Dipartimento di Impresa e Management

Corso di Laurea in Economia e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

LA TEORIA DEL PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ: VALIDITÀ DEI SUOI ASSUNTI APPLICATI ALLA CRISI DEI MUTUI SUBPRIME

Relatore

Prof.ssa Marilena Sibillo

Candidato

Cristiano Mares

Matricola 216281

Anno Accademico 2019 - 2020

INDICE

INTRODUZIONE

Il lavoro intende trattare nella prima parte la teoria di Markowitz nelle sue caratteristiche e finalità. Tale teoria ha costituito la base di molte teorie moderne di scelta del portafoglio, ma a causa della crisi finanziaria del 2008, sono sorti dei dubbi circa la validità dei suoi assunti nella realtà. Nella seconda parte, verranno trattate le principali cause e i principali strumenti finanziari che hanno condotto alla crisi finanziaria, al fine di stabilire le condizioni di mercato che hanno generato tale evento. Queste condizioni verranno poi confrontate con gli assunti della teoria di Markowitz, al fine di stabilire se essi siano stati rispettati o meno durante la crisi finanziaria. Tale confronto servirà a stabilire la validità degli assunti nella realtà.

Nello specifico, nel primo capitolo sono analizzate le caratteristiche essenziali di un portafoglio composto da titoli rischiosi. Vengono poi introdotte le nozioni di variabile aleatoria, di valore medio, di varianza e di covarianza. Dopo aver esposto tali concetti, sono trattati gli argomenti inerenti il rendimento di un titolo rischioso, la costruzione di un portafoglio, prima di 2 titoli e poi di n titoli, e il concetto di frontiera efficiente. Seguono poi il problema matematico di Markowitz e il teorema dei due fondi. È poi esposta la teoria di Markowitz con l'inclusione di un titolo non rischioso. Alla fine del primo capitolo viene poi trattato il teorema di un fondo. Nel secondo capitolo vengono inizialmente esposti tutti gli assunti della teoria di Markowitz, al fine di stabilire con chiarezza le ipotesi di cui necessita tale modello per essere funzionale all'individuazione del portafoglio ottimo. Segue poi l'esposizione dei principali strumenti finanziari che hanno condotto alla crisi del 2008, ovvero gli MBS, i mutui subprime, gli ARMs, i CDO e i CDS. Vengono poi analizzate le cause che hanno generato tale evento e le conseguenze. Segue il confronto delle condizioni di mercato che hanno caratterizzato la crisi finanziaria con gli assunti della teoria di Markowitz, Il lavoro si conclude con l'esposizione delle conclusioni circa la validità degli assunti della teoria di Markowitz nella realtà.

CAPITOLO I

LA TEORIA DEL PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ

1.1 **Rendimento di un titolo rischioso**

Gli agenti economici possono effettuare investimenti acquistando o vendendo titoli. Ipotizziamo di effettuare un investimento dal rendimento deterministico acquistando un titolo al tempo zero che dopo un anno restituisce una somma prestabilita. Possiamo definire il rendimento totale dell'investimento come il rapporto tra l'importo ricevuto e quello investito. Denominiamo X_0 la somma iniziale, X_1 la somma finale e R il rendimento totale. Il rendimento totale dell'investimento sarà quindi

$$R = \frac{X_1}{X_0} \tag{1.1}$$

mentre il tasso di rendimento, che indichiamo con r, sarà

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0} \tag{1.2}$$

Le nozioni di rendimento totale e tasso di rendimento sono legate dalla formula

$$R = 1 + r \tag{1.3}$$

La formula 1.1 può essere riscritta nel modo che segue

$$X_1 = (1 + r)X_0 \tag{1.4}$$

A volte è ammessa la vendita allo scoperto, o shorting, una procedura che permette di vendere un titolo che non si possiede. Tale procedura prevede al tempo zero di prendere in prestito il titolo da qualcuno che lo possiede e di venderlo a qualcun altro, ricevendo l'importo X_0. In una data successiva, si acquista il titolo al prezzo X_1 e si rende il titolo a chi lo aveva prestato. Se l'importo X_1 è inferiore all'importo X_0, è stato realizzato un profitto di $X_0 - X_1$, perciò la vendita allo scoperto è redditizia se il prezzo del titolo diminuisce. Definendo gli importi dal lato dell'investitore, quest'ultimo spende all'inizio $-X_0$, mentre l'entrata finale alla fine del periodo è pari a $-X_1$. Il rendimento totale sarà

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0} \tag{1.5}$$

I segni si annullano, ottenendo così la stessa espressione valida per l'acquisto del titolo. La formula del rendimento viene quindi applicata sia all'acquisto che alla vendita allo scoperto e può essere riscritta come:

$$-X_1 = -X_0 R = -X_0(1 + r) \tag{1.6}$$

1.1.1 Rendimento di un portafoglio

Ipotizziamo che siano disponibili n titoli differenti. Possiamo formare un portafoglio P costituito da questi n titoli. Supponiamo di ripartire tra questi titoli l'importo X_0. Selezioniamo quindi gli importi X_{0i}, con $i = 1,2, \dots, n$, in modo che $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$, così che la loro somma sia uguale all'importo X_0 (cf. Luenberger D. G., 2011). Se è ammessa la vendita allo scoperto dei titoli, alcuni dei valori possono essere negativi, altrimenti può essere imposto che non lo possano essere non ammettendo la vendita allo scoperto. Possiamo esprimere gli importi investiti come frazioni dell'investimento complessivo:

$$X_{0i} = w_i X_0, \qquad i = 1,2, \dots ,3 \tag{1.7}$$

Le componenti w_i esprimono i pesi, ovvero le percentuali di composizione, del portafoglio. Possiamo indicare il portafoglio P con il vettore $w = w_1, w_2, \dots, w_n$. La somma di tutti i pesi dei titoli è pari a 1

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1.8}$$

Alcuni dei valori w_i possono anche essere negativi se è ammessa la vendita allo scoperto. Sia R_i il rendimento totale del titolo i, la somma di denaro generato al termine del periodo dal titolo i è $R_i X_{0i} = R_i w_i X_0$. L'importo totale generato da questo portafoglio alla fine del periodo è quindi $\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0$. Il rendimento totale del portafoglio è

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \qquad (1.9)$$

Data la relazione 1.8, possiamo scrivere il tasso di rendimento dell'investimento come

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \qquad (1.10)$$

Dopo tali considerazioni, è possibile affermare che il rendimento totale (il tasso di rendimento) di un portafoglio di titoli è uguale alla somma pesata dei rendimenti (dei tassi di rendimenti) dei singoli titoli, nella quale il peso di ciascun titolo è dato dal suo peso relativo nel portafoglio, ovvero dalla quota dell'importo totale impiegata per l'acquisto.

1.2 Variabili aleatorie

Dopo aver sinteticamente esposto le nozioni di rendimento totale e di tasso di rendimento nel caso di un titolo dal rendimento deterministico, possiamo ora utilizzare tali informazioni per approfondire lo studio di titoli che presentano un rendimento aleatorio, ovvero titoli la cui quantità di denaro, che si riceverà dalla futura vendita di un titolo, è incerta al momento dell'acquisto. Un rendimento non sicuro è detto aleatorio e può essere descritto in termini probabilistici. Ipotizziamo che x sia una quantità aleatoria che può assumere un valore qualsiasi tra quelli dell'insieme finito $x_1, x_2, \dots, x_m$ e che a ogni possibile x_i sia associato il valore p_i, che rappresenta la probabilità che x assuma il valore x_i. I valori p_i soddisfano $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ per ogni i. Ogni p_i può essere considerato come la frequenza relativa con cui x_i si verifica se si esegue infinite volte l'osservazione. Dal momento che al tempo iniziale il valore che la quantità x potrà assumere in una data futura è ignoto, la quantità x è detta variabile aleatoria.

1.2.1 Valore atteso

Ipotizziamo che *x* sia una quantità aleatoria che può assumere un valore qualsiasi tra quelli dell'insieme finito $x_1, x_2, \dots, x_m$ e che a ogni possibile x_i sia associato il valore p_i e che i valori p_i soddisfano $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ per ogni *i*. Il valore atteso è pari alla media dei valori che la variabile *x* può assumere, ciascuno ponderato per la possibilità di verificarsi. Denominiamo $E(x)$ il valore atteso della variabile aleatoria *x*. Esso sarà:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \tag{1.11}$$

Esso può essere anche espresso con il simbolo $\bar{x}$. Il valore atteso di una variabile aleatoria costituisce un'utile sintesi delle caratteristiche probabilistiche della variabile, ma non fornisce alcuna informazione circa lo scostamento dei valori dal valore medio. Per tale motivo è necessario introdurre il concetto di varianza.

1.2.2 Varianza

La varianza è una misura della dispersione dei valori che una variabile aleatoria può assumere intorno al suo valore atteso. Denominiamo la varianza con il simbolo σ^2. Possiamo definire la varianza come

$$var(x) = \sigma_x^2 = E[(x - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 \, p_i \tag{1.12}$$

La quantità $(x - \bar{x})^2$ non è mai negativa, ed è tanto maggiore quanto più x devia da $\bar{x}$, perciò la varianza è un'utile misura della tendenza di *x* a scostarsi dal valore atteso. La varianza però ha come unità di misura il quadrato dell'unità di misura dei valori di riferimento. Per tale incongruenza di unità di misura, è utile calcolare la radice quadrata della varianza, denominata deviazione standard. Denotiamo σ tale misura. Possiamo quindi esprimere la deviazione standard come

$$\sigma_x = \sqrt{E[(x - \bar{x})^2]} \tag{1.13}$$

1.2.3 Covarianza

Consideriamo due variabili aleatorie. Possiamo esprimere la loro dipendenza reciproca mediante la loro covarianza. Siano x e y due variabili aleatorie e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ rispettivamente i loro valori attesi. Denotiamo σ_{xy} la loro covarianza. Possiamo definirla come

$$\sigma_{xy} = cov(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] \tag{1.14}$$

La covarianza può assumere un valore compreso nell'intervallo $[-\sigma_x\sigma_y\,, \sigma_x\sigma_y]$. Tale vincolo può essere espresso dalla disuguaglianza

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y \tag{1.15}$$

Se per due variabili aleatorie x e y, vale la proprietà $\sigma_{xy} = 0$, si dice che le due variabili non sono correlate. Se $\sigma_{xy} > 0$, le due variabili sono correlate positivamente. Nel caso in cui $\sigma_{xy} = \sigma_x\sigma_y$, vi è una perfetta correlazione positiva e la covarianza assume il valore massimo possibile per le varianze date. Se $\sigma_{xy} < 0$, le due variabili si dicono correlate negativamente. Nel caso in cui $\sigma_{xy} = -\sigma_x\sigma_y$, vi è una perfetta correlazione negativa e la covarianza assume il valore minimo possibile per le varianze date.

È possibile esprimere il rapporto tra la covarianza di due variabili aleatorie e il prodotto delle loro deviazioni standard attraverso il coefficiente di correlazione, che denominiamo con il simbolo ρ. Tale coefficiente misura la forza di un eventuale relazione lineare tra due variabili aleatorie. Possiamo esprimere il coefficiente di correlazione come

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \tag{1.16}$$

Il valore che tale coefficiente può assumere è compreso nell'intervallo $[-1, 1]$. Tale vincolo può essere ricavato dal vincolo della covarianza (1.15) sostituendo la formula del coefficiente di correlazione all'interno (1.16)

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y$$

$$|\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y| \leq \sigma_x\sigma_y$$

$$\left|\rho_{xy}\right| \leq 1 \tag{1.17}$$

Per $0 < \rho \leq 1$ vi è una correlazione positiva, ovvero quando una variabile aumenta anche l'altra tende ad aumentare. Per $-1 \leq \rho < 0$ le due variabili sono correlate negativamente, e se una variabile aumenta l'altra tende a diminuire. Quando $\rho = 1$ tra le due variabili vi è una correlazione perfettamente positiva, mentre quando $\rho = -1$ vi è una correlazione perfettamente negativa. In entrambi i casi, ovvero quando $\rho = \pm 1$, la dipendenza tra le due variabili è massima. Quando $\rho = 0$, le due variabili sono indipendenti. Dopo aver analizzato il concetto di covarianza è possibile esaminare la varianza della somma tra due variabili aleatorie. Prendiamo in considerazione due variabile aleatorie, x e y. La varianza della loro somma è pari a

$$var\ (x + y) = E\ [(x - \bar{x} + y - \bar{y})^2]$$

$$E\ [(x - \bar{x})^2] + 2E\ [(x - \bar{x})(y - \bar{y})] + E\ [(y - \bar{y})^2] =$$

$$= \sigma_x^2 + 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \tag{1.18}$$

1.3 Rendimenti aleatori

Dopo aver esaminato le nozioni di valore medio, della varianza e della covarianza, è possibile applicare le informazioni acquisite per studiare il tasso di rendimento di un titolo. Il rendimento di un titolo rischioso è, per la sua stessa natura, una variabile aleatoria, che denominiamo r. il valore atteso di tale variabile aleatoria sarà $E(r) = \bar{r}$, mentre la sua varianza sarà $E[(r - \bar{r})^2] = \sigma^2$(cf. Luenberger D. G., 2011). I titoli possono essere rappresentati come punti del piano in un grafico bidimensionale, come mostrato nel grafico 1.1. All'asse delle ordinate sono associati i rendimenti, mentre all'asse delle ascisse gli scarti quadratici medi. Tali diagrammi vengono utilizzati per analizzare gli investimenti sulla base del trade off media-varianza.

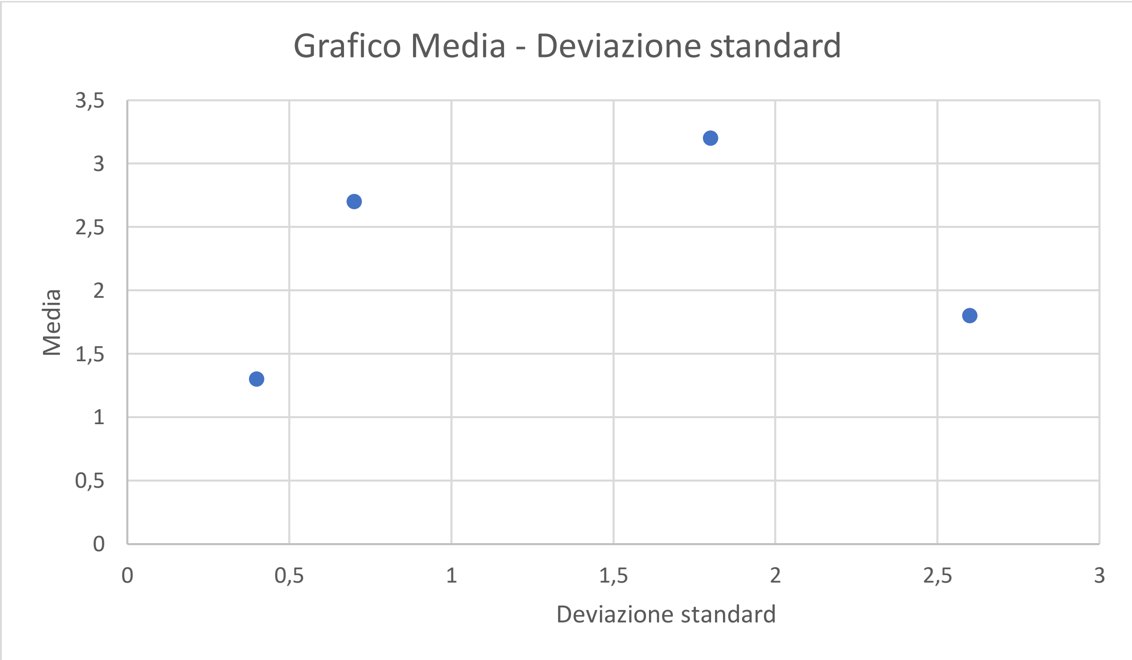

Figura 1.1: rappresentazione grafica di titoli in un piano deviazione standard – rendimento.

Dopo aver esposto la nozione di rendimento aleatorio di un titolo e i concetti di valore atteso, di varianza, e di covarianza, è possibile utilizzarli per studiare la media e la varianza di un portafoglio costituito da titoli dai rendimenti aleatori.

