

Dipartimento di Economia e finanza

Cattedra: "Econometria per la finanza"

## Utilizzo dei modelli Garch e Garch-Midas per la stima della volatilità e le scelte di portafoglio

Prof. Stefano Grassi

**RELATORE** 

Prof. Paolo Santucci De Magistris

CORRELATORE

Riccardo Monducci Matr.694481

CANDIDATO

Anno Accademico 2018/2019

## Indice

1	Introduzione	2
2	Le principali caratteristiche dell'indice di borsa francese e tedesco	4
3	I modelli ARCH-GARCH per la stima della volatilità	9
	3.1 ARCH-GARCH	. 9
	3.2 Le estensioni dei modelli GARCH	. 16
4	Il modello GARCH-MIDAS	21
5	La stima dei modelli	25
	5.1 Stima dei modelli GARCH	. 26
	5.2 Stima del modello GARCH-MIDAS	. 27
6	Applicazione dei modelli a un problema di portafoglio	32
	6.1 Specificazione del problema di portafoglio	. 32
	6.2 Analisi dei risultati	. 35
7	Conclusioni	38
$\mathbf{A}_{]}$	appendici	39
$\mathbf{A}$	Figure e Tabelle	40
В	8 Riassunto	68

## Capitolo 1

### Introduzione

Le serie dei rendimenti finanziari sono caratterizzate da una elevata volatilità. Questa caratteristica ha stimolato un'ampia e articolata letteratura teorica ed empirica sull'individuazione e misurazione dei principali fattori che la determinano. La consapevolezza dei rischi e delle opportunità che la volatilità determina per i moderni sistemi economici ha reso queste analisi rilevanti anche a fini di policy. Questo lavoro si propone di approfondire le determinanti della volatilità di due importanti indici di borsa europei, il CAC francese ed il DAX tedesco (DAX).

Accanto alla stima dei modelli, comunemente utilizzati in letteratura, che considerano diverse parametrizzazioni degli approcci di tipo GARCH, si propone la stima di un modello GARCH-MIDAS nel quale la stima della volatilità è legata anche agli andamenti di variabili macroeconomiche e, in particolare, ai movimenti dell'indice della produzione industriale.

La relazione tra variabili macroeconomiche e volatilità dei rendimenti finanziari è stata inizialmente discussa da Schwert<sup>1</sup> attraverso lo studio della connessione tra volatilità delle azioni, tasso d'inflazione e tassi di variazione sia della produzione industriale sia della base monetaria.

La sfida è stata quella di individuare metodologie e tecniche adeguate ad includere nello stesso modello variabili ad alta frequenza (volatilità dei rendimenti azionari) e a bassa frequenza (variabili macroeconomiche). Dal punto di vista metodologico, Ghysels, Santa-Clara

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>G William Schwert. "Why does stock market volatility change over time?" In: *The journal of finance* 44.5 (1989), pp. 1115–1153.

e Valkanov nel 2004<sup>2</sup>, hanno introdotto il "MIxed Data Sampling" definendo un framework che incorpora regressori caratterizzati, tra di loro e anche rispetto alla variabile dipendente, da frequenza diversa.

Engle, Ghysels e Sohn<sup>3</sup> estendono questo approccio e lo applicano allo studio della volatilità definendo una componente di lungo periodo collegabile direttamente all'andamento delle variabili macroeconomiche, dando vita al GARCH-MIDAS.

Le analisi proposte nel presente lavoro si collegano quindi ad una letteratura fortemente dinamica, rafforzando le evidenze empiriche disponibili soprattutto con riferimenti ai dati europei. All'interno di questo quadro si propone anche lo studio delle performance della relazione tra volatilità e settore reale distinguendo tra periodo pre-crisi e periodo post-crisi. Un ulteriore elemento di originalità del lavoro è rappresentato dall'utilizzo delle stime del modello GARCH-MIDAS all'interno della scelta di portafoglio. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli di un portafoglio basato esclusivamente sullo schema GARCH, stimando le covarianze a partire direttamente dai GARCH univariati, e con quelli di un portafoglio ottenuto a partire da un modello multivariato (e.g. DCC-GARCH).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Eric Ghysels, Pedro Santa-Clara e Rossen Valkanov. "The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models". In: (2004).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Robert F Engle, Eric Ghysels e Bumjean Sohn. "On the economic sources of stock market volatility". In: *AFA 2008 New Orleans Meetings Paper*. 2008.

## Capitolo 2

# Le principali caratteristiche dell'indice di borsa francese e tedesco

Le serie finanziarie sono caratterizzate dalla presenza di una elevata volatilità, caratteristica che le rende particolarmente complesse da modellare. In particolare in questo lavoro sono stati considerati gli indici di borsa principali del mercato tedesco e francese: il "DAX Performance Index" e il "CAC 40".

Il "DAX Performance Index" è un indice composto da titoli di 30 delle più rilevanti società tedesche quotate nella Borsa di Francoforte. Le sue performance, dunque, riflettono le condizioni del mercato azionario tedesco e, più in generale, dell'economia tedesca. Dato il ruolo cruciale che ha la Germania all'interno dell'Unione Europea ed in particolare dell'area dell'Euro, il suo andamento è seguito con estrema attenzione dagli operatori e, più in generale, dalle istituzioni a livello globale.

Il "CAC 40" è considerato dalla gran parte degli investitori il secondo indice azionario di riferimento dell'Eurozona. A differenza dell'indice tedesco, esso è composto anche da società che operano al di fuori della Francia; dunque le sue performance sono particolarmente influenzate, oltre che dallo stato di salute dell'economia francese, dalla situazione e dalle prospettive economiche dell'intera Eurozona.

Queste caratteristiche fanno si che l'andamento e lo stato di salute del mercato europeo possano essere valutati tenendo in considerazione l'andamento dei due indici. A partire dai

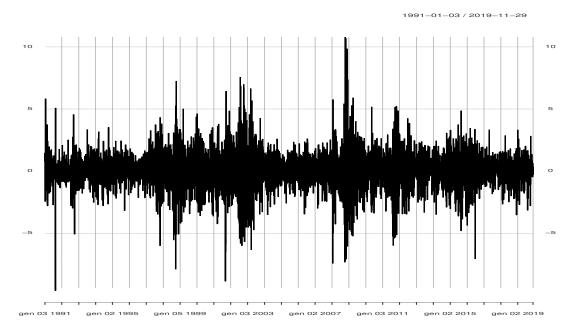
valori giornalieri di questi indici sono stati calcolati i rendimenti:

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \cdot 100 \tag{2.1}$$

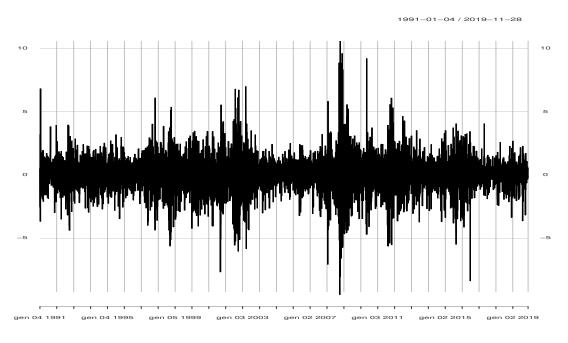
Le dinamiche delle serie dei rendimenti dei due indici sono riportati nelle figure 2.1 e 2.2. Sebbene le serie mostrino una sostanziale stazionarietà attorno al valore medio, si alternano periodi in cui la volatilità è relativamente bassa a periodi in cui le oscillazioni dei rendimenti sono più ampie, come ad esempio durante la recente crisi (volatility clustering). ""Large changes tend to be followed by large changes, of either sign, and small changes tend to be followed by small changes."" Si tratta del fenomeno del cosiddetto volatility clustering. Inoltre, la volatilità tende a evolvere nel tempo in maniera continua, rendendo rari i casi di cambiamenti di livello concentrati e ampi e risulta, dal punto di vista statistico, spesso stazionaria, in quanto non diverge all'infinito. Un'altra importante caratteristica è il cosiddetto "Leverage effect", secondo il quale la volatilità sembra reagire in modo differente a seconda che si sia verificato un ampio aumento o un'ampia diminuzione dei prezzi azionari. Come gran parte delle serie finanziarie, le due serie presentano una leggera asimmetria negativa e leptocurtosi.

Per verificare che effettivamente i rendimenti non seguano una distribuzione normale, si è effettuato il test di normalità di Jarque-Bera (Tab 2.2). Per entrambe le serie il p-value relativo al test risulta prossimo allo zero, e dunque l'ipotesi nulla di normalità dei rendimenti deve essere rifiutata. La leptocurtosi delle due serie è evidente anche osservando i Q-Q plots (Fig. 2.3 - 2.4).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Benoit Mandelbrot. "The Variation of Certain Speculative Prices". In: *The Journal of Business* 36 (1963), pp. 394–419. DOI: 10.1086/294632.



**Figura 2.1:** Serie storica dei rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "DAX Performance Index" dal 3/01/1991 al 29/11/2019



**Figura 2.2:** Serie storica dei rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "CAC 40" dal 3/01/1991 al 29/11/2019

Tabella 2.1: Statistiche di base delle serie

(a) (b) CAC 40Dax Performance Index Min -9.471537Min -9.627704Max 10.594590 Max 10.797468 1. Quartile -0.6553761. Quartile -0.6205520.7227913. Quartile 0.7303233. Quartile 0.015448Media Media 0.026385Mediana 0.036180Mediana 0.079645Dev.standard 1.349229Dev.standard 1.382026Asimmetria -0.062013Asimmetria -0.151074CurtosiCurtosi 4.8546994.950660

**Tabella 2.2:** Test di Jarque-Bera sui rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "DAX Performance Index" e del "CAC 40" (3/01/1991 - 29/11/2019)

method	p.value	statistic	
Jarque-Bera Test; Null hypothesis: normality of returns	0.00	7456.1	DAX
method	p.value	statistic	
Jarque-Bera Test; Null hypothesis: normality of returns	0.00	7266.6	CAC

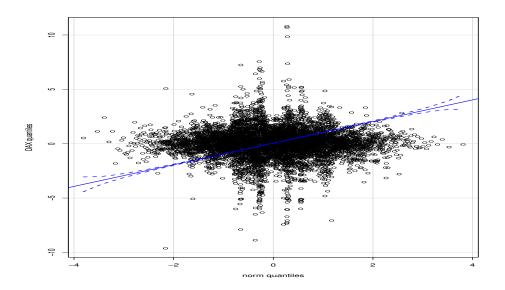
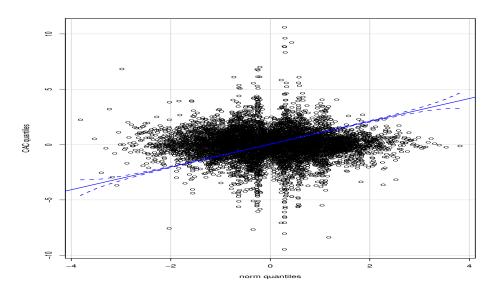


Figura 2.3: Q-Q Plot dei rendimenti logaritmici giornalieri del "DAX Performance Index" (3/01/1991 - 29/11/2019)



**Figura 2.4:** Q-Q Plot dei rendimenti logaritmici giornalieri del "CAC 40" (3/01/1991 - 29/11/2019)

## Capitolo 3

# I modelli ARCH-GARCH per la stima della volatilità

#### 3.1 ARCH-GARCH

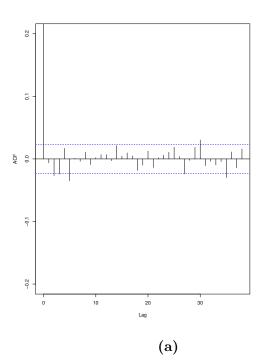
#### Struttura dei modelli a eteroschedasticità condizionata

Sia  $r_t$  il rendimento logaritmico di un'azione al tempo t. L'ipotesi alla base di ogni modello a eteroschedasticità condizionata è che la serie  $r_t$ , pur essendo serialmente incorrelata, sia una serie dipendente. A titolo di esempio, consideriamo la serie storica dei rendimenti logaritmici giornalieri percentuali del "DAX Performance Index" dal Gennaio del 1991 al Novembre del 2018 (Figura 2.1). L'ACF campionaria della serie dei rendimenti (Figura 3.1(a)) indica l'assenza di correlazione seriale significativa, tranne che per il quinto lag. Al contrario, analizzando l'ACF campionaria dei rendimenti logaritmici al quadrato (Figura 3.1(b)), si nota chiaramente come quest'ultimi non siano serialmente indipendenti. Dunque, l'esame del quadro evidenziato dai vari grafici indica che i rendimenti risultano incorrelati ma dipendenti: i modelli per la volatilità cercano proprio di catturare tale dipendenza.

Prima di proseguire, è opportuno richiamare la struttura di tali modelli ed alcune significative definizioni. Definiamo la media e la varianza condizionata di  $r_t$  dato  $F_{t-1}$  come:

$$\mu_t = E(r_t|F_{t-1})$$
  $\sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1})$  (3.1)

dove  $F_{t-1}$  rappresenta il set informativo al tempo t - 1. Come anche evidenziato in precedenza



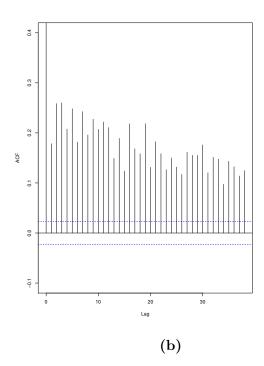


Figura 3.1: (a)ACF dei rendimenti logaritmici percentuali,(b)ACF dei rendimenti logaritmici percentuali al quadrato (riferiti alla serie dei rendimenti del "DAX Performance Index" dal 3/01/1991 al 29/11/2019

(Fig. 3.1), la correlazione seriale di una serie di rendimenti azionari, se esiste, è molto debole. Dunque, solitamente si assume che l'equazione per  $\mu_t$  sia molto semplice e che l'evoluzione nel tempo di  $r_t$  sia descritta da un ARMA(p,q) stazionario. I modelli a eteroschedasticità condizionata si concentrano sull'evoluzione di  $\sigma_t^2$ , e si distinguono tra loro per il modo in cui descrivono tale evoluzione. In particolare, esistono due macrocategorie: i modelli che usano una funzione esatta per descrivere l'evoluzione di  $\sigma_t^2$ , e quelli che utilizzano un'equazione stocastica. I modelli che verranno analizzati in questo lavoro rientrano nella prima categoria. Nella pratica, la costruzione di tali modelli si articola in tre passaggi fondamentali:

- 1) definizione di un'equazione per la media e, se necessario, costruzione di un modello econometrico (e.g., un modello ARMA);
- 2) analisi dei residui del modello per la media e verifica della presenza di effetti ARCH (correlazione seriale dei residui);
- 3)nel caso di effetti ARCH statisticamente significativi, utilizzo di un modello per la volatilità, e stima congiunta della media e della volatilità.<sup>1</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>R.S. Tsay. "Analysis of Financial Time Series: Third Edition". In: Analysis of Financial Time Series:

#### Il modello ARCH

La presenza dei cluster di volatility che caratterizzano le serie finanziarie hanno reso necessaria l'introduzione di specifici modelli di serie storiche in grado di rappresentare questa
caratteristica. Il modello ARCH di Engle (1982).<sup>2</sup> rappresenta l'apporto analitico più importante in questa direzione. L'idea da cui parte il modello ARCH è che lo shock  $a_t$  di rendimento
di un asset sia serialmente incorrelato, ma dipendente; inoltre, la dipendenza di  $a_t$  è descritta
da una semplice funzione quadratica dei suoi valori passati. Nel modello ARCH l'elemento
innovativo è che la varianza condizionata varia nel tempo ed è funzione degli errori (shock)
nei periodi precedenti, ma la varianza non condizionata rimane costante. La struttura di un
modello ARCH(m) è la seguente:<sup>3</sup>

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$
  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots \alpha_m a_{t-m}^2,$  (3.2)

dove  $\{\epsilon_t\}$  è una sequenza di variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d) con media zero e varianza 1,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \ge 0$  per i > 0. Nella pratica, di solito si assume che  $\epsilon_t$  si distribuisca secondo una normale standard oppure una t di Student standardizzata. Quest'ultima è più utilizzata se si considerano serie finanziarie (nelle quali, empiricamente, valori estremi sono più frequenti rispetto a quelli che si riscontrerebbero se tali serie seguissero una distribuzione normale) - in quanto evidenzia code più spesse rispetto a una normale standard.

Dalla B.2 si evince che shock passati elevati (in modulo) implicano una varianza condizionata  $\sigma_t^2$  più elevata per lo shock al tempo t, che tende dunque a assumere valori in modulo più grandi. Dunque, shock elevati è più probabile che vengano seguiti da shock altrettanto elevati. Tale caratteristica dei modelli ARCH li rende adeguati a catturare il fenomeno del "Volatility clustering".

Third Edition (ago. 2010). DOI: 10.1002/9780470644560.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Robert F Engle. "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1982), pp. 987–1007.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

#### Proprietà dei modelli ARCH

Consideriamo il modello ARCH(1)

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2,$$

Innanzitutto, la media non condizionata di  $a_t$  è zero, in quanto

$$E(a_t) = E[E(a_t|F_t - 1)] = E[\sigma_t E(\epsilon_t)] = 0$$

La varianza non condizionata di  $a_t$  può essere ottenuta nel seguente modo:

$$Var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2|F_{t-1})]$$
$$= E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

Dal momento che  $a_t$  è un processo stazionario con  $E(a_t) = 0$  e  $Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$ , si ha che  $Var(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(a_t)$ , e dunque  $Var(a_t) = \alpha_0/(1-\alpha_1)$ . Si vede chiaramente che la varianza non condizionata non dipende dal tempo. Poiché la varianza deve essere positiva, si deve avere  $0 \le \alpha_1 < 1$ . Per quanto riguarda i momenti di ordine superiore al secondo, ci concentriamo in particolare sul momento quarto. Si può dimostrare che esso è finito e positivo se e solo se  $0 \le \alpha_1 < \frac{1}{3}$ . Inoltre, può essere mostrato che la curtosi non condizionata di  $a_t$ , se vale la condizione precedente, è maggiore di tre. Ciò significa che le code della distribuzione di  $a_t$  hanno un peso maggiore rispetto a quelle di una distribuzione normale condizione che rende maggiormente probabile la presenza di valori anomali.

