

LUISS



Dipartimento di Economia e Finanza

Corso di Laurea Magistrale in Banche ed Intermediari Finanziari

Cattedra di Teoria e Gestione del Portafoglio

Analisi econometrica della serie storica del VIX e strategie di trading
sulla volatilità

RELATORE

Prof. Nicola Borri

CORRELATORE

Prof. Pierpaolo Benigno

CANDIDATO

Marco Leoci

Matr. 692071

Anno Accademico 2018/2019

INDICE

<i>Introduzione</i>	5
Capitolo 1: Volatilità e VIX	6
1.1 <i>Il concetto di volatilità nella letteratura economico-finanziaria</i>	6
1.2 <i>Il CBOE Volatility Index: derivazione matematica ed interpretazione economica</i>	9
Capitolo 2: Analisi della serie storica del VIX	13
2.1 <i>Analisi visiva della serie del VIX comparata con lo S&P 500</i>	13
2.2 <i>Analisi econometrica del VIX</i>	17
2.2.1 <i>La metodologia Box-Jenkins</i>	17
2.2.2 <i>Statistiche di base</i>	18
2.2.3 <i>Analisi della stazionarietà della serie</i>	23
2.2.4 <i>I modelli ARIMA</i>	25
2.2.5 <i>Analisi sui residui: correlogrammi e Ljung-Box test</i>	28
2.2.6 <i>Indagine sulla presenza di eteroschedasticità condizionale: i modelli ARCH</i>	29
2.2.7 <i>I modelli GARCH</i>	33
Capitolo 3: Il potere predittivo delle medie mobili	38
3.1 <i>Le medie mobili semplici</i>	38
3.2 <i>Le medie mobili esponenziali</i>	40
3.3 <i>Forecast dei movimenti futuri del VIX attraverso un “corridoio” a medie mobili</i>	42
3.4 <i>Segnali di inversione del trend</i>	46
Capitolo 4: Replicabilità del VIX	48
4.1 <i>Il processo di Ornstein-Uhlenbeck</i>	48
4.2 <i>Il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti di volatilità</i>	49
4.3 <i>Calibrazione dei processi sui dati storici del VIX</i>	50
4.4 <i>Validazione del processo: qualche considerazione</i>	54
Capitolo 5: Strategie di trading sulla volatilità	58
5.1 <i>Introduzione alle strategie</i>	58

<i>5.2 Il VXX e la sua relazione con il VIX</i>	<i>58</i>
<i>5.3 Strategie di trading giornaliere</i>	<i>61</i>
<i>5.3.1 Ipotesi semplificatrici</i>	<i>61</i>
<i>5.3.2 Strategia 1</i>	<i>61</i>
<i>5.3.3 Strategia 2</i>	<i>62</i>
<i>5.3.4 Strategia 3</i>	<i>64</i>
<i>5.3.5 Strategia 4</i>	<i>65</i>
<i>5.3.6 Strategia 5</i>	<i>66</i>
<i>5.3.7 Confronto fra le strategie</i>	<i>67</i>
<i>5.4 Backtesting dei risultati</i>	<i>68</i>
<i>Conclusioni</i>	<i>76</i>
<i>Appendice Matlab</i>	<i>77</i>
<i>Bibliografia e sitografia</i>	<i>114</i>
<i>Ringraziamenti</i>	<i>116</i>
<i>Riassunto</i>	<i>118</i>

Introduzione

Lo scopo del seguente elaborato è prestarsi ad un'analisi dettagliata di uno degli indici più ricorrenti nella letteratura economica e finanziaria, il VIX. Da sempre indicatore del *market sentiment* e fedele predittore tanto dell'entusiasmo quanto del panico diffuso fra gli operatori finanziari, negli ultimi anni è stato riscoperto come vera e propria *asset class*, prevalentemente come panacea dei rischi a cui è sottoposto il mercato azionario statunitense. Nell'ultimo decennio il ricorso a derivati con sottostante il VIX per finalità di copertura o diversificazione è incrementato, mentre il suo impiego in prospettiva puramente speculativa è ancora prerogativa di un numero esiguo di trader e istituzioni finanziarie. In questo *framework* si colloca l'elaborato e la sua stessa essenza. La comprensione della formulazione del VIX e delle dinamiche della serie storica è *condicio sine qua non* per lo sviluppo di modelli di previsione e per l'implementazione di qualsiasi strategia di trading sui suoi derivati.

Nel Capitolo 1 si ricercano, nella letteratura più accreditata, i riferimenti alla volatilità, dalle accezioni più ricorrenti alle versioni di più ampio respiro, per focalizzare, poi, l'indagine sulla formulazione matematica del VIX.

Nel Capitolo 2, mediante strumenti econometrici, si verificano alcune proprietà della serie, prima fra tutte, per importanza, la presenza di eteroschedasticità condizionale, fenomeno a principio dei modelli *GARCH*.

Nel Capitolo 3 si introducono le medie mobili e le strategie costruite su di esse più ricorrenti nell'analisi tecnica. In particolar modo si elabora un modello a medie mobili predittivo *one-step-ahead* e si testa la sua efficacia. Lo stesso, poi, viene impiegato e contaminato nell'implementazione delle strategie di trading.

Il Capitolo 4 è dedicato all'identificazione del miglior processo di replica del VIX. Poter simulare molteplici profili è propedeutico alla validazione delle *trading strategies* del Capitolo 5.

Capitolo 1: Volatilità e VIX

1.1 Il concetto di volatilità nella letteratura economico-finanziaria

Il concetto di volatilità, in economia e finanza, ritrae il livello di incertezza percepito su un mercato o riguardo l'evoluzione futura di un indice o di un *asset*. Nella più recente letteratura la volatilità è stata reinterpretata come potenziale *asset-class*, utile in ottica di diversificazione di portafoglio anche se con non poche difficoltà, legate alla non normalità dei rendimenti delle strategie sulla volatilità. Il rischio di mercato delle attività in portafoglio è sottoposto, dunque, in presenza di strategie sulla volatilità, a *Modified Value at Risk (MVaR)*¹, che misura la perdita massima potenziale dato un certo orizzonte temporale e una certa confidenza statistica. Il grado di rischiosità può rappresentare per il trader una grande opportunità così come una forte esposizione a potenziali perdite rilevanti. Un'alta volatilità implica, pertanto, vedere le proprie posizioni subordinate, nei ritorni, alla probabilità di variazioni repentine, accentuate e imprevedibili. Le scelte sono, poi, legate al grado di avversione dell'operatore o dell'intermediario finanziario al rischio. Se riguardo la volatilità sul mercato vi sono diversi indicatori sintetici, teorie legate alle aspettative e modelli matematico-probabilistici raffinati, riguardo alla definizione di volatilità di uno strumento finanziario, in termini statistici vi è uniformità sulla definizione, illustrata dalla deviazione standard dei rendimenti, ossia dalla radice quadrata della loro varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^2}$$

Dove:

- n è la dimensione della popolazione;
- u_i è l'*i*-esimo rendimento osservato;
- μ è la media della popolazione.

Al crescere della varianza aumenterà così la probabilità di rendimenti superiori e con essa la probabilità di perdite maggiori. Nota la media, la deviazione standard e la distribuzione dei rendimenti, con un certo livello

¹ Il *Modified Value at Risk* è una derivazione del *Value at Risk* che riflette, per mezzo dell'espansione di Cornish e Fischer (1937) il livello di asimmetria e curtosi dei *returns*.

di significatività si può associare a ciascun ipotetico scenario futuro una misura di probabilità. Le stime sono tanto più consistenti quanto migliore è il *fitting* della distribuzione ipotizzata alla reale manifestazione dei rendimenti e anche qualora, per pura accezione teorica, si consideri una precisione del 100% nella modellizzazione, bisogna sempre tener conto della possibilità, seppur residua, di scenari estremamente negativi. La volatilità è originata dai flussi di acquisto e vendita sui mercati e dall'impatto delle nuove informazioni sulle attese degli operatori. In letteratura vi è una distinzione fra volatilità storica, implicita, attesa e realizzata. La prima è una misura di rischio *ex post* calcolata su una serie storica di rendimenti che approssima, per la legge dei grandi numeri, la volatilità "reale" dei *returns*. È computata come il prodotto fra la deviazione standard campionaria e \sqrt{t} dove t indica i giorni di apertura della borsa in un anno. La critica più diffusa sul suo utilizzo risiede nella convinzione che i prezzi che si formano sul mercato non riflettano le performance passate, bensì le aspettative future. La seconda è una misura di rischio *ex ante*, si estrapola dai prezzi delle opzioni attivamente negoziate e rappresenta la percezione dei traders circa la variabilità del prezzo del sottostante fino alla scadenza dell'opzione. Si può derivare, mediante il modello di Black-Scholes-Merton², il prezzo di una *call* e di una *put* europea su titoli che non pagano dividendi, rispettivamente:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Con:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T};$$

e dove:

- $N(x)$ è la funzione di distribuzione di una variabile normale con media nulla e deviazione standard unitaria, ossia la probabilità che una variabile normale standardizzata sia inferiore a x ;
- S_0 è il prezzo del sottostante al tempo 0;
- K è lo *strike price*;
- e^{-rT} è il fattore di attualizzazione;
- r è il tasso d'interesse *free-risk*;

² Per una dettagliata rappresentazione del modello si consigliano al lettore i *papers* alla base della nascita del modello: Black, Fisher S.; Scholes, Myron S.; The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (May-June 1973), pp. 637-654 e Merton, Robert C.; Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1 (Spring, 1973), pp. 141-183.

- T è la vita residua dell'opzione;
- σ è la volatilità del sottostante, implicita nel prezzo dell'azione.

Da queste formulazioni è impossibile esplicitare σ in funzione degli altri parametri (S_0, K, r, T, c) ma è possibile ottenerlo mediante il calcolo iterativo o con procedure numeriche più efficaci, come il metodo Newton-Raphson. La formulazione originale di Black e Scholes e le assunzioni di partenza hanno subito revisioni e allentamenti così da rendere possibile la sua applicabilità a casi precedentemente non annoverati (ad esempio in presenza di dividendi, tasse e costi di transazione e tasso di interesse non costante). Nel caso di opzioni americane (con facoltà di esercizio anticipato rispetto alla scadenza), per calcolare la volatilità implicita, è possibile ricorrere agli alberi binomiali e ad una procedura iterativa simile. La volatilità implicita è una misura *forward looking*, tanto più elevata quando il mercato si aspetta, con alta probabilità, fluttuazioni importanti dei rendimenti del titolo sottostante e tanto più bassa quando il mercato si aspetta solo deboli oscillazioni e quindi, per un determinato valore dello *strike price*, bassa probabilità che il diritto di opzione venga esercitato. La volatilità attesa è la stima di un valore, per definizione, incerto e può avvenire attraverso modelli matematici e statistici. Essa è soggetta in ogni caso a *bias* e non sempre è avulsa da fenomeni di *overconfidence*. La volatilità realizzata, infine, è la magnitudo delle fluttuazioni giornaliere del prezzo di un sottostante in un determinato periodo, calcolata come deviazione standard dei rendimenti logaritmici. Il concetto di volatilità è spesso impiegato in senso lato o, in ogni caso, la sua esatta definizione va contestualizzata all'ambito d'applicazione. Sul mercato azionario, ad esempio, una prima idea della volatilità è fornita dal beta, usato nel *Capital Asset Pricing Model*³ per misurare la componente di rischio sistematico del titolo, ossia la variazione attesa del rendimento del titolo per ogni variazione di un punto percentuale del rendimento di mercato. La volatilità, inoltre, è funzione di diversi fattori di rischio, a loro volta derivanti dal contesto microeconomico e macroeconomico, dal grado di liquidità degli *assets*, dai settori e dai Paesi di riferimento. È anche funzione di squilibri di ordini commerciali, di eventi economici isolati destabilizzanti, di operazioni condotte da investitori istituzionali, nonché di rilevanti volumi di vendite allo scoperto, senza dimenticare gli squilibri politico-sociali, l'interrelazione fra i mercati azionari, valutari e delle materie prime e le politiche sui tassi.

Il problema dei modelli più utilizzati nella letteratura finanziaria consiste nell'assunzione forte di costanza della volatilità, ipotesi smentita dalla realtà tanto da aver giustificato lo sviluppo di modelli quali i *GARCH*. Lo stesso modello di Black-Scholes ha per ipotesi la normalità della distribuzione dei rendimenti del titolo sottostante, da cui segue che opzioni dello stesso tipo, con lo stesso sottostante e la stessa scadenza,

³ Il Capital Asset Pricing Model (CAPM), proposto nel 1964 da William Sharpe, è un modello matematico di equilibrio dei mercati finanziari che valse il Nobel per l'Economia nel 1990 a W. Sharpe, M.M. Miller e H. Markowitz. Diverse sono le varianti e ulteriori sviluppi sono il più generale modello multifattoriale dell'Arbitrage Pricing Theory (APT) e il modello a tre fattori di Fama-French.

dovrebbero avere lo stesso livello di volatilità implicita. L'evidenza empirica avalla la presenza di volatilità variabile nel tempo e con essa si sviluppa la letteratura sulla volatilità stocastica e sul *volatility smile*. Quest'ultimo, in particolare, vede la volatilità implicita come funzione dei diversi *strike* e si esplicita in una metrica della volatilità implicita più elevata per le opzioni *out-of-the-money* e *in-the-money* e inferiore per le *at-the-money*.

1.2 Il CBOE Volatility Index: derivazione matematica ed interpretazione economica

Il *CBOE Volatility Index (VIX)*, meglio noto come *fear index* o *fear gauge*, deve la sua fama alla significativa capacità di esprimere la percezione che gli operatori e gli investitori hanno del rischio sul mercato azionario. Proprio per questa sua caratteristica numerosi sono stati i contributi teorici e le analisi empiriche che hanno utilizzato il VIX come *proxy* della *stock market volatility*. Il VIX, introdotto nel 1993 dal Chicago Board of Options Exchange, stima la volatilità implicita di un'opzione sintetica con scadenza a trenta giorni emessa sull'indice azionario S&P 500. L'*underlying stock index* del VIX è l'indice S&P500 (SPX). Prima del 1993, predittivo della futura *realized volatility* e dello stress latente sul mercato era il VXO, calcolato dalle opzioni sull'indice S&P100 (OEX). La formulazione originale prevede che il VXO, per mezzo di un approccio alla Black&Scholes, calcoli la media delle *implied volatility* su otto opzioni *near-the money* (opzioni la cui differenza fra *strike price* e prezzo del sottostante è prossima allo 0) alle due scadenze più prossime. Per scadenze entro otto giorni di calendario sono utilizzate, al posto di queste ultime, le due successive scadenze più vicine. Il CBOE sceglie due *call* e due *put* a due prezzi di esercizio superiori al livello *spot* ma molto vicini ad esso. Procede al calcolo della media delle volatilità implicite della *call* e della *put* per ogni *strike price*. L'interpolazione lineare fra le due volatilità implicite medie restituisce l'*at-the-money spot implied volatility*. Per mezzo di aggiustamenti temporali si ottiene il VXO, che, in definitiva, rappresenta la stima della volatilità implicita *at-the-money* mensile (laddove un mese coincide con 22 *trading days*).

Seguendo la notazione del White Paper del CBOE si ripercorrono gli step che conducono alla formulazione del VIX e alcune fra le relazioni fondamentali.

La formula generale per calcolare il VIX al tempo t è:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

Dove:

- σ^2 è la varianza implicita e si ha che $VIX = \sqrt{\sigma^2} \times 100$;

- T è il tempo alla scadenza;
- F è il livello dell'indice forward. Si ottiene, per mezzo della *put-call parity*, che:

$$F = e^{RT}(\text{call price} - \text{put price}) + \text{strike price};$$

- K_0 è il primo prezzo di esercizio minore o uguale al livello dell'indice *forward*;
- R è il tasso d'interesse *risk free* a scadenza;
- K_i è lo *strike price* dell' i -esima opzione *out-of-the-money*, una *call* se $K_i > K_0$, una *put* se $K_i < K_0$, entrambe (*put* e *call*) se $K_i = K_0$;
- $Q(K_i)$ è il punto medio dello *spread* tra i prezzi *bid* e *ask* per ogni opzione con prezzo di esercizio K_i ;
- ΔK_i indica la semisomma dei due prezzi d'esercizio su entrambi i lati di K_i :

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}.$$

Sia:

$$T = \frac{M_{\text{current day}} + M_{\text{settlement day}} + M_{\text{other days}}}{\text{minutes in a year}}$$

Dove:

- $M_{\text{current day}}$ sono i minuti restanti alla mezzanotte del giorno corrente;
- $M_{\text{settlement day}}$ sono i minuti dalla mezzanotte alle 8:30 a.m. per la scadenza delle opzioni SPX "standard", o dalla mezzanotte alle 3:00 p.m. per la scadenza delle opzioni SPX "settimanali";
- $M_{\text{other days}}$ sono i minuti compresi fra il giorno corrente e il giorno di scadenza.

La volatilità viene, quindi, calcolata per le opzioni *near-term*⁴ e *next-term*⁵ con tempo alla scadenza rispettivamente di T_1 e T_2 :

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{R_1 T_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left[\frac{F_1}{K_0} - 1 \right]^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{R_2 T_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left[\frac{F_2}{K_0} - 1 \right]^2$$

Il VIX si ottiene come il prodotto fra 100 e la radice quadrata della media ponderata su 30 giorni di σ_1^2 e σ_2^2 .

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left[T_1 \sigma_1^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right] \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

⁴ Sono opzioni con più di 23 giorni alla scadenza.

⁵ Sono opzioni con meno di 37 giorni alla scadenza.

Con:

- N_{T_1} che sono i minuti alla scadenza delle opzioni *near-term*;
- N_{T_2} che sono i minuti alla scadenza delle opzioni *next-term*;
- N_{30} che sono i minuti in 30 giorni;
- N_{365} che sono i minuti in 365 giorni.

Per dare al VIX un'interpretazione economica concreta si ripercorre la spiegazione di P.Carr e L.Wu (2006).

Il quadrato del VIX osservato al tempo t approssima l'aspettativa condizionale *risk-neutral* della varianza dei rendimenti annualizzata dal tempo t al tempo $t + 30$, ossia:

$$VIX_t^2 \cong E_t^{\mathbb{Q}}[RV_{t,t+30}]$$

In altri termini, VIX_t^2 approssima il tasso del *variance swap*⁶ a 30 giorni.

La varianza dei rendimenti realizzata, $RV_{t,T}$, può essere decomposta in tre elementi rappresentativi di una strategia di replica dei payoff di un *variance swap*⁷:

$$RV_{t,T} = \frac{2}{T-t} \left[\int_0^{F_t} \frac{1}{K^2} (K - S_T)^+ dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{1}{K^2} (S_T - K)^+ dK \right] \\ + \frac{2}{T-t} \int_t^T \left[\frac{1}{F_{s^-}} - \frac{1}{F_t} \right] dF_s \\ - \frac{2}{T-t} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^0} \left[e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right] \mu(dx, ds)$$

Secondo la notazione degli autori S_t denota il livello *spot* dell'indice al tempo t , \mathbb{R}^0 l'insieme dei numeri reali escluso lo 0, $\mu(dx, ds)$ una misura randomica che conta i salti di dimensione $(e^x - 1)$ nel prezzo dell'indice al tempo t .

La decomposizione sopra è data dalla somma fra:

⁶ Un *variance swap* è un contratto *forward*, negoziato *over the counter* sui principali indici azionari attraverso cui, a scadenza, l'acquirente dello swap (posizione lunga) riceve un tasso sulla varianza realizzata e paga un tasso di varianza fisso (*variance swap rate*). L'ammontare del pagamento è definito dal prodotto fra la differenza tra i due tassi e un capitale nozionale. Il valore del contratto all'entrata è nullo. Quindi, per l'assenza di arbitraggio, il *variance swap rate* eguaglia il valore atteso, sotto la *risk-neutrality*, della varianza realizzata.

⁷ Si veda P.Carr and L.Wu, *A Tale of Two Indices*, 2006, APPENDIX B per una descrizione più dettagliata dei singoli passaggi algebrici.

- Il payoff derivante da una posizione statica in un continuo di opzioni europee *out-of-the-money* sul sottostante *spot* attraverso tutti i prezzi di esercizio ma alla stessa data di scadenza T ;
- Il payoff di una strategia di trading dinamica detenendo futures al tempo s ;
- Un termine di ordine maggiore indotto dalla discontinuità nelle dinamiche del prezzo dell'indice.

Adottando aspettative *risk-neutral* (sotto la misura \mathbb{Q}), utilizzando tassi di interesse deterministici e considerando che per la proprietà della martingala il valore atteso dei profitti derivanti dalla negoziazione dinamica dei futures è nullo, si ha:

$$E_t^{\mathbb{Q}}[RV_{t,T}] = \frac{2}{T-t} e^{r_t(T-t)} \int_0^\infty \frac{O_t(K,T)}{K^2} dK + \varepsilon$$

Perciò il valore atteso *risk-neutral* della varianza dei rendimenti è pari al valore futuro della somma fra il costo di avviamento della strategia di replica e l'errore di replicazione, un errore di approssimazione pari a 0 quando le dinamiche dell'indice sono puramente continue e di ordine $O[(dF/F)^3]$ in caso di salto.

Le ragioni che hanno portato alla sostituzione del VXO con il VIX sono individuabili in 3 pratici motivi:

1. Il VXO presenta una certa difficoltà interpretativa e rappresenta una mera trasformazione monotona non lineare dei prezzi di opzioni *at-the-money*. La sua cifra economica non è chiara alla luce di tutti i modelli posteriori a Black-Scholes. Di contro, il VIX ha un significato economico concreto, essendo il prezzo di un portafoglio lineare di opzioni.
2. La metodologia computazionale del VXO ha incontrato critiche dal mondo accademico e industriale per la distorsione al rialzo artificialmente indotta.
3. Il VXO approssima il tasso di uno swap di volatilità, il quale è molto difficile da replicare, mentre, come visto prima, è di più immediata realizzazione la replica dei payoff di un *variance swap* attraverso una posizione statica in un continuo di opzioni europee e una posizione dinamica nella negoziazione di futures.

Capitolo 2: Analisi della serie storica del VIX

2.1 Analisi visiva della serie del VIX comparata con lo S&P 500

Il VIX, nel corso della sua evoluzione metodologica, ha servito una duplice esigenza: la prima consta nella necessità segnaletica del livello di ansietà sul mercato azionario americano e la seconda nell'interesse galoppante per derivati sulla volatilità che potessero accontentare gli interessi di speculazione, diversificazione e protezione degli investitori.

Nel 1993 un banchiere di Union Bank of Switzerland (UBS), Michael Weber, sottoscrisse il primo "swap di varianza" sulla volatilità dell'azionario del Regno Unito per coprire il *trading book* di UBS da perdite. Da lì in poi l'uso di questi strumenti fu accelerato dalla crisi finanziaria asiatica, dal crollo del fondo speculativo Long-Term Capital Management, dalla frenesia delle transazioni a Wall Street e dalla possibilità di arbitraggio fra la volatilità realizzata e implicita. Nel 2002 Mark Cuban richiese alla banca d'affari Goldman Sachs uno strumento che gli permettesse di assicurarsi dal crollo del mercato mediante il forte aumento che avrebbe sperimentato contestualmente il VIX. Il CBOE, assieme agli sviluppatori di derivati di Goldman Sachs, lanciò i primi futures sul VIX nel 2004 e le opzioni sull'indice dal 2006. Lo scambio di contratti derivati crebbe esponenzialmente nel 2008 con la crisi dei *subprime* e continua a riscuotere negli ultimi anni interesse sempre crescente, tanto da aver reso il VIX uno fra gli indici più celebri dell'industria finanziaria.

Dalla rappresentazione grafica è immediato notare che gli *spikes* di volatilità del VIX sono in corrispondenza di determinati eventi: la Crisi asiatica del 1997-1998, la bolla delle Dot-com scoppiata nel 2000, l'attacco alle Torri Gemelle del 2001, la bolla immobiliare USA creatasi a partire dal 2006, il crack della Lehman Brothers nel 2008, la crisi dei debiti sovrani del 2010-2011 e l'elevato debito USA in quegli anni, la più recente svalutazione record dello yuan cinese del 2015 e il rally del VIX nel 2018 dopo aver toccato nel 2017 i minimi storici.

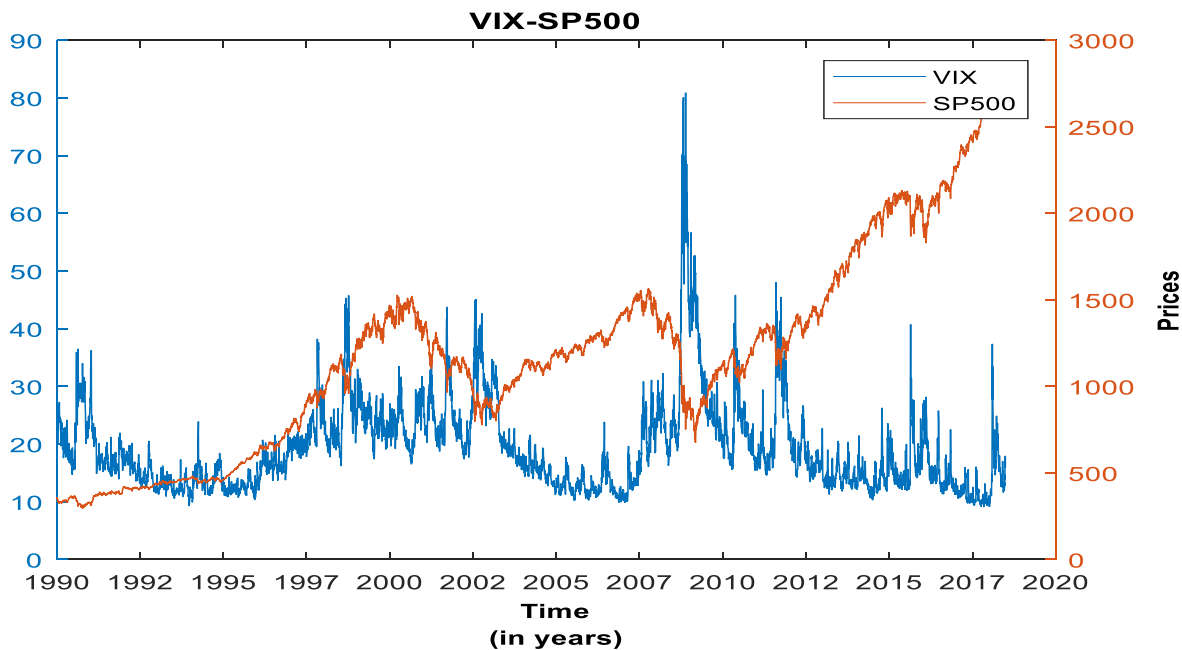


Grafico 1: Confronto fra VIX e SP500 (osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018)

Generalmente si riconoscono a valori del VIX inferiori a 20 periodi di ottimismo più o meno dilagante a seconda di quanto il valore si discosti in difetto da 20; valori superiori a 30 sono associati ad elevata incertezza, preoccupazione e turbolenze sui mercati; valori superiori a 45 sono associati alla presenza di paura o panico degli investitori.

Dal Grafico 1 è immediato notare che la serie del VIX appare più frastagliata rispetto a quella dello SP500, per cui la volatilità della volatilità dello SP500 è maggiore della volatilità dell'indice stesso. In secondo luogo, si nota la forte divergenza fra le due *time series*. Sostanzialmente vale, in linea di massima, che quando la volatilità è elevata i prezzi di mercato sono in declino e viceversa, a conferma della correlazione negativa che intercorre fra SP500 e VIX. Tuttavia non mancano casi, ad esempio dal 1996 al 1997, in cui le serie seguono la stessa direzione.

La correlazione negativa cattura il *leverage effect* (Black, 1976): dato un certo livello di indebitamento, un declino nel livello dell'equity aumenta il leverage dell'azienda (mercato) e di conseguenza il rischio per l'azione (indice azionario). In questo senso, il VIX non è un perfetto predittore della direzione in cui si muovono i mercati quanto piuttosto della magnitudo con cui tendono a variare nel continuo. Quando il mercato sperimenta forti variazioni nei prezzi, queste sono accompagnate da picchi di volatilità, specialmente quando le fluttuazioni sono al ribasso, ossia quando posizioni consistenti sono liquidate e nervosismo e panico degli investitori si riflettono sui prezzi. Vi è, così, maggiore incertezza nelle fasi di *downside*, rispetto a quelle di *upside*.

Ancor più chiara è la correlazione negativa fra i due indici utilizzando delle regressioni semplici (con un unico regressore) e osservando i seguenti *scatter plot*. Sebbene la relazione potrebbe essere di tipo non lineare, i modelli lineari, in questo caso, hanno un buon potere esplicativo, avvalorato dai rispettivi R^2 (il primo di 0.48 e il secondo di 0.617), che misurano la frazione della variabilità del rendimento dello SP500 (espresso in percentuale) spiegata dal regressore, ossia la variazione del livello dei prezzi del VIX (espressa in percentuale nel primo caso e in termini reali nel secondo). L' R^2 , dunque, sotto le ipotesi di linearità della relazione fra variabile indipendente e dipendente, esogeneità della variabile indipendente, omoschedasticità, normalità e non autocorrelazione dei disturbi, calcola la bontà d'adattamento del modello senza però fornire informazione alcuna sulla significatività dei coefficienti, per i quali serve una verifica di ipotesi. Grazie alla funzione *fitlm* di Matlab è possibile testare la significatività di questi ultimi (si vedano a tal proposito l'Elaborazione 1 e l'Elaborazione 2). La linea di tendenza blu del Grafico 2 mostra, ad esempio, che ad un declino di 30 punti percentuali del livello del VIX è associato un rendimento dello SP500 di circa 4 punti percentuali; la linea blu del Grafico 3, invece, ha una pendenza maggiore e pertanto mostra una relazione lineare più forte che nel caso precedente. Utilizzare la variazione giornaliera del livello dei prezzi del VIX piuttosto che la stessa espressa in termini percentuali è, pertanto, consigliabile per catturare la correlazione.

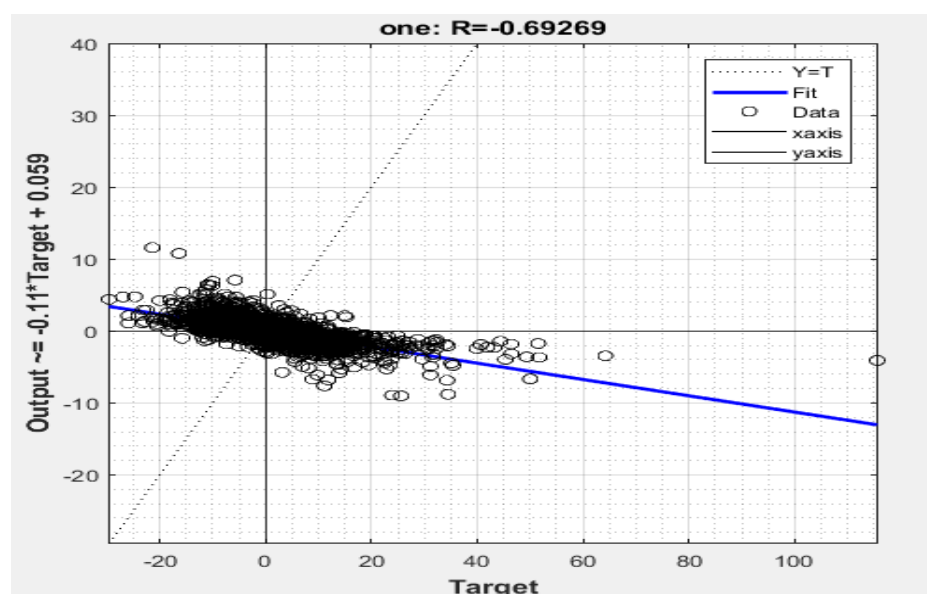


Grafico 2: Scatter plot SP500 returns (%) sull'asse delle ordinate vs VIX price level change (%) sull'asse delle ascisse, dataset di osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

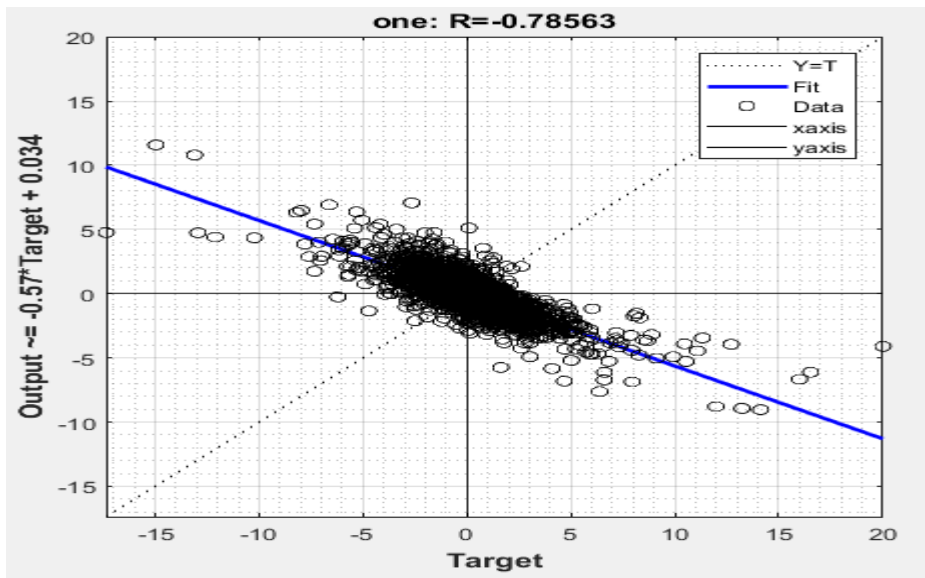


Grafico 3: Scatter plot SP500 returns (%) sull'asse delle ordinate vs VIX price level change (not in %) sull'asse delle ascisse, dataset di osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

Dalle Elaborazioni 1 e 2 si nota come in entrambe le regressioni semplici sia la stima dell'intercetta che del coefficiente del regressore, secondo l'analisi bidirezionale, risultino significativi (ossia viene rigettata l'ipotesi nulla di coefficienti nulli). Questo è quanto risulta dalla statistica t e dai valori dei *p-value* asintotici a 0. Anche l'RMSE, vale a dire la radice quadrata della varianza dei residui (in altri termini, la deviazione standard della varianza non spiegata) segna un valore decisamente basso in ambo i casi, a conferma dell'accuratezza e della bontà del *fitting*. Entrambi i modelli trovati con le regressioni semplici sono nettamente migliori del *constant model*, un modello degenero che riporta il solo termine costante.

Linear regression model:
 $y \sim 1 + x1$

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	0.058618	0.0094235	6.2203	5.2393e-10
x1	-0.11333	0.0013928	-81.371	0

Number of observations: 7180, Error degrees of freedom: 7178
 Root Mean Squared Error: 0.798
 R-squared: 0.48, Adjusted R-Squared 0.48
 F-statistic vs. constant model: 6.62e+03, p-value = 0

Elaborazione 1: Stima dei coefficienti della regressione fra SP500 returns (%) e VIX price level change (%), dataset di osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

Linear regression model:

$$y \sim 1 + x1$$

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	0.034209	0.0080797	4.2339	2.325e-05
x1	-0.56652	0.0052659	-107.58	0

Number of observations: 7180, Error degrees of freedom: 7178

Root Mean Squared Error: 0.685

R-squared: 0.617, Adjusted R-Squared 0.617

F-statistic vs. constant model: 1.16e+04, p-value = 0

Elaborazione 2: Stima dei coefficienti della regressione fra SP500 returns (%) e VIX price level change (not in %), dataset di osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

2.2 Analisi econometrica del VIX

2.2.1 La metodologia Box-Jenkins

Per modellare la serie storica del VIX e prevedere le sue possibili evoluzioni, obiettivo principale delle prime sezioni della tesi, è importante conoscere a fondo le sue statistiche basilari, quali la distribuzione, la media, la deviazione standard, lo spessore delle code, la presenza di salti più o meno accentuati, le tendenze cicliche, e così via.

Preme specificare che in questa fase si fa ricorso alla metodologia Box-Jenkins⁸, delineabile nelle fasi di:

1. Identificazione del modello: si opera preliminarmente trasformando i dati per stabilizzare la varianza e differenziandoli per ottenere una serie stazionaria e contestualmente si valutano le funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale per identificare i modelli *ARIMA* potenzialmente migliori;

⁸ Si veda per approfondimenti in merito *G. E. P. Box e G. M. Jenkins, Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, 1979*

2. Stima dei parametri: si procede alla stima dei parametri⁹ con il metodo della massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood Estimation*, MLE)¹⁰ o dei minimi quadrati (*Ordinary Least Squares*, OLS)¹¹; nella fase di selezione del modello si tiene conto del “principio della parsimonia”¹² e di altri indicatori (*Information Criteria*);
3. Verifica del modello: segue la verifica che il modello stimato sia conforme alle specificazioni di un processo stazionario univariato e il controllo diagnostico sulle autocorrelazioni e sulle autocorrelazioni parziali per stimare il comportamento dei residui (normalità, omoschedasticità e incorrelazione) e verificare se essi sono un’estraneazione campionaria di un processo *white noise* a componenti gaussiane¹³.

Se il modello stimato supera la fase di controllo si procede al forecasting, altrimenti si ripetono iterativamente le fasi sopra menzionate.

2.2.2 Statistiche di base

Ogni analisi econometrica non può che partire dal plot delle osservazioni, nel caso in questione i prezzi di chiusura giornalieri dell’indice. Nel Grafico 4 si ha una prima idea del fenomeno, caratterizzato da *spikes* di volatilità a cui seguono immediate fasi di rilascio, che si evolve nel tempo in maniera non deterministica. Intuitivamente potremmo pensare alla serie come ad una *random walk* che ritorna al suo valore medio storico, ~19.32 (*mean-reversion effect*) e i cui movimenti sono compresi fra il valore minimo storico di 9.14 e il valore massimo storico di 80.86¹⁴. La serie può anche essere apprezzata come una realizzazione parziale di un processo stocastico, e di questa sua natura bisogna tener conto nella fase di modellizzazione e forecast.

⁹ Per la stima dei parametri è possibile utilizzare l’OLS in maniera corretta ed efficiente solo in presenza di un processo AR(p); in caso di MA(q) o ARMA(p,q) non è possibile ricorrere all’OLS, perché i termini d’errore del passato sono incogniti, perciò si ricorre alla MLE.

¹⁰ La MLE consiste nella massimizzazione, condizionatamente ai parametri del modello oggetto di stima, della funzione di verosimiglianza (distribuzione di probabilità congiunta) del campione.

¹¹ L’OLS è una tecnica di ottimizzazione che permette di stimare la funzione, rappresentata da una curva di regressione, che minimizza la somma dei quadrati delle distanze tra i dati osservati e i valori predetti dalla curva di regressione.

¹² Si tratta di trovare il miglior ARIMA fra i candidati cercando di utilizzare il minor numero di parametri possibile. La genesi del principio della parsimonia risale al 1340, quando Guglielmo di Ockham asserì: “Tutte le spiegazioni devono essere economiche e semplici, senza altri costrutti se non quelli assolutamente necessari a spiegare un evento o un fenomeno”. Questa affermazione passò alla storia come il Rasoio di Ockham.

¹³ Il *white noise* gaussiano è un processo stazionario, ergodico e randomico a media nulla.

¹⁴ Il massimo intraday è stato segnato, invece, il 24 ottobre 2008 a 89.53%.

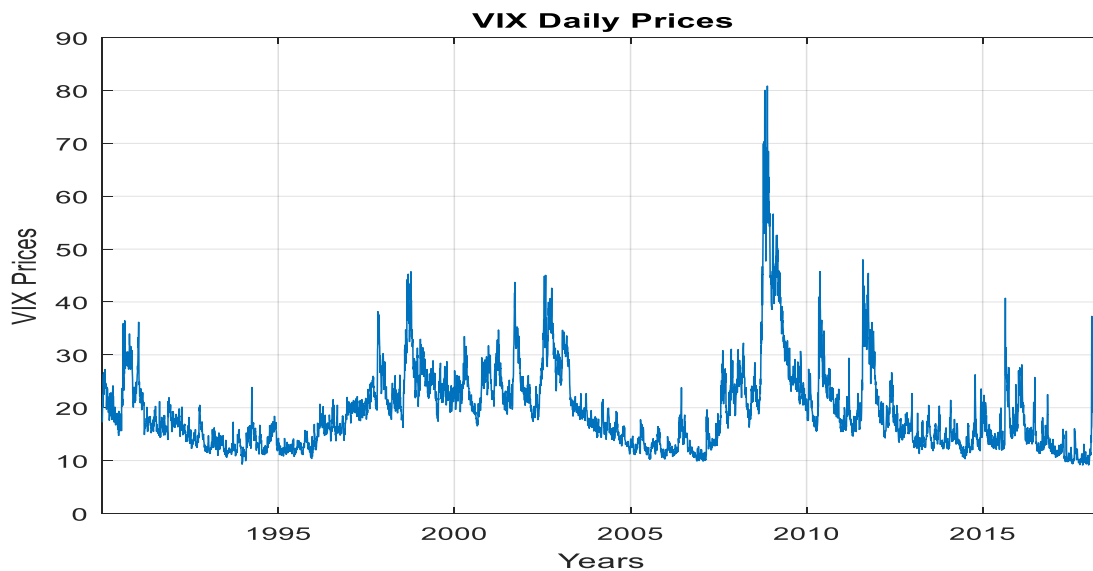


Grafico 4: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

La stagionalità è un tema spesso oggetto di controversie, in misura ancor maggiore nel caso della serie del VIX. Alcuni studi presentano evidenze su una componente stagionale certa delle serie, altri rigettano questa convinzione attribuendo la formazione dei valori medi per mese alla rumorosità della serie e al verificarsi di *outliers* randomici. La distribuzione dei valori rappresenta un importante strumento informativo, segnaletico dei mesi in cui l'investitore può aspettarsi una riduzione o un aumento della volatilità implicita e pertanto dovrebbe essere, auspicabilmente, incorporato fra i fattori determinanti del processo di investimento. I mesi con minor volatilità, storicamente, sono maggio, giugno e luglio. I mesi con maggiore volatilità sono, invece, settembre, ottobre e novembre. La giustificazione è immediata se si pensa che il periodo da settembre a novembre coincide con la fase di elezione presidenziale negli USA e che il periodo da maggio a luglio coincide con la stagione delle vacanze e la distensione di alcuni tipi di business.

Valori medi mensili del VIX dal 1990 al 2017		
mesi	valori	rank
gennaio	19,6636	4
febbraio	19,5652	5
marzo	19,1169	8
aprile	18,3561	9
maggio	18,1176	11
giugno	18,1779	10

luglio	17,7401	12
agosto	19,4153	6
settembre	20,7501	2
ottobre	21,6888	1
novembre	20,7241	3
dicembre	19,3119	7

Tabella 1: Valori medi mensili del VIX, osservazioni dal 2 gennaio 1990 al 29 dicembre 2017

Pur riconoscendo la valenza della componente stagionale per finalità di trading, data l'entità modesta e irregolare negli anni delle variazioni mensili, la serie del VIX non sarà destagionalizzata.

Le analisi, d'ora in poi, sono condotte tramite l'uso dei logaritmi al fine di evitare forecast negativi di volatilità. Il ricorso a un filtro non lineare quale la trasformazione in scala logaritmica, alla base delle prossime analisi, consente di stabilizzare le varianze, normalizzare la distribuzione e appare la più mirata per la serie di lungo termine del VIX e per le sue escursioni molto ampie, consentendo di semplificare l'elaborazione dei dati.

La serie dei logaritmi dei prezzi di chiusura appare come di seguito:

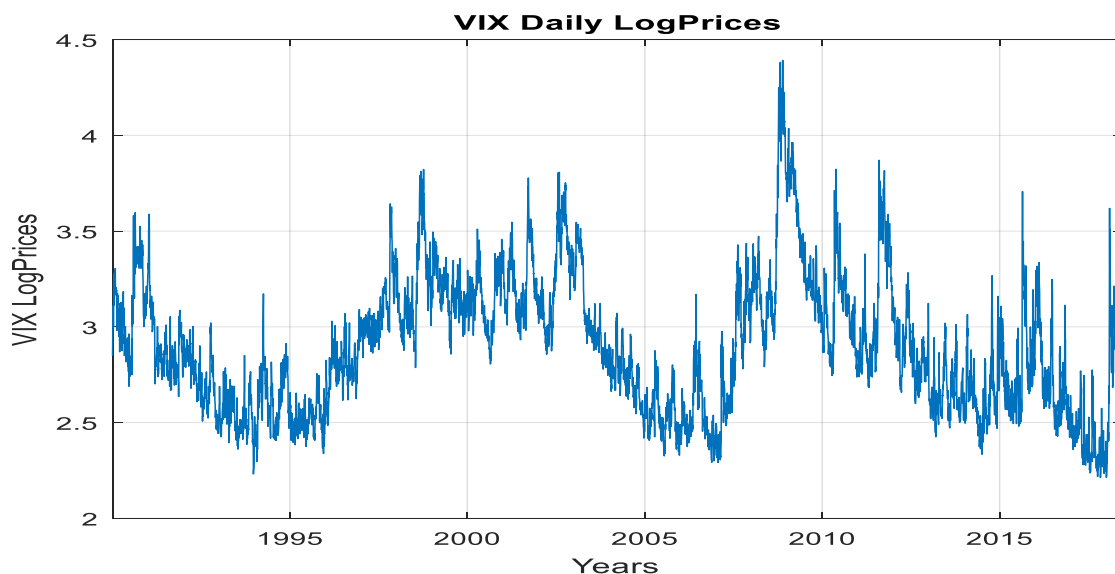


Grafico 5: Logaritmi dei prezzi di chiusura giornalieri del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

Nella seguente Tabella sono schematizzate le principali statistiche descrittive dei prezzi di chiusura, sicuramente utili per inquadrare l'oggetto d'analisi ed ottenere una visione d'insieme del fenomeno, prima di proseguire con analisi econometriche più sofisticate:

Prezzi giornalieri di chiusura			
	VIX	LogVIX	SP500
numero di osservazioni	7181	7181	7181
massimo	80,86	4,3927	2872,9
minimo	9,14	2,2127	295,46
media	19,318	2,8952	1182,5
mediana	17,44	2,8588	1165,9
range	71,72	2,1801	2577,4
deviazione standard	7,8398	0,3494	576,8153
asimmetria	2,0918	0,6399	0,5659
curtosi	10,6676	3,3338	2,9667

Tabella 2: Statistiche descrittive di VIX, LogVIX e SP500, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

Data la numerosità delle rilevazioni si può assumere che i prezzi di chiusura del VIX si distribuiscano secondo una log-normale e di conseguenza i rendimenti secondo una normale. Questo è quanto vale in linea teorica ma certamente bisogna tenerne conto in un'analisi di prima istanza. Osservando i QQ plot, che consistono nel confronto fra la distribuzione cumulata della variabile osservata e la distribuzione cumulata della normale, e gli istogrammi del VIX (espresso in prezzi) e dei suoi rendimenti logaritmici, emerge, così come già testato nelle prime statistiche descrittive, che il VIX presenta una curtosi rilevante e un certo grado di asimmetria positiva.