1.3.1 Rendimento medio di un portafoglio

Ipotizziamo che siano disponibili n titoli aventi tassi di rendimento aleatori $r_1, r_2, \dots, r_n$. I rispettivi valori attesi sono $E(r_1) = \bar{r}_1,\ E(r_2) = \bar{r}_2, \dots, E(r_n) = \bar{r}_n$. Supponiamo di costruire un portafoglio P costituito da questi n titoli, ciascuno con peso w_i, con $i = 1,2, \dots, 3$. Il tasso di rendimento del portafoglio sarà

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n \tag{1.19}$$

Possiamo calcolare i valori attesi di entrambi membri utilizzando la proprietà della linearità del valore atteso, ottenendo così

$$E(r) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \cdots + w_n E(r_n) \tag{1.20}$$

Il tasso di rendimento atteso del portafoglio è pari alla somma dei tassi di rendimento attesi dei singoli titoli, ciascuno ponderato per il suo peso all'interno del portafoglio.

1.3.2 Varianza del rendimento di un portafoglio

Denotiamo con σ_i^2 la varianza del rendimento del titolo *i* e con σ_{ij} la covarianza dei rendimenti i e j. È possibile esprimere la varianza del rendimento del portafoglio in funzione delle covarianze delle coppie di rendimenti dei titoli e dei pesi dei titoli all'interno del portafoglio. Segue il calcolo

$$\sigma^2 = E[(r - \bar{r})^2]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} w_i\, w_j \sigma_{ij} \tag{1.21}$$

1.3.3 Diversificazione

La diversificazione è un'operazione mediante cui la varianza di un portafoglio può essere ridotta ampliandone il numero di titoli. Supponiamo di costituire un portafoglio di *n* titoli non correlati tra di loro e che ognuno di questi titoli abbia media m e varianza σ^2. Ipotizziamo inoltre che il portafoglio sia equiripartito, ovvero che il capitale investito sia diviso in parti uguali su tutti i titoli trattati. Il portafoglio sarà quindi costituito con quantità uguali di n di questi titoli, ovvero $w_i = \frac{1}{n}$ per ogni i. Il tasso di rendimento complessivo del portafoglio è

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \tag{1.22}$$

Il valore medio di questo tasso è $\bar{r} = m$. La varianza del rendimento del portafoglio sarà

$$var(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\sigma_i^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1.23}$$

Come si può evincere dalla formula, la varianza è legata ad n da una relazione inversa, perciò decresce al crescere di n. Ipotizziamo che σ^2 sia uguale ad 1. La formula 1.23 diventa $var(r) = \frac{1}{n}$. Possiamo rappresentare dunque ora in un grafico la varianza al variare di n.

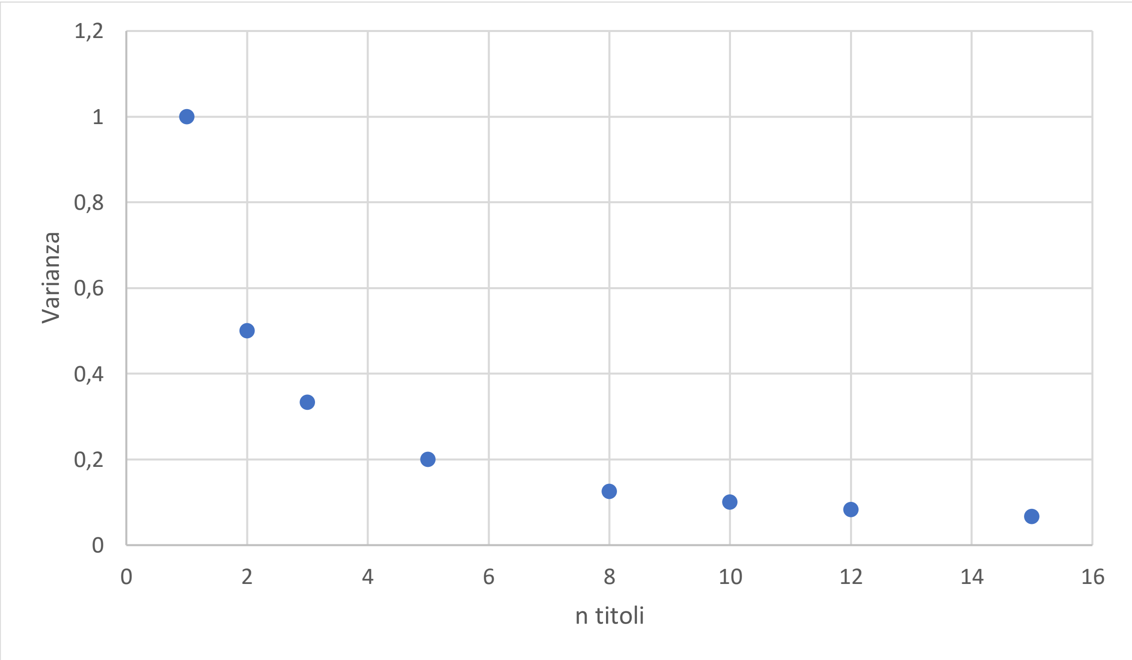

Figura 1.2: rappresentazione grafica della funzione della varianza del rendimento di un portafoglio in un grafico n titoli – varianza.

Come è possibile evincere dal grafico, all'aumentare del numero di titoli la varianza diminuisce, perciò la diversificazione riduce il rischio. Per $n \to \infty$, la varianza tende a 0. Consideriamo ora un altro esempio numerico. Ipotizziamo che gli n titoli che compongono il portafoglio siano correlati e che ciascuna coppia di rendimenti abbia covarianza $cov(r_i, r_j) = 0{,}4$ per $i \neq j$. La varianza di tale portafoglio sarà

$$var(r) = E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(r_i - \bar{r})\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(r_j - \bar{r})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\sigma_{ij} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=j}\sigma_{ij} + \sum_{i\neq j}\sigma_{ij}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[n\sigma^2 + 0{,}4(n^2 - n)\sigma^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 0{,}4\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 0{,}6\frac{\sigma^2}{n} + 0{,}4\sigma^2$$

$$= \sigma^2\left(0{,}6\frac{1}{n} + 0{,}4\right)$$

Ipotizziamo che la varianza di ciascun titolo sia unitaria. La formula della varianza del rendimento del portafoglio diventa così

$$var(r) = \left(0{,}6\frac{1}{n} + 0{,}4\right)$$

Possiamo rappresentare la varianza di questo portafoglio in funzione di n nel seguente grafico

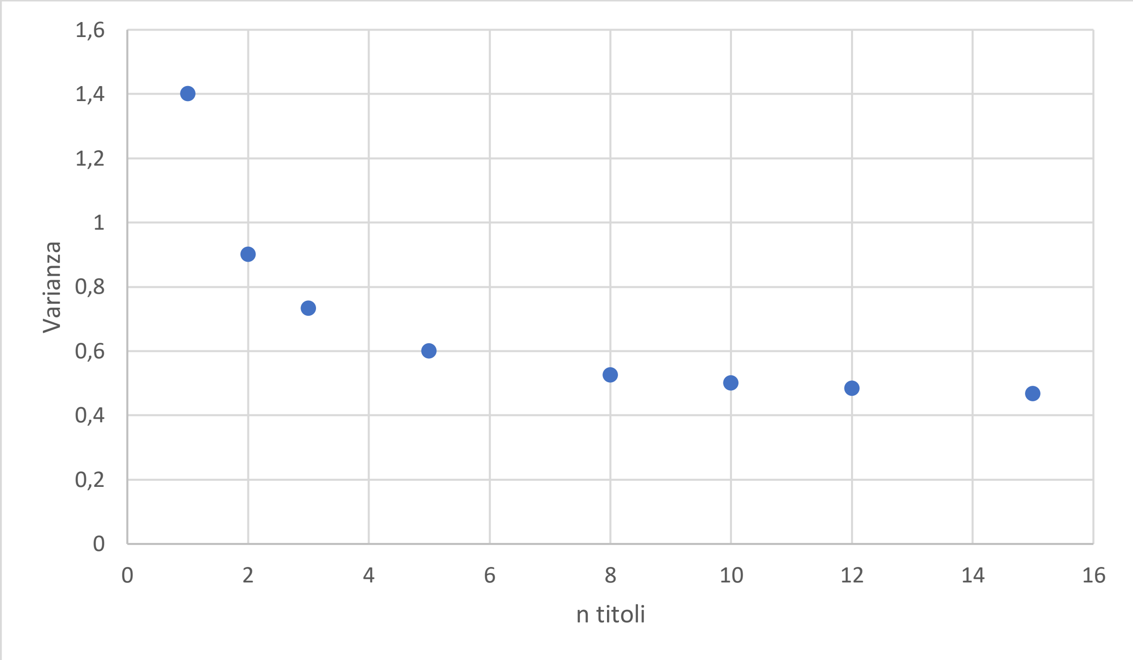

Figura 1.3: rappresentazione grafica della funzione della varianza del rendimento di un portafoglio in un grafico n titoli – varianza.

In questo caso la varianza non può essere ridotta al di sotto di 0,4 σ^2, indipendentemente dalla dimensione di n. Pertanto per $n \to \infty$, la varianza tende al valore della covarianza. Per tale motivo, anche nel caso in cui i titoli non siano indipendenti, la diversificazione riduce il rischio del portafoglio.

Possiamo giungere alla conclusione che in un portafoglio equiripartito di n titoli, aventi media m e varianza σ^2, sia nel caso che tutti i titoli siano indipendenti tra loro, che nel caso in cui siano tutti correlati tra di loro secondo una data covarianza, la diversificazione riduce il rischio del portafoglio. Le ipotesi fatte nei due esempi sono servite per semplificare i calcoli e la rappresentazione grafica della varianza del rendimento del portafoglio; ciò non toglie che i benefici di riduzione del rischio, derivanti dalla diversificazione, possono essere ottenuti considerando qualsiasi portafoglio i cui i titoli non siano tuti perfettamente correlati tra loro.

1.4 Portafoglio composto da 2 titoli

Consideriamo un portafoglio composto d 2 titoli. Questi titoli possono essere combinati secondo determinate percentuali per comporre un portafoglio. La possibilità di combinare i titoli conferendogli diversi pesi permette di creare non unico portafoglio, bensì una famiglia di portafogli. Denotiamo x il peso del titolo 1 all'interno del portafoglio, di conseguenza il titolo 2 avrà un peso pari a $1 - x$. Nell'ipotesi che non siano possibili le vendite allo scoperto, il peso x può variare all'interno dell'intervallo $[0, 1]$. Nel caso in cui fosse consentita, esso potrebbe assumere un valore esterno all'intervallo, rendendo negativo uno dei due pesi. Possiamo rappresentare i suddetti titoli in un grafico media-varianza. Al variare di x i differenti portafogli che possono essere creati formano una curva che include i due titoli. La forma della curva dei portafogli che possono essere creati combinando i due titoli varia a seconda della covarianza che lega i due titoli, e dunque dal coefficiente di correlazione che li lega. Considerando il grafico 1.4, la parte continua della curva corrisponde a combinazioni positive dei due titoli, mentre la parte tratteggiata corrisponde alla vendita allo scoperto di uno dei due titoli. Secondo il lemma del diagramma del portafoglio la curva definita in un grafico rendimento-varianza da combinazioni non negative dei due titoli giace all'interno della regione triangolare definita dai due titoli e dal punto dell'asse verticale di altezza $K = (\bar{r}_1\sigma_2 + \bar{r}_2\sigma_1)/(\sigma_1 + \sigma_2)$. È possibile dimostrare tale enunciato partendo dal tasso di rendimento del portafoglio, $r(x) = xr_1 + (1 - x)r_2$, da cui possiamo ricavare il valore medio: $\bar{r}(x) = x\bar{r}_1 + (1 - x)\bar{r}_2$. Tale equazione evidenzia la relazione di proporzionalità diretta che lega il valore medio alla quantità dei titoli. La deviazione standard del rendimento del portafoglio sarà

$$\sigma(x) = \sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_{12}} \tag{1.24}$$

che può essere riscritta in funzione del coefficiente di correlazione:

$$\sigma(x) = \sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \tag{1.25}$$

Il coefficiente di correlazione ρ può variare all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$. Possiamo ricavare delle stime calcolando i valori che la deviazione standard assume agli estremi di tale intervallo. Per $\rho = 1$ ricaviamo il limite superiore

$$\sigma(x) = \sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \sqrt{[x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2]^2}$$

$$= x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \qquad (1.26)$$

Per $\rho = -1$ ricaviamo il limite inferiore

$$\sigma(x) = \sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + -2x(1-x)\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \sqrt{[x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2]^2}$$

$$= |x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2| \qquad (1.27)$$

Considerando l'espressione del limite superiore, essa è lineare in *x*, come l'espressione della media. Considerando entrambe le formule, possiamo notare che esse variano proporzionalmente ad *x* nell'intervallo di valori che *x* può assumere in $[0; 1]$. Al variare di *x* in tale intervallo, il punto corrispondente al portafoglio si muove sulla retta che unisce i due titoli. Considerando l'espressione del limite inferiore, possiamo notare che anche essa è lineare in *x* ignorando il segno di valore assoluto. Il termine all'interno del valore assoluto è positivo fin quando x assume un valore nell'intervallo $[0, \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2})$ ed l'espressione diventa $\mathrm{x}\sigma_1 - (1-\mathrm{x})\sigma_2$, mentre per *x* che assume valori nell'intervallo $(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}, 1]$, il termine all'interno del segno di valore assoluto cambia di segno e diventa negativo , l'espressione diventa $(1-\mathrm{x})\sigma_2 - \mathrm{x}\sigma_1$. Il cambiamento di segno avviene nel punto K. Le due espressioni lineari e l'espressione lineare della media implicano che il limite inferiore dia luogo ad una linea spezzata.

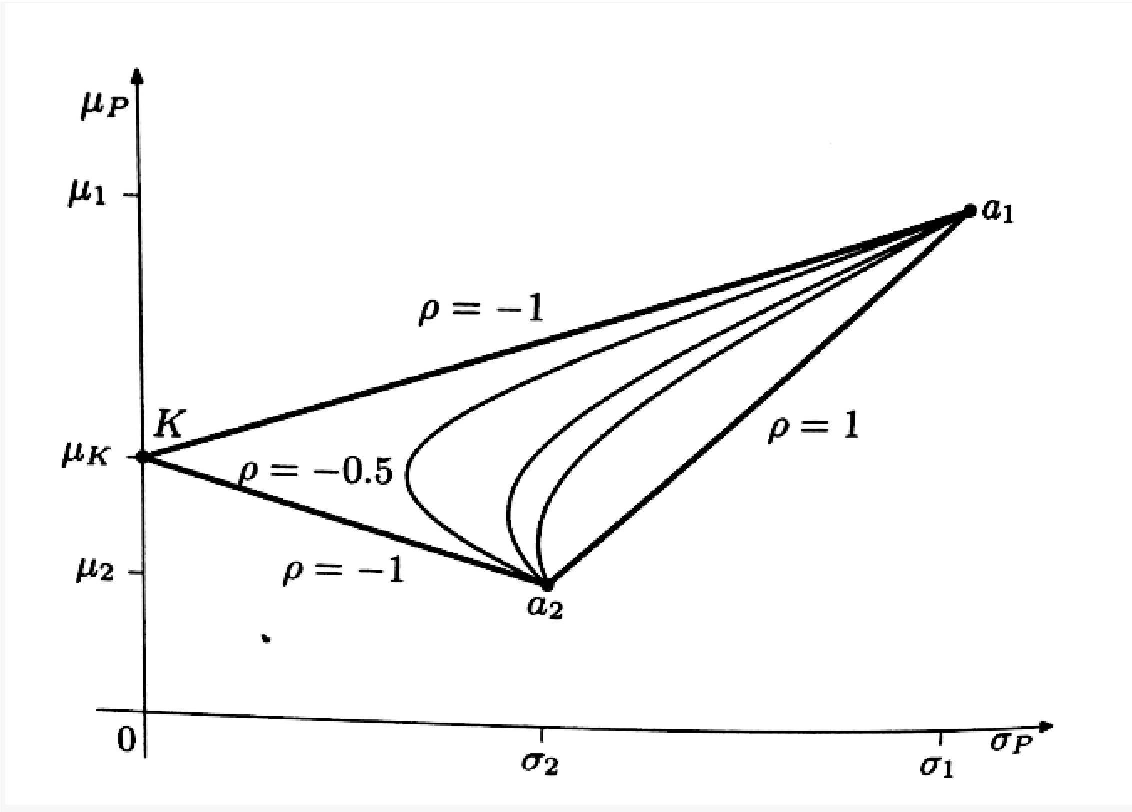

Figura 1.4: rappresentazione grafica delle combinazioni di due titoli (cf. Castellani G. et. al., 2005).