#### Stima dei parametri e verifica del modello

Nella prassi, si usa un metodo di stima composto da due passi. Il primo passo consiste nello stimare l'equazione per la media e considerare la serie dei residui al quadrato di tale modello  $(a_t^2)$ . Per il secondo passo, il metodo di gran lunga più utilizzato per la stima dei parametri è quello di massima verosimiglianza, che consiste nella massimizzazione della funzione di verosimiglianza. La scelta della funzione di verosimiglianza da utilizzare dipende dalla scelta della distribuzione di  $\epsilon_t$ .

Di solito si assume che  $\epsilon_t$  si distribuisca come una normale. Tuttavia, nell'ambito di serie finanziarie come quelle dei rendimenti azionari, spesso assumere che  $\epsilon_t$  segua una distribuzione con code più spesse come una t di Student produce risultati migliori.

Per quanto riguarda la verifica dell'adeguatezza del modello, dopo aver stimato i parametri, se il modello è adeguato, i residui standardizzati

$$\tilde{a_t} = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

definiscono una serie di variabili casuali identicamente e indipendentemente distribuite.

Dunque, per verificare l'adeguatezza di un modello ARCH, si esamina la serie  $\{\tilde{a}_t\}$ .

In particolare, si utilizza il Test di Ljung-Box per verificare l'assenza di autocorrelazione e di dipendenza dei residui standardizzati, in modo simile a quanto descritto nel paragrafo 5.

#### **Forecast**

Supponiamo di aver stimato un modello ARCH di ordine m (Eq.B.2), e sia h il momento della valutazione.

Le previsioni della varianza condizionata possono essere effettuate in maniera ricorsiva, similmente a quanto avviene per i modelli AR.

Per il forecast della varianza condizionata nel periodo immediatamente successivo a h, si ha

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+1-m}^2$$

Per il forecast, formulato sempre in h, della varianza condizionata in h+2, si ha

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(1) + \dots + \alpha_m a_{h+2-m}^2$$

Infine, la previsione, in t, di  $\sigma_{h+l}^2$  (1 periodi avanti) è

$$\sigma_h^2(l) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_h^2(l-i),$$

dove  $\sigma_h^2(l-i) = a_{h+l-i}^2$  se l - i $\leq 0$ .

#### Limiti del Modello ARCH

Nonostante le interessanti proprietà di cui gode, il modello ARCH presenta diversi limiti:

- 1) tale modello considera allo stesso modo, in termini di effetti sulla volatilità, shock di segno opposto; tuttavia, empiricamente si è visto che i prezzi degli asset, e di conseguenza i rendimenti, reagiscono differentemente a seconda che lo shock sia stato positivo o negativo.
- 2) Per ARCH di ordini elevati, il vincolo riguardante il momento quarto descritto nella sezione 3.1 può essere violato.

- 3)I modelli ARCH tendono a sovrastimare la volatilità, in quanto reagiscono lentamente a grandi shock isolati.
- 4) Pur essendo un modello relativamente semplice, nella pratica, l'ordine ottimale di un ARCH, individuato dall'ultimo lag significativo della PACF campionaria di  $a_t^2$ , è spesso molto elevato. Ciò implica un numeroso ammontare di parametri da stimare

Il modello GARCH nella sua versione originale, nasce innanzitutto per ovviare a quest'ultimo problema. $^4$ 

#### Il modello GARCH

I modelli GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroschedasticity) hanno rappresentato in letteratura lo sviluppo del modello ARCH.

Tali modelli permettono, avendo una struttura più parsimoniosa dell'ARCH, di ridurre il numero di parametri da stimare. Il primo modello GARCH, introdotto da Bollersev nel 1986,<sup>5</sup>e è stato presentato come un'utile estensione del modello ARCH, in grado di ridurre significativamente il numero di parametri da stimare.

Sia sempre  $r_t$  il rendimento logaritmico di un asset al tempo t, e  $a_t = r_t$  -  $\mu_t$  lo shock al tempo t.

 $a_t$  segue un modello GARCH(m,s) se

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$
  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma_{t-i}^2,$  (3.3)

dove, analogamente a quanto avviene per il modello ARCH,  $\{\epsilon_t\}$  è una sequenza di variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d) con media zero e varianza 1,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \ge 0$ ,  $\beta_i \ge 0$ , e  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

L'ultimo vincolo implica il fatto che la varianza non condizionata di  $a_t$  sia finita.

Come per il modello ARCH, nella gran parte dei casi si assume che  $\epsilon_t$  si distribuisca come una normale o una t di Student.

Il GARCH(m,s) definito dall'Eq. B.3 è un processo stazionario, con  $E(a_t) = 0$  e  $Var(a_t)$  (varianza non condizionata) =  $E(a_t^2) = \frac{\alpha_o}{1 - \sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$ .

Concentriamoci sulle proprietà del modello prendendo in considerazione, per semplicità, il

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Tim Bollerslev. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". In: 1986.

GARCH (1,1).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \qquad 0 \le \alpha_1, \beta_1 \le 1, (\alpha_1 + \beta_1) < 1. \tag{3.4}$$

Prima di tutto, notiamo che un grande valore di  $a_{t-1}^2$  o di  $\sigma_{t-1}^2$  porta a un grande valore di  $\sigma_t^2$  (volatility clustering).

Inoltre, si può dimostrare che, se 1 -  $2\alpha_1^2$  -  $(\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$ , allora la curtosi non condizionata di  $a_t$  è maggiore di tre.

Dunque, in modo simile a quanto accade nel modello ARCH, il GARCH incorpora l'evidenza empirica che le distribuzioni relative a serie finanziarie abbiano code più spesse rispetto a una normale.

Il grado di persistenza della volatilità è descritto da  $\alpha_1 + \beta_1$ . Più questo valore si avvicina all'unità, più l'effetto delle innovazioni sulla futura volatilità decade lentamente. Per quanto riguarda le previsioni della futura varianza condizionata, anche in questo caso si utilizza un processo iterativo.

Consideriamo sempre il GARCH(1,1) definito dall'Eq.3.4 e sia h l'origine del forecast. Per la previsione in h+1, si ha

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

dove  $a_h$  e  $\sigma_h^2$  sono noti in h.

Dunque, la previsione uniperiodale della varianza condizionata è

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2 \tag{3.5}$$

Per il forecast multi-periodale, usiamo la relazione  $a_t^2 = \sigma_t^2 \epsilon_t^2$  e riscriviamo l'Eq3.4 nel seguente modo:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1\sigma_t^2(\epsilon_{t-1}^2)$$

Quando t = h + 1 l'equazione diventa

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1\sigma_{h+1}^2(\epsilon_{h+1}^2 - 1).$$

Dato che  $E(\epsilon_{h+1}^2 - 1|F_h) = 0$ , la previsione della varianza condizionata in h + 2 è

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1),$$

e, in generale, il forecast l periodi avanti è dato da

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1),$$
  $l > 1.$ 

Con alcuni calcoli si può verificare che, se 1 -  $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$ ,  $\sigma_h^2(l)$  tende, per l' che tende a infinito, a  $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$ , ovvero la varianza non condizionata di  $a_t$ . Questo risultato è coerente col fatto che il GARCH è un processo stazionario; è naturale quindi che, all'aumentare dell'orizzonte temporale di previsione, il forecast tenda ad assumere valori sempre più vicini alla varianza non condizionata.

Nella pratica, la convergenza del forecast alla varianza non condizionata avviene anche anche per orizzonti di previsione relativamente piccoli, sopratutto se la somma di  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  si avvicina all'unità. Infatti, all'aumentare di tale quantità aumenta la velocità con la quale un processo GARCH(1,1) si riporta sul suo valore medio (varianza non condizionata).

Pur avendo, rispetto all'ARCH, il vantaggio di ridurre significativamente il numero di parametri da stimare, il modello GARCH di fatto condivide con esso gli stessi limiti.<sup>6</sup>

Nei prossimi paragrafi introdurremo altri tipi di GARCH, che, tramite alcune modifiche, cercano di migliorare la versione originale di Bollersev.<sup>7</sup>

#### 3.2 Le estensioni dei modelli GARCH

#### Il modello EGARCH

L''' Exponential GARCH model" fu teorizzato da Nelson nel 1991<sup>8</sup>, con la finalità di superare alcuni limiti del modello GARCH.

In particolare, esso modifica il GARCH per tenere conto del "Leverage effect", ovvero del fatto che la varianza condizionata reagisce in modo diverso a seconda che lo shock sia stato positivo o negativo .

Infatti, seguendo Black (1976)<sup>9</sup>, le perdite hanno hanno un'influenza maggiore dei guadagni

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity".

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Daniel B. Nelson. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". In: *Econometrica* 59.2 (1991), pp. 347-370. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938260.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Fischer Black. "Studies of stock price volatility changes". In: 1976.

sulla futura volatilità.

Per tenere conto di ciò, Nelson considera l'innovazione pesata

$$g(\epsilon_t) = \theta \epsilon_t + \gamma [|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)] \tag{3.6}$$

dove  $\theta$  e  $\gamma$  sono costanti reali.

Sia  $\epsilon_t$  che  $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$  sono sequenze i.i.d a media 0.

Quindi,  $E[g(\epsilon_t)] = 0$ .

In base all'eq.B.4, si nota che, se  $\epsilon_t \geq 0$ , allora  $g(\epsilon_t)$  è una funzione lineare con pendenza  $(\theta + \gamma)$ . Viceversa, se  $\epsilon_t \leq 0$ , la pendenza diventa  $(\theta - \gamma)$ .

Quindi,  $g(\epsilon_t)$  permette alla varianza condizionata  $\sigma_t^2$  di rispondere in modo asimmetrico a seconda che ci sia stato un aumento o una caduta dei prezzi azionari.

Un modello EGARCH(m,s) è definito come

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$
  $ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\epsilon_{t-1}),$  (3.7)

dove  $\alpha_0$  è una costante, B è l'operatore lag tale che  $Bg(\epsilon_t) = g(\epsilon_{t-1})$ , e il rapporto che moltiplica  $g(\epsilon_{t-1})$  è costituito da due polinomi i cui zeri sono in valore assoluto maggiori di 1. La media non condizionata di  $\ln(\sigma_t^2)$  è  $\alpha_0$ .

Le differenze rispetto al tradizionale modello GARCH fanno riferimento al fatto che:

- 1) si utilizza il logaritmo della varianza condizionata per tenere conto dei vincoli di positività dei parametri del modello;
- 2) l'uso di  $g(\epsilon_t)$  permette al modello di rispondere in modo asimmetrico a fronte di shock positivi e negativi dei valori passati di  $a_t$ .

Al fine di comprendere meglio queste proprietà, consideriamo un semplice EGARCH(1,1):

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \qquad (1 - \alpha B) \ln(\sigma_t^2) = (1 - \alpha)\alpha_0 + g(\epsilon_{t-1}), \qquad (3.8)$$

dove  $\epsilon_t$  sono normali standard i.i.d.

In questo caso,  $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}\gamma$  e il modello per  $\ln(\sigma_t^2)$  diventa :

$$(1 - \alpha B)ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \alpha_* + (\gamma + \theta)\epsilon_{t-1} & \text{se } \epsilon_{t-1} \ge 0, \\ \alpha_* + (\gamma - \theta)(-\epsilon_{t-1}) & \text{se } \epsilon_{t-1} < 0, \end{cases}$$

dove 
$$\alpha_* = (1 - \alpha)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi}\gamma$$
.

In questo modello, l'andamento della varianza condizionata varia nel tempo in maniera non

lineare, e dipende dal segno di  $a_{t-1}$ . In particolare, si ha

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2a} exp(\alpha_*) = \begin{cases} exp[(\gamma + \theta) \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}}] & \text{se } a_{t-1} \ge 0, \\ exp[(\gamma - \theta) \frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}] & \text{se } a_{t-1} < 0. \end{cases}$$

L'asimmetria rispetto a shock positivi e negativi di  $a_{t-1}$  è catturata dai coefficienti  $(\gamma + \theta)$  e  $(\gamma - \theta)$ . Il modello è dunque non lineare se e solo se  $\theta \neq 0$ .

In conclusione, dal momento che shock negativi tendono a determinare un maggior impatto sulla varianza condizionata, ci aspettiamo che  $\theta$  sia negativo.<sup>10</sup>

Una forma alternativa del modello EGARCH(m,s) è la seguente:

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^s \beta_j ln(\sigma_{t-j}^2)$$
(3.9)

In questa formulazione, che è quella usata nei pacchetti "Rugarch" e "mfGARCH" in Rstudio, il leverage effect è descritto dal parametro  $\gamma_i$ . Nelle applicazioni a serie finanziarie ci aspettiamo che  $\gamma_i$  sia negativo.

Il parametro  $a_i$  rappresenta il cosiddetto "Size effect". Maggiore è il valore di tale parametro, maggiore sarà l'impatto del Leverage effect sulla volatilità condizionata.

#### Il modello TGARCH

Un altro modello spesso utilizzato per tenere conto del "Leverage effect" è il "Treshold Garch Model" (o TGARCH). <sup>13</sup>

Un TGARCH(m,s) è definito da

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s (\alpha_1 + \gamma_1 N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$
(3.10)

dove

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{se } a_{t-1} \ge 0. \end{cases}$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Alexios Ghalanos. rugarch: Univariate GARCH models. R package version 1.4-1. 2019.

 $<sup>^{12}</sup>$ Onno Kleen. mfGARCH: Mixed-Frequency GARCH Models. R package version 0.1.9. 2019. URL: https://github.com/onnokleen/mfGARCH/.

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Lawrence R Glosten, Ravi Jagannathan e David E Runkle. "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks". In: *The journal of finance* 48.5 (1993), pp. 1779–1801.

e  $\alpha_1, \gamma_i e \beta_i$  sono numeri positivi.

Il modello, analogamente a quanto avviene nel modello EGARCH, tiene conto del "Leverage effect" in quanto, poiché  $\gamma_i \geq 0$ , il contributo che uno shock negativo dà alla varianza condizionata  $((\alpha_1 + \gamma_i)a_{t-1}^2)$  è maggiore rispetto al contributo dato da uno shock positivo  $(\alpha_i a_{t-1}^2)$ .<sup>14</sup>

In questo modello il grado di persistenza della volatilità è descritto dalla somma dei coefficienti  $\alpha, \beta e \gamma$ .

#### Il modello CSGARCH

Un modello molto interessante è quello proposto da Engle e Lee nel 1999<sup>15</sup>, nel quale, per la prima volta, viene effettuata una decomposizione della volatilità, considerando sia una componente permanente sia una transitoria. Se in tutti i modelli finora considerati la varianza non condizionata è sempre stata ipotizzata costante, alla base di questo modello c'è l'idea che anche la varianza non condizionata segua un processo autoregressivo, e che si possa individuare una sorta di trend di lungo periodo della volatilità.

Engle e Lee, a tal proposito, considerano il GARCH nella sua versione classica, sostituendo però alla varianza non condizionata la "long-term volatility"  $q_t$  che, come detto, varia nel tempo seguendo un processo autoregressivo. Si ha quindi

$$\sigma_t^2 = q_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\epsilon_{t-j}^2 - q_{t-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j}^2 - q_{t-j})$$
(3.11)

$$q_t = w + \rho q_{t-1} + \omega (\epsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$$
(3.12)

La componente permanente(trend) della volatilità è  $q_t$  ed è stocastica, e la differenza tra la volatilità condizionata e il suo trend è definita come la componente transitoria. <sup>16</sup>

Con questo modello relativamente semplice nasce l'idea che, oltre a una componente di breve periodo, esista anche una componente di lungo periodo della volatilità. Negli ultimi anni molti autori hanno tentato di modellizzare il "trend" della volatilità, cercando di capire quali input utilizzare oltre al passato della volatilità stessa.

Nella prossima sezione verrà analizzato il modello che ha segnato una svolta in questo sen-

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Robert F Engle e Gary Lee. "A long-run and short-run component model of stock return volatility". In: Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honour of Clive WJ Granger (1999), pp. 475–497. 

<sup>16</sup>Ghalanos, rugarch: Univariate GARCH models.

so, incorporando nei modelli per la volatilità anche variabili macroeconomiche: il GARCH-MIDAS.

## Capitolo 4

## Il modello GARCH-MIDAS

I modelli di tipo GARCH consentono di esprimere la volatilità della serie attraverso l'osservazione degli shock passati. Tuttavia, una dimensione di analisi di grande interesse è l'esplorazione della presenza di una influenza delle serie macroeconomiche sulla volatilità. Ad esempio Schwert(1989)<sup>1</sup>, analizza la connessione tra volatilità delle azioni, tasso d'inflazione e tassi di variazione sia della produzione industriale sia della base monetaria.

All'interno di questa prospettiva di analisi è comunque necessario esplicitare nel modello la differenza nella frequenza tra i dati finanziari, giornalieri, e i dati macroeconomici, tipicamente mensili o trimestrali. Il lavoro di Ghysels, Santa-Clara e Valkanov del 2004<sup>2</sup>, introduce il "MIxed Data Sampling" dove i regressori possono avere, tra di loro e anche rispetto alla variabile dipendente, frequenza diversa.

Engle, Ghysels e Sohn<sup>3</sup> si ispirano al lavoro di Ghysels, Santa-Clara e Volkanov e applicano la metodologia da loro proposta per stimare la volatilità di lungo periodo, collegandola direttamente al livello di variabili macroeconomiche, dando vita al GARCH-MIDAS.

