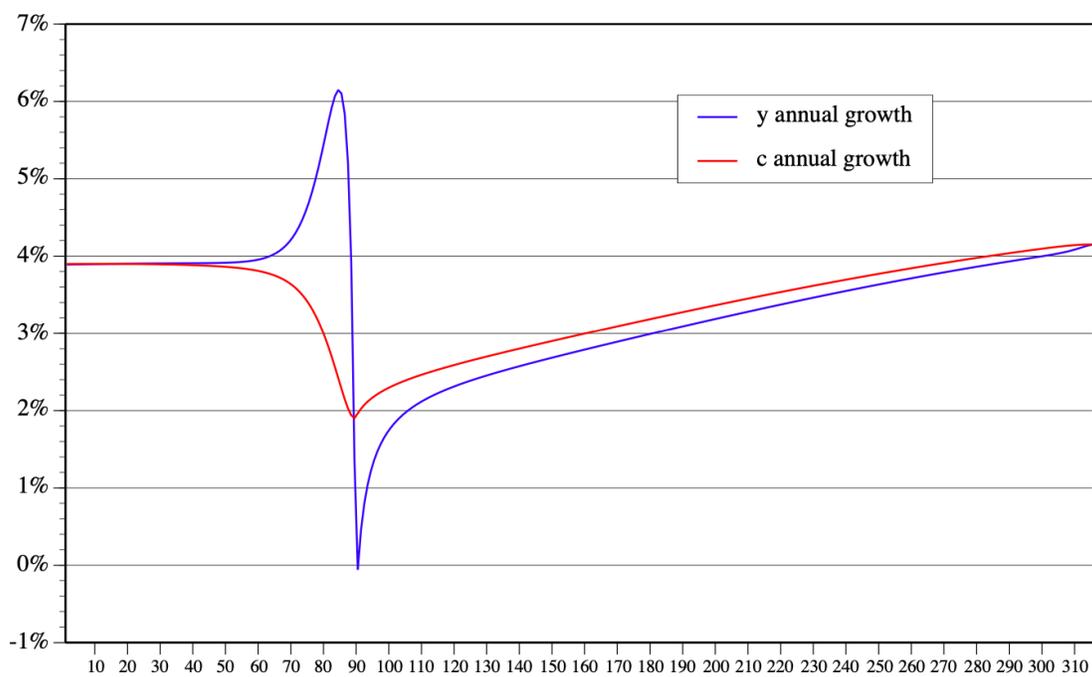


FIGURA 13: Tassi di crescita annuale della produzione pro-capite e del consumo pro-capite

Verso la fine del regime dei combustibili fossili, i costi associati all'utilizzo delle risorse fossili e gli investimenti nelle tecnologie di estrazione sono notevoli, e ciò si ripercuote negativamente sul consumo. La Figura 12 mostra come la quota di consumo diminuisce sostanzialmente intorno al periodo di transizione energetica dalle risorse fossili verso le energie rinnovabili.

La Figura 13 mostra i tassi di crescita annui della produzione  $y(t)$  e del consumo pro-capite  $c(t)$ . La crescita dei consumi è leggermente più agevole della crescita della produzione e ciò è dovuto alla particolare forma concava della funzione di utilità. Il consumo pro-capite cresce in media del 3.68% annuo nel regime di energia fossile, che è inferiore alla crescita media della produzione del 4.22% annuo.

Al contrario, nel regime rinnovabile con investimenti in Ricerca e Sviluppo, sebbene gli investimenti  $j(t)$  in R&D portino via risorse dal consumo e dagli investimenti in capitale, il calo del costo dell'energia consente al consumo di crescere al 3.33% annuo rispetto alla crescita media annua della produzione del 3,11%. Immediatamente attorno al punto di transizione  $T_1$ , la crescita della produzione pro-capite  $y(t)$  diventa negativa, inoltre il costo elevato dell'energia  $p(t)$  e la necessità di investimenti  $j(t)$  per il miglioramento delle tecnologie energetiche rinnovabili continuano a limitare la crescita del consumo e della produzione pro-capite per un tempo estremamente lungo.

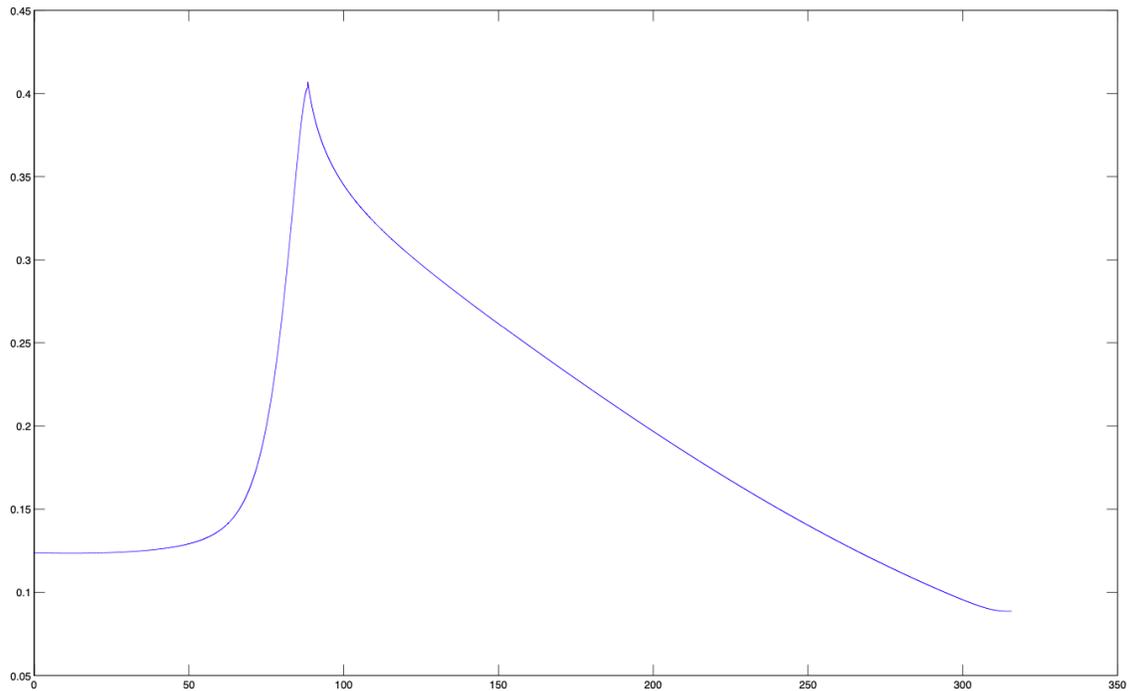


FIGURA 14: Prezzo relativo dell'energia

Pertanto, il modello prevede una "crisi energetica" attorno al punto di transizione e una crescita economica lenta per molto tempo. Una volta iniziato il regime delle energie rinnovabili, infatti, la crescita della

produzione e del consumo pro-capite richiedono molto tempo per riprendersi ai livelli raggiunti nell'era dei combustibili fossili. Una delle principali determinanti della crisi energetica attorno al periodo di transizione è il prezzo dell'energia troppo elevato. La figura 14 rappresenta la variazione del prezzo dell'energia durante i diversi regimi energetici. Si può notare che raggiunge il suo massimo in  $T_1 = 88.41$ , momento in cui si abbandona l'utilizzo dei combustibili fossili, ormai troppo costosi e destinati a diventarlo sempre di più e si passa alle energie rinnovabili. Inizialmente il prezzo delle energie rinnovabili è molto elevato, poi gradualmente si riduce nel tempo.