1.5 Portafoglio costituito da n titoli

Ipotizziamo che siano disponibili *n* titoli. Essi possono essere rappresentati come punti nel grafico media-deviazione standard. Ipotizziamo di costruire dei portafogli costituiti da questi *n* titoli utilizzando tutte le combinazioni di pesi possibili. I pesi dei titoli all'interno di un portafoglio sono espressi dai coefficiente w_i, tali che $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. I portafogli possono essere rappresentati anch'essi come punti del piano. L'insieme dei punti corrispondenti a tutti i diversi portafogli che possono essere creati è detto insieme possibile. Tale insieme soddisfa due importanti proprietà.

La prima è che se si hanno almeno 3 titoli non perfettamente correlati e con medie diverse, l'insieme sarà una regione bidimensionale continua. Sappiamo infatti che ogni coppia di titoli definisce una curva tra i punti che rappresentano i titoli stessi e che a ogni punto della curva corrisponde una diversa combinazione dei pesi dei 2 titoli. Come è stato già dimostrato, nel caso in cui si abbia una correlazione perfetta, la curva assume la forma di una retta. Consideriamo tre titoli: 1, 2 e 3, come nel grafico 1.2. Ogni coppia di titoli da origine ad un arco di curva. Tre diversi titoli permettono di creare tre diverse coppie di due titoli, perciò tre titoli generano tre curve. Possiamo considerare i titoli 2 e 3. Questi titoli possono essere combinati per costituire il titolo 4. Possiamo combinare questo titolo con il titolo 1, definendo una curva che unisce i punti 1 e 4. Dal momento che il titolo 4 può oscillare lungo la linea che collega i titoli 2 e 3, la linea che collega i titoli 1 e 4 traccia una regione continua.

La seconda proprietà è tale per cui la regione possibile è convessa verso sinistra. È possibile dimostrarla scegliendo due punti qualsiasi della regione: la retta che li unisce non attraversa il bordo sinistro dell'insieme possibile.

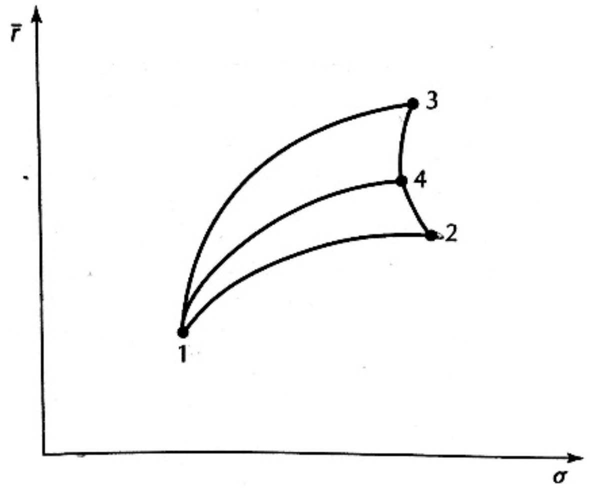

Figura 1.5: rappresentazione grafica delle proprietà di bidimensionalità e continuità dell'insieme possibile, dati 3 titoli (cf. Luenberger D. G., 2011).

Dopo aver esposto la nozione di insieme possibile ed aver esposto le sue proprietà, è necessario precisare che la regione possibile e la sua rappresentazione grafica variano a seconda o meno che si ammetta la vendita allo scoperto. Le proprietà valgono in entrambi i casi, ma la regione dell'insieme possibile la cui definizione ammette la vendita allo scoperto è più estesa e contiene la regione definita escludendo la vendita allo scoperto.

1.5.1 Frontiera efficiente

Markowitz ipotizzò che tutti gli investitori fossero razionali, dunque che fossero massimizzatori di profitto e avversi al rischio.
Ipotizziamo che un investitore possa scegliere solo i portafogli a cui corrispondono i punti giacenti su una determinata retta orizzontale nel piano deviazione standard – rendimento medio. Tutti i punti che giacciono su questa retta parallela all'asse delle ascisse hanno uguale rendimento ma diversa deviazione standard. Tutti gli investitori razionali preferiranno il portafoglio situato all'estremità sinistra, perché dotato della varianza minima per un certo rendimento. Tale propensione degli investitori è detta avversione al rischio, dal momento che vogliono minimizzare il rischio. La curva che unisce tutti i punti di minima varianza dell'insieme possibile è detta insieme di minima varianza: per ogni valore del tasso di rendimento medio, il punto corrispondente sulla frontiera efficiente ha la deviazione standard minore. Il punto dell'insieme possibile avente la variazione standard minore è detto punto di minima varianza. Gli investitori razionali sceglieranno sempre un punto situato nell'insieme di varianza minima.
Ipotizziamo ora che la scelta del portafoglio di un investitore sia limitata ai punti possibili giacenti su una retta parallela all'asse delle ordinate nel piano rendimento medio – deviazione standard. Gli investitori razionali preferiranno il portafoglio situato all'estremità in alto, perché dotato di rendimento massimo per una certa varianza. Tale propensione degli investitori è detta insaziabilità, dal momento che vogliono massimizzare il rendimento. Un investitore avverso al rischio e caratterizzato da insaziabilità sarà interessato alla parte dell'insieme di minima varianza costituita dai punti che abbiano il rendimento maggiore per ogni varianza data, come mostrato nel grafico 1.6. Tale insieme di punti è denominata frontiera efficiente. Essa è costituita solo da portafogli che hanno la varianza minima per un dato rendimento o egualmente i portafogli

che hanno il rendimento maggiore per una certa varianza. I portafogli che costituiscono la frontiera efficiente sono detti portafogli efficienti.

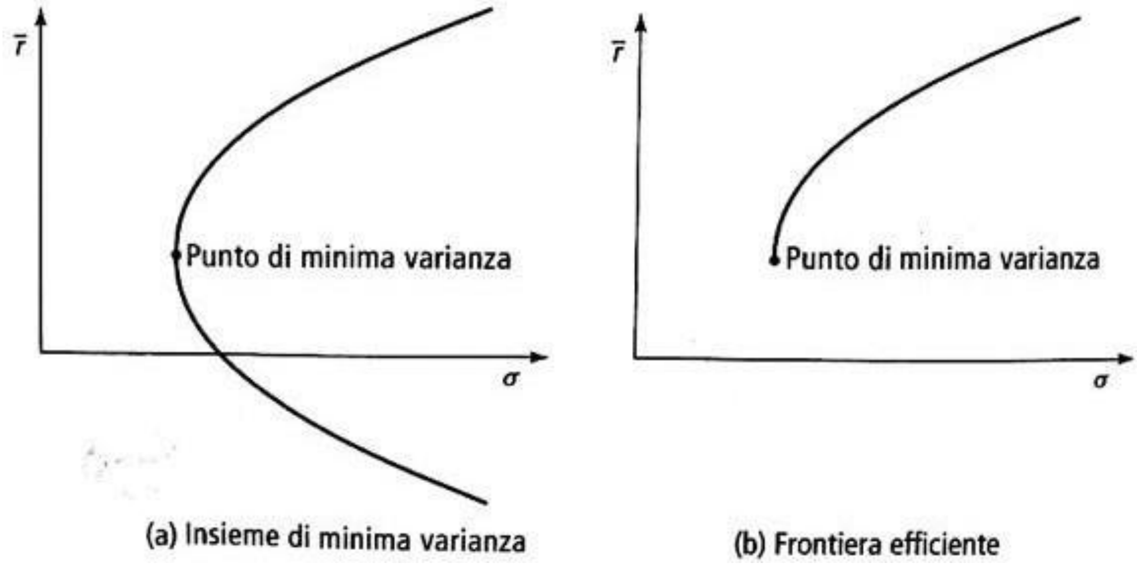

Figura 1.6: rappresentazione grafica dell'insieme di minima varianza e della frontiera efficiente (cf. Luenberger D. G., 2011).

1.6 Il Modello di Markowitz

Markowitz formulò un problema matematico che permettesse di individuare i portafogli di minima varianza. Ipotizziamo che siano disponibili *n* titoli. I tassi di rendimenti attesi sono $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ e le covarianze sono σ_{ij}, per $i, j = 1,2, \dots, n$. Ogni portafoglio è costituito da n pesi w_i, con $i = 1,2, \dots, n$, che possono essere anche negativi e la cui somma è 1. Il problema matematico, scelto un valore medio $\bar{r}$ in modo arbitrario, prevede di individuare il portafoglio di minima varianza tra i portafogli possibili aventi tale valore medio (cf. Luenberger D. G., 2011). Può essere formulato nel modo seguente:

$$\text{minimizza} \qquad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{1.28}$$

$$\text{con vincoli} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \tag{1.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1.30}$$

Il problema di Markowitz costituisce la base della teoria degli investimenti in titoli rischiosi su un singolo periodo. Esso mette in evidenza la relazione tra tasso di rendimento atteso e la varianza del tasso di rendimento di un portafoglio. È possibile trovare le condizioni per una soluzione di questo problema utilizzando i moltiplicatori di Lagrange λ e μ. Scriviamo la funzione Lagrangiana convertendo i vincoli in equazioni aventi zero come membro destro. Ogni termine sinistro è stato poi moltiplicato per il corrispondente moltiplicatore di Lagrange e sottratto alla funzione obiettivo. Nella formula, λ e μ sono rispettivamente i moltiplicatori per il primo e il secondo vincolo. Scriviamo la funzione lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{r}\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$$

Differenziamo la Lagrangiana rispetto a ciascuna variabile w_i e poniamo questa derivata uguale a 0. Ricaviamo

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0$$

Pertanto, in un portafoglio efficiente e con possibilità di vendita allo scoperto, avente tasso di rendimento medio $\bar{r}$, gli *n* pesi w_i, per $i = 1,2, \dots, n$ e i due moltiplicatori di Lagrange λ e μ soddisfano le seguenti equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad \text{per } i = 1,2, \dots, n \tag{1.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Abbiamo così ottenuto *n* equazioni e le due equazioni dei vincoli, per un totale di *n* + 2 equazioni in *n* + 2 incognite, ovvero gli *n* valori w_i e i due moltiplicatori di Lagrange, λ e μ. Tutte le n + 2 equazioni sono lineari e quindi possono essere risolte con metodi di algebra lineare.

Nel calcolo precedente, era ammessa la vendita allo scoperto, perciò i segni delle variabili w_i non erano vincolati, e dunque le variabili potevano assumere valori negativi. È possibile escludere la vendita allo scoperto imponendo che ciascun w_i sia non negativo, arrivando a un'enunciazione alternativa del problema di Markowitz:

$$\text{minimizza} \qquad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\text{con vincolo} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \qquad \text{per } i = 1,2,\ldots,n$$

Questa enunciazione alternativa del problema di Markowitz non può essere ridotta alla soluzione di una serie di equazioni lineari, ma essendo la funzione obiettivo quadratica e i vincoli uguaglianze e disuguaglianze lineari, occorre un programma quadratico.

Tra le due formulazioni esiste un'importante differenza: quando è ammessa la vendita allo scoperto, quasi tutti i valori w_i hanno valori diversi da zero, dunque vengono utilizzati quasi tutti i titoli, mentre quando non è ammessa, molti valori sono uguali a zero.

1.6.1 Teorema dei due fondi

Consideriamo l'insieme di minima varianza e il sistema a n + 2 equazioni che devono essere soddisfatte

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad \text{per } i = 1,2,\ldots,n \tag{1.32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \tag{1.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1.34}$$

Ipotizziamo che siano note due soluzioni, $w^1 = w_1^1, w_2^1, \dots, w_n^1, \lambda^1, \mu^1$ e $w^2 = w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2, \lambda^2, \mu^2$, con tassi di rendimento attesi rispettivamente $\bar{r}^1$ e $\bar{r}^2$. È possibile formare una nuova combinazione moltiplicando la prima soluzione per x e la seconda per $1 - x$ e sommando i prodotti, ottenendo $xw^1 + (1 - x)w^2$. Sostituendo tale somma nel sistema di equazioni si ricava che anche essa è una soluzione. Tale soluzione corrisponde al valore atteso $x\bar{r}^1 + (1 - x)\bar{r}^2$. Nel dettaglio possiamo dimostrare che $xw^1 + (1 - x)w^2$ costituisce una un portafoglio dell'insieme di minima varianza verificando che rispetti i vincoli del problema di Markowitz. Possiamo verificare il vincolo 1.34 sommando i pesi al suo interno, $xw^1 + (1 - x)w^2$, ovvero $xw_1^1 + xw_2^1 + \dots + xw_n^1 + x\,\lambda^1 + x\mu^1 + (1 - x)w_1^2 + (1 - x)w_2^2 + \dots + (1 - x)w_n^2 + (1 - x)\lambda^2 + (1 - x)\mu^2$. Svolgendo i calcoli e facendo le opportune semplificazioni, si evince che la soma di tale pesi è pari a 1 e dunque il vincolo 1.34 è rispettato. Dal momento che il rendimento atteso è pari a $\sum_{i=1}^{n} xw^1{}_i\bar{r}_i^1 + \sum_{i=1}^{n}(1 - x)w^2{}_i\bar{r}_i^2 = x\bar{r}^1 + (1 - x)\bar{r}^2$, notiamo che anche il vincolo 1.33 è soddisfatto. Infine, sostituendo tale soluzione all'interno dell'equazione 1.32 possiamo notare che rende il membro sinistro uguale a zero, perciò costituisce una soluzione. Dopo tali dimostrazioni, è possibile affermare che $xw^1 + (1 - x)w^2$ essendo una soluzione, rappresenta un punto dell'insieme di minima varianza. Tale risultato evidenzia un'importante proprietà dell'insieme di minima varianza. Essendo w^1 e w^2 due differenti portafogli dell'insieme di minima varianza, allora al variare di x nell'intervallo $(-\infty; \infty)$, i portafogli $x\bar{r}^1 + (1 - x)\bar{r}^2$ coprono l'intero insieme di minima varianza. Se scegliessimo come soluzioni iniziali due soluzioni efficienti, ovvero appartenenti alla frontiera efficiente, essi genererebbero tutti gli altri punti efficienti. Ne consegue che, dati due fondi efficienti, tutti i portafogli efficienti possono essere riprodotti, in termini di media e varianza, come loro combinazione e quindi gli investitori che cercano portafogli efficienti devono semplicemente investire in combinazioni di questi due fondi (cf. Luenberger D. G., 2011). Da tale teorema segue un'importante implicazione: due fondi comuni infatti sarebbero in grado di fornire un servizio di investimento completo per qualunque investitore, perciò non sarebbe necessario acquistare separatamente singoli titoli azionari, ma sarebbe sufficiente acquistare una possibile combinazione delle quote dei fondi comuni. Alla base di tale implicazioni vi sono però gli assunti che ogni investitore sia interessato solo alla media e alla varianza, che valuti allo stesso modo le medie, le varianze e le covarianze; e che l'intervallo di tempo uniperiodale di investimento sia appropriato.