#### Struttura del modello

Sia  $r_{i,t}$  il rendimento relativo al giorno i del periodo t, la cui lunghezza può essere scelta arbitrariamente a seconda dell'analisi che si intende realizzare. In questo elaborato, seguendo il lavoro di Engle<sup>4</sup>, assumiamo che l'intervallo t sia pari ad un trimestre. Il GARCH-MIDAS

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Schwert, "Why does stock market volatility change over time?"

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ghysels, Santa-Clara e Valkanov, "The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models".

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Engle, Ghysels e Sohn, "On the economic sources of stock market volatility".

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Ibid.

assume che  $r_{i,t}$  segua il seguente processo:

$$r_t = \mu + \sqrt{\tau_t g_{i,t}} \epsilon_{i,t} \qquad \forall i = 1, ..., N_t$$

$$(4.1)$$

dove  $\epsilon_{i,t}|\Phi_{i-1,t} \sim N(0,1)$  e  $\Phi_{i-1,t}$  è il set informativo relativo al giorno i-1 del trimestre t, e  $N_t$  è pari al numero di giorni di negoziazione nel trimestre t.

L'Eq. B.9 decompone la varianza in una componente di breve periodo  $(g_{i,t})$  e in una componente di lungo periodo  $(\tau_t)$ .

Rispetto alla dinamica della componente di lungo periodo  $\tau_t$  si possono introdurre diverse assunzioni. In particolare, si può imporre che essa non vari nel trimestre t (Fixed span), oppure si può assumere che essa vari giornalmente (Rolling window). In questo elaborato seguiremo il primo approccio.

La componente di breve periodo  $g_{i,t}$ , invece, segue un GARCH(1,1)

$$(1 - \alpha_1 - \beta_1) + \alpha \frac{(r_{1-i,t} - \mu)^2}{\tau_t} + \beta g_{i-1,t}$$
(4.2)

È possibile assumere che la volatilità di breve periodo segua un processo diverso da un semplice GARCH(1,1). Di seguito, nella sezione dedicata all'applicazione dei modelli a dati reali, utilizzeremo anche un TGARCH(1,1) per modellizzare  $g_t$ .

Per quanto riguarda la specificazione della componente  $\tau_t$ , esistono vari approcci possibili. In particolare, è possibile usare come regressore la volatilità realizzata, incorporare direttamente le variabili macroeconomiche, o una combinazione di entrambi. In questo elaborato utilizziamo l'approccio dell'incorporazione diretta delle variabili macroeconomiche.

Si ha quindi che

$$\tau_t = m + \theta \sum_{k=1}^{K} \phi_k(w1, w2) X_{t-k}$$
(4.3)

dove  $X_{t-k}$  rappresenta il livello di una variabile macroeconomica.

L'Eq.B.11 può essere estesa a più regressori, anche se ciò può portare a problemi di natura computazionale.

La varianza condizionata totale può essere definita come:

$$\sigma_{i,t}^2 = \tau_t \cdot g_{i,t}. \tag{4.4}$$

L'idea chiave del modello è che il contributo alla varianza condizionata è dato sia dalla componente di breve sia da quella di lungo periodo.

Più in particolare, la volatilità di breve periodo dovrebbe oscillare, in media, attorno a quella di medio-lungo periodo. Per completare la descrizione del modello va specificato lo schema dei pesi per l'Eq.B.11:

$$\phi_k(w1, w2) = \begin{cases} \frac{(k/K)^{w1-1}(1-k/K)^{w2-1}}{\sum_{j=1}^K (j/K)^{w1-1}(1-j/K)^{w2-1}} \\ w^k/(\sum_{j=1}^K w^j) \end{cases}$$

dove la somma dei pesi è pari ad uno. Lo funzione di ponderazione appena descritta ("Beta lag"), introdotta nel lavoro di Valkanov, Ghysels e Santa-Clara, $^5$  è basata sulla funzione beta, ed è estremamente flessibile. In particolare, si può scegliere un approccio Beta restricted, in cui si pone w1=1 in modo da porre un vincolo affinché w2 decresca al crescere dei lag, dando meno peso a osservazioni meno recenti.

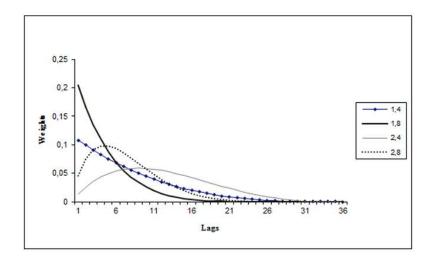
In alternativa, si può utilizzare un approccio Beta unrestricted, in base al quale i pesi da assegnare ai valori passati della variabile macroeconomica vengono stimati dal modello senza porre vincolo.

Citando direttamente il lavoro di Asgharian, Hou e Javed<sup>6</sup>, rappresentiamo in Figura 2.3 il comportamento dello schema dei pesi, in funzione del numero di lags e al variare di w1 e w2. Sono stati scelti due valori possibili sia per w1 (1 e 2), che per w2 (4 e 8).

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Ghysels, Santa-Clara e Valkanov, "The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models".

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Hossein Asgharian, Ai Jun Hou e Farrukh Javed. "The importance of the macroeconomic variables in forecasting stock return variance: A GARCH-MIDAS approach". In: *Journal of Forecasting* 32.7 (2013), pp. 600–612.

Figura 4.1: Pesi e numero di lags nel GARCH-MIDAS



## Capitolo 5

### La stima dei modelli

#### Test per effetti ARCH

Siano  $a_t = r_t$ -  $\mu_t$  i residui dell'equazione per la media (shock al tempo t). Al fine di verificare la presenza di "ARCH effects", si considera la serie  $a_t^2$ . Solitamente, vengono utilizzati due tipi di test: il primo consiste nell'applicare alla serie  $a_t^2$  il test di Ljung-Box (Q(m)). L'ipotesi nulla consiste nel fatto che i primi m lags dell'ACF della serie dei residui al quadrato siano nulli. Il secondo metodo utilizzato è il test dei moltiplicatori di Lagrange (ARCH test). Di fatto, si imposta una regressione sui quadrati dei residui

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t$$
  $t = m+1, \dots T,$ 

dove  $e_t$  rappresenta il termine di errore, m è un numero intero, e T è l'ampiezza del campione. L'ipotesi nulla è  $H_0$ :  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ . Siano  $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (a_t^2 - w)^2$ , dove w è la media campionaria di  $a_t^2$ , e  $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t^2$ , dove  $\hat{e}_t$  rappresenta i residui della precedente regressione. Si ottiene così

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)}$$

che è asintoticamente distribuita come una chi-quadrato con m<br/> gradi di libertà sotto l'ipotesi nulla. La regola decisionale è di rifiu<br/>tare  $H_0$  se F è maggiore di  $\chi^2_m(\alpha)$ , dove  $\chi^2_m(a)$  è il<br/>  $100(1-\alpha)$ esimo percentile di  $\chi^2_m$ , oppure se il p-value di F è minore di  $\alpha$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation".

Per quanto riguarda l'indice tedesco e quello francese, i risultati dell'ARCH-TEST e del Ljung-Box Test sono riportati nelle Tabelle A.3 e A.4.

Entrambi i test suggeriscono la presenza di effetti ARCH, e rendono necessaria l'implementazione di modelli per la volatilità.

#### 5.1 Stima dei modelli GARCH

La presenza di effetti ARCH porta a ritenere che sia necessaria l'implementazione di un modello per la volatilità. Verranno presi in considerazione tutti i modelli descritti nella Sezione 3.2. Data la non normalità delle serie, ipotizzeremo, per la stima di tutti i modelli, che il termine d'innovazione si distribuisca come una t di Student.

Sono stati stimati un GARCH(1,1), un EGARCH(1,1), un TGARCH(1,1) e un CSGARCH(1,1) per le due serie, e si è verificata l'adeguatezza dei modelli effettuando l'ARCH-Test per i residui standardizzati. I coefficienti e i relativi errori standard dei vari modelli stimati, nonchè i risultati dei test sui residui standardizzati, sono riportati dalla Tabella A.5 alla Tabella A.12. I modelli sembrano essere complessivamente adeguati, presentando nella maggior parte coefficienti significativi.

Inoltre, per ognuno di essi, l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH non può essere rifiutata a ogni livello di significatività.

Al fine di selezionare il modello migliore, sia per i modelli GARCH che per il GARCH-MIDAS, si userà il criterio di scelta di Bayes (BIC), secondo il quale si sceglie il modello che presenta BIC minore<sup>2</sup>. I BIC dei vari modelli sono riportati nella Tabella 5.1.

I modelli migliori, come ci si poteva aspettare, sono quelli che considerano l'effetto leva, ovvero l'EGARCH e il TGARCH.

In tali modelli, l'asimmetria della volatilità è descritta dal parametro  $\gamma$ . In entrambi i casi esso è altamente significativo, e il suo segno è coerente con la teoria (positivo per il TGARCH,

$$BIC = -2 \cdot LL + log(N) \cdot k$$

dove LL è il logaritmo naturale della funzione di massima verosimiglianza, N è il numero di osservazioni e k è il numero di parametri del modello

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Il BIC è tanto minore quanto maggiore è il logaritmo della funzione di massima verosimiglianza, e valorizza la parsimonia, in quanto aumenta all'aumentare del numero di parametri. Si ha infatti, che

Tabella 5.1: BIC modelli GARCH

CAC	DAX	
22672.51	22532.12	GARCH(1,1)
22456.94	22383.18	EGARCH(1,1)
22669.2	22534.01	CSGARCH(1,1)
22512.4	22408.44	TGARCH(1,1)

negativo per l'EGARCH), a testimoniare come shock negativi abbiano un impatto maggiore sulla volatilità condizionata rispetto a shock positivi.

Nonostante l'EGARCH presenti BIC leggermente minore rispetto al TGARCH, nella sezione successiva si è scelto per motivi computazionali di utilizzare quest'ultimo, oltre al semplice GARCH, per modellizzare la componente di breve periodo della volatilità nel GARCH-MIDAS.

#### 5.2 Stima del modello GARCH-MIDAS

Uno degli obiettivi principali del presente lavoro è verificare su serie finanziarie europee il possibile contributo delle variabili macroeconomiche alla spiegazione della loro volatilità. In particolare, considerando i casi di Germania e Francia, è stato verificato l'impatto del prodotto interno lordo (PIL) e dell'indice mensile della produzione industriale del singolo paese rispetto alla volatilità dei corrispondenti indici di borsa (DAX e CAC). Il modello utilizzato è il GARCH-MIDAS proposto da Engle<sup>3</sup> la cui stima, come sottolineato dagli autori, risulta sensibile a diverse parametrizzazioni utilizzati per il pre-trattamento degli indicatori macroeconomici, ai ritardi utilizzati, della specifica per i pesi (restricted o unrestricted) e infine al modello utilizzato per la modellizzazione della varianza di breve periodo (GARCH(1,1) e T-GARCH(1,1)). I risultati delle stime mostrano come, in tutte le parametrizzazioni utilizzate, l'utilizzo del PIL non abbia prodotto stime statisticamente significative del GARCH-MIDAS. Significativo è invece apparso il contributo dell'indice della produzione industriale di ciascun paese rispetto all'indice di borsa corrispondente. Con riferimento al pre-trattamento del-

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Engle, Ghysels e Sohn, "On the economic sources of stock market volatility".

l'indice di produzione, i dati di partenza si riferiscono all'indice mensile destagionalizzato per il quale è stato considerato il logaritmo naturale. Successivamente sono state calcolate le medie trimestrali. Oltre alle diverse parametrizzazioni possibili, le stime presentate esplorano, come nel lavoro di Engle<sup>4</sup>. la variabilità delle stime al cambiamento del periodo temporale considerato. Si presentano quindi dapprima le stime sull'intero periodo gen.1991-giu.2019 e successivamente quelle riferite al periodo pre-crisi (gen.1991-set.2007) e post-crisi (apr.2010-giu.2019).

#### Stime su tutto il periodo

Il campione inizialmente considerato (1/01/1991 - 28/09/2019) comprende la principale crisi finanziaria dell'ultimo trentennio.

Come mostrato da Asgharian<sup>5</sup>, durante periodi dove si registrano enormi outlier la validità di un modello come il GARCH-MIDAS, che tenta di stimare la componente di medio-lungo periodo della volatilità, può venire meno.

I risultati dei modelli sono riportati nella Tabella A.13. Sia per l'indice tedesco sia per quello francese, il parametro di riferimento del MIDAS  $\theta$ , che descrive la relazione tra tassi di crescita della produzione industriale e volatilità dei rendimenti, non è significativo.

I risultati sembrano confermare la tesi di Ashgarian, secondo la quale il modello non ottiene buone performance se nel campione sono presenti periodi caratterizzati da elevata instabilità.<sup>6</sup>

#### Periodo pre-crisi

Le tabelle da A.14 a A.17 riportano parametri, errori standard, p-values e BIC dei modelli GARCH-MIDAS stimati tenendo conto delle due diverse specificazioni per la variabilità di breve periodo. In particolare, secondo il BIC il migliore modello GARCH-MIDAS è quello che considera la modellizzazione della varianza con un TGARCH(1,1) nella versione unrestricted.

DAX Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 9730.94(a) e 9772.93(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 9742.18(a) e 9774.55(b).

CAC Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 9374.08(a) e 9432.94(b). Restricted: I BIC

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Engle, Ghysels e Sohn, "On the economic sources of stock market volatility".

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Asgharian, Hou e Javed, "The importance of the macroeconomic variables in forecasting stock return variance: A GARCH-MIDAS approach".

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ibid.

dei modelli sono pari a 9374.606(a) e 9432.54(b).

Confrontando il GARCH-MIDAS con il semplice GARCH(1,1) stimato nella Sezione 3.2 si può notare una caratteristica importante dei parametri  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ . La loro somma è estremamente vicina all'unità. In particolare, questa quantità rappresenta la velocità con la quale la varianza si riporta al suo valore medio (unconditional variance). Di conseguenza, in un GARCH(1,1), la previsione della varianza condizionata, anche per periodi relativamente vicini, sarà pari alla varianza non condizionata. Per tutti i GARCH-MIDAS stimati, al contrario, si osserva una interessante caratteristica degli stessi parametri, osservata anche da Engle e Rangel.<sup>7</sup>

La loro somma è sempre minore di quella osservabile in un semplice GARCH(1,1), ad indicare una minore persistenza della componente di breve periodo della volatilità, dovuta all'impatto della componente di lungo periodo. Per quanto riguarda il DAX, il modello relativo al periodo pre-crisi che ha le performance migliori è quello in Tabella A.14(a), dove si è utilizzato il TGARCH per la modellizzazione di g, e un approccio Beta unrestricted, non vincolando il modello ad assegnare pesi decrescenti al crescere dei lag dell'indice di produzione industriale. Lo schema dei pesi è rappresentato nella Figura A.7, in cui si nota che i pesi sono crescenti fino al tredicesimo lag, per poi decrescere. I coefficienti sono tutti altamente significativi, e si può notare come anche l'effetto leva, pur essendo significativo, risulta essere smorzato rispetto a quanto accade stimando un semplice TGARCH. Ciò si nota osservando il valore, molto contenuto, del parametro  $\gamma$ .

Il parametro più importante dei GARCH-MIDAS, e di cui 'e necessaria la significatività, è  $\theta$ , che in questo caso rappresenta il legame tra la volatilità del "DAX Performance Index" e l'indice della produzione industriale tedesca. Esso è significativo e positivo per tutti i modelli relativi all'indice azionario tedesco. Per visualizzare meglio l'importanza di g e tau, nella Figura A.6 si nota come la componente di breve periodo sembri oscillare attorno a quella di medio-lungo periodo.

Per quanto riguarda il "CAC 40", i risultati sono sostanazialmente simili, ad eccezione del riscontro di una non significatività dell'intercetta del MIDAS e del coefficiente ARCH del TGARCH(1,1). Ciò fa pensare che in questo caso, nonostante un BIC minore, sia più opportuno modellizzare la componente di breve periodo tramite GARCH(1,1). Inoltre, rispetto

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>rangel.

a quanto accade per il DAX, il valore assoluto del parametro  $\theta$  è maggiore, a testimoniare una dipendenza maggiore tra volatilità di lungo periodo del "CAC 40" e valori passati delle variazioni della produzione industriale francese.

Vale la pena di soffermarsi sul segno del parametro  $\theta$ . Esso nel periodo pre-crisi è positivo per tutti i modelli, sia per il "Dax Performance Index" che per il "CAC 40".

Ciò appare in contrasto con la teoria, nel senso che, seguendo Engle<sup>8</sup>, all'aumentare delle variabili reali, la volatilità di lungo periodo dei rendimenti azionari dovrebbe diminuire.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, considerando il periodo post-crisi il segno di  $\theta$  cambia, diventando coerente con la teoria economica.

L'analisi dei motivi di questo cambiamento appare complessa; tuttavia, il fatto che nella fase post-crisi emerga un quadro di coerenza tra andamento dei mercati finanziari e dinamiche reali segnala la presenza di possibili effetti strutturali indotti dalla crisi. Questi potrebbero ricondursi sia al nuovo regime di politica monetaria europea, sia alla maggiore rilevanza attribuita all'andamento dei livelli di attività economica in un contesto di elevate interdipendenze produttive a livello globale.

#### Periodo post-crisi

DAX Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 3826.5(a) e 3860.79(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 3825.8(a) e 3856.341(b).

CAC Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 3649.28(a) e 3693.55(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 3651.25(a) e 3694.97(b).

Per quanto riguarda i modelli stimati nel periodo post-crisi, i risultati sono riportati nelle tabelle dalla A.18 alla A.21. In comune con il periodo post-crisi si ha la scarsa significatività del coefficiente ARCH per i modelli in cui l'evoluzione di g è descritta da un TGARCH(1,1), e la significatività dei parametri  $\theta$  e dei pesi del polinomio Beta. La non significatività dell'intercetta del MIDAS si ha solo per il "CAC 40".

Emerge immediatamente, come accennato nel paragrafo precedente, il cambiamento di segno di  $\theta$  e, soprattutto, la grandezza in valore assoluto del parametro.

L'approccio Beta restricted stavolta fornisce performance leggermente migliori per il "CAC 40", mentre per il DAX questo è l'unico caso in cui né  $\theta$  né i pesi del polinomio Beta sono

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Robert F Engle e Jose Gonzalo Rangel. "The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroeconomic causes". In: *The Review of Financial Studies* 21.3 (2008), pp. 1187–1222.

significativi. In Figura A.13 è riportato lo schema dei pesi Beta restricted del GARCH-MIDAS relativo al DAX, dove si può notare la decrescenza dei pesi assegnati ai valori passati delle variazioni della produzione industrali al crescere dei ritardi.

Anche in questo caso, si evidenzia il comportamento oscillatorio della componente di breve periodo attorno a quella di lungo (Fig. A.10 e A.12). È interessante sottolineare come, sia per l'indice tedesco sia per quello francese, ad una maggiore ampiezza in valore assoluto del parametro  $\theta$  si accompagni un valore ancora minore della somma di  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  del GARCH(1,1), rispetto al periodo pre-crisi. Utilizzando tali informazioni, è possibile rilevare come l'influenza delle variazioni della produzione industriale sulla volatilità di medio-lungo periodo sia ora di gran lunga maggiore rispetto alla fase precedente la crisi.

## Capitolo 6

# Applicazione dei modelli a un problema di portafoglio

#### 6.1 Specificazione del problema di portafoglio

Un'applicazione dei modelli GARCH e GARCH-MIDAS è sicuramente l'allocazione di portafoglio. Le stime, a partire da questi modelli, di varianze e covarianze, possono essere utilizzate per la costruzione di portafogli efficienti.

A tal fine, utilizzeremo l'approccio media-varianza di Markowitz<sup>1</sup>. In particolare, in questo lavoro ci si pone l'obiettivo di minimizzare la varianza tramite la costruzione del "Minimum variance portfolio".

Supponiamo che un portafoglio sia composto da k titoli rischiosi e indichiamo con  $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, \dots, r_{k,t})^T$  il vettore contenente i rendimenti dei singoli asset al tempo t. Indichiamo poi con  $\mathbf{w}_t = (w_{1,t}, \dots, w_{k,t})^T$  il vettore dei pesi assegnati ai k titoli presenti nel portafoglio al tempo t. Chiaramente, la somma dei pesi deve essere pari a uno.

Seguendo l'approccio di Markowitz, si ha che, per ogni t, il rendimento di portafoglio è pari a  $\mathbf{w_t}^T \mathbf{r_t}$  e la varianza di portafoglio è pari a  $\mathbf{w}_t^T \mathbf{V}_t \mathbf{w_t}$ , dove  $\mathbf{V}_t$  è la matrice di varianze-covarianze al tempo t.

 $\mathbf{V}_t$  presenta sulla diagonale principale le varianze dei rendimenti dei singoli asset, ed è completata dalle covarianze dei rendimenti dei vari asset.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Harry Markowitz. "Portfolio selection". In: The journal of finance 7.1 (1952), pp. 77–91.

L'obiettivo è, in ogni t, scegliere i pesi in modo da risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_{w} \mathbf{w}^{T} \mathbf{V}_{t} \mathbf{w}$$

$$\text{sub} \sum_{i=1}^{K} w_{i} = 1$$

$$(6.1)$$

Se si assume che sia possibile vendere titoli allo scoperto (pesi negativi), allora la soluzione del precedente problema di ottimizzazione è relativamente semplice:

$$\mathbf{w}_t = \frac{\mathbf{V}_t \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{1}} \tag{6.2}$$

dove 1 è il vettore k-dimensionale in cui ogni elemento è pari a uno. Il denominatore è semplicemente la somma di tutti gli elementi di  $\mathbf{V}_t^{-1}$ , e il numeratore è il vettore dove ogni elemento è la somma di ogni riga di  $\mathbf{V}_t^{-1}$ .

Come si può notare dall'Eq.B.14, i pesi ottimali dipendono unicamente da  $\mathbf{V}_t$ , composta dalle varianze e covarianze dei rendimenti degli asset.

Nell'applicazione successiva, prenderemo in considerazione due asset : il "DAX Performance Index" e il "CAC 40". Le varianze condizionate verranno stimate a partire del GARCH e del GARCH-MIDAS.

Per quanto riguarda la stima della covarianze, si utilizzerà, nel caso del GARCH, sia un modello multivariato (e.g. DCC-GARCH) che approccio proposto da Tsay<sup>2</sup>.

Per quanto riguarda la costruzione dei portafogli utilizzando i GARCH-MIDAS, per la stima delle covarianze verrà usato solo il metodo proposto da Tsay. In base a quest'ultimo, è possibile studiare l'evoluzione delle covarianze a partire dai GARCH univariati.

Siano  $x_t$  e  $y_t$  i rendimenti di due asset.

Dalla teoria si ha che

$$Var(x_t + y_t) = Var(x_t) + 2Cov(x_t, y_t) + Var(y_t)$$
$$Var(x_t - y_t) = Var(x_t) - 2Cov(x_t, y_t) + Var(y_t).$$

Si ricava dunque che

$$Cov(x_t, y_t) = \frac{Var(x_t + y_t) - Var(x_t - y_t)}{4}$$
 (6.3)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ruey S Tsay. An introduction to analysis of financial data with R. John Wiley & Sons, 2014.

Questo approccio continua a valere per le covarianze condizionate, che quindi possono essere ottenute, in ogni periodo t, sulla base delle volatilità di  $(x_t + y_t)$  e  $(x_t - y_t)$ .

Dall'Eq 3.4 possiamo anche ottenere la relazione che descrive l'evoluzione del coefficiente di correlazione nel tempo.

$$\rho_t = \frac{\sigma_{x+y,t}^2 - \sigma_{x-y,t}^2}{4\sigma_{x,t}\sigma_{y,t}}$$

Sempre seguendo Tsay, l'unica controindicazione relativa a questo approccio è il fatto che in alcuni periodi la matrice varianze-covarianze potrebbe non risultare definita positiva.

Qualora ciò si verificasse, in uno o più giorni, si ometteranno i valori dei pesi ottenuti nei periodi problematici; il rendimento e la volatilità del giorno successivo verranno quindi calcolati ipotizzando di non aver ribilanciato il portafoglio, mantenendo invariati i pesi del giorno precedente.

#### DCC-GARCH

Il modello DCC-GARCH è uno dei modelli multivariati più utilizzati per la stima delle covarianze condizionate. Come l'approccio descritto nel precedente paragrafo, anche questo modello permette alle covarianze condizionate, e conseguentemente anche ai coefficienti di correlazione, di variare nel tempo. Ne esistono varie versioni, tra cui quella di Engle<sup>3</sup> e quella di Tse e Tsui<sup>4</sup>.

In generale, la stima di un DCC-GARCH si basa su due passaggi.

Innanzitutto, si stimano i GARCH univariati; dopodichè si utilizzano i residui standardizzati per ricavare lo stimatore dei coefficienti di correlazione condizionati. In particolare, Engle propose il seguente modello :

$$\boldsymbol{\rho}_t = \mathbf{J}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{J}_t$$

dove  $\mathbf{Q}_t = (q_{ij,t})_{kxk}$  è una matrice definita positiva,  $\mathbf{J}_t = diag[q_{11,t}^{-1/2},..,q_{kk,t}^{-1/2}]$ , e  $\mathbf{Q}_t$  è definita come :

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{\mathbf{Q}} + \theta_1 \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}'_{t-1} + \theta_2 \mathbf{Q}_{t-1}, \tag{6.4}$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Robert Engle. "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models". In: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3 (2002), pp. 339–350.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Yiu Kuen Tse e Albert K C Tsui. "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations". In: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3 (2002), pp. 351–362.

dove  $\epsilon_t$  è il vettore composto dalle innovazioni standardizzate  $\epsilon_{it} = a_{it}/\sqrt{\sigma_{ii,t}}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$  è la matrice delle varianze non condizionate di  $\epsilon_t$ , e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono parametri positivi che soddisfano la seguente condizione :  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$ . La matrice  $\mathbf{J}_t$  è una matrice di normalizzazione per garantire che  $\boldsymbol{\rho}_t$  sia una matrice di correlazione.

Nel caso bivariato (2 asset) il coefficiente di correlazione condizionato può essere scritto come:

$$\rho_{12,t} = \frac{q_{12}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1(\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}) + \theta_2q_{12,t-1}}{\sqrt{(q_{11}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1\epsilon_{11,t-1}^2 + \theta_2q_{11}, t - 1)(q_{22}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1\epsilon_{22,t-1}^2 + \theta_2q_{22,t-1})}}$$
(6.5)

#### 6.2 Analisi dei risultati

Passiamo ora ad illustrare un'applicazione della metodologia discussa nella sezione precedente.

In questa analisi verranno considerati due asset, il "DAX Performance Index" e il "CAC 40", e si costruirà il "Minimum variance portfolio" ribilanciato giornalmente, dove i pesi ottimali verranno calcolati ogni giorno sulla base delle stime di varianze e covarianze del giorno precedente, effettuate tramite GARCH e GARCH-MIDAS. In particolare, per quanto riguarda il GARCH, le covarianze verranno stimate sia utilizzando l'approccio di Tsay, sia il DCC-GARCH.

In altre parole, in t si stima  $V_t$  nel modo descritto nel paragrafo precedente; succrssivamente, vengono ottenuti i pesi ottimali del "Minimum Variance Portfolio", e in t+1 si investe nei due indici azionari.

Questo schema viene ripetuto per ogni t.

In particolare, i portafogli che verranno analizzati sono due.

Il primo è relativo al periodo che va dal 3/08/2007 al 28/09/2007; le varianze e covarianze del portafoglio costruito a partire dai GARCH-MIDAS sono state ottenute dai modelli relativi al periodo pre-crisi, usando un approccio Beta unrestricted e 18 lags della variabile macroeconomica.

Il secondo si riferisce al periodo che va dal 14/05/2019 al 29/06/2019; le varianze e covarianze del portafoglio costruito a partire dai GARCH-MIDAS sono state ottenute dai modelli relativi al periodo post-crisi, usando un approccio Beta unrestricted e 16 lags della variabile macroeconomica.

Le performance dei portafogli ottenuti verranno valutate e confrontate tramite lo Sharpe ratio<sup>5</sup> calcolato sulla base dei rendimenti e volatilità medie giornaliere dei portafogli.

Il benchmark sarà rappresentato da un equally weighted portfolio (50-50) e la presenza di costi di transazione verrà ignorata. Per calcolare la varianza dell'equally weighted portfolio, si è presa in considerazione la covarianza campionaria relativa dei due indici azionari. Dal momento che l'obiettivo principale è la minimizzazione della volatilità, si confronteranno anche le singole volatilità dei portafogli, a prescindere dal rendimento ottenuto. Consideriamo i portafogli ottenuti nel primo periodo.

I portafogli ottenuti tramite GARCH e GARCH-MIDAS utilizzando l'approccio di Tsay verranno chiamati portafoglio GARCH e portafoglio MIDAS, rispettivamente. Quello ottenuto tramite DCC-GARCH verrà chiamato portafoglio DCC.

La Tabella 6.1 mostra rendimenti e volatilità giornalieri, nonché lo Sharpe ratio annualizzato dei portafogli ottenuti investendo dal 3/08/2007 al 28/09/2007. Il portafoglio MIDAS raggiunge le performance migliori in termini di trade-off tra rischio e rendimento, seguito dal portafoglio DCC. Tuttavia, la volatilità minore viene raggiunta dal portafoglio GARCH.

Un risultato che appare di una certa rilevanza è che i tre portafogli mostrano volatilità minore rispetto a un portafoglio non ribilanciato.

Per quanto riguarda l'evoluzione dei pesi nel tempo (Fig. A.14 - A.15 - A.16), si può notare un andamento pressoché omogeneo tra il portafoglio GARCH e il portafoglio MIDAS. Il portafoglio DCC mostra una maggiore stabilità nella struttura dei pesi. In tutti e tre i casi si investe a leva sul DAX, che nel campione considerato è risultato l'indice con volatilità più bassa.

Consideriamo ora la Tabella 6.2, in cui sono descritti i risultati dei portafogli ottenuti investendo dal 14/05/2019 al 29/06/2019.

$$\frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

, dove  $R_p$  è il rendimento medio di portafoglio,  $\sigma_p$  è la deviazione standard dei rendimenti, e  $R_f$  è il tasso risk - free. Se rendimenti e volatilità sono giornalieri, lo Sharpe ratio può essere annualizzato moltiplicando il valore giornaliero per  $\sqrt{252}$ . Nella nostra analisi, abbiamo utilizzato un tasso risk-free del 3 percento annuo per il primo periodo, e, un tasso risk-free nullo nel secondo periodo. In quest'ultimo caso, avremmo potuto utilizzare addirittura un tasso risk-free minore di zero, considerando la negatività dei tassi trimestrali dei government bonds tedeschi.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Lo Sharpe ratio è definito come :

Questa volta, il portafoglio MIDAS è quello che ha performance peggiori in termini di Sharpe Ratio; sia sotto questo punto di vista che dal punto di vista della sola volatilità, i tre portafogli risultano chiaramente peggiori rispetto all'" Equally weighted portfolio".

Per quanto riguarda l'evoluzione dei pesi (Figure A.17 - A.18 - A.19), la situazione appare meno nitida rispetto al caso precedente.

In questo caso, la differenza tra l'evoluzione dei pesi del portafoglio MIDAS e quella dei portafogli GARCH e DCC appare più marcata. Nel caso del GARCH e del DCC, i ribilanciamenti sembrano essere più frenetici. Considerando le evoluzioni delle varianze di portafoglio per entrambi i periodi (Fig. A.18:A.21), non sembrano emergere sostanziali differenze tra i tre modelli.

In definitiva, il GARCH-MIDAS può rappresentare un approccio alternativo al GARCH per l'allocazione di portafoglio; tuttavia, dalle analisi effettuate non appare evidente una migliore performance dei portafogli costruiti a partire da tale modello rispetto a quelli costruiti tramite GARCH oppure utilizzando un DCC-GARCH.

**Tabella 6.1:** Rendimenti, volatilità e Sharpe ratio dei portafogli costruiti dal 3/08/2007 al 28/09/2007.

	Media	Dev.standard	Sharpe ratio
GARCH	0.046	0.95	0.63
GARCH-MIDAS	0.168	1.18	2.15
Eq.weighted	0.0725	1.297	0.89
DCC-GARCH	0.15	1.08	2.12

**Tabella 6.2:** Rendimenti, volatilità e Sharpe ratio dei portafogli costruiti dal 14/05/2019 al 29/06/2019.

	Media	Dev.standard	Sharpe ratio
GARCH	0.1	0.91	1.74
GARCH-MIDAS	0.04	0.89	0.73
Eq.weighted	0.12	0.80	2.38
DCC-GARCH	0.08	0.88	1.44

## Capitolo 7

### Conclusioni

Il percorso di analisi presentato in questo lavoro evidenzia come l'applicazione del modello GARCH-MIDAS agli indici CAC francese e DAX tedesco, pur mostrando limiti nella rappresentazione di fasi economiche caratterizzate da eccezionale instabilità, evidenzi una buona performance sia nel periodo pre-crisi sia in quello post-crisi, confermando il contributo degli indici di produzione industriale tedesco e francese alla spiegazione della volatilità di lungo periodo..

Tale efficacia aumenta in modo significativo quando nella specificazione del modello si tiene conto del cosiddetto "Leverage effect" per la stima della volatilità di breve periodo. Questo risultato è ottenuto utilizzando il modello TGARCH.

I risultati delle stime relative ai due periodi pre e post-crisi, evidenziano un cambiamento di segno del parametro  $\theta$ , che descrive l'intensità e il segno della relazione tra volatilità dei rendimenti e dinamica della produzione industriale.

In particolare, dopo la crisi si è riscontrata, per entrambe le serie CAC e DAX, una relazione inversa e più intensa, rispetto al periodo pre-crisi, tra tassi di variazione della produzione industriale e volatilità dei rendimenti degli indici azionari.

L'analisi dei motivi di questo cambiamento appare complessa; tuttavia, il fatto che nella fase post-crisi emerga un quadro di coerenza tra andamento dei mercati finanziari e dinamiche reali segnala la presenza di possibili cambiamenti strutturali nelle relazioni tra le variabili verosimilmente collegabili alla crisi. Questo risultato appare significativo in termini di riscontro delle cause macroeconomiche della volatilità dei mercati finanziari e dei conseguenti fattori di rischio/opportunità derivanti dall'evoluzione dell'economia reale.

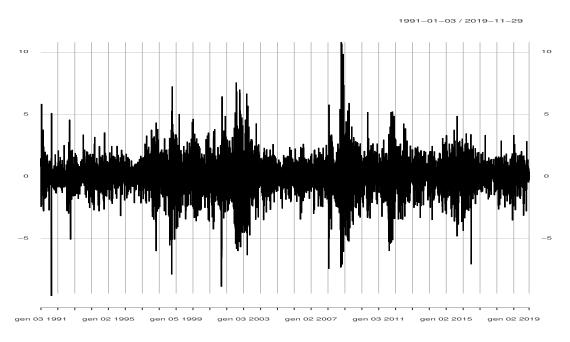
Infine, sono state analizzate le performance del GARCH-MIDAS per le scelte di portafoglio, comparandole con quelle del GARCH, di un DCC-GARCH e di un "equally weighted portfolio".

In questo contesto il GARCH-MIDAS sembra costituire una valida alternativa , permettendo a un investitore di ribilanciare un portafoglio in base alle stime di varianze e covarianze prodotte dal modello.