### CONCLUSIONI

---

La transizione energetica dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabili è un percorso necessario nella lotta al cambiamento climatico e nel porre le basi per una crescita economica sostenibile. È un percorso ad ogni modo inevitabile: i combustibili fossili sono una risorsa limitata e destinata ad esaurirsi, per contro le principali caratteristiche delle risorse rinnovabili sono la loro inesauribilità e l'assenza di emissioni inquinanti.

Attraverso il modello sviluppato da Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., e Zhang X. in [14], abbiamo visto come inizialmente la crescita avviene attraverso l'uso di combustibili fossili relativamente economici in quanto gli investimenti nella tecnologia di estrazione impediscono ai costi energetici di aumentare. Tuttavia, gli investimenti nell'energia fossile devono essere effettuati a un ritmo crescente per tenere sotto controllo i costi che continuano a crescere man mano che le risorse si esauriscono. Ad un certo momento non sarà più conveniente investire nell'energia fossile, poco dopo i combustibili fossili diventano non competitivi e l'energia rinnovabile alimenta l'economia.

Una volta che l'economia passa alle energie rinnovabili, gli investimenti nella tecnologia rinnovabile la rendono più efficace nel tempo. Gli investimenti in ricerca e sviluppo scendono a zero quando lo stock di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili avrà raggiunto il suo limite massimo. Infine, l'economia mondiale entra in un regime in cui è stata raggiunta la frontiera tecnologica nelle energie rinnovabili e il costo delle energie rinnovabili è costante. In questo regime, il modello diventa un semplice modello di crescita endogena con investimenti solo in capitale fisico.

Calcolando il percorso ottimo che seguono le variabili nei diversi regimi energetici abbiamo visto come nel regime fossile la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 4.22% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3,68% annuo. Nel regime rinnovabile con investimenti in ricerca e sviluppo, la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 3.11% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3.33%. Mentre

nell'economia di lungo periodo, il capitale pro capite, i consumi, gli investimenti in capitale e il consumo di energia crescono tutti allo stesso tasso del 4.07% annuo. I divari tra crescita della produzione e dei consumi nei differenti regimi derivano dagli investimenti nella produzione di energia e dal cambiamento dei costi dell'energia nel tempo.

Uno dei principali limiti del modello analizzato è di non consentire l'esistenza di un regime energetico in cui coesistono l'uso di combustibili fossili e i progressi nelle tecnologie rinnovabili. Infatti dalla relazione (4.27) si ha:

$$j(t) = \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} B(t),$$

non è quindi possibile avere investimenti in risorse rinnovabili  $j(t) > 0$  nel regime dei combustibili fossili  $B(t) = 0$ . È quindi lecito domandarsi come impatta il superamento di tale limite sui risultati ottenuti. Ovviamente consentire gli investimenti in R&S anche nel regime fossili significa permettere l'accumulo di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili prima della fase di transizione energetica. Sicuramente ciò potrebbe accelerare la transizione energetica. In  $T_1$  infatti si avrebbe  $H(t)$  maggiore di 0 e di conseguenza il costo delle tecnologie rinnovabili  $p(t)$  nel punto di transizione sarebbe inferiore. Considerando che l'aumento del prezzo dell'energia è una delle determinanti della crisi energetica, ciò implicherebbe anche una crisi energetica meno marcata.

Si è finora pensato ai combustibili fossili come ad una *conditio sine qua non* per alimentare la crescita economica. E purtroppo si persiste nell'abuso di risorse fossili, quando invece è possibile ottenere una crescita economica *sostenibile* utilizzando risorse rinnovabili senza impatti e conseguenze sul clima. Negli ultimi anni si è osservato, a livello globale, un aumento dell'attenzione politica sulle tematiche energetiche. Le aspettative sono un utilizzo sempre minore di combustibili fossili e un impegno più rilevante di tecnologie rinnovabili per la generazione di energia elettrica, così da ottenere un disallineamento tra crescita economica e crescita delle emissioni.

---

## Bibliografia

---

- [1] Arrow K. J., *"The Economic Implications of Learning by Doing"*, The Review of Economic Studies, (1962).
- [2] Arrow K. J., *"Applications of control theory of economic growth"* Mathematics of Decision Sciences, (1968).
- [3] Cafagno M., Cartei G. F., De Leonardis F., Ellerman D., Fidone G., Fracchia F., Maracchi G., Paziienza M. G., Perrone C., Tonoletti B., *"Cambiamento climatico e sviluppo sostenibile"*, G. GIAPPICHELLI EDITORE – TORINO, (2013).
- [4] Calogero, A., *"NOTES ON OPTIMAL CONTROL THEORY"*, (Aprile 2019).
- [5] Caputo, M. R., *"Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications"*, Cambridge University Press, (2005).
- [6] Coulomb L., Neuhoff K., *"Learning curves and changing product attributes: the case of wind turbines"*, University of Cambridge: Electricity Policy Research Group, (2006).
- [7] Di Paola M., *"Cambiamento climatico: una piccola introduzione"*, LUISS University Press, (2015).
- [8] Farrell A. E., Brandt A. R., *"Risks of the oil transition"*, Environmental Research Letters (2006)
- [9] Fleming, W.H., e Rishel, P.W., *"Deterministic and stochastic optimal control"*, Springer-Verlag, (1975).
- [10] Freni G., Gozzi F., Salvadori N., *Existence of Optimal Strategies in linear Multisector Models* ECONOMIC THEORY, vol. 29, p. 25-48, (2006)
- [11] Gordon R. J., *The Rise and Fall of American Growth*, Princeton University Press, (2016)
- [12] Gozzi F., *"Optimal Control Problems: the Dynamic Programming Approach"*.
- [13] Grubler A., Messner S., *"Technological change and the timing of mitigation measures"*, Energy Economics, (1998)

- [14] Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., Zhang X., "Energy Sector Innovation and Growth", RISE Working Paper 14-009, (2016)
- [15] Klaassen G., Miketa A., Larsen K., Sundqvist T., "The impact of R&D on innovation for wind energy in Denmark, Germany and the United Kingdom" Ecological Economics, (2005)
- [16] Lepenies P., *The Power of a Single Number: A Political History of GDP*, Columbia University, (2016)
- [17] Mangasarian, O. L., "Sufficient conditions for the optimal control nonlinear systems", SIAM Journal on control, (1966).
- [18] Michel P., "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems", *Econometrica*, (1982).
- [19] Nicholson W., Snyder C., *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*, Cengage Learning, (2017)
- [20] Owen. A. D., Hanley N., "THE ECONOMICS OF CLIMATE CHANGE", Routledge, (2004).
- [21] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mischchenko, E. F., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", tradotto da K. N. Trirogoff, Interscience, (1962).
- [22] Salsa, S. e Squellati, A., "Modelli dinamici e controllo ottimo", Egea, (2018).
- [23] Seierstad A., Sydsæter, K., "Optimal Control Theory with Economic Applications", North Holland, (1987).
- [24] Takayama, A., "MATHEMATICAL ECONOMICS", seconda edizione, Cambridge University Press, (1985).
- [25] Yong, J., Zhou, X. Y., "Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations", Springer-Verlag New York, Inc., (1999).
- [26] [https://lightbox.terna.it/it/transizione-energetica#/.](https://lightbox.terna.it/it/transizione-energetica#/)
- [27] <http://faostat.fao.org/site/550/default.aspx>
- [28] [http://www.eia.doe.gov/emeu/international/contents.html.](http://www.eia.doe.gov/emeu/international/contents.html)
- [29] [https://www.iea.org/data-and-statistics.](https://www.iea.org/data-and-statistics)
- [30] [http://www.worldenergy.org/publications/surveyofenergyresources2007/default.asp.](http://www.worldenergy.org/publications/surveyofenergyresources2007/default.asp)
- [31] [https://www.gtap.agecon.purdue.edu/databases/v7/default.asp.](https://www.gtap.agecon.purdue.edu/databases/v7/default.asp)
- [32] [https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/SYR\\_AR5\\_FINAL\\_full.pdf.](https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/SYR_AR5_FINAL_full.pdf)

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI  
"LUISS - GUIDO CARLI"

---

LUISS 

---

DIPARTIMENTO DI *ECONOMIA E FINANZA*  
Corso di Laurea in *Banche e Intermediari Finanziari*

TESI DI LAUREA MAGISTRALE  
CATTEDRA: METODI MATEMATICI PER ECONOMIA E FINANZA

**TRANSIZIONE ENERGETICA OTTIMALE**  
(RIASSUNTO)

RELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. FAUSTO GOZZI

LAUREANDO:  
MATTEO BUTTARAZZI

CORRELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. FRANCESCO LIPPI

---

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

---



## 1.1 IL MODELLO DA OTTIMIZZARE

I combustibili fossili sono stati utilizzati, sin dagli albori della rivoluzione industriale, per alimentare processi industriali che hanno permesso più alti livelli di consumi e di benessere ad una popolazione mondiale in costante aumento. Tuttavia, l'utilizzo di combustibili fossili comporta una serie di problematiche. In primis, per loro natura, i combustibili fossili sono una risorsa limitata e destinata ad esaurirsi. Elevati tassi di crescita della popolazione e di crescita economica, infatti, incidono notevolmente sulla disponibilità di risorse aumentando il tasso di esaurimento delle stesse. In secondo luogo, l'aumento delle emissioni di gas serra nell'atmosfera e il correlato aumento della temperatura media globale derivano principalmente da massiccio uso che negli anni si è fatto delle risorse fossili.

Il gruppo intergovernativo sul cambiamento climatico *IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change)* afferma che le emissioni di gas serra derivanti da combustibili fossili per la fornitura di calore, produzione di energia elettrica e trasporti, rappresentano circa il 78% delle emissioni totali tra anidride carbonica, metano e protossido di azoto, e altri elementi che determinano un innalzamento della temperatura globale.

Al fine di valutare gli impatti sulla crescita macroeconomica di una transizione energetica dai combustibili fossili alle energie rinnovabili, ho analizzato il modello elaborato da Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., e Zhang X. in *"Energy Sector Innovation and Growth"*.

Il modello è così strutturato.

Si ipotizzi che l'output pro-capite  $y(t)$  possa essere scritto come una funzione lineare dello stock di capitale pro-capite  $k(t)$ :

$$y(t) = Ak(t). \quad (1.1)$$

La dinamica della dotazione di capitale per lavoratore  $k(t)$  si evolve secondo l'equazione differenziale:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t), \quad (1.2)$$

dove  $i(t)$  è l'investimento in nuovo capitale e  $\delta$  è il tasso di deprezzamento del capitale. In  $t = 0$  la dotazione di capitale per lavoratore è pari a  $k(0) = k_0$ .

L'energia è un input essenziale per la produzione. Si assuma che l'energia, che alimenta la crescita economica, possa provenire unicamente da due fonti: dai combustibili fossili oppure da fonti rinnovabili. Sia  $R(t) \geq 0$  la produzione pro-capite di energia derivante dalle risorse fossili e, sia  $B(t) \geq 0$  la produzione pro-capite di energia derivante dalle risorse rinnovabili. Si assuma per semplicità che  $B(t)$  e  $R(t)$  siano perfetti sostituti. Si ipotizza quindi che in ogni istante valga la relazione:

$$R(t) + B(t) = y(t). \quad (1.3)$$

L'agente rappresentativo dell'economia sceglie quanto consumare e quanto investire sulla base di una funzione di utilità del tipo CRRA:

$$U(c(\cdot)) = \max \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \quad (1.4)$$

dove  $e^{-\beta t}$  rappresenta il fattore di sconto intertemporale e  $\gamma$  è il fattore di *risk aversion* che misura la concavità della funzione di utilità.

La popolazione, indicata con  $Q(t)$ , è una variabile esogena nel modello. Si assuma che  $Q(t)$  cresca ad un tasso costante  $\pi$ , per cui  $Q(t) = Q_0 e^{\pi t}$ .

Il costo marginale dell'energia derivante dai combustibili fossili, indicato con  $g(S(t), N(t))$  dipende dalla quantità totale di risorse estratte in un dato istante  $S(t)$  e dalla tecnologia di estrazione  $N(t)$ . La quantità totale di combustibili fossili estratti in un dato istante  $t$  è determinato dall'integrale tra 0 e  $t$  di  $Q(t)R(t)$ , per cui si ha:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = Q(t)R(t) \\ S(0) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

La tecnologia di estrazione  $N(t)$  dipende dagli investimenti nel settore fossile  $n(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = n(t) \\ N(0) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Il costo marginale dell'energia derivante dai combustibili fossili dipende dalla quantità totale di risorse estratte e dalla tecnologia di estrazione:

$$g(S(t), N(t)) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\bar{S} - S(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3 + N(t)}} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(\alpha_3 + N(t))}{(\bar{S} - S(t))(\alpha_3 + N(t)) - \alpha_2} \quad (1.7)$$

Per un dato livello di tecnologia di estrazione  $\bar{N}$ , il costo marginale di estrazione  $g(S(t), \bar{N})$  aumenta con la quantità di risorse estratte. Il livello massimo che può essere estratto in un dato istante è  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{(\alpha_3 + \bar{N})}$  e, naturalmente, il costo marginale di estrazione aumenta più velocemente con l'avvicinarsi di tale limite. Gli investimenti in nuove tecnologie estendono temporaneamente tale livello limite.

Per quanto concerne le relazioni che regolano il mondo delle risorse rinnovabili, si assume che il progresso tecnologico faccia diminuire il valore del costo marginale dell'energia derivante da fonti rinnovabili  $p(t)$ , man mano che si acquisiscono nuove conoscenze. Esiste, tuttavia, un limite  $\Gamma_2$ , determinato da vincoli fisici di produzione dell'energia, sotto il quale  $p(t)$  non può scendere.  $H(t)$  rappresenta lo stock di conoscenze sulla produzione di energie rinnovabili al tempo  $t$  e  $\Gamma_1$  rappresenta il valore iniziale di  $p(t)$  (con  $H(t) = 0$ ).

$$p(t) = \begin{cases} (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.8)$$

dove  $\Gamma_1, \Gamma_2$  e  $\alpha$  sono parametri costanti.

L'accumulo di conoscenze sulle energie rinnovabili è funzione dell'energia pro-capite derivante dall'energia rinnovabile utilizzata per produrre beni e servizi, indicata con  $B(t)$  e dall'investimento diretto in Ricerca e Sviluppo (R&D), indicato con  $j(t)$ . La dinamica dello stock di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili è data da:

$$\dot{H}(t) = \begin{cases} B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.9)$$

Il parametro  $\psi$  misura l'efficacia relativa degli investimenti diretti in R&D rispetto all'apprendimento  $B$  nel far accumulare conoscenze  $H$  sulle nuove tecnologie energetiche. Una volta che  $H(t)$  avrà raggiunto il limite massimo, ulteriori investimenti nella tecnologia sarebbero superflui e si avrà  $j(t) = 0$ .

Infine, occorre considerare che l'output  $y(t)$  può essere utilizzato alternativamente per investimenti nella tecnologia di estrazione  $N(t)$  o in R&D così da aumentare lo stock di conoscenze sulle energie rinnovabili  $H(t)$ , o ancora investimenti in nuovo capitale  $i(t)$ . Inoltre, si può decidere di consumare l'unico bene prodotto nel sistema economico  $c(t)$ . L'output può essere utilizzato per coprire i costi di estrazione, produzione e distribuzione di energie derivante dai combustibili fossili o di produzione e distribuzione di energia rinnovabile. Deve, quindi, valere in ogni istante di tempo  $t$  la seguente relazione:

$$c(t) + i(t) + j(t) + n(t) + g(S(t), N(t))R(t) + p(t)B(t) = y(t). \quad (1.10)$$

Possiamo quindi riassumere il modello nel seguente modo.

Il funzionale da ottimizzare, dato dalla relazione:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T e^{-\beta t} f(t, x(t), u(t)) dt,$$

è:

$$J(c(\cdot)) = \max \int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt.$$

I vincoli differenziali della forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sono:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \\ \dot{S}(t) = Q(t)R(t) \\ \dot{N}(t) = n(t) \\ \dot{H}(t) = \begin{cases} B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

con condizioni iniziali  $k(0) = k_0 > 0, S(0) = 0, N(0) = 0, H(0) = 0$ .

Le funzioni vincolari:

$$\begin{cases} h_j(t, x(t), u(t)) \geq 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m_0, \\ h_j(t, x(t), u(t)) = 0 & \text{per } 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

sono:

$$\begin{cases} c(t) + i(t) + j(t) + n(t) + g(S(t), N(t))R(t) + p(t)B(t) = y(t) \\ y(t) = Ak(t) \\ R(t) + B(t) = y(t) \\ p(t) = \begin{cases} (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} & \text{se } H(t) \leq \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \text{Altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

dove:

$$g(S(t), N(t)) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(\alpha_3 + N(t))}{(\bar{S} - s)(\alpha_3 + N(t)) - \alpha_2}.$$

## 1.2 I DIVERSI REGIMI ENERGETICI

Legenda

- Utilizzo dei combustibili fossili
- Utilizzo dell'energia rinnovabile

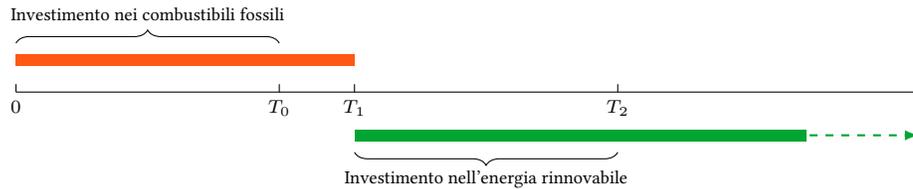


FIGURA 1: Evoluzione dei regimi energetici

Prima di applicare il principio di massimo descriviamo i diversi regimi energetici a cui il modello da origine, rappresentati graficamente nella figura 1.

Inizialmente tutti i servizi energetici sono forniti unicamente dai combustibili fossili, in quanto il marginale costo di estrazione è inferiore ai costi relativi alla produzione di energia tramite fonti rinnovabili,  $g(0, 0) < \Gamma_1^{-\alpha}$ . Tuttavia, il costo marginale di estrazione aumenta, inevitabilmente, con la quantità di risorse estratte  $S(t)$ . Il livello massimo che può essere estratto in un dato istante è  $\bar{S} - \frac{\alpha_2}{(\alpha_3 + N)}$  e, naturalmente,  $g(S(t), N(t))$  aumenta più velocemente con l'avvicinarsi di tale limite. Gli investimenti in nuove tecnologie  $n(t) > 0$  moderano l'aumento del costo marginale di estrazione in quanto estendono temporaneamente

tale livello. Tuttavia, gli investimenti nell'energia fossile, devono essere effettuati a un ritmo crescente per tenere sotto controllo i costi che crescono man mano che le risorse si esauriscono. Sia  $T_0$  il momento in cui cessano gli investimenti nella tecnologia di estrazione,  $n(t) = 0$ . Poco dopo, in  $T_1$  i combustibili fossili diventano non competitivi e l'economia inizierà ad essere alimentata esclusivamente dalle energie rinnovabili, per cui  $R(t) = 0$  e  $B(t) > 0$ . Dopo  $T_1$  sia l'accumulo di esperienze che l'investimento diretto in R&S,  $j(t) > 0$ , aumentano  $H(t)$ , ovvero lo stock di conoscenze sulle energie rinnovabili, e il costo marginale delle energie rinnovabili decresce nel tempo. In  $T_2$ ,  $H(t)$  avrà raggiunto il suo limite massimo, indicato con  $(\Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1)$ . Da questo momento in poi  $j(t) = 0$  e il costo marginale delle energie rinnovabili  $p(t)$  sarà costante e pari a  $\Gamma_2$ .

### 1.3 APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI MASSIMO

Si considerino i controlli  $u(t) = \{c(t), i(t), j(t), R(t), n(t), B(t)\}$ , e le variabili di stato  $x(t) = \{k(t), H(t), S(t), N(t)\}$ , inoltre si considerino le variabili di co-stato al valore corrente  $\lambda_c(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)\}$ . L'Hamiltoniano corrente del problema, dato dalla relazione:

$$H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda_c(t) \cdot g(t, x(t), u(t)),$$

sarà:

$$H_c = \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda_1(t)(i(t) - \delta k(t)) + \lambda_2(t)Q(t)R(t) + \lambda_3(t)n(t) + \lambda_4(t)B(t)^\psi j(t)^{1-\psi}. \quad (1.11)$$

Considerando i moltiplicatori associati ai vincoli  $\mu(t) = \{\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t), \mu_5(t), \mu_6(t)\}$ , la lagrangiana associata a tale problema di controllo ottimo, definita come:

$$L(t, x(t), u(t), \lambda_c(t), \mu(t)) = H_c(t, x(t), u(t), \lambda_c(t)) + \mu(t) \cdot h(t, x(t), u(t)),$$

risulta essere:

$$\begin{aligned} L = & \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda_1(t)(i(t) - \delta k(t)) + \lambda_2(t)Q(t)R(t) + \lambda_3(t)n(t) + \lambda_4(t)B(t)^\psi j(t)^{1-\psi} + \\ & + \mu_1(t)(R(t) + B(t) - Ak(t)) + \mu_2(t)[Ak(t) - c(t) - i(t) - j(t) - n(t) - \\ & - g(S(t), N(t))R(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} B(t)] + \mu_3(t)j(t) + \mu_4(t)n(t) + \mu_5(t) + \\ & + R(t) + \mu_6(t)B(t) + \sigma(t)(\Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1 - H(t)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dopo aver verificato la *Rank Condition* (nell'elaborato finale), l'applicazione del principio di massimo conduce a relazione che descrivono l'evoluzione delle variabili all'interno dei diversi regimi energetici.

Il regime energetico iniziale, tra 0 e  $T_0$ , in cui l'economia è alimentata da combustibili fossili e ci sono investimenti nelle tecnologie di estrazione, è descritto da cinque equazioni differenziali, ovvero:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \quad (1.13)$$

$$\dot{S}(t) = Q(t)Ak(t) \quad (1.14)$$

$$\dot{N}(t) = n(t) \quad (1.15)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \beta\lambda_2(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N(t))}{\partial S}R(t) \quad (1.16)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta + g(S(t), N(t))A - A)\mu_2(t) - \lambda_2(t)Q(t)A \quad (1.17)$$

dove  $Q(t) = Q_0e^{\pi t}$ .

Con  $T_0 \leq t \leq T_1$  gli investimenti nelle tecnologie di estrazione sono nulli:  $n(t) = 0$  e quindi  $N(t)$  è costante e pari a  $\bar{N} = N(T_0) = \int_0^{T_0} n(t) dt$ . Le equazioni differenziali che descrivono il regime energetico dei combustibili fossili senza investimenti nelle tecnologie di estrazione sono:

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t) \quad (1.18)$$

$$\dot{S}(t) = Q(t)Ak(t) \quad (1.19)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \beta\lambda_2(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N)}{\partial S}R(t) \quad (1.20)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = \beta\lambda_3(t) + \mu_2(t)\frac{\partial g(S, N)}{\partial N}R(t) \quad (1.21)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta + g(S(t), N(t))A - A)\mu_2(t) - \lambda_2(t)Q(t)A \quad (1.22)$$

dove  $Q(t) = Q_0e^{\pi t}$ . Tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$  l'economia è alimentata esclusivamente dalle risorse rinnovabili e ci sono investimenti in Ricerca e Sviluppo per permettere un accumulo di conoscenze sulla produzione di energia tramite risorse rinnovabili. Le equazioni differenziali per le variabili di stato  $H(t)$  e  $k(t)$  e per le variabili di co-stato  $\mu_2(t)$  e  $\lambda_4(t)$  tra  $t = T_1$  e  $t = T_2$  sono:

$$\dot{H}(t) = \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1 - \psi) \right]^{(1-\psi)\psi} Ak(t) \quad (1.23)$$

$$\dot{k}(t) = Ak(t) - \mu_2(t)^{-\frac{1}{\gamma}} - \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)}(1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} Ak(t) - (\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha} Ak(t) - \delta k(t) \quad (1.24)$$

$$\dot{\mu}_2(t) = (\beta + \delta - A + A\mu_2(t)(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha})\mu_2(t) - A\psi \left( \frac{1 - \psi}{\mu_2(t)} \right)^{\frac{1-\psi}{\psi}} \lambda_4(t)^{\frac{1}{\psi}} \quad (1.25)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = \beta\lambda_4(t) - \mu_2(t)\alpha(\Gamma_1 + H(t))^{-\alpha-1} Ak(t). \quad (1.26)$$

Nell'economia di lungo periodo viene raggiunto il limite tecnologico  $H(t) = \Gamma_2^{-1/\alpha} - \Gamma_1$  per cui gli investimenti in ricerca e sviluppo non sono più necessari. La particolare semplicità del regime energetico permette una risoluzione analitica delle equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione delle variabili.

Indicando con  $K_0$  il valore iniziale di  $\mu_2(t)$ , e con  $\bar{A}$  la quantità costante  $(\beta + \delta - A + \Gamma_2 A)$  allora:

$$B(t) = Ak(t) \quad (1.27)$$

$$\mu_2(t) = k_0 e^{\bar{A}t} \quad (1.28)$$

$$c(t) = k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \quad (1.29)$$

$$i(t) = (\beta + \delta - \bar{A})k(t) - k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}} \quad (1.30)$$

$$k(t) = \frac{k_0^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\bar{A}t}{\gamma}}}{\beta - (1 - \frac{1}{\gamma})\bar{A}} \quad (1.31)$$

Il Principio di Massimo di Pontryagin fornisce le condizioni necessarie per l'ottimalità in problemi di ottimizzazione dinamica. Tuttavia queste condizioni non sono, in generale, sufficienti per l'ottimalità. Questo significa che se un controllo  $u$  è ottimo, allora sicuramente soddisfa le condizioni del Principio di Massimo di Pontryagin, ma non è necessariamente vero il viceversa. Con l'applicazione dei teoremi di Arrow e Mangasarian, ho analizzato, sotto quali ipotesi, queste condizioni sono anche sufficienti, così da arrivare alla seguente conclusione. Se  $\mu_2(t)$  e  $\lambda_4(t)$  sono  $\geq 0$  per ogni  $t \in [T_1, T_2]$ , allora le condizioni necessarie sono anche sufficienti.

## 1.4 RISULTATI

Dopo aver calibrato il modello utilizzando i dati dell'*Energy Information Administration* (EIA), il *Survey of Energy Resources* e il *GTAP 7 Bata Base* prodotto dal *Center for Global Trade Analysis* nel Dipartimento di Economia Agraria di Purdue University, ho calcolato il percorso ottimale di investimento sia nel settore dei combustibili fossili che in quello delle energie rinnovabili con particolare focus sulle conseguenze dei costi energetici per la crescita macroeconomica.

La transizione energetica dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabile avviene dopo  $T_1 = 88.41$  anni. Nel regime fossile la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 4.22% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3.68% annuo. Nel regime rinnovabile con investimenti in ricerca e sviluppo, la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 3.11% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3.33%. Nell'economia di lungo periodo, il capitale pro capite, i consumi, gli investimenti in capitale e il consumo di energia crescono tutti allo stesso tasso del 4.07% annuo.

La figura 2 mostra l'andamento delle principali variabili nel regime dei combustibili fossili. Prima di precipitare a zero, gli investimenti nella tecnologia di estrazione  $n(t)$  aumenta drasticamente in quanto sono necessarie quantità crescenti di investimenti per compensare gli effetti dell'esaurimento delle risorse fossili e mantenere i costi di estrazione  $g(S(t), N(t))$  pressoché costanti. L'incremento di  $n(t)$  conduce ad alcune conseguenze per la crescita economica. Dal vincolo di bilancio, infatti, si osserva che  $i(t)$  risulta limitato dagli ingenti investimenti nelle tecnologie fossili e ciò rallenta l'accumulo di capitale  $k(t)$ .

Il periodo durante il quale  $n(t) = 0$  è molto breve, dura soltanto 0,0982 anni ( $T_0 = 88.31$ ). Una volta che gli investimenti nelle tecnologie di estrazione cessano, i costi di estrazione aumentano notevolmente e subito dopo segue la transizione dai combustibili fossili alle risorse rinnovabili.

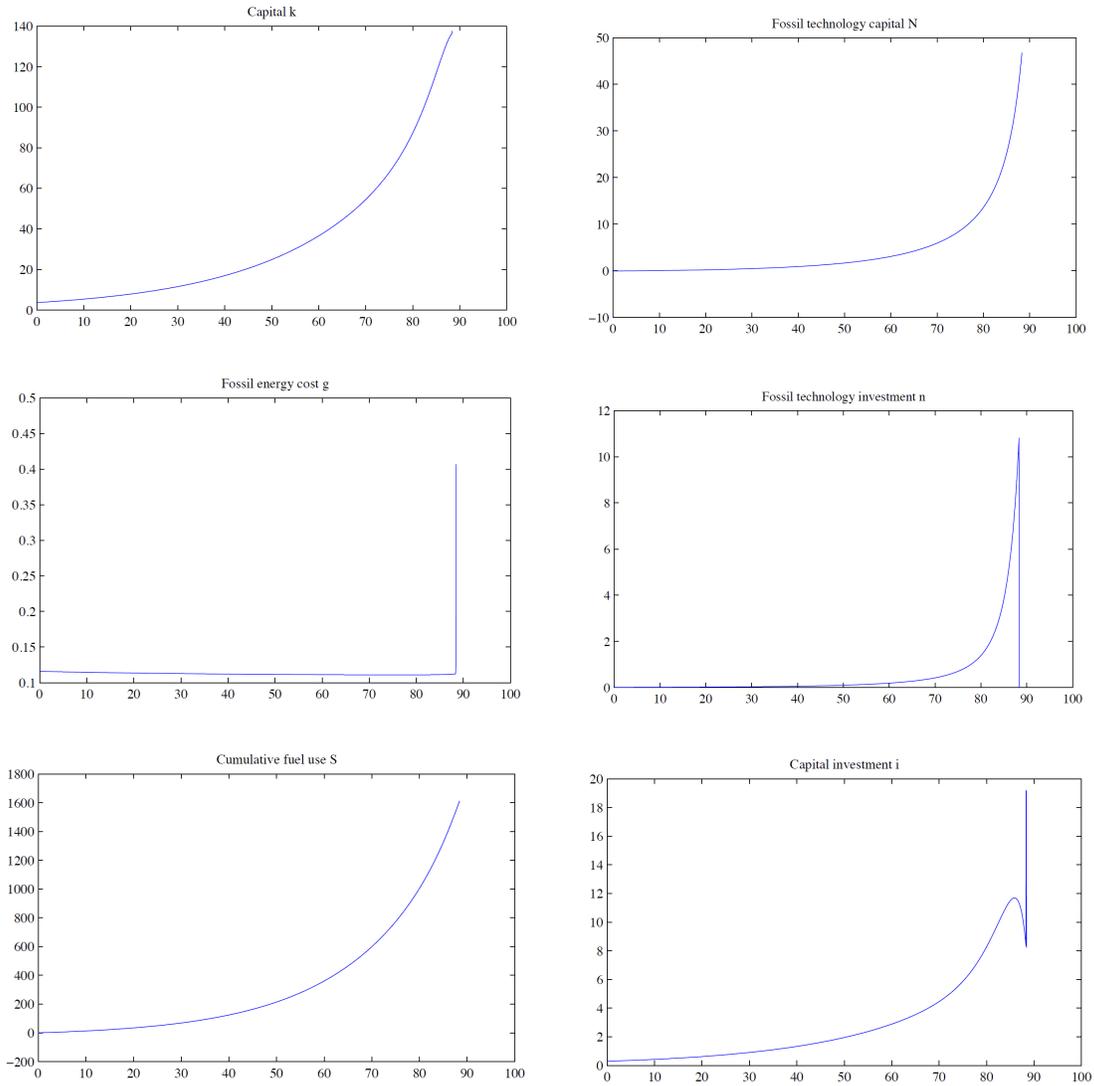


FIGURA 2: Regime dei combustibili fossili

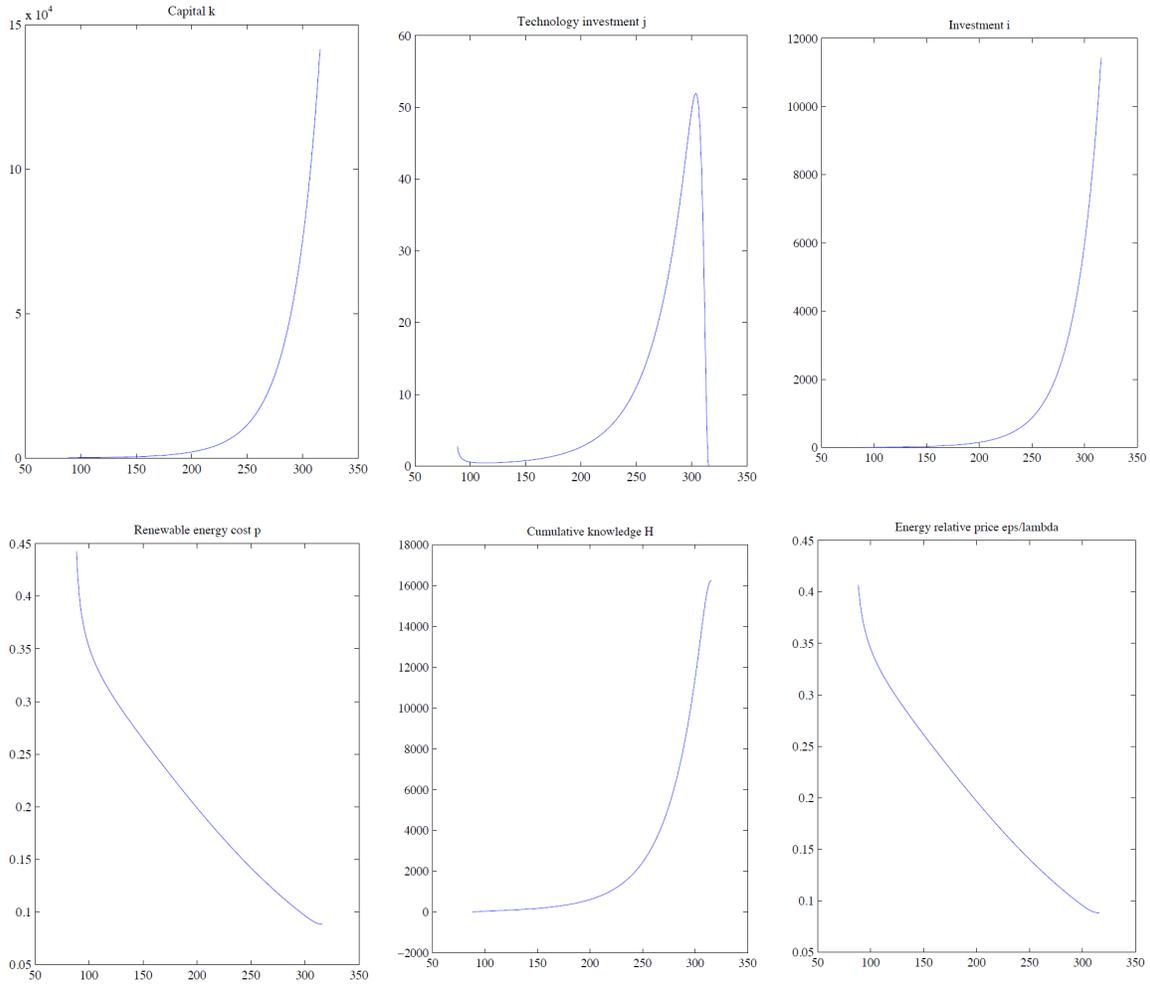


FIGURA 3: Regime delle energie rinnovabili

Il comportamento delle principali variabili nel regime delle energie rinnovabili con investimenti in R&D è raffigurato nella figura 3. L'energia rinnovabile viene utilizzata per altri 227.39 anni ( $T_2 = 315.8$ ) prima che  $H(t)$  raggiunge il suo limite massimo  $\Gamma_2^{-\alpha} - \Gamma_1$ . Una volta che il limite tecnologico viene raggiunto, gli investimenti in Ricerca e Sviluppo  $j(t)$  non sono più necessari e scendono a zero. La crescita economica e il consumo pro-capite non sono limitati dal forte peso degli investimenti. Il prezzo dell'energia  $p(t)$ , inizialmente molto elevato, si riduce con il tempo di circa l'80% attraverso l'accumulo di conoscenze e tramite gli investimenti  $j(t)$ .

Verso la fine del regime dei combustibili fossili, i costi associati all'utilizzo delle risorse fossili e gli investimenti nelle tecnologie di estrazione sono notevoli, e ciò si ripercuote negativamente sul consumo e sulla crescita economica.

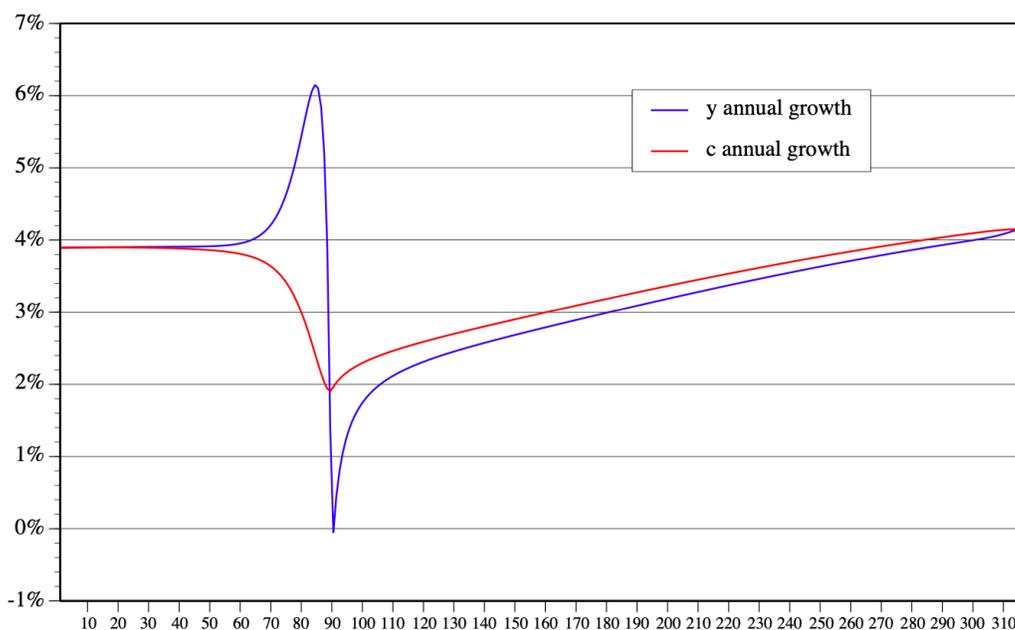


FIGURA 4: Tassi di crescita annuale della produzione pro-capite e del consumo pro-capite

Immediatamente attorno al punto di transizione  $T_1$ , la crescita della produzione pro-capite  $y(t)$  diventa negativa, inoltre il costo elevato dell'energia  $p(t)$  e la necessità di investimenti  $j(t)$  per il miglioramento delle tecnologie energetiche rinnovabili continuano a limitare la crescita del consumo e della produzione pro-capite per un tempo estremamente lungo. Pertanto, il modello prevede una "crisi energetica" attorno al punto di transizione e una crescita economica lenta per molto tempo. Una volta iniziato il regime delle energie rinnovabili, infatti, la crescita della produzione e del consumo pro-capite richiedono molto tempo per riprendersi ai livelli raggiunti nell'era dei combustibili fossili. Una delle principali determinanti della crisi energetica attorno al periodo di transizione è il prezzo dell'energia troppo elevato.

## 1.5 CONCLUSIONI

La transizione energetica dai combustibili fossili alle fonti di energia rinnovabili è un percorso necessario nella lotta al cambiamento climatico e nel porre le basi per una crescita economica sostenibile. È un percorso ad ogni modo inevitabile: i combustibili fossili sono una risorsa limitata e destinata ad esaurirsi, per contro le principali caratteristiche delle risorse rinnovabili sono la loro inesauribilità e l'assenza di emissioni inquinanti.

Attraverso il modello sviluppato da Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., e Zhang X. in *"Energy Sector Innovation and Growth"*, abbiamo visto come inizialmente la crescita avviene attraverso l'uso di combustibili fossili relativamente economici in quanto gli investimenti nella tecnologia di estrazione impediscono ai costi energetici di aumentare. Tuttavia, gli investimenti nell'energia fossile devono essere effettuati a un ritmo

crescente per tenere sotto controllo i costi che continuano a crescere man mano che le risorse si esauriscono. Ad un certo momento non sarà più conveniente investire nell'energia fossile, poco dopo i combustibili fossili diventano non competitivi e l'energia rinnovabile alimenta l'economia.

Una volta che l'economia passa alle energie rinnovabili, gli investimenti nella tecnologia rinnovabile la rendono più efficace nel tempo. Gli investimenti in ricerca e sviluppo scendono a zero quando lo stock di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili avrà raggiunto il suo limite massimo. Infine, l'economia mondiale entra in un regime in cui è stata raggiunta la frontiera tecnologica nelle energie rinnovabili e il costo delle energie rinnovabili è costante.

Calcolando il percorso ottimo che seguono le variabili nei diversi regimi energetici abbiamo visto come nel regime fossile la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 4.22% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3,68% annuo. Nel regime rinnovabile con investimenti in ricerca e sviluppo, la produzione pro-capite cresce ad un tasso medio del 3.11% annuo, mentre il consumo pro-capite del 3.33%. Mentre nell'economia di lungo periodo, il capitale pro capite, i consumi, gli investimenti in capitale e il consumo di energia crescono tutti allo stesso tasso del 4.07% annuo. I divari tra crescita della produzione e dei consumi nei differenti regimi derivano dagli investimenti nella produzione di energia e dal cambiamento dei costi dell'energia nel tempo.

Uno dei principali limiti del modello analizzato è di non consentire l'esistenza di un regime energetico in cui coesistono l'uso di combustibili fossili e i progressi nelle tecnologie rinnovabili. Infatti, dalla relazione (4.27):

$$j(t) = \left[ \frac{\lambda_4(t)}{\mu_2(t)} (1 - \psi) \right]^{\frac{1}{\psi}} B(t),$$

non è quindi possibile avere investimenti in risorse rinnovabili  $j(t) > 0$  nel regime dei combustibili fossili  $B(t) = 0$ . È quindi lecito domandarsi come impatta il superamento di tale limite sui risultati ottenuti. Ovviamente consentire gli investimenti in R&S anche nel regime fossili significa permettere l'accumulo di conoscenze sulle tecnologie rinnovabili prima della fase di transizione energetica. Sicuramente ciò potrebbe accelerare la transizione energetica. In  $T_1$ , infatti, si avrebbe  $H(t)$  maggiore di 0 e di conseguenza il costo delle tecnologie rinnovabili  $p(t)$  nel punto di transizione sarebbe inferiore. Considerando che l'aumento del prezzo dell'energia è una delle determinanti della crisi energetica, ciò implicherebbe anche una crisi energetica meno marcata.

Si è finora pensato ai combustibili fossili come ad una *conditio sine qua non* per alimentare la crescita economica. E purtroppo si persiste nell'abuso di risorse fossili, quando invece è possibile ottenere una crescita economica *sostenibile* utilizzando risorse rinnovabili senza impatti e conseguenze sul clima. Negli ultimi anni si è osservato, a livello globale, un aumento dell'attenzione politica sulle tematiche energetiche. Le aspettative sono un utilizzo sempre minore di combustibili fossili e un impegno più rilevante di tecnologie rinnovabili per la generazione di energia elettrica, così da ottenere un disallineamento tra crescita economica e crescita delle emissioni.

---

## Bibliografia

---

- [1] Arrow K. J., *"The Economic Implications of Learning by Doing"*, The Review of Economic Studies, (1962).
- [2] Arrow K. J., *"Applications of control theory of economic growth"* Mathematics of Decision Sciences, (1968).
- [3] Cafagno M., Cartei G. F., De Leonardis F., Ellerman D., Fidone G., Fracchia F., Maracchi G., Paziienza M. G., Perrone C., Tonoletti B., *"Cambiamento climatico e sviluppo sostenibile"*, G. GIAPPICHELLI EDITORE – TORINO, (2013).
- [4] Calogero, A., *"NOTES ON OPTIMAL CONTROL THEORY"*, (Aprile 2019).
- [5] Caputo, M. R., *"Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications"*, Cambridge University Press, (2005).
- [6] Coulomb L., Neuhoff K., *"Learning curves and changing product attributes: the case of wind turbines"*, University of Cambridge: Electricity Policy Research Group, (2006).
- [7] Di Paola M., *"Cambiamento climatico: una piccola introduzione"*, LUISS University Press, (2015).
- [8] Farrell A. E., Brandt A. R., *"Risks of the oil transition"*, Environmental Research Letters (2006)
- [9] Fleming, W.H., e Rishel, P.W., *"Deterministic and stochastic optimal control"*, Springer-Verlag, (1975).
- [10] Freni G., Gozzi F., Salvadori N., *Existence of Optimal Strategies in linear Multisector Models* ECONOMIC THEORY, vol. 29, p. 25-48, (2006)
- [11] Gordon R. J., *The Rise and Fall of American Growth*, Princeton University Press, (2016)
- [12] Gozzi F., *"Optimal Control Problems: the Dynamic Programming Approach"*.
- [13] Grubler A., Messner S., *"Technological change and the timing of mitigation measures"*, Energy Economics, (1998)

- [14] Hartley P., Medlock B. K., Temzelides T., Zhang X., "Energy Sector Innovation and Growth", RISE Working Paper 14-009, (2016)
- [15] Klaassen G., Miketa A., Larsen K., Sundqvist T., "The impact of R&D on innovation for wind energy in Denmark, Germany and the United Kingdom" Ecological Economics, (2005)
- [16] Lepenies P., *The Power of a Single Number: A Political History of GDP*, Columbia University, (2016)
- [17] Mangasarian, O. L., "Sufficient conditions for the optimal control nonlinear systems", SIAM Journal on control, (1966).
- [18] Michel P., "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems", *Econometrica*, (1982).
- [19] Nicholson W., Snyder C., *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*, Cengage Learning, (2017)
- [20] Owen. A. D., Hanley N., "THE ECONOMICS OF CLIMATE CHANGE", Routledge, (2004).
- [21] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mischchenko, E. F., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", tradotto da K. N. Trirogoff, Interscience, (1962).
- [22] Salsa, S. e Squellati, A., "Modelli dinamici e controllo ottimo", Egea, (2018).
- [23] Seierstad A., Sydsæter, K., "Optimal Control Theory with Economic Applications", North Holland, (1987).
- [24] Takayama, A., "MATHEMATICAL ECONOMICS", seconda edizione, Cambridge University Press, (1985).
- [25] Yong, J., Zhou, X. Y., "Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations", Springer-Verlag New York, Inc., (1999).
- [26] <https://lightbox.terna.it/it/transizione-energetica#/>.
- [27] <http://faostat.fao.org/site/550/default.aspx>
- [28] <http://www.eia.doe.gov/emeu/international/contents.html>.
- [29] <https://www.iea.org/data-and-statistics>.
- [30] <http://www.worldenergy.org/publications/surveyofenergyresources2007/default.asp>.
- [31] <https://www.gtap.agecon.purdue.edu/databases/v7/default.asp>.
- [32] <https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/SYRAR5FINALfull.pdf>.