1.7 Inclusione di un titolo non rischioso nel modello di Markowitz

Per il problema di Markowitz e per l'enunciazione del teorema dei due fondi, abbiamo assunto che gli n titoli disponibili fossero rischiosi, ovvero che ognuno di essi avesse $\sigma > 0$. I titoli non rischiosi sono tali perché hanno rendimenti deterministici, ovvero $\sigma = 0$. Includendo il titolo non rischioso nel portafoglio, si intende la possibilità di concedere o ottenere un prestito al tasso senza rischio. Concedere un prestito corrisponde a un titolo non rischioso con peso positivo, mentre riceverlo corrisponde a un titolo non rischioso con peso negativo. L'inclusione di un titolo non rischioso introduce una degenerazione matematica che semplifica la forma della frontiera efficiente. Per determinare la forma che assume la frontiera efficiente, iniziamo con l'ipotizzare che sia disponibile un titolo non rischioso con tasso di rendimento r_f. Consideriamo ora un titolo rischioso con tasso di rendimento r, avente media $\bar{r}$ e varianza σ^2. La covarianza dei rendimenti di questi due titoli è zero dal momento che $E\left[(r-\bar{r})\left(r_f - r_f\right)\right] = 0$. Ipotizziamo ora di formare un portafoglio utilizzando il peso x per il titolo non rischioso e il peso $1 - x$ per il titolo rischioso. Il tasso di rendimento di questo portafoglio sarà $xr_f + (1-x)\bar{r}$ e la deviazione standard sarà $\sqrt{(1-x)^2\sigma^2} = (1-x)\sigma$, ovvero la deviazione standard del titolo rischioso per la quota di portafoglio investita, poiché il titolo non rischioso ha varianza pari a zero e covarianza nulla con il titolo rischioso. Possiamo notare che la media e la deviazione standard del portafoglio variano linearmente con x: il punto che rappresenta la combinazione di questi due titoli traccia una linea retta nel piano ascisse-ordinate al variare di x. Ipotizziamo ora che vi siano n titoli rischiosi con tassi di rendimento noti $\bar{r}_i$ e covarianze σ_{ij}. Costruiamo la regione possibile degli n titoli rischiosi escludendo la vendita allo scoperto. Combiniamo ciascun portafoglio di tale regione con il titolo non rischioso, che è rappresentato dal punto nel piano con coordinate $(0, r_f)$, consentendo che possa sia essere preso o ricevuto in prestito. Ogni possibile combinazione tra un portafoglio e il titolo non rischioso genera una retta che ha origine nel punto $(0, r_f)$, passa per il portafoglio e che si prolunga all'infinito. L'insieme di queste semirette forma un triangolo infinito come regione possibile. Se non è consentita la vendita allo scoperto del titolo rischioso, il punto del titolo non rischioso e l'insieme possibile dei titoli non rischiosi, sono collegati da segmenti. Tali segmenti non possono essere prolungati, poiché implicherebbe l'ottenimento del titolo non rischioso in prestito. L'insieme di questi segmenti finiti conduce alla definizione di una nuova regione possibile.

Quando è consentito dare e ricevere in prestito il titolo non rischioso l'insieme efficiente, nel caso in cui sia permessa la vendita allo scoperto, è costituito da una semiretta che ha origine nel punto non rischioso e che è tangente all'insieme possibile (il grafico (a) nell'immagine 1.7). Nel caso in cui non è ammessa la vendita allo scoperto la frontiera efficiente è costituita da una funzione definita a tratti: la prima parte della funzione è un segmento ha origine nel punto $(0, r_f)$ ed è tangente all'insieme possibile nel punto O; la seconda parte della funzione è costituita dalla parte di frontiera efficiente dell'insieme possibile a destra del punto O (il grafico (b) nell'immagine 1.7).

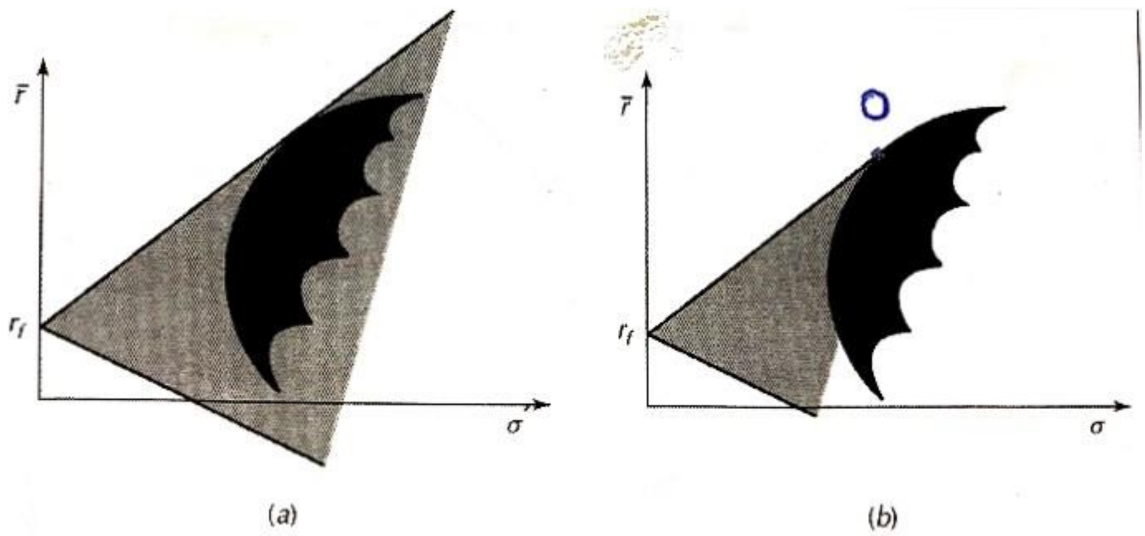

Figura 1.7: rappresentazione grafica dell'insieme di minima varianza nel caso sia incluso un titolo non rischioso nel modello di Markowitz (cf. Luenberger D. G., 2011).

1.7.1 Teorema di un fondo

Consideriamo il caso in cui sia ammessa la vendita allo scoperto del titolo rischioso. L'insieme efficiente è costituito da una semiretta che ha origine nel punto non rischioso e che è tangente all'insieme possibile in unico punto. Denotiamo questo punto con la lettera F. Qualsiasi punto efficiente, ovvero qualsiasi punto della semiretta, può essere ottenuto combinando il portafoglio rappresentato dal punto F e il titolo non rischioso e variando i pesi dei due titoli. Il portafoglio rappresentato dal punto di tangenza può essere considerato come un fondo costituito da titoli e venduto come un'unità. È possibile ora enunciare il teorema di un fondo. Per tale teorema esiste un unico fondo F di titoli rischiosi tali che, qualsiasi portafoglio efficiente può essere ottenuto come combinazione del fondo F e del titolo non rischioso (cf. Luenberger D. G., 2011).

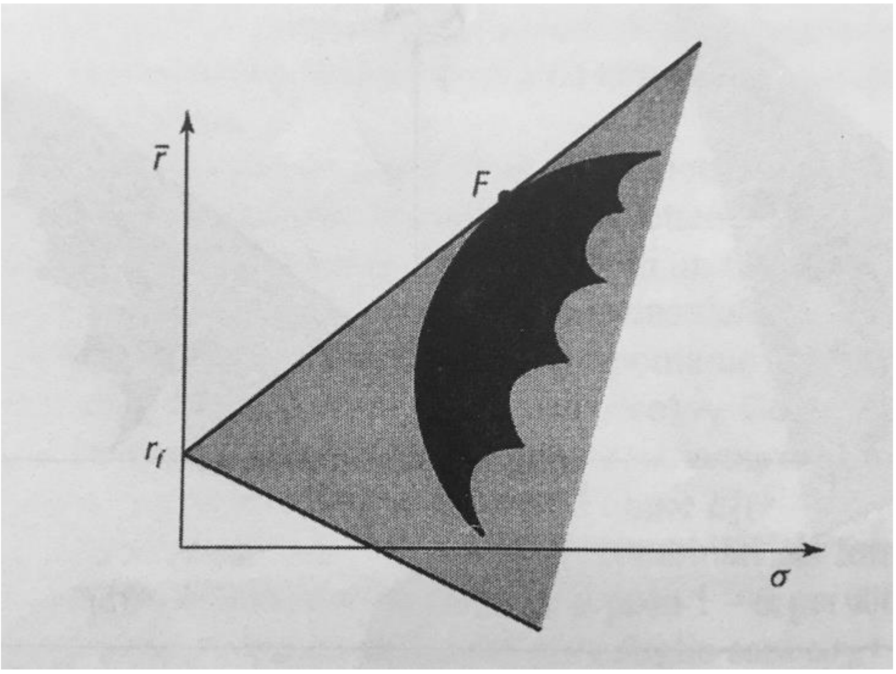

Figura 1.8: rappresentazione grafica del teorema di un fondo (cf. Luenberger D. G., 2011).

Per calcolare il punto di tangenza che rappresenta il fondo efficiente occorre definire tale punto in termini di soluzione di un problema di ottimizzazione. Dato un punto della regione possibile, tracciamo una retta che unisca il titolo non rischioso a tale punto. Indichiamo con α l'angolo formato dalla retta e dall'asse orizzontale. Per ogni portafoglio possibile p abbiamo

$$\tan\alpha = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \tag{1.35}$$

Il portafoglio tangente è il punto dell'insieme possibile che massimizza $\tan\alpha$. Il portafoglio è costituito da n titoli rischiosi con pesi w_i e rendimenti attesi $\bar{r}_i$. Abbiamo che $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\bar{r}_i$, $r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i\,r_f$ e $\sigma_p = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j}$. Possiamo, sostituendo tali valori nella formula della tangente, ottenere

$$\tan\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(\bar{r}_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j}} \tag{1.36}$$

Deriviamo $\tan\alpha$ rispetto a ciascun w_k e uguagliamo ogni derivata a zero, ottenendo le equazioni:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}\,\lambda w_i = \bar{r}_k - r_f \qquad k = 1,2,\dots,n \tag{1.37}$$

La costante λ non è nota. Sostituiamo $v_i = \lambda w_i$ per ogni i:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}\,v_i = \bar{r}_k - r_f \qquad k = 1,2,\dots,n \tag{1.38}$$

Risolviamo queste equazioni lineari rispetto ai valori v_i e normalizziamo per determinare i valori w_i:

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_k} \tag{1.39}$$

1.8 Funzioni di utilità

Nell'approccio media-varianza il processo di scelta di portafoglio si divide in due fasi. Nella prima fase, detta fase di ottimizzazione, vengono individuati i portafogli efficienti, ovvero gli ottimi paretiani, definiti sulla base delle sole caratteristiche probabilistiche, sintetizzate da media e varianza del rendimento. Tra questi portafogli nessuno è preferibile agli altri se non si adottano criteri di preferenza rispetto al rischio (cf. Castellani G. et al., 2005). Nella seconda fase, detta fase di massimizzazione, si adottano criteri di preferenza rispetto al rischio, specificando le caratteristiche di avversione al rischio dell'investitore, che determinano la scelta conclusiva tra i portafogli efficienti. Se l'intero processo è coerente con la teoria dell'utilità, questa scelta equivale a selezionare il portafoglio che massimizza l'utilità attesa.

Il criterio media-varianza utilizzato nel problema del portafoglio di Markowitz può essere conciliato con l'approccio dell'utilità attesa ricorrendo ad una funzione di utilità (ad esempio di tipo quadratico) oppure assumendo che le variabili aleatorie che caratterizzano il rendimento siano variabili aleatorie normali. Iniziamo definendo una funzione di utilità e illustrando le sue principali proprietà.

Ipotizziamo di poter scegliere diverse opportunità di investimento. Nel caso i cui i rendimenti siano deterministici, sceglieremmo l'investimento che produce il rendimento maggiore. Nel caso in cui i rendimenti siano aleatori, la ricchezza futura dipenderà da variabili aleatorie e la scelta non è ovvia, bensì occorre classificare i livelli dir ricchezza aleatori attraverso una funzione di utilità. Essa è una funzione definita su numeri reali, che rappresentano diversi livelli di ricchezza, e a valori reali. Definita una funzione di utilità, tutti i livelli di ricchezza alternativi sono classificati in base ai valori di utilità corrispondenti. In particolare, due variabili aleatorie, x e y, si confrontano valutando i corrispondenti valori $E[U(x)]$ ed $E[U(y)]$, tra cui si preferisce il valore più grande. La funziona di utilità varia per ogni individuo, tenendo conto della sua avversione al rischio e dal suo ambiente finanziario. L'unico vincolo che una funzione di utilità deve avere riguardo la forma è che essa sia crescente e continua. Possiamo tradurre in valori numerici il vincolo di crescenza di una funzione di utilità attraverso l'uso delle derivate. Poiché la funzione U(x) è crescente rispetto a x se $U'(x) > 0$, richiederemo, per quanto detto, che la funzione sia dotata d derivata prima.

Le funzioni di utilità godono di una proprietà che permette di trasformare una funzione attraverso operazioni elementari senza che ciò abbia influenza sulla classificazione. In generale data una funzione di utilità $U(x)$, ogni funzione della forma

$$V(x) = aU(x) + b \qquad \text{con} \quad a > 0 \tag{1.40}$$

è una funzione di utilità equivalente a $U(x)$. Le funzioni di utilità equivalenti producono classificazioni identiche. Analizziamo tale enunciato. Consideriamo una funzione di utilità U(x) e definiamo una funzione alternativa $V(x) = U(x) + b$. Il valore atteso di entrambe le funzioni sarà rispettivamente $E[U(x)]$ e $E[V(x)] = E[U(x) + b] = E[U(x)] + b$. Quindi i nuovi valori di utilità attesi sono uguali alla somma dei vecchi valori e della costante b. Consideriamo ora la funzione di utilità U e una funzione alternativa $V(x) = aU(x)$, ottenuta moltiplicando la funzione U(x) per una costante a, con il vincolo $a > 0$. Il valore atteso delle funzioni di utilità sarà rispettivamente $E[U(x)]$ e $E[V(x)] = [aU(x)] = aE[U(x)]$. Tali proprietà delle funzioni equivalenti discendono dalla proprietà di linearità del calcolo del valore atteso.

Lo scopo principale di una funzione di utilità è di permettere di classificare le alternative tenendo conto del principio di avversione al rischio. Questo requisito è soddisfatto se la funzione è concava. Una funzione U definita su un intervallo reale $[a, b]$, si dice concava se per ogni α, con $0 \leq \alpha \leq 1$, e per ogni x e y appartenenti all'intervallo $[a, b]$ vale

$$U[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) \tag{1.41}$$

È invece concava in senso stretto se viene imposto che deve essere strettamente maggiore, eliminando il caso in cui le due funzioni possano coincidere. La condizione di concavità è soddisfatta se tracciando una retta tra due punti di una funzione, essa si trova al di sotto di essa oppure vi coincide. Possiamo tradurre in valori numerici il vincolo concavità di una funzione di utilità attraverso l'uso delle derivate. La funzione U(x) è concava rispetto a x se $U''(x) \leq 0$ (strettamente concava rispetto a x se $U''(x) < 0$.)

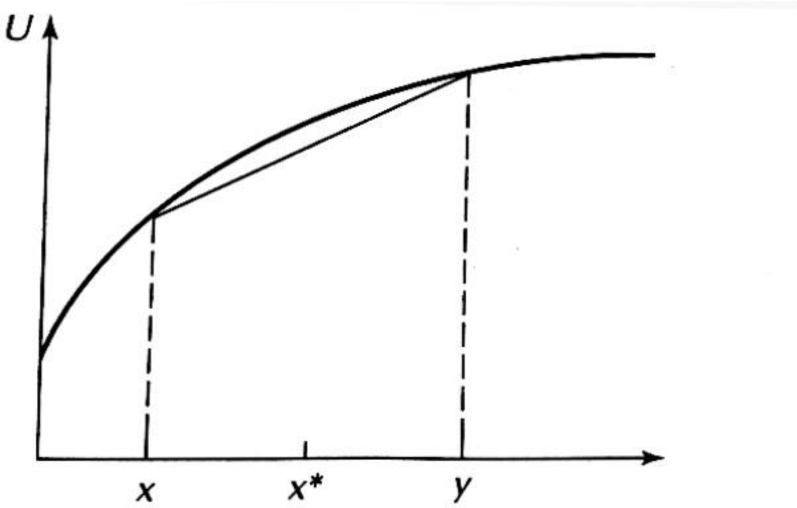

Figura 1.9: rappresentazione grafica dell'avversione al rischio degli investitori (cf. Luenberger D. G., 2011).

La concavità di una funzione è connessa all'avversione al rischio. Supponiamo di poter scegliere tra due alternative: la prima consiste nell'ottenere il valore *x* oppure il valore *y*, con probabilità 1/2 per entrambe le possibilità, mentre la seconda di ottenere con certezza il valore *x*/2+ *y*/2. Consideriamo il grafico 1.9: la funzione di utilità della prima alternativa è rappresentata dalla retta che collega i punti de piano $(x; U(x))$ e $(y; U(y))$, mentre la funzione di utilità della seconda è rappresentata dalla funzione di utilità U. L'utilità attesa della prima alternativa è uguale all'ordinata del punto della retta che ha ascissa x^*= x/2+ y/2, mentre l'utilità attesa della seconda alternativa è uguale all'ordinata del punto della funzione di utilità U che ha scissa x^*. Quest'ultimo valore, che è certo, ha un'utilità maggiore rispetto all'altro che è incerto. Il valore atteso di entrambe le alternative è uguale, ma sulla base dell'applicazione della teoria dell'utilità, quella non rischiosa viene preferita.