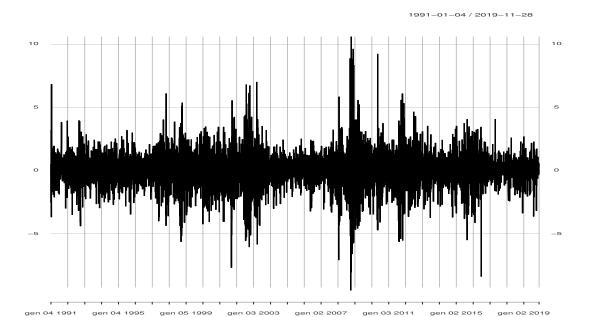
Le analisi di portafoglio presentate sembrano costituire un aspetto innovativo del lavoro ma l'approfondimento dettagliato delle caratteristiche del GARCH-MIDAS costituisce obiettivi futuri di analisi.

# Appendice A

# Figure e Tabelle



**Figura A.1:** Serie storica dei rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "DAX Performance Index" dal 3/01/1991 al 29/11/2019



**Figura A.2:** Serie storica dei rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "CAC 40" dal 3/01/1991 al 29/11/2019

Tabella A.1: Statistiche di base delle serie

(a)			(b)
	CAC 40		Dax Performance Index
Min	-9.471537	Min	-9.627704
Max	10.594590	Max	10.797468
1. Quartile	-0.655376	1. Quartile	-0.620552
3. Quartile	0.730323	3. Quartile	0.722791
Media	0.015448	Media	0.026385
Mediana	0.036180	Mediana	0.079645
Dev.standard	1.349229	Dev.standard	1.382026
Asimmetria	-0.062013	Asimmetria	-0.151074
Curtosi	4.854699	Curtosi	4.950660

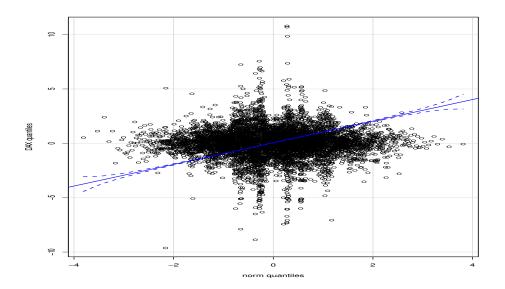


Figura A.3: Q-Q Plot dei rendimenti logaritmici giornalieri del "DAX Performance Index" (3/01/1991 - 29/11/2019)

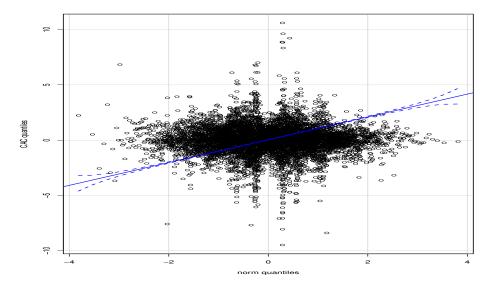
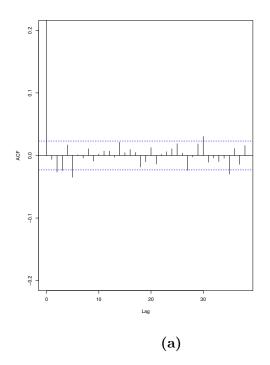
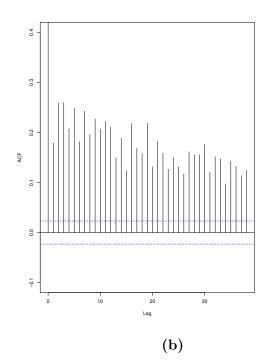


Figura A.4: Q-Q Plot dei rendimenti logaritmici giornalieri del "CAC 40" (3/01/1991 - 29/11/2019)

**Tabella A.2:** Test di Jarque-Bera sui rendimenti logaritmici percentuali giornalieri del "DAX Performance Index" e del "CAC 40" (3/01/1991 - 29/11/2019)

method	p.value	statistic	
Jarque-Bera Test; Null hypothesis: normality of returns	0.00	7456.1	DAX
method	p.value	statistic	
Jarque-Bera Test; Null hypothesis: normality of returns	0.00	7266.6	CAC





**Figura A.5:** (a)ACF dei rendimenti logaritmici percentuali,(b)ACF dei rendimenti logaritmici percentuali al quadrato (riferiti alla serie dei rendimenti del "DAX Performance Index" dal 3/01/1991 al 29/11/2019

Tabella A.3: ARCH-Test sulle serie dei rendimenti

	statistic	p.value	df	method
DAX	1300.70	0.00	12.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
	statistic	p.value	df	method
$\overline{C}$	1226.12	0.00	12.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

Tabella A.4: Ljung-Box Test sulle serie dei rendimenti

	statistic	p.value	df	method
DAX	22.14	0.01	10.00	Box-Ljung test
	statistic	p.value	df	method
CAC	51.70	0.00	10.00	Box-Ljung test

Tabella A.5: GARCH(1,1)

### (a) DAX Performance Index

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
				( 1 1/
$\mu$	0.077	0.010	7.480	0
$\alpha_0$	0.015	0.003	4.573	0
$\alpha_1$	0.084	0.008	11.049	0
$\beta_1$	0.910	0.008	116.202	0

**(b)** CAC 40

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
$\mu$	0.060	0.010	5.884	0
$\alpha_0$	0.017	0.004	4.524	0
$\alpha_1$	0.082	0.008	10.291	0
$\beta_1$	0.910	0.008	107.460	0

Tabella A.6: ARCH-TEST residui standardizzati  $\operatorname{GARCH}(1,\!1)$ 

	statistic	p.value	df	method
1	3.80	0.96	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
	statistic	p.value	df	method
1	11.34	0.33	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

Tabella A.7: EGARCH(1,1)

(a) Dax Performance Index

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
$\mu$	0.051	0.012	4.246	0.00002
$\alpha_0$	0.003	0.002	1.711	0.087
$\gamma$	-0.087	0.007	-11.955	0
$\beta_1$	0.984	0.001	1,242.558	0
$\alpha_1$	0.142	0.010	14.611	0

**(b)** CAC 40

	Estimate	Std. Error	t value	$\Pr(> t )$
$\mu$	0.029	0.011	2.629	0.009
$\alpha_0$	0.003	0.002	1.547	0.122
$\gamma$	-0.103	0.007	-13.800	0
$\beta_1$	0.983	0.001	1,371.711	0
$\alpha_1$	0.132	0.010	12.770	0

Tabella A.8: ARCH-TEST residui standardizzati EGARCH(1,1)

	statistic	p.value	df	method
DAX	2.66	0.99	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
	statistic	p.value	df	method

Tabella A.9: CSGARCH(1,1)

(a) Dax Performance Index

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
$\mu$	0.078	0.010	7.641	0
$\alpha_0$	0.005	0.001	7.782	0
$\alpha_1$	0.051	0.0003	183.808	0
$\beta_1$	0.910	0.0002	4,232.015	0
$\rho$	0.998	0.00000	332,904.000	0
$\phi$	0.039	0.001	43.958	0

**(b)** CAC 40

	Estimate	Std. Error	t value	$\Pr(> t )$
$\mu$	0.061	0.010	6.078	0
$\alpha_0$	0.006	0.001	8.765	0
$\alpha_1$	0.055	0.001	61.638	0
$\beta_1$	0.898	0.016	56.961	0
$\rho$	0.997	0.00000	506, 736.400	0
$\phi$	0.037	0.003	12.841	0

Tabella A.10: ARCH-TEST residui standardizzati CSGARCH(1,1)

	statistic	p.value	DF	method
DAX	3.73	0.96	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
	statistic	p.value	DF	method
CAC	10.35	0.41	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

Tabella A.11: TGARCH(1,1)

(a) DAX Performance Index

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
$\mu$	0.053	0.011	4.664	0.00000
$\alpha_0$	0.022	0.004	6.027	0
$\alpha_1$	0.019	0.006	3.154	0.002
$\beta_1$	0.905	0.008	119.937	0
$\gamma$	0.125	0.013	9.390	0

**(b)** CAC 40

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
$\mu$	0.034	0.012	2.920	0.003
$\alpha_0$	0.023	0.004	5.835	0
$\alpha_1$	0.008	0.006	1.477	0.140
$\beta_1$	0.910	0.008	112.813	0
$\gamma$	0.134	0.013	10.200	0

Tabella A.12: ARCH-TEST residui standardizzati CSGARCH(1,1)

	statistic	p.value	DF	method
DAX	3.71	0.96	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
	statistic	p.value	DF	method
CAC	5.03	0.89	10.00	ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

**Tabella A.13:** GARCH-MIDAS stimati a partire dai rendimenti logaritmici giornalieri del "DAX Performance Index" (a) e del "CAC 40" (b) dal 01/01/1991 al 28/11/2019.

Per modellare la componente di medio-lungo periodo  $\tau$  sono stati considerati 18 lags. La componente di breve periodo della volatilità è stata stimata utilizzando un TGARCH(1,1). Per lo schema dei pesi si è adottato un approccio Beta restricted (w1 = 1).

		(a)	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.04	0.01	0.002
$\alpha_1$	0.017	0.006	0.009
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.12	0.012	0.00
m	0.5	0.13	0.00
$\theta$	-0.07	0.08	0.4
w2	5.05	2.62	0.05
		(b)	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.018	0.015	0.21
$\alpha_1$	0.004	0.0072	0.525
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.13	0.016	0.00
m	0.45	0.29	0.15
$\theta$	0.42	0.29	0.14
w2	1.00	0.39	0.01

**Tabella A.14:** GARCH-MIDAS "DAX Performance Index" dal 01/01/1991 al 28/09/2007. Beta unrestricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

		(a)	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.05	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.02	0.01	0.04
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.10	0.02	0.00
m	0.23	0.11	0.04
$\theta$	0.60	0.20	0.00
w1	8.93	2.96	0.00
w2	4.68	1.31	0.00
		<b>(b)</b> b	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.08	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.07	0.00	0.00
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
m	0.35	0.14	0.01
$\theta$	0.66	0.24	0.00
w1	6.60	2.77	0.02
w2	3.44	1.31	0.01

**Tabella A.15:** GARCH-MIDAS "DAX Performance Index" dal 01/01/1991 al 28/09/2007. Beta restricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

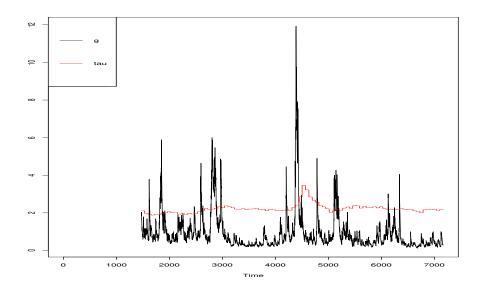
		(a)	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.06	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.03	0.01	0.00
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.09	0.01	0.00
m	0.18	0.17	0.27
$\theta$	0.47	0.24	0.05
w2	1.17	0.21	0.00
		(b)	
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.08	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.08	0.00	0.00
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
m	0.28	0.25	0.27
$\theta$	0.61	0.28	0.03
w2	1.04	0.25	0.00

Tabella A.16: GARCH-MIDAS "CAC 40" dal 01/01/1991 al 28/09/2007. Beta unrestricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

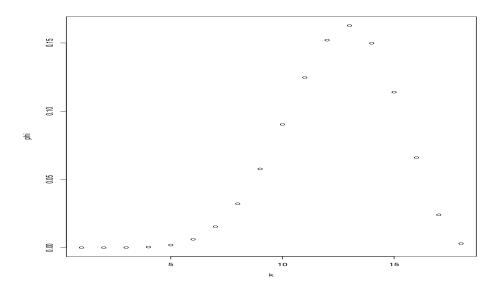
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.04	0.02	0.05
$\alpha_1$	0.00	0.01	1.00
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.12	0.02	0.00
m	-0.12	0.13	0.33
$\theta$	1.08	0.18	0.00
w1	4.24	1.72	0.01
w2	2.93	0.88	0.00
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.07	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.07	0.01	0.00
$\beta_1$	0.90	0.02	0.00
m	-0.06	0.13	0.64
$\theta$	1.10	0.22	0.00
w1	3.98	1.80	0.03
w2	2.52	0.91	0.01

Tabella A.17: GARCH-MIDAS "CAC 40" dal 01/01/1991 al 28/09/2007. Beta unrestricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

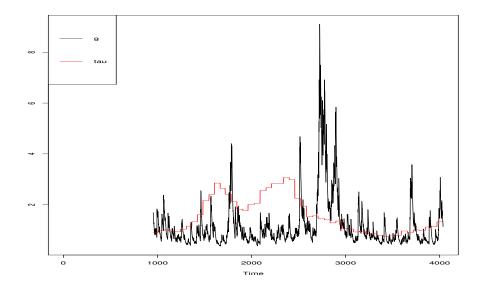
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.04	0.02	0.05
$\alpha_1$	0.00	0.01	0.94
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.12	0.02	0.00
m	-0.20	0.13	0.13
$\theta$	1.21	0.17	0.00
w2	1.37	0.20	0.00
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.07	0.02	0.00
$\alpha_1$	0.07	0.00	0.00
$\beta_1$	0.90	0.00	0.00
m	-0.12	0.12	0.35
$\theta$	1.21	0.21	0.00
w2	1.04	0.20	0.00



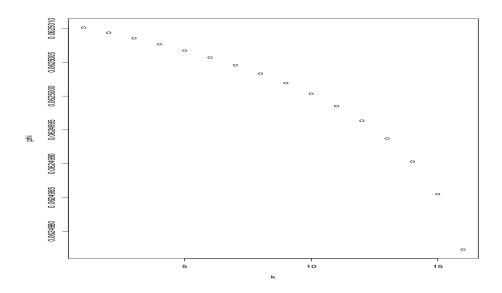
**Figura A.6:** Evoluzione nel tempo di g e tau (a) nel GARCH-MIDAS (DAX : 1/01/1991-28/09/2007), nel caso Beta unrestricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



**Figura A.7:** Schema dei pesi nel GARCH-MIDAS (DAX : 1/01/1991-28/09/2007), nel caso Beta unrestricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



**Figura A.8:** Evoluzione nel tempo di g e tau (a) nel GARCH-MIDAS (CAC : 1/01/1991-28/09/2007), nel caso Beta restricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



**Figura A.9:** Schema dei pesi nel GARCH-MIDAS (CAC : 1/01/1991-28/09/2007), nel caso Beta restricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.

**Tabella A.18:** GARCH-MIDAS "DAX Performance Index" dal 01/04/2010 al 28/06/2019. Beta unrestricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.01	0.02	0.61
$\alpha_1$	0.00	0.03	1.00
$\beta_1$	0.91	0.00	0.00
$\gamma$	0.13	0.03	0.00
m	1.52	0.47	0.00
$\theta$	-4.11	1.23	0.00
w1	1.75	0.38	0.00
w2	1.84	0.27	0.00
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.05	0.03	0.05
$\alpha_1$	0.08	0.00	0.00
$\beta_1$	0.90	0.00	0.00
m	0.65	0.40	0.10
$\theta$	-1.30	1.34	0.33
w1	8.13	9.85	0.41
w2	3.91	2.49	0.12

**Tabella A.19:** GARCH-MIDAS "DAX Performance Index" dal 01/04/2010 al 28/06/2019. Beta restricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.01	0.02	0.57
$\alpha_1$	0.00	0.02	1.00
$\beta_1$	0.89	0.00	0.00
$\gamma$	0.15	0.03	0.00
m	0.97	0.30	0.00
$\theta$	-2.41	0.71	0.00
w2	1.27	0.16	0.00
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.05	0.03	0.05
$\alpha_1$	0.09	0.01	0.00
$\beta_1$	0.88	0.00	0.00
m	0.97	0.36	0.01
$\theta$	-2.15	0.81	0.01
w2	1.26	0.19	0.00

Tabella A.20: GARCH-MIDAS "CAC 40" dal 01/04/2010 al 28/06/2019. Beta unrestricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

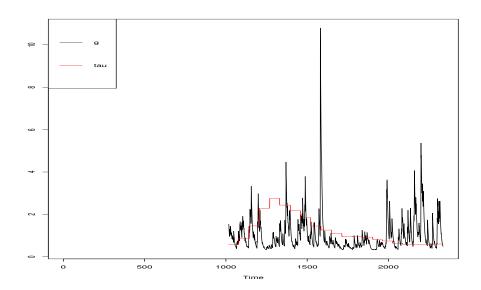
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.03	0.02	0.23
$\alpha_1$	0.00	0.03	1.00
$\beta_1$	0.86	0.02	0.00
$\gamma$	0.20	0.03	0.00
m	0.01	0.27	0.97
$\theta$	-1.80	0.51	0.00
w1	5.79	2.64	0.03
w2	2.65	1.12	0.02
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.06	0.02	0.01
$\alpha_1$	0.13	0.04	0.00
$\beta_1$	0.81	0.05	0.00
$eta_1$	0.81 0.07	0.05 0.23	0.00 0.78
, -			
m	0.07	0.23	0.78
$\frac{1}{\theta}$	0.07 -1.85	0.23 0.50	0.78 0.00

**Tabella A.21:** GARCH-MIDAS "CAC 40" dal 01/04/2010 al 28/06/2019. Beta restricted e TGARCH(1,1)(a), GARCH(1,1)(b) per la varianza di breve.

	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.03	0.02	0.20
$\alpha_1$	0.00	0.03	0.99
$\beta_1$	0.85	0.05	0.00
$\gamma$	0.21	0.07	0.00
m	0.23	0.32	0.48
$\theta$	-2.14	0.74	0.00
w2	1.00	0.25	0.00
	estimate	rob.std.err	p.value
$\mu$	0.06	0.02	0.01
$\alpha_1$	0.14	0.04	0.00
$\beta_1$	0.81	0.05	0.00
m	0.31	0.25	0.21
$\theta$	-2.17	0.89	0.02
w2	1.00	0.33	0.00

Tabella A.22: DCC-GARCH (01/01/1991 - 28/09/2007) utilizzando un TGARCH per la stima dei GARCH univariati

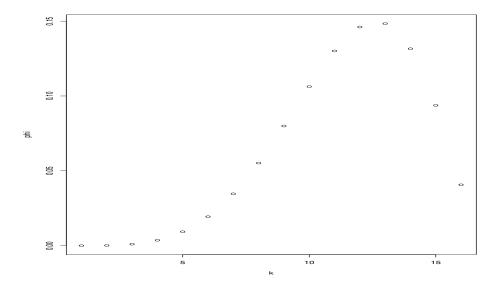
	Estimate	Std. Error	t value	Pvalue
$\mu(DAX)$	0.04	0.02	2.77	0.01
$\alpha_0(DAX)$	0.02	0.01	4.06	0.00
$\alpha_1(DAX)$	0.03	0.01	3.29	0.00
$\beta_1(DAX)$	0.91	0.01	80.02	0.00
$\gamma(DAX)$	0.09	0.02	4.56	0.00
$\mu(CAC)$	0.02	0.02	1.26	0.21
$\alpha_0(CAC)$	0.02	0.01	3.69	0.00
$\alpha_1(CAC)$	0.02	0.01	2.14	0.03
$\beta_1(CAC)$	0.93	0.01	79.89	0.00
$\gamma(CAC)$	0.08	0.01	5.47	0.00
$ heta_1$	0.03	0.01	4.20	0.00
$ heta_2$	0.97	0.01	113.15	0.00



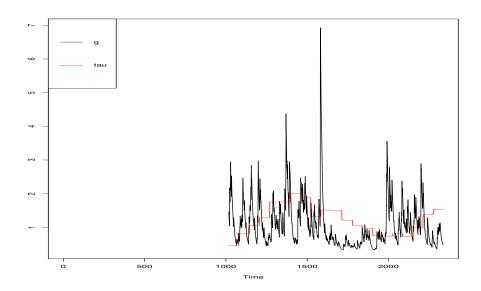
**Figura A.10:** Evoluzione nel tempo di g e tau (a) nel GARCH-MIDAS (CAC : 1/04/2010-28/06/2019), nel caso Beta unrestricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.

Tabella A.23: DCC-GARCH (01/04/2010 - 28/06/2019) utilizzando un TGARCH per la stima dei GARCH univariati

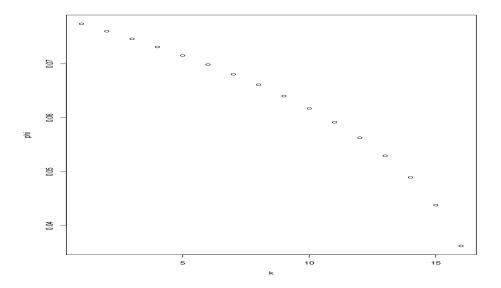
	Estimate	Std. Error	t value	Pvalue
$\mu(DAX)$	0.03	0.02	1.57	0.12
$\alpha_0(DAX)$	0.03	0.01	2.31	0.02
$\alpha_1(DAX)$	0.00	0.01	0.00	1.00
$\beta_1(DAX)$	0.91	0.03	34.45	0.00
$\gamma(DAX)$	0.13	0.03	4.17	0.00
$\mu(CAC)$	0.01	0.02	0.61	0.54
$\alpha_0(CAC)$	0.03	0.01	2.64	0.01
$\alpha_1(CAC)$	0.00	0.02	0.00	1.00
$\beta_1(CAC)$	0.88	0.03	28.49	0.00
$\gamma(CAC)$	0.20	0.04	4.65	0.00
$ heta_1$	0.04	0.01	5.28	0.00
$ heta_2$	0.92	0.01	64.69	0.00



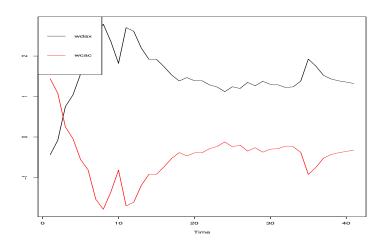
**Figura A.11:** Schema dei pesi nel GARCH-MIDAS (CAC : 1/04/2010-28/06/2019), nel caso Beta unrestricted , e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



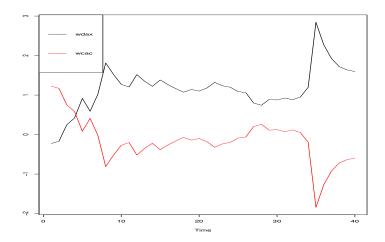
**Figura A.12:** Evoluzione nel tempo di g e tau (a) nel GARCH-MIDAS (DAX : 1/04/2010-28/06/2019), nel caso Beta restricted e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



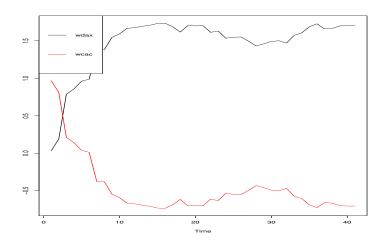
**Figura A.13:** Schema dei pesi nel GARCH-MIDAS (DAX : 1/04/2010-28/06/2019), nel caso Beta restricted (pesi decrescenti), e utilizzando un TGARCH(1,1) per descrivere l'andamento di g.



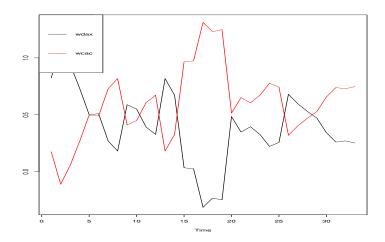
**Figura A.14:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite GARCH (3/08/2007 - 28/09/2007)



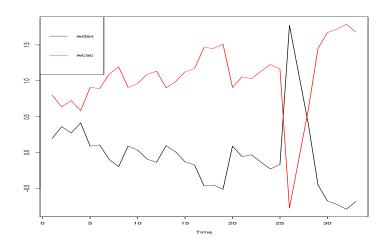
**Figura A.15:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite GARCH-MIDAS (3/08/2007 - 28/09/2007)



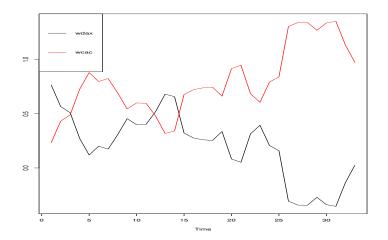
**Figura A.16:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite DCC-GARCH (3/08/2007 - 28/09/2007)



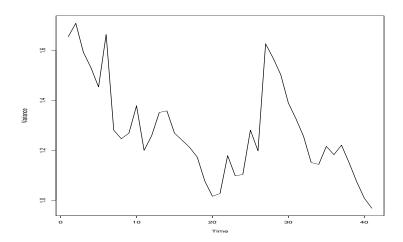
**Figura A.17:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite GARCH (14/05/2019 - 28/06/2019)



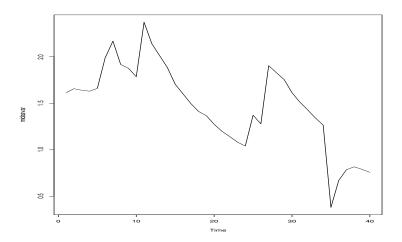
**Figura A.18:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite GARCH-MIDAS (14/05/2019 - 28/06/2019)



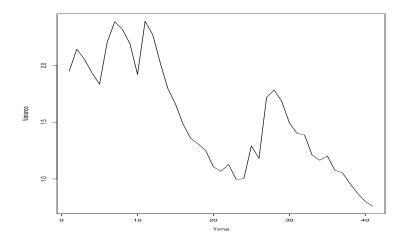
**Figura A.19:** Evoluzione nel tempo dei pesi assegnati a DAX e CAC nel portafoglio costruito tramite DCC-GARCH(14/05/2019 - 28/06/2019)



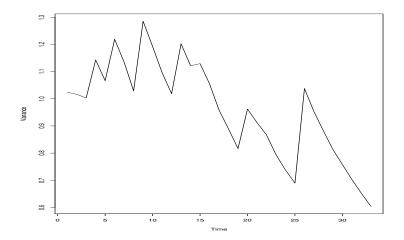
**Figura A.20:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite GARCH (3/08/2007 - 28/09/2007)



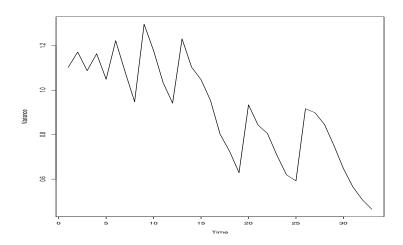
**Figura A.21:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite GARCH-MIDAS (3/08/2007 - 28/09/2007)



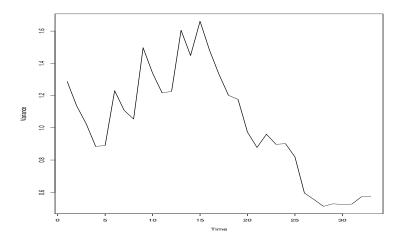
**Figura A.22:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite DCC-GARCH (3/08/2007 - 28/09/2007)



**Figura A.23:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite GARCH (14/05/2019 - 28/06/2019)



**Figura A.24:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite GARCH-MIDAS (14/05/2019 - 28/06/2019)



**Figura A.25:** Evoluzione nel tempo della varianza del portafoglio costruito tramite DCC-GARCH (14/05/2019 - 28/06/2019)

## Appendice B

### Riassunto

## Le principali caratteristiche dell'indice di borsa francese e tedesco

Le serie finanziarie sono caratterizzate dalla presenza di una elevata volatilità, caratteristica che le rende particolarmente complesse da modellare. In particolare in questo lavoro sono stati considerati gli indici di borsa principali del mercato tedesco e francese: il "DAX Performance Index" e il "CAC 40".

Il "DAX Performance Index" è un indice composto da titoli di 30 delle più rilevanti società tedesche quotate nella Borsa di Francoforte. Le sue performance, dunque, riflettono le condizioni del mercato azionario tedesco e, più in generale, dell'economia tedesca. Dato il ruolo cruciale che ha la Germania all'interno dell'Unione Europea ed in particolare dell'area dell'Euro, il suo andamento è seguito con estrema attenzione dagli operatori e, più in generale, dalle istituzioni a livello globale.

Il "CAC 40" è considerato dalla gran parte degli investitori il secondo indice azionario di riferimento dell'Eurozona. A differenza dell'indice tedesco, esso è composto anche da società che operano al di fuori della Francia; dunque le sue performance sono particolarmente influenzate, oltre che dallo stato di salute dell'economia francese, dalla situazione e dalle prospettive economiche dell'intera Eurozona.

Queste caratteristiche fanno si che l'andamento e lo stato di salute del mercato europeo possano essere valutati tenendo in considerazione l'andamento dei due indici. A partire dai

valori giornalieri di questi indici sono stati calcolati i rendimenti:

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \cdot 100 \tag{B.1}$$

Le dinamiche delle serie dei rendimenti dei due indici sono riportati nelle figure A.1 e A.2. Sebbene le serie mostrino una sostanziale stazionarietà attorno al valore medio, si alternano periodi in cui la volatilità è relativamente bassa a periodi in cui le oscillazioni dei rendimenti sono più ampie, come ad esempio durante la recente crisi (volatility clustering). ""Large changes tend to be followed by large changes, of either sign, and small changes tend to be followed by small changes."" Si tratta del fenomeno del cosiddetto volatility clustering. Inoltre, la volatilità tende a evolvere nel tempo in maniera continua, rendendo rari i casi di cambiamenti di livello concentrati e ampi e risulta, dal punto di vista statistico, spesso stazionaria, in quanto non diverge all'infinito. Un'altra importante caratteristica è il cosiddetto "Leverage effect", secondo il quale la volatilità sembra reagire in modo differente a seconda che si sia verificato un ampio aumento o un'ampia diminuzione dei prezzi azionari. Come gran parte delle serie finanziarie, le due serie presentano una leggera asimmetria negativa e leptocurtosi.

### I modelli ARCH-GARCH per la stima della volatilità

#### Struttura dei modelli a eteroschedasticità condizionata

Sia  $r_t$  il rendimento logaritmico di un'azione al tempo t. L'ipotesi alla base di ogni modello a eteroschedasticità condizionata è che la serie  $r_t$ , pur essendo serialmente incorrelata, sia una serie dipendente. A titolo di esempio, consideriamo la serie storica dei rendimenti logaritmici giornalieri percentuali del "DAX Performance Index" dal Gennaio del 1991 al Novembre del 2018 (Figura A.1). L'ACF campionaria della serie dei rendimenti (Figura A.5(a)) indica l'assenza di correlazione seriale significativa, tranne che per il quinto lag. Al contrario, analizzando l'ACF campionaria dei rendimenti logaritmici al quadrato (Figura A.5(b)), si nota chiaramente come quest'ultimi non siano serialmente indipendenti. Dunque, l'esame del quadro evidenziato dai vari grafici indica che i rendimenti risultano incorrelati ma dipendenti: i modelli per la volatilità cercano proprio di catturare tale dipendenza.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Mandelbrot, "The Variation of Certain Speculative Prices".

### Il modello ARCH

La presenza dei cluster di volatility che caratterizzano le serie finanziarie hanno reso necessaria l'introduzione di specifici modelli di serie storiche in grado di rappresentare questa
caratteristica. Il modello ARCH di Engle (1982).<sup>2</sup> rappresenta l'apporto analitico più importante in questa direzione. L'idea da cui parte il modello ARCH è che lo shock  $a_t$  di rendimento
di un asset sia serialmente incorrelato, ma dipendente; inoltre, la dipendenza di  $a_t$  è descritta
da una semplice funzione quadratica dei suoi valori passati. Nel modello ARCH l'elemento
innovativo è che la varianza condizionata varia nel tempo ed è funzione degli errori (shock)
nei periodi precedenti, ma la varianza non condizionata rimane costante. La struttura di un
modello ARCH(m) è la seguente:<sup>3</sup>

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots \alpha_m a_{t-m}^2, \qquad (B.2)$$

dove  $\{\epsilon_t\}$  è una sequenza di variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d) con media zero e varianza 1,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \ge 0$  per i > 0. Nella pratica, di solito si assume che  $\epsilon_t$  si distribuisca secondo una normale standard oppure una t di Student standardizzata. Quest'ultima è più utilizzata se si considerano serie finanziarie (nelle quali, empiricamente, valori estremi sono più frequenti rispetto a quelli che si riscontrerebbero se tali serie seguissero una distribuzione normale) - in quanto evidenzia code più spesse rispetto a una normale standard.

#### Il modello GARCH

I modelli GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroschedasticity) hanno rappresentato in letteratura lo sviluppo del modello ARCH.

Tali modelli permettono, avendo una struttura più parsimoniosa dell'ARCH, di ridurre il numero di parametri da stimare. Il primo modello GARCH, introdotto da Bollersev nel 1986,<sup>4</sup>è stato presentato come un'utile estensione del modello ARCH, in grado di ridurre significativamente il numero di parametri da stimare.

Sia sempre  $r_t$  il rendimento logaritmico di un asset al tempo t, e  $a_t = r_t$  -  $\mu_t$  lo shock al tempo t.

 $<sup>^2</sup>$ Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation".

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity".

 $a_t$  segue un processo GARCH(m,s) se

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$
  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_i \sigma_{t-j}^2,$  (B.3)

dove, analogamente a quanto avviene per il modello ARCH,  $\{\epsilon_t\}$  è una sequenza di variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d) con media zero e varianza 1,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \ge 0$ ,  $\beta_i \ge 0$ , e  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

Il GARCH(m,s) definito dall'eq. B.3 è un processo stazionario, con  $E(a_t) = 0$  e  $Var(a_t)$  (varianza non condizionata) =  $E(a_t^2) = \frac{\alpha_o}{1 - \sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$ .

### Le estensioni dei modelli GARCH

#### Il modello EGARCH

L'"Exponential GARCH model" fu teorizzato da Nelson nel 1991<sup>5</sup>, cpon la finalità di superare alcuni limiti del modello GARCH.

In particolare, esso modifica il GARCH per tenere conto del "Leverage effect", ovvero del fatto che la varianza condizionata reagisce in modo diverso a seconda che lo shock sia stato positivo o negativo. Per tenere conto di ciò, Nelson considera l'innovazione pesata

$$g(\epsilon_t) = \theta \epsilon_t + \gamma [|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)] \tag{B.4}$$

dove  $\theta$  e  $\gamma$  sono costanti reali.

Sia  $\epsilon_t$  che  $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$  sono sequenze i.i.d a media 0.

Quindi,  $E[g(\epsilon_t)] = 0$ .

Un modello EGARCH(m,s) è definito come

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$
  $ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\epsilon_{t-1}),$  (B.5)

La media non condizionata di  $\ln(\sigma_t^2)$  è  $\alpha_0$ .

Le differenze rispetto al tradizionale modello GARCH fanno riferimento al fatto che:

1) si utilizza il logaritmo della varianza condizionata per tenere conto dei vincoli di positività

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Nelson, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach".

dei parametri del modello;

2) l'uso di  $g(\epsilon_t)$  permette al modello di rispondere in modo asimmetrico a fronte di shock positivi e negativi dei valori passati di  $a_t$ .

#### Il modello TGARCH

Un altro modello spesso utilizzato per tenere conto del "Leverage effect" è il "Treshold Garch Model" (o TGARCH).<sup>6</sup>

Un TGARCH(m,s) è definito da

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s (\alpha_1 + \gamma_1 N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$
(B.6)

dove

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{se } a_{t-1} \ge 0. \end{cases}$$

e  $\alpha_1, \gamma_i e \beta_i$  sono numeri positivi.

Il modello, analogamente a quanto avviene nel modello EGARCH, tiene conto del "Leverage effect" in quanto, poichè  $\gamma_i \geq 0$ , il contributo che uno shock negativo dà alla varianza condizionata  $((\alpha_1 + \gamma_i)a_{t-1}^2)$  è maggiore rispetto al contributo dato da uno shock positivo  $(\alpha_i a_{t-1}^2)$ . In questo modello il grado di persistenza della volatilità è descritto dalla somma dei coefficienti  $\alpha, \beta e \gamma$ .

#### Il modello CSGARCH

Engle e Lee<sup>8</sup> considerano il GARCH nella sua versione classica, sostituendo però alla varianza non condizionata la "long-term volatility"  $q_t$ , che varia nel tempo seguendo un processo autoregressivo. Si ha quindi

$$\sigma_t^2 = q_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\epsilon_{t-j}^2 - q_{t-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j}^2 - q_{t-j})$$
(B.7)

$$q_t = w + \rho q_{t-1} + \omega (\epsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$$
(B.8)

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Glosten, Jagannathan e Runkle, "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks".

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Tsay, "Analysis of Financial Time Series: Third Edition".

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Engle e Lee, "A long-run and short-run component model of stock return volatility".

La componente permanente(trend) della volatilità è  $q_t$  ed è stocastica, e la differenza tra la volatilità condizionata e il suo trend è definita come la componente transitoria.

Negli ultimi anni molti autori hanno tentato di modellizzare il "trend" della volatilità, cercando di capire quali input utilizzare oltre al passato della volatilità stessa.

Nella prossima sezione verrà analizzato il modello che ha segnato una svolta in questo senso, incorporando nei modelli per la volatilità anche variabili macroeconomiche: il GARCH-MIDAS.

# Il modello GARCH-MIDAS

#### Struttura del modello

Sia  $r_{i,t}$  il rendimento relativo al giorno i del periodo t, la cui lunghezza può essere scelta arbitrariamente a seconda dell'analisi che si intende realizzare. In questo elaborato, seguendo il lavoro di Engle<sup>10</sup>, assumiamo che l'intervallo t sia pari ad un trimestre. Il GARCH-MIDAS assume che  $r_{i,t}$  segua il seguente processo:

$$r_t = \mu + \sqrt{\tau_t g_{i,t}} \epsilon_{i,t} \qquad \forall i = 1, ..., N_t$$
 (B.9)

dove  $\epsilon_{i,t}|\Phi_{i-1,t} \sim N(0,1)$  e  $\Phi_{i-1,t}$  è il set informativo relativo al giorno i-1 del trimestre t, e  $N_t$  è pari al numero di giorni di negoziazione nel trimestre t.

L'Eq. B.9 decompone la varianza in una componente di breve periodo  $(g_{i,t})$  e in una componente di lungo periodo  $(\tau_t)$ .

Rispetto alla dinamica della componente di lungo periodo  $\tau_t$  si possono introdurre diverse assunzioni. In particolare, si può imporre che essa non vari nel trimestre t (Fixed span), oppure si può assumere che essa vari giornalmente (Rolling window). In questo elaborato seguiremo il primo approccio.

La componente di breve periodo  $g_{i,t}$ , invece, segue un GARCH(1,1)

$$(1 - \alpha_1 - \beta_1) + \alpha \frac{(r_{1-i,t} - \mu)^2}{\tau_t} + \beta g_{i-1,t}$$
(B.10)

È possibile assumere che la volatilità di breve periodo segua un processo diverso da un semplice GARCH(1,1). Di seguito, nella sezione dedicata all'applicazione dei modelli a dati reali,

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Ghalanos, rugarch: Univariate GARCH models.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Engle, Ghysels e Sohn, "On the economic sources of stock market volatility".

utilizzeremo anche un TGARCH(1,1) per modellizzare  $g_t$ .

Per quanto riguarda la specificazione della componente  $\tau_t$ , esistono vari approcci possibili. In particolare, è possibile usare come regressore la volatilità realizzata, incorporare direttamente le variabili macroeconomiche, o una combinazione di entrambi. In questo elaborato utilizziamo l'approccio dell'incorporazione diretta delle variabili macroeconomiche.

Si ha quindi che

$$\tau_t = m + \theta \sum_{k=1}^{K} \phi_k(w1, w2) X_{t-k}$$
(B.11)

dove  $X_{t-k}$  rappresenta il livello di una variabile macroeconomica.

L'Eq.B.11 può essere estesa a più regressori, anche se ciò può portare a problemi di natura computazionale.

La varianza condizionata totale può essere definita come:

$$\sigma_{i,t}^2 = \tau_t \cdot g_{i,t}. \tag{B.12}$$

L'idea chiave del modello è che il contributo alla varianza condizionata è dato sia dalla componente di breve sia da quella di lungo periodo.

Più in particolare, la volatilità di breve periodo dovrebbe oscillare, in media, attorno a quella di medio-lungo periodo. Per completare la descrizione del modello va specificato lo schema dei pesi per l'Eq.B.11:

$$\phi_k(w1, w2) = \begin{cases} \frac{(k/K)^{w1-1}(1-k/K)^{w2-1}}{\sum_{j=1}^K (j/K)^{w1-1}(1-j/K)^{w2-1}} \\ w^k/(\sum_{j=1}^K w^j) \end{cases}$$

dove la somma dei pesi è pari ad uno. Lo funzione di ponderazione appena descritta ("Beta lag"), introdotta nel lavoro di Valkanov, Ghysels e Santa-Clara,  $^{11}$  è basata sulla funzione beta, ed è estremamente flessibile. In particolare, si può scegliere un approccio Beta restricted, in cui si pone w1 = 1 in modo da porre un vincolo affinchè w2 decresca al crescere dei lag, dando meno peso a osservazioni meno recenti.

In alternativa, si può utilizzare un approccio Beta unrestricted, in base al quale i pesi da assegnare ai valori passati della variabile macroeconomica vengono stimati dal modello senza porre vincolo.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Ghysels, Santa-Clara e Valkanov, "The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models".

# Stima dei modelli GARCH

La presenza di effetti ARCH porta a ritenere che sia necessaria l'implementazione di un modello per la volatilità. Verranno presi in considerazione tutti i modelli descritti nella Sezione 3.2. Data la non normalità delle serie, ipotizzeremo, per la stima di tutti i modelli, che il termine d'innovazione si distribuisca come una t di Student.

Sono stati stimati un GARCH(1,1), un EGARCH(1,1), un TGARCH(1,1) e un CSGARCH(1,1) per le due serie, e si è verificata l'adeguatezza dei modelli effettuando l'ARCH-Test per i residui standardizzati. I coefficienti e i relativi errori standard dei vari modelli stimati, nonchè i risultati dei test sui residui standardizzati, sono riportati dalla Tabella A.5 alla Tabella A.12. I modelli sembrano essere complessivamente adeguati, presentando nella maggior parte coefficienti significativi.

Inoltre, per ognuno di essi, l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH non può essere rifiutata a ogni livello di significatività.

Al fine di selezionare il modello migliore, sia per i modelli GARCH che per il GARCH-MIDAS, si userà il criterio di scelta di Bayes (BIC), secondo il quale si sceglie il modello che presenta BIC minore<sup>12</sup>. I BIC dei vari modelli sono riportati nella Tabella A.1.

I modelli migliori, come ci si poteva aspettare, sono quelli che considerano l'effetto leva, ovvero l'EGARCH e il TGARCH.

In tali modelli, l'asimmetria della volatilità è descritta dal parametro  $\gamma$ . In entrambi i casi esso è altamente significativo, e il suo segno è coerente con la teoria (positivo per il TGARCH, negativo per l'EGARCH), a testimoniare come shock negativi abbiano un impatto maggiore sulla volatilità condizionata rispetto a shock positivi.

Nonostante l'EGARCH presenti BIC leggermente minore rispetto al TGARCH, nella sezione successiva si è scelto per motivi computazionali di utilizzare quest'ultimo, oltre al semplice GARCH, per modellizzare la componente di breve periodo della volatilità nel GARCH-

$$BIC = -2 \cdot LL + log(N) \cdot k,$$

dove LL è il logaritmo naturale della funzione di massima verosimiglianza, N è il numero di osservazioni e k è il numero di parametri del modello

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Il BIC è tanto minore quanto maggiore è il logaritmo della funzione di massima verosimiglianza, e valorizza la parsimonia, in quanto aumenta all'aumentare del numero di parametri. Si ha infatti, che

Tabella A1: BIC modelli GARCH

CAC	DAX	
22672.51	22532.12	GARCH(1,1)
22456.94	22383.18	EGARCH(1,1)
22669.2	22534.01	CSGARCH(1,1)
22512.4	22408.44	TGARCH(1,1)

## Stima del modello GARCH-MIDAS

Uno degli obiettivi principali del presente lavoro è verificare su serie finanziarie europee il possibile contributo delle variabili macroeconomiche alla spiegazione della loro volatilità. In particolare, considerando i casi di Germania e Francia, è stato verificato l'impatto del prodotto interno lordo (PIL) e dell'indice mensile della produzione industriale del singolo paese rispetto alla volatilità dei corrispondenti indici di borsa (DAX e CAC). Il modello utilizzato è il GARCH-MIDAS proposto da Engle<sup>13</sup> la cui stima, come sottolineato dagli autori, risulta sensibile a diverse parametrizzazioni utilizzati per il pre-trattamento degli indicatori macroeconomici, ai ritardi utilizzati, della specifica per i pesi (restricted o unrestricted) e infine al modello utilizzato per la modellizzazione della varianza di breve periodo (GARCH(1,1) e T-GARCH(1,1)). I risultati delle stime mostrano come, in tutte le parametrizzazione utilizzate l'utilizzo del PIL non abbia prodotto stime statisticamente significative del GARCH-MIDAS. Significativo è invece apparso il contributo dell'indice della produzione industriale di ciascun paese rispetto all'indice di borsa corrispondente. Con riferimento al pre-trattamento dell'indice di produzione, i dati di partenza si riferiscono all'indice mensile destagionalizzato per il quale è stato considerato il logaritmo naturale. Successivamente sono state calcolate le medie trimestrali. Oltre alle diverse parametrizzazioni possibili, le stime presentate esplorano, come nel lavoro di Engle<sup>14</sup>. la variabilità delle stime al cambiamento del periodo

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Engle, Ghysels e Sohn, "On the economic sources of stock market volatility".

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Ibid.

temporale considerato. Si presentano quindi dapprima le stime sull'intero periodo gen.1991-giu.2019 e successivamente quelle riferite al periodo pre-crisi (gen.1991-set.2007) e post-crisi (apr.2010-giu.2019).

#### Stime su tutto il periodo

Il campione inizialmente considerato (1/01/1991 - 28/09/2019) comprende la principale crisi finanziaria dell'ultimo trentennio.

Come mostrato da Asgharian<sup>15</sup>, durante periodi dove si registrano enormi outlier la validità di un modello come il GARCH-MIDAS, che tenta di stimare la componente di medio-lungo periodo della volatilità, può venire meno.

I risultati dei modelli sono riportati nella Tabella A.13. Sia per l'indice tedesco sia per quello francese, il parametro di riferimento del MIDAS  $\theta$ , che descrive la relazione tra tassi di crescita della produzione industriale e volatilità dei rendimenti, non è significativo.

I risultati sembrano confermare la tesi di Ashgarian, secondo la quale il modello non ottiene buone performance se nel campione sono presenti periodi caratterizzati da elevata instabilità. <sup>16</sup>

#### Periodo pre-crisi

Le tabelle da A.14 a A.17 riportano parametri, errori standard, p-values e BIC dei modelli GARCH-MIDAS stimati tenendo conto delle due diverse specificazioni per la variabilità di breve periodo. In particolare, secondo il BIC il migliore modello GARCH-MIDAS è quello che considera la modellizzazione della varianza con un TGARCH(1,1) nella versione unrestricted.

DAX Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 9730.94(a) e 9772.93(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 9742.18(a) e 9774.55(b).

CAC Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 9374.08(a) e 9432.94(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 9374.606(a) e 9432.54(b).

Confrontando il GARCH-MIDAS con il semplice GARCH(1,1) stimato nella Sezione 3.2 si può notare una caratteristica importante dei parametri  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ . La loro somma è estrema-

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Asgharian, Hou e Javed, "The importance of the macroeconomic variables in forecasting stock return variance: A GARCH-MIDAS approach".

 $<sup>^{16}</sup>$ Ibid.

mente vicina all'unità. In particolare, questa quantità rappresenta la velocità con la quale la varianza si riporta al suo valore medio (unconditional variance). Di conseguenza, in un GARCH(1,1), la previsione della varianza condizionata, anche per periodi relativamente vicini, sarà pari alla varianza non condizionata. Per tutti i GARCH-MIDAS stimati, al contrario, si osserva una interessante caratteristica degli stessi parametri, osservata anche da Engle e Rangel.<sup>17</sup>

La loro somma è sempre minore di quella osservabile in un semplice GARCH(1,1), ad indicare una minore persistenza della componente di breve periodo della volatilità, dovuta all'impatto della componente di lungo periodo. Per quanto riguarda il DAX, il modello relativo al periodo pre-crisi che ha le performance migliori è quello in Tabella A.14(a), dove si è utilizzato il TGARCH per la modellizzazione di g, e un approccio Beta unrestricted, non vincolando il modello ad assegnare pesi decrescenti al crescere dei lag dell'indice di produzione industriale. Lo schema dei pesi è rappresentato nella Figura A.7, in cui si nota che i pesi sono crescenti fino al tredicesimo lag, per poi decrescere. I coefficienti sono tutti altamente significativi, e si può notare come anche l'effetto leva, pur essendo significativo, risulta essere smorzato rispetto a quanto accade stimando un semplice TGARCH. Ciò si nota osservando il valore, molto contenuto, del parametro  $\gamma$ .

Il parametro più importante dei GARCH-MIDAS, e di cui è necessaria la significatività, è  $\theta$ , che in questo caso rappresenta il legame tra la volatilità del "DAX Performance Index" e l'indice della produzione industriale tedesca. Esso è significativo e positivo per tutti i modelli relativi all'indice azionario tedesco. Per visualizzare meglio l'importanza di g e tau, nella Figura A.6 si nota come la componente di breve periodo sembri oscillare attorno a quella di medio-lungo periodo.

Per quanto riguarda il "CAC 40", i risultati sono sostanazialmente simili, ad eccezione del riscontro di una non significatività dell'intercetta del MIDAS e del coefficiente ARCH del TGARCH(1,1). Ciò fa pensare che in questo caso, nonostante un BIC minore, sia più opportuno modellizzare la componente di breve periodo tramite GARCH(1,1). Inoltre, rispetto a quanto accade per il DAX, il valore assoluto del parametro  $\theta$  è maggiore, a testimoniare una dipendenza maggiore tra volatilità di lungo periodo del "CAC 40" e valori passati delle

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Engle e Rangel, "The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroeconomic causes".

variazioni della produzione industriale francese.

Vale la pena di soffermarsi sul segno del parametro  $\theta$ . Esso nel periodo pre-crisi è positivo per tutti i modelli, sia per il "Dax Performance Index" che per il "CAC 40".

Ciò appare in contrasto con la teoria, nel senso che, seguendo Engle<sup>18</sup>, all'aumentare delle variabili reali, la volatilità di lungo periodo dei rendimenti azionari dovrebbe diminuire.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, considerando il periodo post-crisi il segno di  $\theta$  cambia, diventando coerente con la teoria economica.

L'analisi dei motivi di questo cambiamento appare complessa; tuttavia, il fatto che nella fase post-crisi emerga un quadro di coerenza tra andamento dei mercati finanziari e dinamiche reali segnala la presenza di possibili effetti strutturali indotti dalla crisi. Questi potrebbero ricondursi sia al nuovo regime di politica monetaria europea, sia alla maggiore rilevanza attribuita all'andamento dei livelli di attività economica in un contesto di elevate interdipendenze produttive a livello globale.

#### Periodo post-crisi

DAX Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 3826.5(a) e 3860.79(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 3825.8(a) e 3856.341(b).

CAC Unrestricted: I BIC dei modelli sono pari a 3649.28(a) e 3693.55(b). Restricted: I BIC dei modelli sono pari a 3651.25(a) e 3694.97(b).

Per quanto riguarda i modelli stimati nel periodo post-crisi, i risultati sono riportati nelle tabelle dalla A.18 alla A.21. In comune con il periodo post-crisi si ha la scarsa significatività del coefficiente ARCH per i modelli in cui l'evoluzione di g è descritta da un TGARCH(1,1), e la significatività dei parametri  $\theta$  e dei pesi del polinomio Beta. La non significatività dell'intercetta del MIDAS si ha solo per il "CAC 40".

Emerge immediatamente, come accennato nel paragrafo precedente, il cambiamento di segno di  $\theta$  e, soprattutto, la grandezza in valore assoluto del parametro.

L'approccio Beta restricted stavolta fornisce performance leggermente migliori per il "CAC 40", mentre per il DAX questo è l'unico caso in cui né  $\theta$  né i pesi del polinomio Beta sono significativi. In Figura A.13 è riportato lo schema dei pesi Beta restricted del GARCH-MIDAS relativo al DAX, dove si può notare la decrescenza dei pesi assegnati ai valori passati

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup>Engle e Rangel, "The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroeconomic causes".

delle variazioni della produzione industrali al crescere dei ritardi.

Anche in questo caso, si evidenzia il comportamento oscillatorio della componente di breve periodo attorno a quella di lungo (Fig. A.10 e A.12). È interessante sottolineare come, sia per l'indice tedesco sia per quello francese, ad una maggiore ampiezza in valore assoluto del parametro  $\theta$  si accompagni un valore ancora minore della somma di  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  del GARCH(1,1), rispetto al periodo pre-crisi. Utilizzando tali informazioni, è possibile rilevare come l'influenza delle variazioni della produzione industriale sulla volatilità di medio-lungo periodo sia ora di gran lunga maggiore rispetto alla fase precedente la crisi.

# Applicazione dei modelli a un problema di portafoglio

## Specificazione del problema di portafoglio

Un'applicazione dei modelli GARCH e GARCH-MIDAS è sicuramente l'allocazione di portafoglio. Le stime, a partire da questi modelli, di varianze e covarianze, possono essere utilizzate per la costruzione di portafogli efficienti.

A tal fine, utilizzeremo l'approccio media-varianza di Markowitz<sup>19</sup>. In particolare, in questo lavoro ci si pone l'obiettivo di minimizzare la varianza tramite la costruzione del "Minimum variance portfolio".

Supponiamo che un portafoglio sia composto da k titoli rischiosi e indichiamo con  $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}.....r_{k,t})^T$  il vettore contenente i rendimenti dei singoli asset al tempo t. Indichiamo poi con  $\mathbf{w}_t = (w_{1,t}.....w_{k,t})^T$  il vettore dei pesi assegnati ai k titoli presenti nel portafoglio al tempo t. Chiaramente, la somma dei pesi deve essere pari a uno.

Seguendo l'approccio di Markowitz, si ha che, per ogni t, il rendimento di portafoglio è pari a  $\mathbf{w_t}^T \mathbf{r_t}$  e la varianza di portafoglio è pari a  $\mathbf{w}_t^T \mathbf{V}_t \mathbf{w_t}$ , dove  $\mathbf{V}_t$  è la matrice di varianze-covarianze al tempo t.

 $\mathbf{V}_t$  presenta sulla diagonale principale le varianze dei rendimenti dei singoli asset, ed è completata dalle covarianze dei rendimenti dei vari asset.

L'obiettivo è, in ogni t, scegliere i pesi in modo da risolvere il seguente problema di ottimiz-

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Markowitz, "Portfolio selection".

zazione:

$$\min_{w} \mathbf{w}^{T} \mathbf{V}_{t} \mathbf{w}$$

$$\text{sub} \sum_{i=1}^{K} w_{i} = 1$$
(B.13)

Se si assume che sia possibile vendere titoli allo scoperto (pesi negativi), allora la soluzione del precedente problema di ottimizzazione è relativamente semplice:

$$\mathbf{w}_t = \frac{\mathbf{V}_t \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{1}} \tag{B.14}$$

dove 1 è il vettore k-dimensionale in cui ogni elemento è pari a uno. Il denominatore è semplicemente la somma di tutti gli elementi di  $\mathbf{V}_t^{-1}$ , e il numeratore è il vettore dove ogni elemento è la somma di ogni riga di  $\mathbf{V}_t^{-1}$ .

Come si può notare dall'Eq.B.14, i pesi ottimali dipendono unicamente da  $\mathbf{V}_t$ , composta dalle varianze e covarianze dei rendimenti degli asset.

Nell'applicazione successiva, prenderemo in considerazione due asset : il "DAX Performance Index" e il "CAC 40". Le varianze condizionate verranno stimate a partire del GARCH e del GARCH-MIDAS.

Per quanto riguarda la stima della covarianze, si utilizzerà, nel caso del GARCH, sia un modello multivariato (e.g. DCC-GARCH) che approccio proposto da Tsay<sup>20</sup>.

Per quanto riguarda la costruzione dei portafogli utilizzando i GARCH-MIDAS, per la stima delle covarianze verrà usato solo il metodo proposto da Tsay. In base a quest'ultimo, è possibile studiare l'evoluzione delle covarianze a partire dai GARCH univariati.

Siano  $x_t$  e  $y_t$  i rendimenti di due asset.

Dalla teoria si ha che

$$Var(x_t + y_t) = Var(x_t) + 2Cov(x_t, y_t) + Var(y_t)$$
$$Var(x_t - y_t) = Var(x_t) - 2Cov(x_t, y_t) + Var(y_t).$$

Si ricava dunque che

$$Cov(x_t, y_t) = \frac{Var(x_t + y_t) - Var(x_t - y_t)}{4}$$
 (B.15)

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup>Tsay, An introduction to analysis of financial data with R.

Questo approccio continua a valere per le covarianze condizionate, che quindi possono essere ottenute, in ogni periodo t, sulla base delle volatilità di  $(x_t + y_t)$  e  $(x_t - y_t)$ .

Dall'Eq 3.4 possiamo anche ottenere la relazione che descrive l'evoluzione del coefficiente di correlazione nel tempo.

$$\rho_t = \frac{\sigma_{x+y,t}^2 - \sigma_{x-y,t}^2}{4\sigma_{x,t}\sigma_{y,t}}$$

Sempre seguendo Tsay, l'unica controindicazione relativa a questo approccio è il fatto che in alcuni periodi la matrice varianze-covarianze potrebbe non risultare definita positiva.

Qualora ciò si verificasse, in uno o più giorni, si ometteranno i valori dei pesi ottenuti nei periodi problematici; il rendimento e la volatilità del giorno successivo verranno quindi calcolati ipotizzando di non aver ribilanciato il portafoglio, mantenendo invariati i pesi del giorno precedente.

#### DCC-GARCH

Il modello DCC-GARCH è uno dei modelli multivariati più utilizzati per la stima delle covarianze condizionate. Come l'approccio descritto nel precedente paragrafo, anche questo modello permette alle covarianze condizionate, e conseguentemente anche ai coefficienti di correlazione, di variare nel tempo. Ne esistono varie versioni, tra cui quella di Engle<sup>21</sup> e quella di Tse e Tsui<sup>22</sup>.

In generale, la stima di un DCC-GARCH si basa su due passaggi.

Innanzitutto, si stimano i GARCH univariati; dopodichè si utilizzano i residui standardizzati per ricavare lo stimatore dei coefficienti di correlazione condizionati. In particolare, Engle propose il seguente modello :

$$\boldsymbol{\rho}_t = \mathbf{J}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{J}_t$$

dove  $\mathbf{Q}_t = (q_{ij,t})_{kxk}$  è una matrice definita positiva,  $\mathbf{J}_t = diag[q_{11,t}^{-1/2},..,q_{kk,t}^{-1/2}]$ , e  $\mathbf{Q}_t$  è definita come :

$$\mathbf{Q}_{t} = (1 - \theta_{1} - \theta_{2})\bar{\mathbf{Q}} + \theta_{1}\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}\boldsymbol{\epsilon}'_{t-1} + \theta_{2}\mathbf{Q}_{t-1}, \tag{B.16}$$

 $<sup>^{21}</sup>$ Engle, "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models".

<sup>&</sup>lt;sup>22</sup>Tse e Tsui, "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with timevarying correlations".

dove  $\epsilon_t$  è il vettore composto dalle innovazioni standardizzate  $\epsilon_{it} = a_{it}/\sqrt{\sigma_{ii,t}}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$  è la matrice delle varianze non condizionate di  $\epsilon_t$ , e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono parametri positivi che soddisfano la seguente condizione :  $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$ . La matrice  $\mathbf{J}_t$  è una matrice di normalizzazione per garantire che  $\boldsymbol{\rho}_t$  sia una matrice di correlazione.

Nel caso bivariato (2 asset) il coefficiente di correlazione condizionato può essere scritto come:

$$\rho_{12,t} = \frac{q_{12}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1(\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}) + \theta_2 q_{12,t-1}}{\sqrt{(q_{11}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1\epsilon_{11,t-1}^2 + \theta_2 q_{11}, t - 1)(q_{22}(1 - \theta_1 - \theta_2) + \theta_1\epsilon_{22,t-1}^2 + \theta_2 q_{22,t-1})}}$$
(B.17)

#### Analisi dei risultati

Passiamo ora ad illustrare un'applicazione della metodologia discussa nella sezione precedente.

In questa analisi verranno considerati due asset, il "DAX Performance Index" e il "CAC 40", e si costruirà il "Minimum variance portfolio" ribilanciato giornalmente, dove i pesi ottimali verranno calcolati ogni giorno sulla base delle stime di varianze e covarianze del giorno precedente, effettuate tramite GARCH e GARCH-MIDAS. In particolare, per quanto riguarda il GARCH, le covarianze verranno stimate sia utilizzando l'approccio di Tsay, sia il DCC-GARCH.

In altre parole, in t si stima  $V_t$  nel modo descritto nel paragrafo precedente; succrssivamente, vengono ottenuti i pesi ottimali del "Minimum Variance Portfolio", e in t+1 si investe nei due indici azionari.

Questo schema viene ripetuto per ogni t.

In particolare, i portafogli che verranno analizzati sono due.

Il primo è relativo al periodo che va dal 3/08/2007 al 28/09/2007; le varianze e covarianze del portafoglio costruito a partire dai GARCH-MIDAS sono state ottenute dai modelli relativi al periodo pre-crisi, usando un approccio Beta unrestricted e 18 lags della variabile macroeconomica.

Il secondo si riferisce al periodo che va dal 14/05/2019 al 29/06/2019; le varianze e covarianze del portafoglio costruito a partire dai GARCH-MIDAS sono state ottenute dai modelli relativi al periodo post-crisi, usando un approccio Beta unrestricted e 16 lags della variabile macroeconomica.

Le performance dei portafogli ottenuti verranno valutate e confrontate tramite lo Sharpe ratio<sup>23</sup> calcolato sulla base dei rendimenti e volatilità medie giornaliere dei portafogli.

Il benchmark sarà rappresentato da un equally weighted portfolio (50-50) e la presenza di costi di transazione verrà ignorata. Per calcolare la varianza dell'equally weighted portfolio, si è presa in considerazione la covarianza campionaria relativa dei due indici azionari. Dal momento che l'obiettivo principale è la minimizzazione della volatilità, si confronteranno anche le singole volatilità dei portafogli, a prescindere dal rendimento ottenuto. Consideriamo i portafogli ottenuti nel primo periodo.

I portafogli ottenuti tramite GARCH e GARCH-MIDAS utilizzando l'approccio di Tsay verranno chiamati portafoglio GARCH e portafoglio MIDAS, rispettivamente. Quello ottenuto tramite DCC-GARCH verrà chiamato portafoglio DCC.

La Tabella 6.1 mostra rendimenti e volatilità giornalieri, nonché lo Sharpe ratio annualizzato dei portafogli ottenuti investendo dal 3/08/2007 al 28/09/2007. Il portafoglio MIDAS raggiunge le performance migliori in termini di trade-off tra rischio e rendimento, seguito dal portafoglio DCC. Tuttavia, la volatilità minore viene raggiunta dal portafoglio GARCH.

Un risultato che appare di una certa rilevanza è che i tre portafogli mostrano volatilità minore rispetto a un portafoglio non ribilanciato.

Per quanto riguarda l'evoluzione dei pesi nel tempo (Fig. A.14 - A.15 - A.16), si può notare un andamento pressoché omogeneo tra il portafoglio GARCH e il portafoglio MIDAS. Il portafoglio DCC mostra una maggiore stabilità nella struttura dei pesi. In tutti e tre i casi si investe a leva sul DAX, che nel campione considerato è risultato l'indice con volatilità più bassa.

Consideriamo ora la Tabella 6.2, in cui sono descritti i risultati dei portafogli ottenuti investendo dal 14/05/2019 al 29/06/2019.

$$\frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

, dove  $R_p$  è il rendimento medio di portafoglio,  $\sigma_p$  è la deviazione standard dei rendimenti, e  $R_f$  è il tasso risk - free. Se rendimenti e volatilità sono giornalieri, lo Sharpe ratio può essere annualizzato moltiplicando il valore giornaliero per  $\sqrt{252}$ . Nella nostra analisi, abbiamo utilizzato un tasso risk-free del 3 percento annuo per il primo periodo, e, un tasso risk-free nullo nel secondo periodo. In quest'ultimo caso, avremmo potuto utilizzare addirittura un tasso risk-free minore di zero, considerando la negatività dei tassi trimestrali dei government bonds tedeschi.

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup>Lo Sharpe ratio è definito come :

Questa volta, il portafoglio MIDAS è quello che ha performance peggiori in termini di Sharpe Ratio; sia sotto questo punto di vista che dal punto di vista della sola volatilità, i tre portafogli risultano chiaramente peggiori rispetto all'"Equally weighted portfolio".

Per quanto riguarda l'evoluzione dei pesi (Figure A.17 - A.18 - A.19), la situazione appare meno nitida rispetto al caso precedente.

In questo caso, la differenza tra l'evoluzione dei pesi del portafoglio MIDAS e quella dei portafogli GARCH e DCC appare più marcata. Nel caso del GARCH e del DCC, i ribilanciamenti sembrano essere più frenetici. Considerando le evoluzioni delle varianze di portafoglio per entrambi i periodi (Fig. A.18:A.21), non sembrano emergere sostanziali differenze tra i tre modelli.

In definitiva, il GARCH-MIDAS può rappresentare un approccio alternativo al GARCH per l'allocazione di portafoglio; tuttavia, dalle analisi effettuate non appare evidente una migliore performance dei portafogli costruiti a partire da tale modello rispetto a quelli costruiti tramite GARCH oppure utilizzando un DCC-GARCH.

**Tabella A2:** Rendimenti, volatilità e Sharpe ratio dei portafogli costruiti dal 3/08/2007 al 28/09/2007.

	Media	Dev.standard	Sharpe ratio
GARCH	0.046	0.95	0.63
GARCH-MIDAS	0.168	1.18	2.15
Eq.weighted	0.0725	1.297	0.89
DCC-GARCH	0.15	1.08	2.12

**Tabella A3:** Rendimenti, volatilità e Sharpe ratio dei portafogli costruiti dal 14/05/2019 al 29/06/2019.

	Media	Dev.standard	Sharpe ratio
GARCH	0.1	0.91	1.74
GARCH-MIDAS	0.04	0.89	0.73
Eq.weighted	0.12	0.80	2.38
DCC-GARCH	0.08	0.88	1.44

# Bibliografia

- [1] Hossein Asgharian, Ai Jun Hou e Farrukh Javed. "The importance of the macroeconomic variables in forecasting stock return variance: A GARCH-MIDAS approach". In:

  Journal of Forecasting 32.7 (2013), pp. 600–612.
- [2] Fischer Black. "Studies of stock price volatility changes". In: 1976.
- [3] Zvi Bodie et al. *Investments*. Tata McGraw-Hill Education, 2009.
- [4] Tim Bollerslev. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". In: 1986.
- [5] Bernhard Brümmer et al. Agricultural markets instability: Revisiting the recent food crises. Routledge, 2016.
- [6] Christian Conrad, Anessa Custovic e Eric Ghysels. "Long-and short-term cryptocurrency volatility components: A GARCH-MIDAS analysis". In: *Journal of Risk and Financial Management* 11.2 (2018), p. 23.
- [7] Christian Conrad e Onno Kleen. "Two are better than one: volatility forecasting using multiplicative component GARCH-MIDAS models". In: *Journal of Applied Econometrics* (2019).
- [8] Christian Conrad e Melanie Schienle. *Misspecification Testing in GARCH-MIDAS Models*. Rapp. tecn. Discussion Paper Series, 2015.
- [9] Robert Engle. "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models". In: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3 (2002), pp. 339–350.
- [10] Robert F Engle. "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1982), pp. 987–1007.

- [11] Robert F Engle, Eric Ghysels e Bumjean Sohn. "On the economic sources of stock market volatility". In: AFA 2008 New Orleans Meetings Paper. 2008.
- [12] Robert F Engle, Eric Ghysels e Bumjean Sohn. "Stock market volatility and macroe-conomic fundamentals". In: *Review of Economics and Statistics* 95.3 (2013), pp. 776–797.
- [13] Robert F Engle e Gary Lee. "A long-run and short-run component model of stock return volatility". In: Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honour of Clive WJ Granger (1999), pp. 475–497.
- [14] Robert F Engle e Jose Gonzalo Rangel. "The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroeconomic causes". In: *The Review of Financial Studies* 21.3 (2008), pp. 1187–1222.
- [15] Alexios Ghalanos. "rmgarch: Multivariate GARCH models". In: *R package version 0.98* (2012).
- [16] Alexios Ghalanos. rugarch: Univariate GARCH models. R package version 1.4-1. 2019.
- [17] Eric Ghysels, Pedro Santa-Clara e Rossen Valkanov. "The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models". In: (2004).
- [18] Eric Girardin e Roselyne Joyeux. "Macro fundamentals as a source of stock market volatility in China: A GARCH-MIDAS approach". In: *Economic Modelling* 34 (2013), pp. 59–68.
- [19] Lawrence R Glosten, Ravi Jagannathan e David E Runkle. "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks". In: *The journal of finance* 48.5 (1993), pp. 1779–1801.
- [20] Christian M Hafner. Alternative Assets and Cryptocurrencies. 2020.
- [21] Onno Kleen. mfGARCH: Mixed-Frequency GARCH Models. R package version 0.1.9. 2019. URL: https://github.com/onnokleen/mfGARCH/.
- [22] Evžen Kočenda e Alexandr Černỳ. Elements of time series econometrics: An applied approach. Charles University in Prague, Karolinum Press, 2015.
- [23] Benoit Mandelbrot. "The Variation of Certain Speculative Prices". In: *The Journal of Business* 36 (1963), pp. 394–419. DOI: 10.1086/294632.

- [24] Harry Markowitz. "Portfolio selection". In: *The journal of finance* 7.1 (1952), pp. 77–91.
- [25] Daniel B. Nelson. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". In: Econometrica 59.2 (1991), pp. 347-370. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938260.
- [26] Saker Sabkha e Christian De Peretti. "On the performances of Dynamic Conditional Correlation models in the Sovereign CDS market and the corresponding bond market". In: (2018).
- [27] G William Schwert. "Why does stock market volatility change over time?" In: *The journal of finance* 44.5 (1989), pp. 1115–1153.
- [28] R.S. Tsay. "Analysis of Financial Time Series: Third Edition". In: Analysis of Financial Time Series: Third Edition (ago. 2010). DOI: 10.1002/9780470644560.
- [29] Ruey S Tsay. An introduction to analysis of financial data with R. John Wiley & Sons, 2014.
- [30] Yiu Kuen Tse e Albert K C Tsui. "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations". In: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3 (2002), pp. 351–362.