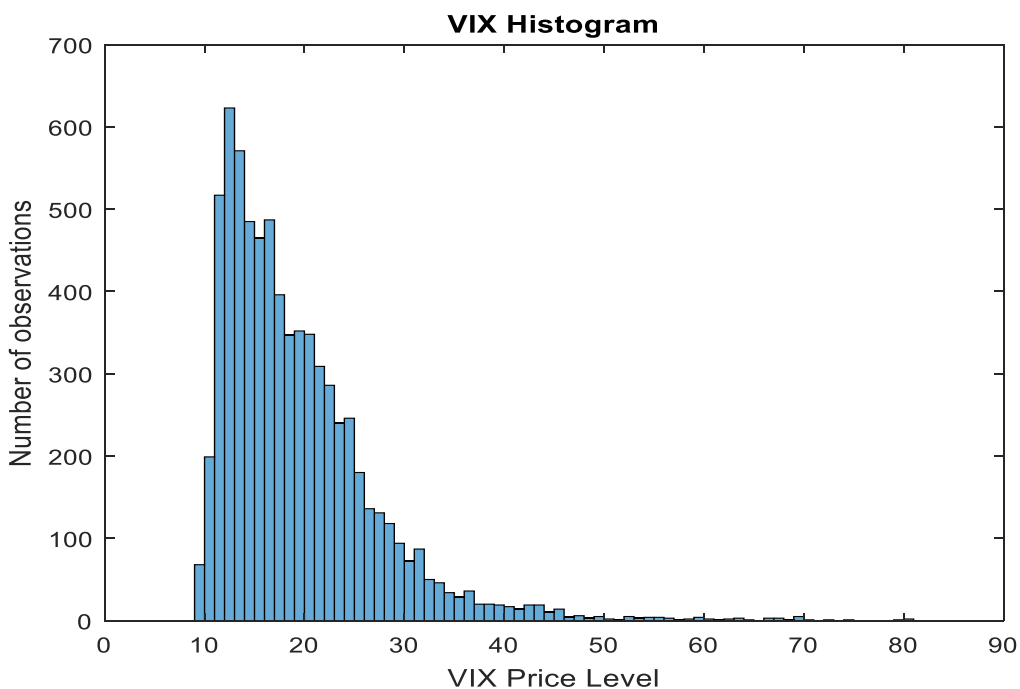


Grafico 6: Istogramma dei prezzi di chiusura giornalieri del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

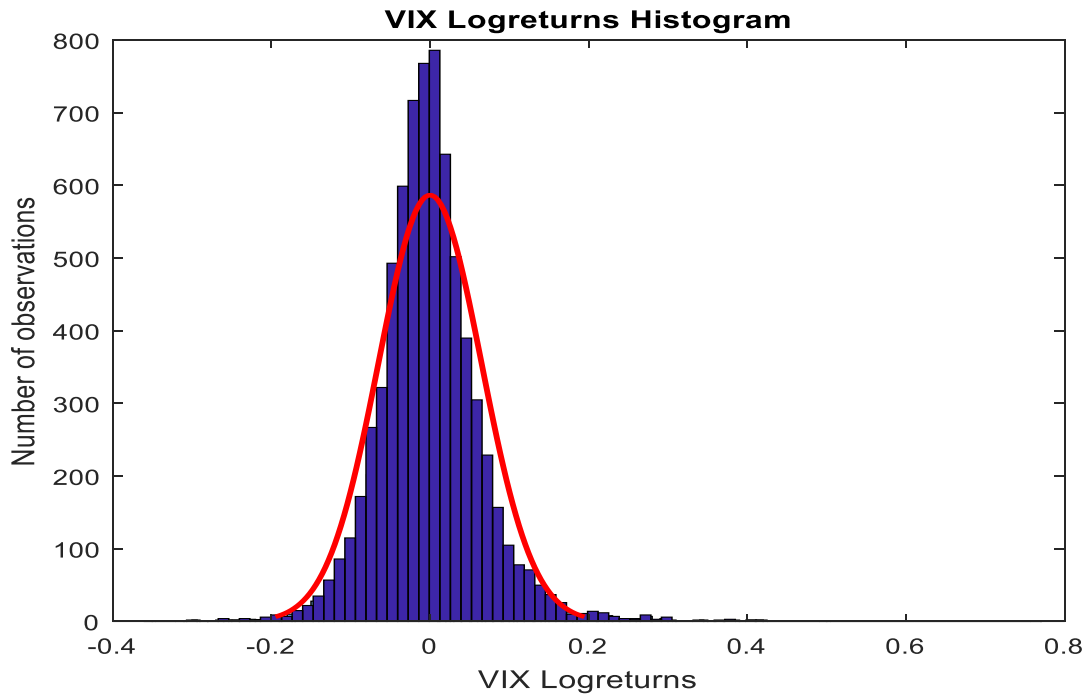


Grafico 7: Istogramma dei rendimenti logaritmici giornalieri del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

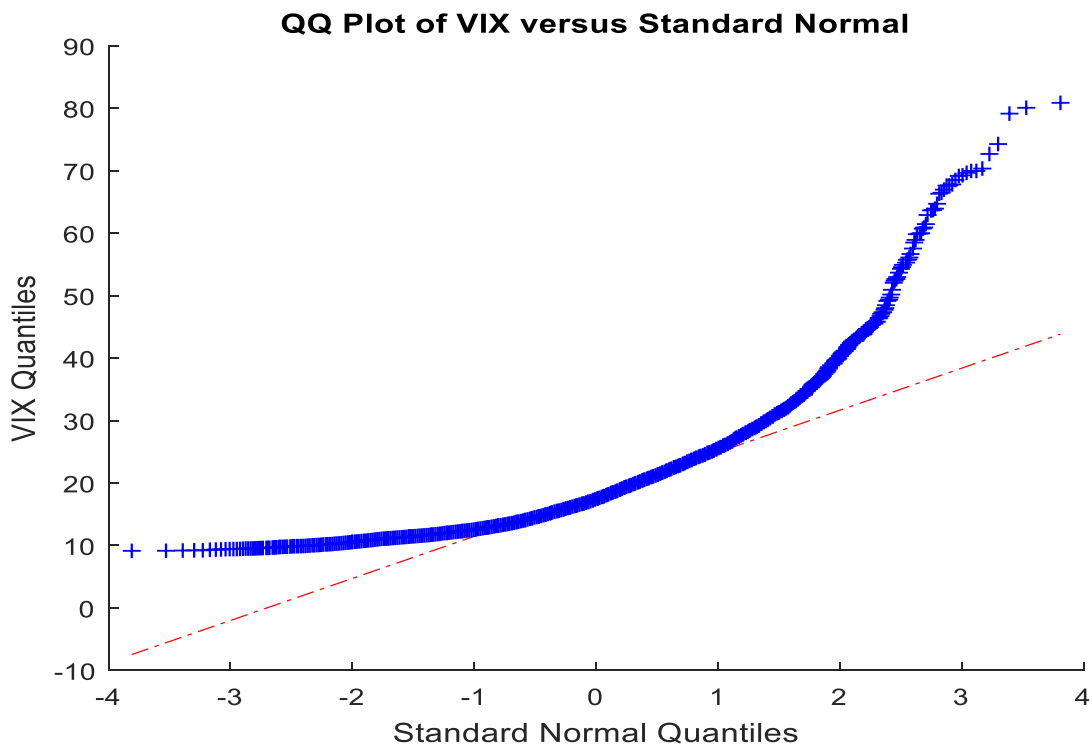


Grafico 8: QQ plot del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

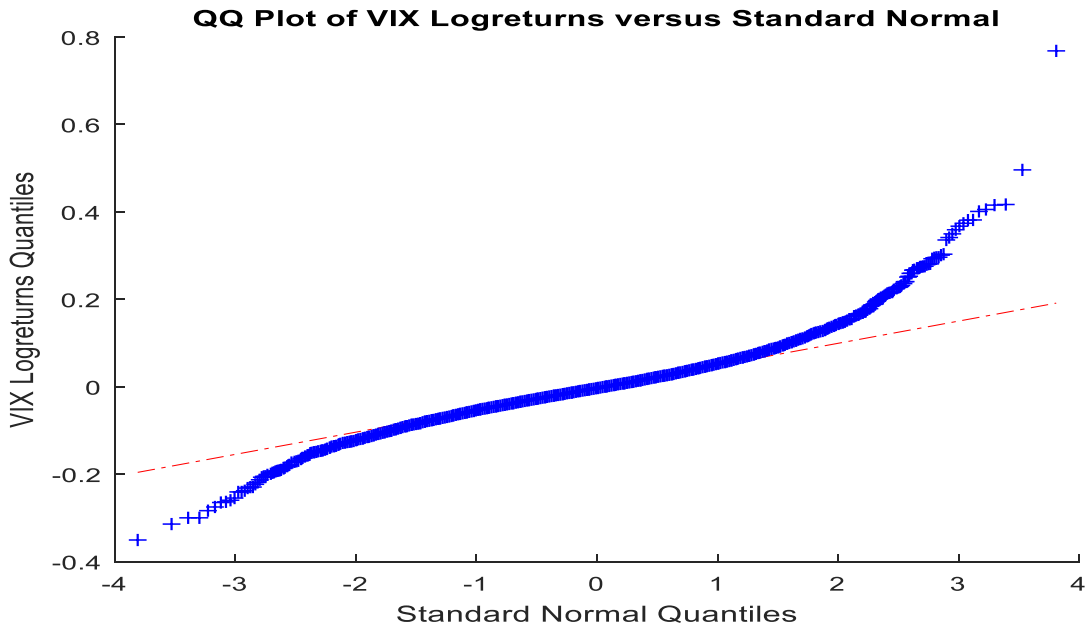


Grafico 9: QQ plot dei rendimenti logaritmici giornalieri del VIX, dataset dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018

Nel primo QQ plot il grado di curvatura rispetto alla retta rossa tratteggiata indica la presenza di asimmetria nei dati campionari, mentre nel secondo la dispersione agli estremi del grafico e in direzioni opposte è sintomatico di valori estremi (dei rendimenti logaritmici) che divergono dall'assunzione di distribuzione normale.

2.2.3 Analisi della stazionarietà della serie

Sia $\{y_t\}_{t=1}^T$ (dove T è il periodo in corrispondenza dell'ultima osservazione campionaria, nonché la lunghezza della serie) la realizzazione parziale di un processo stocastico¹⁵. La serie $\{y_t\}_{t=1}^T$ è strettamente stazionaria se presenta:

- Media costante nel tempo:

$$E(y_t) = \mu \quad \forall t;$$
- Varianza costante nel tempo:

$$Var(y_t) = \sigma^2 \quad \forall t.$$

Si parla, invece, di stazionarietà in senso debole (o del secondo ordine) se:

- $E(y_t) = \mu < \infty \quad \forall t;$

¹⁵ Un processo stocastico, per definizione, è in grado di generale una serie temporale infinita caratterizzata da una sequenza ordinata (per date crescenti) di variabili randomiche.

- $Var(y_t) = \sigma^2 < \infty \quad \forall t$;
- Covarianza fra y_t e y_{t-h} finita per $h = \pm 1, \pm 2, \dots$ e dipendente unicamente dalla distanza fra t e $t - h$ (nota come gap o lag):
 $Cov(y_t, y_{t-h}) = \gamma_h \quad \forall t, h$.

Quest'ultima risulta preferibile in ambito pratico; si consideri perciò stazionario un processo stocastico con momenti finiti e non dipendenti dal tempo. Per esaminare la stazionarietà della serie è fondamentale l'ausilio del correlogramma, che va a stimare l'*Autocorrelation Function* (ACF) e la *Partial Autocorrelation Function* (PACF).

L'autocorrelazione è la dipendenza lineare di una variabile con essa stessa in due punti nel tempo (in presenza di stazionarietà l'autocorrelazione dipende solo dal lag h); in formule:

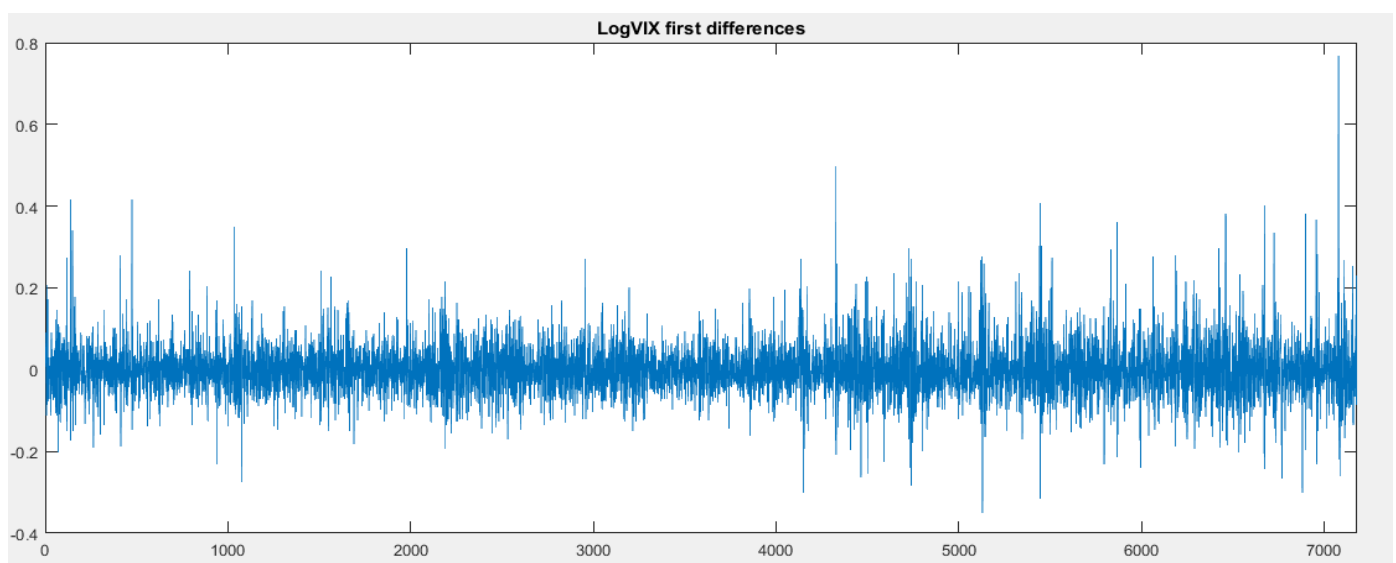
$$\rho_h = Corr(y_t, y_{t-h}) = \frac{Cov(y_t, y_{t-h})}{Var(y_t)} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} ;$$

L'autocorrelazione parziale è l'autocorrelazione fra y_t e y_{t-h} dopo aver rimosso ogni dipendenza lineare su $y_1, y_2, \dots, y_{t-h+1}$; in formule:

$$\phi_{h,h} = Cov(y_t, y_{t-h} | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-h+1}) .$$

Analizzando i livelli giornalieri logaritmici del VIX, dal correlogramma si evince l'elevata persistenza delle autocorrelazioni, mentre le autocorrelazioni parziali decadono immediatamente dopo il primo lag, oscillando lievemente nei successivi. Ciò è sintomatico della non stazionarietà della serie.

Si procede, dunque, a differenziare la serie dei logaritmi dei prezzi¹⁶:



¹⁶ Differenziando la serie dei logaritmi dei prezzi si ottiene la serie dei rendimenti logaritmici. Il rendimento logaritmico al tempo t è ottenuto come $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$.

L'ADF (Augmented Dickey-Fuller) test è il test più diffuso per verificare se si è in condizioni di stazionarietà, anche in presenza di un grado autoregressivo maggiore di 1. L'ADF test sulla serie differenziata restituisce un *p-value* di 0.001, sufficientemente basso da suggerire di rifiutare l'ipotesi nulla di non stazionarietà. Differenziare la serie per una seconda volta è inutile, anzi rischioso (si incorre nell'*over-differencing*). A conferma dell'ordine di integrazione unitario vi sono, oltre al *p-value* sopra menzionato, l'oscillazione della serie generata attorno a un valor medio ben definito, una deviazione standard molto contenuta e le autocorrelazioni che decadono monotonicamente a 0.

2.2.4 I modelli ARIMA

Verificata la stazionarietà, bisogna identificare il miglior modello *ARIMA* per la serie. La sigla *ARIMA* sta per *Auto-Regressive Integrated Moving Averages* e consta di tre componenti (esplicitati come parametri del modello). La notazione standard vuole che un processo di questo tipo sia generalmente rappresentato come *ARIMA*(p, d, q) con p e q rappresentativi, rispettivamente, della componente autoregressiva (ordine del lag) e dell'ordine del *moving average* e d dell'ordine di integrazione. Per fornire al lettore un'idea del processo autoregressivo e a medie mobili si ricorre ai più immediati, ossia l'*AR*(1) e il *MA*(1).

L' *AR*(1) è identificato come:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dove: μ è la costante, ϕ_1 il parametro autoregressivo¹⁷ ed $\varepsilon_t \sim \text{white noise}(0, \sigma^2)$.

Il *MA*(1)¹⁸ è definito come:

$$y_t = \mu + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

¹⁷ Si dimostra in maniera ricorsiva, posto per ipotesi $\mu = 0$, che una rappresentazione equivalente dell'*AR*(1) è $y_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \phi_1^h \varepsilon_{t-h} + \dots$, che è stazionario se e solo se $\phi_1^h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow \infty$. Questa condizione coincide con i casi in cui ϕ_1 è in valore assoluto minore di 1; pertanto il processo è non stazionario nel caso in cui il parametro autoregressivo sia maggiore a 1 o uguale a 1. In particolare, se ϕ_1 in valore assoluto è pari a 1 vi è una forte persistenza (forte peso di shock molto remoti sulla variabile presente), mentre se è superiore a 1 siamo in presenza di processi "esplosivi" (con crescita esponenziale). In un *AR*(2) la condizione di stazionarietà è che $|\phi_1 + \phi_2| < 1$, in altri termini che le radici del polinomio $\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$ siano maggiori di 1 in valore assoluto. Se la prima radice è positiva e la seconda negativa si è in presenza di fenomeni ciclici o stagionali.

¹⁸ L'importanza del *MA*(q) risiede in una derivazione del Teorema di Wold che riscontra nel *MA*(q) la capacità di poter rappresentare con uno o pochi lag processi *AR* con molti lag che condurrebbero, nella stima, alla perdita di molte osservazioni.

Dove: μ è la costante, θ_1 il parametro *moving average* ed $\varepsilon_t \sim \text{white noise}(0, \sigma^2)$.

La combinazione di questi ultimi genera un $ARMA(1,1)$:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Per stimare l' $ARIMA$ è necessario osservare la funzione di autocorrelazione e la funzione di autocorrelazione parziale, considerando che un processo $AR(p)$ ha una ACF che tende a 0 al crescere dei lag (h) e una PACF pari a 0 $\forall h > p$. Al contrario un processo $MA(q)$ ha una ACF pari a 0 $\forall h > q$ e una PACF che tende a 0 all'aumentare dei ritardi (h). Alla luce di quanto detto è ipotizzabile, dal correlogramma, che l'ordine del polinomio autoregressivo e a media mobile sia pari a 1; ad avvalorare l'intuizione che il miglior modello sia l' $ARIMA(1,1,1)$ vi sono ulteriori indicatori. Fra questi si annoverano l'*Akaike Information Criterion* (AIC)¹⁹ e il *Bayesian Information Criterion* (BIC)²⁰, calcolati come segue:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

$$BIC = \ln(n)k - 2\ln(L)$$

Dove:

- k è il numero di parametri del modello statistico;
- L è il valore massimizzato della funzione di verosimiglianza del modello;
- n è il numero di osservazioni, ovvero la dimensione campionaria.

Il miglior $ARIMA$ fra i candidati è quello con i minori AIC e BIC²¹, ossia l' $ARIMA(1,1,1)$. Esso rappresenta il modello che, fra gli $ARIMA$, meglio si adatta alla serie osservata e meglio rappresenta il processo generatore della stessa. Si vuole evidenziare che il ricorso ad un $ARIMA(1,1,1)$ per modellare la serie dei *log-prices* coincide con l'uso di un $ARMA(1,1)$ per la serie dei *log-returns*.

Prima di effettuare una previsione bisogna tener conto di un fattore cruciale, nella prassi affidato alla discrezionalità di chi conduce analisi econometriche sulle serie storiche. Esso consiste nella scelta della profondità temporale sulla quale stimare i parametri dell' $ARIMA$. Avvalersi dell'intera serie comporta una stima dei parametri robusta ma, allo stesso tempo, essa potrebbe essere poco rappresentativa degli ultimi movimenti dei logaritmi dei prezzi e pertanto rischiosa, in taluni casi, in ottica di forecast a breve o brevissimo

¹⁹ Per una completa analisi del Criterio Informativo di Akaike si consiglia H. Akaike, "A new look at the statistical model identification", 1974.

²⁰ Il paper di riferimento per il Criterio Informativo Bayesiano è: G.E. Schwarz, "Estimating the dimension of a model in Annals of Statistics", 1978.

²¹ L'AIC e il BIC servono a selezionare il modello che fitta meglio e con meno parametri, in virtù dell'esistenza di un "costo" nell'introduzione di nuove variabili (a fronte della riduzione della varianza). Questo costo è inversamente proporzionale alla significatività statistica delle variabili introdotte. L'AIC e il BIC, inoltre, differiscono per l'uso di diversi *penalty terms*, che rendono il BIC maggiormente penalizzante.

termine. D'altro canto, ricorrere a poche osservazioni può condurre, talvolta, a stime distorte ma presenta il grande vantaggio di risultare maggiormente performante, in media, per i forecast su brevi orizzonti temporali.

Si procede con la stima dei parametri e partendo dall'ultima osservazione del campione in scala logaritmica del VIX (in corrispondenza del 29 giugno 2018), con il forecast 80 *step-ahead* mediante l'*ARIMA*(1,1,1). Le previsioni sugli 80 *trading days* successivi all'ultima osservazione campionaria vengono poi, raffrontate, in ottica di backtesting, con le effettive realizzazioni del logaritmo del VIX in quegli 80 giorni (i giorni di negoziazione dal 2 luglio 2018 al 23 ottobre 2018).

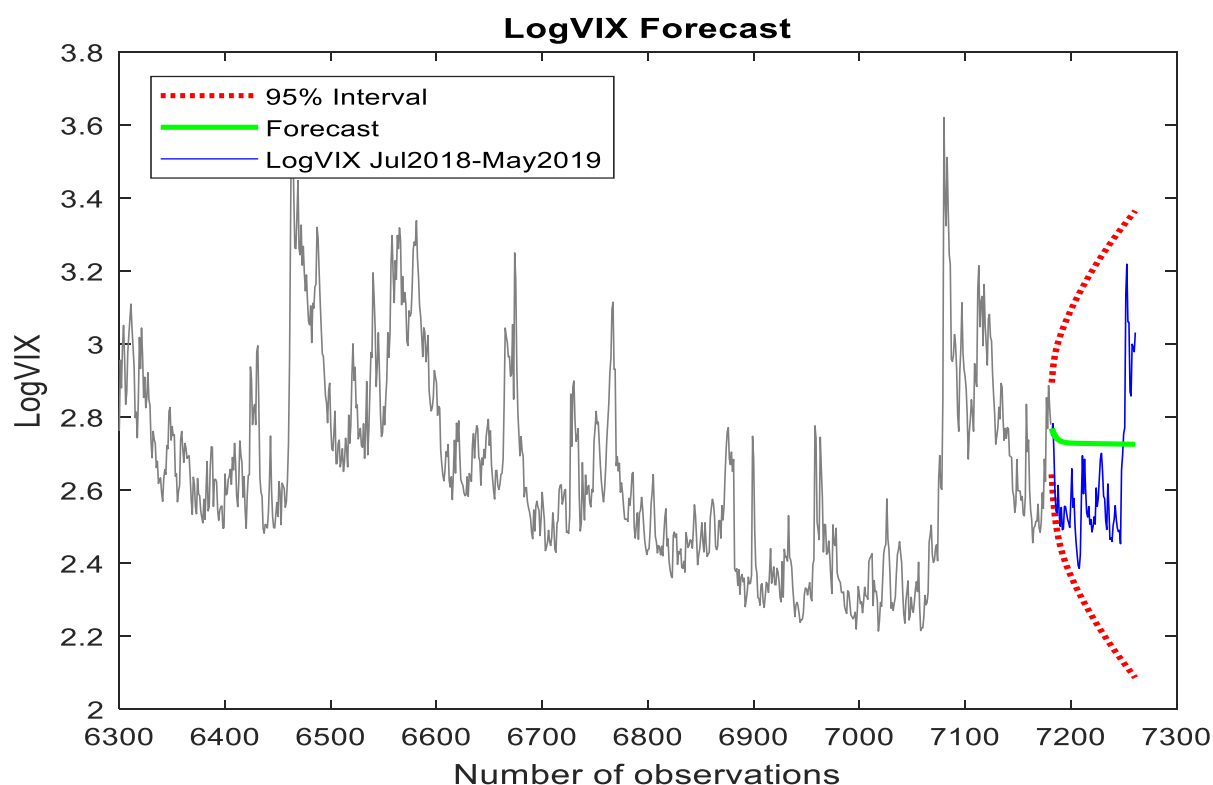


Grafico 11: Forecast 80 *step-ahead* dei logaritmi dei prezzi di chiusura del VIX mediante l'*ARIMA*(1,1,1)

In questo caso siamo in presenza di un ottimo forecast senza alcuna eccezione giornaliera (nessuna rilevazione *ex post* su 80 al di fuori degli estremi dell'intervallo di confidenza costruito al livello del 95%). Il forecast con gli *ARIMA* può risentire negativamente in correttezza nei periodi di tensione sui mercati o addirittura condurre a una previsione fuorviante in stato di crisi.

2.2.5 Analisi sui residui: correlogrammi e Ljung-Box test

Prima di sviluppare riflessioni sul comportamento dei residui e sulle coerenti implicazioni occorre specificare il funzionamento del *Ljung-Box test*²², un test formale per la verifica dell'autocorrelazione, che ha lo scopo di verificare il seguente sistema di ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_h = \dots = \rho_m = 0 \\ H_1: \rho_i \neq 0 \text{ per almeno un } i \text{ con } 1 \leq i \leq m, m = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

La statistica test è:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{h=1}^m \frac{\hat{\rho}_h^2}{n-h}$$

Dove n è la dimensione del campione di dati, $\hat{\rho}_h$ la funzione di autocorrelazione campionaria al ritardo h ed m il numero di autocorrelazioni usate per la costruzione del test. Per dati indipendenti e identicamente distribuiti (sotto H_0) la statistica test approssima asintoticamente una χ_m^2 . Il coefficiente di correzione $n(n+2)$ consente di approssimare meglio la χ^2 per campioni finiti.

La regione critica di rigetto di H_0 per il livello di significatività α è:

$$Q(m) > \chi_{1-\alpha, m}^2$$

Dove $\chi_{1-\alpha, m}^2$ è il quantile $1 - \alpha$ della distribuzione χ^2 con m gradi di libertà.

Un *p-value* superiore a 0.05, come nel caso dei residui in questione, suggerisce che non c'è sufficiente evidenza per rigettare l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione dei residui.

²² G.M. Ljung, G.E.P. Box: "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models", 1978.

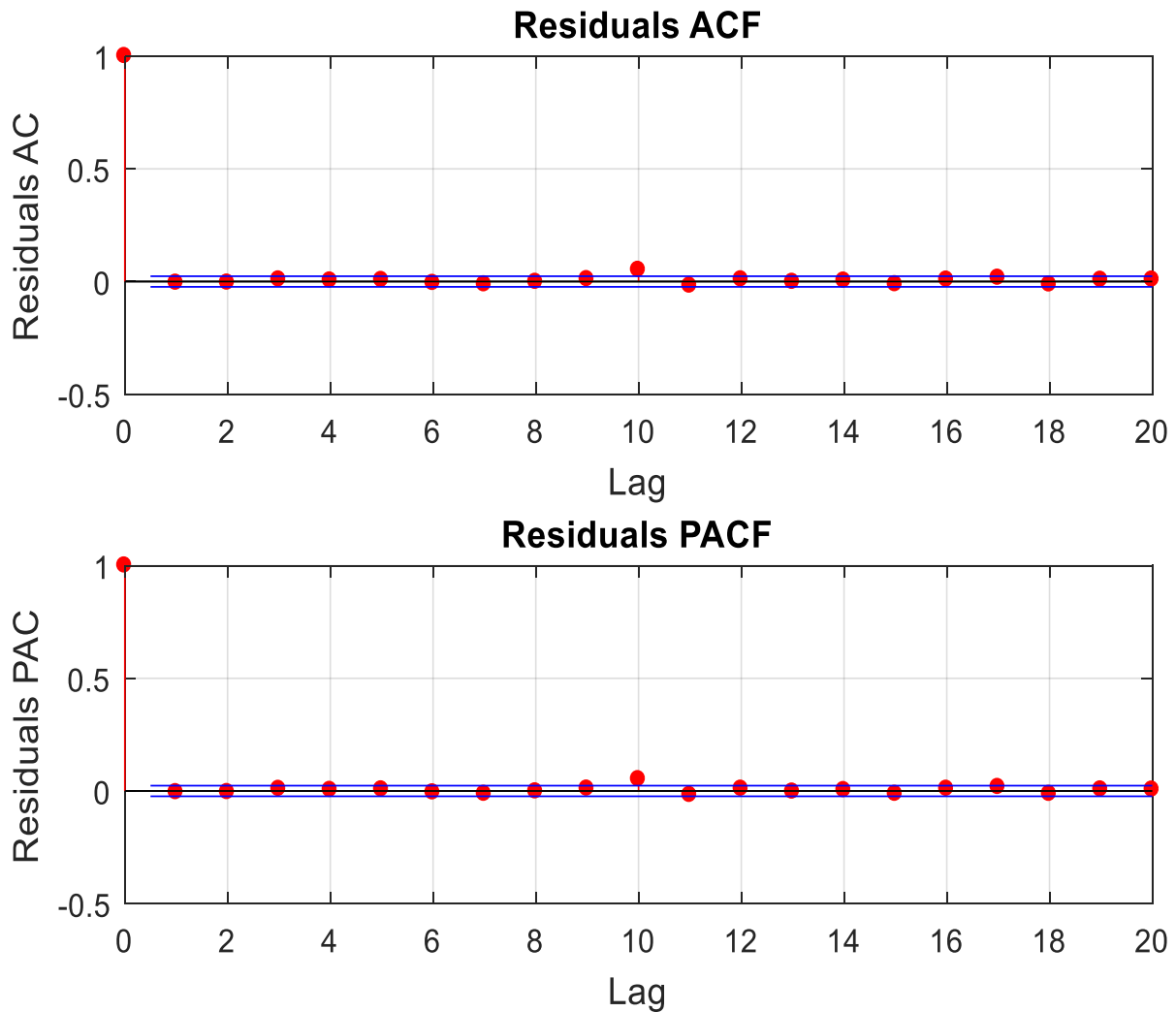


Grafico 12: Funzione di autocorrelazione e autocorrelazione parziale dei residui

2.2.6 Indagine sulla presenza di eteroschedasticità condizionale: i modelli ARCH

Alla stessa stregua degli studi empirici accreditati in letteratura si è riscontrata, invece, una forte evidenza di autocorrelazione nei residui quadrati e nei residui in valore assoluto. A conferma del risultato vi sono, in prima istanza, i correlogrammi con molti valori esterni alle bande di Bartlett, come si nota nel Grafico 14 e nel Grafico 16 e in secondo luogo il Ljung-Box test.

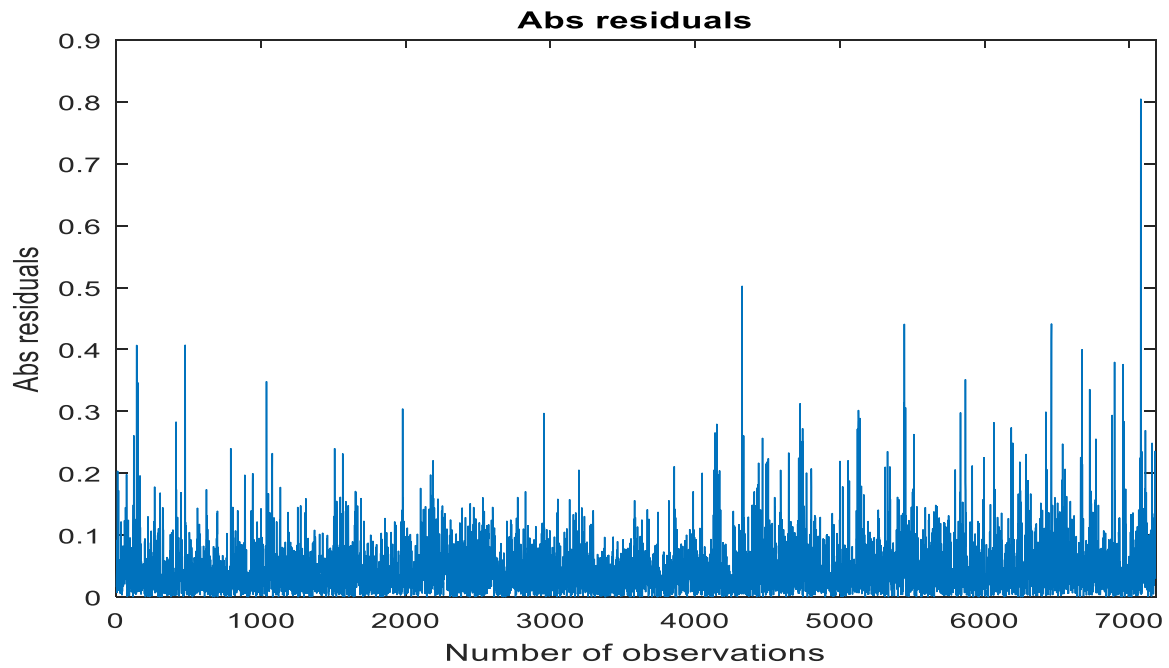


Grafico 13: Residui in valore assoluto

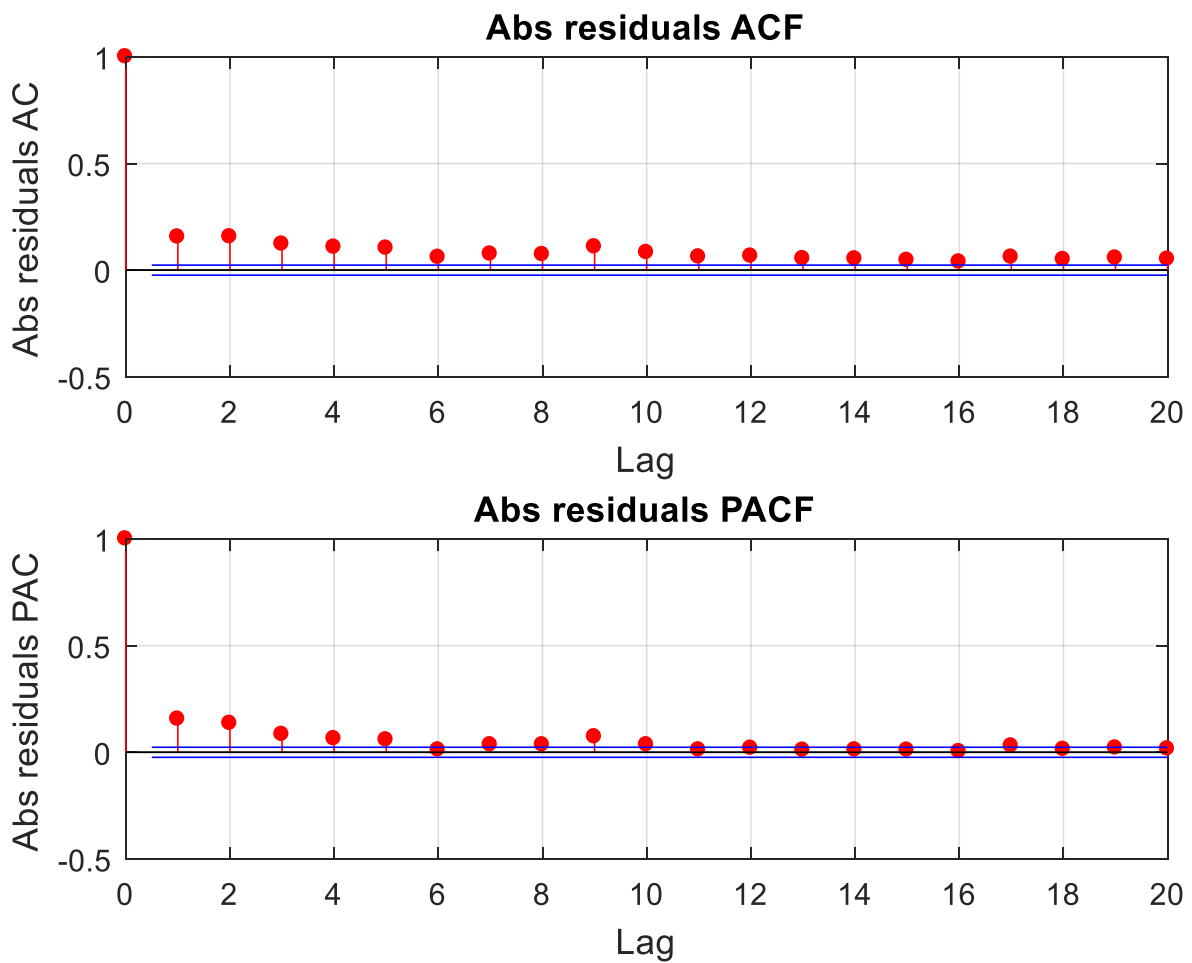


Grafico 14: Funzione di autocorrelazione e autocorrelazione parziale dei residui in valore assoluto

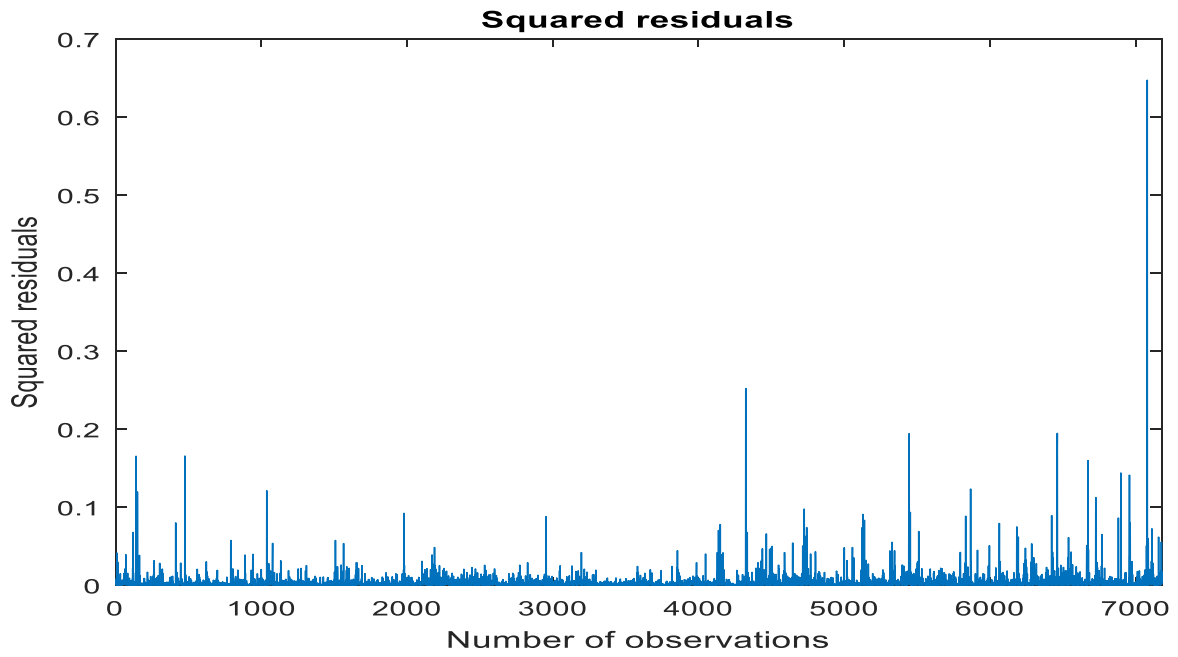


Grafico 15: Residui quadrati

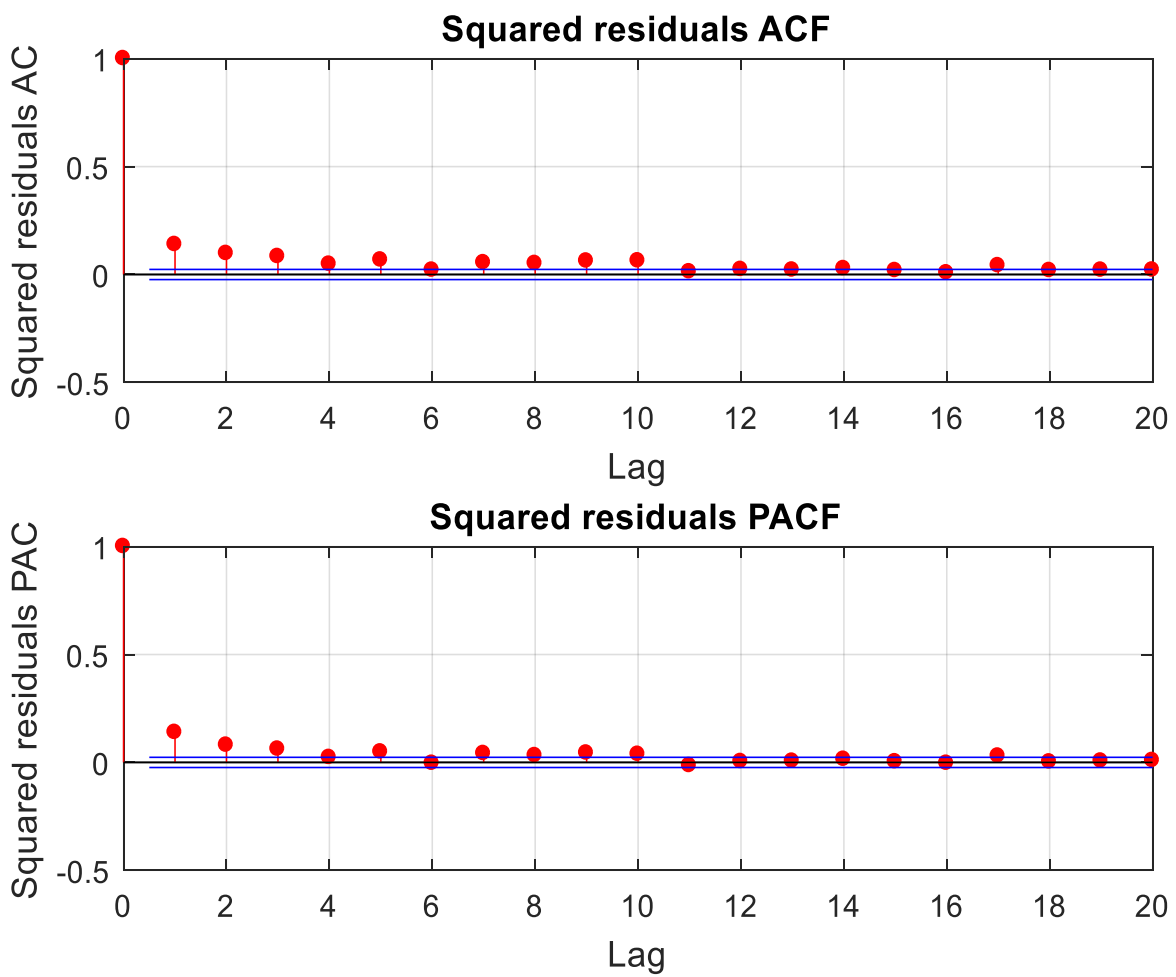


Grafico 16: Funzione di autocorrelazione e autocorrelazione parziale dei residui quadrati

Il riscontro di assenza di autocorrelazione fra i residui e la presenza, invece, di autocorrelazione positiva e lentamente decadente fra i residui in valore assoluto e quadrati è la manifestazione quantitativa del fenomeno del *volatility clustering* (Granger e Ding, 1993), per il quale “ampie variazioni tendono ad essere seguite da ampie variazioni di entrambi i segni e piccole variazioni da piccole variazioni di ambo i segni” (Mandelbrot, 1963). Questa evidenza è tanto riscontrabile nei residui in valore assoluto e quadrati quanto negli stessi *returns* ed è una forma di eteroschedasticità.

Poiché il modello *ARIMA* è costruito sotto le ipotesi di omoschedasticità e al fine di tener conto dei cambiamenti della varianza nella serie dei rendimenti logaritmici, si performa l’*Engle’s ARCH test* (Engle, 1982), basato sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Quest’ulteriore test elicitava, come ci si poteva attendere, la presenza di effetti ARCH, ossia la presenza di eteroschedasticità condizionale nei residui calcolati sul miglior modello *ARIMA* per la serie dei logaritmi dei prezzi, l’*ARIMA(1,1,1)*. Sostanzialmente ε_t si assume essere una differenza di martingala, un processo stocastico la cui aspettativa condizionata al passato è nulla. Per quanto detto:

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) = 0 \quad \forall t \quad ^{23}$$

Il primo modello *ARCH* (*Auto-Regressive Conditionally Heteroskedastic model*) fu ideato nel 1982 da Robert Engle²⁴. L’autore, estendendo le analisi, fino ad allora limitate allo studio del momento primo condizionale, ai momenti condizionali successivi al primo, aprì la strada ad una nuova categoria di processi eventualmente non lineari né in media né in varianza e perfezionando la qualità della modellizzazione della volatilità il beneficio si estese alle applicazioni finanziarie implementabili.

Se consideriamo il modello *ARCH(p)*²⁵ la varianza condizionale è data da:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \text{con } \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \text{ per } i > 0$$

Dove:

- α_0 è l’intercetta;
- p è l’ordine autoregressivo dell’*ARCH*;
- α_i i coefficienti autoregressivi;
- ε_{t-i}^2 i quadrati degli shock passati.

²³ Le implicazioni di questa assunzione sono l’incorrelazione degli ε_t e l’aspettativa *unconditional* del processo pari a 0, mentre la varianza di ε_t condizionata al passato può essere diversa da 0 (eteroschedasticità).

²⁴ Le ricerche di R. Engle sui modelli ARCH gli fruttarono il Premio Nobel per l’Economia nel 2003.

²⁵ Per un’esauriente lettura si rimanda al paper “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”, R. Engle - *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1982

I termini di disturbo, inoltre, si assumono essere serialmente incorrelati ma con una certa (debole) dipendenza nel tempo:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i. i. d. } (0,1).$$

Vale, inoltre, essendo il valor medio dei rendimenti logaritmici molto prossimo a 0 (data la frequenza giornaliera delle osservazioni), la seguente coincidenza matematica: $\varepsilon_t \equiv y_t$, dove y_t rappresenta il rendimento logaritmico al tempo t . La caratteristica di incorrelazione e dipendenza debole appena citata viene traslata, perciò, anche ai rendimenti, insieme alle altre dinamiche colte dai modelli *ARCH*, quali la volatilità dipendente dal tempo (eteroschedasticità) e il *volatility clustering*. Nei modelli *ARCH* la varianza condizionale segue un percorso ben definito dai parametri autoregressivi sui rendimenti quadratici passati. I rendimenti si possono assumere talvolta distribuiti normalmente ma più spesso si è soliti ricorrere, per le serie finanziarie (con diversi livelli di asimmetria e curtosi e presenza di realizzazioni estreme), alla distribuzione *t* di Student²⁶ con ν gradi di libertà o a misture di normali.

2.2.7 I modelli GARCH

La generalizzazione del modello *ARCH*, il modello *GARCH* (Generalized Auto-Regressive Conditionally Heteroskedastic model), ideato da Tim Bollerslev nel 1986, supera un importante limite dell' *ARCH*, ossia l'antitesi fra l'elevato ordine p del processo ed il "principio della parsimonia", riuscendo così a riprodurre, con un numero limitato di parametri (nella prassi difficilmente si usano modelli di ordine superiore al *GARCH*(1,1)), fenomeni di lunga memoria.²⁷ Nel *GARCH*(p, q) la varianza condizionale si esprime come:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{con } \alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0 \text{ per } i, j > 0$$

La varianza condizionale nei *GARCH* è modellata inserendo oltre ai p ritardi relativi ai rendimenti, già presenti nell' *ARCH*(p), anche q ritardi relativi ai valori storici della varianza. I primi catturano gli effetti di breve termine legati all'evoluzione dei rendimenti, mentre i secondi colgono effetti di lungo periodo. In tal

²⁶ La distribuzione *t* di Student dipende dal numero di gradi di libertà (dimensione del campione – 1). Per un valore piccolo di gradi di libertà (campioni di dimensione molto contenuta), la distribuzione presenta delle code più spesse rispetto ad una distribuzione normale. All'aumentare dei gradi di libertà la distribuzione tende ad una normale fino a coincidervi per campioni di 30/50 dati.

²⁷ Si pensi che un *GARCH*(1,1) può essere riscritto come un *ARCH*(∞) con coefficienti geometricamente decrescenti.

senso insiste il termine introdotto, $\sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$, che esprime la misura in cui la varianza condizionale è legata ai suoi valori passati.

Nel prosieguo delle analisi la selezione del miglior modello *GARCH* per la serie dei rendimenti logaritmici del VIX è guidata dall’AIC e dal BIC. I *GARCH* candidati ad essere i *best-fitting* model hanno $p = 1$ e $q = 1$. Ai fini di una quanto più precisa modellizzazione possibile fra i candidati sono stati inseriti l’*EGARCH*, ossia l’Exponential GARCH (Nelson, 1991) e il modello “a soglia” Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH, meglio noto come *GJR – GARCH* (Glosten et al., 1993). Queste specificazioni del *GARCH* sono nate per cogliere la reazione asimmetrica della volatilità a buone e cattive notizie: a parità di magnitudo, shock negativi hanno maggiori probabilità di generare un incremento di volatilità rispetto a shock positivi. Oltre alla famiglia di *GARCH* di prima generazione (con distribuzione gaussiana) è stata testata anche la distribuzione della probabilità condizionale del processo di innovazione di tipo t di Student. I modelli sperimentati con i rispettivi AIC e BIC sono riportati in tabella:

Modello GARCH	Distribuzione della probabilità condizionale del processo di innovazione	AIC (1.0e+04 *)	BIC (1.0e+04 *)
GARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9702	-1,9681
EGARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9869	-1,9841
GJR-GARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9834	-1,9807
GARCH(1,1)	t di Student	-2,0392	-2,0365
EGARCH(1,1)	t di Student	-2,0555	-2,0520
GJR-GARCH(1,1)	t di Student	-2,0506	-2,0472

Tabella 3: Tabella comparativa dei valori di AIC e BIC attribuiti ai diversi modelli GARCH testati

Il modello selezionato, avallato dagli *Information Criteria*, è l’*EGARCH*(1,1) con distribuzione della probabilità condizionale del processo di innovazione di tipo t di Student. Per avere conferma della bontà del modello, a partire da quest’ultimo fittato alla serie dei rendimenti logaritmici del VIX, sono generate per mezzo di simulazioni le varianze condizionali e i rendimenti logaritmici giornalieri. Segue, a supporto, il relativo grafico, in cui in entrambi i quadranti le linee lilla rappresentano le simulazioni (100 per ogni giorno) e le linee tratteggiate di colore ciano i valori medi, nell’ordine, di varianze condizionali e rendimenti logaritmici. Le linee blu tratteggiate nei due subplot, invece, sono il 1° e il 99° percentile dei cammini simulati.

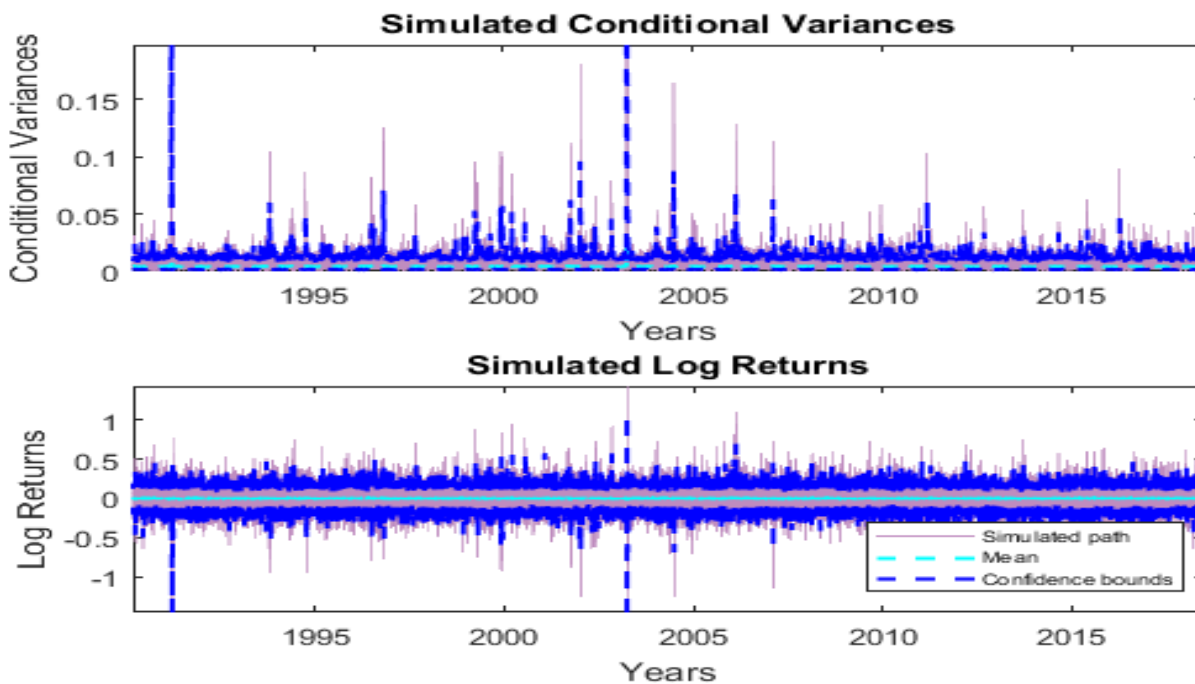


Grafico 17: Varianze condizionali simulate e rendimenti logaritmici simulati

Si prosegue con il *forecast 228 step-ahead* dei *logreturns*, nel primo grafico tramite la funzione *forecast* di Matlab, nel secondo ricorrendo alla funzione *simulate*. Se nel primo si hanno come output, per l'orizzonte temporale di riferimento, una traiettoria e un intervallo di confidenza al 95%, nel secondo sono riprodotti 30 cammini per ogni giorno, calibrati con l'ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione "t" sui rendimenti logaritmici storici del VIX.

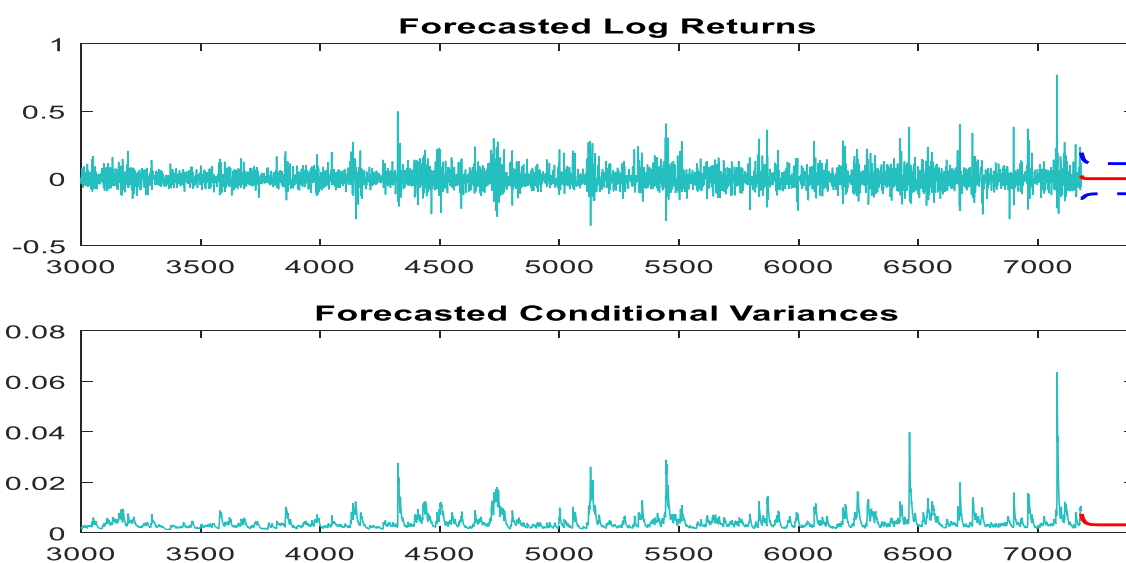


Grafico 18: Forecast 228 step-ahead dei rendimenti logaritmici e delle varianze condizionali

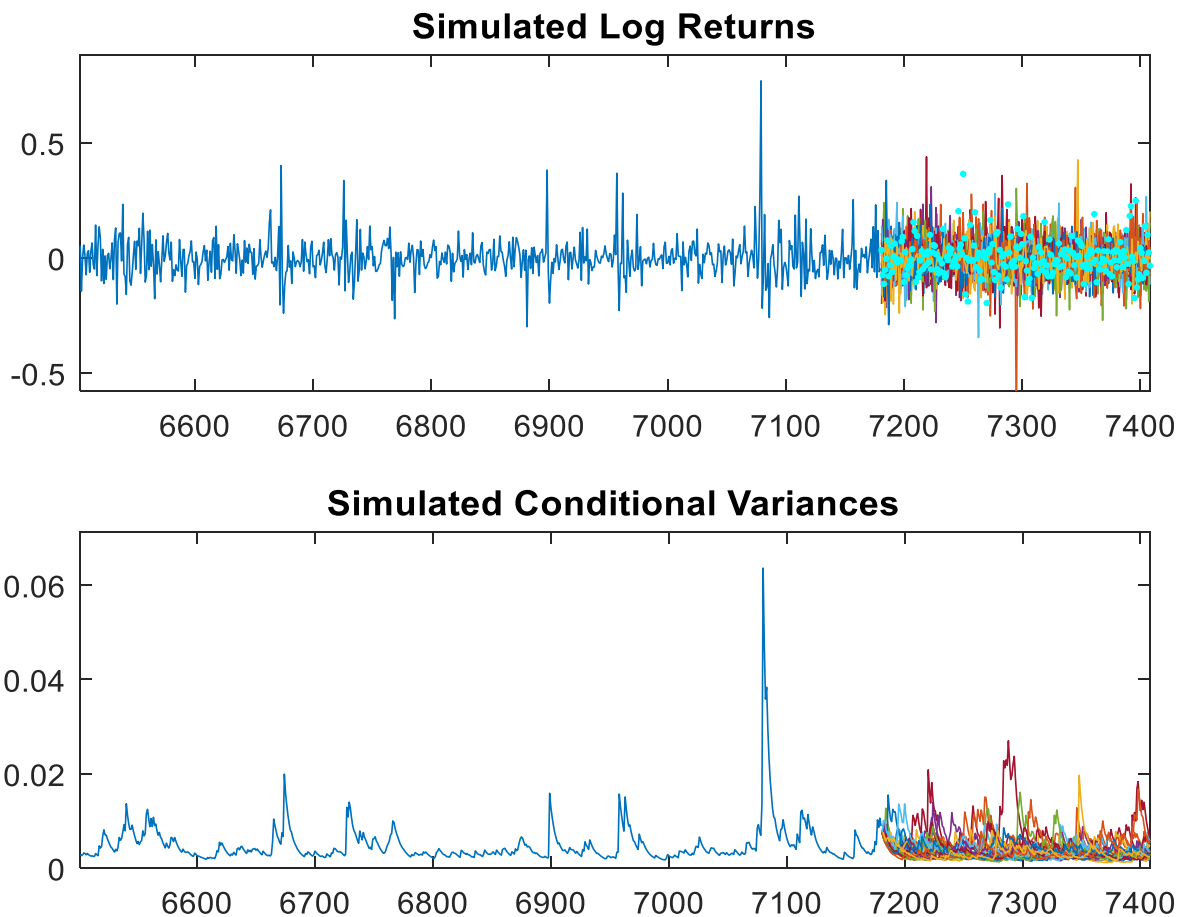


Grafico 19: Nel primo subplot sono rappresentati i rendimenti logaritmici simulati (linee colorate) e i rendimenti logaritmici effettivamente realizzati (punti di colore ciano); nel secondo, invece, sono illustrate le varianze condizionali simulate (linee colorate)

A partire dai *logreturns* simulati, e data l'osservazione del VIX temporalmente precedente al primo step simulato è possibile estrapolare i *logprices* simulati per mezzo di un ciclo annidato. In particolare, i primi prezzi logaritmici simulati sono pari alla somma fra il logaritmo dell'ultima osservazione del prezzo del VIX e i primi rendimenti logaritmici simulati, mentre per i restanti istanti temporali i prezzi logaritmici sono pari alla somma fra i prezzi logaritmici del giorno precedente ed i rendimenti logaritmici giornalieri. Esponenziando i *logprices* simulati si ottengono i prezzi simulati.

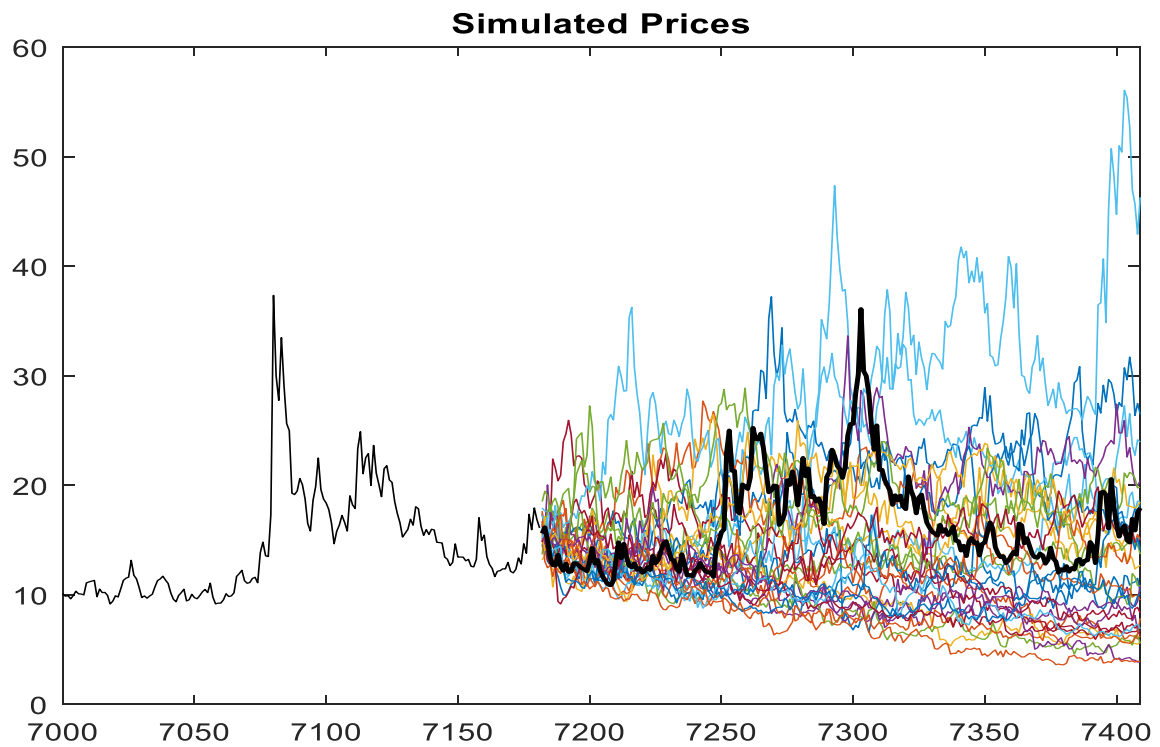


Grafico 20: Prezzi simulati (linee colorate) e prezzi effettivamente realizzati (linea nera).

Le simulazioni Monte Carlo dei prezzi sono, in questo caso, abbastanza fedeli alle realizzazioni, anche se, presentano generalmente alcuni limiti, che saranno trattati nel paragrafo 4.4.

Capitolo 3: Il potere predittivo delle medie mobili

3.1 Le medie mobili semplici

La media mobile semplice è uno strumento fra i più utilizzati dagli analisti nell'ambito dell'analisi tecnica delle serie storiche poiché di facile replicabilità e trasparente nella fruibilità dei suoi segnali. Si tratta di una media aritmetica relativa a un numero predeterminato di dati che *shiftano* nel tempo di una posizione in modo tale che il dato più remoto sia sostituito dal dato più recente, lasciando inalterata la dimensione del campione.

A scopo puramente esemplificativo si propone la seguente idea grafica di media mobile semplice.



I dati di volatilità ai fini del calcolo delle medie mobili sono generalmente le volatilità dei rendimenti di un fattore di mercato in un determinato orizzonte temporale (frequente è l'uso di dati giornalieri).

Essendo il VIX un indice di volatilità e la finalità di questa sezione implementare un modello previsivo mediante le medie mobili, saranno utilizzati come input i livelli giornalieri del VIX.

Per quanto riguarda la serie analizzata il *simple moving average* presenta il vantaggio di catturare la *long-term mean reversion* dell'indice e in una certa misura la persistenza a brevissimo termine e le fluttuazioni di volatilità. Non ricorrendo ad alcuna ponderazione per il suo calcolo presenta diversi limiti. Pesare ugualmente tutte le osservazioni inficia sull'accuratezza con cui le fluttuazioni a brevissimo termine sono catturate e non consente di cogliere l'asimmetria della volatilità.

Si riportano le *equally weighted moving averages* con differenti finestre temporali (*rolling windows* di 20, 50, 100 e 200 *trading days*) comparabili graficamente con i prezzi giornalieri di chiusura del VIX.

Le medie mobili semplici sono computate come segue:

$$\bar{P}_{SMA} = \frac{P_t + P_{t-1} + \dots + P_{t-n+1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_{t-i}$$

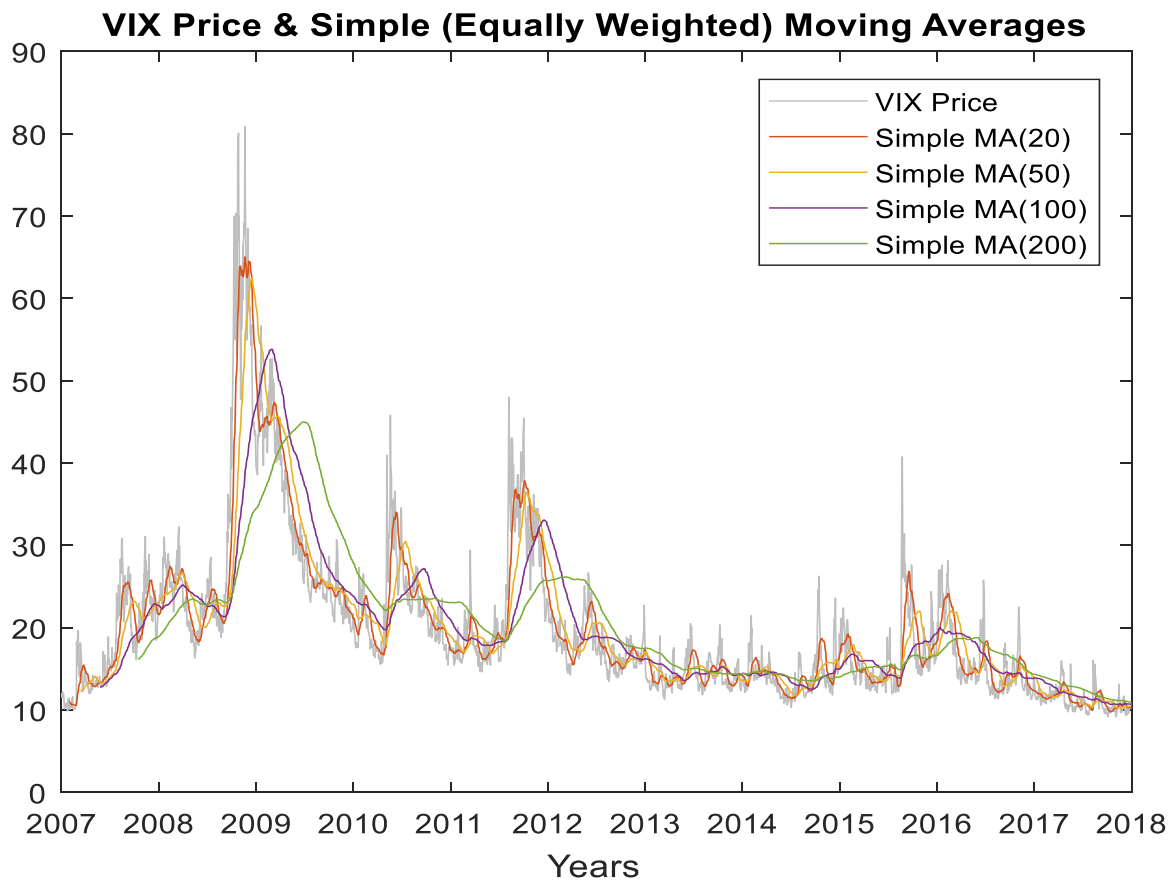


Grafico 21: VIX Price (campione di osservazioni dal 2007 al 2017) e Simple Moving Averages

Utilizzando in prima battuta le medie mobili semplici sorge il problema di scelta del dominio temporale su cui operare. Vi è, infatti, un *trade-off* di fondo fra profondità storica della serie e reattività della stessa a shock di mercato. La scelta di un numero copioso di osservazioni rende maggiormente stabile la stima della volatilità (approssimata dai *closing price* del VIX) ma allo stesso tempo ne riduce la sensibilità a mutamenti delle condizioni di mercato.

Un ulteriore problema delle medie mobili semplici è costituito dall'*echo effect*: la stima della volatilità subisce una variazione (tanto maggiore in magnitudo quanto più piccolo è il campione) non solo a seguito di una variazione pronunciata del fattore di mercato, ma anche quando il dato concernente “esce” dal campione per essere sostituito da uno più recente.

Quest’ultimo limite è superato dalle medie mobili esponenziali, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

3.2 Le medie mobili esponenziali

Le medie mobili esponenziali attribuiscono una ponderazione non uniforme alle diverse osservazioni temporali assegnando rilevanza maggiore ai dati più recenti (e in particolar modo al prezzo di chiusura più recente del VIX) e minore ai dati passati. Perciò la stima della volatilità così delineata risulta essere più reattiva a shock recenti.

L'*Exponential MA* (EMA o EWMA) gode degli stessi vantaggi del SMA, ossia facilità di calcolo, trasparenza, capacità di catturare la *long-term mean reversion*, la persistenza a brevissimo termine e le fluttuazioni di volatilità e presenta lo stesso limite di non riuscire a cogliere l'asimmetria della volatilità. In qualche misura, però, le medie mobili esponenziali modellano la distribuzione leptocurtica dei fattori di mercato, seguendo, con volatilità non costanti, le dinamiche più o meno frenetiche del mercato. L'EMA permette il superamento dell'*echo effect*, riscontrato nel SMA, in quanto lo shock pronunciato del fattore di mercato esce gradualmente dal campione. Risulta essere, inoltre, un modello più raffinato dal momento che introduce un *decay factor*, il cui uso, però, non sempre si rivela immediato e privo di criticità.

In formule si ha che:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{r_{t-1}^2 + \lambda \cdot r_{t-2}^2 + \lambda^2 \cdot r_{t-3}^2 + \dots + \lambda^{n-1} \cdot r_{t-n}^2}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \cdot r_{t-1-i}^2$$

Dove:

- $\hat{\sigma}_t^2$ indica la varianza stimata dei rendimenti del fattore di mercato nel periodo compreso fra $(t - n)$ e $(t - 1)$;
- La costante λ , detta *decay factor*, rappresenta il grado di persistenza delle osservazioni storiche campionarie. Il suo valore è compreso fra 0 e 1 e si è soliti ricorrere al valore di 0.94 in caso di serie giornaliere;
- $(1 - \lambda)$ esprime la velocità di decadimento delle osservazioni passate;
- r_{t-1-i}^2 (con $i = 0, 1, \dots, n - 1$) sono i rendimenti quadrati giornalieri.

Per λ sufficientemente piccolo e/o n sufficientemente elevato si dimostra con semplici passaggi algebrici e ricorsivamente che:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \cdot r_{t-1}^2 + \lambda \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2$$

ossia che, noti il *decay factor*, la varianza e gli *squared returns* del giorno precedente si può risalire alla varianza stimata giornaliera.

La scelta del *decay factor*, in un'ottica di misura della volatilità, dovrebbe tener conto *in primis* del mercato in cui si opera. Vi sono mercati in cui gli shock sono temporanei e altri in cui essi persistono anche per molti giorni. Bisogna tener conto, ai fini della stima di λ , della velocità con cui si ritiene che la volatilità del fattore di mercato vari nel tempo (ad esempio se si ritiene che essa vari lentamente è appropriato scegliere un fattore di decadimento prossimo a 1, così da assegnare un peso elevato anche a osservazioni remote). In ottica di trading λ è direttamente proporzionale all'*holding period*. Nel caso di detenzione di una posizione, tanto minore sarà l'orizzonte di azione tanto più il fattore tenderà al suo valore minimo, dato che il trader necessiterà di velocità di adeguamento della volatilità stimata rispetto ai nuovi scenari economici.

A livello teorico il *decay factor* ottimale non dovrebbe essere innestato nel modello come componente esogena statica associata a una variabile ma dovrebbe essere il risultante dei dati di mercato, per cui dovrebbe mutare nel tempo. La periodicità di aggiornamento è rimandata alla tipologia di serie oggetto di analisi, nonché all'ampiezza del campione e alla disponibilità di dati.

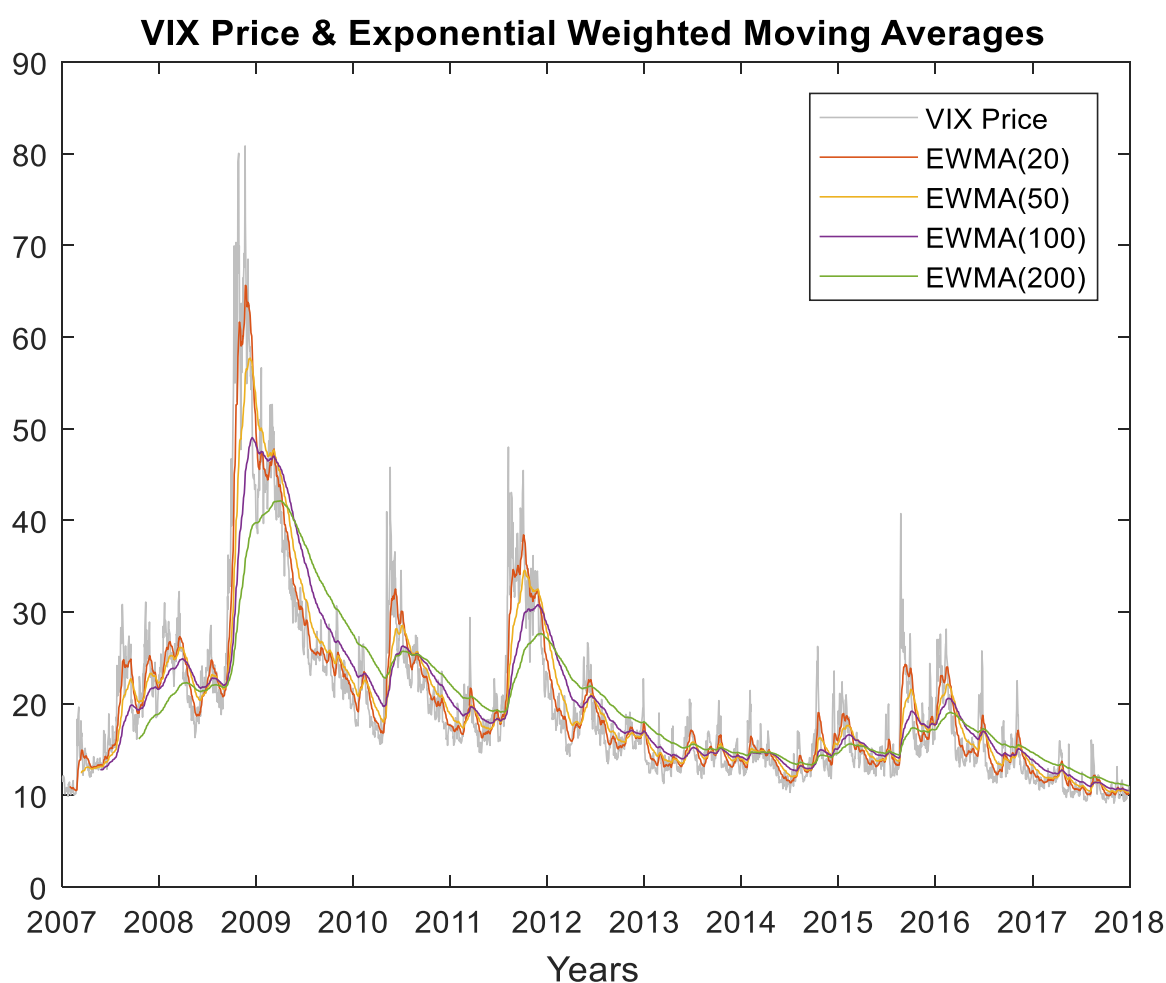


Grafico 22: VIX Price (campione di osservazioni dal 2007 al 2017) ed Exponential Weighted Moving Averages

3.3 Forecast dei movimenti futuri del VIX attraverso un “corridoio” a medie mobili

L’analisi empirica condotta si basa su due metodi: il primo, di tipo previsionale, punta ad anticipare i futuri movimenti del VIX mentre il secondo offre, tramite il suo potere segnaletico, input per ipotetiche strategie di trading.

Il campione utilizzato, nel primo caso, è dato dai prezzi di chiusura del VIX nel periodo che intercorre dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019 (229 *trading days*). Su tali osservazioni viene costruito un SMA(20). La scelta di 229 *trading days* non è puramente casuale ma dettata dal modello, che in caso di poche osservazioni potrebbe risultare segnaletico di eventi non strettamente legati alla volatilità quanto piuttosto a cambiamenti del contesto macroeconomico statunitense, mentre in caso di eccessive osservazioni manterrebbe in memoria dati non più rilevanti al tempo della valutazione. Per ovviare a tale limite bisognerebbe pesare maggiormente i dati più recenti e in misura minore quelli via via più lontani nel tempo.

Si procede, poi, alla costruzione di un intervallo di confidenza al livello del 95% del tipo:

$$i. c. = SMA(20) \pm 1.96 \frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$$

Con:

- $SMA(20)$ è il *simple moving average* con 20 *rolling windows*;
- 1.96 è il valore approssimato del 0.975 quantile della distribuzione normale;
- $\frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$ è l’errore standard, dove σ_{VIX} è la deviazione standard storica del VIX ed n la dimensione del campione.

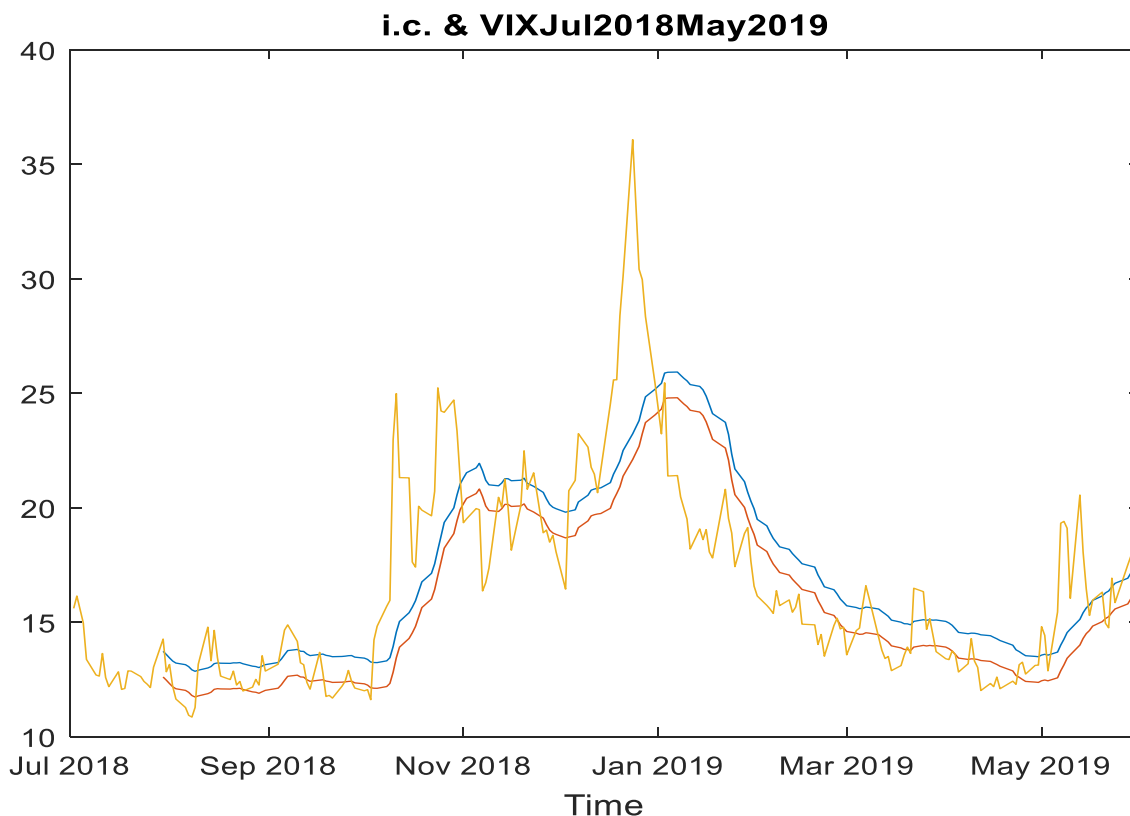


Grafico 23: Intervallo di confidenza e osservazioni del VIX nel periodo luglio 2018-maggio 2019

La linea rossa e blu nel Grafico 23 segnano, rispettivamente, il limite inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza costruito sulla media mobile con finestra temporale a 20 giorni. Qualora il campione del VIX sia compreso fra questi due *bound* (estremi inclusi) il modello non ha alcun potere segnaletico; quando, invece, il VIX è al di sopra dell'*upper bound* le aspettative di breve periodo del modello sono di ribasso e ritorno dell'indice al *moving average value*, viceversa, quando esso è al di sotto del *lower bound* le aspettative a breve termine sono di rialzo.

Sulla base di tali considerazioni è stato implementato su Matlab un modello di forecast del trend giornaliero.

Per semplicità le variazioni giornaliere del VIX positive sono state contrassegnate da 1 (102 variazioni positive su 228 variazioni), le variazioni negative da -1 (125 variazioni negative su 228 variazioni) e le variazioni nulle con 0 (una variazione nulla su 228).

Le aspettative del modello sono state rappresentate in caso di attese di rialzo con 1, in caso di attese di ribasso con -1 e con 0 in caso di assenza di aspettative (nei casi in cui il VIX non è al di fuori del "corridoio" creato da limite superiore e inferiore dell'intervallo di confidenza).

ASPETTATIVE DEL MODELLO SULLE VARIAZIONI GIORNALIERE		
rialziste 1	ribassiste -1	nulle 0
VARIAZIONI OSSERVATE		
rialzo 1	ribasso -1	invariabilità 0

Tabella 4: Aspettative del modello sulle variazioni giornaliere vs variazioni osservate.

Si hanno così due vettori, siano A e B , composti di 1,-1 e 0, rappresentativi delle $n-1$ variazioni giornaliere (con n pari alla dimensione del campione) e delle rispettive $n-1$ attese del modello (viene decurtata la n -esima aspettativa perché riguarda la n -esima variazione giornaliera, la quale eccede la dimensione del campione, dal momento che viene calcolata come differenza fra il valore in $n+1$ e il valore in n).

Si nota che la somma degli i -esimi elementi di A e degli i -esimi elementi di B (con $i=1,2,\dots,n-1$) restituisce:

- ± 2 (ossia 2 in valore assoluto) in caso di forecast corretto (rialzo/ribasso correttamente identificato):
 - +2 se le aspettative rialziste (1) sono confermate da un rialzo (1)
 - -2 se le aspettative ribassiste (-1) sono confermate da un ribasso (-1)
- 0 in caso di forecast errato, ossia:
 - aspettative rialziste (1) e verificatosi ribasso (-1)
 - aspettative ribassiste (-1) e verificatosi rialzo (1)
- ± 1 (ossia 1 in valore assoluto) in caso di incapacità predittiva del modello, pertanto qualora:
 - il modello non predice (0) e si verifica un rialzo (1)
 - il modello non predice (0) e si verifica un ribasso (-1)

Unica eccezione a quanto appena visto è rappresentata nel campione in disamina dall'unica variazione giornaliera nulla del VIX. Nei giorni 18 e 19 dicembre il VIX chiude a un livello di 25.58, valore più elevato dell'estremo superiore dell'intervallo di confidenza relativo al giorno 18 dicembre, che segna 21.9159. Pertanto, in questa sola occasione, la somma dei vettori A e B genera -1 come output (attesa di ribasso (-1) e variazione realizzata nulla (0)) in presenza di una previsione evidentemente errata.

Per la validazione di un sistema basato su intervalli costruiti su medie mobili a 20 giorni occorre calcolare il tasso di successo delle predizioni, la probabilità di errore e la percentuale di casi in cui il modello non ha abilità predittiva.

Le probabilità sono le seguenti:

$$P(\text{true forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 2)}{228} = 31.58\%$$

$$P(\text{wrong forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 0) + 1}{228} = 23.25\%$$

$$P(\text{null expectations}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 1) - 1}{228} = 45.18\%$$

Correggendo, infine, le prime due probabilità, in modo da tener conto delle volte in cui non si ha alcuna aspettativa sulle variazioni del VIX si ha che:

$$P(\text{proper true forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 2)}{228 - 0.4518 \cdot 228} = 57.60\%$$

$$P(\text{proper wrong forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 0) + 1}{228 - 0.4518 \cdot 228} = 42.40\%$$

Sostanzialmente il segnale fornito è corretto nel 57.60% dei casi mentre conduce all'errore di forecast nel restante 42.40%. Sebbene il risultato possa non sembrare entusiasmante è sufficiente a validare l'analisi, tenuto anche conto che non esistono modelli particolarmente buoni nell'anticipare il comportamento futuro del VIX.

Uno studio del tutto analogo è stato, poi, eseguito per mezzo del medesimo algoritmo risolutivo ma utilizzando le medie mobili esponenziali per la costruzione dell'intervallo. La logica sottostante è la stessa, il modello offre il segnale di vendere volatilità quando il VIX è al di sopra del "corridoio" e di acquistare volatilità se al di sotto di esso. A tal proposito l'indagine ha condotto a risultati estremamente affini a quanto sopra riportato. L'utilizzo dell'EMA(20), infatti, incrementa la probabilità effettiva di forecast corretto di soli 108 *basis points*, richiedendo d'altro canto maggior impegno computazionale.

Appare evidente come tali esiti non siano sufficienti da soli a sviluppare previsioni robuste e ciò era aprioristicamente prevedibile data la dinamica stocastica seguita dall'indice. Ciò nonostante questo primo studio, combinato ad analisi visive delle differenti medie mobili su diverse finestre temporali e in sovrapposizione alla serie del VIX può rivelarsi estremamente utile a sviluppare delle strategie. Tenuto conto dei segnali, più o meno intensi, che ne possono scaturire, spetta poi all'esperienza e alla sensibilità del trader la scelta della strategia ritenuta ottimale. Occorre, in tal senso, dal momento che il VIX non è direttamente negoziabile, fare riferimento ai singoli strumenti derivati scambiati sul mercato per operazioni di negoziazione o *hedging*, e questa linea di esame sarà seguita in una parte dedicata dell'elaborato.

3.4 Segnali di inversione del trend

Fra le più diffuse strategie basate sui MA ci sono i *crossovers*. Ogni qual volta il livello dei prezzi del VIX attraversa, verso l'alto o il basso, la media mobile questo fenomeno è indicativo di un potenziale cambiamento nel trend. In fase di backtesting si può notare, nell'esempio seguente, il potere predittivo della media mobile a 200 giorni sul cambiamento direzionale del VIX. Sono evidenziati nel Grafico 24 alcuni casi in cui i segnali di ribasso o rialzo sono evidenti.

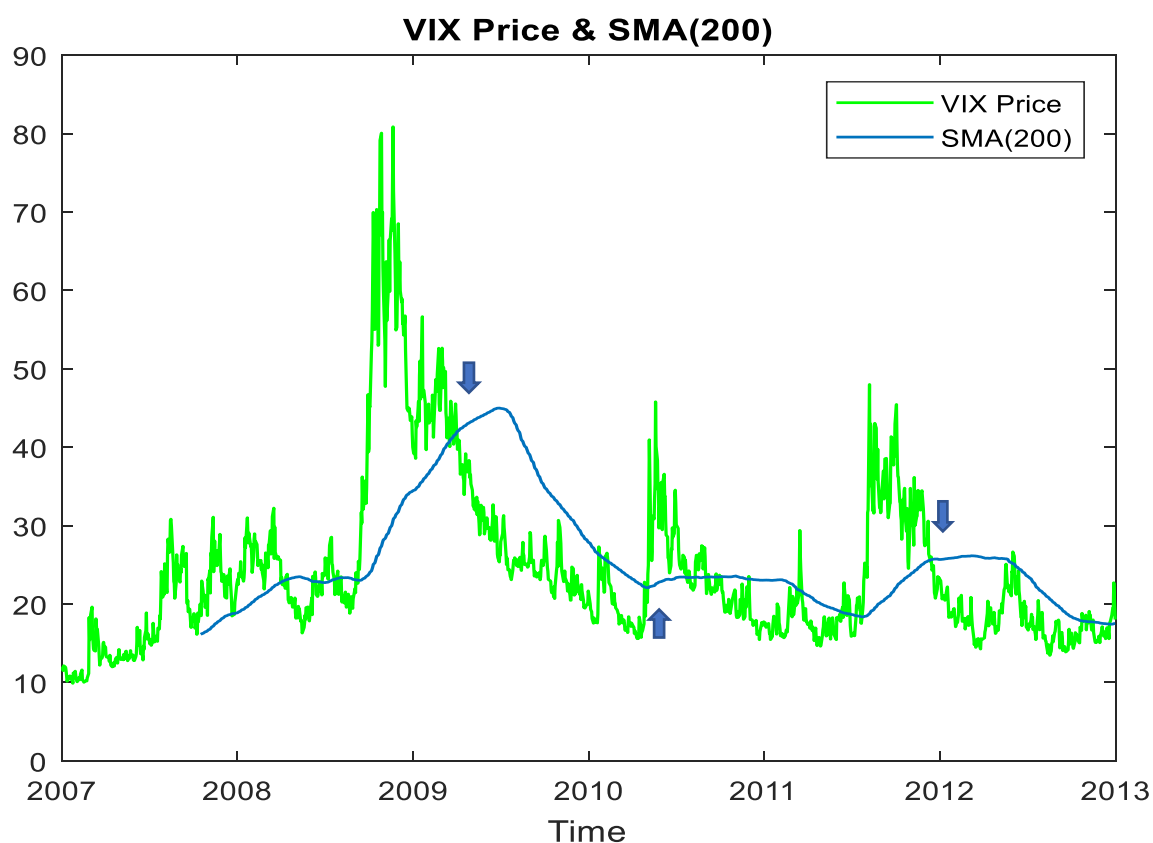


Grafico 24: VIX Price e SMA(200), campione di osservazioni 2007-2013

Nell'analisi tecnica si ricorre spesso anche all'incrocio fra medie mobili di diversa durata, nell'esempio di 50 e 200 *rolling windows*, per individuare segnali di ingresso e uscita dal mercato e cogliere la tendenza del prezzo al tempo in cui è svolta l'analisi. Affinchè il segnale sia significativo bisogna utilizzare *timeframe* non inferiori al giornaliero. Quando le medie mobili di breve-medio periodo tagliano dall'alto le medie di lungo periodo stabilizzandosi al di sotto di esse l'incrocio ribassista è un segnale di vendita (*death cross*); viceversa, se le prime tagliano le seconde dal basso stabilizzandosi al di sopra di queste ultime l'incrocio rialzista è un segnale di acquisto (*golden cross*).

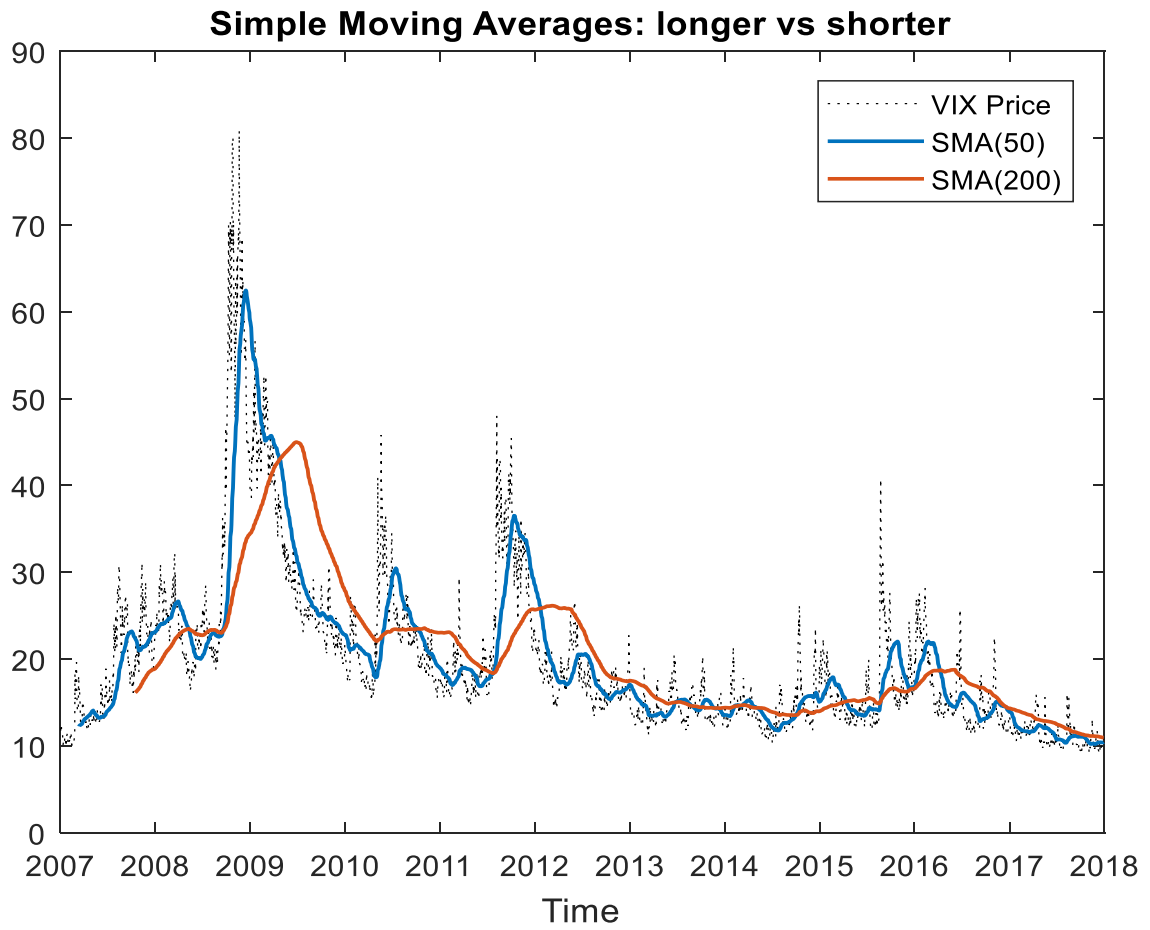


Grafico 25: SMA(50) vs SMA(200), campione di osservazioni 2007-2018

Capitolo 4: Replicabilità del VIX

4.1 Il processo di Ornstein-Uhlenbeck

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico continuo, particolarmente interessante ai fini dell'elaborato per la capacità di riprodurre le dinamiche del VIX, in particolar modo il ritorno alla media (*mean-reversion*) e i suoi salti (nella versione inclusiva di questi, l'*O.-U. plus jumps model*). Un processo di O.-U. rispetta le seguenti proprietà:

- è di tipo Markoviano: un processo aleatorio in cui la probabilità di transizione da uno stato all'altro in un tempo unitario dipende esclusivamente dallo stato immediatamente precedente e non dalla "storia" complessiva del sistema. Questa condizione di assenza di memoria può essere espressa, in termini probabilistici, come:

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n);$$

- è stazionario: spostamenti nel tempo non mutano la distribuzione congiunta delle variabili nella serie storica;
- è di tipo Gaussiano: affinché regga questa proprietà è richiesto che le variabili lungo il tempo seguano una distribuzione normale multivariata.

L'equazione differenziale stocastica che descrive il processo di O.-U.²⁸ è:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \quad \text{con } \theta, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, X_0 = x_0$$

Dove:

- μ è la media asintotica del processo. Tutte le traiettorie future della variabile evolvono, sul lungo termine, attorno al livello medio μ ;
- θ è il *mean-reversion rate*, detto anche *decay-rate*. Esso rappresenta la velocità alla quale tali traiettorie convergono a μ nel tempo;
- σ è la deviazione standard, attraverso la quale si determina la volatilità istantanea, che misura l'ampiezza della variazione del *noise* istante per istante;

²⁸ In matematica finanziaria è anche conosciuto come modello di Vasicek, di solito impiegato per descrivere l'evoluzione dei tassi d'interesse nel tempo.

- W_t denota il processo di Wiener, noto anche come moto browniano, ossia un processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti.

La soluzione del processo è:

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s$$

Si ha, così, che X_t coincide con la somma di un termine deterministico e l'integrale di una funzione deterministica riguardo un processo di Wiener con incrementi normalmente distribuiti.

Segue che l'aspettativa condizionata è:

$$E[X_t | X_0 = x_0] = E \left[\mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s \right] = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t};$$

La varianza condizionata è:

$$Var[X_t | X_0 = x_0] = E \left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s \right)^2 \right];$$

Usando l'isometria di Ito si ottiene:

$$Var[X_t | X_0 = x_0] = \sigma^2 E \left[\int_0^t e^{-2\theta(t-s)} ds \right] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t});$$

Per quanto visto si ha che:

$$(X_t | X_0 = x_0) \sim N \left(\mu + (x_0 - \mu)e^{-\theta t}, \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) \right);$$

Asintoticamente, ossia per $t \rightarrow \infty$, si ha più semplicemente:

$$X_t \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta} \right).$$

4.2 Il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti di volatilità

Nei lavori di ricerca di Bates (2000) e Pan (2002) si evince l'importanza attribuita alla componente di salto per modellare la volatilità e i suoi *spikes*. A partire dalle loro considerazioni, per perfezionare la modellizzazione del VIX, il processo di O.-U. è implementabile nel processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti, ottenuto sommando alla formulazione originaria la componente di salto discontinua $J_t I_t$. Si ha, dunque:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t + J_t I_t \quad \text{con } \theta, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, X_0 = x_0$$

Dove:

- J_t indica la dimensione del salto al tempo t ;
- I_t rappresenta la probabilità di salto al tempo t .

La letteratura prevede che J_t segua una distribuzione esponenziale o normale mentre si assume che I_t segua una Bernoulli²⁹ di parametro p ($\sim Ber(p)$ dove p denota la probabilità della presenza di un salto) o una Poisson di parametro λ ($\sim Poi(\lambda)$ dove λ denota sempre la probabilità di salto).

4.3 Calibrazione dei processi sui dati storici del VIX

Sulla base del processo di O.-U. e del medesimo inclusivo della componente di salto, sono simulati su Matlab 10000 cammini di lunghezza pari a 229 giorni, poi raffrontati graficamente con le 229 realizzazioni del VIX (nel periodo dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019) per comprendere quale meglio realizzi la dinamica e il profilo di salto del VIX. I parametri μ , θ e σ sono calibrati con l'ausilio delle funzioni *polyfit* e *polyval*.³⁰ Impostata di default la variazione giornaliera di almeno 4.6032 (somma fra la media delle variazioni del VIX e 3 volte la loro deviazione standard) come componente di salto e assegnata la rispettiva probabilità di realizzazione dell'1.07% (stimata su 7180 variazioni storiche giornaliere) si creano due matrici rappresentative della distribuzione della probabilità di salto seguendo, nel primo caso, la distribuzione Bernoulliana e nel secondo la distribuzione di Poisson, a partire dalla probabilità effettiva di osservare un salto precedentemente quantificata. La magnitudo del salto è, invece, modellata creando una matrice di salti distribuiti esponenzialmente e una matrice di salti distribuiti secondo una Normale; queste ultime matrici sono delle stesse dimensioni delle matrici di probabilità e costruite a partire dalla media e dalla deviazione standard storica dei salti. Sono messi al vaglio i seguenti modelli:

- Processo di Ornstein-Uhlenbeck;
- Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti esponenziali e distribuzione della probabilità di salto Bernoulliana;
- Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti esponenziali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana;

²⁹ La variabile random di tipo Bernoulliano vale 1 (con probabilità p) in presenza di salti e 0 in assenza (con probabilità $1-p$).

³⁰ I dettagli sono esplicitati nella sezione *Appendice Matlab*, nel codice *CAPITOLO 4, PROCESSO DI ORNSTEIN-UHLENBECK*.

- Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Bernoulliana;
- Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana.

Per ogni tipologia di simulazione sono plottati i primi 100 e i primi 5 cammini; plottare un numero limitato di cammini permette di evidenziare il diverso profilo dei salti simulati e comprendere quale sia la simulazione più fedele al VIX.

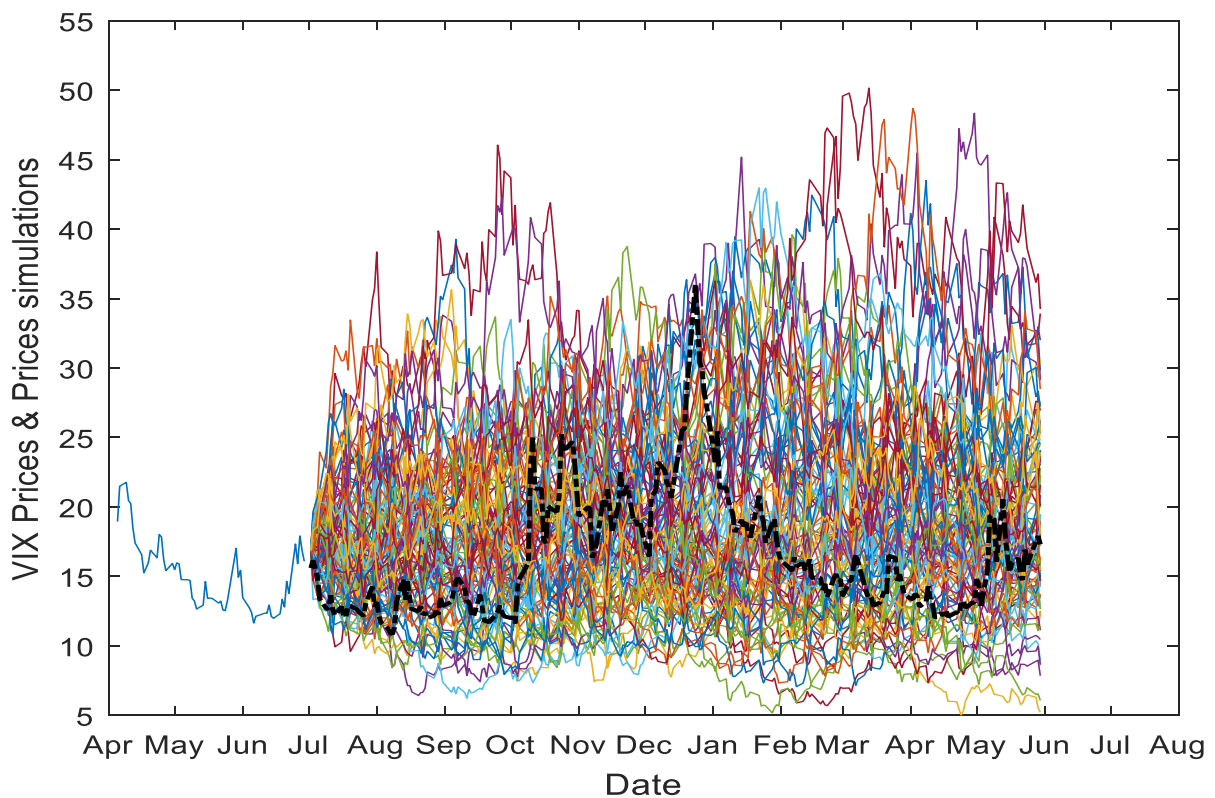


Grafico 26: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 100 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck

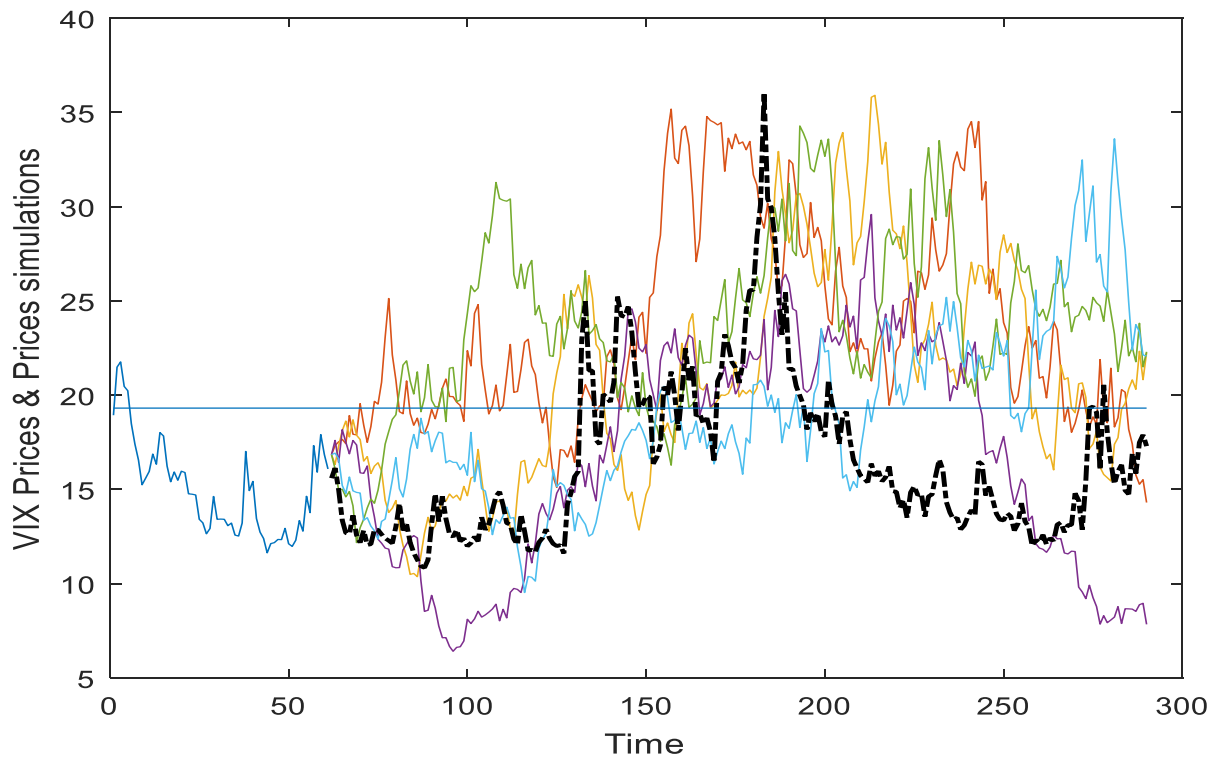


Grafico 27: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck

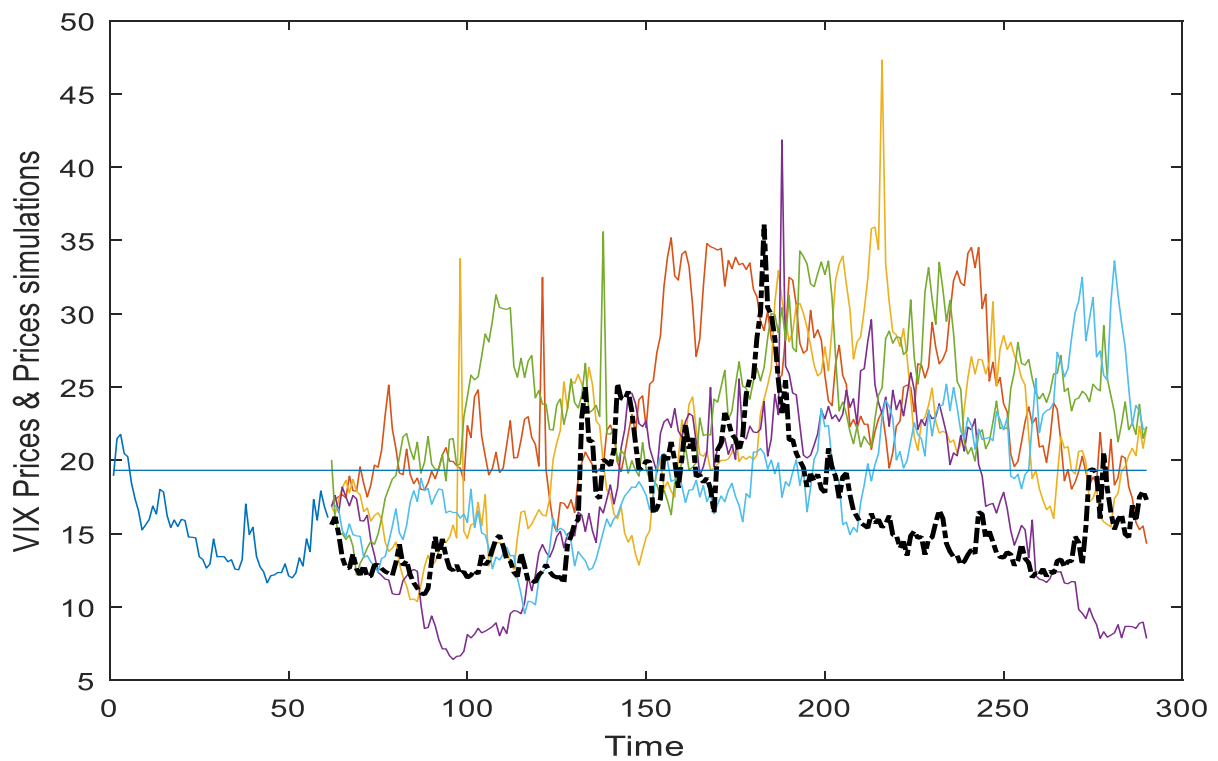


Grafico 28: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti esponenziali e distribuzione della probabilità di salto Bernoulliana

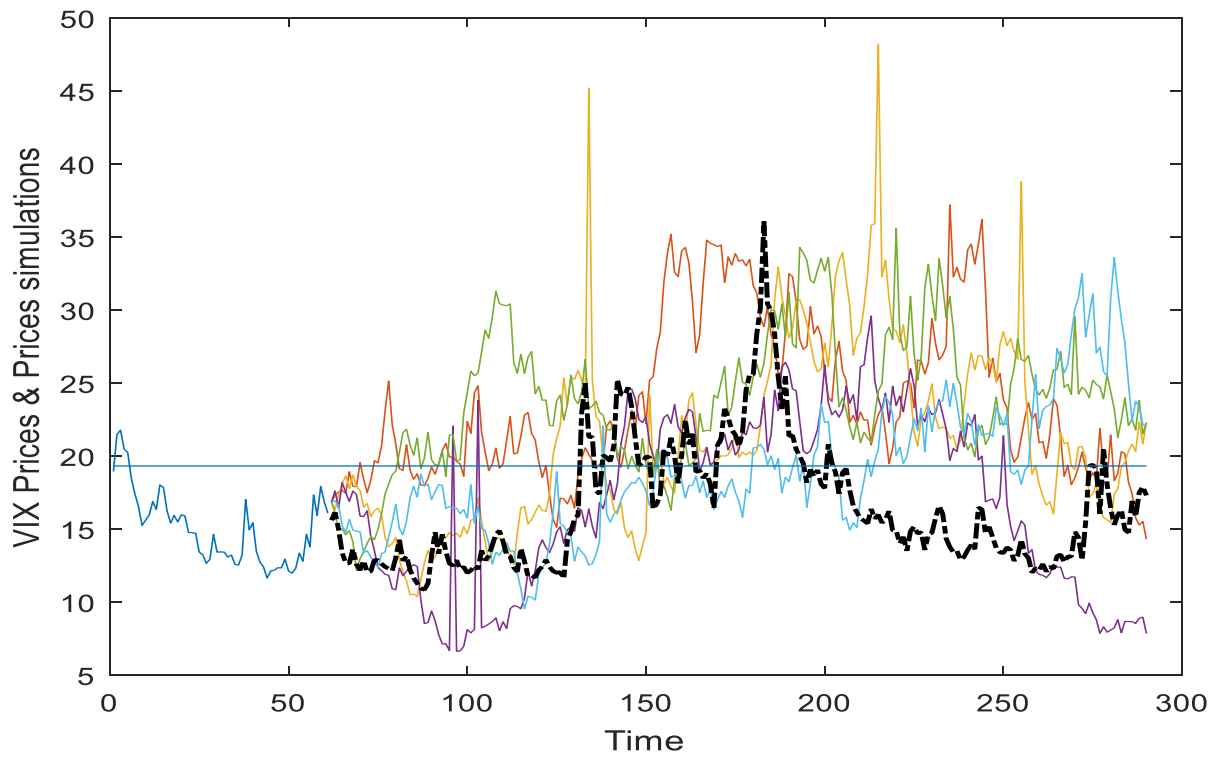


Grafico 29: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti esponenziali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana

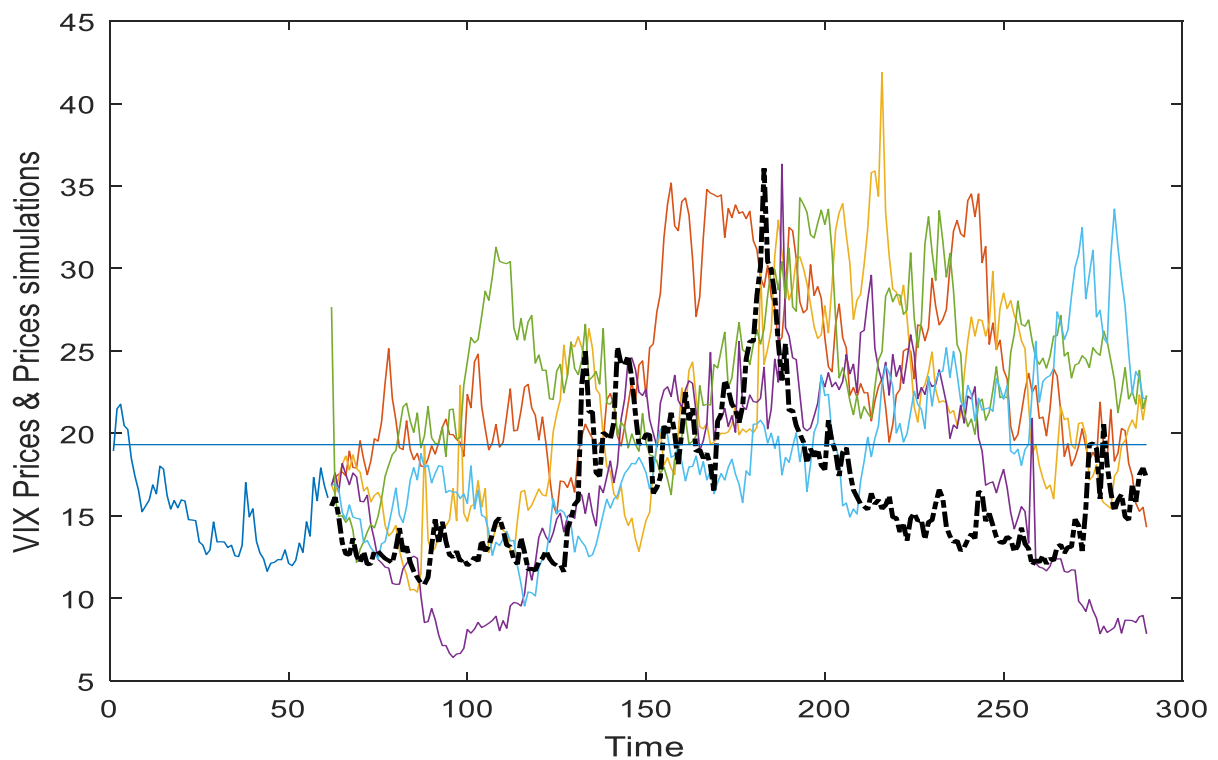


Grafico 30: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Bernoulliana

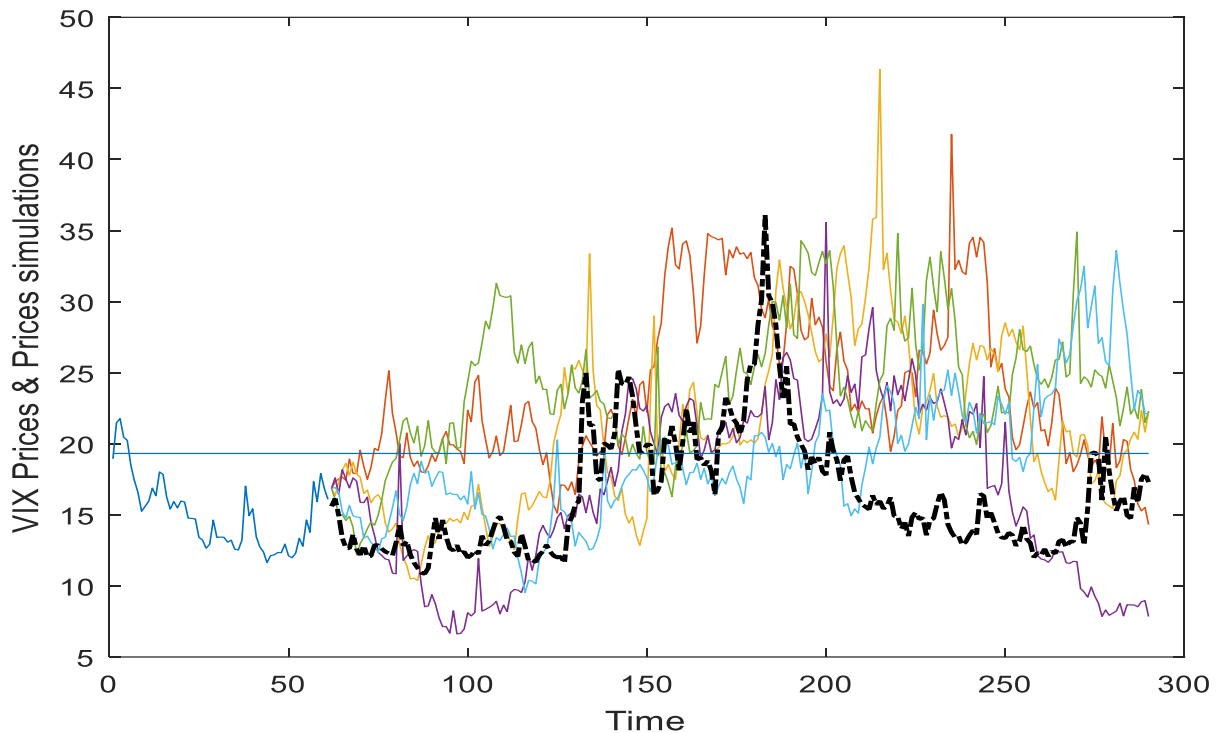


Grafico 31: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana

Aggiungere la componente di salto appare fondamentale per un indice di volatilità quale il VIX. I salti esponenziali hanno un profilo di crescita e decrescita molto più repentino del VIX, motivo per cui appare preferibile ricorrere alla costruzione dei salti sotto il profilo della normalità. Per quanto riguarda invece la probabilità di salto non ci sono evidenze per rifiutare una fra la Bernoulliana e la Poissoniana a favore dell'altra distribuzione di probabilità, sebbene la seconda crei un profilo dinamico più affine della prima alla serie del VIX. Volendosi affidare alla letteratura più accreditata la distribuzione di Poisson è quella più impiegata nella fattispecie e in genere per eventi con manifestazione estremamente rara.

4.4 Validazione del processo: qualche considerazione

Risulta essenziale validare l'efficacia del processo di Ornstein-Uhlenbeck per poterlo impiegare nella fase di backtesting delle diverse strategie di trading elaborate al Capitolo 5. In tal senso si confrontano le simulazioni generate mediante il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana con le simulazioni Monte Carlo dei prezzi del VIX a partire dal modello

ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione t di Student costruito sui rendimenti logaritmici storici, il migliore, per qualità di *fitting*, del Capitolo 2. I risultati sono i seguenti:

	VIX (dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018)	VIX (dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019)	Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana	Monte Carlo a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione T di Student sui <i>logreturns</i> storici
tipologia di dati	reali	reali	simulati	simulati
orizzonte temporale (in giorni)	7181	229	229	229
numero di cammini simulati	-	-	10000	10000
media	19,3180	16,4285	18,8540	13,8888
massimo	80,8600	36,0700	96,7368	178,8340
minimo	9,1400	10,8500	3,2841	1,8581
deviazione standard	7,8398	4,3330	4,8655	3,1399
asimmetria	2,0918	1,3101	0,5586	0,5953
curtosi	10,6676	4,9359	3,1201	3,2557
quantili	0.025	10,6300	11,6490	12,6662
	0.25	13,6475	13,0825	16,1052
	0.50	17,4400	14,9700	18,4652
	0.75	22,7300	19,1075	21,1466
	0.975	39,4582	27,7190	27,1858

Tabella 5: Confronto fra le statistiche del VIX (calcolate su orizzonti temporali diversi), delle simulazioni del Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana e delle simulazioni Monte Carlo a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione t di Student costruito sui rendimenti logaritmici storici

A livello grafico sono enfatizzate le caratteristiche riportate nella precedente Tabella.

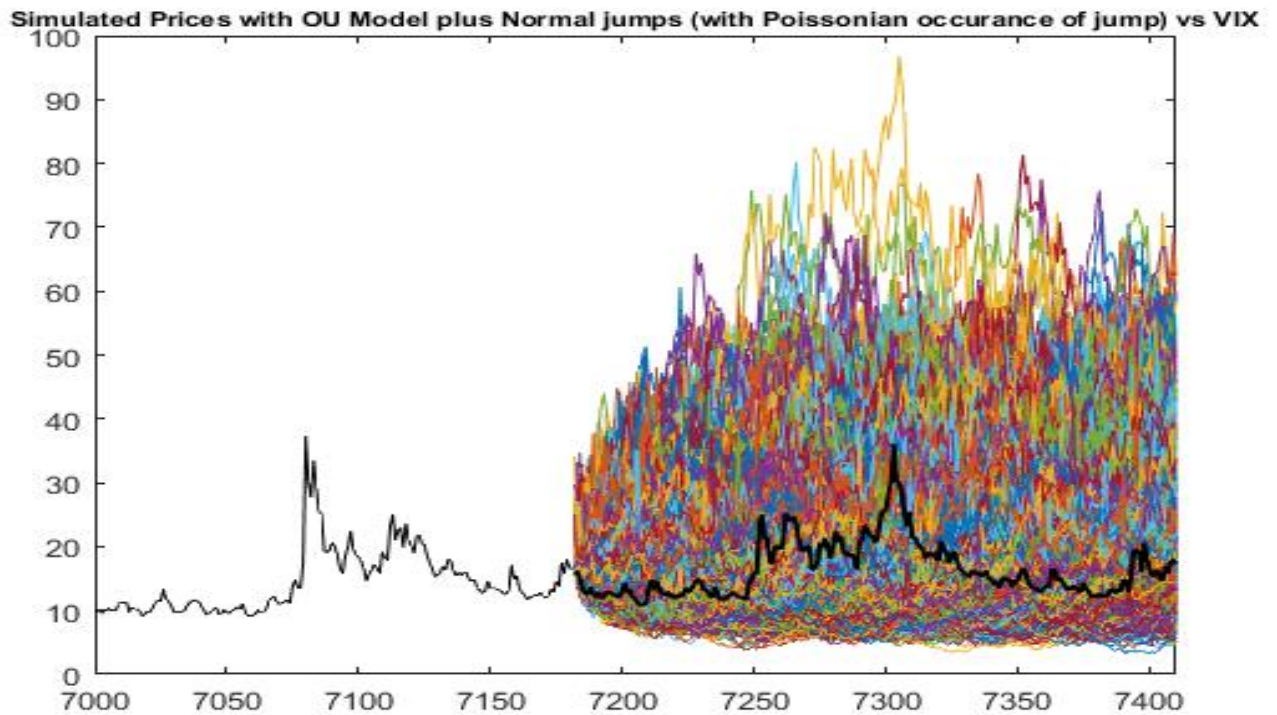


Grafico 32: 10000 simulazioni dei prezzi del VIX mediante il Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana (linee colorate) vs VIX (linea nera)

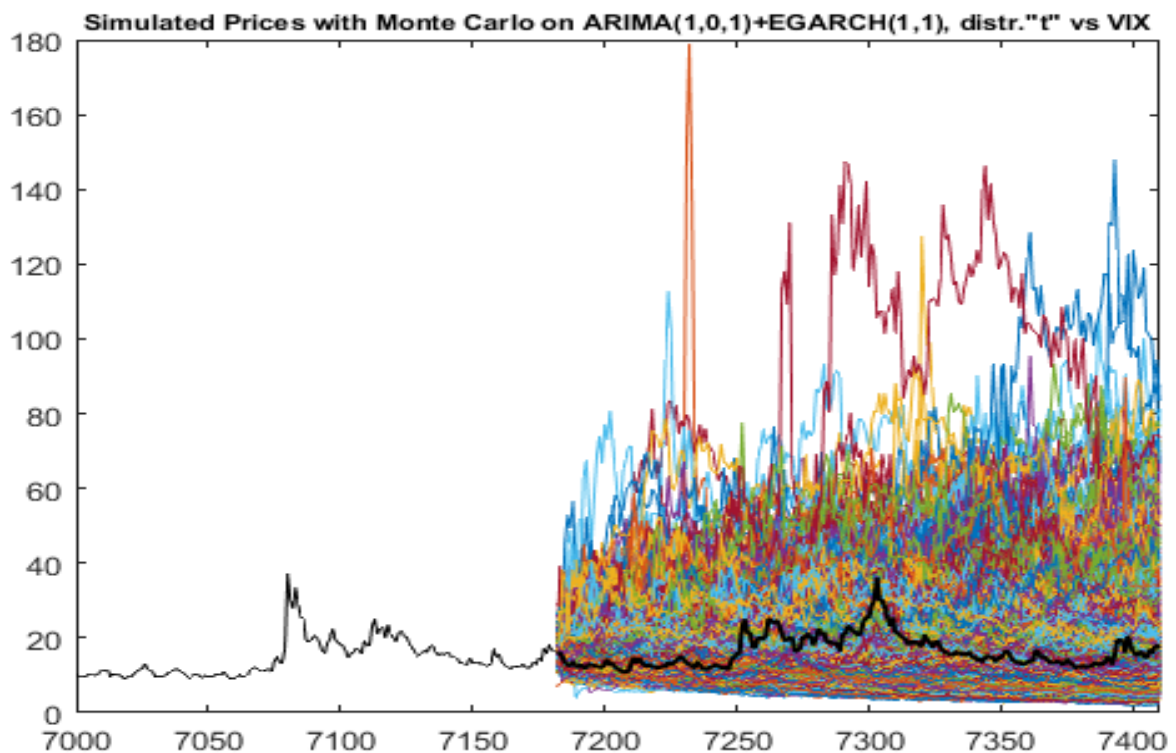


Grafico 33: 10000 simulazioni dei prezzi del VIX mediante Monte Carlo a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione t di Student costruito sui rendimenti logaritmici storici (linee colorate) vs VIX (linea nera)

Per generare N a scelta scenari su cui testare le strategie di trading si preferisce ricorrere al processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana, per la sua elevata capacità di riprodurre le traiettorie del VIX.

Il secondo modello, infatti, ha diverse statistiche degeneri rispetto alla serie originaria. Rispetto alla stessa, mediamente, sottostima i prezzi e segna massimi talvolta ben lontani da quello storico, nonché minimi ben al di sotto del minimo storico. Per quanto nulla vieti che il VIX possa sfondare i suoi *bounds*, sia superiore che inferiore, la concentrazione della distribuzione attorno a valori così esigui e la presenza di picchi esponenziali non è giustificabile alla luce di quanto, sinora, l'indice di volatilità ha sperimentato.

Capitolo 5: Strategie di trading sulla volatilità

5.1 Introduzione alle strategie

Lo scopo di questo capitolo è elaborare diverse strategie di trading, ricorrendo in alcuni casi al modello a medie mobili sviluppato nel paragrafo 3.3, in altri contaminandolo e in altri ancora ideando strategie *ex novo*. Essendo il VIX non negoziabile, si ricorre al VXX, un suo strumento derivato, le cui dinamiche seguono, a livello direzionale (rialzo/ribasso), le stesse del VIX nella maggior parte dei casi, sebbene con diversa intensità. Le strategie sulla volatilità sono di tipo giornaliero, così da evitare esposizioni eccessivamente prolungate nel tempo, data anche la rischiosità del derivato utilizzato. Per testare la loro validità e la loro efficacia, si considerano diversi parametri statistici calcolati testando ogni singola strategia sulle effettive realizzazioni del VXX dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019. Successivamente, a partire dalle 229 osservazioni del VIX e del VXX durante questo intervallo temporale, si utilizza una regressione per stimare la relazione che intercorre fra l'indice ed il suo derivato, così da poter ottenere 10000 cammini simulati per il VXX a partire dai 10000 cammini simulati per il VIX mediante il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana³¹. Le strategie sono, poi, applicate a ogni cammino per rendere maggiormente robuste le stime in prima istanza ottenute.

5.2 Il VXX e la sua relazione con il VIX

Oggetto delle strategie *daily*, sviluppate su Matlab per mezzo di cicli *for* e *if*, è il VXX (iPath Series B S&P 500 VIX Short-Term Futures ETN, ISIN: US06746P6218), un ETN (Exchange Traded Notes) lanciato nel 2009 per offrire un'esposizione verso i futures a breve termine sul VIX. Esso è caratterizzato da una rischiosità superiore ai classici titoli di debito non garantito e ogni pagamento da esso derivante è subordinato alla capacità dell'emittente, Barclays Bank PLC, di soddisfare le obbligazioni dovute. Negoziare un ETN certamente non è un approccio consigliabile ad un investitore *retail*, date le consistenti possibilità di incorrere in copiose perdite.

³¹ Si veda a tal proposito il paragrafo 4.4.

Come reso noto nel precedente paragrafo introduttivo, il VXX emula quasi fedelmente le traiettorie del VIX, come è possibile notare nel Grafico 34.

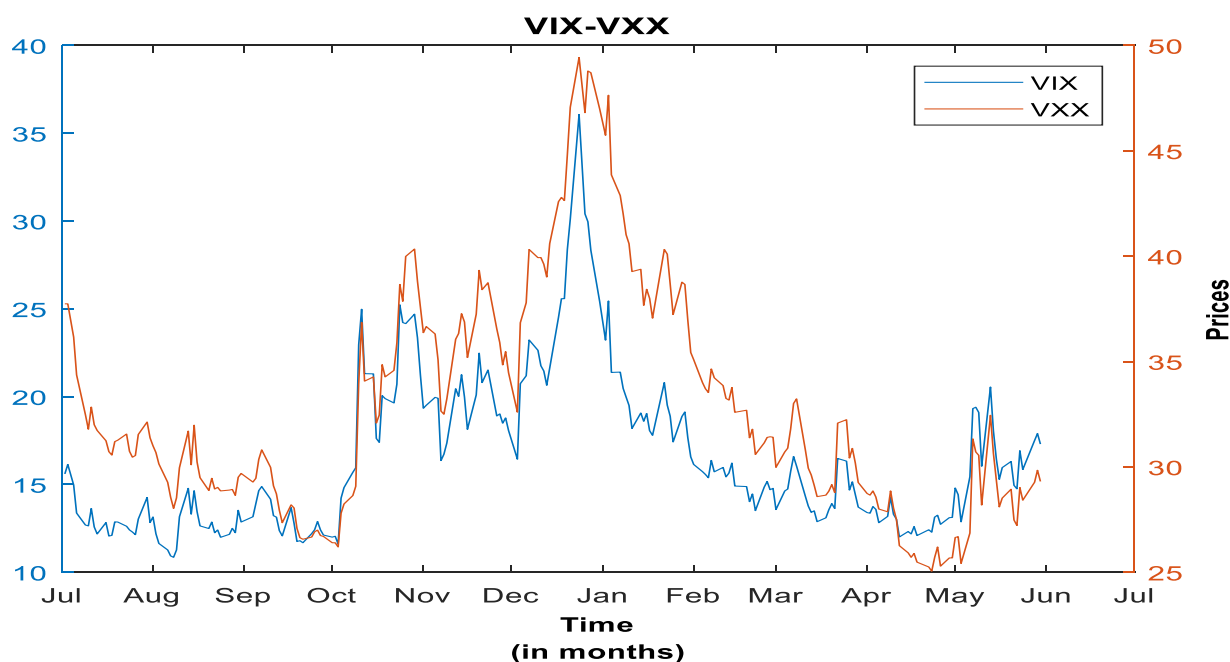


Grafico 34: VIX vs VXX, dataset di osservazioni dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019

Per quanto riguarda l'intensità delle variazioni giornaliere percentuali è sufficiente *runnare*, per $i=1,2,\dots,228$ (228 è il numero di variazioni giornaliere, preso un orizzonte temporale di 229 giorni), una regressione semplice in cui si pone:

- $Y_i = i$ -esima variazione giornaliera percentuale del VXX (variabile dipendente);
- $X_i = i$ -esima variazione giornaliera percentuale del VIX (variabile indipendente).

La retta di regressione così stimata è: $Y_i = 0.43 * X_i + 0.002$, con un *R-squared* di 0.848. La bontà della regressione è avallata dai *p-value* contenuti, dal modesto RMSE e dalla statistica-F che suggerisce la preferibilità del modello di regressione rispetto al modello degenerare con sola costante. In sostanza, fra le variazioni percentuali del VIX e del VXX vi è una forte correlazione positiva (92.113%) e le variazioni percentuali del VXX sono, in magnitudo, pari a circa il 43% delle variazioni percentuali del VIX.

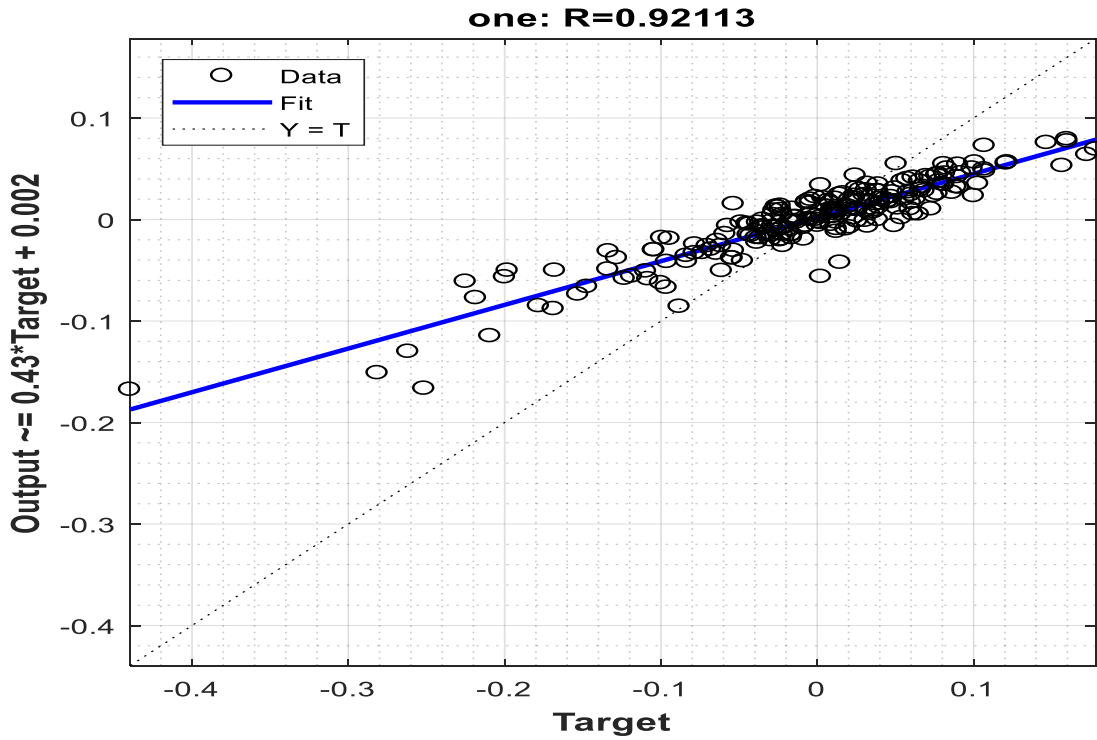


Grafico 35: Regressione fra le variazioni giornaliere percentuali del VXX (variabile dipendente) e le variazioni giornaliere percentuali del VIX (variabile indipendente), dataset di osservazioni dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019

Linear regression model:

$$y \sim 1 + x_1$$

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	0.0019687	0.001002	1.9647	0.050678
x1	0.43034	0.012097	35.575	1.4188e-94

Number of observations: 228, Error degrees of freedom: 226

Root Mean Squared Error: 0.0151

R-squared: 0.848, Adjusted R-Squared 0.848

F-statistic vs. constant model: 1.27e+03, p-value = 1.42e-94

Elaborazione 3: Stima dei coefficienti della regressione fra le variazioni giornaliere percentuali del VXX (variabile dipendente) e le variazioni giornaliere percentuali del VIX (variabile indipendente), dataset di osservazioni dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019

5.3 Strategie di trading giornaliera

5.3.1 Ipotesi semplificatrici

Le assunzioni alla base delle cinque strategie di trading sviluppate sono riassumibili nelle seguenti condizioni:

- I prezzi di acquisto/vendita al tempo t sono pari al prezzo di chiusura del VXX al tempo t . Ciò è assimilabile a una sola operazione di trading giornaliera nell'istante più prossimo alla chiusura del mercato.
- Non vi sono commissioni né costi di transazione.³²
- È possibile vendere allo scoperto³³ senza interessi da corrispondere al datore del prestito.
- Vi è la piena capacità di negoziare giornalmente, ovvero di disporre di fondi sufficienti a garantire l'operatività anche a seguito di perdite ingenti.³⁴

5.3.2 Strategia 1

Si va a testare, nel primo caso, l'efficacia del modello predittivo a medie mobili, costruito sul VIX (si veda, in merito, il paragrafo 3.3), sulle dinamiche del VXX. Il modello, nei casi in cui è in grado di elaborare un'aspettativa, prevede rialzi e ribassi del VIX correttamente nel 57,60% dei casi (percentuale stimata su 229 osservazioni giornaliere). Leggermente diversa è la percentuale di corretta previsione delle dinamiche del VXX, a causa dei rari seppur presenti casi in cui a variazioni positive del VIX coincidono variazioni negative del VXX, e viceversa. A priori, si può intuire come, sebbene le medie mobili abbiano un relativo potere predittivo, occorre migliorare questa percentuale, e questo è l'obiettivo delle strategie 2, 4 e 5. Nella prima strategia la quantità di capitale investita in ogni operazione è sempre la stessa (ad esempio 100.000 euro). Se il modello prevede una riduzione del VIX il giorno seguente, si vende allo scoperto VXX al prezzo corrente per riacquistarlo il giorno successivo, con l'aspettativa di un prezzo più basso rispetto al corrente; d'altro

³² I risultati ottenuti in termini di profitto dalle strategie sono, quindi, leggermente rivisitabili alla luce dei costi di transazione e delle commissioni presenti attualmente sul mercato.

³³ La vendita allo scoperto (*short selling*) è un'operazione finanziaria che consiste nella vendita di strumenti finanziari di cui non si è in possesso con successivo riacquisto. Essa risulta profittevole se il prezzo di riacquisto è inferiore al prezzo di vendita. Fondamentale è il ruolo del broker, a cui l'investitore richiede in prestito gli strumenti, in cambio della corresponsione di interessi e del rispetto del margine di garanzia.

³⁴ Nella realtà operativa, in caso di vendita allo scoperto (aspettativa di trarre profitto da un declino nel prezzo), quando si registrano delle perdite (nel caso di rialzo dei prezzi) e pertanto il capitale diminuisce, si rischia di incorrere, a partire da una certa soglia, in una *margin call* (richiesta di reintegrazione del margine, pena la chiusura d'ufficio della posizione da parte del broker).

canto, in caso di aspettativa rialzista, si acquista VXX al prezzo corrente per venderlo il giorno seguente, con l'attesa di un prezzo superiore al corrente.

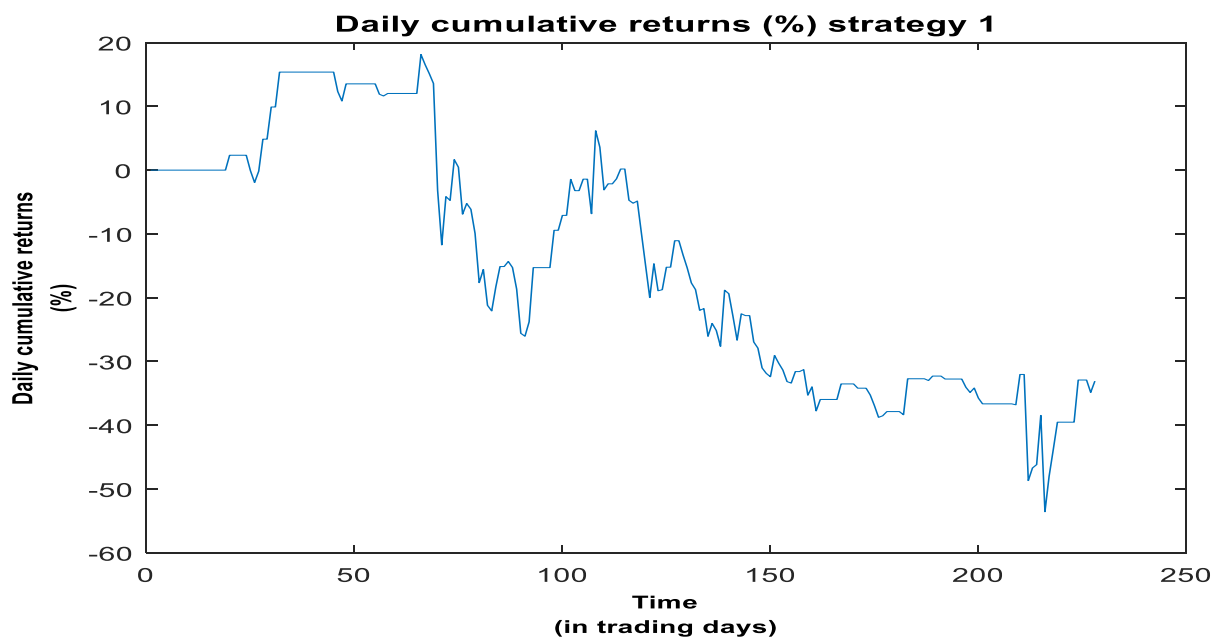


Grafico 36: Rendimenti giornalieri cumulati (in termini percentuali) della prima strategia

Se si fosse performata tale strategia nel periodo che va dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019 si sarebbe sperimentato un rendimento complessivo negativo del 33.08%.

5.3.3 Strategia 2

La seconda strategia potenzia il potere predittivo del modello a medie mobili introducendo pesi determinati dalla distanza in valore assoluto del VIX giornaliero rispetto alla sua media storica. Moltiplicando i pesi per una costante (ad esempio 100.000 euro) si hanno quantità investite nelle singole operazioni proporzionali alla distanza del VIX dalla sua media di lungo periodo. Così facendo si sfrutta la proprietà di *mean-reversion*, più volte discussa nella tesi, per la quale tanto più il VIX è lontano dalla sua media asintotica tanto più è probabile che vi ritorni nell'istante successivo.

Sempre per catturare la *mean-reversion*, la seconda strategia investe esclusivamente se:

- Il modello a medie mobili prevede un rialzo del VIX e l'indice è al di sotto della sua media storica (acquistando VXX al prezzo corrente e rivendendolo il giorno seguente);

- Il modello a medie mobili prevede un ribasso del VIX e l'indice è al di sopra della sua media storica (*shortando* VXX al prezzo corrente e riacquistandolo il giorno seguente).

I casi in cui, invece, la strategia non investe sono i seguenti tre:

- Quando il modello a medie mobili non ha alcuna aspettativa per il giorno seguente;
- Quando il modello a medie mobili prevede un ribasso del VIX e l'indice è al di sotto della sua media asintotica (in questo scenario la strategia non scommette sul ribasso perchè per la *mean-reversion* il VIX dovrebbe tendere alla sua media storica (e quindi al rialzo));
- Quando il modello a medie mobili prevede un rialzo del VIX e l'indice è al di sopra della sua media asintotica (in questo scenario la strategia non scommette sul rialzo perchè per la *mean-reversion* il VIX dovrebbe tendere alla sua media storica (e quindi al ribasso)).

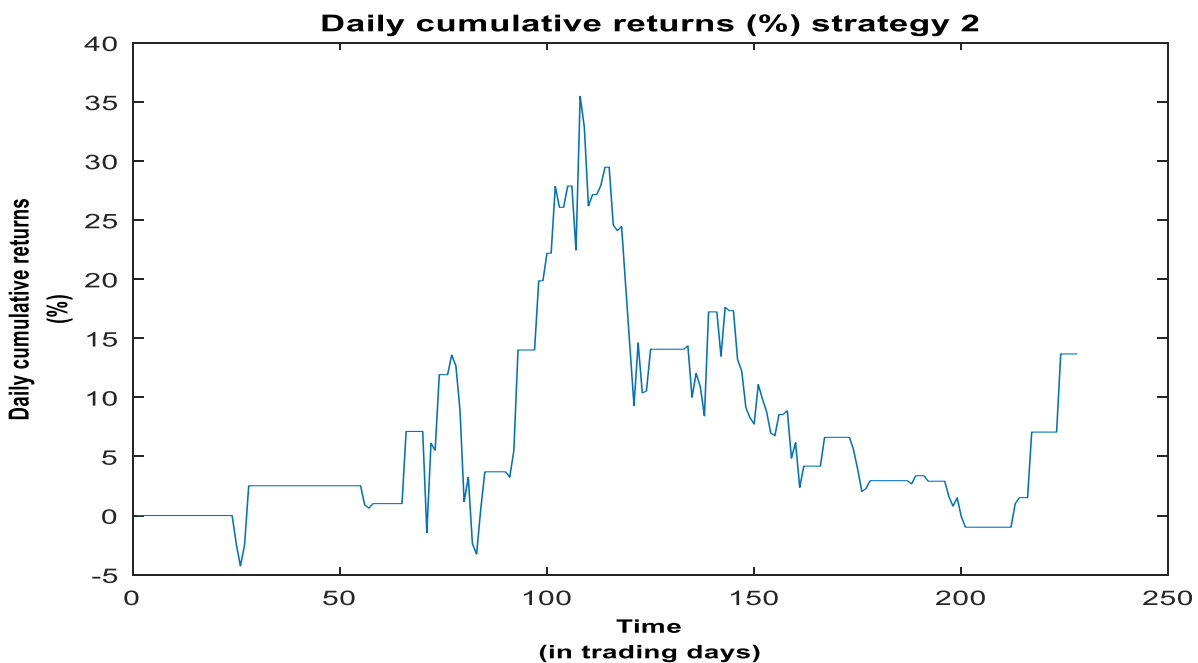


Grafico 37: Rendimenti giornalieri cumulati (in termini percentuali) della seconda strategia

Questa strategia, per il periodo che va dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019, avrebbe fruttato all'investitore un rendimento complessivo del 13.67%.

Le prime due strategie sperimentano perdite ogni qual volta il modello a medie mobili commette un errore di previsione sul VIX (e conseguentemente, nel 92% circa dei casi, sul VXX) e la magnitudo della perdita è determinata dall'ampiezza dell'oscillazione del VXX. Movimenti (rialzi/ribassi) giornalieri repentini possono,

pertanto, generare enormi profitti, in caso di previsione corretta del trend (ascendente/discendente), ed enormi perdite, in caso di aspettativa errata.

5.3.4 Strategia 3

Normalmente le varie scadenze dei futures sul VIX sono in contango, ossia il valore dei futures aumenta al crescere della scadenza. Per catturare il contango è efficace la strategia di VXX *shorting*. La terza strategia consiste, perciò, nel vendere giornalmente il VXX per riacquistarlo il giorno successivo. Questa strategia si basa sull'aspettativa che il prezzo del VXX possa decrescere continuamente seguendo il suo trend decrescente ormai decennale. Le quantità negoziate sono assunte costanti (ad esempio pari a 100.000 euro), non essendovi alcuna discriminante per cui assegnare maggior peso ad un'operazione giornaliera piuttosto che ad un'altra.



Grafico 38: Rendimenti giornalieri cumulati (in termini percentuali) della terza strategia

Con questa strategia di *shorting* avremmo ottenuto, per il periodo preso in analisi, un rendimento cumulato finale dell'8.73%. Sicuramente il grande problema di questa strategia, considerando anche l'orizzonte temporale di trading limitato, risiede nell'eccessiva sensibilità a variazioni giornaliere positive del VXX. Le perdite sperimentate nella parte centrale della rappresentazione grafica, infatti, sono legate ad un brusco

incremento del VXX, che ha determinato il forte rally al ribasso verso rendimenti cumulati negativi, fino all'inversione della tendenza nella fase di rilascio, ossia nel momento in cui il VXX è converso a valori via via più contenuti.

5.3.5 Strategia 4

Si vuole, ora, sempre sfruttare la struttura in contango dei futures sul VIX ma in maniera più prudente. La strategia *shorta* VXX in t per riacquistare VXX in $t+1$ ma solo per valori del VIX inferiori ai 15 punti in t (ossia solo in periodi di bassa volatilità) e solo se il modello a medie mobili ha attese ribassiste sul valore del VIX (e di conseguenza del VXX) in $t+1$, così da evitare di esporsi agli *spikes* di volatilità dell'indice. Il rischio di esposizione alle oscillazioni al rialzo è, in questo modo, limitato a valori contenuti, ma allo stesso tempo di entità più modesta sono anche i profitti potenziali. Le quantità investite sono costanti (ad esempio pari a 100.000 euro).

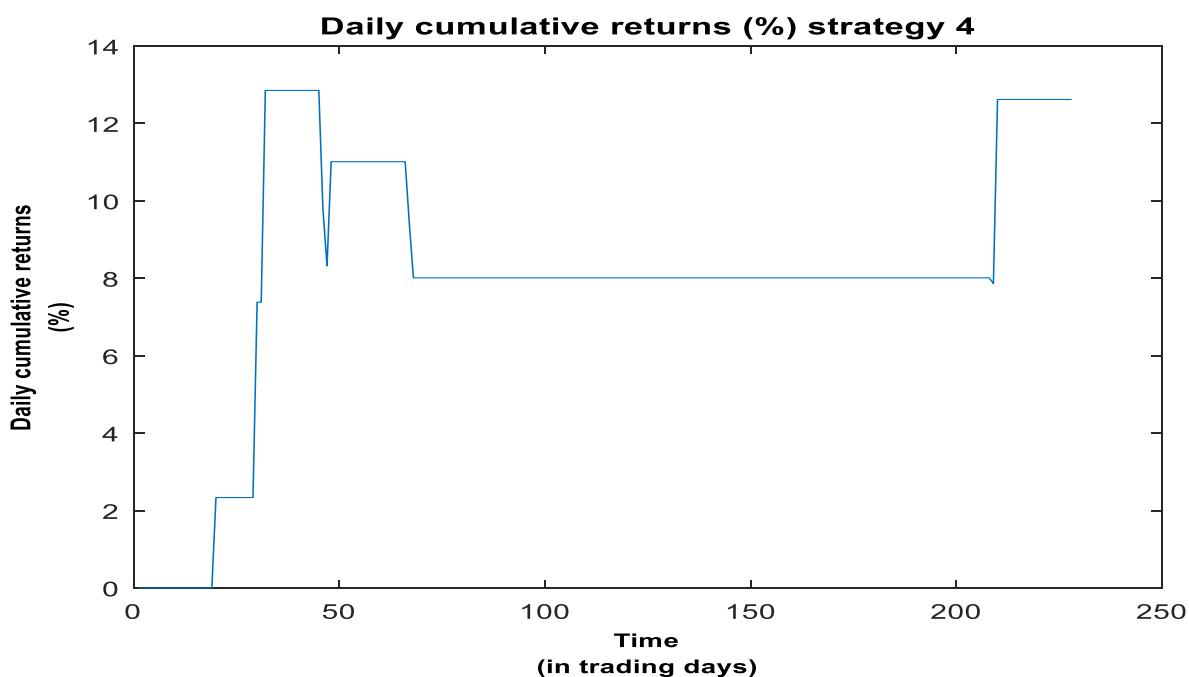


Grafico 39: Rendimenti giornalieri cumulati (in termini percentuali) della quarta strategia

Il risultato, alla fine dei 229 giorni di negoziazione, è un rendimento cumulato finale del 12.62%.

5.3.6 Strategia 5

L'ultima strategia combina i tratti distintivi della seconda e della quarta strategia. Quando il prezzo corrente del VIX è inferiore a 15 si *shorta* VXX per riacquistarlo il giorno seguente. Quando, invece, l'indice di volatilità è almeno pari a 15 si ricorre al modello a medie mobili e al potere informativo della *mean-reversion*, calcolando quantità da investire pesate sulla base della distanza del VIX corrente dalla sua media asintotica. In particolare, per valori del VIX maggiori o pari a 15 la strategia investe:

- Acquistando VXX al prezzo corrente e rivendendolo al prezzo del giorno seguente, se e solo se il modello prevede un rialzo del VIX ed il VIX è al di sotto della sua media storica ma almeno pari a 15;
- Vendendo VXX al prezzo corrente e riacquistandolo al prezzo del giorno seguente, se e solo se il modello prevede un ribasso del VIX ed il VIX è al di sopra della sua media storica.



Grafico 40: Rendimenti giornalieri cumulati (in termini percentuali) della quinta strategia

Alla fine del periodo di trading, l'investitore avrebbe ottenuto un rendimento cumulato positivo di 22.10 punti percentuali.

5.3.7 Confronto fra le strategie

Le strategie a confronto appaiono come segue.

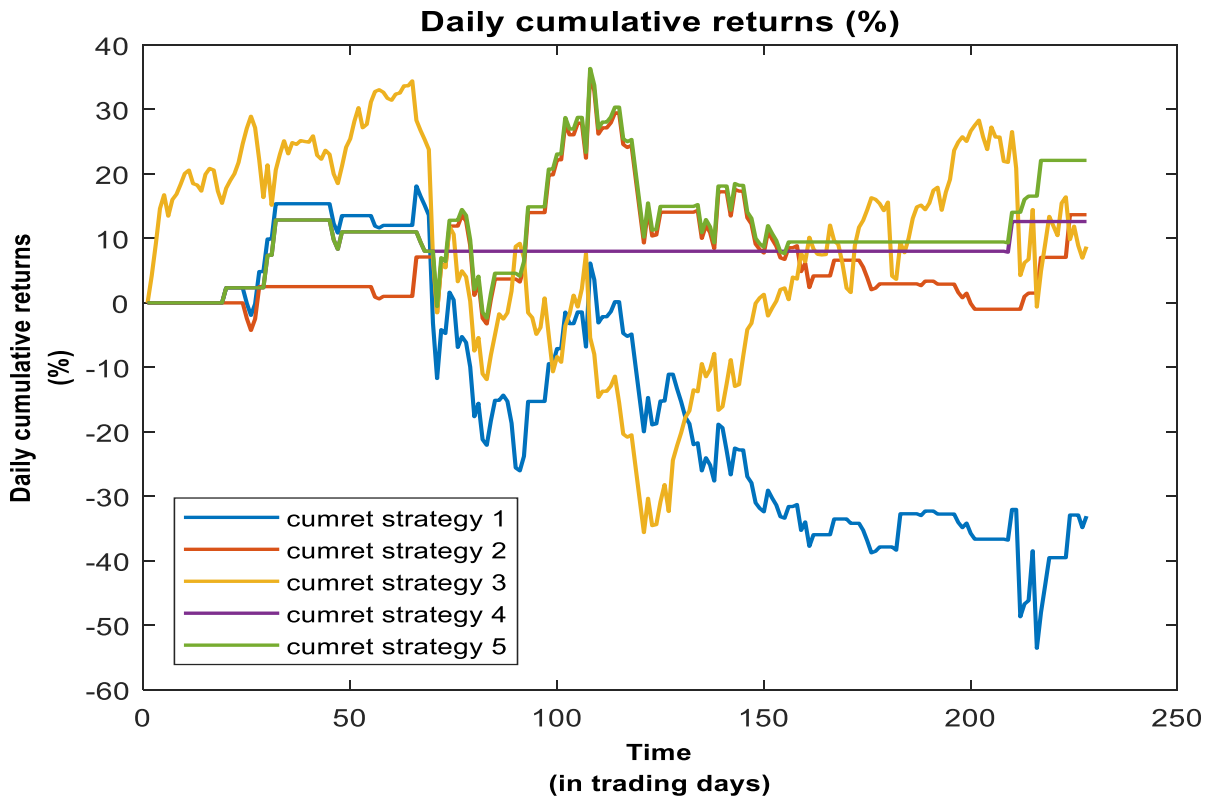


Grafico 41: Confronto fra i rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) delle cinque strategie

Nel dettaglio, la strategia che conduce ad un maggior profitto è la quinta, mentre la prima strategia è la peggiore e anche l'unica ad avere un rendimento cumulato finale negativo, dato il periodo di 229 *trading days* preso in disamina. Le strategie che segnano il minor rendimento giornaliero sono la prima e la terza, mentre la quarta sperimenta il maggiore fra i rendimenti giornalieri minimi. I *daily returns* massimi sono raggiunti dalla prima, dalla seconda e dalla quinta strategia, mentre la quarta ha per massimo rendimento giornaliero il più contenuto fra tutti. Le distribuzioni dei rendimenti di tutte le strategie sono caratterizzate da un'elevata leptocurtosi e da una più discreta asimmetria (negativa per la prima e la terza strategia, positiva per le altre), nonché da deviazioni standard molto contenute.

			STRATEGIA 1	STRATEGIA 2	STRATEGIA 3	STRATEGIA 4	STRATEGIA 5
RENDIMENTO GIORNALIERO CUMULATO COMPLESSIVO			-33,0800%	13,6700%	8,7300%	12,6200%	22,1000%
RENDIMENTI GIORNALIERI	Statistiche descrittive	media	-0,1500%	0,0600%	0,0383%	0,0553%	0,0969%
		deviazione standard	3,3000%	2,3700%	3,8700%	0,6800%	2,3100%
		asimmetria	-100,8900%	93,4400%	-130,9200%	519,5400%	93,4000%
		curtosi	1065,5400%	982,0500%	649,3300%	4367,3500%	1060,9300%
		minimo	-16,7500%	-8,5700%	-16,7500%	-3,0500%	-8,5700%
		massimo	13,0100%	13,0100%	7,9300%	5,4700%	13,0100%
	Quantili	0.025	-7,2800%	-5,0800%	-8,7500%	0,0000%	-5,0800%
		0.25	-0,8300%	0,0000%	-1,5400%	0,0000%	0,0000%
		0.50	0,0000%	0,0000%	0,5400%	0,0000%	0,0000%
		0.75	0,0000%	0,0000%	2,3400%	0,0000%	0,0000%
0.975		6,5700%	6,3300%	6,2400%	0,0000%	5,8100%	

Tabella 6: Confronto fra i rendimenti giornalieri delle singole strategie, alcune statistiche.

5.4 Backtesting dei risultati

Testare le strategie sulle effettive realizzazioni del VXX consente, in prima battuta, di avere un'idea delle performance sia in termini di redditività che di rischiosità. Tuttavia, ogni intuizione e anche le statistiche elaborate devono essere irrobustite incrementando il numero di possibili traiettorie che il VXX avrebbe potuto tracciare nel tempo. Potendo simulare j a scelta cammini del VIX tramite il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti in precedenza calibrato³⁵, e conoscendo la relazione VIX-VXX in termini di variazioni giornaliere percentuali (si veda Grafico 32 ed Elaborazione 3), è possibile testare ogni strategia sul j -esimo ($j=1,2,\dots,10000$) cammino simulato del VXX.

Settata una finestra temporale a 20 giorni si calcola, dapprima, il *simple moving average* su ogni cammino simulato di 229 *trading days* del VIX, ed a partire da quest'ultimo si costruisce un intervallo di confidenza al livello del 95% del tipo:

$$i. c. j = SMA(20)_j \pm 1.96 \frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$$

Con:

- $SMA(20)_j$ il j -esimo *simple moving average* con 20 *rolling windows*;

³⁵ Si ricorda al lettore che i cammini simulati del VIX seguono un processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana.

- 1.96 il valore approssimato del 0.975 quantile della distribuzione normale;
- $\frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$ l'errore standard, dove σ_{VIX} è la deviazione standard storica del VIX ed n la dimensione del campione (ciascuno dei 10000 cammini simulati ha dimensione temporale pari a 229 *trading days*);
- $j = 1, 2, \dots, 10000$ il j -esimo cammino simulato.

Ogni volta in cui, per lo stesso j -esimo ($j=1, 2, \dots, 10000$) cammino e per lo stesso n -esimo ($n=1, 2, \dots, 229$) *trading day*, il prezzo simulato del VIX è superiore al valore dell'*upper bound* dell'intervallo di confidenza, il modello a medie mobili ha attese ribassiste per il giorno seguente; viceversa, per un prezzo simulato del VIX inferiore al *lower bound* le aspettative sono rialziste. Nei restanti casi, quelli in cui il VIX simulato è contenuto fra i due *bound* (estremi inclusi), il modello non fornisce alcun segnale. Le strategie sono sviluppate così come visto in precedenza, ma per mezzo di cicli annidati, così da poter reiterare i cicli ideati per le 5 strategie per ogni cammino simulato. Le variazioni percentuali giornaliere del VXX, su cui sono calcolati i rendimenti giornalieri delle strategie, sono stimate, invece, a partire dai cammini simulati del VIX e attraverso la regressione dell'Elaborazione 3, nel seguente modo:

$$Y_{ij} = 0.43 * X_{ij} + 0.002$$

- Y_{ij} = i -esima variazione giornaliera percentuale del VXX del j -esimo cammino simulato (variabile dipendente);
- X_{ij} = i -esima variazione giornaliera percentuale del VIX del j -esimo cammino simulato (variabile indipendente).

Con:

- $i = 1, 2, \dots, 228$ (228 variazioni giornaliere su 229 giorni di negoziazione)
- $j = 1, 2, \dots, 10000$.

Nei seguenti grafici sono rappresentate, per ogni traiettoria simulata, le performance di ciascuna strategia, in termini di rendimenti giornalieri cumulati percentuali, computati sulle variazioni giornaliere percentuali del VXX, a loro volta calcolate sulle variazioni giornaliere percentuali del VIX simulato con 10000 reiterazioni del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana.

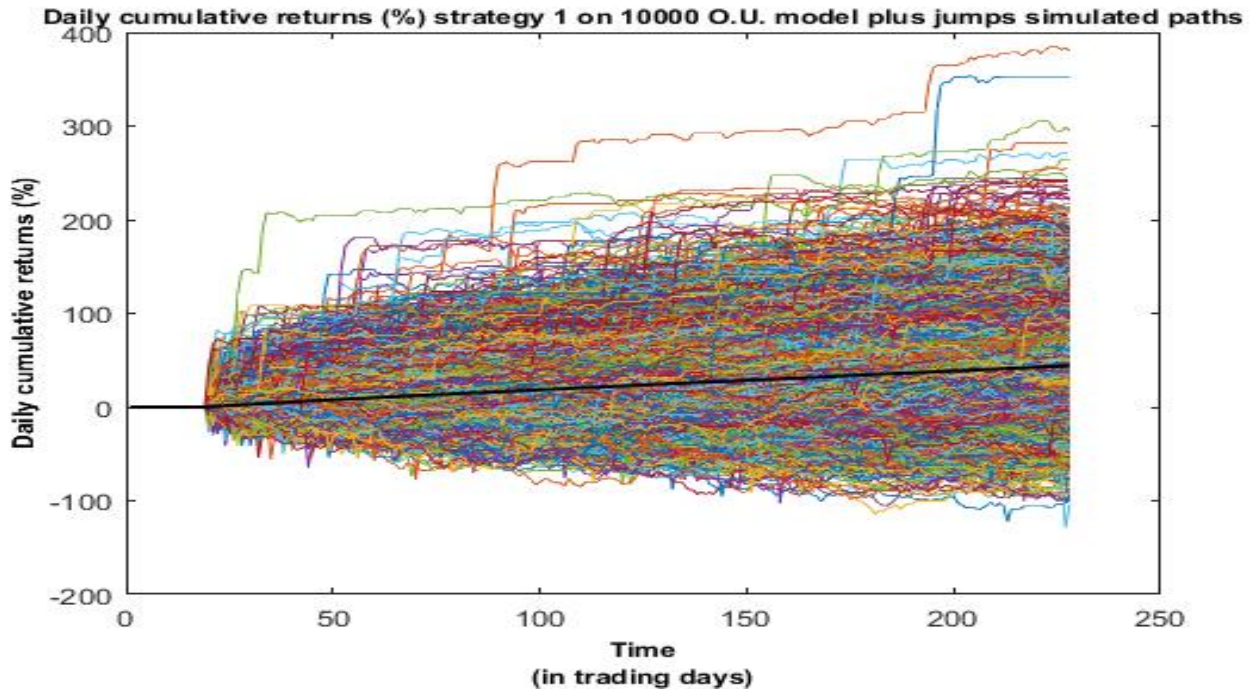


Grafico 42: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 1 su 10000 cammini simulati tramite il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della prima strategia per ogni trading day

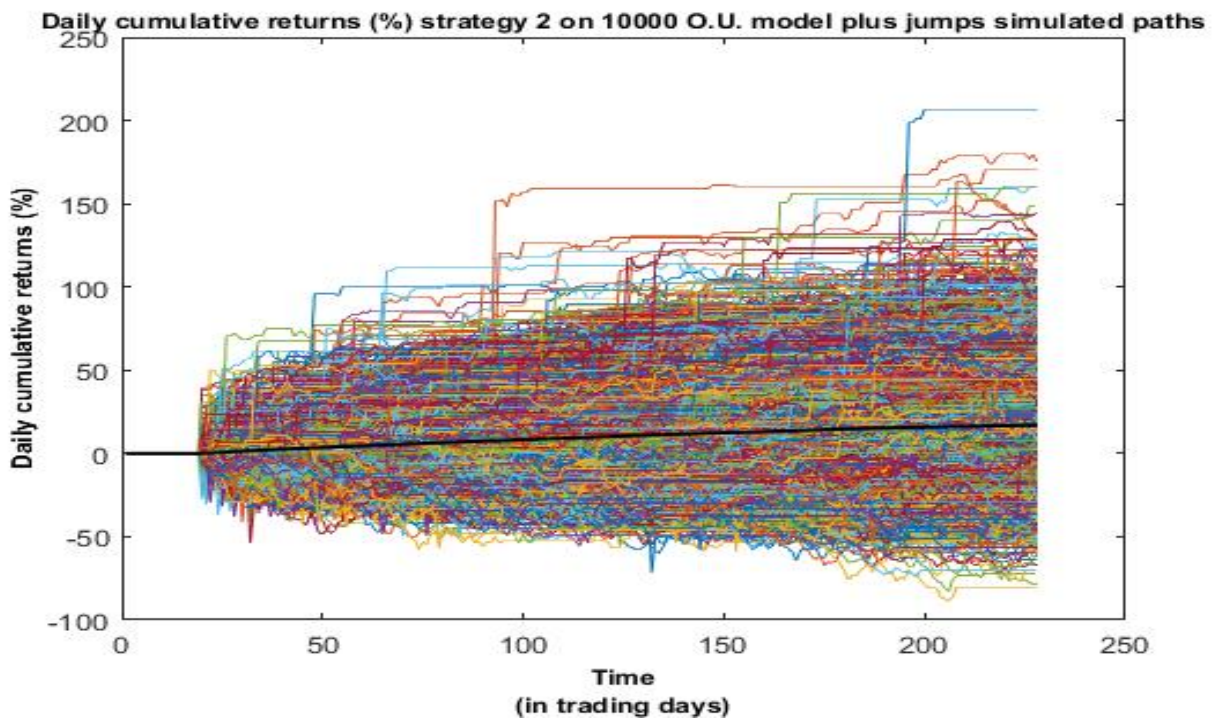


Grafico 43: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 2 su 10000 cammini simulati mediante il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della seconda strategia per ogni trading day

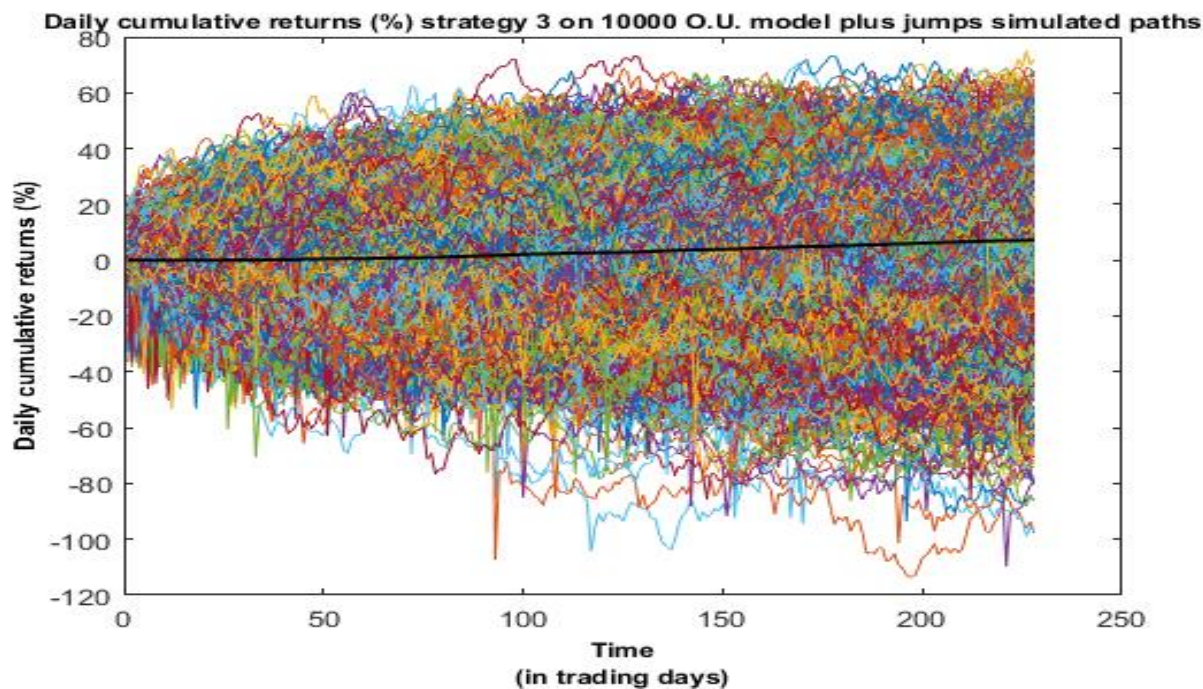


Grafico 44: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 3 su 10000 cammini simulati mediante il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della terza strategia per ogni trading day

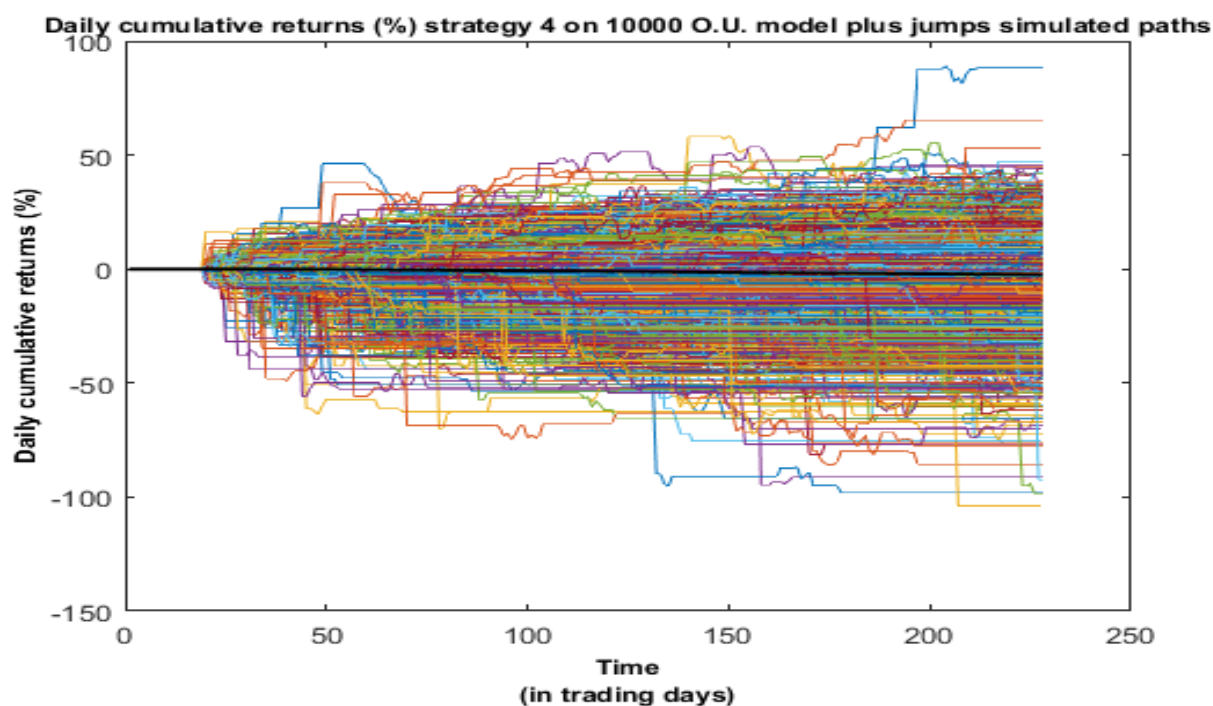


Grafico 45: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 4 su 10000 cammini simulati mediante il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della quarta strategia per ogni trading day

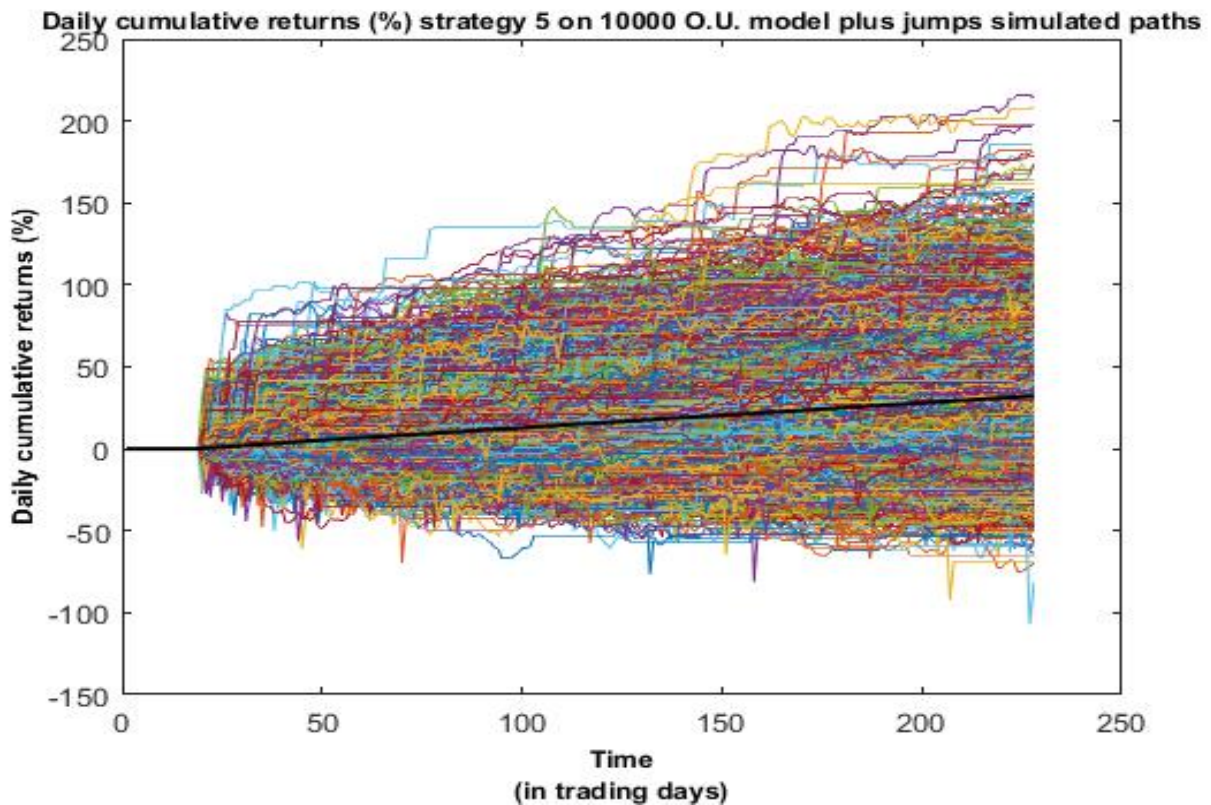


Grafico 46: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 5 su 10000 cammini simulati mediante il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della quinta strategia per ogni trading day

Alla luce dei risultati più consistenti, poichè stimati su 10000 simulazioni, si rivaluta l'efficacia della prima strategia. Infatti, l'unica a condurre ad un rendimento negativo se applicata alle osservazioni di 229 *trading days* del VXX prese in disamina, si rivela, invece, nelle simulazioni, essere quella con rendimenti giornalieri più elevati e con il rendimento giornaliero cumulato complessivo medio e massimo più alto (rispettivamente 44,13% e 379,64%). D'altro canto, però, condivide con la quarta strategia, nel peggiore dei 10000 casi un rendimento giornaliero cumulato complessivo minimo estremamente negativo (-103,87%). La significativa asimmetria positiva e l'elevata curtosi della prima strategia di trading trovano giustificazione nell'ottima probabilità di profitto associata (83,16%), ma allo stesso tempo l'elevata deviazione standard è sintomatica del rischio di sperimentare, anche se solo nel residuo 16,84% dei casi, importanti perdite. La seconda strategia opera tramite un modello strutturalmente più prudente rispetto alla prima (applicando dei pesi alle quantità da investire e riducendo sensibilmente le operazioni giornaliere di trading ai soli casi in cui è possibile sfruttare congiuntamente il potere predittivo delle medie mobili e la proprietà di *mean-reversion*). Con essa si sperimenta una probabilità di profitto di 11,21 punti percentuali in meno rispetto alla prima strategia e la distribuzione dei possibili rendimenti si stabilizza attorno a valori più contenuti, sia dal lato dei profitti che delle perdite. La "rinuncia" ai profitti, però, risulta molto più onerosa del conseguente beneficio

ottenuto in termini di riduzione delle potenziali perdite. Segnaletico di questo fenomeno è il rendimento giornaliero cumulato complessivo medio di 16,86 punti percentuali (di gran lunga inferiore al 44,13% ottenuto nella prima strategia) e ancor meglio i singoli quantili, espressivi di quanto, l'entità delle perdite si sia ridotta ma a discapito dei potenziali profitti, penalizzando asimmetria positiva e curtosi e inducendo una più elevata probabilità di incorrere in perdite (28,05% contro il 16,84% della prima strategia). La terza strategia, ricorrente in letteratura, e certamente redditizia in periodi di rilascio di volatilità, applicata ad una molteplicità di scenari, consta di una rilevante asimmetria negativa. Evidentemente la strategia soffre massicce perdite ogni qual volta si presenta uno *spike* di volatilità. Nonostante un rendimento giornaliero cumulato complessivo medio positivo del 7,17%, esiste una probabilità di perdita per nulla trascurabile (33,29%) e i quantili non suggeriscono alcun elemento di preferibilità rispetto alle altre strategie già trattate in questo capitolo. La quarta strategia è l'unica a presentare un rendimento giornaliero cumulato medio negativo, e in generale le statistiche peggiori fra tutte le strategie, eccezion fatta per il quantile 0.025 (di rendimenti giornalieri e rendimenti giornalieri cumulati complessivi), che segna valori lievemente superiori rispetto alla terza strategia. L'ultima strategia, è, infine, seconda solo alla prima strategia in termini di redditività, ma presenta rispetto alla prima eventuali perdite molto più contenute (si confrontino a tal proposito i quantili 0.025 dei rendimenti giornalieri cumulati complessivi di entrambe le strategie). È, inoltre, la strategia in cui è maggiore fra tutte la probabilità di profitto (84,93%) e in cui massima fra tutte è l'asimmetria positiva dei rendimenti giornalieri cumulati complessivi. La deviazione standard, significativamente ridotta rispetto alla prima strategia, conferma il profilo più prudente della quinta strategia. Alla luce di quanto detto, l'ultima strategia è complessivamente preferibile rispetto a tutte le altre, ma è pur sempre una strategia di trading, che per sua stessa natura richiede che l'investitore appartenga alla categoria degli istituzionali, i quali possono permettersi comportamenti maggiormente *risk-seeking* rispetto ad un *retail*, che, a sua volta, mai potrebbe sostenere eventuali perdite ingenti, oppure difficilmente potrebbe garantire continuità alle operazioni in derivati.

			STRATEGIA 1	STRATEGIA 2	STRATEGIA 3	STRATEGIA 4	STRATEGIA 5
PROBABILITÀ DI PROFITTO			83,16%	71,95%	66,71%	59,23%	84,93%
PROBABILITÀ DI PERDITA			16,84%	28,05%	33,29%	40,77%	15,07%
RENDIMENTI GIORNALIERI CUMULATI COMPLESSIVI	Statistiche descrittive	media	44,1300%	16,8600%	7,1700%	-2,5300%	32,1200%
		deviazione standard	47,5600%	28,5800%	19,1900%	11,3600%	32,5300%
		asimmetria	50,4500%	39,4700%	-40,3900%	-148,7500%	56,8200%
		curtosi	404,8500%	374,2500%	375,5600%	1189,6900%	389,9200%
		minimo	-103,8700%	-80,1400%	-97,9700%	-103,8700%	-81,3700%
		massimo	379,6400%	206,8400%	72,0400%	88,1800%	214,1700%
	Quantili	0.025	-40,2200%	-34,7300%	-33,5700%	-32,1300%	-23,9700%
		0.25	11,9300%	-2,6700%	-4,6800%	-5,3300%	10,0600%
		0.50	40,5400%	15,4500%	8,2400%	0,0000%	29,0300%
		0.75	73,0800%	34,8900%	20,1000%	0,0000%	51,8000%
0.975		146,2100%	76,0500%	41,9100%	18,5200%	104,2100%	
RENDIMENTI GIORNALIERI	Statistiche descrittive	media (*)	0,1900%	0,0739%	0,0314%	-0,0111%	0,1400%
		deviazione standard (**)	2,9800%	2,1300%	3,7000%	0,4900%	2,1600%
		asimmetria (***)	115,5000%	178,1200%	-134,7300%	NaN(*****)	142,4600%
		curtosi (****)	1860,8500%	2868,3200%	1506,7400%	NaN(*****)	2691,3500%
		minimo (*****)	-95,7000%	-58,5700%	-132,8200%	-95,7000%	-95,7000%
		massimo (*****)	132,8200%	132,8200%	32,0000%	28,0100%	56,5200%
	Quantili (*****)	0.025	-0,1800%	-0,1500%	-0,1500%	-0,1400%	-0,1100%
		0.25	0,0500%	-0,0100%	-0,0200%	-0,0200%	0,0400%
		0.50	0,1800%	0,0700%	0,0400%	0,0000%	0,1300%
		0.75	0,3200%	0,1500%	0,0900%	0,0000%	0,2300%
0.975		0,6400%	0,3300%	0,1800%	0,0800%	0,4600%	

(*) La media va intesa come la media dei j-esimi rendimenti giornalieri medi, per j=1,2,...,10000, dove i j-esimi rendimenti giornalieri medi sono ottenuti dalla media, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(**) La deviazione standard va intesa come la media delle j-esime deviazioni standard dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime deviazioni standard sono ottenute dalla deviazione standard, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(***) L'asimmetria va intesa come la media delle j-esime asimmetrie dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime asimmetrie sono ottenute dall'asimmetria, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(****) La curtosi va intesa come la media delle j-esime curtosi dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime curtosi sono ottenute dalla curtosi, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(*****) Minimo e massimo sono da intendersi come minimo e massimo assoluti della matrice dei rendimenti giornalieri di dimensione 228x10000.

(*****) I quantili sono calcolati sui 10000 rendimenti giornalieri medi.

(*****) Per alcune j, tutti gli i-esimi rendimenti giornalieri sono nulli, perché non sussistono le condizioni di mercato affinché la strategia possa negoziare. In questo caso MatLab restituisce NaN.

Tabella 7: Confronto fra i rendimenti giornalieri cumulati complessivi e i rendimenti giornalieri delle cinque strategie elaborate sui 10000 cammini simulati, alcune statistiche.

Un ulteriore indicatore di rischiosità è il *maximum drawdown*, calcolato, nella Tabella 8, sui 228 rendimenti giornalieri cumulati in termini di caduta dal picco massimo al valor minimo. Esso è una misura di *downside risk* indicativa dell'erosione di risorse finanziarie stanziata a fronte della strategia.

I *maximum drawdown* calcolati per ogni strategia, su 10000 simulazioni, sono, in corrispondenza dello scenario con caduta massima dei rendimenti, decisamente elevati (dal 95,82% della strategia 2 al 169,40%

della strategia 3). Dall'analisi dei risultati si evidenzia un netto miglioramento, in termini di riduzione del *downside risk*, nel passaggio dalla strategia 1 alla strategia 2. La strategia 5, invece, già espressamente preferibile rispetto alle altre, secondo quanto visto in precedenza, si conferma anche essere fra le migliori in termini di *maximum drawdown* medio (22,32%). Non sorprende, invece, che la strategia 4, data la limitata operatività e la contenuta (rispetto alle altre strategie) deviazione standard, segni i valori minori di *maximum drawdown*. Si ricorda che l'operatività in derivati sul VIX è prerogativa di *traders* avvezzi al rischio e banche d'affari, proprio per la ricorrente probabilità di sperimentare una riduzione significativa dei rendimenti cumulati, o talvolta di perdere una parte del capitale iniziale o quest'ultimo nella sua interezza. Esiste, pertanto, la possibilità di dover reintegrare quanto eroso dalla congiuntura negativa fra l'andamento del mercato e la strategia stessa.

MAXIMUM DRAWDOWN (%)		STRATEGIA 1	STRATEGIA 2	STRATEGIA 3	STRATEGIA 4	STRATEGIA 5
quantili	0.025	13,93%	10,96%	24,37%	0,00%	8,96%
	0.25	22,94%	18,82%	34,97%	0,00%	15,33%
	0.50	30,12%	24,76%	42,03%	4,42%	20,32%
	0.75	40,11%	32,67%	51,43%	11,04%	27,14%
	0.975	69,26%	52,86%	78,83%	38,62%	47,02%
massimo assoluto		135,86%	95,82%	169,40%	127,44%	127,44%
valore medio		33,16%	26,63%	44,55%	7,63%	22,32%

Nota: Tutti i valori sono calcolati per ogni strategia su 10000 simulazioni.

Tabella 8: Maximum drawdown (%) delle cinque strategie elaborate sui 10000 cammini simulati, alcune statistiche.

Conclusioni

Il *file rouge* su cui sono strutturati i singoli capitoli è la volontà di dimostrare l'esistenza di un efficace quanto alternativo utilizzo speculativo del più rinomato indice di volatilità del mercato statunitense.

Le difficoltà riscontrate sono state non poche. Il VIX nasce come strumento informativo funzionale agli operatori di mercato per lo svolgimento deontologico e professionale di servizi e attività di investimento. La sua formulazione lo rende estremamente imprevedibile, essendo il sottostante un indice di mercato (SP500). Le stesse dinamiche sono solo in parte assimilabili ad un processo aleatorio, essendovi alcune caratteristiche (*mean-reversion* e salti di volatilità) difficilmente replicabili. L'obiettivo è prevedere, quantomeno direzionalmente, il valore dell'indice il giorno successivo, e in questo senso insiste un modello predittivo a medie mobili. In seconda istanza sono ideate strategie di *daily trading*, applicate su N (per N elevato, nell'elaborato pari a 10000) cammini, così da avere sufficienti scenari in grado di emulare l'universo aleatorio delle possibili traiettorie dell'indice. Ogni scenario è identificativo di disparate condizioni di mercato, tutte però costruite con un approccio *tailor-made* mediante parametri stimati sulle diverse caratteristiche distintive del VIX. Proprio per la sua stessa genesi, il VIX non è direttamente negoziabile, motivo per cui, passati in rassegna i diversi derivati, si è deciso di ricorrere al VXX, quasi perfettamente correlato con il VIX, in modo da rendere spendibili le analisi precedentemente condotte. I risultati, per alcune strategie di trading, sono molto soddisfacenti. In particolar modo si è riuscito a formulare una strategia con un'elevata probabilità di profitto (stimata nell'84,93% dei casi), con rendimento complessivo medio molto competitivo (+32,12%) e una forte asimmetria positiva che rende molto probabili rendimenti ancora superiori, sebbene, essendo una strategia puramente speculativa, non è immune al *downside risk* e può incorrere anche in rilevanti perdite. Per questi motivi è necessario che il fruitore della strategia possa eventualmente reintegrare il capitale e sopportare perdite copiose e affinché la strategia possa espletare la sua piena efficacia in termini di redditività andrebbe reiterata nel tempo.

Appendice Matlab

```
%% CAPITOLO 2 (paragrafo 2.1, Tabella 1)
clear all;
close all;
clc;

% Importo i dati.
data1 = importdata('VIX.xlsx');
data2 = importdata('SP500.xlsx');
ttd = datenum(datetime(data1.textdata.VIX(:,1)));
time = datetime(ttd, 'convertfrom', 'datenum');
SP500 = data2.data(:,1);
VIXclosemv = data1.data.VIX(:,1);
VIXclose = fillmissing(VIXclosemv, 'previous');

% VIX-SP500
figure('Name', 'VIX-SP500')
yyaxis left
plot(time, VIXclose)
yyaxis right
plot(time, SP500)
datetick
xlabel({'Time', '(in years)'}, 'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', 'Color', ...
    'black')
ylabel('Prices', 'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', 'Color', 'black')
title('VIX-SP500')
legend('VIX', 'SP500')

n = length(VIXclose);
for i = 1:n-1
    b(i) = (VIXclose(i+1)-VIXclose(i))/VIXclose(i)*100;
    c(i) = (SP500(i+1)-SP500(i))/SP500(i)*100;
end
percretVIX = b';
percretSP500 = c';

% Regressioni
reg1 = fitlm(percretVIX, percretSP500);
figure
plotregression(percretVIX, percretSP500, 'one')
hold on
grid on
grid minor
k1 = (-40:1:120);
w1 = 0*ones(1, 161);
plot(k1, w1, 'k')
k2 = (-30:1:120);
w2 = 0*ones(1, 151);
plot(w2, k2, 'k')
legend('Y=T', 'Fit', 'Data', 'xaxis', 'yaxis', 'Location', 'northeast')
hold off

for i = 1:n-1
    c(i) = VIXclose(i+1)-VIXclose(i);
end
VIXlevelchange = c';
```

```

reg2 = fitlm(VIXlevelchange,percretSP500);
figure
plotregression(VIXlevelchange,percretSP500,'one')
hold on
grid on
grid minor
k1 = (-40:1:120);
w1 = 0*ones(1,161);
plot(k1,w1,'k')
k2 = (-20:1:20);
w2 = 0*ones(1,41);
plot(w2,k2,'k')
legend('Y=T','Fit','Data','xaxis','yaxis','Location','northeast')
hold off

```

```

% seasonality
VIX1990 = VIXclose(1:253);
VIX1990Jan = mean(VIXclose(1:22));
VIX1990Feb = mean(VIXclose(23:41));
VIX1990Mar = mean(VIXclose(42:63));
VIX1990Apr = mean(VIXclose(64:83));
VIX1990May = mean(VIXclose(84:105));
VIX1990Jun = mean(VIXclose(106:126));
VIX1990Jul = mean(VIXclose(127:147));
VIX1990Aug = mean(VIXclose(148:170));
VIX1990Sep = mean(VIXclose(171:189));
VIX1990Oct = mean(VIXclose(190:212));
VIX1990Nov = mean(VIXclose(213:233));
VIX1990Dec = mean(VIXclose(234:253));

```

N.B. Sono omesse le righe di codice per i valori del VIX annuali (dal 1991 al 2017) e mensili per ogni anno

```

figure('Name','VIX 1990-2017')
plot(VIX1990,'-.*','MarkerSize',1.5)
title('VIX 1990-2017')
hold on
plot(VIX1991,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1992,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1993,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1994,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1995,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1996,'-.*','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1997,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1998,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX1999,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2000,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2001,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2002,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2003,'--o','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2004,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2005,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2006,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2007,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2008,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2009,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2010,':s','MarkerSize',1.5)
plot(VIX2011,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2012,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2013,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2014,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2015,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2016,'+', 'MarkerSize',1.5)
plot(VIX2017,'+', 'MarkerSize',1.5)

```

```

legend('VIX1990', 'VIX1991', 'VIX1992', 'VIX1993', 'VIX1994', 'VIX1995', ...
       'VIX1996', 'VIX1997', 'VIX1998', 'VIX1999', 'VIX2000', 'VIX2001', ...
       'VIX2002', 'VIX2003', 'VIX2004', 'VIX2005', 'VIX2006', 'VIX2007', ...
       'VIX2008', 'VIX2009', 'VIX2010', 'VIX2011', 'VIX2012', 'VIX2013', ...
       'VIX2014', 'VIX2015', 'VIX2016', 'VIX2017')
hold off

v1990 = [VIX1990Jan, VIX1990Feb, VIX1990Mar, VIX1990Apr, VIX1990May, ...
        VIX1990Jun, VIX1990Jul, VIX1990Aug, VIX1990Sep, VIX1990Oct, VIX1990Nov, ...
        VIX1990Dec];

```

N.B. Sono omesse le righe di codice di v1991.....v2017.

```

vecJan = [VIX1990Jan, VIX1991Jan, VIX1992Jan, VIX1993Jan, VIX1994Jan, ...
         VIX1995Jan, VIX1996Jan, VIX1997Jan, VIX1998Jan, VIX1999Jan, VIX2000Jan, ...
         VIX2001Jan, VIX2002Jan, VIX2003Jan, VIX2004Jan, VIX2005Jan, VIX2006Jan, ...
         VIX2007Jan, VIX2008Jan, VIX2009Jan, VIX2010Jan, VIX2011Jan, VIX2012Jan, ...
         VIX2013Jan, VIX2014Jan, VIX2015Jan, VIX2016Jan, VIX2017Jan];

```

N.B. Sono omesse le righe di codice di vecFeb.....vecDec.

```

meanJan = mean(vecJan);
meanFeb = mean(vecFeb);
meanMar = mean(vecMar);
meanApr = mean(vecApr);
meanMay = mean(vecMay);
meanJun = mean(vecJun);
meanJul = mean(vecJul);
meanAug = mean(vecAug);
meanSep = mean(vecSep);
meanOct = mean(vecOct);
meanNov = mean(vecNov);
meanDec = mean(vecDec);
tt = 1:1:12;
tt1 = 1;
tt2 = 2;
tt3 = 3;
tt4 = 4;
tt5 = 5;
tt6 = 6;
tt7 = 7;
tt8 = 8;
tt9 = 9;
tt10 = 10;
tt11 = 11;
tt12 = 12;

figure('Name', 'Scatter Plot monthly average values')
scatter(tt, v1990)
hold on
title('Scatter Plot monthly average values')
xlabel('Months')
ylabel('VIX average monthly price levels')
scatter(tt, v1991)
scatter(tt, v1992)
scatter(tt, v1993)
scatter(tt, v1994)
scatter(tt, v1995)
scatter(tt, v1996)
scatter(tt, v1997)
scatter(tt, v1998)
scatter(tt, v1999)

```

```

scatter(tt,v2000)
scatter(tt,v2001)
scatter(tt,v2002)
scatter(tt,v2003)
scatter(tt,v2004)
scatter(tt,v2005)
scatter(tt,v2006)
scatter(tt,v2007)
scatter(tt,v2008)
scatter(tt,v2009)
scatter(tt,v2010)
scatter(tt,v2011)
scatter(tt,v2012)
scatter(tt,v2013)
scatter(tt,v2014)
scatter(tt,v2015)
scatter(tt,v2016)
scatter(tt,v2017)
scatter(tt1,meanJan, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt2,meanFeb, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt3,meanMar, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt4,meanApr, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt5,meanMay, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt6,meanJun, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt7,meanJul, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt8,meanAug, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt9,meanSep, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt10,meanOct, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt11,meanNov, 'diamond', 'k', 'filled')
scatter(tt12,meanDec, 'diamond', 'k', 'filled')
axis tight
hold off

%% CAPITOLO 2
clear all;
close all;
clc;

% Importo i dati
data1 = importdata('VIX.xlsx');
data2 = importdata('SP500.xlsx');

SP500 = data2.data(:,1);
VIXclosemv = data1.data.VIX(:,1);
VIXclose = fillmissing(VIXclosemv, 'previous');
VIXJul2018May2019close = data1.data.VIX2019(:,1);

TTTT=datetime(data1.textdata.VIX2019);
tttt=datetime(data1.textdata.VIX(:,1));

% Plot del VIX
figure('Name', 'VIX Daily Prices')
plot(tttt,VIXclose)
grid on
title('VIX Daily Prices')
xlabel('Years')
ylabel('VIX Prices')

% Plot del logVIX
logVIX = log(VIXclose);
figure('Name', 'VIX Daily LogPrices')
plot(tttt,logVIX)
grid on

```



```

title('VIX Daily LogPrices')
xlabel('Years')
ylabel('VIX LogPrices')

% Statistiche di base
xdsVIX = datastats(VIXclose);
skewVIX = skewness(VIXclose);
kurtVIX = kurtosis(VIXclose);

xdslogVIX = datastats(logVIX);
skewlogVIX = skewness(logVIX);
kurtlogVIX = kurtosis(logVIX);

xdsSP500 = datastats(SP500);
skewSP500 = skewness(SP500);
kurtSP500 = kurtosis(SP500);

% Box plots
figure('Name', 'VIX & LogVIX Box Plot')
title('VIX & LogVIX Box Plot')
subplot(2,1,1)
boxplot(VIXclose, 'Labels', {'mean = 19.3180 std = 7.8398'})
subplot(2,1,2)
boxplot(logVIX, 'Labels', {'mean = 2.8952 std = 0.3494'})

% Istogrammi
figure('Name', 'VIX Histogram')
histogram(VIXclose)
title('VIX Histogram')
xlabel('VIX Price Level')
ylabel('Number of observations')

figure('Name', 'LogVIX Histogram')
histogram(logVIX)
title('LogVIX Histogram')
xlabel('VIX LogPrice Level')
ylabel('Number of observations')

% QQ plot del VIX
figure('Name', 'QQ plot VIX')
qqplot(VIXclose)
title('QQ Plot of VIX versus Standard Normal')
xlabel('Standard Normal Quantiles')
ylabel('VIX Quantiles')

% Jarque-Bera Test
% H0 = ipotesi congiunta che sia asimmetria che curtosi in eccesso siano
% nulle.
% h = 1 indica il rifiuto dell'ipotesi nulla al livello di significatività
% alpha.
% Per valori del p-value prossimi allo 0 rigetto H0.
% L'ipotesi nulla è rigettata per jbstat > critval.
[h,p,jbstat,critval] = jbstest(logVIX, [], 0.0001);

% Anderson-Darling Test (rigetto H0--> non normalità)
[h111,p1,adstat,cv] = adtest(logVIX);

% Plot dell'ACF/PACF
figure('Name', 'ACF/PACF LogVIX')
subplot(2,1,1)
autocorr(logVIX)
title('LogVIX ACF')
ylabel('LogVIX AC')

```

```

subplot(2,1,2)
parcorr(logVIX)
title('LogVIX PACF')
ylabel('LogVIX PAC')
% Il processo è non stazionario.

% Differenzio la serie(differenze prime)
dVIX = diff(VIXclose);
dlogVIX = diff(logVIX);
% dlogVIX sono i log-returns (ossia ln(P(t+1))-ln(P(t)))

% Plot delle differenze prime
figure('Name','VIX first differences')
plot(dVIX)
title('VIX first differences')

figure('Name','LogVIX first differences')
plot(dlogVIX)
title('LogVIX first differences')

% Augmented Dickey-Fuller test
[~,pValue,stat,cValue,reg] = adftest(dlogVIX);
% analisi Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn Information Criteria

% Plot dell'ACF/PACF della serie differenziata del logVIX
figure('Name','ACF/PACF DlogVIX')
subplot(2,1,1)
autocorr(dlogVIX)
title('DlogVIX ACF')
ylabel('DlogVIX AC')
subplot(2,1,2)
parcorr(dlogVIX)
title('DlogVIX PACF')
ylabel('DlogVIX PAC')

% Differenze seconde (overdifferencing)
d2logVIX = diff(dlogVIX);
figure('Name','LogVIX second differences')
plot(d2logVIX)
title('LogVIX second differences')

[~,pValue1,stat1,cValue1,reg1] = adftest(d2logVIX);

% Plot dell'ACF/PACF della serie differenziata due volte del logVIX
figure('Name','ACF/PACF D2logVIX')
subplot(2,1,1)
autocorr(d2logVIX)
title('D2logVIX ACF')
ylabel('D2logVIX AC')
subplot(2,1,2)
parcorr(d2logVIX)
title('D2logVIX PACF')
ylabel('D2logVIX PAC')

% Già dopo la prima differenziazione la serie appare stazionaria. Dalle
% ACF/PACF si può identificare un ARIMA(1,1,1) sul logVIX.

% Ciclo per identificare il miglior ARIMA model per il logVIX
LOGL = zeros(2,2);
PQ = zeros(2,2);
for p = 1:2
    for q = 1:2
        mod = arima(p,1,q);

```

```

    [fit,~,logL] = estimate(mod,logVIX , 'Display', 'off');
    LOGL(p,q) = logL;
    PQ(p,q) = p+q;
end
end
LOGL = reshape(LOGL,4,1); % 4 sono gli ARIMA model possibili studiati:
%(1,1,1), (2,1,2), (1,1,2), (2,1,1).
PQ = reshape(PQ,4,1);
[~,bic] = aicbic(LOGL,PQ+1,7181); %7181 obs; PQ+1 = p+q+constant term
reshape(bic,2,2)
% Nella matrice BIC le righe corrispondono all' AR degree (p) e le colonne
% al MA degree (q). Il valore più piccolo è in corrispondenza dell'ARIMA
% migliore, ossia il modello ARIMA(1,1,1).

% ARIMA(1,1,1)
Mdl = arima(1,1,1);
logVIXFit = estimate(Mdl,logVIX);

% Forecast
[Y,YMSE] = forecast(logVIXFit,80,'Y0',logVIX); % forecast 80 step-ahead
lower = Y - 1.96*sqrt(YMSE); % lower bound i.c.
upper = Y + 1.96*sqrt(YMSE); % upper bound i.c.

% Plot del forecast con l'ARIMA(1,1,1)
figure('Name','LogVIX forecasting')
plot(logVIX,'Color',[.5,.5,.5])
xlim([6300 7300])
xlabel('Number of observations')
ylabel('LogVIX')
hold on
h11 = plot(7182:7182+79,lower,'r','LineWidth',2);
plot(7182:7182+79,upper,'r','LineWidth',2)
h22 = plot(7182:7182+79,Y,'g','LineWidth',2);
h33 = plot(7182:7182+79,log(VIXJul2018May2019close(1:80)),'b');
legend([h11 h22 h33], '95% Interval', 'Forecast', 'LogVIX Jul2018-May2019', ...
'Location', 'NorthWest')
title('LogVIX Forecast')
hold off

% Analisi dei residui
res = infer(logVIXFit,logVIX);

figure('Name','Residuals analysis')
subplot(2,2,1)
plot(res./sqrt(logVIXFit.Variance))
xlim([0 7182])
title('Standardized Residuals')
subplot(2,2,2)
qqplot(res)
title('QQ Plot of Residuals versus Standard Normal')
xlabel('Standard Normal Quantiles')
ylabel('Residuals Quantiles')
subplot(2,2,3)
autocorr(res)
title('Residuals ACF')
ylabel('Residuals AC')
subplot(2,2,4)
parcorr(res)
title('Residuals PACF')
ylabel('Residuals PAC')

% Ljung-Box test sui residui
[h4,pValue2,stat2,cValue2] = lbqtest(res);
% h4 = 0 indica che non vi è sufficiente evidenza per rigettare l'ipotesi

```

```

% nulla che i residui non siano autocorrelati.

figure('Name','Abs residuals')
absres = abs(res);
plot(1:7181,absres)
xlim([0 7182])
title('Abs residuals')
xlabel('Number of observations')
ylabel('Abs residuals')

figure('Name','ACF/PACF Abs residuals')
subplot(2,1,1)
autocorr(absres)
title('Abs residuals ACF')
ylabel('Abs residuals AC')
subplot(2,1,2)
parcorr(absres)
title('Abs residuals PACF')
ylabel('Abs residuals PAC')

figure('Name','Squared residuals')
res2 = res.^2;
plot(1:7181,res2)
xlim([0 7182])
title('Squared residuals')
xlabel('Number of observations')
ylabel('Squared residuals')

figure('Name','ACF/PACF Squared residuals')
subplot(2,1,1)
autocorr(res2)
title('Squared residuals ACF')
ylabel('Squared residuals AC')
subplot(2,1,2)
parcorr(res2)
title('Squared residuals PACF')
ylabel('Squared residuals PAC')

% Verifico effetti ARCH
h5 = lbqtest(res.^2);
h6 = lbqtest(absres);
% h5 = 1 e h6 = 1 esprimono significativi effetti ARCH nei residui.
h7 = archtest(res);
% ht = 1 indica che l'ipotesi nulla di assenza di eteroschedasticità nei
% residui dovrebbe essere rigettata in favore di un modello ARCH. Questo
% risultato è consistente con i precedenti.

% Modelli GARCH

xdsdlogVIX = datastats(dlogVIX);
skewdlogVIX = skewness(dlogVIX);
kurdlogVIX = kurtosis(dlogVIX);

figure('Name','DLogVIX Histogram')
histogram(dlogVIX)
title('VIX Logreturns Histogram')
xlabel('VIX Logreturns')
ylabel('Number of observations')
hold on
histfit(dlogVIX) % distr. normale
hold off

figure('Name','QQ plot VIX Logreturns')

```

```

qqplot(dlogVIX)
title('QQ Plot of VIX Logreturns versus Standard Normal')
xlabel('Standard Normal Quantiles')
ylabel('VIX Logreturns Quantiles')

% Data la leggera asimmetria positiva e la leptocurtosi riscontrate è
% meglio utilizzare la distribuzione t di Student.

N = length(dlogVIX);

Model1 = garch(1,1);
Model1.Distribution = "Gaussian";
[EstModel1,EstParamCovm1,logLM(1)] = estimate(Model1,dlogVIX);

numParams(1) = sum(any(EstParamCovm1)); % numero dei parametri fittati

Model2 = egarch(1,1);
Model2.Distribution = "Gaussian";
[EstModel2,EstParamCovm2,logLM(2)] = estimate(Model2,dlogVIX);

numParams(2) = sum(any(EstParamCovm2));

Model3 = gjr(1,1);
Model3.Distribution = "Gaussian";
[EstModel3,EstParamCovm3,logLM(3)] = estimate(Model3,dlogVIX);

numParams(3) = sum(any(EstParamCovm3));

Model4 = garch(1,1);
Model4.Distribution = "t";
[EstModel4,EstParamCovm4,logLM(4)] = estimate(Model4,dlogVIX);

numParams(4) = sum(any(EstParamCovm4));

Model5 = egarch(1,1);
Model5.Distribution = "t";
[EstModel5,EstParamCovm5,logLM(5)] = estimate(Model5,dlogVIX);

numParams(5) = sum(any(EstParamCovm5));

Model6 = gjr(1,1);
Model6.Distribution = "t";
[EstModel6,EstParamCovm6,logLM(6)] = estimate(Model6,dlogVIX);

numParams(6) = sum(any(EstParamCovm6));

[aic,bic] = aicbic(logLM,numParams,N);

% La scelta dell' eGARCH(1,1) con distribuzione t è dettata dal bic più
% basso

Mdl1 = egarch('GARCHLags',1,'ARCHLags',1);
Mdl1.Distribution = "t";
[EstMdl1,estParamCov1,logL1] = estimate(Mdl1,dlogVIX);

condVar = infer(EstMdl1,dlogVIX);
condVol = sqrt(condVar);

figure('Name','VIX Logreturns and inferred volatility')
plot(dlogVIX)
xlim([0,length(dlogVIX)])

```

```

hold on
plot(condVol)
hold off
title('VIX Logreturns and inferred volatility')
legend('VIX Logreturns', 'Inferred volatility', 'Location', 'northwest')

stdResids = dlogVIX./condVol; % residui standardizzati
% a dlogVIX andrebbe sottratta la sua media ma dato che le rilevazioni sono
% giornaliere la media è molto prossima a 0.
squaredStdResids = stdResids.^2;

figure('Name', 'ACF stdResids&squaredStdResids')
subplot(2,1,1)
autocorr(stdResids)
title('ACF:stdResids')
subplot(2,1,2)
autocorr(squaredStdResids)
title('ACF:squaredStdResids')
% Non c'è correlazione seriale nei residui quadrati

numObs = numel(dlogVIX); % dimensione del campione
numPaths = 100; % numero di cammini simulati
rng(1);
[VSIM,YSIM] = simulate(EstMdl1,numObs, 'NumPaths', numPaths);

% Plot della media e dei percentili (99% e 1%) dei cammini simulati.
VSIMBar = mean(VSIM,2);
VSIMCI = quantile(VSIM, [0.01 0.99],2);
YSIMBar = mean(YSIM,2);
YSIMCI = quantile(YSIM, [0.01 0.99],2);

figure
subplot(2,1,1)
plot(tttt(2:end),VSIM, 'Color', [.75, .55, .75]);
hold on
plot(tttt(2:end),VSIMBar, 'c--', 'LineWidth', 1.5);
plot(tttt(2:end),VSIMCI, 'b--', 'LineWidth', 1.5);
hold off
title('Simulated Conditional Variances')
ylabel('Conditional Variances')
xlabel('Years')
subplot(2,1,2)
g1 = plot(tttt(2:end),YSIM, 'Color', [.75, .55, .75]);
hold on
g2 = plot(tttt(2:end),YSIMBar, 'c--', 'LineWidth', 1.5);
g3 = plot(tttt(2:end),YSIMCI, 'b--', 'LineWidth', 1.5);
hold off
title('Simulated Log Returns')
ylabel('Log Returns')
xlabel('Years')
legend([g1(1) g2 g3(1)], {'Simulated path' 'Mean' 'Confidence bounds'}, ...
'FontSize', 7, 'Location', 'Best');

model = arima('ARLags',1, 'MALags',1, 'Variance', egarch(1,1), ...
'Distribution', 't'); % distribuzione t di Student
Estmodel = estimate(model, dlogVIX);

[E0,V0] = infer(Estmodel, dlogVIX);

[Y1, YMSE1, V] = forecast(Estmodel, 228, 'E0', E0, 'V0', V0);
upper1 = Y1 + 1.96*sqrt(YMSE1); % livello di confidenza del 95%
lower1 = Y1 - 1.96*sqrt(YMSE1);

```

```

figure
subplot(2,1,1)
plot(dlogVIX, 'Color', [.15, .75, .75])
hold on
plot(N+1:N+228, Y1, 'r', 'LineWidth', 1.5)
plot(N+1:N+228, [upper1, lower1], 'b--', 'LineWidth', 1.5)
xlim([3000, N+228])
title('Forecasted Log Returns')
hold off
subplot(2,1,2)
plot(V0, 'Color', [.15, .75, .75])
hold on
plot(N+1:N+228, V, 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlim([3000, N+228])
title('Forecasted Conditional Variances')
hold off

% Forecast sui logreturns e confronto con le realizzazioni della serie di
% 229 giorni

T = length(dlogVIX);

Mdl2 = arima('ARLags', 1, 'MALags', 1, 'Variance', egarch(1, 1), ...
'Distribution', 't');
EstMdl2 = estimate(Mdl2, dlogVIX);
[e00, v00] = infer(EstMdl2, dlogVIX);

rng 'default';
[y, e, v1] = simulate(EstMdl2, 228, 'NumPaths', 30, ...
'Y0', dlogVIX, 'E0', e00, 'V0', v00);

figure
subplot(2,1,1)
plot(dlogVIX)
hold on
plot(T+1:T+228, y)
xlim([6500, T+228])
title('Simulated Log Returns')
plot(T+1:T+228, diff(log(VIXJul2018May2019close)), 'c.')
subplot(2,1,2)
plot(v00)
hold on
plot(T+1:T+228, v1)
xlim([6500, T+228])
title('Simulated Conditional Variances')
hold off

figure
plot(e./sqrt(v1))
xlim([0, 1000])
title('Simulated Standardized Innovations') % innovations == residuals
% Il modello fittato assume che i residui standardizzati seguano una
% distribuzione t di Student standardizzata. Le innovazioni simulate hanno,
% così, valori maggiori rispetto a quanto ci si sarebbe atteso con una
% distribuzione Gaussiana.

for timeahead = 1:228
    for psim = 1:30
        if timeahead == 1
            ylogprice(timeahead, psim) = y(timeahead, psim) + logVIX(end);
        else
            ylogprice(timeahead, psim) = y(timeahead, psim) + ...
                ylogprice(timeahead-1, psim);
        end
    end
end

```

```

    end
end
yprice = exp(ylogprice);

figure
plot(VIXclose, 'black')
hold on
plot(T+2:T+229, yprice)
xlim([7000, T+229])
title('Simulated Prices')
plot(T+2:T+229, VIXJul2018May2019close(1:end-1), 'black', 'LineWidth', 1.5)

%% CAPITOLO 3
clear all;
close all;
clc;

% Importo i dati.
data1 = importdata('VIX.xlsx');

% Estraggo i prezzi di chiusura del VIX.
VIXclosemv = data1.data.VIX(:,1);
VIXclose = fillmissing(VIXclosemv, 'previous');
VIX2007_2017 = VIXclose(4288:7056);
VIXJul2018May2019close = data1.data.VIX2019(:,1);

% Estraggo le relative date.
tttt = datetime(data1.textdata.VIX(:,1));
TTTT = datetime(data1.textdata.VIX2019);

% Setto le rolling windows a diverse dimensioni.
window_size1 = 20;
window_size2 = 50;
window_size3 = 100;
window_size4 = 200;

% Simple MA calcolati su diverse finestre temporali.
sMA1 = tsmovavg(VIX2007_2017, 's', window_size1, 1);
sMA2 = tsmovavg(VIX2007_2017, 's', window_size2, 1);
sMA3 = tsmovavg(VIX2007_2017, 's', window_size3, 1);
sMA4 = tsmovavg(VIX2007_2017, 's', window_size4, 1);

figure
plot(tttt(4288:7056), VIX2007_2017, 'Color', [.75, .75, .75])
hold on
plot(tttt(4288:7056), sMA1, ...
      tttt(4288:7056), sMA2, ...
      tttt(4288:7056), sMA3, ...
      tttt(4288:7056), sMA4)
datetick
legend('VIX Price', 'Simple MA(20)', 'Simple MA(50)', 'Simple MA(100)', ...
      'Simple MA(200)', 'Location', 'NorthEast')
title('VIX Price & Simple (Equally Weighted) Moving Averages')
xlabel('Years')
hold off

% Costruisco un intervallo di confidenza con il moving average (nel caso in
% analisi un MA(20)).
% Considerando, per ogni tempo t, il prezzo di chiusura del VIX
% contestualmente all'intervallo di confidenza, genero un'aspettativa per
% il periodo t+1.
% Se la serie è al di sopra del max i.c. allora mi aspetto un ribasso,
% se è al di sotto del min i.c. un rialzo, se è compresa fra i due bound il
% modello non genera alcuna aspettativa.

```



```

% Confrontando le aspettative (nulle, di rialzo o ribasso)
% con le effettive variazioni del VIX, date dalla differenza fra le
% realizzazioni al tempo t+1 e al tempo t, studio il potere segnaletico
% del modello.

SMA5 = tsmovavg(VIXJul2018May2019close,'s',window_size1,1);
maxic = SMA5+1.96*std(VIXclose)/sqrt(length(VIXJul2018May2019close));
minic = SMA5-1.96*std(VIXclose)/sqrt(length(VIXJul2018May2019close));

% L'obiettivo del modello è di prevedere. Pertanto a partire da un
% determinato giorno t, con il solo ausilio dei dati presenti, deve essere
% possibile avere aspettative per il giorno t+1, e così via per i giorni
% successivi.
% SMA5 prevede giornalmente un valore moving average, fatta eccezione
% per i primi 19 giorni (data la finestra temporale settata a 20 giorni);
% la deviazione standard storica del VIX è stimabile attraverso un campione
% passato sufficientemente numeroso e la lunghezza del campione utilizzato
% per calcolare sqrt(length(VIXJul2018May2019close)) può essere vista come
% l'orizzonte temporale per cui si vuole prevedere l'andamento del VIX
% one-step ahead, o in altri termini come i giorni di trading su cui si
% vuole sviluppare una strategia a partire dal modello.

figure
plot(TTTT,maxic,TTTT,minic)
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close)
title('i.c. & VIXJul2018May2019')
xlabel('Time')
hold off

for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)
    if VIXJul2018May2019close(i) > maxic(i)
        B(i) = -1; % mi aspetto una riduzione del VIX il giorno seguente
    elseif VIXJul2018May2019close(i) < minic(i)
        B(i) = 1; % mi aspetto un rialzo del VIX il giorno seguente
    else
        B(i) = 0; % non ho alcun segnale
    end
end

for ii = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    A(ii) = VIXJul2018May2019close(ii+1)-VIXJul2018May2019close(ii);
    if A(ii) > 0
        A(ii) = 1; % 1 indica il rialzo rispetto al giorno precedente
    elseif A(ii) < 0
        A(ii) = -1; % -1 indica il ribasso rispetto al giorno precedente
    else
        A(ii) = 0; % 0 indica nessuna variazione
    end
end

length(find(A==1))
length(find(A==-1))
length(find(A==0)) % Ho un elemento di A pari a 0 in posizione 118. Ciò
% perchè il VIX ha prezzo 25.58 in posizione 118 e 119.
% Essendo, in posizione 118, il valore del VIX superiore al maxic, che
% vale 21.9159, il modello prevede un ribasso errando.

vector = A(1:end)+B(1:end-1); % Somma fra le n-1 variazioni del campione
% di dimensione n e le n-1 aspettative future del modello.

% Il numero di osservazioni in vector in cui ho +2 e -2 rappresentano
% rispettivamente i rialzi e i ribassi correttamente predetti dal modello.

```

```

prob_trueforecast = length(find((abs(vector))==2))/length(vector);
% Probabilità di forecast esatto non corretta per i casi in cui il modello
% non ha capacità predittiva (ossia nei primi 19 casi, avendo una
% rolling window settata a 20 giorni, e in tutti i casi in cui il VIX è
% compreso fra min i.c. e max i.c.).

prob_wrongforecast = length((find((abs(vector))==0))+1)/length(vector);
% Il modello incorre in un errore di previsione ogni qual volta prevede 1
% e accade -1 o prevede -1 e accade 1, ma anche nell'unico caso in cui la
% variazione è nulla (0) e il modello prevede -1.

prob_nullexpectations = length((find((abs(vector))==1))-1)/length(vector);
% La probabilità che il modello non abbia capacità predittiva è pari al
% 45.18% (trovo i casi in cui abs(vector)=1, ossia quelli in cui la
% differenza fra le realizzazioni (+1/-1) e le aspettative del modello (0)
% è, in valore assoluto, pari a 1).
% Devo escludere, però, l'unico caso in cui il modello prevede -1 e in
% realtà la variazione è nulla, poichè sebbene l'output sia
% -1 (e pertanto 1 in valore assoluto) si tratta di un caso di errore.

properprob_trueforecast = length(find((abs(vector))==2))/...
    (length(vector)-0.4518*length(vector));

properprob_wrongforecast = length((find((abs(vector))==0))+1)/...
    (length(vector)-0.4518*length(vector));
% Per correggere le probabilità elimino dal novero i casi di
% rialzo/ribasso in presenza di un modello privo (nel 45.18% dei
% casi) di capacità discriminante.

% Controlli (devono essere pari a 1).
p1 = prob_wrongforecast+prob_nullexpectations+prob_trueforecast;
p2 = properprob_wrongforecast+properprob_trueforecast;

% EWMA calcolati su diverse finestre temporali.
EWMA1 = tsmovavg(VIX2007_2017,'e',window_size1,1);
EWMA2 = tsmovavg(VIX2007_2017,'e',window_size2,1);
EWMA3 = tsmovavg(VIX2007_2017,'e',window_size3,1);
EWMA4 = tsmovavg(VIX2007_2017,'e',window_size4,1);

figure
plot(tttt(4288:7056),VIX2007_2017,'Color',[.75,.75,.75])
hold on
plot(tttt(4288:7056),EWMA1,...
    tttt(4288:7056),EWMA2,...
    tttt(4288:7056),EWMA3,...
    tttt(4288:7056),EWMA4)
datetick
legend('VIX Price','EWMA(20)','EWMA(50)','EWMA(100)',...
    'EWMA(200)','Location','NorthEast')
title('VIX Price & Exponential Weighted Moving Averages')
xlabel('Time')
xlabel('Years')

EWMA5 = tsmovavg(VIXJul2018May2019close,'e',window_size1,1);
Emaxic = EWMA5+1.96*std(VIXclose)/sqrt(length(VIXJul2018May2019close));
Eminic = EWMA5-1.96*std(VIXclose)/sqrt(length(VIXJul2018May2019close));
figure
plot(TTTT,Emaxic,TTTT,Eminic)
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close)
hold off

```

```

for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)
    if VIXJul2018May2019close(i) > Emaxic(i)
        ff(i) = -1;
    elseif VIXJul2018May2019close(i) < Eminic(i)
        ff(i) = 1;
    else ff(i) = 0;
    end
end

% Il secondo ciclo è il medesimo del MA.

Evector = A(1:end)+ff(1:end-1);

Eprob_trueforecast = length(find((abs(Evector))==2))/length(Evector);

Eprob_wrongforecast = length((find((abs(Evector))==0))+1)/length(Evector);

Eprob_nullexpectations = length((find((abs(Evector))==1))-1)/...
    length(Evector);

Eproperprob_trueforecast = length(find((abs(Evector))==2))/...
    (length(Evector)-0.4693*length(Evector));

Eproperprob_wrongforecast = length((find((abs(Evector))==0))+1)/...
    (length(Evector)-0.4693*length(Evector));

% Controlli (devono essere pari a 1).
p3 = Eprob_wrongforecast+Eprob_nullexpectations+Eprob_trueforecast;
p4 = Eproperprob_wrongforecast+Eproperprob_trueforecast;

% Crossovers.
figure
plot(tttt(4288:5797),VIXclose(4288:5797),'g','LineWidth',1)
hold on
plot(tttt(4288:5797),tsmovavg(VIXclose(4288:5797),'s',window_size4,1),...
    'LineWidth',1)
datetick
legend('VIX Price','SMA(200)','Location','NorthEast')
title('VIX Price & SMA(200)')
xlabel('Time')
hold off

% Death cross e golden cross.
figure
plot(tttt(4288:7056),VIX2007_2017,'k','LineWidth',0.4)
hold on
plot(tttt(4288:7056),sMA2,tttt(4288:7056),sMA4,'LineWidth',1.2)
datetick
legend('VIX Price','SMA(50)',...
    'SMA(200)','Location','NorthEast')
title('Simple Moving Averages: longer vs shorter')
xlabel('Time')
hold off

%% CAPITOLO 4
clear all;
close all;
clc;

% PROCESSO DI ORNSTEIN-UHLENBECK

```

```

% Importo i dati.
data1 = importdata('VIX.xlsx');

% Estraggo i prezzi di chiusura del VIX.
VIXclosemv = data1.data.VIX(:,1);
VIXclose = fillmissing(VIXclosemv, 'previous');
VIXJul2018May2019close = data1.data.VIX2019(:,1);

% Estraggo le relative date.
tttt = datetime(data1.textdata.VIX(:,1));
TTTT = datetime(data1.textdata.VIX2019);

% Calibrazione modello O-U.
x = log(VIXclose); % logaritmo dei prezzi di chiusura
dx = diff(x); % vettore differenze prime(log(VIXclose_t+1)-log(VIXclose_t))
dt = 1/250; % incremento temporale (250 osservazioni in un trading year)
dxdt = dx/dt;
x(end) = []; % affinché il numero di elementi in x e dxdt coincida

% Fitto un trend lineare per stimare i parametri di mean reversion.
coef = polyfit(x, dxdt, 1); % la funzione polyfit restituisce i coefficienti
% di un polinomio p(x) di grado n=1, che è il più adatto (per il metodo dei
% minimi quadrati) per i dati in dxdt.
res = dxdt - polyval(coef, x); % calcolo i residui come differenza fra i
% valori di dxdt ed i valori del polinomio p in corrispondenza di ogni x

theta = -coef(1); % mean-reversion rate (velocità di convergenza a mu)
mu = coef(2)/theta; % media asintotica del processo
sigma = std(res)*sqrt(dt); %volatilità istantanea

% Simulo l'OU model a partire dall'ultima osservazione del log(VIXclose).
OUmodel = hmv(theta,mu,sigma, 'StartState',x(end));

NTrials = 10000; % numero di cammini simulati
NSteps = 228; % numero di passi nel futuro

simX = simulate(OUmodel, NSteps, 'NTrials', NTrials, 'DeltaTime', dt);

simX = squeeze(simX); % squeeze rimuove la dimensione ridondante (da 229*1*10000 a
229*10000)

vettore = VIXclose(2:end)-VIXclose(1:end-1); % vettore delle 7180 variazioni su 7181
osservazioni

% Studio la componente storica di salto considerando salti tutte le variazioni
% giornaliere positive superiori a 4.6032 (a seconda del valore scelto di
% default varia anche il profilo delle simulazioni). L'obiettivo è di
% scegliere un valore che renda le simulazioni quanto più fedeli possibili
% alle traiettorie disegnate dai prezzi storici di chiusura del VIX.
vettore(vettore<(mean(vettore)+3*std(vettore))) = []; % filtro i salti

prob = length(vettore)/7180; % il numero di salti per campione, essendo la
% numerosità del campione elevata, approssima alla probabilità di salto,
% che coincide con il lambda della Poisson

% Distribuzioni di probabilità di salto.
bernoulli = binornd(1,prob*ones(229,10000)); %Bernoulli (0,1) con probabilità prob
(matrice 229x10000)
poisson = poisrnd(prob*ones(229,10000)); %Poisson

% Dimensione dei salti.

```

```

dimofjump1 = random('Exponential',mean(vettore),229,10000);
dimofjump2 = normrnd(mean(vettore),std(vettore),229,10000);
% Ipotizzo che i salti siano esponenziali o normali; la media e la std
% sono estrapolate dai salti storici del VIX.

% Componenti di salto.
compofjump1 = bernoulli.*dimofjump1;
compofjump2 = poisson.*dimofjump1;
compofjump3 = bernoulli.*dimofjump2;
compofjump4 = poisson.*dimofjump2;

simY = exp(simX); % uso exp perchè le simulazioni sono implementate sul log(VIXclose)
simYplusjump1 = simY+compofjump1;
simYplusjump2 = simY+compofjump2;
simYplusjump3 = simY+compofjump3;
simYplusjump4 = simY+compofjump4;

% Plot delle diverse simulazioni.
figure('Name','OU Model simulations vs VIX')
title('OU Model simulations vs VIX')
plot(tttt(end-60:end), VIXclose(end-60:end),TTTT, simY(1:229,1:100));
datetick;
xlabel('Date');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
hold off

figure('Name','OU Model simulations vs VIX')
title('OU Model simulations vs VIX')
plot(1:61, VIXclose(end-60:end),62:290, simY(1:229,1:5));
xlabel('Time');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(62:290,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
nsteps=1:290;
w= mean(VIXclose)*ones(size(nsteps));
line(nsteps,w)
hold off

figure('Name','OU Model plus Exponential jumps (with Bernoullian occurance of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Exponential jumps (with Bernoullian occurance of jump) simulations
vs VIX')
plot(tttt(end-60:end),VIXclose(end-60:end),TTTT,simYplusjump1(1:229,1:100));
datetick;
xlabel('Date');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
hold off

figure('Name','OU Model plus Exponential jumps (with Bernoullian occurance of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Exponential jumps (with Bernoullian occurance of jump) simulations
vs VIX')
plot(1:61, VIXclose(end-60:end),62:290, simYplusjump1(1:229,1:5));
xlabel('Time');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(62:290,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
line(nsteps,w)
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Exponential jumps (with Poissonian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Exponential jumps (with Poissonian occurrence of jump) simulations
vs VIX')
plot(tttt(end-60:end), VIXclose(end-60:end),TTTT, simYplusjump2(1:229,1:100));
datetick;
xlabel('Date');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Exponential jumps (with Poissonian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Exponential jumps (with Poissonian occurrence of jump) simulations
vs VIX')
plot(1:61, VIXclose(end-60:end),62:290, simYplusjump2(1:229,1:5));
xlabel('Time');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(62:290,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
line(nsteps,w)
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Normal jumps (with Bernoullian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Normal jumps (with Bernoullian occurrence of jump) simulations vs
VIX')
plot(tttt(end-60:end), VIXclose(end-60:end),TTTT, simYplusjump3(1:229,1:100));
datetick;
xlabel('Date');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Normal jumps (with Bernoullian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Normal jumps (with Bernoullian occurrence of jump) simulations vs
VIX')
plot(1:61, VIXclose(end-60:end),62:290, simYplusjump3(1:229,1:5));
xlabel('Time');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(62:290,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
line(nsteps,w)
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Normal jumps (with Poissonian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Normal jumps (with Poissonian occurrence of jump) simulations vs
VIX')
plot(tttt(end-60:end), VIXclose(end-60:end),TTTT, simYplusjump4(1:229,1:100));
datetick;
xlabel('Date');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
hold off

```

```

figure('Name','OU Model plus Normal jumps (with Poissonian occurrence of jump)
simulations vs VIX')
title('OU Model plus Normal jumps (with Poissonian occurrence of jump) simulations vs
VIX')

```

```

plot(1:61, VIXclose(end-60:end),62:290, simYplusjump4(1:229,1:5));
xlabel('Time');
ylabel('VIX Prices & Prices simulations');
hold on
plot(62:290,VIXJul2018May2019close,'-.black','LineWidth',1.5);
line(nsteps,w)
hold off

%% Paragrafo 4.4

% CONFRONTO FRA OU MODEL E MONTE CARLO SU ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distr.'t'

% runnare prima CAPITOLO 4

TT = length(dx);

Mdl3 = arima('ARLags',1,'MALags',1,'Variance',egarch(1,1),...
'Distribution','t');
EstMdl3 = estimate(Mdl3,dx);
[e000,v000] = infer(EstMdl3,dx);

rng 'default';
[yy,ee,v11] = simulate(EstMdl3,229,'NumPaths',10000,...
'Y0',dx,'E0',e000,'V0',v000);

for timeahead = 1:229
    for psimn = 1:10000
        if timeahead == 1
            yylogprice(timeahead,psimn) = yy(timeahead,psimn)+x(end);
        else
            yylogprice(timeahead,psimn) = yy(timeahead,psimn)+...
            yylogprice(timeahead-1,psimn);
        end
    end
end
yyprice = exp(yylogprice);

figure
plot(VIXclose,'black')
hold on
plot(TT+2:TT+230,yyprice)
xlim([7000,TT+230])
title('Simulated Prices with Monte Carlo on ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1), distr."t" vs
VIX','FontSize', 8.5)
plot(TT+2:TT+230,VIXJul2018May2019close,'black','LineWidth',1.5)

figure
plot(VIXclose,'black')
hold on
plot(TT+2:TT+230,simYplusjump4)
xlim([7000,TT+230])
title('Simulated Prices with OU Model plus Normal jumps (with Poissonian occurance of
jump) vs VIX','FontSize', 8.5)
plot(TT+2:TT+230,VIXJul2018May2019close,'black','LineWidth',1.5)

mean(VIXclose)
max(VIXclose)
min(VIXclose)
std(VIXclose)
skewness(VIXclose)
kurtosis(VIXclose)
quantile(VIXclose, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

```

```

mean(VIXJul2018May2019close)
max(VIXJul2018May2019close)
min(VIXJul2018May2019close)
std(VIXJul2018May2019close)
skewness(VIXJul2018May2019close)
kurtosis(VIXJul2018May2019close)
quantile(VIXJul2018May2019close, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(simYplusjump4))
max(max(simYplusjump4))
min(min(simYplusjump4))
mean(std(simYplusjump4))
mean(skewness(simYplusjump4))
mean(kurtosis(simYplusjump4))
quantile(mean(simYplusjump4), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(yyprice))
max(max(yyprice))
min(min(yyprice))
mean(std(yyprice))
mean(skewness(yyprice))
mean(kurtosis(yyprice))
quantile(mean(yyprice), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

%% Paragrafo 5.2,5.3

% STRATEGIE DI TRADING
% Per il funzionamento di questo codice runnare prima il codice CAPITOLO 3.

% Le strategie sono daily, apro una posizione un giorno
% e la chiudo il giorno dopo con un'operazione di segno opposto.

% Ipotizzo che:
% 1)I prezzi di acquisto/vendita al tempo t siano pari al prezzo di
% chiusura del VXX al tempo t( ciò è assimilabile a una sola operazione di
% trading giornaliera in prossimità della chiusura del mercato).
% 2)Non ci siano commissioni nè costi di transazione.
% 3)Si abbia a disposizione un capitale e ogni giorno la
% quantità di euro necessaria per investire, ossia che anche a seguito di
% perdite giornaliere ingenti si possa ricostituire questo capitale
% iniziale per far fronte all'operatività del giorno successivo.
% Nella realtà operativa, in caso di vendita allo scoperto(aspettativa di
% trarre profitto da un declino nel prezzo), quando si registrano delle
% perdite(nel caso di rialzo dei prezzi) e pertanto il capitale
% diminuisce, si rischia di incorrere, a partire da una certa soglia,
% in una margin call(richiesta di reintegrazione dei margini).
% 4)Si possano effettuare vendite allo scoperto senza interessi da
% corrispondere al datore del prestito.

% Importo i dati.
data2 = importdata('VXX.xlsx');

% Estraggo i prezzi di chiusura del VXX dal 2 luglio 2018 al 30
% maggio 2019.
VXXJul2018May2019close = data2.data.VXX2019(:,1);

% Dal plot noto che l'ETN VXX segue quasi fedelmente le dinamiche del VIX.
figure('Name','VIX-VXX')
yyaxis left
plot(TTTT,VIXJul2018May2019close)
yyaxis right
plot(TTTT,VXXJul2018May2019close)
datetick

```



```

xlabel({'Time', '(in months)'}, 'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', 'Color', ...
      'black')
ylabel('Prices', 'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', 'Color', 'black')
title('VIX-VXX')
legend('VIX', 'VXX')

% Questa regressione serve per comprendere quanto effettivamente VIX e
% VXX si muovano nella stessa direzione e allo stesso tempo per visionare
% la diversa intensità di variazione. Sarà utile inoltre in fase di
% backtesting, come dimostrato nel codice backtestingtrading.m
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    dpVIX(i) = (VIXJul2018May2019close(i)-VIXJul2018May2019close(i+1))/...
              VIXJul2018May2019close(i);
    dpVXX(i) = (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
              VXXJul2018May2019close(i);
end
regVIX_VXX = fitlm(dpVIX,dpVXX)
% La regressione semplice con X=dpVIX e Y=dpVXX ha:
% R=0.92113,R-squared=0.848
% equazione retta: Y=0.43*X+0.002
figure
plotregression(dpVIX,dpVXX,'one')
grid on
grid minor

% PRIMA STRATEGIA

% N.B.: Investo lo stesso capitale iniziale di 100k per tutte
% le operazioni.

for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == -1 % se il modello prevede una riduzione del VIX il giorno
        % seguente
        op1(i) = 100000* ...
                (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
                VXXJul2018May2019close(i);
        % vendo oggi allo scoperto e acquisto domani con l'aspettativa
        % di un prezzo più basso
    else
        op1(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == 1 % se il modello prevede un aumento del VIX il giorno
        % seguente
        op2(i) = -100000* ...
                (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
                VXXJul2018May2019close(i);
        % acquisto oggi e vendo domani con l'aspettativa di un prezzo più
        % alto
    else
        op2(i) = 0;
    end
end
% op1 e op2 sono i vettori che contengono i profitti e le perdite ottenute,
% calcolati sulle variazioni giornaliere del VXX

totalPL1 = sum(op1)+sum(op2); % profit/loss totale della strategia 1
dailyreturn1 = op1/100000+op2/100000; % rendimento giornaliero percentuale
% della strategia 1
totalreturn1 = sum(op1/100000)+sum(op2/100000); % rendimento cumulato
% percentuale della strategia 1
dailyaveragereturn1 = mean(dailyreturn1); % rendimento medio giornaliero
% (in termini percentuali) della strategia 1 (calcolato sull'intera durata

```

```

% della strategia, pari alle 228 variazioni)
averagereturnoperations1 = totalreturn1/...
    (length(find(op1~=0))+length(find(op2~=0))); % rendimento medio
% percentuale calcolato solo sulle operazioni messe in essere (per la
% precisione 166 operazioni,calcolate come
% (length(find(op1~=0))+length(find(op2~=0)))

figure('Name','Daily op1&op2 profit/loss')
bar(op1,'b')
hold on
bar(op2,'g')
hold off

dailyPL1 = op1+op2; % vettore profit/loss giornaliera
figure('Name','Daily profit/loss strategy 1')
bar(dailyPL1)

mean(dailyreturn1)
std(dailyreturn1)
skewness(dailyreturn1)
kurtosis(dailyreturn1)
min(dailyreturn1)
max(dailyreturn1)
quantile(dailyreturn1, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

cumret1 = 0;
for cc = 1:228-1
    cumret1(cc+1) = op1(cc+1)/100000+op2(cc+1)/100000+cumret1(cc);
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 1')
plot(cumret1*100)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 1')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')

% SECONDA STRATEGIA

% Strategia con quantità di capitale investita variabile proporzionale
% alla distanza (in valore assoluto) del VIX rispetto alla sua media
% storica.
% La quantità di capitale investita sarà tanto maggiore quanto maggiore
% è la distanza.
% Questa strategia nasce dalla capacità predittiva del modello con medie
% mobili e dalla proprietà di mean-reversion del VIX (più sono lontano in t
% dalla media storica (=19.3180) maggiore è la probabilità di tendervi in t+1).
% Ai fini della strategia di trading, quando il modello a medie mobili
% prevede un rialzo e il VIX è al di sopra della media storica non
% scommetto sul rialzo perchè per la mean-reversion dovrebbe tendere alla
% sua media (e quindi al ribasso); quando il modello a medie mobili prevede
% un ribasso e il VIX è al di sotto della media storica non scommetto sul
% ribasso perchè per la mean-reversion dovrebbe tendere alla sua media
% (e quindi al rialzo). Investo nei restanti casi, ossia quando si verifica
% una delle seguenti situazioni:
% 1)Il modello prevede un rialzo e il VIX è al di sotto della sua media
% storica.
% 2)Il modello prevede un ribasso e il VIX è al di sopra della sua media
% storica.

% Caveat: non investo in 3 casi:

```

```

% 1)quando il modello non ha aspettative per il giorno seguente;
% 2)quando il modello a medie mobili prevede un ribasso e il VIX è al
% di sotto della media storica (non scommetto sul ribasso perchè per la
% mean-reversion dovrebbe tendere alla sua media (e quindi al rialzo));
% 3)quando il modello a medie mobili prevede un rialzo e il VIX è al
% di sopra della media storica (non scommetto sul rialzo perchè per la
% mean-reversion dovrebbe tendere alla sua media (e quindi al ribasso));

% Calcolo delle distanze e delle quantità (quote del capitale da
% investire).
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == -1 && VIXJul2018May2019close(i)>mean(VIXclose)
        distance1(i) = abs(VIXJul2018May2019close(i)-mean(VIXclose));
    else
        distance1(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == 1 && VIXJul2018May2019close(i)<mean(VIXclose)
        distance2(i) = abs(VIXJul2018May2019close(i)-mean(VIXclose));
    else
        distance2(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    quantity1(i) = distance1(i)*100000;
    quantity2(i) = distance2(i)*100000;
end

% strategia sulla previsione di ribasso
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == -1 && VIXJul2018May2019close(i)>=mean(VIXclose)
        op3(i) = quantity1(i)*(VXXJul2018May2019close(i)- ...
            VXXJul2018May2019close(i+1))/VXXJul2018May2019close(i);
    else
        op3(i) =0;
    end
end
% strategia sulla previsione di rialzo
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == 1 && VIXJul2018May2019close(i)<mean(VIXclose)
        op4(i) = -quantity2(i)*(VXXJul2018May2019close(i)- ...
            VXXJul2018May2019close(i+1))/VXXJul2018May2019close(i);
    else
        op4(i) = 0;
    end
end
% op3 e op4 sono i vettori che contengono i profitti e le perdite ottenute,
% calcolati sulle variazioni giornaliere del VXX

totalPL2 = sum(op3)+sum(op4); % profit/loss totale della strategia 2
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if quantity1(i)~=0 && quantity2(i)~=0
        dailyreturn2(i) = op3(i)/quantity1(i)+op4(i)/quantity2(i);
    elseif quantity1(i)~=0 && quantity2(i)==0
        dailyreturn2(i) = op3(i)/quantity1(i);
    elseif quantity1(i)==0 && quantity2(i)~=0
        dailyreturn2(i) = op4(i)/quantity2(i);
    else % ossia per quantity1(i)==quantity2(i)==0
        dailyreturn2(i) = 0;
    end
end
totalreturn2 = sum(op3/quantity1)+sum(op4/quantity2); % rendimento cumulato
% percentuale della strategia 2
dailyaveragereturn2 = mean(dailyreturn2); % rendimento medio giornaliero

```

```

% (in termini percentuali) della strategia 2 (calcolato sull'intera durata
% della strategia, pari alle 228 variazioni)
averagereturnoperations2 = totalreturn2/...
    (length(find(op3~=0))+length(find(op4~=0)));
% rendimento medio percentuale calcolato solo sulle operazioni messe in
% essere ( per la precisione 117 operazioni,calcolate come
% (length(find(op3~=0))+length(find(op4~=0)))

figure('Name','Daily op3&op4 profit/loss')
bar(op3,'b')
hold on
bar(op4,'g')
hold off

dailyPL2 = op3+op4; % vettore profit/loss giornaliera
figure('Name','Daily profit/loss strategy 2')
bar(dailyPL2)

mean(dailyreturn2)
std(dailyreturn2)
skewness(dailyreturn2)
kurtosis(dailyreturn2)
min(dailyreturn2)
max(dailyreturn2)
quantile(dailyreturn2, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

cumret2 = 0;
for cc = 1:228-1
    cumret2(cc+1) = sum(dailyreturn2(1:cc+1));
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 2')
plot(cumret2*100)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 2')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'),'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')

% Le strategia 1-2 sperimentano ingenti perdite quando contemporaneamente si
% verifica:
% 1)un errore di previsione (che causa una perdita)
% 2)che il VIX sperimenta un repentino aumento/calò di volatilità (che determina
% la magnitudo della perdita)

% TERZA STRATEGIA

% Qualche considerazione preliminare:
% Normalmente le varie scadenze di futures sul VIX sono in contango, ossia
% il valore del future aumenta al crescere della scadenza. Per catturare il
% contango è efficace la strategia di shortare VXX.

for i = 1:length(VXXJul2018May2019close)-1
    ss(i) = 100000* ...
        (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
        VXXJul2018May2019close(i);
end

totalPL3 = sum(ss); % profit/loss totale della strategia 3
dailyreturn3 = ss/100000; % rendimento giornaliero percentuale
% della strategia 3
totalreturn3 = sum(ss/100000); % rendimento cumulato percentuale della
% strategia 3

```

```

dailyaveragereturn3 = mean(dailyreturn3); % rendimento medio giornaliero
% (in termini percentuali) della strategia 3 (calcolato sull'intera durata
% della strategia, pari alle 228 variazioni)
averagereturnoperations3 = totalreturn3/228; % rendimento medio
% percentuale calcolato sulle operazioni messe in essere, in questo
% caso 228

dailyPL3 = ss; % vettore profit/loss giornaliera
figure('Name','Daily profit/loss strategy 3')
bar(dailyPL3)

mean(dailyreturn3)
std(dailyreturn3)
skewness(dailyreturn3)
kurtosis(dailyreturn3)
min(dailyreturn3)
max(dailyreturn3)
quantile(dailyreturn3, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

cumret3 = 0;
for cc = 1:228-1
    cumret3(cc+1) = ss(cc+1)/100000+cumret3(cc);
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 3')
plot(cumret3*100)
title('Daily cumulative returns strategy 3')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')

% La terza strategia è molto sensibile a variazioni positive repentine
% del VIX.

% QUARTA STRATEGIA

% selling solo in periodi di bassa volatilità(VIX<15) così da
% sfruttare la struttura fortemente in contango del VXX shortando daily,
% sebbene fissando profitti limitati, attestandosi il VIX a valori molto
% contenuti. In questo modo non sono esposto agli spikes di volatilità, ma
% solo ad oscillazioni al rialzo contenute. Inoltre, per evitare
% di essere eccessivamente esposto alle oscillazioni al rialzo negozio solo
% quando anche il modello a medie mobili prevede un ribasso.

for i = 1:length(VXXJul2018May2019close)-1
    if VIXJul2018May2019close(i)<15 && B(i)==-1
        sss(i) = 100000* ...
            (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
            VXXJul2018May2019close(i);
    else
        sss(i) = 0;
    end
end

totalPL4 = sum(sss); % profit/loss totale della strategia 4
dailyreturn4 = sss/100000; % rendimento giornaliero percentuale
% della strategia 4
totalreturn4 = sum(sss/100000); % rendimento cumulato percentuale della
% strategia 4
dailyaveragereturn4 = mean(dailyreturn4); % rendimento medio giornaliero
% (in termini percentuali) della strategia 4 (calcolato sull'intera durata
% della strategia, pari alle 228 variazioni)

```

```

dailyPL4 = sss; % vettore profit/loss giornaliera
figure('Name','Daily profit/loss strategy 4')
bar(dailyPL4)

mean(dailyreturn4)
std(dailyreturn4)
skewness(dailyreturn4)
kurtosis(dailyreturn4)
min(dailyreturn4)
max(dailyreturn4)
quantile(dailyreturn4, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

cumret4 = 0;
for cc = 1:228-1
    cumret4(cc+1) = sss(cc+1)/100000+cumret4(cc);
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 4')
plot(cumret4*100)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 4')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')

% QUINTA STRATEGIA(COMBINATA): selling (nei periodi di contenuta
% volatilità ,ossia quando VIX<15 e quando previsto ribasso dal modello),
% strategia modello a medie mobili/mean-reversion (quando VIX>=15))

%per VIX<15
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if VIXJul2018May2019close(i)<15 && B(i)==-1
        ssss(i) = 100000* ...
            (VXXJul2018May2019close(i)-VXXJul2018May2019close(i+1))/...
            VXXJul2018May2019close(i);
    else
        ssss(i) = 0;
    end
end
%per VIX>=15
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == -1 && VIXJul2018May2019close(i)>mean(VIXclose)
        distance3(i) = abs(VIXJul2018May2019close(i)-mean(VIXclose));
    else
        distance3(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == 1 && VIXJul2018May2019close(i)>=15 &&
VIXJul2018May2019close(i)<mean(VIXclose)
        distance4(i) = abs(VIXJul2018May2019close(i)-mean(VIXclose));
    else
        distance4(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    quantity3(i) = distance3(i)*100000;
    quantity4(i) = distance4(i)*100000;
end

for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == -1 && VIXJul2018May2019close(i)>mean(VIXclose)

```

```

        op5(i) = quantity3(i)*(VXXJul2018May2019close(i)- ...
            VXXJul2018May2019close(i+1))/VXXJul2018May2019close(i);
    else
        op5(i) = 0;
    end
end
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if B(i) == 1 && VIXJul2018May2019close(i)>=15 &&
VIXJul2018May2019close(i)<mean(VIXclose)
        op6(i) = -quantity4(i)*(VXXJul2018May2019close(i)- ...
            VXXJul2018May2019close(i+1))/VXXJul2018May2019close(i);
    else
        op6(i) = 0;
    end
end
end

totalPL5 = sum(ssss)+sum(op5)+sum(op6); % profit/loss totale della strategia 5
for i = 1:length(VIXJul2018May2019close)-1
    if quantity3(i) ~= 0 && quantity4(i) ~= 0
        dailyreturn5(i) = ssss(i)/100000+op5(i)/quantity3(i)+op6(i)/quantity4(i);
    elseif quantity3(i) ~= 0 && quantity4(i) == 0
        dailyreturn5(i) = ssss(i)/100000+op5(i)/quantity3(i);
    elseif quantity3(i) == 0 && quantity4(i) ~= 0
        dailyreturn5(i) = ssss(i)/100000+op6(i)/quantity4(i);
    else %ossia per quantity3(i)==quantity4(i)==0
        dailyreturn5(i) = ssss(i)/100000;
    end
end %rendimento giornaliero percentuale della strategia 5
totalreturn5 = sum(dailyreturn5); % rendimento cumulato percentuale della
% strategia 5
dailyaveragereturn5 = mean(dailyreturn5); % rendimento medio giornaliero
% (in termini percentuali) della strategia 5 (calcolato sull'intera durata
% della strategia, pari alle 228 variazioni)

figure('Name','Daily SS&op5&op6 profit/loss')
bar(op5,'b')
hold on
bar(ssss,'g')
hold off

dailyPL5 = ssss+op5+op6; % vettore profit/loss giornaliero
figure('Name','Daily profit/loss strategy 5')
bar(dailyPL5)

mean(dailyreturn5)
std(dailyreturn5)
skewness(dailyreturn5)
kurtosis(dailyreturn5)
min(dailyreturn5)
max(dailyreturn5)
quantile(dailyreturn5, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

cumret5 = 0;
for cc = 1:228-1
    cumret5(cc+1) = dailyreturn5(cc+1)+cumret5(cc);
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 5')
plot(cumret5*100)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 5')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
    'Color','black')

```

```

% Con quest'ultima strategia mi affido al modello quando il mercato è
% volatile mentre shorto giornalmente acquistando il giorno seguente
% nei periodi di bassa volatilità, affidandomi alla struttura fortemente
% in contango dei futures(in quest'ultimo caso, senza considerare le
% perdite a cui sono esposto a causa delle oscillazioni al rialzo
% impreviste del VIX, speriemento una perdita significativa al primo spike
% che si presenta perchè in questa situazione vendo basso al tempo t e
% acquisto a un prezzo molto più alto in t+1, dopodichè la strategia viene
% gestita dal modello perchè rientro nel caso di VIX>=15).

figure('Name','Daily cumulative returns (%) of all strategies')
plot(1:228,cumret1*100,'LineWidth',1.3)
hold on
plot(1:228,cumret2*100,'LineWidth',1.3)
plot(1:228,cumret3*100,'LineWidth',1.3)
plot(1:228,cumret4*100,'LineWidth',1.3)
plot(1:228,cumret5*100,'LineWidth',1.3)
legend('cumret strategy 1','cumret strategy 2','cumret strategy 3',...
'cumret strategy 4','cumret strategy 5','Location','SouthWest')
title('Daily cumulative returns (%)')
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel({'Daily cumulative returns','(%)'),'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

%% Paragrafo 5.4 (prima parte)

% BACKTESTING TRADING STRATEGIES ON 10000 OUplusjumps-TYPE SIMULATED PATHS
% Per il funzionamento del codice runnare prima il codice CAPITOLO 4

% Utilizzo per le simulazioni simYplusjump4, che è il modello di Ornstein-
% Uhlenbeck costruito sui dati storici del VIX con salti simulati sotto il
% profilo della normalità e della distribuzione di probabilità Poissoniana.

window_sizeMA = 20;
for simpaths = 1:10000
    sMAsimulatedpaths(1:229,simpaths) = tsmovavg(simYplusjump4(1:229, ...
        simpaths),'s',window_sizeMA,1); %simYplusjump4 simula il VIX attraverso il
    modello di OUplusjumps
end

for simpaths = 1:10000
    maxics(1:229,simpaths) = sMAsimulatedpaths(1:229,simpaths)+ ...
        1.96*std(VIXclose)/ ...
        sqrt(length(sMAsimulatedpaths(1:229,simpaths)));

    minics(1:229,simpaths) = sMAsimulatedpaths(1:229,simpaths)- ...
        1.96*std(VIXclose)/ ...
        sqrt(length(sMAsimulatedpaths(1:229,simpaths)));
end

for simpaths = 1:10000
    for simtime = 1:229
        if simYplusjump4(simtime,simpaths) > maxics(simtime,simpaths)
            forecast(simtime,simpaths) = -1; % mi aspetto una riduzione il giorno
            seguente
        elseif simYplusjump4(simtime,simpaths) < minics(simtime,simpaths)
            forecast(simtime,simpaths) = 1; % mi aspetto un rialzo del VIX il giorno
            seguente
        else
            forecast(simtime,simpaths) = 0; % non ho alcun segnale
        end
    end
end

```



```

end
end

%BACKTESTING STRATEGY 1
% Il modello a medie mobili e il rispettivo forecast sono sviluppati sulle
% 10000 paths simulate del VIX attraverso il modello di OU plus jumps, la
% strategia di trading invece viene sviluppata sulla variazione giornaliera
% del VXX. In particolare si era calcolato con una regressione che:
%  $Y=0.43*X+0.002$ 
% dove Y è (VXXJul2018May2019close(i)-
VXXJul2018May2019close(i+1))/VXXJul2018May2019close(i)
% e X è (VIXJul2018May2019close(i)-
VIXJul2018May2019close(i+1))/VIXJul2018May2019close(i)
% Ai fini del backtesting delle strategie si userà:
%  $0.43*(i\text{-esimo cammino simulato al tempo (T)} - i\text{-esimo cammino simulato al}$ 
%  $\text{tempo (T+1)})/i\text{-esimo cammino simulato al tempo (T)}+0.002$ 

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths) == -1 % se il modello prevede una riduzione del
VIX il giorno seguente
            OP1(SimTime,simpaths) = 100000*(0.43*...
            (simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
            simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
            % vendo oggi allo scoperto e acquisto domani con l'aspettativa
            % di un prezzo più basso
        else
            OP1(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths) == 1 % se il modello prevede un aumento del VIX
il giorno seguente
            OP2(SimTime,simpaths) = -100000*(0.43*...
            (simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
            simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
            % acquisto oggi e vendo domani con l'aspettativa di un prezzo più
            % alto
        else
            OP2(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

TotalPL1 = sum(OP1)+sum(OP2);
DailyReturn1 = OP1/100000+OP2/100000;
TotalReturn1 = sum(OP1/100000)+sum(OP2/100000);
DailyAverageReturn1 = TotalReturn1/228;
AverageReturnOperations1 = TotalReturn1/...
(length(find(OP1~=0))+length(find(OP2~=0)));

probabilityofprofitstrategy1 = length(find(TotalReturn1>=0))/10000; %10000 sono i
cammini simulati
probabilityofflossstrategy1 = 1-probabilityofprofitstrategy1;

mean(TotalReturn1) %valori sono in percentuale
max(TotalReturn1)
min(TotalReturn1)
std(TotalReturn1)
skewness(TotalReturn1)

```

```

kurtosis(TotalReturn1)
quantile(TotalReturn1, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(DailyReturn1)) %valori sono in percentuale
max(max(DailyReturn1))
min(min(DailyReturn1))
mean(std(DailyReturn1))
mean(skewness(DailyReturn1))
mean(kurtosis(DailyReturn1))
quantile(mean(DailyReturn1), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

CumRet1 = 0;
for simpaths = 1:10000
    for SimTimec = 1:228-1
        CumRet1(1,simpaths) = OP1(1,simpaths)/100000+OP2(1,simpaths)/100000;
        CumRet1(SimTimec+1,simpaths) =
OP1(SimTimec+1,simpaths)/100000+OP2(SimTimec+1,simpaths)/100000+CumRet1(SimTimec,simpaths);
    end
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 1 on 10000 O.U. model plus jumps simulated paths')
plot(CumRet1*100)
hold on
for SimTime = 1:228
    mul(SimTime) = mean(CumRet1(SimTime,1:10000)*100);
end
plot(mul,'black','LineWidth',1.5)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 1 on 10000 O.U. model plus jumps simulated paths','FontSize',9)
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel('Daily cumulative returns (%)','FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

% BACKTESTING STRATEGY 2

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==-1 &&
simYplusjump4(simtime,simpaths)>mean(VIXclose)
            Distance1(SimTime,simpaths) = abs(simYplusjump4(simtime,simpaths)-
mean(VIXclose));
        else
            Distance1(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==1 &&
simYplusjump4(simtime,simpaths)<mean(VIXclose)
            Distance2(SimTime,simpaths) = abs(simYplusjump4(simtime,simpaths)-
mean(VIXclose));
        else
            Distance2(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end
end

```

```

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        Quantity1(SimTime,simpaths) = Distance1(SimTime,simpaths)*100000;
        Quantity2(SimTime,simpaths) = Distance2(SimTime,simpaths)*100000;
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==-1 &&
simYplusjump4(simtime,simpaths)>mean(VIXclose)
            OP3(SimTime,simpaths) = Quantity1(SimTime,simpaths)*(0.43*...
(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            OP3(SimTime,simpaths) =0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==1 &&
simYplusjump4(simtime,simpaths)<mean(VIXclose)
            OP4(SimTime,simpaths) = -Quantity2(SimTime,simpaths)*(0.43*...
(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            OP4(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

TotalPL2 = sum(OP3)+sum(OP4);
for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if Quantity1(SimTime,simpaths)~=0 && Quantity2(SimTime,simpaths)~=0
            DailyReturn2(SimTime,simpaths) =
OP3(SimTime,simpaths)/Quantity1(SimTime,simpaths)+OP4(SimTime,simpaths)/Quantity2(SimTi
me,simpaths);
        elseif Quantity1(SimTime,simpaths)~=0 && Quantity2(SimTime,simpaths)==0
            DailyReturn2(SimTime,simpaths) =
OP3(SimTime,simpaths)/Quantity1(SimTime,simpaths);
        elseif Quantity1(SimTime,simpaths)==0 && Quantity2(SimTime,simpaths)~=0
            DailyReturn2(SimTime,simpaths) =
OP4(SimTime,simpaths)/Quantity2(SimTime,simpaths);
        else % ossia per Quantity1(i)==Quantity2(i)==0
            DailyReturn2(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

TotalReturn2 = sum(DailyReturn2);
DailyAverageReturn2 = TotalReturn2/228;
AverageReturnOperations2 = TotalReturn2/...
(length(find(OP3~=0))+length(find(OP4~=0)));

probabilityofprofitstrategy2 = length(find(TotalReturn2>=0))/10000; % 10000 sono i
cammini simulati
probabilityofflossstrategy2 = 1-probabilityofprofitstrategy2;

mean(TotalReturn2) % valori sono in percentuale
max(TotalReturn2)
min(TotalReturn2)

```

```

std(TotalReturn2)
skewness(TotalReturn2)
kurtosis(TotalReturn2)
quantile(TotalReturn2, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(DailyReturn2)) % valori sono in percentuale
max(max(DailyReturn2))
min(min(DailyReturn2))
mean(std(DailyReturn2))
mean(skewness(DailyReturn2))
mean(kurtosis(DailyReturn2))
quantile(mean(DailyReturn2), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

CumRet2 = 0;
for simpaths = 1:10000
    for SimTimec = 1:228-1
        CumRet2(SimTimec+1,simpaths) = sum(DailyReturn2(1:SimTimec+1,simpaths));
    end
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 2 on 10000 O.U. model plus jumps
simulated paths')
plot(CumRet2*100)
hold on
for SimTime = 1:228
    mu2(SimTime) = mean(CumRet2(SimTime,1:10000)*100);
end
plot(mu2,'black','LineWidth',1.5)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 2 on 10000 O.U. model plus jumps simulated
paths','FontSize',9)
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel('Daily cumulative returns (%)','FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

% BACKTESTING STRATEGY 3

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        SS(SimTime,simpaths) = 100000*(0.43*...
(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
    end
end

TotalPL3 = sum(SS);
DailyReturn3 = SS/100000;
TotalReturn3 = sum(SS/100000);
DailyAverageReturn3 = TotalReturn3/228;
AverageReturnOperations3 = TotalReturn3/228;
probabilityofprofitstrategy3 = length(find(TotalReturn3>=0))/10000; %10000 sono i
cammini simulati
probabilityofflossstrategy3 = 1-probabilityofprofitstrategy3;

mean(TotalReturn3) %valori sono in percentuale
max(TotalReturn3)
min(TotalReturn3)
std(TotalReturn3)
skewness(TotalReturn3)
kurtosis(TotalReturn3)
quantile(TotalReturn3, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

```

```

mean(mean(DailyReturn3)) %valori sono in percentuale
max(max(DailyReturn3))
min(min(DailyReturn3))
mean(std(DailyReturn3))
mean(skewness(DailyReturn3))
mean(kurtosis(DailyReturn3))
quantile(mean(DailyReturn3), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

CumRet3 = 0;
for simpaths = 1:10000
    for SimTimec = 1:228-1
        CumRet3(1,simpaths) = SS(1,simpaths)/100000;
        CumRet3(SimTimec+1,simpaths) =
SS(SimTimec+1,simpaths)/100000+CumRet3(SimTimec,simpaths);
    end
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 3 on 10000 O.U. model plus jumps
simulated paths')
plot(CumRet3*100)
hold on
for SimTime = 1:228
    mu3(SimTime) = mean(CumRet3(SimTime,1:10000)*100);
end
plot(mu3,'black','LineWidth',1.5)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 3 on 10000 O.U. model plus jumps simulated
paths','FontSize',9)
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel('Daily cumulative returns (%)','FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

% BACKTESTING STRATEGY 4

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if simYplusjump4(SimTime,simpaths)<15 && forecast(SimTime,simpaths)==-1
            SSS(SimTime,simpaths) = 100000*(0.43*...
(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            SSS(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

TotalPL4 = sum(SSS);
DailyReturn4 = SSS/100000;
TotalReturn4 = sum(SSS/100000);
DailyAverageReturn4 = TotalReturn4/228;
probabilityofprofitstrategy4 = length(find(TotalReturn4>=0))/10000; %10000 sono i
cammini simulati
% N.B. nel 63.20% di probabilità di profitto
% rientrano molti casi di TotalReturn4 nulli e pertanto di profitti nulli
probabilityofflossstrategy4 = 1-probabilityofprofitstrategy4;

mean(TotalReturn4) %valori sono in percentuale
max(TotalReturn4)
min(TotalReturn4)
std(TotalReturn4)
skewness(TotalReturn4)

```

```

kurtosis(TotalReturn4)
quantile(TotalReturn4, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(DailyReturn4)) %valori sono in percentuale
max(max(DailyReturn4))
min(min(DailyReturn4))
mean(std(DailyReturn4))
mean(skewness(DailyReturn4))
mean(kurtosis(DailyReturn4))
quantile(mean(DailyReturn4), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

CumRet4 = 0;
for simpaths = 1:10000
    for SimTimec = 1:228-1
        CumRet4(1,simpaths) = SSS(1,simpaths)/100000;
        CumRet4(SimTimec+1,simpaths) =
SSS(SimTimec+1,simpaths)/100000+CumRet4(SimTimec,simpaths);
    end
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 4 on 10000 O.U. model plus jumps
simulated paths')
plot(CumRet4*100)
hold on
for SimTime = 1:228
    mu4(SimTime) = mean(CumRet4(SimTime,1:10000)*100);
end
plot(mu4,'black','LineWidth',1.5)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 4 on 10000 O.U. model plus jumps simulated
paths','FontSize',9)
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel('Daily cumulative returns (%)','FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

% BACKTESTING STRATEGY 5

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if simYplusjump4(SimTime,simpaths)<15 && forecast(SimTime,simpaths)==-1
            SSSS(SimTime,simpaths) = 100000* ...
(0.43*(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            SSSS(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==-1 &&
simYplusjump4(SimTime,simpaths)>mean(VIXclose)
            Distance3(SimTime,simpaths) = abs(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-
mean(VIXclose));
        else
            Distance3(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000

```

```

    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==1 &&
simYplusjump4(SimTime,simpaths)<mean(VIXclose) && simYplusjump4(SimTime,simpaths)>=15
            Distance4(SimTime,simpaths) = abs(simYplusjump4(SimTime,simpaths) -
mean(VIXclose));
        else
            Distance4(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        Quantity3(SimTime,simpaths) = Distance3(SimTime,simpaths)*100000;
        Quantity4(SimTime,simpaths) = Distance4(SimTime,simpaths)*100000;
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==-1 &&
simYplusjump4(SimTime,simpaths)>mean(VIXclose)
            OP5(SimTime,simpaths) = Quantity3(SimTime,simpaths) * ...
(0.43*(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            OP5(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if forecast(SimTime,simpaths)==1 &&
simYplusjump4(SimTime,simpaths)<mean(VIXclose) && simYplusjump4(SimTime,simpaths)>=15
            OP6(SimTime,simpaths) = -Quantity4(SimTime,simpaths) * ...
(0.43*(simYplusjump4(SimTime,simpaths)-simYplusjump4(SimTime+1,...
simpaths))/simYplusjump4(SimTime,simpaths)+0.002);
        else
            OP6(SimTime,simpaths) = 0;
        end
    end
end

TotalPL5 = sum(SSSS)+sum(OP5)+sum(OP6);
for simpaths = 1:10000
    for SimTime = 1:229-1
        if Quantity3(SimTime,simpaths) ~= 0 && Quantity4(SimTime,simpaths) ~= 0
            DailyReturn5(SimTime,simpaths) =
SSSS(SimTime,simpaths)/100000+OP5(SimTime,simpaths)/Quantity3(SimTime,simpaths)+OP6(Sim
Time,simpaths)/Quantity4(SimTime,simpaths);
        elseif Quantity3(SimTime,simpaths) ~= 0 && Quantity4(SimTime,simpaths) == 0
            DailyReturn5(SimTime,simpaths) =
SSSS(SimTime,simpaths)/100000+OP5(SimTime,simpaths)/Quantity3(SimTime,simpaths);
        elseif Quantity3(SimTime,simpaths) == 0 && Quantity4(SimTime,simpaths) ~= 0
            DailyReturn5(SimTime,simpaths) =
SSSS(SimTime,simpaths)/100000+OP6(SimTime,simpaths)/Quantity4(SimTime,simpaths);
        else
            DailyReturn5(SimTime,simpaths) = SSSS(SimTime,simpaths)/100000;
        end
    end
end
TotalReturn5 = sum(DailyReturn5);
DailyAverageReturn5 = TotalReturn5/228;

```

```

probabilityofprofitstrategy5 = length(find(TotalReturn5>=0))/10000; %10000 sono i
cammini simulati
probabilityofflossstrategy5 = 1-probabilityofprofitstrategy5;

mean(TotalReturn5) %valori sono in percentuale
max(TotalReturn5)
min(TotalReturn5)
std(TotalReturn5)
skewness(TotalReturn5)
kurtosis(TotalReturn5)
quantile(TotalReturn5, [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

mean(mean(DailyReturn5)) %valori sono in percentuale
max(max(DailyReturn5))
min(min(DailyReturn5))
mean(std(DailyReturn5))
mean(skewness(DailyReturn5))
mean(kurtosis(DailyReturn5))
quantile(mean(DailyReturn5), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])

CumRet5 = 0;
for simpaths = 1:10000
    for SimTimec = 1:228-1
        CumRet5(SimTimec+1,simpaths) = sum(DailyReturn5(1:SimTimec+1,simpaths));
    end
end

figure('Name','Daily cumulative returns (%) strategy 5 on 10000 O.U. model plus jumps
simulated paths')
plot(CumRet5*100)
hold on
for SimTime = 1:228
    mu5(SimTime) = mean(CumRet5(SimTime,1:10000)*100);
end
plot(mu5,'black','LineWidth',1.5)
title('Daily cumulative returns (%) strategy 5 on 10000 O.U. model plus jumps simulated
paths','FontSize',9)
xlabel({'Time','(in trading days)'},'FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
ylabel('Daily cumulative returns (%)','FontSize',9,'FontWeight','bold',...
'Color','black')
hold off

%% Paragrafo 5.4 (seconda parte)

% maximum drawdown backtesting (runnare prima CAPITOLO 4 e
% Paragrafo 5.4 (prima parte))

% Strategia 1
for simpaths=1:10000
    for SimTime=1:229-1
        ddl(SimTime,simpaths)=max(CumRet1(1:SimTime,simpaths))-
CumRet1(SimTime,simpaths);
    end
end

quantile(max(ddl), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])
absMDD1 = max(max(ddl))
muMDD1 = mean(max(ddl))

% Strategia 2
for simpaths=1:10000
    for SimTime=1:229-1

```



```

        dd2(SimTime, simpaths) = max(CumRet2(1:SimTime, simpaths)) -
CumRet2(SimTime, simpaths);
    end
end
quantile(max(dd2), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])
absMDD2 = max(max(dd2))
muMDD2 = mean(max(dd2))

% Strategia 3
for simpaths=1:10000
    for SimTime=1:229-1
        dd3(SimTime, simpaths) = max(CumRet3(1:SimTime, simpaths)) -
CumRet3(SimTime, simpaths);
    end
end
quantile(max(dd3), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])
absMDD3 = max(max(dd3))
muMDD3 = mean(max(dd3))

% Strategia 4
for simpaths=1:10000
    for SimTime=1:229-1
        dd4(SimTime, simpaths) = max(CumRet4(1:SimTime, simpaths)) -
CumRet4(SimTime, simpaths);
    end
end
quantile(max(dd4), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])
absMDD4 = max(max(dd4))
muMDD4 = mean(max(dd4))

% Strategia 5
for simpaths=1:10000
    for SimTime=1:229-1
        dd5(SimTime, simpaths) = max(CumRet5(1:SimTime, simpaths)) -
CumRet5(SimTime, simpaths);
    end
end
quantile(max(dd5), [0.025 0.25 0.50 0.75 0.975])
absMDD5 = max(max(dd5))
muMDD5 = mean(max(dd5))

```

Bibliografia e sitografia

Ahoniemi K., *Modeling and Forecasting Implied Volatility – an Econometric Analysis of the VIX Index*, Discussion Paper No. 129, Helsinki School of Economics, FDPE, and HECER, October 2006.

Akaike H., *A new look at the statistical model identification*, 1974.

Bakshi G., Kapadia N. and Madan D., *Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options*, Review of Financial Studies, 2003.

Bates D.S., *Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market*, Journal of Econometrics, Volume 94, Issues 1–2, January 2000 - Elsevier

Bollerslev T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of econometrics, 1986.

Brunner B., *La volatilità come asset class*, Allianz Global Investors.

Carr J., *MODELING VOLATILITY DERIVATIVES*, December 2011.

Carr P. and Wu L., *A tale of two indices*, The Journal of Derivatives, 2006.

Chicago Board Options Exchange, *White paper Cboe Volatility Index*, pages 1-23, 2009.

Donninger C., *Forecasting the VIX to improve VIX-Derivatives Trading*, Sibyl-Working-Paper, April 2016.

DGV Solutions LP, *After the Volpocalypse*, February 12, 2018.

Engle R., *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1982

Hull J. C., *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, 2018.

IDEMagazine, Numero 2, Borsa Italiana, 15 agosto 2002.

Marra S., *Predicting Volatility*, Investment Research, Lazard Asset Management, 2015.

Pan J., *The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study*, Journal of Financial Economics, 2002 - Elsevier

Pianca P., *L'indice di volatilità VIX: il termometro della paura*, Quaderno di Didattica n. 33/2010, Febbraio 2010.

Resti A., Sironi A., *Rischio e valore nelle banche*, Misura, regolamentazione, gestione, EGEA, 2008.

Schwarz G.E., *Estimating the dimension of a model*, Annals of Statistics, 6 (2): 461–464, 1978.

Sun K., *Equity Return Modeling and Prediction Using Hybrid ARIMA-GARCH Model*, International Journal of Financial Research Vol. 8, No. 3; 2017.

Tsay R.S., *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, 3rd Edition, 2010.

Vasicek O., *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of financial economics, 1977

Van den Berg T., *Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model*, published: May 28, 2011.

Whaley R.E., *Understanding VIX*, November 6, 2008.

Zhu Y., *Modelling VIX with a Jump Diffusion Process*, September 2014.

<http://www.cboe.com/>, Sito ufficiale CBOE.

<https://it.finance.yahoo.com/>, Yahoo Finance.

Ringraziamenti

Riassunto

Introduzione

Lo scopo del seguente elaborato è prestarsi ad un'analisi dettagliata di uno degli indici più ricorrenti nella letteratura economica e finanziaria, il VIX. Da sempre indicatore del *market sentiment* e fedele predittore tanto dell'entusiasmo quanto del panico diffuso fra gli operatori finanziari, negli ultimi anni è stato riscoperto come vera e propria *asset class*, prevalentemente come panacea dei rischi a cui è sottoposto il mercato azionario statunitense. Nell'ultimo decennio il ricorso a derivati con sottostante il VIX per finalità di copertura o diversificazione è incrementato, mentre il suo impiego in prospettiva puramente speculativa è ancora prerogativa di un numero esiguo di trader e istituzioni finanziarie. In questo *framework* si colloca l'elaborato e la sua stessa essenza. La comprensione della formulazione del VIX e delle dinamiche della serie storica è *condicio sine qua non* per lo sviluppo di modelli di previsione e per l'implementazione di qualsiasi strategia di trading sui suoi derivati. Nel Capitolo 1 si ricercano, nella letteratura più accreditata, i riferimenti alla volatilità, dalle accezioni più ricorrenti alle versioni di più ampio respiro, per focalizzare, poi, l'indagine sulla formulazione matematica del VIX. Nel Capitolo 2, mediante strumenti econometrici, si verificano alcune proprietà della serie, prima fra tutte, per importanza, la presenza di eteroschedasticità condizionale, fenomeno a principio dei modelli *GARCH*. Nel Capitolo 3 si introducono le medie mobili e le strategie costruite su di esse più ricorrenti nell'analisi tecnica. In particolar modo si elabora un modello a medie mobili predittivo *one-step-ahead* e si testa la sua efficacia. Lo stesso, poi, viene impiegato e contaminato nell'implementazione delle strategie di trading. Il Capitolo 4 è dedicato all'identificazione del miglior processo di replica del VIX. Poter simulare molteplici profili è propedeutico alla validazione delle *trading strategies* del Capitolo 5.

Capitolo 1: Volatilità e VIX

Il concetto di volatilità, in economia e finanza, ritrae il livello di incertezza percepito su un mercato o riguardo l'evoluzione futura di un indice o di un *asset*. Nella più recente letteratura la volatilità è stata reinterpretata come potenziale *asset-class*, utile in ottica di diversificazione di portafoglio anche se con non poche difficoltà, legate alla non normalità dei rendimenti delle strategie sulla volatilità. Il grado di rischiosità può rappresentare per il trader una grande opportunità così come una forte esposizione a potenziali perdite rilevanti. Un'alta volatilità implica, pertanto, vedere le proprie posizioni subordinate, nei ritorni, alla probabilità di variazioni repentine, accentuate e imprevedibili. Le scelte sono, poi, legate al grado di avversione dell'operatore o dell'intermediario finanziario al rischio. In letteratura vi è una distinzione fra volatilità storica, implicita, attesa e realizzata. La prima è una misura di rischio *ex post* calcolata su una serie storica di rendimenti che approssima, per la legge dei grandi numeri, la volatilità "reale" dei *returns*. È

computata come il prodotto fra la deviazione standard campionaria e \sqrt{t} dove t indica i giorni di apertura della borsa in un anno. La seconda è una misura di rischio *ex ante*, si estrapola dai prezzi delle opzioni attivamente negoziate e rappresenta la percezione dei traders circa la variabilità del prezzo del sottostante fino alla scadenza dell'opzione. Mediante il modello di Black-Scholes-Merton, gli alberi binomiali ed il calcolo iterativo (o procedure numeriche più efficaci, come il metodo Newton-Raphson) è possibile ottenere σ . La volatilità implicita è una misura *forward looking*, tanto più elevata quando il mercato si aspetta, con alta probabilità, fluttuazioni importanti dei rendimenti del titolo sottostante e tanto più bassa quando il mercato si aspetta solo deboli oscillazioni e quindi, per un determinato valore dello *strike price*, bassa probabilità che il diritto di opzione venga esercitato. La volatilità attesa è la stima di un valore, per definizione, incerto e può avvenire attraverso modelli matematici e statistici. Essa è soggetta in ogni caso a *bias* e non sempre è avulsa da fenomeni di *overconfidence*. La volatilità realizzata, infine, è la magnitudo delle fluttuazioni giornaliere del prezzo di un sottostante in un determinato periodo, calcolata come deviazione standard dei rendimenti logaritmici. La volatilità, inoltre, è funzione di diversi fattori di rischio (contesto microeconomico e macroeconomico, grado di liquidità degli *assets*, settori e Paesi di riferimento, squilibri di ordini commerciali, eventi economici isolati destabilizzanti, operazioni condotte da investitori istituzionali, rilevanti volumi di vendite allo scoperto, squilibri politico-sociali, interrelazione fra i mercati azionari, valutari e delle materie prime e politiche sui tassi).

Il *CBOE Volatility Index (VIX)*, meglio noto come *fear index* o *fear gauge*, deve la sua fama alla significativa capacità di esprimere la percezione che gli operatori e gli investitori hanno del rischio sul mercato azionario. Il VIX, introdotto nel 1993 dal Chicago Board of Options Exchange, stima la volatilità implicita di un'opzione sintetica con scadenza a trenta giorni emessa sull'indice azionario S&P 500. L'*underlying stock index* del VIX è l'indice S&P500 (SPX). Prima del 1993, predittivo della futura *realized volatility* e dello stress latente sul mercato era il VXO, calcolato dalle opzioni sull'indice S&P100 (OEX). La formula generale per calcolare il VIX al tempo t è:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

Dove σ^2 è la varianza implicita (si ha che $VIX = \sqrt{\sigma^2} \times 100$), T il tempo alla scadenza, F il livello dell'indice forward (per la *put-call parity* pari a $e^{RT}(\text{call price} - \text{put price}) + \text{strike price}$), K_0 il primo prezzo di esercizio minore o uguale al livello dell'indice forward, R il tasso d'interesse *risk free* a scadenza, K_i lo *strike price* dell' i -esima opzione *out-of-the-money* (una *call* se $K_i > K_0$, una *put* se $K_i < K_0$, entrambe (*put* e *call*) se $K_i = K_0$), $Q(K_i)$ il punto medio dello *spread* tra i prezzi *bid* e *ask* per ogni opzione con prezzo di esercizio K_i e ΔK_i la semisomma dei due prezzi d'esercizio su entrambi i lati di K_i . La volatilità viene, quindi, calcolata

per le opzioni *near-term* (con più di 23 giorni alla scadenza) e *next-term* (con meno di 37 giorni alla scadenza) con tempo alla scadenza rispettivamente di T_1 e T_2 :

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{R_1 T_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left[\frac{F_1}{K_0} - 1 \right]^2; \sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{R_2 T_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left[\frac{F_2}{K_0} - 1 \right]^2$$

Il VIX si ottiene come il prodotto fra 100 e la radice quadrata della media ponderata su 30 giorni di σ_1^2 e σ_2^2 .

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left[T_1 \sigma_1^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right] \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

Con N_{T_1} che sono i minuti alla scadenza delle opzioni *near-term*, N_{T_2} i minuti alla scadenza delle opzioni *next-term*, N_{30} i minuti in 30 giorni ed N_{365} i minuti in 365 giorni.

Le ragioni che hanno portato alla sostituzione del VXO con il VIX sono individuabili nella difficoltà interpretativa del VXO, che rappresenta una mera trasformazione monotona non lineare dei prezzi di opzioni *at-the-money*. La sua cifra economica non è chiara alla luce di tutti i modelli posteriori a Black-Scholes. Di contro, il VIX ha un significato economico concreto, essendo il prezzo di un portafoglio lineare di opzioni. Inoltre, la metodologia computazionale del VXO ha incontrato critiche dal mondo accademico e industriale per la distorsione al rialzo artificialmente indotta e perchè approssima il tasso di uno swap di volatilità, il quale è molto difficile da replicare, mentre, è di più immediata realizzazione la replica dei payoff di un *variance swap* attraverso una posizione statica in un continuo di opzioni europee e una posizione dinamica nella negoziazione di futures.

Capitolo 2: Analisi della serie storica del VIX

Il VIX, nel corso della sua evoluzione metodologica, ha servito la funzione segnaletica del livello di ansietà sul mercato azionario americano e assecondato l'interesse galoppante per derivati sulla volatilità che potessero accontentare gli interessi di speculazione, diversificazione e protezione degli investitori. Gli *spikes* di volatilità del VIX sono in corrispondenza di determinati eventi (si pensi alla bolla delle Dot-com scoppiata nel 2000, all'attacco alle Torri Gemelle del 2001, alla bolla immobiliare USA creatasi a partire dal 2006, alla crisi dei debiti sovrani del 2010-2011, ...). Generalmente si riconoscono a valori del VIX inferiori a 20 periodi di ottimismo più o meno dilagante a seconda di quanto il valore si discosti in difetto da 20; valori superiori a 30 sono associati ad elevata incertezza, preoccupazione e turbolenze sui mercati; valori superiori a 45 sono associati alla presenza di paura o panico degli investitori. Il VIX non è un perfetto predittore della direzione in cui si muovono i mercati quanto piuttosto della magnitudo con cui tendono a variare nel continuo. Quando il mercato sperimenta forti variazioni nei prezzi, queste sono accompagnate da picchi di volatilità, specialmente quando le fluttuazioni sono al ribasso (fasi di *downside*), ossia quando posizioni consistenti

sono liquidate e nervosismo e panico degli investitori si riflettono sui prezzi (si veda anche il *leverage effect* con lo SP500). Le analisi seguenti, fino alla fine del Capitolo 2, sono sviluppate seguendo fedelmente la metodologia Box-Jenkins. La serie dei prezzi di chiusura giornalieri dell'indice è caratterizzata da *spikes* di volatilità a cui seguono immediate fasi di rilascio e si evolve nel tempo in maniera non deterministica. Intuitivamente potremmo pensare alla serie come ad una *random walk* che ritorna al suo valore medio storico, ~ 19.32 (*mean-reversion effect*) e i cui movimenti sono compresi fra il valore minimo storico di 9.14 e il valore massimo storico di 80.86. L'uso dei logaritmi, nell'elaborato, è finalizzato ad evitare forecast negativi di volatilità, stabilizzare le varianze e normalizzare la distribuzione. Data la numerosità delle rilevazioni si può assumere che i prezzi di chiusura del VIX si distribuiscano secondo una log-normale e di conseguenza i rendimenti secondo una normale. D'altro canto, osservando i QQ plot e gli istogrammi del VIX e dei suoi rendimenti logaritmici, emerge la presenza di una curtosi rilevante e di un certo grado di asimmetria positiva. Analizzando i livelli giornalieri logaritmici del VIX, dal correlogramma si evince l'elevata persistenza delle autocorrelazioni, mentre le autocorrelazioni parziali decadono immediatamente dopo il primo lag, oscillando lievemente nei successivi. Ciò è sintomatico della non stazionarietà della serie. Si procede, dunque, a differenziare la serie dei logaritmi dei prezzi. L'ADF (Augmented Dickey-Fuller) test restituisce un *p-value* di 0.001 sulla serie differenziata, sufficientemente basso da suggerire di rifiutare l'ipotesi nulla di non stazionarietà. Differenziare la serie per una seconda volta è inutile, anzi rischioso (si incorre nell'*over-differencing*). Verificata la stazionarietà, bisogna identificare il miglior modello *ARIMA*, ossia quello che meglio si adatta alla serie osservata e meglio rappresenta il processo generatore della stessa. La sigla *ARIMA* sta per *Auto-Regressive Integrated Moving Averages* e la notazione standard vuole che un processo di questo tipo sia generalmente rappresentato come $ARIMA(p, d, q)$ con p e q rappresentativi, rispettivamente, della componente autoregressiva (ordine del lag) e dell'ordine del *moving average* e d dell'ordine di integrazione. Per stimare l'*ARIMA* è necessario osservare la funzione di autocorrelazione e la funzione di autocorrelazione parziale, considerando che un processo $AR(p)$ ha una ACF che tende a 0 al crescere dei lag (h) e una PACF pari a 0 $\forall h > p$. Al contrario un processo $MA(q)$ ha una ACF pari a 0 $\forall h > q$ e una PACF che tende a 0 all'aumentare dei ritardi (h). È ipotizzabile, dal correlogramma e per il Teorema di Wold, che l'ordine del polinomio autoregressivo e a media mobile sia pari a 1; ad avvalorare l'intuizione che il miglior modello sia l' $ARIMA(1,1,1)$ vi sono l'*Akaike Information Criterion* (AIC) e il *Bayesian Information Criterion* (BIC). Si procede con la stima dei parametri e con il forecast dei *log-prices* 80 *step-ahead* mediante l' $ARIMA(1,1,1)$. Le previsioni sono, poi, raffrontate, in ottica di backtesting, con le effettive realizzazioni del logaritmo del VIX in quegli 80 giorni (i giorni di negoziazione dal 2 luglio 2018 al 23 ottobre 2018). In questo caso siamo in presenza di un ottimo forecast senza alcuna eccezione giornaliera (nessuna rilevazione *ex post* su 80 al di fuori degli estremi dell'intervallo di confidenza costruito al livello del 95%). Il *p-value* superiore a 0.05 nel *Ljung-Box test* suggerisce che non c'è sufficiente evidenza per rigettare l'ipotesi nulla di assenza di

autocorrelazione dei residui. Il riscontro di assenza di autocorrelazione fra i residui e la presenza, invece, di autocorrelazione positiva e lentamente decadente fra i residui in valore assoluto e quadrati è la manifestazione quantitativa del fenomeno del *volatility clustering* (Granger e Ding, 1993), per il quale “ampie variazioni tendono ad essere seguite da ampie variazioni di entrambi i segni e piccole variazioni da piccole variazioni di ambo i segni” (Mandelbrot, 1963). Questa evidenza è tanto riscontrabile nei residui in valore assoluto e quadrati quanto negli stessi *returns* ed è una forma di eteroschedasticità. Poiché il modello *ARIMA* è costruito sotto le ipotesi di omoschedasticità e al fine di tener conto dei cambiamenti della varianza nella serie dei rendimenti logaritmici, si performa l’*Engle’s ARCH test* (Engle, 1982), basato sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Quest’ulteriore test elicitava la presenza di eteroschedasticità condizionale nei residui calcolati sull’*ARIMA(1,1,1)*. Sostanzialmente ε_t si assume essere una differenza di martingala, un processo stocastico la cui aspettativa condizionata al passato è nulla. I termini di disturbo, inoltre, si assumono essere serialmente incorrelati ma con una certa (debole) dipendenza nel tempo. Vale, inoltre, essendo il valor medio dei rendimenti logaritmici molto prossimo a 0 (data la frequenza giornaliera delle osservazioni), la seguente coincidenza matematica: $\varepsilon_t \equiv y_t$, dove y_t rappresenta il rendimento logaritmico al tempo t . La caratteristica di incorrelazione e dipendenza debole appena citata viene traslata, perciò, anche ai rendimenti, insieme alle altre dinamiche colte dai modelli *ARCH*, quali la volatilità dipendente dal tempo (eteroschedasticità) e il *volatility clustering*. Nei modelli *ARCH* la varianza condizionale segue un percorso ben definito dai parametri autoregressivi sui rendimenti quadratici passati. I rendimenti si possono assumere talvolta distribuiti normalmente ma più spesso si è soliti ricorrere, per le serie finanziarie alla distribuzione t di Student con ν gradi di libertà o a misture di normali. Il modello *GARCH* (Generalized Auto-Regressive Conditionally Heteroskedastic model), ideato da Tim Bollerslev nel 1986, supera un importante limite dell’*ARCH*, ossia l’antitesi fra l’elevato ordine p del processo ed il “principio della parsimonia”, riuscendo così a riprodurre, con un numero limitato di parametri (nella prassi difficilmente si usano modelli di ordine superiore al *GARCH(1,1)*), fenomeni di lunga memoria. Nel *GARCH(p, q)* la varianza condizionale si esprime come $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$ con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ per $i, j > 0$. La varianza condizionale nei *GARCH* è modellata inserendo oltre ai p ritardi relativi ai rendimenti, già presenti nell’*ARCH(p)*, anche q ritardi relativi ai valori storici della varianza. Sono testati diversi tipi di *GARCH(1,1)* per la serie dei rendimenti logaritmici del VIX. I modelli sperimentati con i rispettivi AIC e BIC sono riportati in tabella:

Modello GARCH	Distribuzione della probabilità condizionale del processo di innovazione	AIC (1.0e+04 *)	BIC (1.0e+04 *)
GARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9702	-1,9681
EGARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9869	-1,9841
GJR-GARCH(1,1)	Gaussiana	-1,9834	-1,9807
GARCH(1,1)	t di Student	-2,0392	-2,0365

EGARCH(1,1)	<i>t</i> di Student	-2,0555	-2,0520
GJR-GARCH(1,1)	<i>t</i> di Student	-2,0506	-2,0472

Tabella 3: Tabella comparativa dei valori di AIC e BIC attribuiti ai diversi modelli GARCH testati

Il modello selezionato, avallato dagli *Information Criteria*, è l' *EGARCH(1,1)* con distribuzione della probabilità condizionale del processo di innovazione di tipo *t* di Student. Si prosegue con il *forecast 228 step-ahead* dei *logreturns*, tramite la funzione *forecast* e la funzione *simulate* di Matlab. A partire dai *logreturns* simulati, e data l'osservazione del VIX temporalmente precedente al primo step simulato è possibile estrapolare i *logprices* simulati per mezzo di un ciclo annidato. In particolare, i primi prezzi logaritmici simulati sono pari alla somma fra il logaritmo dell'ultima osservazione del prezzo del VIX e i primi rendimenti logaritmici simulati, mentre per i restanti istanti temporali i prezzi logaritmici sono pari alla somma fra i prezzi logaritmici del giorno precedente ed i rendimenti logaritmici giornalieri. Esponenziando i *logprices* simulati si ottengono i prezzi simulati. Le simulazioni Monte Carlo dei prezzi sono, in questo caso, abbastanza fedeli alle realizzazioni, anche se, presentano generalmente alcuni limiti, che saranno trattati nel Capitolo 4.

Capitolo 3: Il potere predittivo delle medie mobili

Il *simple moving average* presenta il vantaggio di catturare la *long-term mean reversion* dell'indice e in una certa misura la persistenza a brevissimo termine e le fluttuazioni di volatilità. Le medie mobili semplici sono computate come segue: $\bar{P}_{SMA} = \frac{P_t + P_{t-1} + \dots + P_{t-n+1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_{t-i}$. Utilizzando in prima battuta le medie mobili semplici sorge il problema di scelta del dominio temporale su cui operare. Vi è, infatti, un *trade-off* di fondo fra profondità storica della serie e reattività della stessa a shock di mercato. Il campione utilizzato è dato dai prezzi di chiusura del VIX nel periodo che intercorre dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019 (229 *trading days*). Su tali osservazioni viene costruito un SMA(20). La scelta di 229 *trading days* non è puramente casuale ma dettata dal modello, che in caso di poche osservazioni potrebbe risultare segnaletico di eventi non strettamente legati alla volatilità quanto piuttosto a cambiamenti del contesto macroeconomico statunitense, mentre in caso di eccessive osservazioni manterrebbe in memoria dati non più rilevanti al tempo della valutazione. Si procede, poi, alla costruzione di un intervallo di confidenza al livello del 95% del tipo:

$$i. c. = SMA(20) \pm 1.96 \frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$$

Con *SMA(20)* che identifica il *simple moving average* con 20 *rolling windows*, 1.96 il valore approssimato del 0.975 quantile della distribuzione normale e $\frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$ l'errore standard, dove σ_{VIX} è la deviazione standard storica del VIX ed *n* la dimensione del campione.

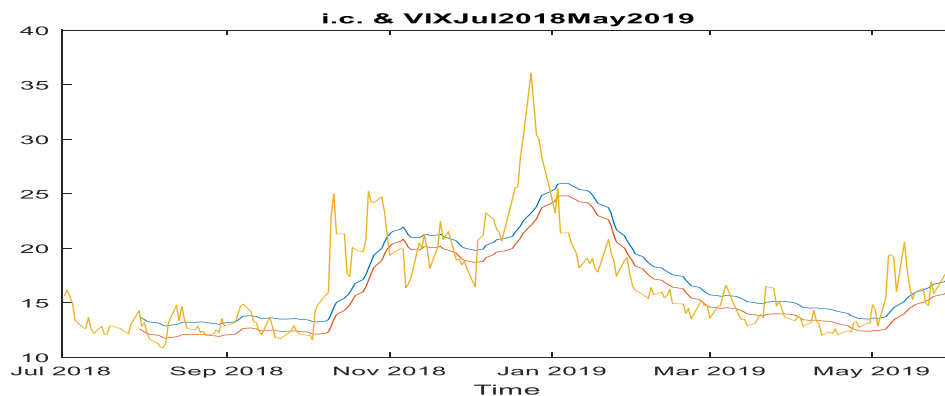


Grafico 23: Intervallo di confidenza e osservazioni del VIX nel periodo luglio 2018-maggio 2019

La linea rossa e blu nel Grafico 23 segnano, rispettivamente, il limite inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza costruito sulla media mobile con finestra temporale a 20 giorni. Qualora il campione del VIX sia compreso fra questi due *bound* (estremi inclusi) il modello non ha alcun potere segnaletico; quando, invece, il VIX è al di sopra dell'*upper bound* le aspettative di breve periodo del modello sono di ribasso e ritorno dell'indice al *moving average value*, viceversa, quando esso è al di sotto del *lower bound* le aspettative a breve termine sono di rialzo. Sulla base di tali considerazioni è stato implementato su Matlab un modello di forecast del trend giornaliero. Per semplicità le variazioni giornaliere del VIX positive sono state contrassegnate da 1, le variazioni negative da -1 e le variazioni nulle con 0. Le aspettative del modello sono state rappresentate in caso di attese di rialzo con 1, in caso di attese di ribasso con -1 e con 0 in caso di assenza di aspettative (nei casi in cui il VIX non è al di fuori del "corridoio" creato da limite superiore e inferiore dell'intervallo di confidenza). Si hanno così due vettori, siano A e B , composti di 1,-1 e 0, rappresentativi delle $n-1$ variazioni giornaliere (con n pari alla dimensione del campione) e delle rispettive $n-1$ attese del modello (viene decurtata la n -esima aspettativa perché riguarda la n -esima variazione giornaliera, la quale eccede la dimensione del campione, dal momento che viene calcolata come differenza fra il valore in $n+1$ e il valore in n). Si nota che la somma degli i -esimi elementi di A e degli i -esimi elementi di B (con $i=1,2,\dots,n-1$) restituisce:

- ± 2 (ossia 2 in valore assoluto) in caso di forecast corretto (rialzo/ribasso correttamente identificato):
 - +2 se le aspettative rialziste (1) sono confermate da un rialzo (1)
 - -2 se le aspettative ribassiste (-1) sono confermate da un ribasso (-1)
- 0 in caso di forecast errato, ossia:
 - aspettative rialziste (1) e verificatosi ribasso (-1)
 - aspettative ribassiste (-1) e verificatosi rialzo (1)
- ± 1 (ossia 1 in valore assoluto) in caso di incapacità predittiva del modello, pertanto qualora:
 - il modello non predice (0) e si verifica un rialzo (1)
 - il modello non predice (0) e si verifica un ribasso (-1)

Unica eccezione a quanto appena visto è rappresentata nel campione in disamina dall'unica variazione giornaliera nulla del VIX. Nei giorni 18 e 19 dicembre il VIX chiude a un livello di 25.58, valore più elevato dell'estremo superiore dell'intervallo di confidenza relativo al giorno 18 dicembre, che segna 21.9159. Pertanto, in questa sola occasione, la somma dei vettori A e B genera -1 come output (attesa di ribasso (-1) e variazione realizzata nulla (0)) in presenza di una previsione evidentemente errata. Per la validazione di un sistema basato su intervalli costruiti su medie mobili a 20 giorni occorre calcolare il tasso di successo delle predizioni, la probabilità di errore e la percentuale di casi in cui il modello non ha abilità predittiva. Le probabilità sono le seguenti:

$$P(\text{true forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 2)}{228} = 31.58\%$$

$$P(\text{wrong forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 0) + 1}{228} = 23.25\%$$

$$P(\text{null expectations}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 1) - 1}{228} = 45.18\%$$

Correggendo, infine, le prime due probabilità, in modo da tener conto delle volte in cui non si ha alcuna aspettativa sulle variazioni del VIX si ha che:

$$P(\text{proper true forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 2)}{228 - 0.4518 \cdot 228} = 57.60\%$$

$$P(\text{proper wrong forecast}) = \frac{\text{numero di volte in cui } (|A + B| = 0) + 1}{228 - 0.4518 \cdot 228} = 42.40\%$$

Capitolo 4: Replicabilità del VIX

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico continuo, particolarmente interessante ai fini dell'elaborato per la capacità di riprodurre le dinamiche del VIX, in particolar modo il ritorno alla media (*mean-reversion*) e i suoi salti (nella versione inclusiva di questi, l'*O.-U. plus jumps model*). Un processo di O.-U. è di tipo Markoviano, Gaussiano e stazionario. L'equazione differenziale stocastica che descrive il processo di O.-U. è:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \quad \text{con } \theta, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, X_0 = x_0$$

Dove μ è la media asintotica del processo, θ la *mean-reversion rate*, detto anche *decay-rate* (che rappresenta la velocità alla quale tali traiettorie convergono a μ nel tempo), σ la deviazione standard, attraverso la quale si determina la volatilità istantanea, che misura l'ampiezza della variazione del *noise* istante per istante e W_t il processo di Wiener, noto anche come moto browniano, ossia un processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti. Nei lavori di ricerca di Bates (2000) e Pan (2002) si evince l'importanza attribuita alla componente di salto per modellare la volatilità e i suoi *spikes*. Il processo di Ornstein-

Uhlenbeck con salti è ottenuto sommando alla formulazione originaria la componente di salto discontinua $J_t I_t$. Si ha, dunque:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t + J_t I_t \quad \text{con } \theta, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, X_0 = x_0$$

Dove J_t indica la dimensione del salto al tempo t e I_t la probabilità di salto al tempo t . La letteratura prevede che J_t segua una distribuzione esponenziale o normale mentre si assume che I_t segua una Bernoulli di parametro p ($\sim Ber(p)$ dove p denota la probabilità della presenza di un salto) o una Poisson di parametro λ ($\sim Poi(\lambda)$ dove λ denota sempre la probabilità di salto). I parametri μ , θ e σ sono calibrati con l'ausilio delle funzioni *polyfit* e *polyval*. Impostata di default la variazione giornaliera di almeno 4.6032 (somma fra la media delle variazioni del VIX e 3 volte la loro deviazione standard) come componente di salto e assegnata la rispettiva probabilità di realizzazione dell'1.07% (stimata su 7180 variazioni storiche giornaliere) si creano due matrici rappresentative della distribuzione della probabilità di salto seguendo, nel primo caso, la distribuzione Bernoulliana e nel secondo la distribuzione di Poisson, a partire dalla probabilità effettiva di osservare un salto precedentemente quantificata. La magnitudo del salto è, invece, modellata creando una matrice di salti distribuiti esponenzialmente e una matrice di salti distribuiti secondo una Normale; queste ultime matrici sono delle stesse dimensioni delle matrici di probabilità e costruite a partire dalla media e dalla deviazione standard storica dei salti. Sono messi, così, al vaglio i diversi modelli. Aggiungere la componente di salto appare fondamentale per un indice di volatilità quale il VIX. I salti esponenziali hanno un profilo di crescita e decrescita molto più repentino del VIX, motivo per cui appare preferibile ricorrere alla costruzione dei salti sotto il profilo della normalità. Per quanto riguarda invece la probabilità di salto si ricorre alla Poissoniana, secondo la letteratura più accreditata la distribuzione più impiegata nella fattispecie e in genere per eventi con manifestazione estremamente rara.

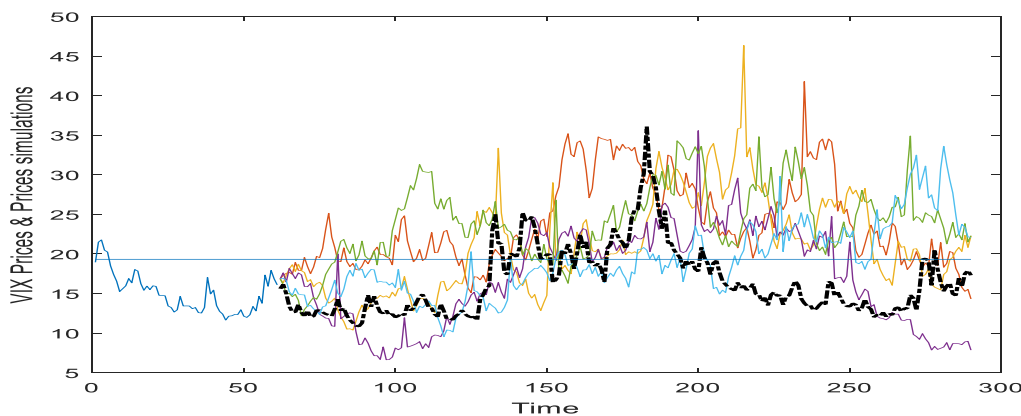


Grafico 31: Prezzi di chiusura giornalieri del VIX (linea nera tratteggiata) vs 5 cammini simulati del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana

Risulta essenziale validare l'efficacia del processo di Ornstein-Uhlenbeck per poterlo impiegare nella fase di backtesting delle diverse strategie di trading elaborate al Capitolo 5. In tal senso si confrontano le simulazioni

generate mediante il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana con le simulazioni Monte Carlo dei prezzi del VIX a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione t di Student costruito sui rendimenti logaritmici storici, il migliore, per qualità di *fitting*, del Capitolo 2.

	VIX (dal 2 gennaio 1990 al 29 giugno 2018)	VIX (dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019)	Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana	Monte Carlo a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione T di Student sui <i>logreturns</i> storici	
tipologia di dati	reali	reali	simulati	simulati	
orizzonte temporale (in giorni)	7181	229	229	229	
numero di cammini simulati	-	-	10000	10000	
media	19,3180	16,4285	18,8540	13,8888	
massimo	80,8600	36,0700	96,7368	178,8340	
minimo	9,1400	10,8500	3,2841	1,8581	
deviazione standard	7,8398	4,3330	4,8655	3,1399	
asimmetria	2,0918	1,3101	0,5586	0,5953	
curtosi	10,6676	4,9359	3,1201	3,2557	
quantili	0.025	10,6300	11,6490	12,6662	7,9259
	0.25	13,6475	13,0825	16,1052	10,8023
	0.50	17,4400	14,9700	18,4652	12,9050
	0.75	22,7300	19,1075	21,1466	15,7708
	0.975	39,4582	27,7190	27,1858	25,8623

Tabella 5: Confronto fra le statistiche del VIX (calcolate su orizzonti temporali diversi), delle simulazioni del Processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana e delle simulazioni Monte Carlo a partire dal modello ARIMA(1,0,1)+EGARCH(1,1) con distribuzione t di Student costruito sui rendimenti logaritmici storici

Per generare N a scelta scenari su cui testare le strategie di trading si preferisce ricorrere al processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana, per la sua elevata capacità di riprodurre le traiettorie del VIX. Il secondo modello, infatti, ha diverse statistiche degeneri rispetto alla serie originaria. Rispetto alla stessa, mediamente, sottostima i prezzi e segna massimi talvolta ben lontani da quello storico, nonché minimi ben al di sotto del minimo storico. Per quanto nulla vieti che il VIX possa sfondare i suoi *bounds*, sia superiore che inferiore, la concentrazione della distribuzione attorno a valori così esigui e la presenza di picchi esponenziali non è giustificabile alla luce di quanto, sinora, l'indice di volatilità ha sperimentato.

Capitolo 5: Strategie di trading sulla volatilità

Lo scopo di questo capitolo è elaborare diverse strategie di trading, ricorrendo in alcuni casi al modello a medie mobili sviluppato nel Capitolo 3, in altri contaminandolo e in altri ancora ideando strategie *ex novo*. Essendo il VIX non negoziabile, si ricorre al VXX, un ETN lanciato nel 2009 per offrire un'esposizione verso i futures a breve termine sul VIX. Le sue dinamiche seguono, a livello direzionale (rialzo/ribasso), le stesse del VIX nella maggior parte dei casi, sebbene con diversa intensità. Le strategie sulla volatilità sono di tipo giornaliero, così da evitare esposizioni eccessivamente prolungate nel tempo. A partire da 229 osservazioni (dal 2 luglio 2018 al 30 maggio 2019) del VIX e del VXX, si utilizza una regressione per stimare la relazione che intercorre fra l'indice ed il suo derivato, così da poter ottenere 10000 cammini simulati per il VXX a partire

dai 10000 cammini simulati per il VIX mediante il processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana. Le strategie sono, poi, applicate a ogni cammino per rendere maggiormente robuste le stime in prima istanza ottenute. Il VXX emula quasi fedelmente le traiettorie del VIX, mentre per quanto riguarda l'intensità delle variazioni giornaliere percentuali è sufficiente *runnare*, per $i=1,2,\dots,228$ (228 è il numero di variazioni giornaliere, preso un orizzonte temporale di 229 giorni), una regressione semplice in cui si pone $Y_i = i$ -esima variazione giornaliera percentuale del VXX (variabile dipendente) e $X_i = i$ -esima variazione giornaliera percentuale del VIX (variabile indipendente). La retta di regressione così stimata è: $Y_i = 0.43 * X_i + 0.002$, con un *R-squared* di 0.848. La bontà della regressione è avallata dai *p-value* contenuti, dal modesto RMSE e dalla statistica-F che suggerisce la preferibilità del modello di regressione rispetto al modello degenerare con sola costante. In sostanza, fra le variazioni percentuali del VIX e del VXX vi è una forte correlazione positiva (92.113%) e le variazioni percentuali del VXX sono, in magnitudo, pari a circa il 43% delle variazioni percentuali del VIX. Le assunzioni alla base delle cinque strategie di trading sviluppate sono che i prezzi di acquisto/vendita al tempo t siano pari al prezzo di chiusura del VXX al tempo t (ciò è assimilabile a una sola operazione di trading giornaliera nell'istante più prossimo alla chiusura del mercato), che non vi siano commissioni né costi di transazione, che sia possibile vendere allo scoperto senza interessi da corrispondere al datore del prestito e che vi sia la piena capacità di negoziare giornalmente, ovvero di disporre di fondi sufficienti a garantire l'operatività anche a seguito di perdite ingenti. Si va a testare, nel primo caso, l'efficacia del modello predittivo a medie mobili, costruito sul VIX, sulle dinamiche del VXX. Il modello, nei casi in cui è in grado di elaborare un'aspettativa, prevede rialzi e ribassi del VIX correttamente nel 57,60% dei casi (percentuale stimata su 229 osservazioni giornaliere). Leggermente diversa è la percentuale di corretta previsione delle dinamiche del VXX, a causa dei rari seppur presenti casi in cui a variazioni positive del VIX coincidono variazioni negative del VXX, e viceversa. A priori, si può intuire come, sebbene le medie mobili abbiano un relativo potere predittivo, occorre migliorare questa percentuale, e questo è l'obiettivo delle strategie 2, 4 e 5. Nella prima strategia la quantità di capitale investita in ogni operazione è sempre la stessa (ad esempio 100.000 euro). Se il modello prevede una riduzione del VIX il giorno seguente, si vende allo scoperto VXX al prezzo corrente per riacquistarlo il giorno successivo, con l'aspettativa di un prezzo più basso rispetto al corrente; d'altro canto, in caso di aspettativa rialzista, si acquista VXX al prezzo corrente per venderlo il giorno seguente, con l'attesa di un prezzo superiore al corrente. La seconda strategia potenzia il potere predittivo del modello a medie mobili introducendo pesi determinati dalla distanza in valore assoluto del VIX giornaliero rispetto alla sua media storica. Moltiplicando i pesi per una costante (ad esempio 100.000 euro) si hanno quantità investite nelle singole operazioni proporzionali alla distanza del VIX dalla sua media di lungo periodo, così da sfruttare la proprietà di *mean-reversion*. Sempre per catturare la *mean-reversion*, la seconda strategia investe esclusivamente se il modello a medie mobili prevede un rialzo del VIX e l'indice è al di sotto della sua media

storica (acquistando VXX al prezzo corrente e rivendendolo il giorno seguente) oppure se il modello a medie mobili prevede un ribasso del VIX e l'indice è al di sopra della sua media storica (*shortando* VXX al prezzo corrente e riacquistandolo il giorno seguente). Normalmente le varie scadenze dei futures sul VIX sono in contango, ossia il valore dei futures aumenta al crescere della scadenza. Per catturare il contango è efficace la strategia di VXX *shorting*. La terza strategia consiste, perciò, nel vendere giornalmente il VXX per riacquistarlo il giorno successivo. Questa strategia si basa sull'aspettativa che il prezzo del VXX possa decrescere continuamente seguendo il suo trend decrescente ormai decennale. Le quantità negoziate sono assunte costanti (ad esempio pari a 100.000 euro), non essendovi alcuna discriminante per cui assegnare maggior peso ad un'operazione giornaliera piuttosto che ad un'altra. Si vuole, ora, sempre sfruttare la struttura in contango dei futures sul VIX ma in maniera più prudentiale. La quarta strategia *shorta* VXX in t per riacquistare VXX in $t+1$ ma solo per valori del VIX inferiori ai 15 punti in t (ossia solo in periodi di bassa volatilità) e solo se il modello a medie mobili ha attese ribassiste sul valore del VIX (e di conseguenza del VXX) in $t+1$, così da evitare di esporsi agli *spikes* di volatilità dell'indice. Il rischio di esposizione alle oscillazioni al rialzo è, in questo modo, limitato a valori contenuti, ma allo stesso tempo di entità più modesta sono anche i profitti potenziali. Le quantità investite sono costanti (ad esempio pari a 100.000 euro). L'ultima strategia combina i tratti distintivi della seconda e della quarta strategia. Quando il prezzo corrente del VIX è inferiore a 15 si *shorta* VXX per riacquistarlo il giorno seguente. Quando, invece, l'indice di volatilità è almeno pari a 15 si ricorre al modello a medie mobili e al potere informativo della *mean-reversion*, calcolando quantità da investire pesate sulla base della distanza del VIX corrente dalla sua media asintotica. In particolare, per valori del VIX maggiori o pari a 15 la strategia investe acquistando VXX al prezzo corrente e rivendendolo al prezzo del giorno seguente, se e solo se il modello prevede un rialzo del VIX ed il VIX è al di sotto della sua media storica ma almeno pari a 15 e vendendo VXX al prezzo corrente e riacquistandolo al prezzo del giorno seguente, se e solo se il modello prevede un ribasso del VIX ed il VIX è al di sopra della sua media storica. Testare le strategie sulle effettive realizzazioni del VXX consente, in prima battuta, di avere un'idea delle performance sia in termini di redditività che di rischiosità. Tuttavia, ogni intuizione e anche le statistiche elaborate devono essere irrobustite incrementando il numero di possibili traiettorie che il VXX avrebbe potuto tracciare nel tempo. Potendo simulare j a scelta cammini del VIX tramite il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti in precedenza calibrato, e conoscendo la relazione VIX-VXX in termini di variazioni giornaliere percentuali, è possibile testare ogni strategia sul j -esimo ($j=1,2,\dots,10000$) cammino simulato del VXX. *Settata* una finestra temporale a 20 giorni si calcola, dapprima, il *simple moving average* su ogni cammino simulato di 229 *trading days* del VIX, ed a partire da quest'ultimo si costruisce un intervallo di confidenza al livello del 95% del tipo:

$$i. c. j = SMA(20)_j \pm 1.96 \frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$$

Con $SMA(20)_j$ che rappresenta il j -esimo *simple moving average* con 20 *rolling windows*, 1.96 il valore approssimato del 0.975 quantile della distribuzione normale, $\frac{\sigma_{VIX}}{\sqrt{n}}$ l'errore standard, dove σ_{VIX} è la deviazione standard storica del VIX ed n la dimensione del campione (ciascuno dei 10000 cammini simulati ha dimensione temporale pari a 229 *trading days*) e $j = 1, 2, \dots, 10000$ il j -esimo cammino simulato. Ogni volta in cui, per lo stesso j -esimo ($j = 1, 2, \dots, 10000$) cammino e per lo stesso n -esimo ($n = 1, 2, \dots, 229$) *trading day*, il prezzo simulato del VIX è superiore al valore dell'*upper bound* dell'intervallo di confidenza, il modello a medie mobili ha attese ribassiste per il giorno seguente; viceversa, per un prezzo simulato del VIX inferiore al *lower bound* le aspettative sono rialziste. Nei restanti casi, quelli in cui il VIX simulato è contenuto fra i due *bound* (estremi inclusi), il modello non fornisce alcun segnale. Le strategie sono sviluppate così come visto in precedenza, ma per mezzo di cicli annidati, così da poter reiterare i cicli ideati per le 5 strategie per ogni cammino simulato. Le variazioni percentuali giornaliere del VXX, su cui sono calcolati i rendimenti giornalieri delle strategie, sono stimate, invece, a partire dai cammini simulati del VIX e attraverso la seguente regressione:

$$Y_{ij} = 0.43 * X_{ij} + 0.002$$

Con Y_{ij} = i -esima variazione giornaliera percentuale del VXX del j -esimo cammino simulato (variabile dipendente) e X_{ij} = i -esima variazione giornaliera percentuale del VIX del j -esimo cammino simulato (variabile indipendente) e per $i = 1, 2, \dots, 228$ (228 variazioni giornaliere su 229 giorni di negoziazione) e $j = 1, 2, \dots, 10000$. Sono rappresentate, per ogni traiettoria simulata, le performance di ciascuna strategia, in termini di rendimenti giornalieri cumulati percentuali, computati sulle variazioni giornaliere percentuali del VXX, a loro volta calcolate sulle variazioni giornaliere percentuali del VIX simulato con 10000 reiterazioni del processo di Ornstein-Uhlenbeck con salti normali e distribuzione della probabilità di salto Poissoniana. A titolo esemplificativo si propongono 10000 possibili scenari, in termini di rendimenti giornalieri cumulati percentuali, della quinta strategia.

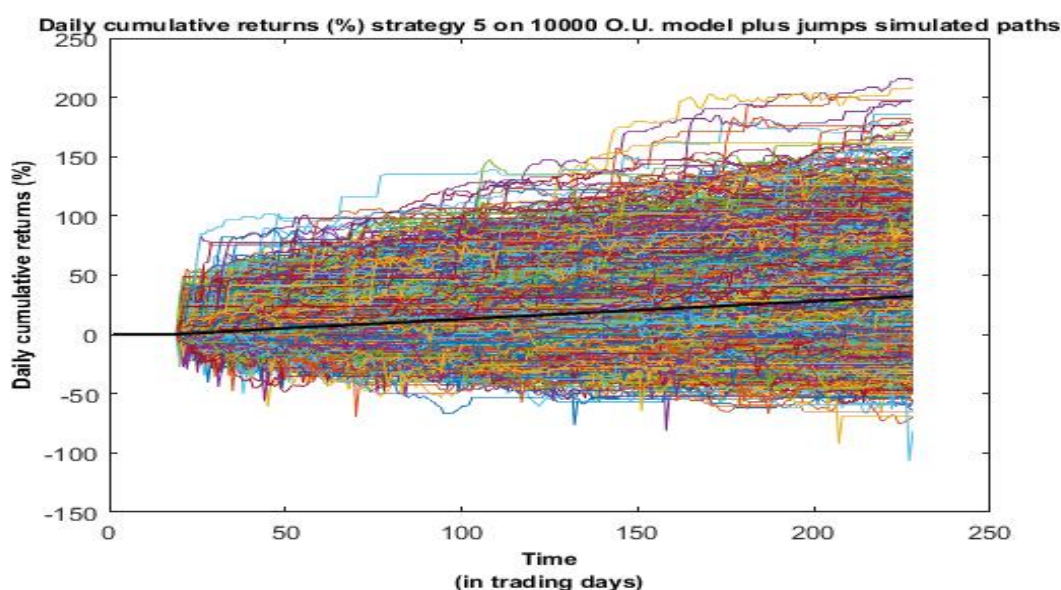


Grafico 46: Rendimenti giornalieri cumulati (in valori percentuali) della strategia 5 su 10000 cammini simulati mediante il modello di Ornstein-Uhlenbeck con salti; la linea nera rappresenta i rendimenti giornalieri cumulati medi (in valori percentuali) della quinta strategia per ogni trading day

I risultati ottenuti ed illustrati nella Tabella 7 sono consistenti, poichè stimati su 10000 simulazioni e permettono di rappresentare l'effettiva profittabilità, il grado di rischio e i potenziali scenari di ciascuna strategia.

			STRATEGIA 1	STRATEGIA 2	STRATEGIA 3	STRATEGIA 4	STRATEGIA 5	
PROBABILITÀ DI PROFITTO			83,16%	71,95%	66,71%	59,23%	84,93%	
PROBABILITÀ DI PERDITA			16,84%	28,05%	33,29%	40,77%	15,07%	
RENDIMENTI GIORNALIERI CUMULATI COMPLESSIVI	Statistiche descrittive	media	44,1300%	16,8600%	7,1700%	-2,5300%	32,1200%	
		deviazione standard	47,5600%	28,5800%	19,1900%	11,3600%	32,5300%	
		asimmetria	50,4500%	39,4700%	-40,3900%	-148,7500%	56,8200%	
		curtosi	404,8500%	374,2500%	375,5600%	1189,6900%	389,9200%	
		minimo	-103,8700%	-80,1400%	-97,9700%	-103,8700%	-81,3700%	
		massimo	379,6400%	206,8400%	72,0400%	88,1800%	214,1700%	
	Quantili	0.025	-40,2200%	-34,7300%	-33,5700%	-32,1300%	-23,9700%	
		0.25	11,9300%	-2,6700%	-4,6800%	-5,3300%	10,0600%	
		0.50	40,5400%	15,4500%	8,2400%	0,0000%	29,0300%	
		0.75	73,0800%	34,8900%	20,1000%	0,0000%	51,8000%	
		0.975	146,2100%	76,0500%	41,9100%	18,5200%	104,2100%	
	RENDIMENTI GIORNALIERI	Statistiche descrittive	media (*)	0,1900%	0,0739%	0,0314%	-0,0111%	0,1400%
			deviazione standard (**)	2,9800%	2,1300%	3,7000%	0,4900%	2,1600%
asimmetria (***)			115,5000%	178,1200%	-134,7300%	NaN(*****)	142,4600%	
curtosi (****)			1860,8500%	2868,3200%	1506,7400%	NaN(*****)	2691,3500%	
minimo (*****)			-95,7000%	-58,5700%	-132,8200%	-95,7000%	-95,7000%	
massimo (*****)			132,8200%	132,8200%	32,0000%	28,0100%	56,5200%	
Quantili (*****)		0.025	-0,1800%	-0,1500%	-0,1500%	-0,1400%	-0,1100%	
		0.25	0,0500%	-0,0100%	-0,0200%	-0,0200%	0,0400%	
		0.50	0,1800%	0,0700%	0,0400%	0,0000%	0,1300%	
		0.75	0,3200%	0,1500%	0,0900%	0,0000%	0,2300%	
		0,6400%	0,3300%	0,1800%	0,0800%	0,4600%		

(*) La media va intesa come la media dei j-esimi rendimenti giornalieri medi, per j=1,2,...,10000, dove i j-esimi rendimenti giornalieri medi sono ottenuti dalla media, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(**) La deviazione standard va intesa come la media delle j-esime deviazioni standard dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime deviazioni standard sono ottenute dalla deviazione standard, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(***) L'asimmetria va intesa come la media delle j-esime asimmetrie dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime asimmetrie sono ottenute dall'asimmetria, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(****) La curtosi va intesa come la media delle j-esime curtosi dei rendimenti giornalieri, per j=1,2,...,10000, dove le j-esime curtosi sono ottenute dalla curtosi, per i=1,2,...,228, degli i-esimi rendimenti giornalieri.

(*****) Minimo e massimo sono da intendersi come minimo e massimo assoluti della matrice dei rendimenti giornalieri di dimensione 228x10000.

(*****) I quantili sono calcolati sui 10000 rendimenti giornalieri medi.

(*****) Per alcune j, tutti gli i-esimi rendimenti giornalieri sono nulli, perché non sussistono le condizioni di mercato affinché la strategia possa negoziare. In questo caso MatLab restituisce NaN.

Tabella 7: Confronto fra i rendimenti giornalieri cumulati complessivi e i rendimenti giornalieri delle cinque strategie elaborate sui 10000 cammini simulati, alcune statistiche.

Un ulteriore indicatore di rischiosità è il *maximum drawdown*, calcolato, nella Tabella 8, sui 228 rendimenti giornalieri cumulati in termini di caduta dal picco massimo al valor minimo. Esso è una misura di *downside risk* indicativa dell'erosione di risorse finanziarie stanziata a fronte della strategia. I *maximum drawdown* calcolati per ogni strategia, su 10000 simulazioni, sono i seguenti:

MAXIMUM DRAWDOWN (%)		STRATEGIA 1	STRATEGIA 2	STRATEGIA 3	STRATEGIA 4	STRATEGIA 5
quantili	0.025	13,93%	10,96%	24,37%	0,00%	8,96%
	0.25	22,94%	18,82%	34,97%	0,00%	15,33%
	0.50	30,12%	24,76%	42,03%	4,42%	20,32%
	0.75	40,11%	32,67%	51,43%	11,04%	27,14%
	0.975	69,26%	52,86%	78,83%	38,62%	47,02%
massimo assoluto		135,86%	95,82%	169,40%	127,44%	127,44%
valore medio		33,16%	26,63%	44,55%	7,63%	22,32%

Nota: Tutti i valori sono calcolati per ogni strategia su 10000 simulazioni.

Tabella 8: Maximum drawdown (%) delle cinque strategie elaborate sui 10000 cammini simulati, alcune statistiche.

Si ricorda che l'operatività in derivati sul VIX è prerogativa di *traders* avvezzi al rischio e banche d'affari, proprio per la ricorrente probabilità di sperimentare una riduzione significativa dei rendimenti cumulati, o talvolta di perdere una parte del capitale iniziale o quest'ultimo nella sua interezza. Esiste, pertanto, la possibilità di dover reintegrare quanto eroso dalla congiuntura negativa fra l'andamento del mercato e la strategia stessa.

Conclusioni

Il *file rouge* su cui sono strutturati i singoli capitoli è la volontà di dimostrare l'esistenza di un efficace quanto alternativo utilizzo speculativo del più rinomato indice di volatilità del mercato statunitense. Il VIX nasce come strumento informativo funzionale agli operatori di mercato per lo svolgimento deontologico e professionale di servizi e attività di investimento. La sua formulazione lo rende estremamente imprevedibile, essendo il sottostante un indice di mercato (SP500). Le stesse dinamiche sono solo in parte assimilabili ad un processo aleatorio, essendovi alcune caratteristiche (*mean-reversion* e salti di volatilità) difficilmente replicabili. L'obiettivo è prevedere, quantomeno direzionalmente, il valore dell'indice il giorno successivo, e in questo senso insiste un modello predittivo a medie mobili. In seconda istanza sono ideate strategie di *daily trading*, applicate su N (per N elevato, nell'elaborato pari a 10000) cammini, così da avere sufficienti scenari in grado di emulare l'universo aleatorio delle possibili traiettorie dell'indice. Ogni scenario è identificativo di disparate condizioni di mercato, tutte però costruite con un approccio *tailor-made* mediante parametri rigorosamente calibrati. Proprio per la sua stessa genesi, il VIX non è direttamente negoziabile, motivo per cui, passati in rassegna i diversi derivati, si è deciso di ricorrere al VXX. I risultati, per alcune strategie di trading, sono molto soddisfacenti. In particolar modo si è riuscito a formulare una strategia (strategia 5) con un'elevata probabilità di profitto (stimata nell'84,93% dei casi), con rendimento complessivo medio molto competitivo (+32,12%) e una forte asimmetria positiva che rende molto probabili rendimenti ancora superiori, sebbene, essendo una strategia puramente speculativa, non è immune al *downside risk* e può incorrere anche in rilevanti perdite. Per questi motivi è necessario che il fruitore della strategia possa eventualmente reintegrare il capitale e sopportare perdite copiose e affinché la strategia possa espletare la sua piena efficacia in termini di redditività andrebbe reiterata nel tempo.