Il grado di avversione al rischio di una funzione utilità è legato alla sua curvatura, più la funzione è curva maggiore e l'avversione al rischio. Il grado di avversione al rischio è definito dal coefficiente di avversione al rischio assoluto di Arrow-Pratt (cf. Luenberger D. G., 2011):

$$a(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \tag{1.42}$$

Il termine $U'(x)$ viene usato al denominatore per normalizzare il coefficiente, rendendo $a(x)$ uguale per tutte le funzioni di utilità equivalenti tra loro. La funzione $a(x)$ espone il modo in cui l'avversione al rischio vari in relazione alla ricchezza. Generalmente l'avversione al rischio decresce all'aumentare della ricchezza, dal momento che gli individui sono maggiormente esposti ad assumersi rischi quando sono sicuri finanziariamente.

I valori dell'utilità di variabili di ricchezza aleatorie non hanno un valore reale: la loro funzione è classificare le diverse alternative. Esiste però una misura espressa nell'unità di ricchezza, ovvero l'equivalente certo. L'equivalente certo di una variabile di ricchezza aleatoria x è il valore C che soddisfa

$$U(C) = E[U(x)] \tag{1.43}$$

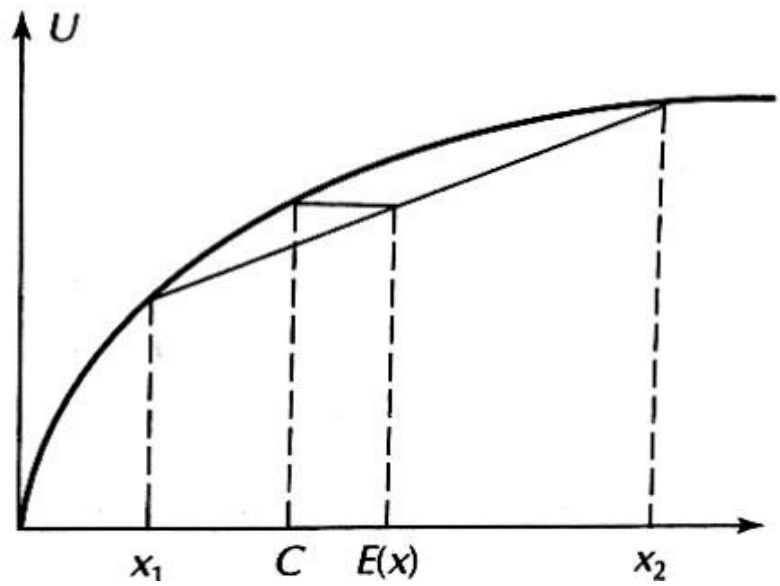

Figura 1.10: rappresentazione grafica dell'equivalente certo di una funzione di utilità (cf. Luenberger D. G., 2011).

L'equivalente certo di una variabile aleatoria è uguale per tutte le funzioni di utilità equivalenti. Per una funzione di utilità concava, l'equivalente certo di un risultato aleatorio è sempre minore o uguale al valore atteso, ovvero $C \leq E(x)$. Tale disuguaglianza esprime l'avversione al rischio di un investitore. Dati due risultati x_1 e x_2, è possibile ricavare l'equivalente certo spostandosi orizzontalmente verso sinistra dal punto in cui la retta tra $U(x_1)$ e $U(x_2)$ interseca la retta verticale passante per $E(x)$.

1.9 Funzioni di utilità e criterio di media-varianza

Dopo aver definito la funzione di utilità e illustrato le sue principali proprietà, possiamo analizzare come il criterio media-varianza utilizzato nel problema del portafoglio di Markowitz possa essere conciliato con l'approccio dell'utilità attesa ricorrendo ad una funzione di utilità quadratica oppure assumendo che le variabili aleatorie che caratterizzano il rendimento siano variabili aleatorie normali.

1.9.1 Utilità quadratica

La funzione di utilità quadratica può essere definita come $U(x) = ax - \left(\frac{1}{2}\right)bx^2$. Tale funzione va considerata solo nell'intervallo in cui $x \leq a/b$, in cui è crescente. Inoltre, per $b > 0$ la funzione è strettamente concava in ogni punto di tale intervallo e manifesta quindi avversione al rischio. Assumiamo che tutte le variabili aleatorie rilevanti abbiano valori compresi nell'intervallo in cui $x \leq a/b$. Ipotizziamo che un portafoglio abbia un valore di ricchezza aleatorio y. Utilizziamo il criterio dell'utilità attesa per valutare il portafoglio utilizzando il valore

$$E[U(x)] = E\left(ay - \frac{1}{2}by^2\right)$$

$$= aE(y) - \frac{1}{2}bE(y^2)$$

$$= aE(y) - \frac{1}{2}b[E(y)]^2 - \frac{1}{2}b\, var(y)$$

(1.44)

Il portafoglio ottimale è quello che massimizza questo valore rispetto a tutte le possibili scelte della variabile di ricchezza aleatoria y, fissato un livello di rischiosità. Possiamo considerare questo metodo equivalente all'approccio media-varianza. Supponiamo che la ricchezza iniziale sia uguale a 1, così che y corrisponde esattamente al rendimento R. Supponiamo inoltre che la soluzione abbia valore atteso $E(y) = M$. Possiamo dedurre che y deve avere varianza minima rispetto a tutti i possibili y con $E(y) = M = 1 + m$, dove m è il tasso di rendimento medio. Dal momento che $y = R$, la soluzione deve corrispondere a un punto efficiente secondo il criterio media-varianza. Scegliendo dei valori diversi per i parametri a e b si ottengono differenti punti efficienti dal punto di vista media-varianza (cf. Luenberger D. G., 2011).

1.9.2 Rendimenti normali

Quando tutti i rendimenti sono variabili aleatorie normali, il criterio media-varianza è equivalente all'approccio dell'utilità attesa anche per una qualsiasi funzione di utilità avversa al rischio. Una variabile aleatoria y è detta normale o gaussiana se la sua funzione di densità di probabilità è della forma (cf. Luenberger D. G., 2011):

$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi-\mu)^2} \quad (1.45)$$

Il valore atteso di x è $\bar{x} = \mu$ e la varianza di x è σ^2. Come è noto, questa funzione di densità ha la caratteristica forma campanulare. Per introdurre la proprietà della somma di due variabili aleatorie normali, è necessario prima introdurre la nozione di notazione matriciale. Indichiamo con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vettore di n variabili aleatorie. Il vettore atteso di questo vettore è il vettore $\bar{x}$, le cui componenti sono i valori attesi delle componenti di x. La matrice di covarianza associata a x è la matrice Q di dimensione

$n \: x \: n$, con componenti $[Q]_{ij} = cov(x_i, x_j)$. Se consideriamo x come un vettore colonna e x^T il corrispondente vettore riga, allora Q può essere espressa come

$$Q = E[(x - \bar{x})(x - x)^T] \qquad (1.46)$$

Se due variabili congiuntamente normali non sono correlate, si può notare che la funzione di densità congiunta si fattorizza in un prodotto di densità per le due variabili separate. Per tale motivo, se due variabili aleatorie congiuntamente normali non sono correlate, allora sono indipendenti.

Possiamo ora esporre la proprietà della somma di variabili aleatorie congiuntamente normali. Se x e y sono due variabili aleatorie congiuntamente normali, allora tutte le variabili aleatorie della forma $\alpha x + \beta y$, dove α e β sono costanti, sono anch'esse normali. Tale risultato si può estendere anche a somme di ordine superiore. Se x è un vettore colonna di variabili aleatorie congiuntamente normali e T è una matrice $m \: x \: n$, allora il vettore Tx è un vettore m-dimensionale di variabili aleatorie congiuntamente normali.

Consideriamo ora una variabile di ricchezza aleatoria y che sia una variabile aleatoria normale con valore medio M e deviazione standard σ. Avendo una distribuzione normale, la distribuzione di probabilità è completamente definita da M e σ, quindi l'utilità attesa è una funzione di M e σ, ovvero

$$E[U(y)] = f(M, \sigma) \qquad (1.47)$$

Se U manifesta avversione al rischio, $f(M, \sigma)$ sarà crescente rispetto a M e decrescente rispetto a σ. Ipotizziamo inoltre che i rendimenti di tutti i titoli siano variabili aleatorie normali. Per la proprietà della somma di variabili aleatorie congiuntamente normali, ogni combinazione lineare di questi titoli è a sua volta una variabile aleatoria normale, con una certa media e deviazione standard. Quindi il rendimento di ogni portafoglio costituito da questi titoli è una variabile aleatoria normale. Il problema della scelta del portafoglio consiste perciò nella scelta della combinazione di titoli che massimizza la funzione $f(M, \sigma)$. Per una funzione di utilità avversa al rischio, ciò implica che la varianza venga minimizzata per ogni media data, dunque la soluzione deve essere efficiente dal punto di vista del criterio media-varianza. È possibile quindi affermare che il criterio media-varianza è appropriato quando tutti i rendimenti sono variabili aleatorie normali.

1.10 Scelta di portafoglio

Definiamo un titolo come una variabile di remunerazione aleatoria, indicandolo con la lettera d. La remunerazione viene rivelata e ricevuta alla fine del periodo. A ciascun rendimento d_i è associato il prezzo P_i. Supponiamo che esistano n titoli di rendimento rispettivamente $d_1, d_2, \dots, d_n$. Un portafoglio di questi titoli è rappresentato da un vettore n-dimensionale $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Il componente θ_i rappresenta la quantità del titolo i nel portafoglio. La remunerazione del portafoglio è la variabile aleatoria

$$d = \sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i \tag{1.48}$$

Assumendo che sia rispettata la legge della linearità dei prezzi, il prezzo del portafoglio θ è

$$P = \sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i \tag{1.49}$$

Consideriamo ora una variabile aleatoria x e poniamo il vincolo che $x \geq 0$. Ipotizziamo che un investitore abbia una funzione di utilità U strettamente crescente e una ricchezza iniziale W. L'investitore desidera costruire un portafoglio per massimizzare l'utilità attesa della ricchezza finale, x. Definiamo il portafoglio con $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Il problema dell'investitore è (cf. Luenberger D. G., 2011):

$$\text{massimizzare} \qquad E[U(x)] \tag{1.50}$$

$$\text{con vincoli} \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i = x \tag{1.51}$$

$$x \geq 0 \tag{1.52}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i \leq W \tag{1.53}$$

In questo problema l'investitore desidera massimizzare l'utilità attesa della ricchezza finale con vincoli tali per cui la ricchezza finale x è definita dalla scelta di portafoglio, la ricchezza finale deve essere non negativa per ogni possibile esito e l'investitore deve scegliere un portafoglio di costo totale non superiore alla ricchezza iniziale W. Possiamo ora enunciare il teorema del portafoglio: supponendo che U(x) che sia continua e tendente all'infinito per $x \to \infty$ e inoltre che esista un portafoglio θ^0 tale che $\sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i > 0$, allora il problema della ricerca del portafoglio ottimale ha soluzione se e solo se non esistono possibilità di arbitraggio. Assumiamo perciò che non esistano opportunità di arbitraggio e che quindi esista un portafoglio ottimale, che indichiamo con θ^*. Assumiamo inoltre che la remunerazione corrispondente $x^* = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^* d_i$ soddisfi $x^* > 0$. È possibile dedurre che la disuguaglianza $\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i \leq W$ sarà soddisfatta con uguaglianza nella soluzione. L'unico vincolo da tenere in considerazione è quindi $\sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i = x$, che sostituiamo nella funzione obiettivo. Il problema di scelta del portafoglio ottimo diventa(cf. Luenberger D. G., 2011):

$$\text{massimizzare} \qquad E[U(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i)] \tag{1.54}$$

$$\text{con vincolo} \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i = x \tag{1.55}$$

Utilizziamo un moltiplicatore di Lagrange λ per il vincolo e utilizzando la formula $x^* = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^* d_i$ per la remunerazione del portafoglio ottimale, le condizioni necessarie si trovano differenziando la lagrangiana

$$L = E[U(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i)] - \lambda(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i - W) \tag{1.56}$$

rispetto a ciascun θ_i, ottenendo

$$E[U'(x^*) d_i] = \lambda P_i \qquad \text{per } i = 1,2, \dots, n \tag{1.57}$$

Tale formula rappresenta *n* equazioni, a cui si aggiunge il vincolo $\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i = W$, avendo così $n + 1$ equazioni per le $n + 1$ incognite $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ e λ, con $\lambda > 0$.

Se esiste un titolo non rischioso con rendimento totale R, l'equazione 1.57 deve valere quando $d_i = R$ e $P_i = 1$, ottenendo

$$\lambda = E[U'(x^*)]R \tag{1.58}$$

Sostituendo tale valore di λ nell'equazione 1.57 si ottiene

$$\frac{E[U'(x^*)d_i]}{E[U'(x^*)]} = P_i \tag{1.59}$$

È possibile esprimere la funzione 1.57 esplicitando P_i, utilizzando x^* per risalire ai prezzi. Scegliamo di indagare il caso particolare in cui $U(x) = \ln x$ e W=1. La variabile x^*è associata al portafoglio che massimizza il valore atteso del logaritmo della ricchezza finale. Possiamo sostituire R^* a x^*, dal momento che R^* è il rendimento ottimale per l'utilità logaritmica, che possiamo chiamare log-ottimale. Dato che $\ln x \; / \; dx = 1 \; / x$, l'equazione 1.57 diventa

$$E\left[\frac{d_i}{R^*}\right] = \lambda P_i \qquad \text{per ogni i} \tag{1.60}$$

Dal momento che questa equazione è valida per ogni titolo *i*, per la linearità essa è valida per il portafoglio log-ottimale stesso. Il portafoglio ha prezzo pari a 1, quindi troviamo che

$$1 = E\left[\frac{R^*}{R^*}\right] = \lambda \tag{1.61}$$

Abbiamo trovato quindi il valore di λ in questo caso.

Nel caso in cui volessimo trattare un titolo non rischioso, l'equazione 1.57 è valida anche per esso. Il titolo non rischioso ha remunerazione uguale a 1 e prezzo 1 / R, dove R è il rendimento totale senza rischio. Troviamo dunque

$$E\left[\frac{1}{R^*}\right] = \frac{1}{R} \tag{1.62}$$

Il valore atteso di 1 / R^* è uguale a 1 / R. Per $\lambda = 1$, l'equazione dei prezzi (1.60) diventa:

$$E\left[\frac{d_i}{R^*}\right] = P_i \tag{1.63}$$

Dal momento che questa equazione è valida per ogni titolo *i*, per linearità essa è valida per ogni portafoglio, quindi una relazione di prezzo generale per ogni portafoglio.

Possiamo dunque affermare che il prezzo P di qualsiasi titolo o portafoglio che abbia dividendo d e con R^* che rappresenta il rendimento del portafoglio log-ottimale, è

$$P = E\left[\frac{d}{R^*}\right] \tag{1.64}$$

CAPITOLO II

IL MODELLO DI MARKOWITZ NELLA CRISI FINANZIARIA DEL 2008

2.1 La teoria di Markowitz e la crisi finanziaria del 2008

La crisi finanziaria del 2008 è stata una crisi mondiale e ha scatenato una recessione globale. La crisi è iniziata tra il 2007 e il 2008 con lo scoppio della bolla dei prezzi del settore immobiliare e il conseguente deprezzamento del mercato dei mutui subprime negli Stati Uniti e si è ben presto trasformata in una crisi bancaria internazionale con il crollo di importanti istituzioni finanziarie come Lehman Brothers. Per scongiurare un collasso del sistema finanziario mondiale sono stati realizzati ingenti salvataggi. Alla crisi finanziaria è seguita una recessione economica globale, definita la Grande Recessione. Tale evento finanziario ha messo in crisi la teoria di scelta del portafoglio di Markowitz, mostrando i limiti dei suoi assunti. Nei seguenti paragrafi seguirà l'esposizione delle caratteristiche delle principali innovazioni finanziarie nate o sviluppatesi durante la crisi, necessarie per capire la concatenazione degli eventi. Dopo aver approfondito tali conoscenze sarà possibile esaminare le cause dalle quali è scaturita la crisi finanziaria e determinare le conseguenze che ha avuto. Infine, potremo analizzare le condizioni di mercato che caratterizzarono il periodo di crisi e confrontarle con gli assunti della teoria di Markowitz. Prima di concentrarsi sulla crisi del 2008 però occorre analizzare gli assunti della teoria di Markowitz al fine di evidenziarne le ipotesi sottostanti.

2.1.1 Assunti della teoria di Markowitz

La teoria di Markowitz, scelto un valore medio $\bar{r}$ in modo arbitrario, permette di individuare il portafoglio di minima varianza tra i portafogli possibili aventi tale valore medio. Lo studioso e teorico Harry Markowitz, fondò tale teoria sulla base di determinati assunti di rilevanza economico-finanziaria(Markowitz H. M., 1991). Uno delle principali assunti del modello di Markowitz è che il mercato sia perfettamente concorrenziale. Un'importante implicazione di tale ipotesi è che l'informazione sia perfetta. Da tale congettura ne deriva che il mercato sia efficiente. L'efficienza di un mercato può essere suddivisa in tre livelli in base al grado di informazione riflessa nei prezzi dei titoli (cf. Allen F. et. al., 2015). Il primo caso è il mercato efficiente in forma debole. In tale mercato i prezzi dei titoli riflettono le informazioni del passato e i titoli seguono un percorso casuale, detto ''random walk''. In tale mercato non è possibile stabilire l'andamento dei prezzi sulla base degli andamenti passati. Il secondo caso è il mercato efficiente in forma semiforte, in cui i prezzi dei titoli riflettono le informazioni disponibili pubblicamente. In tale mercato non solo i prezzi riflettono le informazioni del passato, ma i prezzi si aggiustano immediatamente al giungere di nuove informazioni, quali per esempio l'annuncio di utili, emissioni azionarie o fusioni. Infine è possibile considerare un terzo livello di efficienza di mercato, definito come mercato efficiente in forma forte, in cui i prezzi di mercato non riflettono solo le informazioni pubbliche, ma anche le informazioni a disposizione degli insider, ovvero soggetti inseriti nei management delle società. Assumendo che il mercato sia perfettamente concorrenziale, si sta implicitamente ipotizzando che esso sia efficiente in forma forte, ovvero che via sia perfetta informazione. Altre importante implicazioni dell'assunto che il mercato sia perfettamente concorrenziale è che i partecipanti siano price taker, ovvero che prendano il prezzo di mercato come dato e che gli agenti economici non siano in grado da soli di influenzare il mercato. Un altro assunto del teorema di Markowitz è che gli investitori siano perfettamente razionali e nello scegliere le diverse alternative di investimento siano interessati esclusivamente a massimizzare il valore atteso e a minimizzare la varianza. Alla base di tale ipotesi, si assume che gli investitori siano indifferenti alle perdite o ai guadagni passati e siano interessati solo alle aspettative di ricchezza futura e al rischio. Nella teoria del portafoglio inoltre si assume che non esistano costi di transazione e che le imposte siano trascurabili. I costi di transazione consistono nel tempo e nel denaro spesi per ricercare informazioni sugli altri agenti economici e il mercato per effettuare un'operazione finanziaria. I fattori che determinano i costi di transazione sono la razionalità limitata, l'asimmetria informativa, l'azzardo morale e la specificità di alcuni investimenti. Viene inoltre assunto che gli investitori abbiano accesso illimitato al capitale a un tasso di interesse privo di rischio. È assunto infine che gli investimenti avvengano in un unico periodo, valido per tutti i partecipanti al mercato. Markowitz inoltre considera l'orizzonte temporale degli investimenti uniperiodale. Mossin, nel 1968, ritenne tale assunto una limitazione operativa nel modello media-varianza e introdusse un modello multiperiodale, affermando che l'investitore dispone sempre di un intervallo temporale globale nel quale può massimizzare le preferenze, ma tale periodo può essere diviso in *n* sottoperiodi, al termine di ciascuno dei quali l'investitore può operare una ricomposizione degli investimenti. Mossin precisò che ogni decisione di investimento presa nel singolo sottoperiodo dipende dai guadagni e le perdite registrati nei precedenti intervalli di tempo e dalle opportunità di investimento che offrono i singoli intervalli di tempo futuri. Solo al termine dell'ultimo sottoperiodo può essere impostata la logica uniperiodale di Markowitz. Il problema in questo caso consiste nel massimizzare una funzione di utilità attesa intertemporale, in una funzione di utilità che varia a seconda dei risultati conseguiti. Secondo tale teoria gli investitori sono attenti ai rendimenti infraperiodali che consentono di ribilanciare il portafoglio.

2.2 Periodo antecedente la crisi

Negli anni ‘80, l’amministrazione Reagan diede inizio a un processo di deregolamentazione finanziaria che durò trent’anni. Il presidente della Federal Reserve, Alan Greenspan, nel 1999, abrogò il Glass-Steagall Act. Tale legge era stata emanata nel 1933 e aveva sancito la fine delle banche universali, scindendo l’attività commerciale, ovvero l’attività bancaria da quella di investimento (cf. Federal Reserve History). L’esercizio dell’attività bancaria fu assegnato alle banche commerciali, mentre l’esercizio dell’attività di investimento alle banche di investimento. Tale riforma permise alle banche di svolgere sia attività commerciali che di investimento. A seguito di tale processo, ci fu una crescita esponenziale del settore finanziario e le banche di investimento, diventando pubbliche, ricevettero enormi quantità di denaro come finanziamento. Nel 1982 inoltre vi fu la deregolamentazione delle compagnie di risparmio e prestiti, che ottennero il permesso di fare anche degli investimenti rischiosi con i risparmi dei clienti. Il processo di deregolamentazione, continuò anche durante la presidenza di Clinton. Al termine degli anni 90’, il potere di mercato del settore finanziario era concentrato in poche ma enormi società: tali società avevano un’importanza così rilevante per il sistema finanziario che un loro fallimento avrebbe potuto influenzare l’intera economia. Tale convinzione dell’impossibilità che questi istituti finanziari potessero fallire per via della loro grandezza, può essere sintetizzata nell’espressione ‘’Too big to fail’’, coniata a seguito dei disastri di alcune delle più grandi istituzioni finanziarie dopo la crisi del 2008. A seguito delle riforme di deregolamentazione inoltre, nel 2001, il sistema finanziario americano si presentava con un alto tasso di concentrazione del potere di mercato in poche società. Il sistema finanziario era gestito da 5 banche di investimento, ovvero Lehman Brothers, Morgan Stanley, Goldman Sachs, Bear Stearns e Merrill Lynch. Le maggiori compagnie assicurative erano American International Group, Mbi, e Ambac, mentre le agenzie di rating più importanti erano Moody’s, Standard & Poor’s e Fitch.

All’inizio del 2007, nessuno si sarebbe aspettato che in due anni si sarebbe fronteggiata la peggior crisi finanziaria dalla Grande Depressione. L’ultima recessione dell’economia era avvenuta con la bolla tecnologica del 2000, ma la Federal Reserve era prontamente intervenuta riducendo i tassi di interesse. Questa riduzione dei tassi di interesse aveva generato anche una diminuzione dei rendimenti di altri investimenti. Dal 2005 sembrava che l'economia avesse recuperato e fosse stabile e in crescita; e anche il settore bancario sembrava essere in equilibrio. Questa rapida ripresa infuse maggiore sicurezza nella politica monetaria. La riduzione dei tassi di interesse ed un'economia apparentemente stabile, che era stata capace in così poco tempo di recuperare dalla recessione del 2002, determinarono una crescita forte e rapida del mercato immobiliare.

La deregolamentazione e l'innovazione tecnologica portarono alla creazione e alla diffusione di prodotti finanziari, detti strumenti derivati, ricavati attraverso il processo di cartolarizzazione**.** Tale operazione permetteva alle istituzioni di credito di raggruppare titoli e altri strumenti di debito formando degli strumenti derivati che venivano scambiati alle società veicolo, ottenendo indietro il credito che avevano concesso. Tali strumenti derivati erano poi divisi in parti più piccole in base al rischio di ogni prestito e venduti agli investitori Questo sistema permise alla banche di liberarsi del rischio di insolvenza dei prenditori dei fondi e indebolì l'incentivo ad una corretta valutazione della capacità dei mutuatari di ripagare i debiti.

2.3 Strumenti finanziari

Al fine di studiare le condizioni del mercato finanziario americano che ha condotto alla crisi, ne analizzeremo i vari strumenti finanziari derivati e le loro peculiarità, spiegando inoltre il loro legame con il settore immobiliare.

2.3.1 MBS

Prima del 1970, la maggior parte dei mutui erano finanziati da banche locali o da cooperative di credito. Negli anni '70 Fannie Mae (Federal National Mortgage Association) e Freddie Mac (Federal Home Loan Mortgage Association) iniziarono ad acquistare grandi quantità di mutui da coloro che li avevano finanziati, incorporandoli in titoli standardizzati attraverso l'operazione di cartolarizzazione, così che potessero essere scambiati come ogni altro strumento finanziario. Tali titoli erano detti Mortgage-Backed securities. Attraverso un semplice esempio numerico analizzeremo come sono strutturati i flussi di cassa.

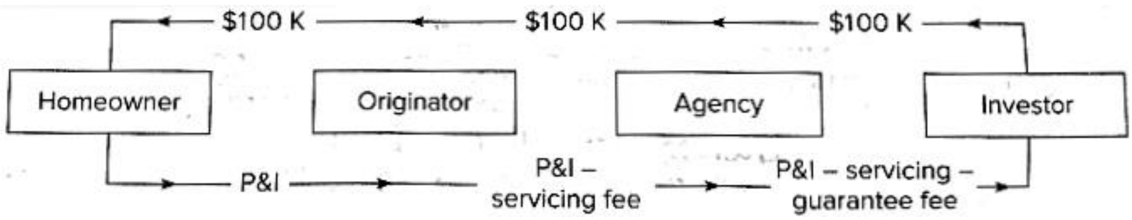

Immagine 2.1: rappresentazione grafica della struttura ''pass-througth'' degli MBS (Bodie Z. et. al., 2019)

Ipotizziamo che il prestatore originario dei fondi presti 100.000 dollari ad un soggetto privato che desidera acquistare una casa. Il possessore della casa dovrebbe pagare la somma prestata più l'interesse attraverso rate generalmente semestrali per un determinato periodo di tempo. Se il prestatore originario vendesse il titolo agli istituti FNMA o FHLMA, gli verrebbe restituita la somma originaria prestata. La banca creditrice continuerebbe ad occuparsi della riscossione delle rate su cui però tratterrebbe una tassa per il servizio prestato. FNMA o FHLMA raggruppavano tali mutui in pacchetti, creando dei nuovi titoli e li vendevano a investitori come fondi pensione o fondi mutuali. L'agenzia (FNMA o FHLMA) continuava a garantire il credito in caso di insolvenza dei debitori, trattenendo un premio di assicurazione sui flussi di cassa. Per tale motivo, la struttura degli MBS è stata indicata come "pass-through", poiché i pagamenti di interessi e capitale passavano attraverso di essa dal mutuatario o acquirente domestico, al titolare degli MBS (cf. Bodie Z. et. al., 2019).

Questi titoli erano a basso rischio, non solo perché FNMA e FHLMA fossero delle agenzie supportate dal governo, e per tale motivo era il governo stesso che assicurava dal rischio di credito, ma anche perché i prestiti non potevano essere eccessivamente grandi e i sottoscrittori dovevano rispettare determinati requisiti che stabilivano la loro capacità di ripagare il prestito. Fannie e Freddie presto divennero i colossi del mercato dei mutui, acquistando più della metà dei mutui originati dal settore privato.

2.3.2 Mutui Subrpime

Il sito della Borsa Italiana definisce i mutui subprime come prestiti erogati a clienti ad alto rischio. Sono chiamati prestiti subprime perché a causa delle loro caratteristiche e del maggiore rischio a cui sottopongono il creditore sono definiti di qualità non primaria. (cf. Borsa Italiana). I debitori di mutui subprime sono definiti di qualità non primaria poiché hanno una storia creditizia costituita da insolvenze, pignoramenti e bancarotta. Per tale motivo i mutuatari subprime hanno una bassa capacità di rimborso, che può essere misurata attraverso punteggi di credito: un mutuatario è definito subprime quando ha un punteggio di credito inferiore a 620, in una scala da 300 a 850. Dal momento che un alto rischio di insolvenza è associato ai debitori subprime, i prestiti subprime implicano condizioni meno favorevoli delle altre forme di credito, in quanto l'istituto creditizio deve tutelarsi dal maggiore rischio di insolvenza.

A seguito dell'aumento dei prezzi delle case e degli ingenti guadagni generati dagli strumenti finanziari derivati, gli intermediari creditizi iniziarono a concedere prestiti diminuendo i requisiti richiesti ai debitori. Tali istituzioni confidavano nel continuo aumento dei prezzi del settore immobiliare, così che i prezzi degli immobili sottostanti avrebbero avuto sempre un valore maggiore dei prestiti concessi, e in caso di insolvenza le istituzioni avrebbero potuto vendere gli assets per recuperare il credito. Con il tempo emerse prima una propensione a richiedere poca documentazione per poi arrivare a concedere prestiti senza alcuna documentazione, ma solo una superficiale verifica della capacità del debitore di ripagare il mutuo. Con il tempo presto anche i requisiti per sottoscrivere il mutuo si deteriorarono e dal 2006 i richiedenti potevano richiedere in prestito l'intera somma per acquistare la casa.

Con la diffusione del processo di cartolarizzazione, anche imprese private cominciarono ad eseguire l'operazione di cartolarizzazione, creando però titoli a cui era associato un rischio più alto, sia perché prevedevano minori requisiti, sia perché gli investitori avrebbero sopportato il rischio che i debitori originari potessero essere insolventi. Gli agenti economici avevano un basso incentivo a comportarsi secondo dirigenza dal momento che il mutuo poteva essere venduto ad un investitore: gli investitori non avevano alcun contatto diretto con i richiedenti del mutuo e non potevano esaminare la qualità del mutuo e dunque la capacità del prenditore di fondi di non essere insolvente.

2.3.3 ARMs

Una tipologia di mutuo subprime che ha avuto ampia diffusione e che è stata la principale causa dell'insolvenza dei creditori, è l'Adjustable Rate Mortgage. Tale prestito prevedeva l'applicazione di un tasso di interesse iniziale basso ma che poi sarebbe variato periodicamente in corrispondenza dell'indice finanziario associato al prestito. (cf. Bank of America). Tali prestiti prevedevano dunque che per i primi tre anni il mutuatario subprime pagasse un tasso fisso che dal quarto anno in poi sarebbe diventato variabile. A seguito della concessione di tali prestiti si sono registrati numerosi casi in cui un tasso d'interesse inizialmente pari al 4%, dopo gli aggiustamenti annuali, raggiungesse il 10 %. Un tale incremento della quota di interesse poteva causare un aumento fino all'85% della rata mensile. Molti prenditori avevano sottoscritto i mutui considerando la loro capacità di risarcire il debito solo per il tasso iniziale, ma poi con il tempo, quando il tasso di interesse si adattò all'indice finanziario di riferimento, diventarono insolventi.

L'unica garanzia presente su tali prestiti era l'ipoteca sugli immobili, acquistati tramite essi. Tale ipoteca era considerata sufficiente a garantire i mutui poiché, grazie alla bolla immobiliare di quegli anni, i prezzi delle case crescevano con un trend costante. Tale incremento dei prezzi del settore immobiliare nel decennio precedente aveva diffuso il pensiero comune che i prezzi sarebbero continuati ad aumentare colmando i mutui scadenti (cf. Bodie Z. et. al., 2019). Sfruttando questo continuo aumento dei prezzi, le banche e gli altri intermediari finanziari avevano concesso mutui basati sul concetto di step-up, cioè a partire dal terzo anno i tassi aumentavano notevolmente, rendendo però impossibile per il mutuatario adempiere all'obbligo di ripagare il prestito. La concessione di questi prestiti generava dei crediti che venivano poi cartolarizzati. Questa tendenza a raccogliere e rivendere i prestiti determinò il passaggio dal tradizionale modello originate-to-hold in cui il prestatore mantiene il prestito erogato in bilancio fino alla scadenza, ad un modello originate-to-distribute, in cui avviene un trasferimento del rischio in seguito alle attività di cartolarizzazione. Il primo caso è caratteristico delle banche tradizionali, poiché i rendimenti derivano dagli interessi sui prestiti e il principale rischio è quello di credito. In tale modello, le valutazioni sull'affidabilità finanziaria del soggetto a cui concedere il prestito sono fondamentali per ridurre al minimo i problemi causati dalle asimmetrie informative. Nel secondo modello invece le banche non hanno alcun interesse nello svolgere una valutazione così approfondita, che limiterebbe e diminuirebbe il numero di prestiti concessi e di conseguenza i flussi in entrata derivati dalla cartolarizzazione.

2.3.4 CDOs

Uno degli strumenti finanziari che è stato sicuramente al centro della crisi è il CDO. I CDO, Collateralized Debt Obligation, sono degli strumenti derivati che incorporano al loro interno più attività eterogenee, tra cui strumenti di debito e titoli. Il loro valore viene determinato sulla base dei titoli sottostanti (cf. Il Sole 24 Ore). Il tasso di interesse associato al CDO è legato alla rischiosità dei titoli che lo compongono: più i titoli sono rischiosi, maggiore sarà il tasso di interesse e dunque maggiore la cedola che riceve il possessore dello strumento derivato. L'enorme numero di debiti e titoli individuali sottostanti la singola obbligazione CDO rende però di fatto impossibile valutarne i rischi di insolvenza connessi, esponendo gli acquirenti a rischi non immediatamente evidenti, celati dietro la natura diversificata del titolo. La difficoltà nella valutazione del rischio associato, permise la creazione di CDO con rating alti ma aventi come sottostante un gran numero di crediti dubbio merito. I collateralized debt obligations infatti permisero alle banche di ricavare titoli con rate AAA dall'unione di mutui scadenti. Erano stati creati per concentrare il rischio di credito in una classe di investitori, lasciando gli altri investitori del titolo relativamente protetti dal rischio. Il principio era di rendere prioritari i pagamenti delle prime tranches dette Senior tranches. I proprietari Senior avevano il diritto di pagamento prioritario sull'intero pacchetto. Le Junior tranches invece erano le tranches che venivano pagate solo dopo che fossero stati rimborsati tutti gli investitori Senior. I CDO erano considerati insolventi solo se le senior tranches non fossero state ripagate per intero. Ipotizziamo che un pacchetto sia diviso in due tipi di tranches, il 70% del pacchetto allocato in senior tranches e il 30% allocato in junior. Gli investitori senior sarebbero stati ripagati se il 70% o più dei mutui che costituivano il pacchetto si sarebbero rilevati non insolventi. Anche se i pacchetti erano composti anche da mutui subprime rischiosi, il 30% come margine di default sembrava una buona garanzia. Attraverso questo meccanismo titoli con rating AAA erano ricavati da pacchetti composti da mutui di rating basso. Gli alti rating assegnati alle tranche senior, generalmente AAA, hanno permesso l'esposizione al rischio di fondi monetari e fondi pensione, che normalmente sono autorizzati ad investire solo in titoli ad alto merito di credito (cf. Bodie Z. et. al., 2019).

Per quanto riguarda l'emissione delle CDO, essa avveniva solo dopo un'operazione di cartolarizzazione attraverso cui un insieme di titoli o strumenti erano ceduti da un intermediario finanziario detto Sponsor, ad una società detta Special Purpose Vehicle. Tale società si occupava di eseguire l'operazione di cartolarizzazione e, per acquistare l'insieme di investimenti, si finanziava attraverso l'emissione delle CDO. A loro volta inoltre, le varie tranches dei CDO potevano essere impiegate per andare a creare altri CDO, detti CDO al quadrato, o CDO sintetici, se affiancati anche a Credit Default Swaps. Risultava quindi ancora più difficile per le agenzie di rating valutare correttamente il rischio di credito associato a tali obbligazioni (cf. Borsa Italiana).

Per la loro natura di strumenti derivati, i CDO sono molto simili agli MBS; i primi tuttavia hanno la caratteristica di essere molto più flessibili; nel loro portafoglio originale di investimenti possono infatti essere inserirti titoli di debito diversi, come obbligazioni, prestiti, mutui fondiari o prodotti sintetici. Anche grazie a questa flessibilità, l'utilizzo di questi strumenti è aumentato in maniera esponenziale e nei soli Stati Uniti si è passati da un totale emesso pari al valore di 25 miliardi di dollari circa nel 2002 a oltre 2.000 miliardi nel 2006 (cf. il Sole 24 Ore).

A posteriori è possibile affermare che i rating forniti da Moody's, Standard & Poor's e Fitch erano sbagliati, e che tale agenzie di rating hanno sottostimato il rischio di credito dei mutui subprime. La causa di tale errore di stima può essere dovuto all'eccessiva sicurezza nella politica monetaria e dall'eccessivo ottimismo dovuto alla rapida e grande crescita del settore immobiliare. Tali agenzie di rating inoltre hanno utilizzato i dati dei default passati e li hanno applicati impropriamente a nuovi tipi di strumenti finanziari. Purtroppo però, l'esperienza passata dei casi di default era irrilevante a causa dei profondi cambiamenti che c'erano stati negli ultimi decenni nel mercato finanziario.

2.3.5 CDSs

Parallelamente ai CDO anche i CDS, ovvero i Credit Default Swaps, ebbero una rapida crescita. Un CDS è uno strumento derivato finanziario. Rappresenta un contratto di assicurazione attraverso cui il venditore di protezione si impegna a rimborsare all'investitore il valore del titolo di credito, nel caso in cui il debitore diventi insolvente, evento definito credit default. In cambio, l'acquirente del CDS deve versare periodicamente un premio all'istituto assicurativo. Il premio pagato è commisurato alla probabilità di insolvenza del soggetto che ha richiesto il prestito (cf. Borsa Italiana). Nel mondo finanziario i Credit Default Swaps svolgono la funzione di strumenti di copertura, perché consentono di scambiare sul mercato protezione dal rischio di credito. La durata, o scadenza, di un CDS può variare: generalmente hanno una durata massima di 10 anni, ma essendo contratti non standardizzati, possono essere personalizzati. Sono scambiati sul mercato over the counter, che non è regolamentato e dove è possibile pattuire con la controparte qualsiasi durata.

Tali strumenti tuttavia, essendo degli strumenti derivati, possono essere utilizzati anche a scopi speculativi. Essi furono un ulteriore incentivo alla cessione di credito, poiché permisero agli investitori di acquistare i mutui subprime e di assicurare i loro investimenti. Il sistema finanziario inoltre permise di acquistare l'assicurazione anche per strumenti finanziari di cui non disponeva. Purtroppo, attraverso tale pratica, i venditori di tali assicurazioni si esposero ad un eccessivo rischio di credito, non avendo capitale sufficiente per ripagare tutti. Un esempio è l'agenzia di assicurazioni statunitense AIG, Americal International Group, la quale si indebitò di decine di miliardi di dollari e che il governo americano decise di aiutare per evitare che finisse in bancarotta.

2.4 Cause della crisi finanziaria del 2008

Le cause della crisi vanno ricercate innanzitutto nella politica del governo statunitense dagli anni 70', che promesse una graduale deregolamentazione al fine di permettere lo sviluppo delle imprese. Tale deregolamentazione ha comportato una minore divulgazione delle informazioni sulle attività intraprese da istituti finanziari in evoluzione e una minore regolamentazione di quest'ultimi. Per tale motivo, nei decenni antecedenti la crisi, le banche di investimento e gli hedge funds acquisirono sempre una maggiore importanza nell'erogazione del credito all'economia statunitense. Tali istituti finanziari però non disponevano di un sostegno finanziario sufficiente per assorbire inadempienze o perdite su crediti di grandi dimensioni. Una legge federale degli Stati Uniti del 1977, il Community Reinvestment Act, aveva inoltre incoraggiato le banche a concedere mutui anche alle famiglie a rischio più elevato, al fine di aiutare i cittadini americani a basso o moderato reddito a ottenere prestiti ipotecari. La crisi finanziaria asiatica del 1997 e quella russa del 1998 avevano alimentato un grande afflusso di fondi esteri nel mercato statunitense, che aveva favorito un'enorme crescita del settore edilizio, favorita anche ai maggiori prestiti concessi ai potenziali proprietari di case. Inoltre, a seguito della diminuzione dei tassi di interesse, gli investitori erano alla ricerca di investimenti più proficui e dunque disponevano di maggior capitale libero da investire in nuove opportunità non appena si fosse presentata l'occasione. Nel 2002 dopo il verificarsi dello scoppio della bolla tecnologica, il governo americano, in poco tempo, era riuscito attraverso la diminuzione dei tassi di interesse a contenerne gli effetti e per tale motivo si era diffusa una maggiore fiducia generale nella politica monetaria del governo. Tali eventi economici-finanziari generarono un eccessiva crescita del settore immobiliare, creando una bolla speculativa intorno ai suoi prezzi, portando a un discostamento eccessivo dai reali valori (cf. Federal Reserve History).

Un altro fattore determinante della crisi fu la speculazione di alcuni strumenti derivati finanziari. All'inizio degli anni 2000 aumentò in modo esponenziale la concessione di mutui subprime, che, combinati insieme ad altri investimenti, furono utilizzati per la creazione di CDO. Dal momento che i prestatori di mutui potevano trasferire questi mutui e i relativi rischi attraverso la cessioni ad agenzie che poi li avrebbero raggruppati e rivenduti, essi erano poco incentivati dall'accertarsi che i sottoscrittori fossero capaci di ripagare i prestiti. Gli standard di sottoscrizione dei mutui furono ridotti sempre di più. Tale riduzione degli standard portò ad un aumento del numero di acquirenti di case, i quali si indebitarono in modo eccessivo, così che chiunque poteva ottenere la concessione di un mutuo. L'aumento della domanda di acquisto delle abitazioni generò un ulteriore aumento dei prezzi delle case, creando un'immensa bolla speculativa. I guadagni iniziali furono altissimi, ma che dopo 2 o 3 anni, sarebbero stati cancellati a causa dell'insolvenza di numerosi mutuatari dovuta alla variazione del tasso di interesse degli ARMs, che rese impossibile per i debitori sostenere il pagamento delle nuove rate. Spinte dalla bolla dei prezzi del settore immobiliare, le banche si indebitarono per comprare più titoli di debito, che furono raccolti per creare delle CDO. Nel 2004, fu approvato un aumento dei limiti del rapporto di indebitamento che consentì alle banche di indebitarsi maggiormente. Le banche fecero un uso sempre maggiore della leva finanziaria, disponendo però di riserve limitate per coprirsi dai rischi di mercato. Il rischio sistematico era ingente: quando le banche si sarebbero trovate in posizione di capitale limitato, e sarebbero state spaventate da nuove perdite, avrebbero razionalmente scelto di non prestare ulteriore denaro alle imprese e ai soggetti privati, causando un credit freeze. Purtroppo le banche si concentrarono maggiormente sui profitti nel breve termine rispetto alla creazione di valore a lungo termine speculando sull'aumento dei prezzi del mercato immobiliare. Il rischio sistematico dell'intero sistema finanziario aumentò inoltre a causa delle speculazioni nel settore assicurativo: agli investitori era concesso acquistare dei CDS per assicurarsi su CDO che non possedevano. Inoltre, dato che non vi erano leggi in materia di deregolamentazione dei CDS, gli intermediari assicurativi non furono obbligati a costituire delle riserve per coprire le possibili perdite, anzi incentivavano i dipendenti a vendere il maggior numero di contratti attraverso dei bonus in denaro. Tale speculazione aumentò esponenzialmente le perdite quando scoppiò la bolla dei prezzi delle abitazioni.

Le agenzie di rating sottovalutarono il rischio di tali strumenti derivati credendo che fosse ridotto, assegnandogli il rating AAA, ovvero il rating dei titoli di stato privi di rischio. Inoltre, dal momento in cui i mutuatari si fossero rivelati insolventi, le banche creditrici credevano di poter vendere comunque gli immobili sottostanti per riottenere il credito, i prezzi dei quali erano aumentati continuamente. Una fonte di fragilità del sistema finanziario è stata sicuramente l'eccessiva fiducia nella crescita del mercato immobiliare.

Dal 2007, molte grandi banche e istituzioni finanziarie avevano adottato uno nuovo schema di finanziamento: si finanziavano prendendo a prestito a breve termine a bassi tassi di interesse e utilizzavano i capitali così ottenuti per finanziare la concessione di mutui ad alti tassi a lungo termine, che però rappresentavano attività illiquide. Calcolavano la differenza tra i tassi di interesse come un profitto economico. Questo modello di finanziamento era però precario: dal momento che il finanziamento delle banche e delle istituzioni finanziarie era rappresentato da prestiti a breve termine, queste imprese dovevano costantemente rifinanziarsi, o avrebbero dovuto vendere le loro attività per fronteggiare l'insolvenza. Inoltre queste istituzioni avevano un'alta leva finanziaria e avevano poche riserve, perciò avevano una struttura finanziaria altamente illiquida. Un'altra causa della crisi finanziaria del 2008 è stata sicuramente lo shadow banking system. Secondo la definizione data dal Financial Stability Board, è considerato sistema bancario ombra ogni forma di intermediazione creditizia che coinvolge entità o attività in parte o completamente al di fuori del sistema bancario tradizionale (cf. Financial Stability Board). Vi sono numerose prove a sostegno che i mutui più rischiosi e con le prestazioni peggiori furono finanziati attraverso lo shadow banking system. Gli istituti dello shadow banking system concessero prestiti a soggetti ai quali potevano altrimenti essere rifiutati. Lo shadow banking system non solo ha immesso nel sistema finanziario prestiti con un maggiore rischio di credito, ma ha anche generato pressioni sugli istituti più tradizionali, come Fannie e Freddie, che a causa della concorrenza, abbassarono i propri standard di sottoscrizione e concessero prestiti più rischiosi. Negli Stati Uniti, prima della crisi finanziaria , il sistema bancario ombra aveva superato il normale sistema bancario nella concessione dei prestiti ed aveva assunto sempre più rilevanza anche a livello globale. Le istituzioni ombra non sono soggette alle stesse normative prudenziali delle banche depositarie, pertanto non devono mantenere riserve finanziarie elevate rispetto alla loro esposizione al mercato. Esse facero un elevato uso della leva finanziaria per pagare i crediti. L'elevata leva aumentò notevolmente le perdite durante la crisi.

Tra il 2004 e il 2006, molte persone non furono più in grado di pagare i mutui dato che i tassi di interesse variabili degli ARM salirono in maniera vertiginosa. Nel 2007, così scoppiò l'enorme bolla speculativa che si era venuta a creare e i prezzi delle case iniziano a crollare, determinando l'inizio della crisi. Lo scoppio della crisi si diffuse dall'America fino a gran parte del mondo, poiché i debiti delle banche americane erano stati raggruppati e venduti in tutto il mondo. Il clima di sfiducia era altissimo con conseguenza del fatto che le banche non effettuavano più prestiti tra loro e questo portò anche ad una grave crisi di liquidità. Nel 2008 il numero di case pignorate raddoppiò e il sistema della cartolarizzazione subì un tracollo: gli investitori non poterono più vendere i propri prestiti alle banche perdendo di valore. Seguì il collasso del mercato delle CDO. Le banche di investimento rimasero con centinaia di miliardi di dollari investiti in prestiti, CDO e immobili che non poterono vendere. Dal momento che i CDO persero il loro valore, gli istituti assicurativi furono costretti a ripagare gli investitori per le loro perdite.

2.5 Conseguenze

Lo scoppio della bolla immobiliare degli Sati Uniti fece precipitare i valori dei titoli legati alle valutazioni immobiliari statunitensi, danneggiando gli istituti a livello globale. Le relativa solvibilità bancaria, il calo della disponibilità del credito e la fiducia degli investitori influirono sui mercati azionari globali, dove i titoli subirono subito ingenti perdite nel corso del 2008 e all'inizio del 2009. La situazione economica e finanziaria degli Stati Uniti ebbe conseguenze a livello internazionale, in particolar modo i Paesi che erano strettamente connessi all'economia americana, ovvero la Cina, il Giappone e l'Europa intera. Le banche europee in particolar modo erano strettamente connesse al sistema bancario americano. Il sistema interbancario internazionale fu fortemente rallentato e gli scambi mondiali di merci diminuirono. Mentre il crollo delle grandi istituzioni finanziarie fu impedito dal salvataggio delle banche da parte dei governi nazionali, i mercati azionari calarono in tutto il mondo. In molte aree anche il mercato immobiliare soffrì con conseguenti sfratti e pignoramenti. A causa della riduzione del credito, le economie mondiali subirono un brusco rallentamento durante questo periodo, causando una marcata diminuzione del commercio mondiale.

I membri dell'eurozona maggiormente colpiti dalla crisi furono la Grecia, l'Italia, l'Irlanda, la Spagna e il Portogallo. Tali paesi, già prima che scoppiasse la crisi avevano un deficit di bilancio e un debito pubblico elevato. A causa della crisi subprime, i governi di tali paesi dovettero concedere ingenti aiuti economici agli istituti di credito affinché non finissero in bancarotta. Tali spese aumentarono gli squilibri finanziari di questi paesi, i cui debiti sovrani e i differenziali di rendimento dei titoli di stato aumentarono. L'aumento del livello di debito dei Paesi in crisi portò a un declassamento del debito dei governi europei, i quali si videro diminuire il rating di solvibilità. Tale diminuzione ebbe gravi ripercussioni sui mercati finanziari. L'Unione Europea, al fine di salvare i paesi in crisi, concesse prestiti di un valore complessivo di centinaia di miliardi di euro. Seguirono manovre di contenimento della spesa in tutti i paesi dell'Unione Europea, che rallentarono la crescita e in alcuni casi scaturirono anche delle recessioni (cf. CONSOB).

La crisi ha causato dunque un declino della ricchezza dei consumatori stimato in migliaia di miliardi di dollari e una flessione dell'attività economica che ha portato alla Grande Recessione e ha contribuito alla crisi del debito europeo. Negli ultimi decenni, a causa del fenomeno della globalizzazione, le economie di tutti i paesi hanno acquisito una stretta connessione. È stato tale grado di interdipendenza tra le economia la causa dell'espansione di questa crisi a livello mondiale

2.6 Confronto degli assunti di Markowitz con le condizioni di mercato durante la crisi del 2008

Il modello di Markowitz rappresenta un modello funzionale a determinare i portafogli di minima varianza finché nella realtà vengono rispettati i suoi assunti, ma nel caso in cui essi non vengano rispettati, il modello perde la sua validità. Dopo aver esposto i principali strumenti finanziari della crisi finanziaria e le sue cause, possiamo analizzare la validità delle ipotesi del modello di Markowitz in tale periodo e stabilire se esse si siano discostate o meno dalle reali condizioni di mercato.

Consideriamo l'assunto secondo cui il mercato sia perfettamente concorrenziale. Tale assunto ha diverse implicazioni, tra le più significative vi sono la perfetta informazione del mercato da parte di tutti gli investitori e un elevato numero di agenti economici nel mercato, ciascuno dei quali singolarmente non è capace di influenzare i prezzi di mercato. Possiamo notare come tale condizione di non concentrazione del potere di mercato nella realtà non si sia verificata già a partire dai decenni antecedenti la crisi in cui le leggi emanate dal governo favorirono la deregolamentazione del sistema finanziario a partire dal Garn-St. Germain Depository Institutions Act del 1982 il quale portò ad una deregolamentazione dei risparmi, che permise alle banche di utilizzarli anche per investimenti rischiosi. Seguirono il Riegle-Neal Interstate Banking and Branching Efficiency Act del 1994 che eliminarono le restrizioni riguardo l'apertura di filiali in altri stati americani e poi nel 2000 il Commodity Futures Modernization Act che ha impedì la regolamentazione di molti contratti derivati. Di rilevante importanza fu l'abolizione nel 1999 della legge Glass-Steagall, attraverso cui venne eliminata la separazione tra banche commerciali e di investimento, introducendo di nuovo la tipologia di banca universale .(cfFederal Reserve History). Tali nuove leggi emanate, determinarono la concentrazione del potere in poche istituzioni finanziarie, come Goldman Sachs, Morgan Stanley, Lehman Brothers, Merrill Lynch e Bear Stearns. Tale concentrazione rese instabile l’intero mercato finanziario e il fallimento di uno solo di loro avrebbe potuto destabilizzare l’intero mercato e così fu, il 15 ottobre del 2008, Lehman Brothers dichiarò bancarotta. Il giorno stesso il Dow Jones chiuse con 500 punti a ribasso. Tale fallimento ebbe pesanti ripercussioni sul sistema finanziario e sull’intera economia innescando la Grande Recessione. Consideriamo ora l’implicazione di perfetta informazione nel mercato, ovvero che i prezzi di mercato rispettino i reali valori e che tengano conto anche delle informazioni interne ai management di ogni azienda. Tale condizione corrisponde alla forma di efficienza forte di mercato, che però non è supportata da fatti storici e dalle reali informazioni fornite durante la crisi. Il 2008 fu anno ricco di scandali in cui molte aziende falsificarono i loro bilanci, Ernst & Young e Toshiba ne sono infatti un esempio. Inoltre, il rating assegnato ai titoli derivati che erano stati creati non rispecchiava il reale rischio che si celava dietro questi strumenti, che fu certamente una delle principali cause della crisi.

Consideriamo ora invece l’assunto secondo cui gli investitori siano perfettamente razionali e scelgano i loro investimenti solo esclusivamente in base al loro rendimento e varianza. Nella realtà però, la regola secondo cui il prezzo di un asset sia pari al suo valore fondamentale non sempre ha avuto un riscontro empirico nella realtà. Tale metodo di valutazione si fonda sull’ipotesi che gli investitori siano perfettamente razionali. La realtà però ha dimostrato l’ipotesi opposta, ovvero che gli investitori non adottino un comportamento razionale. Per tale motivo, le teorie di investimento che si basano sugli assunti che i mercati siano efficienti e gli investitori siano razionali, non sembrano essere in grado di spiegare l’andamento e le fluttuazioni dei mercati finanziari. Negli ultimi decenni, e in particolar modo in seguito alla crisi del 2008, è stato dato molto peso ad un approccio di studio dei mercati che tenesse conto della loro componente irrazionale, denominato finanza comportamentale, che ha le sue radici nello studio della psicologia comportamentale. I fautori della finanza comportamentale ritengono che gli andamenti dei prezzi azionari siano legati alle aspettative degli investitori circa il valore futuro delle azioni, e dal loro livello di ottimismo circa il futuro. Se un investitore ritiene che il prezzo di un’attività possa aumentare di molto, sarà disposto nel presente ad acquistarla ad un prezzo piuttosto alto, al fine di ottenere un guadagno futuro tra la differenza dei prezzi. Alla base della finanza comportamentale vi è la teoria del prospetto, elaborata da D. Kahneman e A. Tversky nel 1979, la quale pose l'attenzione sul valore che gli investitori attribuiscono a un investimento effettuato (cf. Treccani). Secondo Kahneman e Tversky, gli investitori si concentrerebbero in particolar modo sui guadagni o le perdite che hanno realizzato da quando l'attività è stata acquistata. Tale teoria inoltre approfondisce i processi decisionali da parte degli investitori in situazioni di rischio, affermando che gli investitori sono fortemente aversi al rischio di incorrere in perdite anche molto modeste e lega tale comportamento alle loro esperienze passate, in circostanze analoghe. I loro studi hanno anche evidenziato come gli individui siano eccessivamente conservativi, ovvero troppo lenti a cambiare le loro convinzioni di fronte a nuove evidenze, e sicuri di se stessi e dei propri giudizi (cf. Allen. F. et. al., 2015). Analizzando il comportamento degli investitori negli anni precedenti la crisi, è possibile notare come l'eccessivo ottimismo verso il mercato immobiliare, abbia spinto le banche a concedere un elevato numero di mutui subprime, credendo che il prezzo degli immobili sottostanti sarebbe continuato ad aumentare nel tempo e avrebbe permesso di riottenere il credito in caso di insolvenza, dal momento che il valore superava quello del mutuo. L'eccessivo ottimismo nel settore immobiliare è stata inoltre la causa per cui le agenzie di rating sottostimarono il rischio degli strumenti finanziari derivati, assegnandogli rating errati.

Consideriamo ora l'assunto secondo cui non ci siano costi di transazione nel mercato. Come è noto, l'incontro tra datori di fondi e prenditori di fondi può avvenire direttamente nei mercati finanziari, attraverso lo scambio di strumenti finanziari, oppure attraverso gli intermediari finanziari, che si interpongo tra gli agenti economici per facilitare il prestito di fondi. I costi di transazione, come è stato già detto, consistono nel tempo nel denaro spesi per ricercare informazioni sugli altri agenti economici e il mercato e per effettuare un'operazione finanziaria. Essi sono presenti nei mercati finanziari. Il ruolo di un intermediario finanziario è quello di facilitare l'incontro tra datori di fondi e prenditori di fondi, riducendo l'asimmetria informativa e dunque i costi di transazione (cf. Beccalli E. et. al., 2019). Negli anni successivi alla crisi finanziaria, a causa del fallimento di numerose istituzioni finanziarie, diminuì la fiducia nel sistema finanziario e negli intermediari finanziari. Inoltre, a causa della crisi finanziaria, molti intermediari finanziari fallirono, e quelli rimasti, a causa della crisi di liquidità, diminuirono la concessione del credito alle imprese e ai soggetti privati, riducendo così anche la raccolta di informazioni dei prenditori di fondi. L'asimmetria informativa tra unità in surplus e in deficit aumentò e di conseguenza anche i costi di transazione. L'assunto che i costi di transazione siano nulli non fu rispettato nella realtà, in quanto si creò una situazione di incertezza che aumentò vertiginosamente l'asimmetria informativa, che unita alle scelte non perfettamente razionali degli investitori, determinarono un brusco aumento dei costi di transazione.

Prendiamo ora in considerazione l'assunto per cui gli investitori possano indebitarsi al tasso privo di rischio e possano prendere a prestito capitale illimitato. Tale ipotesi nella realtà risulta altamente improbabile. I singoli investitori per poter prendere a prestito al tasso privo di rischio dovrebbero offrire le stesse garanzie di credito dello Stato, per tale motivo è irrealistico supporlo. Nella realtà ai mutuatari viene applicato un tasso di interesse conforme al loro possibile rischio di insolvenza. Negli anni antecedenti la crisi, la crescita del mercato immobiliare stimolò la concessione di mutui subprime. Fra le varie tipologie di mutui subprime infatti avevano avuto una certa diffusione i mutui ARMs che prevedevano tassi di interesse iniziali bassi ma che poi sarebbe stati rettificati periodicamente sulla base di un indice che rifletteva il costo per il prestatore di prestiti sui mercati del credito, detti mutui a tasso variabile. A seguito della concessione di tali prestiti si registrarono numerosi casi in cui un tasso d'interesse inizialmente pari al 4%, dopo gli aggiustamenti annuali, raggiungesse il 10 %. Un tale incremento della quota di interesse causò un aumento fino all'85% della rata mensile (cf. Borsa Italiana). Molti prenditori avevano sottoscritto i mutui considerando la loro capacità di risarcire il debito solo per il tasso iniziale, ma poi con il passare del tempo, quando il tasso di interesse si trasformò in base all'indice finanziario di riferimento, diventarono insolventi. Tali interessi applicati furono di sicuro predatori e non conformi agli standard, ma sono un esempio di come nelle realtà i tassi di interesse si siano discostati nettamente da quello privo di rischio. Nella realtà dunque, gli investitori non possono prendere fondi in prestito al tasso privo di rischio e la quantità di fondi che possono richiedere è determinata dalla loro capacità di ripagare il prestito, perciò è da escludere che gli investitori possano prendere capitali in prestito illimitatamente. A seguito della crisi finanziaria, i governi di tutto il mondo hanno emanato leggi al fine ridurre i rischi che le banche e gli istituti di credito possono assumersi. In particolar modo, in Europa, nel 2011 sono stati approvati gli accordi di Basilea 3. Fanno riferimento ad un insieme di provvedimenti che mirano a regolamentare ed uniformare il sistema bancario. Gli accordi Basilea 3 si basano su tre pilastri fondamentali. Il primo è il requisito patrimoniale. In tale ambito è stato aumentato il patrimonio di vigilanza, ovvero la quantità di capitale che ogni banca deve avere come riserva. Il secondo pilastro è il controllo prudenziale. Esso consiste nel controllo dell'adeguatezza patrimoniale di ogni banca, che deve essere verificata ed approvata da determinati organi. Il terzo pilastro è la disciplina del mercato. Essa riguarda la comunicazione della situazione finanziaria di ogni istituto, effettuata da ogni banca periodicamente, al fine di consentire una corretta valutazione del rischio da parte degli operatori e del mercato. Gli accordi Basilea 3 inoltre hanno stabilito delle misure anticicliche, ovvero delle scorte di capitale da trattenere nei periodi di crescita e che potranno essere utilizzate durante eventuali recessioni. È stato stabilito inoltre il vincolo del Leverage Ratio, che rappresenta il vincolo alla leva finanziaria, che ha posto un limite al rapporto tra il capitale della banca e il volume delle attività. Attraverso alcune norme è stata inoltre promossa una maggiore trasparenza informativa.

Conclusioni

Dopo aver confrontato gli assunti della teoria del portafoglio di Markowitz con le condizioni di mercato presenti nel periodo della crisi del 2008 è possibile affermare che vi è stato una netto discostamento tra tali ipotesi e le reali condizioni di mercato. La teoria del portafoglio di Markowitz si è rivelata dunque non funzionale a determinare i portafogli di minima varianza nel periodo concernente la crisi del 2008, dal momento che gli assunti su cui è stata fondata non hanno avuto una manifestazione empirica. A seguito della crisi finanziaria del 2008, tale teoria ha ricevuto diverse critiche e in particolare sono state criticate le ipotesi su cui si fonda. Il problema cruciale sembra essere l'assunto per cui gli investitori siano perfettamente razionali e scelgano i loro investimenti sulla base del valore atteso e della varianza. Come è stato possibile constatare nel periodo di crisi in questione, gli investitori si sono dimostrati non perfettamente razionali e la finanza comportamentale si è dimostrata una teoria economica capace di analizzare e studiare con più successo le scelte di investimento degli individui rispetto la teoria del portafoglio.

Bibliografia

Allen F., Brealey R. A., Myers S. C. (2015). Principi di finanza aziendale. Milano, McGraw-Hill Education, 7° edizione.

Beccalli E., Eakins S. G., Mishkin F. S. (2019). Istituzioni e mercati finanziari. Milano, Pearson, 9° edizione.

Bodie Z., Kane A., Marcus A. J. (2019). Essentials of investments. New York, McGraw-Hill Education, 11° edizione.

Bodie Z., Kane A., Marcus A. J. (2018). Investments. New York, McGraw-Hill Education, 11° edizione.

Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005). Manuale di finanza. Teoria del portafoglio e mercato azionario. Bologna, Il Mulino, Vol. 2.

Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005). Manuale di finanza. Tassi di interesse. Mutui e obbligazioni. Bologna, Il Mulino, Vol. 2.

Cesari R. (2012). Introduzione alla finanza matematica. Concetti di base, tassi e obbligazioni. McGraw-Hill Education, 2° edizione.

Cesari R. (2012). Introduzione alla finanza matematica. Mercati azionari, rischi e portafogli. McGraw-Hill Education, 2° edizione.

Luenberger D. G. (2011). Finanza e Investimenti. Fondamenti matematici. Santarcangelo di Romagna, Apogeo education, 1° Edizione.

Markowitz H. M. (1991). Portfolio Selection. Efficient diversification of investments. Blackwell Publishing

Sitografia

Banca d'Italia: https://www.bancaditalia.it/

Bank of America: https://www.bankofamerica.com/

BIS: https://www.bis.org/

Borsa Italiana: https://www.borsaitaliana.it/homepage/homepage.htm

Consob: http://www.consob.it/

Federal Reserve History: https://www.federalreservehistory.org/

Financial Stability Board: https://www.fsb.org/

Il Sole 24 ore: https://www.ilsole24ore.com/

Treccani: http://www.treccani.it/

Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale