



Dipartimento di Impresa e Management
Corso di Laurea Triennale in Economia e Management
Cattedra di Matematica Finanziaria

IL MODELLO DI BLACK E SCHOLES E LA
SUA APPLICAZIONE PER LA VALUTAZIONE
DEL RISCHIO DI CREDITO

Relatore:

Emerito Prof. Gennaro Olivieri

Candidato:

Piergiorgio Di Pasquale

Matricola n. 220781

Anno Accademico 2019/2020

*A mamma, papà, a tutta la mia famiglia
e alla mia fidanzata Roberta*

Sommario

1.	Il Rischio di Credito	5
1.1	Il Rischio	5
1.2	A cosa serve conoscere il rischio di impresa.....	5
1.3	Il rischio di credito	6
1.4	La gestione del rischio nell'ambito bancario	7
1.5	Gli Accordi di Basilea	7
1.5.1	Basilea 1	7
1.5.2	Basilea 2.....	8
1.6	Approcci alla Valutazione delle Perdite Attese e Inattese	9
1.7	Value at Risk (VaR)	10
1.8	Gli approcci alla valutazione della probabilità di default.....	11
1.9	Il Modello di Merton	13
2.	Un'Introduzione alle Opzioni	14
2.1	I Contratti Derivati	14
2.2	Le opzioni.....	16
2.3	Definizione quantitativa delle opzioni	17
2.4	Il premio	20
2.4.1	Il Valore Intrinseco	20
2.4.2	Il Valore Temporale	20
2.5	Put Call Parity	21
3.	Il Modello di Black e Scholes	22
3.1	I Primi Modelli di Valutazione.....	22
3.2	Visualizzazione e definizione del Random Walk tramite Python.....	23
3.2.1	Random Walk unidimensionale simmetrico con Python.....	23
3.2.2	Una funzione per creare facilmente Random Walks in Python.....	25
3.3	Visualizzazione e definizione del moto Browniano.....	28

3.3.1	Il processo di Markov	28
3.3.2	Processo di Wiener.....	29
3.3.3	Visualizzazione del processo di Wiener	31
3.3.4	Processo di Wiener generalizzato	35
3.4	Il Processo per il Prezzo delle Azioni	37
3.4.1	Visualizzazione del Processo per le Azioni	38
3.4.2	Il Lemma di Ito	39
3.4.3	proprietà log-normale della distribuzione dei prezzi	40
3.5	Il modello di Black and Scholes.....	42
3.5.1	le ipotesi di base del modello.....	42
3.5.2	l'idea di fondo del modello	43
3.5.3	Derivazione dell'equazione differenziale del modello	44
3.5.4	risk neutral valuation.....	46
3.6	dimostrazione della formula di Black e Scholes per la valutazione delle opzioni call Europee attraverso la risk neutral valuation.....	47
3.6.1	derivazione della formula.....	48
3.6.2	semplici intuizioni sui termini $N(d1)$ e $N(d2)$	50
3.6.3	applicazione del modello in Excel	52
4.	Il Modello Di Merton.....	58
4.1	applicazione del modello di Black e Scholes	58
4.1.1	le ipotesi del modello	58
4.1.2	l'impresa come un'opzione	59
4.1.3	applicazione del modello di Black e Scholes all'impresa.....	61
4.2	Le Implicazioni Del Modello Di Merton	62
4.2.1	l'equity delle aziende vicino al fallimento	62
4.2.2	il modello di Merton per calcolare il credit spread	63
4.2.3	il modello di Merton per la valutazione della probabilità di default.....	65
	Conclusioni	67

Bibliografia 69

1. Il Rischio di Credito

1.1 Il Rischio

Il concetto statistico di variabile aleatoria o casuale è funzionale per la definizione di rischio. Una variabile aleatoria è definita come una variabile che può assumere valori diversi in base ad un evento, associabile ad esempio al risultato del lancio di un dado. La performance di un'impresa, quindi anche la sua capacità di far fronte alle sue obbligazioni, può essere spiegata attraverso una variabile casuale discreta alla quale associamo l'avverarsi di determinate performances (negative o positive) con certe probabilità. In termini statistici il rischio è la variabilità con cui possono accadere questi eventi. In particolare, considerando le performances dell'impresa, il rischio è la deviazione standard (radice quadrata della varianza).

1.2A cosa serve conoscere il rischio di impresa

Ci sono molteplici motivi per i quali il risk management e lo studio del rischio ricevono sempre più attenzione. È necessario prima di tutto specificare che gli esseri umani per natura sono avversi al rischio. Se quindi si offrisse a un soggetto la possibilità di vincere una somma di denaro con una certa probabilità minore di uno oppure ottenere la stessa somma con certezza, il soggetto di certo sceglierebbe la seconda opzione. Questo vuol dire che i soggetti non amano il rischio e non traggono da esso alcun vantaggio. Potranno infatti preferire la lotteria, ossia la prima opzione, solo se fosse offerto loro una somma in più rispetto alla somma certa. Questa somma in più è anche conosciuta come premio per il rischio. Nella finanza sono stati sviluppati diversi modelli che cercano di mettere in relazione il rischio con il premio. Tra questi possiamo ricordare ad esempio il modello del CAPM che mette in relazione il rendimento richiesto dagli azionisti di una società con il rischio che corrono nell'investire in essa. Altre motivazioni, non meno importanti, per cui lo studio del rischio di impresa risulta fondamentale è anche quella legata all'attività di finanziamento. Un'impresa particolarmente stabile e che quindi presenta minore rischio è più sicura, quindi il rischio di credito per la banca prestatrice di finanze risulta inferiore. Di conseguenza, la banca risulta più propensa a finanziarla. Esistono a questo proposito dei sistemi che garantiscono alle banche la possibilità di capire "l'affidabilità" di un'impresa: i sistemi di rating. Questi sistemi sono strettamente connessi alla quantificazione del rischio e funzionano in modo da assegnare alle imprese determinati punteggi in base al rischio che un istituto di credito corre nel prestargli denaro.

1.3 Il rischio di credito

Tra le varie categorie di rischio tipiche dell'attività di impresa una delle più importanti è il rischio di credito. La Banca d'Italia lo definisce come: "Eventualità per il creditore che un'obbligazione finanziaria non venga assolta né alla scadenza né successivamente¹". In altre parole, i rischi di natura creditizia consistono nel rischio che la controparte non assolvere in tutto o in parte alle proprie obbligazioni di pagare flussi di cassa (capitale e/o interessi) previsti dal contratto di debito. Andrea Sironi, professore di Economia degli Intermediari Finanziari presso l'Università Bocconi, ha enunciato cinque categorie di rischio di credito:

- **Rischio di insolvenza (Credit Default Risk):** Il rischio di insolvenza rappresenta il concetto più intuitivo e diffuso di rischio di credito: la possibilità che una controparte affidata, nei confronti della quale esiste un'esposizione creditizia, divenga insolvente.
- **Rischio di migrazione (Migration Risk):** rappresenta invece il rischio di un deterioramento del merito creditizio di una controparte. Tale deterioramento può trovare riscontro concreto in un declassamento del rating del debitore ad opera di una delle grandi agenzie come Moody's o Standard & Poor's o, più semplicemente, ad opera degli analisti fidi della stessa banca creditrice.
- **Rischio di recupero:** si riferisce alla possibilità che il tasso di recupero connesso alle esposizioni nei confronti di controparti divenute insolventi si riveli inferiore a quanto originariamente stimato dalla banca. Questa diminuzione può trovare origine in diversi fattori, quali ad esempio un allungamento dei tempi connessi alle procedure giudiziali, un aumento dei tassi di interesse o una diminuzione del valore dei beni a garanzia. Questa categoria di rischio sarà oggetto di analisi del paragrafo 1.5. del presente manuale.
- **Rischio di esposizione:** rappresenta il rischio che la dimensione dell'esposizione nei confronti di una controparte aumenti in modo inaspettato in corrispondenza del periodo appena antecedente il verificarsi dell'insolvenza.

¹ Banca d'Italia. Rischio di Credito. <https://www.bancaditalia.it/footer/glossario/index.html?letter=r>.

- Rischio paese: rappresenta il rischio che, a parità di merito creditizio o, se vogliamo, di rating, aumenti il premio al rischio, ossia lo spread, richiesto dal mercato dei capitali.

1.4 La gestione del rischio nell'ambito bancario

Uno degli ambiti in cui la gestione del rischio risulta sicuramente più importante è quello bancario. È intuibile infatti che la rete di connessioni finanziarie e economiche che ha una banca è estremamente più grande rispetto a quella di un'azienda, in media. Ne conviene quindi che il fallimento di una banca è potenzialmente catastrofico non solo per le aziende legate ad essa ma anche per tutto il tessuto economico sociale in cui affonda le sue radici. Di riflesso è quindi nell'ambito bancario che si sono sviluppati i primi sistemi di risk management e i primi sistemi di quantificazione del rischio. In questo ambito sono stati sviluppati e sperimentati negli ultimi 20 anni diversi approcci. A definire le linee guida sono stati gli accordi di Basilea che hanno definito le basi della gestione del rischio (rischio di credito, operativo, di mercato) e la gestione della trasparenza e della comunicazione dei risultati.

1.5 Gli Accordi di Basilea

1.5.1 Basilea 1

Gli accordi di Basilea nascono con l'esigenza di sviluppare un sistema unico e standardizzato per la definizione dei requisiti minimi patrimoniali, riferendosi in particolare agli istituti di credito e alle banche. Il primo accordo è quello del 1988. L'approccio alla gestione del rischio e in generale del sistema bancario si definiva come prudenziale. Questo approccio prevedeva infatti la definizione di un sistema che doveva consentire la definizione di un patrimonio minimo di vigilanza che doveva essere mantenuto sempre in un certo rapporto rispetto alle attività ponderate per il rischio dalle banche di grandi dimensioni.

$$\frac{PV}{RWA} \geq 8\%$$

La disponibilità di capitale proprio risulta infatti essenziale per le banche per fronteggiare i tipici squilibri finanziari che caratterizzano questa attività (ad esempio il rischio liquidità in caso di crisi). Il requisito di capitale doveva essere calcolato come prodotto tra un coefficiente, detto coefficiente di solvibilità (=8%), e il RWA, ossia Risk Weighted Assets (attività ponderate per il rischio). Il RWA andava calcolato in base alle attività in bilancio, andando a moltiplicare ogni voce dell'attivo della banca per un coefficiente che veniva individuato da alcuni schemi definiti dall'accordo di Basilea in questione.

Formula per calcolare il requisito minimo di patrimonio di vigilanza:

$$PV \geq RWA \times 8\%$$

Formula per calcolare il risk weighted asset:

$$RWA = \sum_{i=1}^n w_i \times A_i$$

Le ponderazioni erano realizzate in modo da rispecchiare il rischio per ogni voce in bilancio, facendo sì che le attività maggiormente rischiose fossero considerate nella loro interezza mentre quelle meno rischiose solo in una certa percentuale come possiamo osservare dalla Tabella 1².

rischio nullo	rischio minimo	rischio medio	rischio elevato
0%	20%	50%	100%
Cassa	Crediti verso banche multilaterali di sviluppo	Mutui ipotecari su immobili ad uso residenziale	Crediti verso imprese private
Crediti verso banche centrali di Paesi OCSE	Crediti verso banche di Paesi OCSE	Facility per l'emissione di titoli	Crediti verso banche centrali di Paesi non OCSE
Titoli di governi di Paesi OCSE	Crediti verso enti del settore pubblico		Partecipazioni in imprese private

Tabella 1 ponderazioni del coefficiente di solvibilità per alcune attività di bilancio

1.5.2 Basilea 2

Uno dei problemi più importanti dell'accordo di Basilea 1 riguardava il fatto che l'accordo valutava le aziende in base a requisiti fin troppo semplificati, limitandosi alla storia patrimoniale dell'azienda senza una valutazione dinamica della sua capacità di generare reddito³. L'estrema semplicità dell'accordo di Basilea 1 ha portato infatti al problema dell'arbitraggio regolamentare con cui gli istituti di credito riuscivano a eludere i requisiti minimi di capitale di vigilanza. L'arbitraggio regolamentare è una pratica con cui gli istituti di credito "per evitare requisiti patrimoniali relativamente elevati, cartolarizzavano il rischio di

² Mishkin F.S., Eakins S.G., Beccalli E. "La Regolamentazione Bancaria." In Istituzioni e Mercati Finanziari, Nona edizione, Pearson, 2019.

³ Borsa Italiana. Standard per la Gestione del Credito delle Banche. Financial Trend Analysis. Gennaio 22, 2010, <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/basileaii.htm>.

credito e trasferivano le posizioni nel portafoglio di negoziazione o fuori bilancio⁴”. È intuibile quindi che era necessario riformulare gli accordi andando a renderli inevitabilmente più complessi. Viene quindi sviluppato un secondo accordo di Basilea. Alla sua base ci sono 3 pilastri. Oltre alla definizione dei requisiti minimi patrimoniali, come già faceva il primo accordo, vengono sviluppati due nuovi elementi. Il secondo definisce il processo di controllo prudenziale, andando a definire in particolare le “linee guida per la gestione del rischio, nonché della trasparenza e della responsabilità dell’azione di vigilanza enunciati dal Comitato con riferimento ai rischi bancari, [...] , rischio di credito (prove di stress, definizione di inadempienza, rischio residuale e rischio di concentrazione del credito), rischio operativo, rafforzamento della comunicazione e della cooperazione su base internazionale, cartolarizzazione⁵”. Il terzo pilastro riguarda la disciplina del mercato, i requisiti di trasparenza informativa riguardo esposizione ai rischi e adeguatezza patrimoniale.

Il secondo pilastro si occupa di definire gli approcci adottabili dagli istituti di credito per la valutazione del rischio e delle perdite attese e inattese.

1.6 Approcci alla Valutazione delle Perdite Attese e Inattese

Esistono 2 possibilità al fine della valutazione delle perdite derivanti dall’attività erogazione di credito. Il primo è il sistema standard, che consiste semplicemente nell’affidare la valutazione a soggetti esterni (agenzie di rating), il secondo consiste nell’adozione di un sistema interno di rating da parte della banca, cioè un sistema sviluppato internamente dall’istituto bancario e approvato dagli organi di vigilanza nazionali (IRB approach, internal rating based approach). In generale questi modelli hanno come fine ultimo quello di definire la perdita attesa e inattesa dato un certo portafoglio di crediti detenuto dall’istituto di credito.

L’approccio di rating interno si divide a sua volta in due possibili approcci, quello base e quello avanzato, la differenza tra i due dipende dalle variabili che vengono calcolate tramite il modello interno alla banca. Attraverso l’approccio base vengono sviluppati modelli al solo fine del calcolo della probabilità di default della controparte (PD), ad esempio il modello KMV/Merton. L’approccio avanzato si occupa della valutazione non solo della PD ma anche di altri 2 fattori fondamentali per la valutazione delle perdite attese: LGDR e EAD.

⁴ Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. “Lo schema di Regolamentazione: Bilanciare Sensibilità al Rischio, Semplicità e Comparabilità.” Banca dei Regolamenti Internazionali, 2013, https://www.bis.org/publ/bcbs258_it.pdf.

⁵ Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. “Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali: Nuovo”. Banca dei Regolamenti Internazionali, 2006, <https://www.bis.org/publ/bcbs128ita.pdf>.

Analizziamo quindi brevemente questi termini:

- EAD, exposure at default, esposizione creditizia dell'affidato al momento del default calcolato come la parte di fido utilizzata (UT) più la parte di fido rimanente ($ACC - UT$) moltiplicata per il tiraggio (Tiraggio%), ossia la percentuale del rimanente che si stima verrà usata dall'affidato in caso di default

$$EAD = UT + (ACC - UT) * Tiraggio\%$$

- PD, probabilità di default, calcolata tramite complessi modelli statistici e finanziari;
- LGDR, loss given default rate, complemento a uno del tasso di recupero, rappresenta il tasso di perdita atteso in caso di insolvenza; viene calcolato considerando il recupero atteso (RA), i costi attesi (CA) derivanti dal processo di recupero credito, le garanzie (GAR%) e il tasso di sconto i :

$$LGD = 1 - \frac{RA - CA}{EAD * Gar\%} * (1 + i)^{-t}$$

Questi tre elementi servono in particolare al calcolo della **Expected Loss** (EL), ossia la perdita attesa data una certa controparte

in termini percentuali sul valore di EAD:

$$EL = LGDR * PD$$

in termini assoluti:

$$EL = LGDR * EAD * PD$$

Ovviamente questo valore rappresenta solo quanto in “media” si dovrebbe perdere (è infatti un Expected Value) e quindi non va valutato da solo ma sempre e comunque insieme al concetto di perdita inattesa, ossia, sostanzialmente, la distribuzione o variabilità delle perdite. La perdita infatti è anch'essa una variabile aleatoria che sarà quindi caratterizzata da un certo expected value (expected loss) e una certa variabilità (da cui deriva l'unexpected loss):

$$L \sim \phi(\mu, \sigma)$$

1.7 Value at Risk (VaR)

Data la distribuzione di probabilità delle perdite è possibile definire il livello di copertura per un certo portafoglio di crediti in termini di Value at Risk o VaR. Come suggerisce lo stesso nome, esso indica la quantità di perdita che si vuole coprire andando ad “accantonare” utili. Maggiore è il percentile coperto minore sarà la propensione al rischio perché maggiore è il livello di copertura delle perdite inattese. Se si coprisse solo la perdita attesa (EL) verrebbe

coperta solo una parte della distribuzione, in particolare verranno messe a riserva risorse in modo da coprirne esattamente la metà, come in un lancio di una moneta.

Quindi se vengono coperte le perdite fino a un livello di confidenza del 99,9%⁶ vengono coperte le perdite fino a un valore x tale per cui una perdita minore di x avverrà con una probabilità pari al 99,9%. Il metodo con cui viene realizzata la distribuzione delle perdite generalmente consiste in simulazioni attraverso l'uso di credit drivers.

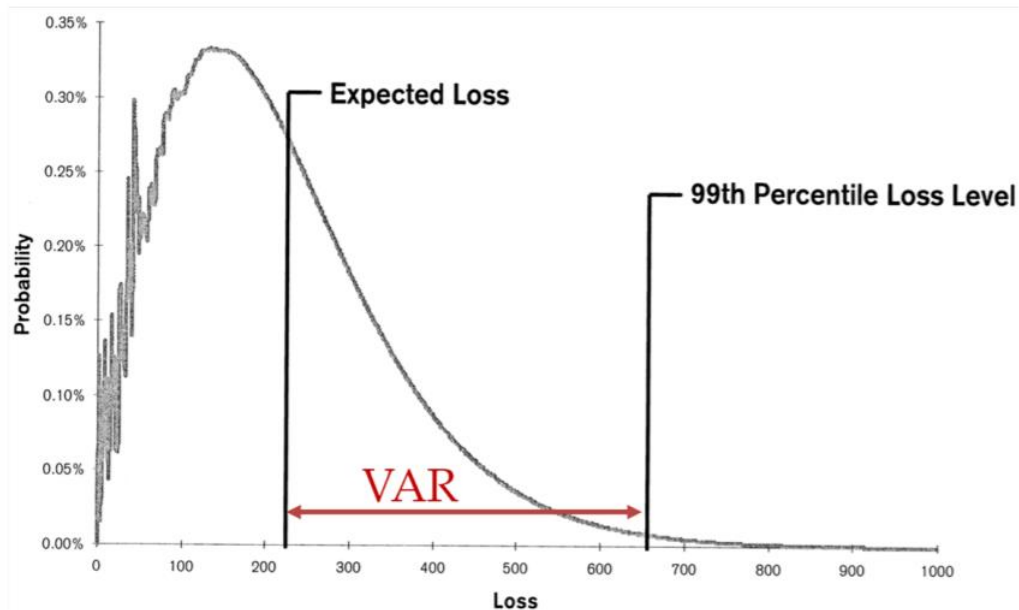


Tabella 2 Distribuzione delle Perdite e Rappresentazione del VAR

1.8 Gli Approcci alla Valutazione della Probabilità di Default

Al fine di determinare la perdita attesa e inattesa è essenziale determinare la stima della probabilità di default, detto anche **tasso di insolvenza**. Grazie alla sua valutazione sarà possibile infatti calcolare l'Expected Loss e successivamente la perdita inattesa e quindi valutare il VaR. Esistono in particolare 5 tipologie di modelli⁷ per il calcolo del tasso di insolvenza:

- modelli analitico-soggettivi;
- modelli statistici:
 - modelli di analisi discriminante;
 - modelli probit/logit;

⁶ Hull John C. "Value at Risk." In *Options, Futures, and other Derivatives*, Ninth Edition, Pearson, 2015.

⁷ D'Annunzio Nadia e Greta Falavigna. *Modelli di Analisi e Previsione del Rischio di Insolvenza. Una Prospettiva delle Metodologie Applicate*. Ceris-Cnr, 2004, <https://core.ac.uk/download/pdf/6524031.pdf>.

- modelli basati su reti neurali;
- modelli fondati sui giudizi delle agenzie di rating;
- modelli fondati sui dati di mercato dei capitali;
- modelli di option pricing

Storicamente la prima applicazione fatta è di analisi discriminante, in particolare il modello realizzato da Altman: lo Z-score. Z rappresenta l'indice di solidità creditizia, che dipende da alcune variabili di bilancio⁸.

$$Z = 1.2 * x_1 + 1.4 * x_2 + 3.3 * x_3 + 0.6 * x_4 + x_5$$

dove:

X1 : capitale circolante / totale attivo,

X2 : utili non distribuiti / totale attivo,

X3 : utili ante interessi e imposte / totale attivo,

X4 : valore di mercato del patrimonio / valore contabile dei debiti a lungo termine,

X5 : fatturato / totale attivo

Nel tempo sono stati sviluppati molti altri modelli sia dalle stesse banche, sia da agenzie di rating (Moody's, S&P, Fitch). Essi si possono basare su elementi quantitativi (principalmente tratti dai bilanci delle aziende) o qualitativi (qualità del management, struttura dell'azienda, situazione politica e sociale del Paese in cui l'azienda ha sede).

1.9 Il Modello di Merton

Tra le categorie di modelli viste ne esiste una di particolare interesse, quella dei modelli di option pricing. Le opzioni sono degli strumenti finanziari derivati. Secondo questa categoria di modelli l'equity delle imprese può essere considerato alla stregua di questi strumenti. In particolare, questo modello fa parte anche di un'altra categoria di modelli per la valutazione del rischio, definiti come asset value model. In questa categoria ricadono i modelli che considerano il default come dovuto alla diminuzione del valore delle attività dell'azienda. Prima di poter parlare più affondo del modello di Merton è necessario però definire un'opzione, le sue caratteristiche e quindi il modello, mutuato dalla finanza quantitativa, per il calcolo del valore del premio delle opzioni.

⁸ Altman Edward I. "Predicting Financial Distress of Companies: Revisiting The Z-Score and Zeta Models." NYU Stern School of Business, Giugno 2000, <http://pages.stern.nyu.edu/~ealtman/Zscores.pdf>.

2. Un'Introduzione alle Opzioni

2.1 I Contratti Derivati

Prima di definire cos'è un'opzione è rilevante dare una definizione di contratto derivato. I prodotti derivati si chiamano in questo modo perché il loro valore deriva dall'andamento del valore di una attività ovvero dal verificarsi nel futuro di un evento osservabile oggettivamente⁹. L'attività, ovvero l'evento, che possono essere di qualsiasi natura o genere, costituiscono il "sottostante" del prodotto derivato. Mentre quindi il valore di un'azione eriva in maniera diretta dalle performance dell'impresa che l'ha emessa in primo luogo, un contratto derivato potrebbe prendere il proprio valore dall'azione stessa. Questi contratti hanno 3 importanti usi:

- Copertura o Hedging, per diminuire il rischio derivante da una certa operazione
- Arbitraggio, per sfruttare possibili disallineamenti temporanei dei prezzi di determinati contratti per ottenere un profitto immediato
- Speculazione, appunto per speculare su certe possibili condizioni di un certo titolo, indice o altro contratto

Esistono quindi 3 tipi di investitori sul mercato dei derivati: Speculatori, Arbitraggisti e Hedgers. La nascita del primo mercato in cui venivano scambiati contratti derivati è riconducibile all'esigenza di diminuire il rischio derivante da avverse condizioni climatiche in ambito agricolo. In particolare, nacque a Chicago nel 1848 la Chicago Board of Trade (CBOT), dove ancora oggi è attivo il più vecchio luogo di scambio di contratti futures e opzioni.

Le grandi imprese agricole americane del mid west infatti erano particolarmente esposte al rischio del quale, a seguito di un'annata particolarmente nefasta, la loro produzione di grano sarebbe potuta essere molto bassa. Una quantità di prodotto bassa ne provocava per la legge della domanda un innalzamento dei prezzi che a loro volta si ripercuotevano su tutti i settori ad esso collegato. Una quantità molto alta invece provocava ovviamente un abbassamento del prezzo. Essendo le condizioni climatiche particolarmente volatili, ne risultava una forte volatilità anche dei prezzi del grano e quindi di tutti i suoi derivati. Per evitare tutti i problemi derivanti dall'alta volatilità del prezzo le grandi imprese cominciarono quindi a stipulare contratti con cui vendevano l'obbligo a comprare grano (poi successivamente anche altri prodotti agricoli) in una certa data futura. Questi contratti sono oggi definiti come contratti forward, conosciuti anche come contratti a termine. Un contratto

⁹ Consob. "I Derivati" Consob.it, <http://www.consob.it/web/investor-education/i-derivati>.

a termine è definito come un contratto in cui la liquidazione e la contrattualizzazione per lo scambio di un titolo avvengono in due momenti diversi. Abbiamo un momento t in cui le due parti si accordano sul prezzo e la quantità a cui verrà scambiato il prodotto “sottostante” e quando avverrà lo scambio e un tempo $t+1$ in cui avverrà lo scambio e la liquidazione della quantità al prezzo accordato. Chi vende il contratto forward è nella posizione in gergo chiamata short (corta) ed è obbligato a vendere alla data futura al prezzo contrattualizzato, chi compra il contratto, posizione long (lunga) è invece obbligato a comprare al prezzo fissato alla data futura. Se il prezzo del sottostante sale allora la posizione short sarà costretto a comprare sul mercato al prezzo più alto e vendere al più basso, al contrario se il prezzo scende comprerà al più basso e venderà al prezzo più alto. Possiamo vedere schematicamente le curve che descrivono i pay-off delle due posizioni short e long nel contratto forward in funzione del prezzo del sottostante alla maturity.

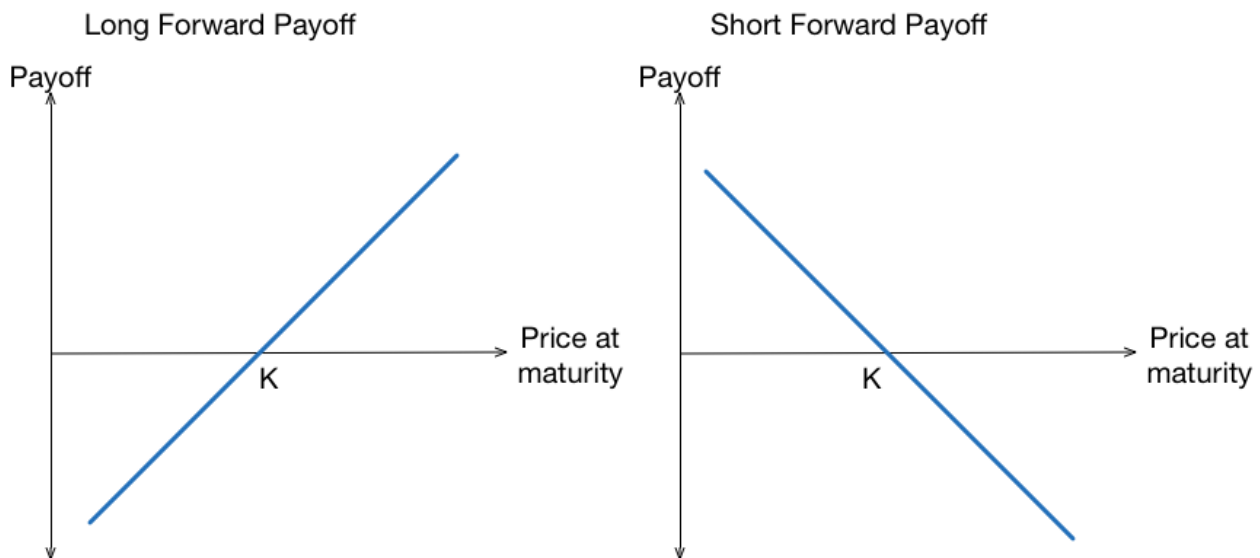


Tabella 3 Rappresentazione Payoff Long e Short Position in un Contratto Forward

Nel mercato agricolo era sostanzialmente quanto visto finora. La posizione short era il produttore di grano che vendeva appunto a termine, la posizione long era l'azienda che lavorava il prodotto che comprava a termine. Il sottostante era il grano che veniva venduto all'inizio della stagione agricola quando non era ancora possibile conoscere le condizioni climatiche. In questo modo quando veniva raccolto i produttori di grano avrebbero venduto, indipendentemente dalla quantità prodotta, al prezzo specificato dal contratto forward andando quindi a coprirsi dal rischio di un'annata particolarmente florida e quindi prezzi relativamente bassi per la legge della domanda. Ovviamente questo andava non solo a coprire i produttori di grano dalla

possibile caduta dei prezzi ma andava anche a appiattire i profitti nel caso di un'annata particolarmente nefasta, in questo caso infatti il prezzo pre-contrattualizzato poteva essere inferiore a quello che si formava sul mercato data la quantità prodotta. Si dice quindi che le operazioni di copertura (hedging) sono globalmente a somma zero. Il “guadagno” per il produttore di grano e per le aziende che lo lavoravano era quello di avere un outlook più sicuro rispetto il prezzo del prodotto, quindi una maggiore sicurezza.

2.2 Le opzioni

I contratti di opzione sono definiti da Borsa Italiana come: strumenti finanziari il cui valore non è autonomo ma deriva dal prezzo di una attività sottostante di varia natura. Risultano quindi perfettamente allineate con la definizione di contratto derivato. Più in particolare, contratti finanziari che danno il diritto, ma non l'obbligo, all'acquirente dietro il pagamento di un prezzo (premio), di esercitare o meno la facoltà di acquistare (Call) o vendere (Put) una data quantità di una determinata attività finanziaria, detta sottostante, a una determinata data di scadenza o entro tale data e a un determinato prezzo di esercizio (strike price)¹⁰.

Nel precedente paragrafo abbiamo definito i contratti di acquisto a termine in maniera simile alla definizione appena data, la differenza fondamentale è che nei contratti di opzione non vi è l'obbligo ma, appunto, l'opzione a comprare o vendere. Ecco anche il motivo per cui esistono due tipologie di contratti di opzione, le opzioni call che conferiscono a chi paga il premio il diritto/opzione a comprare il sottostante e le opzioni put che conferiscono a chi paga il premio il diritto/opzione a vendere il sottostante. Da queste caratteristiche derivano due altri importanti elementi che contraddistinguono i contratti di opzione che torneranno molto utili nei capitoli successivi e in particolare nel modello di Merton:

- **limited liability**, tradotto passività limitata, fa riferimento al fatto che una volta pagato il premio, la posizione long non può perdere più di quanto ha investito (cioè il premio stesso);
- **option to liquidate**, tradotto, diritto alla liquidazione, appunto con riferimento a quanto già detto precedentemente, l'opzione e non l'obbligo a “liquidare”;¹¹

I contratti di opzione come i contratti future e forward sono usati spesso nei mercati finanziari per operazioni di copertura, arbitraggio e speculazione. In particolare, esistono alcune strategie

¹⁰ Borsa Italiana. “Guida alle Opzioni Aspetti Teorici,” Mercato Italiano dei Derivati, 30 Aprile 2001, <https://www.borsaitaliana.it/derivati/archiviopdf/homepage/prodottiidempubblicazioni/guidaalleopzioni2991.pdf>.

¹¹Aswath Damodaran. “Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset, Third Edition”, 1995, <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/valn2ed/ch30.pdf>.

applicabili tramite l'uso delle opzioni, dette strategie complesse, che permettono di ottenere pay-offs in base a condizioni particolari del sottostante (spreads, hedge, combinations).

Per riuscire a comprendere a pieno il meccanismo di funzionamento delle opzioni è utile andare a studiarle in termini quantitativi. Prima però sarà necessario passare in rassegna alcuni dei termini usati nella definizione:

- Premium o Premio: somma che un soggetto deve pagare per acquisire il diritto a comprare/vendere, il premio NON è restituibile
- Strike price o prezzo di esercizio: il prezzo definito a priori nel contratto di opzione a cui chi paga il premio avrà in futuro il diritto a comprare o vendere
- Data di esercizio o di scadenza: data alla quale è possibile esercitare il diritto (data di esercizio) o entro la quale è possibile esercitare il diritto (data di scadenza)

Esiste una importante distinzione nei contratti di opzione che è necessario esplicitare per quanto riguarda la data di esercizio. Un'opzione può essere infatti

- Americana: se la data di esercizio è la data **entro la quale** è possibile esercitare l'opzione
- Europea: se la data di esercizio è l'unica **alla quale** è possibile esercitare l'opzione

Esistono inoltre molte altre tipologie di opzioni, ad esempio le Asiatiche, che considerano la media aritmetica dei valori assunti dal sottostante durante la vita del contratto (path dependent).

2.3 Definizione quantitativa delle opzioni

Un modo per riuscire a comprendere al meglio il meccanismo di funzionamento delle opzioni è definirle quantitativamente. Facciamo quindi un esempio considerando un'opzione Call europea con le seguenti caratteristiche:

- Data di esercizio = t
- Prezzo del sottostante al tempo 0 = S_0
- Prezzo del sottostante al tempo t di esercizio = S_t
- Premio = P
- Strike price = X

Consideriamo ora il valore che in t può assumere il valore del sottostante. Se il valore del sottostante S_t è maggiore rispetto allo strike price allora è esercitando l'opzione compreremo a un prezzo X e riusciremo a ottenere un titolo del valore $S_t > X$, ottenendo profitto, al contrario invece nel caso in cui $S_t < X$ esercitando l'opzione compreremo il sottostante a un prezzo inferiore rispetto a quanto vale sul mercato. Risulta quindi scontato che sarà conveniente

esercitare l'opzione call solo nel caso in cui il prezzo del sottostante è superiore rispetto allo strike price. Non dobbiamo dimenticarci che per acquistare il diritto a comprare al prezzo St abbiamo pagato un premio P . Quantitativamente è possibile definire il payoff della posizione long (cioè chi compra il diritto a comprare) in un'opzione call come:

$$\text{Call Payoff long position} = \max(St - X; 0) - P$$

Quello della posizione short (chi vende il diritto a comprare) sarà esattamente opposto:

$$\text{Call Payoff short position} = -\max(St - X; 0) + P$$

Quando in un'opzione call nella posizione long il prezzo del sottostante è maggiore rispetto allo strike allora si dice in the money (ITM), se uguale at the money (ATM) e se inferiore out of the money (OTM).

Con un ragionamento simile è possibile definire il payoff di un'opzione put. Avendo la posizione long il diritto a vendere, sarà disposta a esercitarla solo nel caso in cui il prezzo al tempo t sarà superiore rispetto allo strike, quindi:

$$\text{Put Payoff long position} = \max(X - St; 0) - P$$

Per la posizione short

$$\text{Put Payoff short position} = -\max(X - St; 0) + P$$

Quando in un'opzione put nella posizione long il prezzo è inferiore rispetto allo strike allora si dice in the money (ITM), se uguale at the money (ATM), se maggiore out of the money (OTM). A questo punto possiamo usare le relazioni appena viste per definire degli schemi molto utili che ci permetteranno di ottenere una buona rappresentazione visiva delle due tipologie di opzioni e le loro corrispettive posizioni. Questi schemi mettono in relazione il payoff dato da una certa opzione con il prezzo del sottostante, userò Excel per descrivere i payoff dati dalle opzioni con la funzione $\max()$ usando dei valori ipotetici di X , St e P . In particolare verranno ipotizzati un certo numero di scenari riguardanti il prezzo St calcolando per ognuno di essi il payoff, infine verranno considerate coppie di punti con coordinate $(St; \text{Payoff}(St))$. Troveremo quindi i caratteristici schemi dei payoff delle opzioni per ognuna delle due posizioni coinvolte nei singoli contratti:

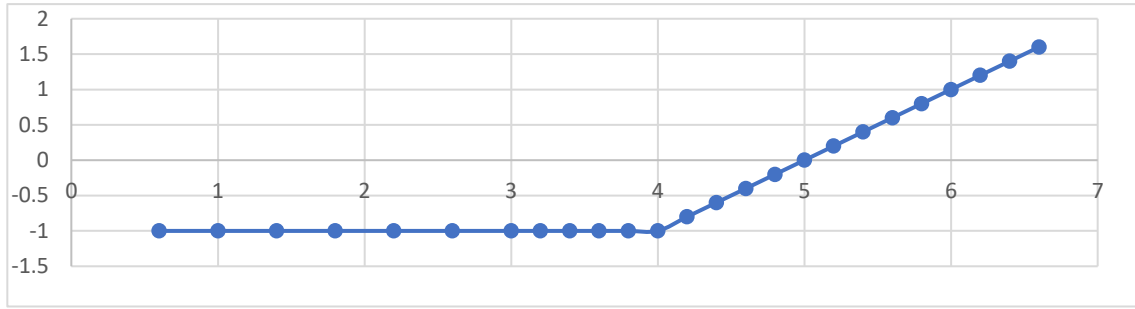


Tabella 7 Payoff Long Position, Call Option

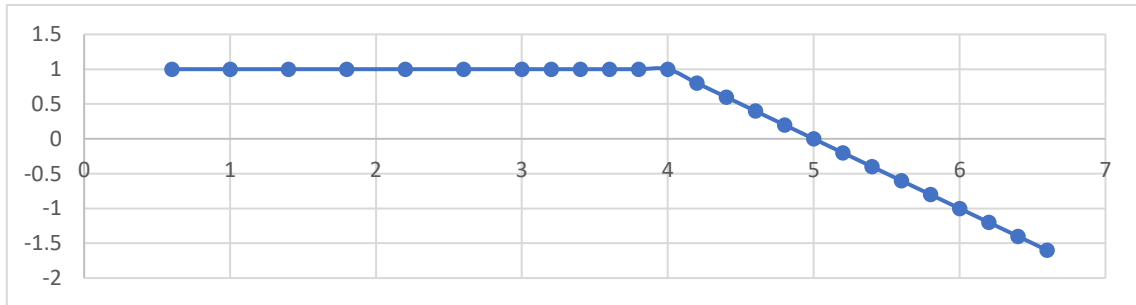


Tabella 6 Payoff Short Position, Call Option

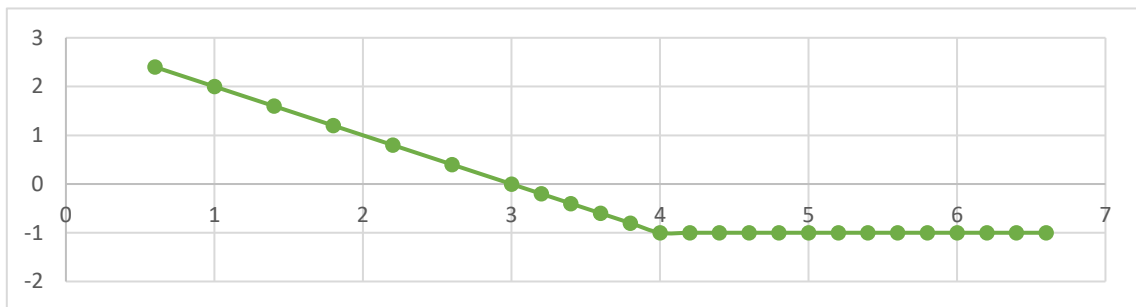


Tabella 5 Payoff Short Position, Put Option

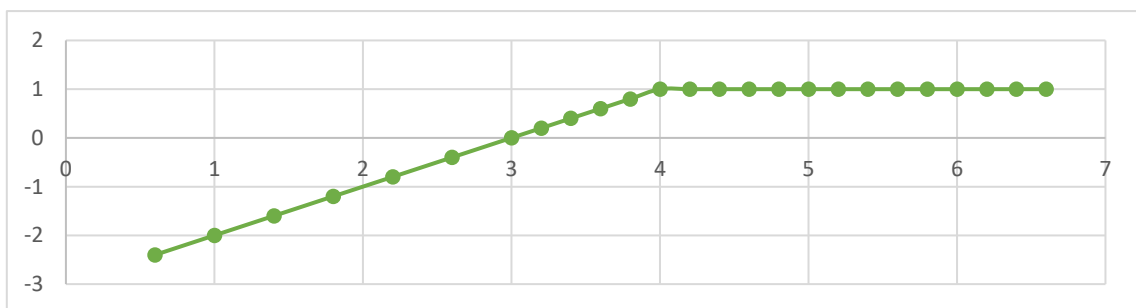


Tabella 4 Payoff Long Position, Put Option

2.4 Il premio

Il premio delle opzioni è stato definito come la somma che la posizione long (chi compra) deve essere disposta a pagare per comprare il diritto a esercitare l'opzione a comprare o vendere. Il premio è composto teoricamente da due parti: la componente intrinseca (intrinsic value) e la componente temporale (time value).

2.4.1 Il Valore Intrinseco

La prima parte di premio è facilmente definibile secondo una semplice formula:

Valore Intrinseco per un'opzione Call = Prezzo del Sottostante – Strike

Valore Intrinseco per un'opzione Put = Strike – Prezzo del Sottostante

Il valore intrinseco indica, quindi, di quanto un'opzione è in-the-money. Solo un'opzione in-the-money ha un valore intrinseco superiore a zero, viceversa le opzioni at-the-money oppure out-of-the-money hanno valore intrinseco pari a zero. Il valore del premio è quindi uguale al solo valore temporale se l'opzione è ATM o OTM¹². Inoltre, un'opzione per definizione di arbitraggio – ovvero organizzare una transazione che coinvolge nessun esborso di denaro effettivo che si traduce in un sicuro e immediato profitto¹³ – non può teoricamente essere commerciata a meno del valore intrinseco. In questo caso, questa discrepanza di valori, dovrebbe necessariamente attirare arbitraggisti che puntano a ottenere profitto immediato¹⁴. Anche se per il suddetto principio non è possibile un valore inferiore al valore intrinseco nella finanza concreta questo accade spesso. Inoltre, è possibile verificare dalle equazioni sopra come il valore intrinseco aumenta per un'opzione call tanto più lo strike price è minore mentre il valore intrinseco di un'opzione put aumenta tanto più aumenta lo strike price.

2.4.2 Il Valore Temporale

Il valore temporale è definito come “[...] whatever the premium of the option is in addition to its intrinsic value [...] Time value is that part of the premium that reflects the time remaining before expiration”¹⁵. Il valore temporale riflette quindi il tempo che manca al momento in cui

¹² Borsa Italiana. “Guida alle Opzioni Aspetti Teorici.”

¹³ Hal R. Varian, “The Arbitrage Principle in Financial Economics.” *Economic Perspectives* Vol. 1, No. 2 1987, pp. 55-72, <https://pubs.aeaweb.org/doi/pdfplus/10.1257/jep.1.2.55>.

¹⁴ Alan Farley, “How to Avoid Closing Options below Intrinsic Value,” Investopedia, 4 Luglio 2018, <https://www.investopedia.com/trading/avoid-closing-options-below-intrinsic-value/#:~:text=Theoretically%2C%20an%20option%20should%20not,until%20intrinsic%20value%20is%20restored.>

¹⁵ “Characteristics and Risks of Standardized Options,” American Stock Exchange, LLC, Chicago Board Options Exchange, Incorporated, New York Stock Exchange, Inc., NYSE Arca, Inc. and Philadelphia Stock Exchange, Inc., 1994, <https://www.theocc.com/getmedia/a151a9ae-d784-4a15-bdeb-23a029f50b70/riskstoc.pdf>;

l'opzione è esercitabile (opzione Europea) o in cui scade (opzione Americana). Il valore temporale dipende dal lasso di tempo mancante alla data di esercizio o di scadenza, dalla volatilità del sottostante e da altri fattori. In conclusione, per calcolare il premio è necessario calcolare il valore intrinseco di un'opzione, quindi quanto è ITM¹⁶, e il suo valore temporale.

2.5 Put Call Parity

Con “Put Call Parity” si fa riferimento alla relazione esistente tra due opzioni con stesso prezzo di esercizio X , e la stessa data di scadenza T . Per dimostrare questa relazione vengono costruiti due portafogli:

- Portafoglio A: contenente una posizione lunga nell'opzione call e un titolo zero coupon bond che fornirà in T un valore di X (lo strike price delle opzioni).
- Portafoglio B: contenente una posizione lunga nell'opzione put e un'altra posizione lunga nel sottostante¹⁷

I payoff finali dati da entrambi i portafogli al tempo T sono:

PORTAFOGLIO A		$St > X$	$St < X$
	Long call	$St - X$	0
	ZCB	X	X
	Totale della posizione	St	X

PORTAFOGLIO B		$St > X$	$St < X$
	Long put	0	$X - St$
	azione	St	St
	Totale della posizione	St	X

In entrambi i casi il valore del portafoglio è uguale al massimo tra St e X in T . Questi due portafogli devono quindi necessariamente avere lo stesso valore al tempo 0 per il principio di non arbitraggio. In conclusione, dato un tasso di interesse r , considerando un rendimento continuo (continuous compounding) possiamo scrivere la seguente relazione:

¹⁶ anche detto “moneyness” di una opzione.

¹⁷ In questo caso posizione lunga nel sottostante significa comprare il sottostante, inoltre si considera che il sottostante è una azione per semplicità, dobbiamo ricordare infatti che le opzioni nella finanza moderna hanno molte tipologie di sottostanti, da indici a tassi di interesse.

$$c + X * e^{-rt} = p + S_0$$

in cui c e p rappresentano il premio rispettivamente per l'opzione call e put, S_0 rappresenta il valore del sottostante al tempo corrente, il termine e^{-rt} rappresenta il fattore di attualizzazione in interesse composto continuo e X rappresenta lo strike price di entrambe le opzioni. È inoltre importante ricordare che la relazione per come è stata scritta vale solo per le opzioni di tipo Europeo. Grazie a questa relazione è possibile calcolare il valore dell'opzione put di tipo Europeo a partire dal valore del premio della call con la sua stessa "moneyness" senza dover applicare due volte i modelli per il calcolo del valore delle opzioni.

3. Il Modello di Black e Scholes

3.1 I Primi Modelli di Valutazione

In questo paragrafo verrà descritta brevemente la storia dell'evoluzione dei vari modelli per la valutazione del premio delle opzioni¹⁸. Il primo tentativo di modellare il prezzo di un derivato è stato fatto nei primi del 1900 da Bachelier. Egli ha realizzato un modello nel tempo discreto che si basava sul concetto di "random walk," attraverso il quale voleva prezzare le opzioni sui bond emessi dal governo francese¹⁹. Il contributo della sua tesi, anche se trascurato almeno fino agli anni 50 del 1900, fu di grandissima ispirazione per i modelli sviluppati circa 70 anni dopo da Black, Scholes e Merton. Infatti, solo nel 1950 Paul Samuelson, dopo la morte di Bachelier nel 1946, riconobbe l'importanza del modello da lui sviluppato, tanto che volle la sua tesi tradotta in inglese per poterla apprezzare al meglio²⁰.

Il modello di Bachelier è considerabile come l'antecedente logico dei modelli a tempo continuo. Infatti, considerando un random walk con passi sempre più piccoli è possibile approssimarlo al moto Browniano. Per random walk si intende un processo stocastico formato dalla somma di variabili casuali con distribuzioni identiche e indipendenti le une dalle altre²¹, le variabili casuali nel nostro caso rappresentano gli incrementi (assoluti o relativi/percentuali) del valore del sottostante del derivato:

¹⁸ Phelim Boyle, Feidhlim Boyle, "The Quest for the Option Formula," in *Derivatives: The Tools That Changed Finance*, Risk Books, 2001,

<http://web.archive.org/web/20120326213505/http://www.thederivativesbook.com/Chapters/05Chap.pdf>.

¹⁹ L. Bachelier, "Théorie de la Speculation," *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, vol. 3, no. 17, pp. 21-86, 1900.

²⁰ As reported in the transcript of the PBS television programme "NOVA 2704: The Trillion Dollar Bet". (Broadcast February 8, 2000.)

²¹ Gregory F. Lawler e Vlada Limic, "Random Walk: A Modern Introduction," Cambridge University Press 2010,

https://books.google.it/books?hl=en&lr=&id=UBQdwAZDeOEC&oi=fnd&pg=PR5&dq=random+walk+introduction&ots=Qf1FRjQE-j&sig=6Gqf9gv3rx1M3Qf1dwxG_iQ5uxw&redir_esc=y#v=onepage&q=random%20walk%20introduction&f=false.

$$S_n = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Per quanto riguarda il moto Browniano per ora è sufficiente sapere che viene usato da Bachelier nel suo modello per simulare il movimento del prezzo del sottostante dell'opzione. Secondo questo modello tale movimento seguiva una distribuzione normale con incrementi indipendenti gli uni dagli altri (processo per questo motivo rientrante nella definizione dei processi stocastici detti “processi di Markov”).

In realtà la penultima ipotesi è valida solo per brevi periodi di tempo e porta spesso a risultati poco realistici, ad esempio il prezzo del sottostante sotto questa ipotesi può assumere un valore negativo; questo problema può però essere facilmente risolto usando, non il valore assoluto degli incrementi del sottostante ma il RoR (rate of return) dato dagli incrementi.

Dopo la scoperta della tesi di Bachelier, il famoso economista Paul Samuelson si occupò del prezzamento dei “warrants”, titoli molto simili a obbligazioni convertibili (in cui la call option consente di acquistare azioni di nuova emissione). Dopo Samuelson furono molti gli economisti che diedero il loro apporto alla ricerca: Sprenkle, Boness and Cootner, Thorp and Kassouf e altri. A realizzare lo step quasi definitivo verso la soluzione al problema del prezzamento delle opzioni furono però i futuri premi Nobel Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton. I loro apporti verranno trattati nel seguito, in primo luogo è infatti opportuno comprendere cos'è un random walk e un moto browniano.

3.2 Visualizzazione e definizione del Random Walk tramite Python

I concetti di Random Walk e di moto Browniano²² tornano molto spesso utili nel corso della trattazione dei modelli per la valutazione delle opzioni. Una loro rappresentazione visiva potrebbe essere quindi molto utile per comprendere e concretizzare questi due concetti senza dovere necessariamente definirli in modo formale. A questo proposito i tool e le librerie offerte da Python rappresentano un utilissimo strumento (in particolare verrà usato anche Jupyter, molto utile per la visualizzazione dei dati).

3.2.1 Random Walk Unidimensionale Simmetrico con Python

Un random walk è un processo stocastico in tempo discreto. Esso può essere agevolmente definito come la somma di N variabili aleatorie, che nel nostro caso sono gli incrementi a ogni step a partire dal valore iniziale. Il fatto che sia simmetrico significa semplicemente che la probabilità di avere incrementi in ogni direzione (nel nostro caso in alto e in basso) è uguale.

²² Conosciuto anche come processo di Wiener.

Nel programma Python²³ può essere facilmente definita una variabile aleatoria attraverso la libreria Numpy. Numpy fornisce infatti una classe di funzioni, “Numpy.random”, che consentono di generare numeri pseudo-casuali. In particolare la funzione Numpy.random.random(N) consente di creare un vettore contenente un numero N di valori ognuno con un valore pseudo-casuale tra 0 e 1:

```
[1]: import numpy as np
[2]: np.random.random(10)
[2]: array([0.03782479, 0.15586197, 0.14953124, 0.20021153, 0.72514257,
          0.05644432, 0.17650991, 0.23679602, 0.22986446, 0.19404421])
```

Per realizzare il random walk unidimensionale simmetrico viene definito un vettore con le probabilità di andare in alto e in basso, in linea 6. Quindi un punto di inizio del cammino in linea 9 e un'altra lista chiamata “positions” contenente il punto di inizio, a cui verranno aggiunti tutti i punti del cammino casuale (da linea 17 a 19). Le linee da 13 a 15 sono quelle che definisco, per ogni valore nel vettore di valori casuali rr, se l'incremento deve essere in basso (se il valore considerato nel vettore rr è inferiore a 0,5) o in alto (se il valore considerato nel vettore rr è superiore a 0,5). Grazie a Numpy è possibile definire quindi due vettori (“downp” e “upp”) contenenti, nel nostro caso, valori Booleani (True/False). A questo punto non resta altro che prendere i due vettori upp e downp e unire ogni coppia corrispondente di valori con il metodo zip. Infine calcolare ogni incremento, sommarlo al punto precedente e usare il metodo append() per metterlo alla fine della lista “positions”. Quello che si avrà alla fine sarà quindi un vettore positions contenente ogni passo del random walk:

²³GeeksforGeeks “Random Walk (Implementation in Python),” 22 Ottobre 2017, <https://www.geeksforgeeks.org/random-walk-implementation-python/>

```

1      # Python code for 1-D random walk.
2
3      import numpy as np
4
5
6      prob = [0.5, 0.5]
7
8
9      start = 1
10     positions = [start]
11
12
13     rr = np.random.random(10)#crea il vettore contenente 10 valori casuali
14     downp = rr < prob[0]      #crea il vettore contenente i decrementi
15     upp = rr > prob[1]       #crea il vettore contenente gli incrementi
16
17     zipp= zip(downp,upp)      #crea un oggetto Python contenente le coppie
18                               #di valori corrispondenti dei vettori downp e
19                               #upp
20     for idownp, iupp in zipp:
21         positions.append(positions[-1] - idownp + iupp)
22
23

```

3.2.2 Una Funzione per Creare Facilmente Random Walks in Python

È possibile riscrivere il codice in modo da realizzare una **funzione Python**. Questa consentirà direttamente di ottenere un certo cammino casuale dato il numero di passi del Random Walk da realizzare (`number_steps`), un punto iniziale (`initial_point`), la probabilità di una variazione in diminuzione (`prob_basso`) e un vettore (`min_max`) per fissare i limiti massimi e il minimi entro i quali può muoversi (che sono fissati di default tra 0 e 50). Il codice interno alla funzione “`random_walk_1d`” è praticamente uguale a quello definito nel paragrafo precedente:

```

1      # Python code for 1-D random walk.
2
3      import numpy as np
4      import matplotlib.pyplot as plt
5
6      def random_walk_1d(initial_point, number_steps, probb_basso,
7      max_min=[0,50]):
8          probb = [probb_basso, 1-probb_basso]
9
10
11         start = initial_point
12         positions = [start]
13
14
15         rr = np.random.random(number_steps)
16         downp = rr < probb[0]
17         upp = rr > probb[1]
18
19         zipp = zip(downp, upp)
20         for idownp, iupp in zipp:
21             down = idownp and positions[-1] > max_min[0]
22             up = iupp and positions[-1] < max_min[1]
23             positions.append(positions[-1] - down + up)
24
25
26
27         plt.plot(positions)
28         plt.show()
29         return positions

```

Ora si può creare il random walk semplicemente riportando il codice su scritto su Jupyter e richiamando la funzione scegliendone i parametri a piacere:

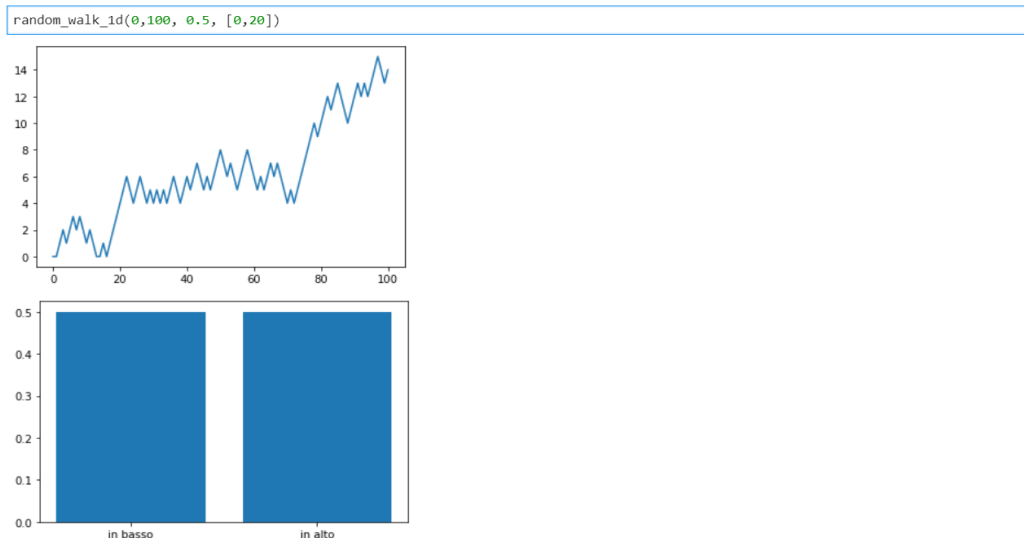
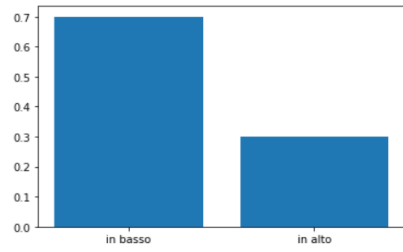
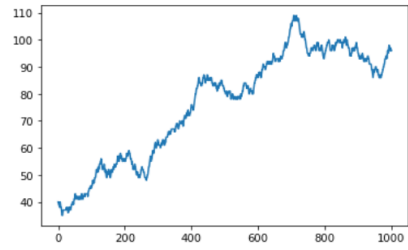


Figura 1 Rappresentazione del Random Walk Unidimensionale Simmetrico

In questo caso è stato creato un random walk (simmetrico e unidimensionale) con 100 passi, partendo dalla posizione 0, con una probabilità di andare in alto e in basso (unidimensionale) equivalente (simmetrico), un limite inferiore di 0 e uno superiore di 20.

```
random_walk_1d(40,1000, 0.7, [0,200])
```



3.3 Visualizzazione e definizione del moto Browniano

Il moto Browniano è un concetto formalmente complesso, proprio per questo motivo risulta più utile, in questa sede, realizzare una sua più semplice ma comunque efficace trattazione utilizzando anche le librerie di Python per la sua visualizzazione. Il Random Walk è un processo stocastico discreto, quindi ogni suo step fa parte dei numeri naturali (N). In questo modo tra uno step e l'altro non succede sostanzialmente nulla. Nel mondo reale però il movimento dei prezzi delle azioni non avviene assolutamente nel discreto ma è piuttosto associabile a un movimento continuo²⁴. Diventa quindi necessario definire un processo stocastico che sia continuo. Il moto Browniano è un processo stocastico continuo nel “tempo” e può quindi essere usato per la descrizione delle fluttuazioni che subisce il valore di un'azione nel tempo.

3.3.1 Il processo di Markov

Un processo di Markov è un processo in cui solo il valore corrente di una variabile è rilevante per prevedere il futuro. Tutta la storia passata della variabile non è rilevante. I prezzi delle azioni seguono un processo di Markov per la versione debole del principio di efficienza del mercato di Fama e Samuelson che afferma che i prezzi passati nei mercati finanziari non possono in alcun modo essere usati per prevedere i prezzi futuri e quindi per generare operazioni di arbitraggio²⁵. Per comprendere meglio in cosa consiste un processo di Markov sarà utile considerarne un esempio. In un processo di Markov il valore attuale della variabile è X e la variazione ha le seguenti caratteristiche:

$$\Delta X \sim \phi(0; 1)$$

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = 1$$

$$\sigma = 1$$

²⁴ Vladimir Ilievski, “Animated Visualization of Brownian Motion in Python,” *Medium*, 19 Aprile 2020, <https://towardsdatascience.com/animated-visualization-of-brownian-motion-in-python-3518ecf28533>.

²⁵ Alan F. Marcus, Alex Kane e Zwi Bodie, “Essential of Investments,” McGrawHill, Nona Edizione, 2012.

Per definizione di processo di Markov le variazioni sono indipendenti. La variazione in due anni che può subire sarà quindi data dalla somma due distribuzioni annuali, dando come risultato una distribuzione normale che a sua volta avrà media somma delle medie e varianza la somma delle varianze:

$$\begin{aligned}\Delta X &\sim \phi(0; 2) \\ \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= 2 \\ \sigma &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

In un processo di Markov la varianza è puramente additiva, mentre le deviazioni standard non lo sono, infatti se la varianza in un periodo di tempo di 2 anni è esattamente 2 nel caso descritto, la deviazione standard è uguale alla radice quadrata di 2. Si può concludere quindi dicendo che la variazione che subisce la variabile in un periodo di tempo qualsiasi ΔT è uguale a:

$$\begin{aligned}\phi(0; \Delta T) \\ \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= \Delta T \\ \sigma &= \sqrt{\Delta T}\end{aligned}$$

L'incertezza che è rappresentata dalla deviazione standard, in un processo di Markov è proporzionale alla radice quadrata del tempo.

3.3.2 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è un processo di Markov con media 0 e varianza 1, quello che abbiamo considerato negli esempi precedenti era quindi un processo di Markov e Wiener contemporaneamente. Possiamo quindi ora definire il processo di Wiener come un processo stocastico caratterizzato da due proprietà:

Proprietà 1. La variazione ΔZ in un piccolo lasso di tempo ΔT è uguale a:

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \epsilon * \sqrt{\Delta T} \quad (1) \\ \epsilon &\sim \phi(0; 1)\end{aligned}$$

in cui $\phi(0; 1)$ è una distribuzione normale con media 0 e varianza 1.

Ne consegue che ΔZ ha una distribuzione normale con media zero, varianza ΔT e deviazione standard $\sqrt{\Delta T}$, dato quanto detto prima per i processi di Markov.

Proprietà 2. Le variazioni ΔZ per piccoli intervalli ΔT sono indipendenti.

Ne consegue che dato un lungo intervallo di tempo T , la variazione tra 0 e T sarà:

$$Z(t) - Z(0)$$

L'intervallo di tempo da 0 a T può essere scomposto in N intervalli di tempo Δt in cui ogni variazione Δz è indipendente dall'altra. L'intera variazione tra 0 e T può essere considerata come la somma delle singole variazioni Δz nei più piccoli intervalli di tempo Δt dato quanto detto per i processi di Markov.

quindi:

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

$$\Delta Z = \epsilon * \sqrt{\Delta t}$$

$$\epsilon \sim \phi(0; 1)$$

E di conseguenza,

$$Z(T) - Z(0) = \sum_{i=1}^N \Delta z_i$$

Quindi,

$$Z(T) - Z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Ne consegue a sua volta che la variazione $Z(t) - Z(0)$ segue una distribuzione normale con

$$media = 0$$

$$varianza = N * \Delta t = T$$

$$deviazione\ standard = \sqrt{T}$$

$$Z(t) - Z(0) \sim \phi(0; T)$$

L'incertezza riguardante il valore della variabile considerata in un certo tempo nel futuro, se misurato come la deviazione standard, cresce in proporzione alla radice quadrata del tempo.

L'obiettivo è quindi passare da un Δt discreto a quella che in analisi si definisce "variazione infinitesimale": dt . Si ottiene questo risultato andando a prendere variazioni Δt sempre più piccole, quindi $\Delta t \rightarrow 0$, passando quindi da

$$\Delta x = a * \Delta t$$

a:

$$dx = a * dt$$

3.3.3 Visualizzazione del processo di Wiener

Un modo particolarmente utile per comprendere a pieno cosa è un processo di Wiener è quello di rappresentarlo graficamente. L'obiettivo di questo paragrafo sarà quello di realizzare un programma Python in grado di rappresentare graficamente un processo di Wiener. Il modo con cui ciò avviene è stato sostanzialmente spiegato nel paragrafo precedente, consisterà quindi nel prendere intervalli di tempo Δt sempre più piccoli. Dopo questo paragrafo verrà data una spiegazione più formale di processo di Wiener e di come esso può essere adottato per simulare il movimento del prezzo delle azioni.

Per visualizzare un processo di Wiener è stata realizzata una funzione, la parte del codice dalla linea 13 alla 32. La restante parte del codice è stata utilizzata per realizzare il grafico. Il grafico include anche un'innovativa libreria di Matplotlib che permette di aggiungere Sliders, ossia cambiare i valori all'interno del grafico in tempo reale. In particolare, come vedremo, gli Sliders sono stati usati per mostrare come cambia la forma del processo di Wiener man mano che diminuisce il Δt di cui abbiamo parlato in precedenza.

La funzione è stata definita come `brownian_motion(n_, t_, seed)`. Vediamone il contenuto. Si parte dall'istanziare 2 variabili e una lista. Le due variabili sono T , fissato per semplicità a 1, e il numero N di parti in cui viene diviso l'intervallo da 0 a T . La lista t è dato dalla funzione Numpy `np.linspace` che fornisce un vettore con i numeri equamente spazati su uno specifico intervallo. Vengono quindi inizializzati due vettori, uno contenente il valore X della variabile a un certo tempo t e uno contenente le variazioni "infinitesimali", dx su un certo intervallo dt . Quindi viene preso il vettore dx e ogni suo valore viene posto uguale alla radice quadrata della variazione dt per un numero randomico distribuito su una normale con media 0

e varianza 1 (standard)²⁶, esattamente come dalla definizione della prima proprietà del processo di Wiener:

$$\Delta x = \epsilon * \sqrt{\Delta t}$$

con

$$\epsilon \sim \phi(0; 1)$$

Le variazioni sono quindi aggiunte o sottratte a ogni valore nel vettore X. Quindi in fine avremmo il vettore X contenente i valori che graficamente troveremo sull'asse delle ordinate, mentre t (vettore dato dalla funzione `np.linspace`) contenente il “tempo” sull'asse delle ascisse. Viene usato il metodo “return” di Python per far sì che tale funzione possa dare come risultato, quando richiamata appropriatamente, una lista contenente a sua volta il vettore X e t.

Il codice è il seguente:

²⁶ “Numpy.random.randn — NumPy v1.19 Manual,” Consultato 4 settembre 2020, <https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.randn.html>.

```

import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.widgets import Slider
plt.style.use('bmh')

def brownian_motion(n_, t_, seed=random.randint(3, 10)):
    np.random.seed(seed)
    T = t_
    N = n_
    t = np.linspace(0, T, N)
    dt = T / (N)

    dX = [0] * N
    X = [0] * N

    dX[0] = np.sqrt(dt) * np.random.randn() # Eq. (3)
    X[0] = dX[0]

    for i in range(1, N):
        dX[i] = np.sqrt(dt) * np.random.randn() # Eq. (3)
        X[i] = X[i - 1] + dX[i] # Eq. (4)

    return [t, X]

x = brownian_motion(10, 1)[0]
y = brownian_motion(10, 1)[1]

fig, ax = plt.subplots()
plt.xlabel('Time $t$', fontsize=14)
plt.ylabel('Random Variable $X(t)$', fontsize=14)
plt.title('1D Brownian (Multiple) Paths', fontsize=14)
plt.subplots_adjust(left=0.12, bottom=0.33, right=0.95, top=0.92)
p, = plt.plot(x, y, linewidth=1, color='green')
plt.axis([-0.1, 1.1, -0.5, 2.5])
axcolor = 'lightgoldenrodyellow'
axSlider1 = plt.axes([0.12, 0.2, 0.78, 0.02], facecolor=axcolor)
slider1 = Slider(axSlider1, valmin=2, valmax=10000, valstep=1, color='red', label='N')
plt.text(1.8, -5.6, 'N indica il numero di intervalli in cui è stato diviso il più
grande intervallo [0,T]')
plt.text(1.8, -7, 'T=1 in questo caso')

axSlider2 = plt.axes([0.12, 0.15, 0.78, 0.02], facecolor=axcolor)
slider2 = Slider(axSlider2, valmin=3, valmax=8, valstep=1, color='yellow',
label='seed')

def value_update(val):
    yval = brownian_motion(int(slider1.val), 1, int(slider2.val))[1]
    xval = brownian_motion(int(slider1.val), 1, int(slider2.val))[0]
    p.set_ydata(yval)
    p.set_xdata(xval)
    plt.draw()

slider1.on_changed(value_update)
plt.show()

```

Dando quindi alla funzione `brownian_motion(n_, t_, seed)` gli argomenti `n_` e `t_`²⁷ restituirà un grafico rappresentante un processo di Wiener, del tipo:

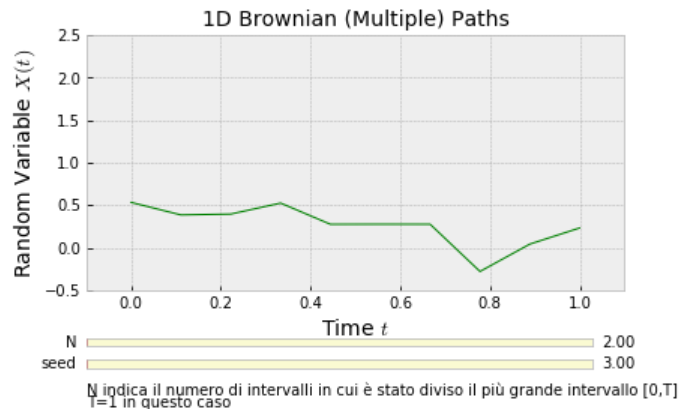


Figura 2 Rappresentazione di un Processo di Wiener in Python

Il `seed` è un metodo che permette di inizializzare il generatore di numeri casuali. I due slider in basso consentiranno di cambiare il `seed` e il numero `N` di intervalli Δt in cui verrà diviso l'intervallo $[0, T]$. Il codice è in particolare inizializzato in modo che il numero di intervalli `N` possa variare da 3 a 10000, mentre il `seed` da 0 a 50. Ora è possibile quindi facilmente cambiare il numero di intervalli `N` riuscendo a vedere direttamente come cambia il grafico²⁸:

²⁷ `Seed` viene già dato di default come un numero casuale tra 0 e 10

²⁸ Non essendo stato possibile inserire il programma ho deciso di lasciare il codice (che può essere eseguito solo con Python e con le librerie importate che si possono leggere nel codice stesso) e un eseguibile in allegato (che non necessita dell'installazione di Python o delle librerie), in questo modo è possibile verificare il funzionamento del programma.

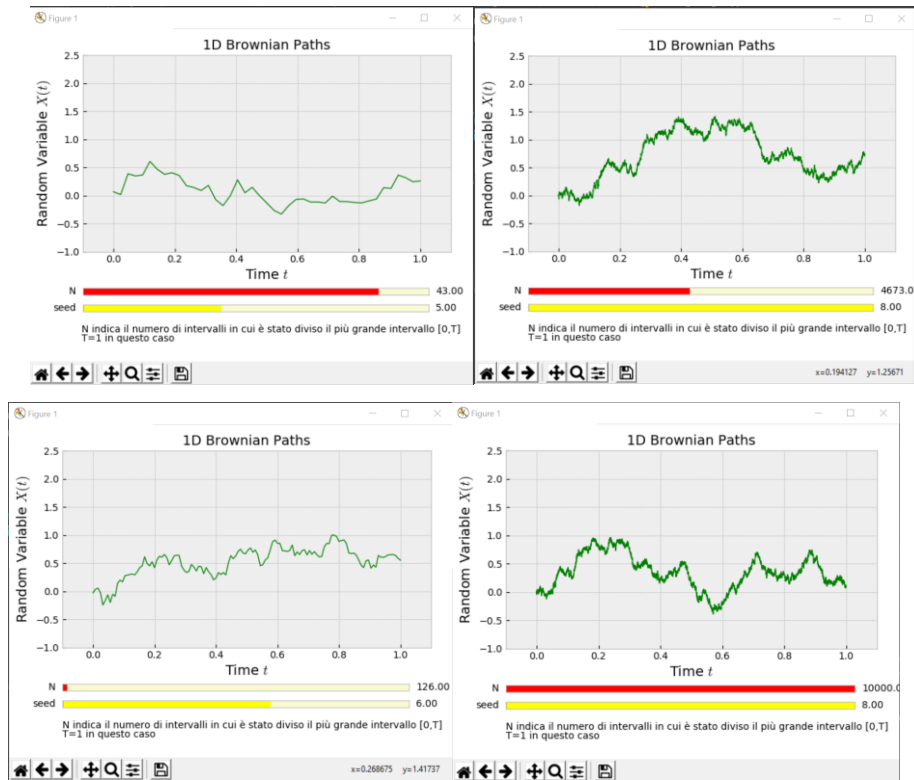


Figura 3 Rappresentazione di più processi di Wiener in Python

Ognuno dei grafici sopra rappresenta un processo di Wiener. In particolare gli ultimi due hanno un seed uguale quindi rappresentano lo stesso processo semplicemente diviso in un numero di intervalli N diversi.

Come possiamo notare man mano che aumenta il numero N gli intervalli Δt si fanno più fitti e le variazioni dx sono sempre più piccole. Ovviamente nella nostra visualizzazione per quanto piccoli gli intervalli essi non saranno mai sufficientemente piccoli per rappresentare un vero processo di Wiener in cui in teoria $\Delta t \rightarrow 0$.

3.3.4 Processo di Wiener generalizzato

Il processo di Wiener che è stato definito visto finora è un processo particolare perchè, come abbiamo detto, le variazioni per ogni intervallo sono distribuite su una normale standardizzata, ossia con media 0 e con varianza 1. Si dice tecnicamente che nel processo stocastico descritto la variazione media per variazione in ogni unità di tempo Δt (mean/expected change) è 0 mentre la varianza di ogni variazione per unità di tempo è uno. La variazione media si chiama drift rate mentre la varianza per unità di tempo variance rate.

Dato quindi il processo stocastico visto nel paragrafo precedente, in cui consideravamo le variazioni dz , possiamo definire un più generico processo di Wiener. La variazione la chiameremo dx , essa sarà data da:

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

$$dx = a dt + b dz$$

Il significato dei termini a destra dell'uguale è il seguente:

- $a dt$ è il drift rate, indica la variazione che X subirebbe per ogni unità di tempo, essa sarà proporzionale a un fattore a
- $b dz$ è invece la componente che aggiunge “rumore”, dz è uguale a

$$dz = \epsilon * \sqrt{\Delta t}$$

$$\epsilon \sim \phi(0; 1)$$

con qualche ulteriore modifica al codice visto nel paragrafo precedente è stato possibile aggiungere e mostrare anche il drift rate (‘ a ’, in rosso) e anche il ruolo del coefficiente b :

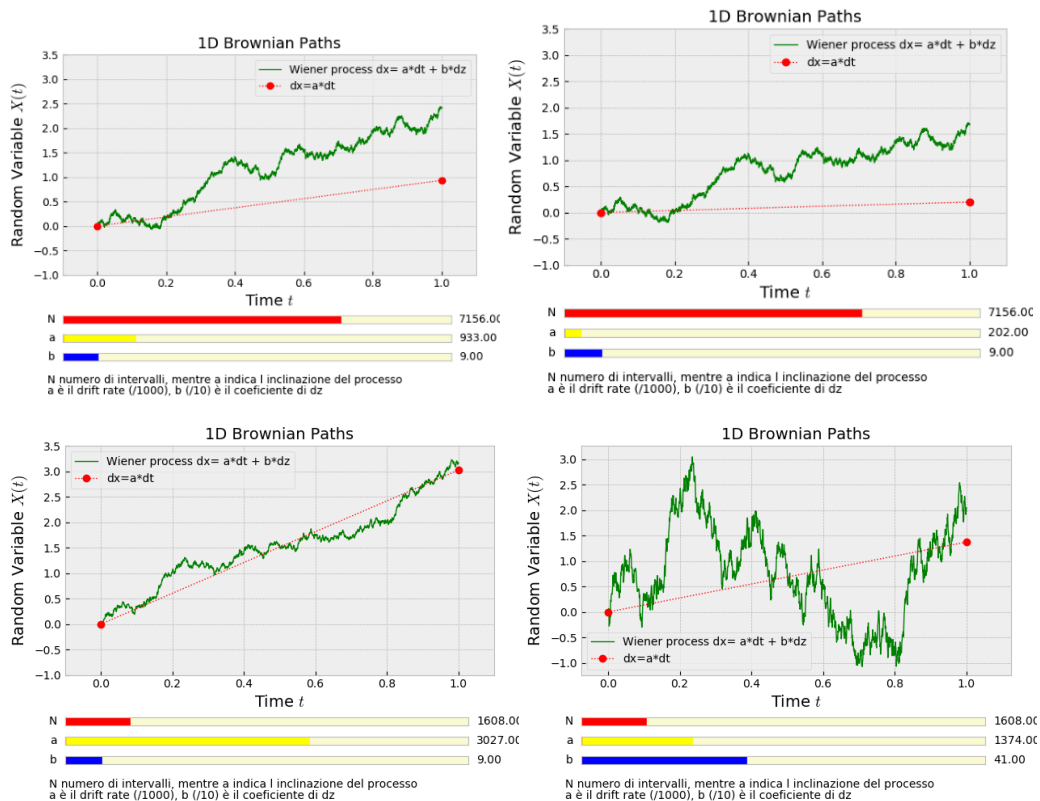


Figura 4 Rappresentazione dei Processi di Wiener Generalizzati

Ogni singola variazione sarà una estrazione da una distribuzione normale con le seguenti caratteristiche:

$$\text{media di } \Delta x = a * \Delta t$$

$$\text{deviazione standard di } \Delta x = b * \sqrt{\Delta t}$$

$$\text{varianza di } \Delta x = b^2 * \Delta t$$

3.4 Il Processo per il Prezzo delle Azioni

Dopo la trattazione generale del processo di Wiener è necessario applicarlo al prezzo delle azioni. Il problema è che, come è stato possibile vedere anche nei grafici, spesso questo processo porta a delle situazioni particolarmente poco credibili, ad esempio accade spesso che il prezzo (sull'asse y) vada sotto lo 0. Esistono poi anche altri problemi che hanno comportato l'esclusione del semplice moto browniano come modello per la rappresentazione del prezzo delle azioni.

Nel processo stocastico per le azioni consideriamo costante non la variazione assoluta dS ma piuttosto la variazione relativa. Sostanzialmente viene considerato costante non il drift rate (dS) ma l'expected return (dS/S).

Considerando l'assenza di volatilità, quindi del fattore delta, vediamo come si trasforma il processo di Wiener visto finora per le azioni:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt$$

Per un certo parametro μ .

Quindi ora risolviamo l'equazione differenziale integrando tra 0 e T e troviamo che:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt$$

$$S_t = S_0 * e^{\mu T}$$

In questo modo abbiamo dimostrato che il prezzo di un'azione cresce senza alcuna incertezza con un rendimento investito nel continuo. Aggiungendo il fattore di incertezza si ottiene:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt + \sigma dz$$

Che scritto in maniera più esplicita diventa:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt + \sigma * \epsilon * \sqrt{\Delta t}$$

Quindi:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu * \Delta t, \sigma^2 * \Delta t)$$

È inoltre importante soffermarci sul significato dei parametri μ e σ :

- μ è il rendimento atteso dagli azionisti sull'azione. Il rendimento atteso dagli azionisti è equivalente, secondo il modello del CAPM, al rendimento dei titoli risk free più un premio proporzionale alla parte di rischio non diversificabile.
- σ rappresenta la volatilità e quindi il fattore di incertezza che fa sì che il processo non sia sempre linearmente crescente ma sia piuttosto “zig-zagato”. Risulta molto importante stimare il suo valore al fine di applicare il modello di Black e Scholes.

3.4.1 Visualizzazione del Processo per le Azioni

Il modello sviluppato si definisce come moto Browniano geometrico. Modificando di nuovo il codice sviluppato in precedenza per il moto Browniano si può rappresentare in maniera molto semplice il moto Geometrico Browniano:

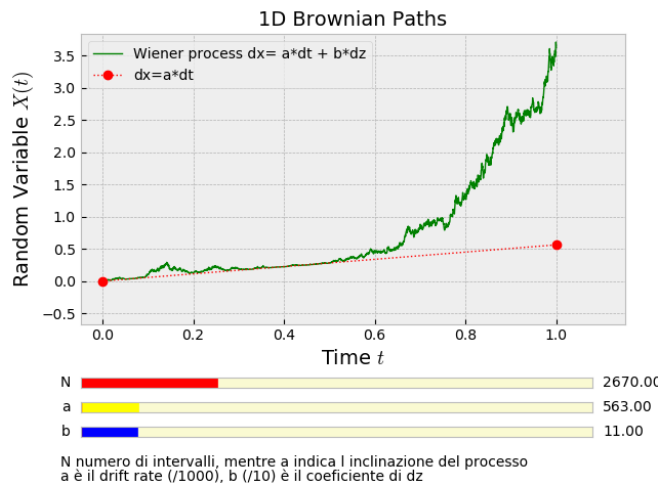


Figura 5 Rappresentazione del Processo Stocastico delle azioni

3.4.2 Il Lemma di Ito

Il lemma di Itô afferma che, considerando un processo stocastico del tipo:

$$dx = a * dt + b * dz$$

allora una funzione G dipendente da x e t segue un processo stocastico del tipo:

$$dG = \left(a \frac{dG}{dx} + \frac{dG}{dt} + \frac{d^2G}{2 * dx^2} b^2 \right) * dt + \frac{dG}{dx} b * dz$$

Questo processo stocastico ha come fattore di variabilità lo stesso del processo “sottostante”, cioè dz , in particolare è un processo con le seguenti caratteristiche:

$$\text{Media} = \left(a \frac{dG}{dx} + \frac{dG}{dt} + \frac{d^2G}{2 * dx^2} b^2 \right)$$

$$\text{Varianza} = b^2 \left(\frac{dG}{dx} \right)^2$$

Se consideriamo il processo del prezzo di un'azione che è stato analizzato nei precedenti paragrafi possiamo riscrivere il lemma di Itô con i parametri σ e μ .

Dato il processo stocastico dell'azione:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt + \sigma dz$$

Realizzando alcune sostituzioni è possibile riscrivere il lemma di Itô nel modo seguente:

$$dG = \left(S\mu \frac{dG}{dx} + \frac{dG}{dt} + \frac{d^2G}{2 * dx^2} (\sigma S)^2 \right) * dt + \frac{dG}{dx} (\sigma S) * dz$$

Questo consente di ottenere il processo stocastico di una funzione del prezzo dell'azione. Potendo considerare i derivati come funzioni del prezzo dell'azione è possibile tramite il lemma di Itô derivare il processo stocastico che segue il valore del derivato.

Ad esempio, è possibile farlo in modo molto semplice per i futures sapendo che il loro prezzo oggi è calcolabile in funzione del prezzo del sottostante come:

$$F = S * e^{rT}$$

Trattando F come la funzione generica G di prima, possiamo derivarne molto facilmente il processo stocastico dal lemma di Itô.

3.4.3 proprietà log-normale della distribuzione dei prezzi

Il modello finora studiato si basa sul concetto secondo cui la variazione percentuale del prezzo delle azioni segue una distribuzione normale:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu * \Delta t, \sigma^2 * \Delta t)$$

Possiamo dimostrare quindi che il prezzo S_t segue una distribuzione log-normale.

Per dimostrarlo verrà utilizzato il lemma di Itô appena descritto. La variazione infinitesimale del prezzo (dS) segue un processo stocastico del tipo:

$$dS = \mu * dt * S + \sigma dz * S$$

Per dimostrare la proprietà log-normale del prezzo dell'azione viene considerata una funzione G del prezzo dell'azione del tipo:

$$G = \ln(S)$$

Ora è possibile applicare il lemma di Itô per calcolare il processo stocastico corrispondente a G:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

È possibile affermare quindi che G segue un processo di Wiener generalizzato e quindi è possibile dire che ogni variazione ΔG è data da una estrazione da una distribuzione normale del tipo:

$$G(t) - G(0) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Quindi essendo $G = \ln(S)$ è possibile scrivere:

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

e di conseguenza:

$$\ln(S_t) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln(S_0), \sigma^2 T\right)^{29}$$

In conclusione, possiamo dire che la distribuzione del logaritmo del prezzo delle azioni è normale e di conseguenza, necessariamente, quella del prezzo è log-normale.

È possibile ora verificare, dato un certo μ e σ , qual è la probabilità che il prezzo di un'azione si trovi tra due valori. Ad esempio, se si considera un'azione con un prezzo al momento di 20 un rendimento atteso dagli investitori dato il rischio del 15% all'anno e una volatilità del 20% è possibile derivare la distribuzione del prezzo S_t nei prossimi, ad esempio, 6 mesi (quindi $T=0.5$):

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &\sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln(S_0), \sigma^2 T\right) \\ \ln(S_t) &\sim \phi\left(\left(0.15 - \frac{0.2^2}{2}\right)0.5 + \ln(20), 0.2^2 \cdot 0.5\right) \\ \ln(S_t) &\sim \phi(3.06, 0.2) \end{aligned}$$

è quindi possibile calcolare la probabilità che $\ln(S_t)$ si trovi tra due valori e quindi la probabilità che S_t ricada in un certo intervallo. Questa tipologia di distribuzione riesce a cogliere anche un altro aspetto importante del prezzo delle azioni, esso può abbassarsi al massimo fino ad azzerarsi, e contemporaneamente può aumentare fino potenzialmente all'infinito, questo carattere è ripreso dalla distribuzione lognormale che infatti presenta una “coda lunga” verso destra:

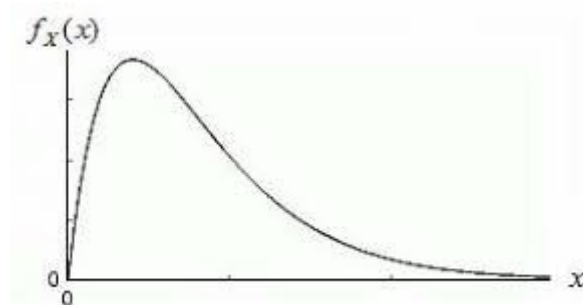


Figura 6 Funzione di Densità della Distribuzione Lognormale

²⁹ Il motivo per cui $\ln(S_0)$ viene aggiunto a destra solo alla media è che la varianza è invariante per traslazione (somma) e cambia quadraticamente per riscaldamento (moltiplicazione)

In conclusione, il prezzo di un'azione segue una distribuzione log-normale con:

$$media = m = \ln(S_0) + (\mu - 0.5\sigma^2T)$$

$$deviazione\ standard = s = \sigma\sqrt{T}$$

3.5 Il modello di Black and Scholes

3.5.1 le ipotesi di base del modello

Il modello nella sua forma più semplice trova alla base diverse ipotesi. Queste ipotesi possono essere rimosse rendendo il modello più complesso ma contemporaneamente più in linea con le caratteristiche reali e concrete delle opzioni. Le ipotesi più importanti vengono considerate da Black Fisher nell'articolo "Fact and Fantasy in the Use of Options", esse sono³⁰:

- Il tasso di interesse a breve termine non cambia
- La volatilità del prezzo del titolo non cambia
- Il titolo non garantisce dividendi

Come si può notare le ipotesi del modello sono particolarmente rigide, ma in realtà, considerando un'ottica più formale, nel seguito dell'articolo Black passa in rassegna in maniera specifica le altre ipotesi del modello:

- Il prezzo delle azioni segue il modello sviluppato nel precedente capitolo
- L'opzione è Europea
- Non ci sono costi di transazione né tasse (ad esempio i margini dei broker/dealers o le tasse da pagare per acquistare o vendere titoli)
- Non esistono opportunità di arbitraggio senza rischio
- Il commercio dei titoli è "continuo"
- Sono consentite le vendite allo scoperto
- Non solo il tasso di interesse non cambia ma la curva dei rendimenti è piatta, ossia il tasso di interesse è uguale per ogni scadenza³¹

In questo modo è possibile secondo Black, come si evince dal suo articolo, calcolare il premio dell'opzione considerando solo 5 variabili:

- Il prezzo dell'azione S
- La volatilità dell'azione σ
- Tempo alla scadenza T

³⁰ Black, Fischer. "Fact and Fantasy in the Use of Options." *Financial Analysts Journal* 31, no. 4 (1975): 36-72. Accessed September 4, 2020. <http://www.jstor.org/stable/4477843>.

³¹ Per curva dei rendimenti si intende la curva rappresentante i rendimenti medi annui per investimenti a n anni per ogni scadenza n

- Prezzo di esercizio X
- Tasso di interesse r

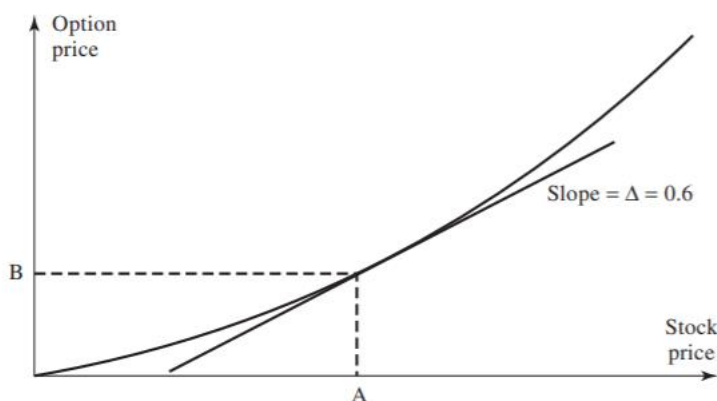
3.5.2 l'idea di fondo del modello

È stato già detto precedentemente che le opzioni possono essere usate al fine di “coprire” (hedging) una posizione. Coprire vuol dire diminuire o azzerare il rischio di un'operazione. Ad esempio, considerando l'acquisto di un titolo è possibile coprirsi da un possibile ribasso usando una opzione put sul titolo stesso (o su titoli correlati) che consente di ottenere un payoff proprio quando il prezzo del titolo scende³².

Il portafoglio costruito in questo modo si dice privo di rischio, questo perché il payoff che si ottiene da esso è sempre uguale indipendentemente dal valore dell'azione in un certo periodo di tempo. Ne risulta quindi che tale portafoglio deve necessariamente avere lo stesso rendimento di un titolo privo di rischio r in quello specifico periodo di tempo.

Al fine di creare un portafoglio con questa caratteristica è utile definire una relazione tra la variazione che subisce il prezzo di un'azione con la variazione che subisce il prezzo di un'opzione in un certo periodo di tempo:

$$\frac{\Delta C}{\Delta S} = m$$



Questa relazione consente di realizzare il portafoglio privo di rischio, se si considera ad esempio:

$$\frac{\Delta C}{\Delta S} = 0.4$$

Possiamo costruire un portafoglio con i seguenti pesi:

- ➔ 4 posizioni short sull'azione (vendere allo scoperto un'azione)

³² Black, Fischer, and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81, no. 3 (1973): 637-54. Accessed September 4, 2020. <http://www.jstor.org/stable/1831029>.

→ 10 posizioni long nell'opzione call sull'azione

Questo portafoglio è privo di rischio, infatti data una certa approssimazione, considerando una variazione in diminuzione del prezzo dell'azione del 10% avremmo due effetti nel portafoglio l'azione perde un valore di $-10\% * 4 = -0.4$. Data la relazione sopra se l'azione guadagna il 10% l'opzione riceve un cambiamento del 4%, di conseguenza essendo un'opzione put si otterrà dalla diminuzione del prezzo dell'azione un payoff di $4\% * 10 = +0.4$. Le due componenti del portafoglio si bilanciano perfettamente. In generale è possibile costruire un portafoglio con la caratteristica appena descritta seguendo il seguente schema:

- Posizione short nell'azione con peso $\frac{\Delta C}{\Delta S}$
- Posizione long nell'opzione call con peso 1

Questi pesi del portafoglio valgono, teoricamente, solo in un certo istante, infatti una volta che cambia il prezzo dell'azione cambia anche il rapporto $\frac{\Delta C}{\Delta S}$, portando all'esigenza di ribilanciare il portafoglio in base al nuovo rapporto.

3.5.3 Derivazione dell'equazione differenziale del modello

Sapendo che un derivato è considerabile matematicamente come una funzione del prezzo dell'azione possiamo applicare il lemma di Itô per derivarne l'equazione che ne caratterizza il processo stocastico. Considerando che l'azione segue un processo di questo tipo:

$$\frac{dS}{S} = \mu * dt + \sigma dz$$

Dal lemma di Itô deriviamo il processo stocastico del derivato f sull'azione, quindi considerando che il derivato come una funzione del prezzo dell'azione abbiamo che le sue variazioni seguono un processo stocastico del tipo seguente:

$$df = \left(S\mu \frac{df}{dx} + \frac{df}{dt} + \frac{d^2f}{2 * dx^2} (\sigma S)^2 \right) * dt + \frac{df}{dx} (\sigma S) * dz$$

Nel discreto:

$$\Delta S = \mu * S * \Delta t + \sigma * S * \Delta z$$

$$\Delta f = \left(S\mu \frac{df}{dx} + \frac{df}{dt} + \frac{d^2f}{2 * dx^2} (\sigma S)^2 \right) * \Delta t + \frac{df}{dx} (\sigma S) * \Delta z$$

Il portafoglio visto nel paragrafo precedente era composto da una posizione short nel derivato e una long nell'azione, quindi il payoff (Π) di quel portafoglio è, in base a quanto detto:

$$\Pi = -f + \frac{df}{dS}S$$

Quindi una variazione del payoff (Π) si può scrivere come:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{df}{dS}\Delta S$$

Sostituiamo i risultati precedenti e abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = & \\ & -\left(S\mu\frac{df}{dx} + \frac{df}{dt} + \frac{d^2f}{2dx^2}(\sigma S)^2\right)\Delta t - \frac{df}{dx}(\sigma S)\Delta z + \frac{df}{dS}(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta z) \end{aligned}$$

Con qualche passaggio algebrico si ottiene:

$$-S\mu\frac{df}{dx}\Delta t - \frac{df}{dt}\Delta t - \frac{d^2f}{2dx^2}\Delta t(\sigma S)^2 - \frac{df}{dx}\sigma S\Delta z + \frac{df}{dS}\mu S\Delta t + \frac{df}{dS}\sigma S\Delta z$$

Quindi:

$$\Delta\Pi = -\frac{df}{dt}\Delta t - \frac{d^2f}{2dx^2}\Delta t(\sigma S)^2 = \Delta t * \left(-\frac{df}{dt} - \frac{d^2f}{2dx^2}\sigma^2 S^2\right)$$

Le semplificazioni che sono state fatte sono molto importanti, in particolare quella in rosso. Come si può notare infatti i due termini in rosso sono in modulo uguali ma con segni opposti, quindi possono essere entrambi eliminati. L'importanza di questa semplificazione è che con essa viene eliminato il termine Δz che finora abbiamo considerato come l'elemento di incertezza che rendeva il percorso del prezzo nel tempo "zig-zagato" e quindi incerto. Infatti come è stato evidenziato sin dall'inizio:

$$\Delta Z \sim \phi(0,1)$$

Questo vuol dire che il portafoglio in questione presenta un rischio pari a zero e quindi può solo consentire di ottenere un payoff uguale a quello di un titolo risk free.

Quindi è possibile scrivere semplicemente $\Delta\Pi$ per il portafoglio come:

$$\Delta\Pi = r * \Delta t * \Pi$$

E quindi riscrivere l'uguaglianza come:

$$\Delta t * \left(-\frac{df}{dt} - \frac{d^2f}{2dx^2}\sigma^2 S^2\right) = r * \Delta t * \Pi$$

$$\Delta t * \left(-\frac{df}{dt} - \frac{d^2f}{2dx^2} \sigma^2 S^2 \right) = r * \Delta t * \left(-f + \frac{df}{dS} S \right)$$

Con alcune semplificazioni otteniamo l'equazione differenziale alla base del modello:

$$\left(\frac{df}{dt} + rS \frac{df}{dS} + \frac{d^2f}{2dx^2} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right) = rf$$

In base alla funzione che lega il valore f (del derivato) e il prezzo (S) dell'azione si avrà una soluzione diversa a questa equazione differenziale. La soluzione si dice che dipende dalla "boundary condition" (anche detta condizione di contorno). Ad esempio per un'opzione call Europea la condizione di contorno è:

$$f = \max(S - X, 0)$$

La soluzione dell'equazione differenziale del modello con questa condizione di è:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

Mentre per un contratto future la condizione di contorno è:

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

3.5.4 Risk Neutral Valuation

Un importante concetto da considerare una volta scritta l'equazione differenziale di cui sopra è che in essa non appare il termine μ (il rendimento atteso dall'investitore). In generale si dice che l'equazione differenziale, come anche la condizione di contorno (boundary condition), non contiene alcuna variabile che sia influenzata dalle preferenze di rischio dell'investitore, contiene infatti solo:

- prezzo corrente delle azioni
- strike price
- volatilità del prezzo delle azioni
- tasso di interesse privo di rischio

Questo tipo di valutazione si definisce come "Risk Neutral Valuation" e risulta in generale un metodo di valutazione molto importante dei derivati. Alcune sue implicazioni sono che:

1. ogni genere di preferenza può essere usata per calcolare il valore di f
2. in un mondo in cui gli investitori sono neutrali al rischio il rendimento atteso da ogni investimento è uguale al tasso privo di rischio, questo perché in un mondo neutrale al rischio nessun investitore, per definizione, richiede un premio per indurli a prendere del rischio

Da queste due osservazioni quindi è possibile dire che, dato che il prezzo del derivato non dipende dalle preferenze al rischio, allora μ (il rendimento atteso dall'investitore) è uguale al tasso risk free. Questa ipotesi semplifica di molto la derivazione dell'equazione per il calcolo del prezzo delle opzioni.

Per calcolare il valore di un'opzione call sarà sufficiente in un mondo neutrale al rischio:

- ➔ conoscere il tasso risk-free (assumendo che il rendimento atteso $\mu=r$)
- ➔ calcolare il payoff atteso dal derivato
- ➔ attualizzare il payoff atteso del derivato tramite il tasso privo di rischio

Passando da un mondo neutrale al rischio a uno avverso al rischio accadono due cose:

1. μ diventa il rendimento atteso dagli investitori (punto 1), e quindi cresce, passando dal solo risk free al risk free + un premio (per il modello del CAPM)
2. diminuisce in modulo il fattore di attualizzazione per calcolare del rendimento atteso al tempo 0 (punto 3).

Il motivo per cui la valutazione neutrale al rischio è tanto efficace nella valutazione dei derivati è che i due effetti appena descritti si compensano perfettamente, facendo sì che valutare il prezzo di un'opzione call in un mondo avverso al rischio o neutrale al rischio porti esattamente allo stesso risultato³³.

3.6 dimostrazione della formula di Black e Scholes per la valutazione delle opzioni call Europee attraverso la risk neutral valuation

Per dimostrare l'equazione che consente di calcolare il valore di un'opzione call (c) esistono vari metodi. Uno di questi è risolvere l'equazione differenziale che è stata derivata nel paragrafo precedente. Ma data l'ipotesi di valutazione neutrale al rischio che abbiamo visto è possibile verificare come la soluzione all'equazione differenziale può essere trovata anche in un altro modo. Considerando infatti il valore atteso della funzione che descrive il valore di una call option Europea è possibile scontare al tasso di interesse risk free tale valore per ottenere quindi il valore dell'opzione call stessa:

$$\text{valore atteso dell'opzione call} = E(\max(S_t - K; 0))$$

$$\text{valore dell'opzione oggi} = e^{-rt} * E(\max(S_t - K; 0))$$

³³ John C. Cox e Stephen A. Ross, "The Evaluation of Corporate Options and Corporate Liabilities," *Journal of Financial Economics* vol.3, 1976, pp. 145-166, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.540.5486&rep=rep1&type=pdf>.

L'ultima equazione, una volta risolta porta alla soluzione dell'equazione differenziale derivata nei precedenti paragrafi, in particolare:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

In cui c indica il premio dell'opzione call, S_0 il prezzo oggi dell'azione, K lo strike dell'opzione call e^{-rt} è il fattore di attualizzazione e la funzione $N(x)$ indica la probabilità con cui una variabile casuale di media 0 e deviazione standard 1 ha valore minore di x . I termini d_1 e d_2 vengono ricavati nel successivo paragrafo.

3.6.1 derivazione della formula

Il processo stocastico che descrive il movimento del prezzo dell'azione sarà quindi del tipo:

$$dS = \mu * dt * S + \sigma dz * S$$

Dato quanto abbiamo detto nel paragrafo 3.3.3 il logaritmo prezzo dell'azione segue una distribuzione del tipo seguente:

$$\ln(St) \sim \phi \left(\ln(S_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right)$$

Quindi St (il prezzo a un certo momento futuro t) in un certo periodo di tempo T (che verrà considerato di un anno) è un'estrazione da una distribuzione log-normale con media e deviazione standard:

$$m = \ln(S_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$$

$$s = \sigma \sqrt{T}$$

Ora è possibile dimostrare la formula per il calcolo del prezzo dell'opzione call. Innanzitutto, viene definita la funzione di probabilità del prezzo dell'azione V come $g(V)$. Quindi è possibile definire il valore atteso della funzione che descrivere il payoff di un'opzione call, considerato che la funzione \max può essere scomposta nel seguente modo:

$$\max(St - K; 0) = \begin{cases} St - K & \text{per } St > K \\ 0 & \text{per } St \leq K \end{cases}$$

Allora il valore atteso di questa funzione è uguale a $St - K$ (payoff nel caso in cui $St > K$) moltiplicato per la rispettiva probabilità di accadere (ossia la probabilità che il prezzo St sia maggiore di K) e 0 (payoff nel caso in cui $St \leq K$) per la rispettiva probabilità di accadere (ossia la probabilità che il prezzo St sia inferiore a K):

$$E(\max(St - K; 0)) = \int_0^K 0 * g(St) dSt + \int_K^\infty (St - K) * g(St) dV$$

$$E(\max(St - K; 0)) = \int_K^\infty (St - K) * g(St) dV$$

Da questa espressione, attraverso alcuni passaggi algebrici, è possibile ottenere l'equazione che descrive il prezzo dell'opzione call e i valori per d_1 e d_2 :

$$E(\max(S_t - K; 0)) = \int_K^{\infty} (S_t - K) * g(S_t) dS_t$$

Da cui si ottiene:

$$E(\max(S_t - K; 0)) = S_0 * e^{rt} N(d_1) - KN(d_2)$$

prendendo il suo valore attuale, moltiplicando per il fattore di attualizzazione e^{-rt} , entrambi i membri dell'equazione si ottiene l'equazione per il calcolo del premio dell'opzione call:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

Con

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Dalla put-call parity è possibile derivare il valore di una opzione put:

$$p = Ke^{-rt} N(-d_1) - S_0N(-d_2)$$

Piuttosto che soffermarsi sulla dimostrazione per l'opzione call è utile capire il significato dei termini nell'equazione, in particolare i termini $N(d_1)$ e $N(d_2)$.

3.6.2 Semplici Intuizioni sui Termini $N(d1)$ e $N(d2)$

$N(x)$, come già detto, rappresenta la probabilità con cui una variabile casuale di media 0 e deviazione standard 1 presenti un valore inferiore a x . Nel nostro caso quindi rappresentano le probabilità con cui rispettivamente la stessa variabile casuale presenti un valore inferiore a $d1$ e $d2$. L'interpretazione di $N(d2)$ è relativamente semplice, infatti esso rappresenta la probabilità con cui, in un mondo neutrale al rischio, l'opzione viene esercitata. Per riuscire a comprendere meglio il suo significato è utile riprendere la derivazione dell'equazione vista in precedenza. La logica di questa spiegazione³⁴ consiste nel considerare la funzione per il calcolo del payoff e scomporla nel seguente modo:

$$\max(St - K; 0) = \begin{cases} St - K & \text{se } St > K \\ 0 & \text{se } St \leq K \end{cases}$$

Quindi scomporre di nuovo il termine al secondo membro dell'equazione nel seguente modo:

$$C_1^t = \begin{cases} St & \text{se } St > K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$C_2^t = \begin{cases} -K & \text{se } St > K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È possibile quindi valutare un'opzione come il valore attuale del valore atteso dei termini C_1^t e C_2^t . Viene quindi calcolato $E(C_2^t)$ come la probabilità per il relativo valore:

$$E(C_2^t) = -K * P\{St > K\} + 0 * P\{St \leq K\}$$

Scontato tramite il tasso di interesse privo di rischio:

$$-K * e^{-rt} * P\{St > K\}$$

Quindi il valore atteso appena computato rappresenta il secondo membro dell'equazione per il calcolo del prezzo dell'opzione call:

$$c = S_0 N(d1) - Ke^{-rt} N(d2)$$

Questo vuol dire che, per simmetria, $N(d2)$ rappresenta la probabilità, in un mondo neutrale al rischio, che il prezzo dell'azione sia superiore allo strike price, e quindi che l'opzione sia esercitata. $N(d2)$ è in definitiva il valore cumulativo normale di $d2$.

³⁴ Lars Tyge Nielsen, "Understanding $N(d1)$ and $N(d2)$: Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model," INSEAD, Ottobre 1992, <https://financetrainingcourse.com/education/wp-content/uploads/2011/03/Understanding.pdf>.

Ora viene preso il primo termine C_1^t e si applica lo stesso procedimento. Questa volta però il procedimento è più complesso. Questo termine include il prezzo e di conseguenza, non il semplice valore atteso, ma il valore atteso condizionato del prezzo. In particolare $E(C_1^t)$ è uguale al valore atteso condizionato del prezzo che moltiplica la probabilità con cui il prezzo è superiore allo strike price:

$$E(C_1^t) = E[St|St > K] * P\{St > K\} + 0 * P\{St \leq K\} = E[St|St > K] * P\{St > K\}$$

Dal quale deriva:

$$E(C_1^t) = E[St|St > K] * P\{St > K\} = e^{rt} * S_0 * N(d_1)$$

Quindi si attualizza, moltiplicando entrambi i membri per e^{-rt} , e si ottiene il primo membro:

$$E(C_1^t) * e^{-rt} = S_0 * N(d_1)$$

Ponendo l'attenzione sul valore atteso condizionato può essere compreso al meglio il significato del primo termine dell'equazione del modello. Un esempio è di grande aiuto. Quando vengono lanciati dei dadi la probabilità con cui può uscire il valore 4 è $P(X=4) = 1/6$, se però si sa che nel prossimo lancio il valore che uscirà sarà sicuramente maggiore di 3 allora la probabilità si dice condizionata e viene scritta come $P(X=4|X>3)$. In questo caso allora questa probabilità sarà $P(X=4|X>3)=1/3$. Si dice quindi che la probabilità che esca il 4 sia aumentata perché viene ristretto il numero di possibili eventi da 6 a 3. In maniera simile accade la stessa cosa per il valore atteso. Riprendendo questo esempio si consideri il valore atteso del lancio del dado sapendo che se esce 4 si vincono 100\$ mentre nel restante dei casi si vincono 0\$. Allora il valore atteso normalmente è dato da:

$$P(X = 1) * 0 + P(X = 2) * 0 + P(X = 3) * 0 + P(X = 4) * 100 + P(X = 5) * 0 + P(X = 6) * 0$$

quindi:

$$= \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 100 = \frac{100}{6} \$ = 16,67\$$$

Ma nel caso in cui si venisse a sapere che nel prossimo lancio uscirà un numero sicuramente maggiore di 3 allora la probabilità che esca 4 5 o 6 deve essere ricalcolata e sarà uguale a $1/3$ e quindi il valore atteso del lancio (ponendo una condizione di vincita uguale alla precedente) aumenta:

$$\frac{1}{3} * 0 + \frac{1}{3} * 0 + \frac{1}{3} * 100 = \frac{100}{3} \$ = 33,33\$$$

Il valore atteso del prezzo dell'azione $E[St]$ è quindi inferiore al valore atteso condizionato per $St > K$, $E[St|St > K]$ ³⁵. Se infatti fosse applicato lo stesso ragionamento appena fatto per il lancio di un dado al prezzo delle azioni il procedimento e il risultato sarebbero logicamente gli stessi. Excel consente di farlo in maniera semplice e intuitiva.

3.6.3 Applicazione del Modello in Excel

Questa applicazione verrà realizzata usando alcune funzioni Excel per realizzare delle estrazioni casuali da una distribuzione log-normale per calcolare i possibili valori del prezzo dopo un certo tempo T .³⁶ Per semplicità verrà considerato il tasso di interesse privo di rischio uguale a 0 ($r=0$) e il prezzo iniziale uguale al prezzo di esercizio ($S_0=K$). Ora viene scelto un periodo di tempo T che per convenzione prendiamo di un anno e una deviazione standard che viene presa uguale a 0.6.

Opzione	
call	
Europea	
T	1
(scadenza)	
=	
s=	0,4
var=	0,16
S0=	10
K=	10
m=	2,22
r=	0

Il prezzo segue una distribuzione log-normale e nelle condizioni specificate è del tipo seguente:

$$\ln(St) \sim \phi \left(\ln(S_0) + \left(\frac{\sigma^2}{2} \right) T; \sigma^2 T \right)$$

³⁵ Il valore atteso condizionato discreto è uguale a $E[X|Y = y] = \sum_x x * \frac{P\{X=x\} \cap P\{Y=y\}}{P\{Y=y\}}$,

in cui $\frac{P\{X=x\} \cap P\{Y=y\}}{P\{Y=y\}}$ indica la probabilità condizionata $P\{X|Y = y\}$, M. Bramanti, Calcolo probabilità e statistica indice 3.3

³⁶ QuantPie, "An Intuitive Explanation the Black Scholes' Formula," *YouTube*, 26 Luglio 2020, <https://www.youtube.com/watch?v=M2mlrz1pu70&lc=Z224fxp5zmqt1n0zacdp430ojrq50v2oyyx2yswyhw03c010c.1595945061042040>.

Dato il prezzo iniziale la varianza e il periodo di tempo T è possibile calcolare la media:

$$\ln(St) \sim \phi(2,22; 0,16)$$

Adesso possono essere realizzate 10.000 estrazioni dalla distribuzione. Queste estrazioni rappresentano i possibili prezzi dell'azione tra 1 anno, considerando un tasso di interesse privo di rischio uguale a 0. Per farlo ci si avvarrà della funzione Excel INV.LOGNORM(). Quindi si realizza una tabella Pivot con intervalli regolari di 1 e si calcolano le frequenze assolute e relative. È molto utile quindi realizzare anche un istogramma con i dati appena definiti per una migliore visualizzazione dei dati³⁷.

La seguente tabella mostra i risultati dell'estrazione casuale inseriti in una tabella Pivot:

Categorie (St)	frequenza assoluta	frequenza relativa
<1		
1-2	1	0,01%
2-3	27	0,27%
3-4	164	1,64%
4-5	429	4,29%
5-6	804	8,04%
6-7	1055	10,55%
7-8	1116	11,16%
8-9	1130	11,30%
9-10	1050	10,50%
10-11	812	8,12%
11-12	788	7,88%
12-13	622	6,22%
[...]	[...]	[...]
31-32	2	0,02%
32-33	3	0,03%
33-34	2	0,02%

³⁷ Notare come la distribuzione è particolarmente concentrata sulla categoria (St) 9-10, questo perché in media il prezzo assume un valore uguale a e^m .

34-35	2	0,02%
35-36	2	0,02%
36-37	1	0,01%
38-39	1	0,01%
Totale complessivo	10000	100,00%

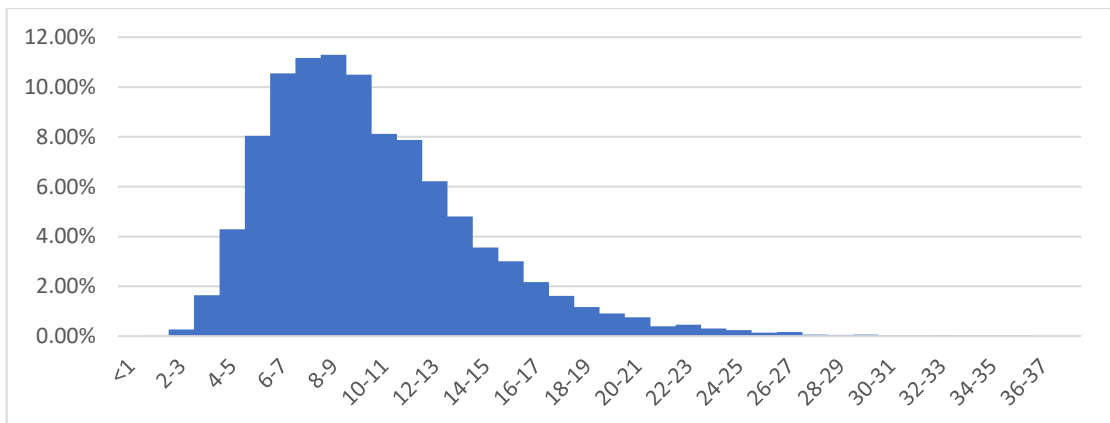


Figura 7 Distribuzione LogNormale date le estrazioni casuali

Ora è possibile calcolare il prezzo dell'opzione call. Per farlo scomponiamo l'equazione in due parti.

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

Una prima parte è:

$$-Ke^{-rt}N(d_2)$$

Che riscriviamo come:

$$-K * N(d_2)$$

In cui $N(d_2)$ rappresenta la probabilità che il prezzo sia superiore al prezzo di esercizio. Calcolare questo valore è molto semplice, è sufficiente calcolare la somma di tutte le probabilità connesse a un prezzo superiore a 10. Praticamente l'area al di sotto della funzione di probabilità per $St > 10$. Calcoliamolo e disegniamolo sul grafico:

$$\begin{aligned} N(d_2) &= 1 * P\{10 < St < 11\} + 1 * P\{11 < St < 12\} \dots 1 * P\{38 < St < 39\} \\ &= 42,43\% \end{aligned}$$

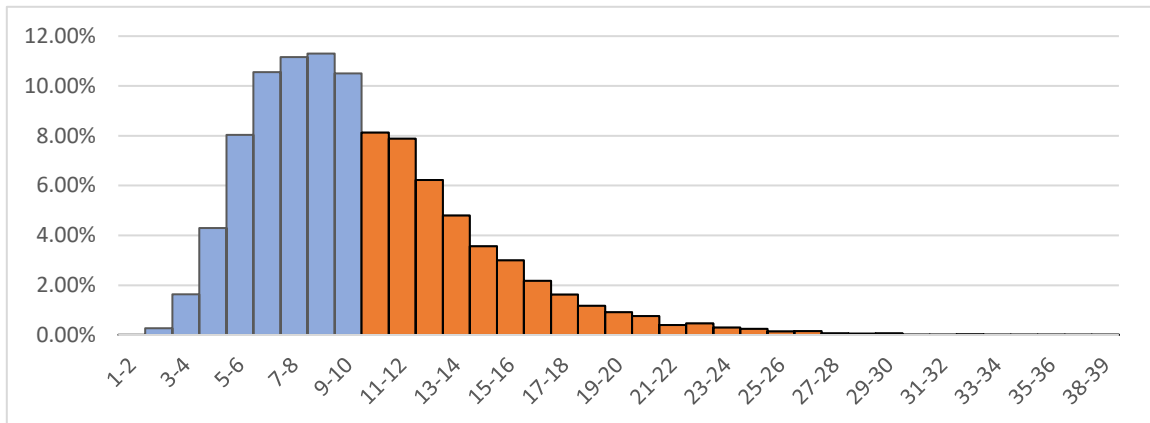


Figura 8 Distribuzione Lognormale: l'area arancione rappresenta la probabilità che il prezzo del sottostante sia maggiore del prezzo di esercizio a scadenza

Moltiplicandolo per il prezzo di esercizio ($K=10$) otteniamo:

$$-K * N(d2) = 42,43\% * 10 = -4,243$$

Questo termine rappresenta il pagamento del prezzo di esercizio (strike price) per acquistare le azioni una volta esercitata l'opzione, considerando il tasso di interesse privo di rischio uguale a 0.

Ora verrà calcolato il secondo:

$$S_0 N(d1)$$

Come è già stato accennato questo termine rappresenta il valore atteso del prezzo condizionato moltiplicato per la probabilità dell'opzione di essere ITM (quindi $N(d2)$), quindi:

$$E[St|St > K] * P\{St > K\}$$

Per poterlo calcolare è innanzitutto necessario calcolare il valore atteso condizionato. Vengono quindi prese tutte le categorie superiori a 10 e le relative frequenze assolute, vengono ricalcolate (esattamente come accadeva per il lancio dei dadi) le frequenze relative, non in funzione del totale delle estrazioni, ma in funzione del numero totale di estrazioni relative alle categorie maggiori di 10. Sostanzialmente è come se venisse non presa in considerazione tutta la parte della distribuzione minore di 10:

Categorie St	Frequenze assolute	frequenze relative condizionate $P\{St St>K\}$
1-2	1	0%
2-3	27	0%
3-4	164	0%
4-5	429	0%
5-6	804	0%
6-7	1055	0%
7-8	1116	0%
8-9	1130	0%
9-10	1050	0%
10-11	812	19,228%
11-12	788	18,660%
12-13	622	14,729%
13-14	480	11,366%
14-15	356	8,430%
15-16	300	7,104%
16-17	217	5,139%
[...]	[...]	[...]
36-37	1	0,047%
38-39	1	0,047%
totali	10000	100%

A questo punto è possibile calcolare il valore atteso condizionato. Il problema è che nella tabella si hanno a disposizione delle categorie e non dei valori continui. Questo vuol dire che in questo caso la distribuzione è “discreta” e non continua e quindi il risultato finale risulterà necessariamente approssimato. Maggiore è il numero di categorie (ponendo per esempio nella tabella pivot una dimensione degli intervalli minore) o maggiore è il numero di estrazioni e maggiore sarà la precisione del risultato. Nel nostro caso infatti per calcolare $E[St|St > K]$

sarebbe necessario moltiplicare ognuna delle categorie (prima colonna) per la relativa probabilità condizionata (terza colonna). Per farlo verrà preso semplicemente la media dei due valori nella prima colonna e verrà moltiplicata per la terza. Il risultato è:

$$E[St|St > K] = 13,86$$

Ora è possibile moltiplicarlo per $N(d2)$, ossia la probabilità che il prezzo sia superiore al prezzo di esercizio e otterremo il secondo pezzo dell'equazione:

$$\begin{aligned} S0 N(d1) &= E[St|St > K] * P\{St > K\} = E[St|St > K] * N(d2) = \\ &= 13,86 * 42,43\% = 5,85 \end{aligned}$$

Sommando si ottiene:

$$c = 5,85 - 4,243 = 1,62$$

Il risultato trovato (per quanto approssimato) è il premio dell'opzione call³⁸.

A questo punto è anche possibile definire la relazione presente tra il prezzo dell'azione e quello dell'opzione call Europea, questa relazione può essere osservata graficamente tramite Excel:

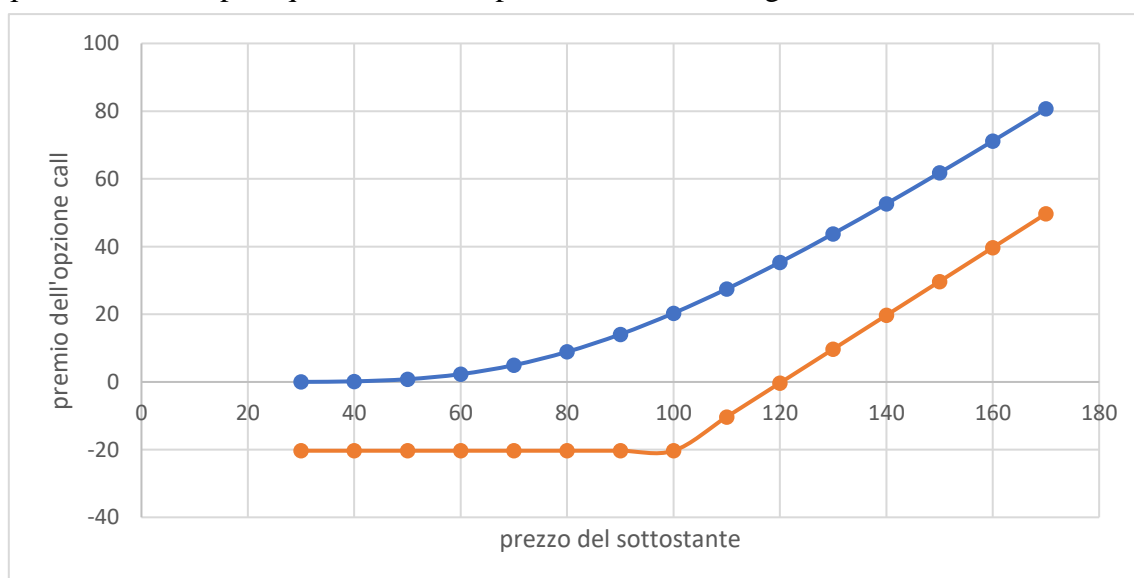


Figura 9 rappresentazione del payoff di un'opzione call e della relazione tra prezzo dell'opzione e del sottostante

Come si può vedere graficamente (la curva blu), per un'opzione call, tanto più il prezzo oggi (S_0) è piccolo tanto minore è il valore dell'opzione. Questo accade perché tanto più è piccolo il prezzo oggi rispetto al prezzo di esercizio tanto minore è la probabilità che il prezzo diventi

³⁸ Per calcolare il prezzo non approssimato è possibile usare il seguente sito: <http://www.option-price.com/index.php>

maggiore dello strike price entro la data di esercizio dell'opzione. La curva arancione rappresenta il payoff ottenuto dall'opzione alla data di esercizio.

4. Il Modello Di Merton

Il modello del capitolo precedente è stato rivoluzionario sotto molti aspetti. Le sue applicazioni non si sono fermate solo alla valutazione delle opzioni, alcuni hanno trovato, infatti, modi differenti di applicarlo. È stato applicato per valutare le decisioni di investimento (opzioni reali), altri invece lo hanno applicato al mondo aziendale, come il modello di Merton. Quest'ultimo modello è stato sviluppato, appunto, dall'economista e premio Nobel Robert Cox Merton. Egli è stato uno dei soggetti che ha contribuito insieme Black e Scholes allo sviluppo del modello per la valutazione delle opzioni ed è stato lui, insieme al matematico giapponese Kiyoshi Itô, a introdurre una maggiore formalità matematica nella trattazione del rischio e dell'incertezza dei modelli finanziari. Il suo maggiore apporto da questo punto di vista fu quello di introdurre la struttura matematica formale del calcolo stocastico³⁹.

4.1 applicazione del modello di Black e Scholes

4.1.1 le ipotesi del modello

Il modello di Merton presenta le stesse ipotesi di base prese in considerazione nel modello di Black e Scholes. Merton ha però ritenuto necessario, nel paper in cui lo introduce, estendere il numero di ipotesi. Le ipotesi sono⁴⁰:

- le dinamiche del valore dell'azienda, V , possono essere descritte dal processo stocastico visto in precedenza per il prezzo delle azioni (coerente con l'ipotesi di mercato efficiente di Fama e Samuelson)
- esiste un numero sufficiente di investitori con livelli di ricchezza comparabili in modo che ogni investitore creda di poter acquistare e vendere quanto desidera al prezzo di mercato.
- Non ci sono costi di transazione, tasse e problemi di indivisibilità dei beni
- Non esistono opportunità di arbitraggio senza rischio
- Sono consentite le vendite allo scoperto
- Il commercio dei titoli è "continuo"
- Non solo il tasso di interesse non cambia ma la curva dei rendimenti è piatta, ossia il tasso di interesse è uguale per ogni scadenza ed è certo

³⁹ Phelim Boyle, Feidhlim Boyle, "The Quest for the Option Formula."

⁴⁰ Robert C. Merton, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." *The Journal of Finance* 29, no. 2 (1974): 449-70. doi:10.2307/2978814.

- Vale il teorema di Modigliani-Miller secondo il quale il valore dell'azienda non dipende dalla sua struttura capitale (cioè non dipende da come si finanzia)⁴¹
- Il debito dell'azienda è nella forma di uno ZCB (zero coupon bond)

Come anche Merton afferma nel paper, non tutte queste ipotesi sono necessarie, ma sono estremamente utili per dare un'idea di base del modello.

4.1.2 L'Equity come un'Opzione

Per applicare il modello di B&S all'impresa è innanzitutto necessario comprendere le somiglianze che presenta un'opzione con l'equity o patrimonio netto⁴². Un'opzione presenta due caratteristiche fondamentali che la rendono tale, che sono state identificate nel paragrafo 2.1:

- ➔ Passività limitata (limited liability)
- ➔ opzione alla liquidazione (option to liquidate)

queste due caratteristiche fanno sì che chi acquista un'opzione non possa perdere più di quanto ha investito e abbia la possibilità, alla data di esercizio, di decidere se esercitare o meno. Queste caratteristiche sono tipiche anche dell'equity. Chi investe nel patrimonio netto di un'azienda infatti ha in ogni momento l'opzione a vendere le proprie azioni e non potrà perdere più di quanto ha investito⁴³. L'equity è quindi un'opzione call Americana (se si considera che può essere esercitata in qualsiasi momento). È necessario ora studiare i payoffs degli azionisti per comprendere meglio le caratteristiche dell'equity come opzione. Secondo le ipotesi del modello lo stato patrimoniale a valori di mercato di un'azienda appare come un t-account del tipo seguente:

ATTIVITÀ	PASSIVITÀ
<i>Valore degli assets dell'azienda (V)</i>	<i>Debito (D)</i>
	<i>Equity (E)</i>

⁴¹ A. Brealey, Stewart C. Myers, Franklin Allen e Sandro Sandri, "Principi di Finanza Aziendale," Edizione Settima, McGrawHill, Gennaio 2015, p. 481.

⁴² Definito da A. Damodaran come un credito residuo degli azionisti, i quali rivendicano tutti i flussi di cassa rimasti dopo il soddisfacimento dei diritti finanziati "antergati" ossia il cui soddisfacimento deve avvenire prima degli azionisti.

⁴³ Questo vale, teoricamente, solo per tutte le società a responsabilità limitata, in cui la società ha una personalità giuridica e il patrimonio dei soggetti è diverso dal patrimonio societario.

Il valore degli asset dell'azienda è chiamato anche il valore di liquidazione dell'azienda. Quando un'azienda viene liquidata viene infatti liquidato il suo attivo al suo valore di mercato. L'equity di un'azienda si può scrivere come il valore degli asset dell'azienda meno il valore del debito (V-D):

$$E = V - D$$

Il modello considera un'azienda con un debito D in forma di uno ZCB da ripagare dopo un periodo di tempo T. Al tempo T l'azienda avrà un valore V_t che potrà essere maggiore o minore di D.

I payoff dell'equity al tempo futuro T nel quale va ripagato il debito sono uguali a:

✚ **zero** se il debito è maggiore o uguale al valore dell'azienda al tempo T ($V_t \leq D$)

✚ **V-D** se il debito è minore del valore dell'azienda al tempo T ($V_t > D$)

Il valore dell'equity (E) si può scrivere come:

$$E = \begin{cases} V_t - D & \text{se } V_t > D \\ 0 & \text{se } V_t \leq D \end{cases}$$

Quindi utilizzando la funzione max si può riscrivere come:

$$E = \max (V_t - D; 0)$$

Come si può notare il payoff generato dall'equity è identico a quello di un'opzione call. In questo caso V rappresenta il prezzo del sottostante, D invece è il prezzo di esercizio mentre T rappresenta il tempo alla scadenza dell'opzione. L'equity in conclusione è un'opzione call sul valore dell'azienda. Se si considera, come da ipotesi, il debito come uno ZCB, allora l'opzione sul valore dell'azienda è di tipo Europeo perché tutto il debito deve essere ripagato in un'unica soluzione dopo un periodo di tempo T e l'opzione potrà essere esercitata solo alla scadenza.

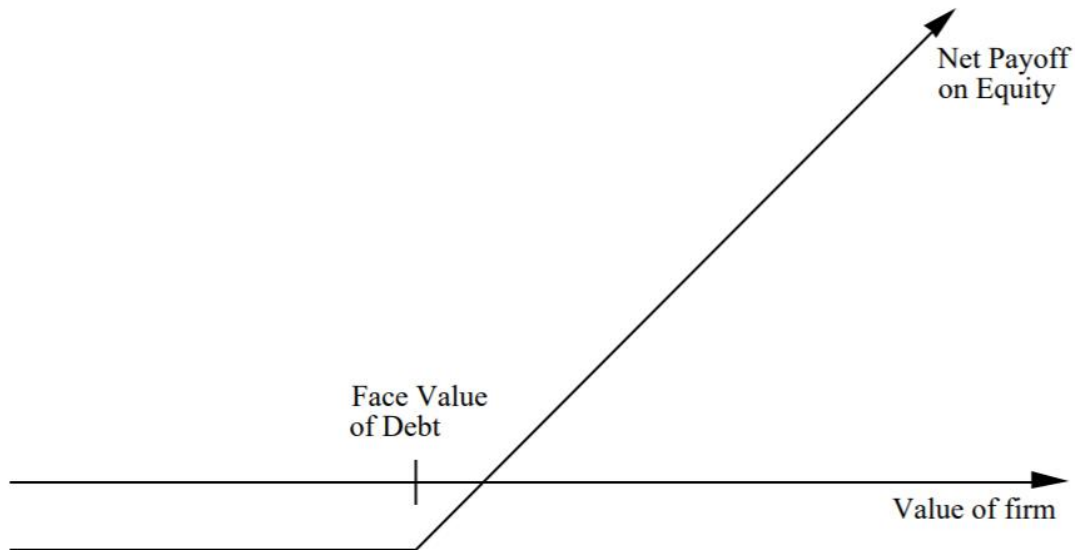


Figura 10 Payoff dell'Equity come Opzione sulle Attività

4.1.3 Applicazione del Modello di Black e Scholes all'Impresa

Ora che il patrimonio netto è stato individuato nella sua natura di opzione è possibile applicare ad esso il modello di Black e Scholes. Ogni termine del modello di Black e Scholes ha un significato nell'ambito della valutazione delle opzioni. E' necessario quindi "tradurre", dato quanto è stato detto, ognuno di quei termini in questo nuovo ambito. Il modello definisce quindi:

- **T** : rappresenta il momento nel quale è necessario ripagare il debito, è quindi anche il tempo alla scadenza dell'opzione/azienda;
- **V₀** : valore degli asset oggi (corrispondente al prezzo del sottostante dell'opzione al tempo 0, S₀);
- **V_T** : valore degli asset al tempo T (corrispondente al prezzo del sottostante dell'opzione al tempo T, S_T) ;
- **E₀** : valore dell'equity oggi (corrispondente al valore oggi dell'opzione c) ;
- **E_T** : valore dell'equity al tempo T (corrispondente al valore al tempo T dell'opzione c) ;
- **D**: valore del debito al tempo T (corrispondente al prezzo di esercizio, K) ;
- **σ_v** : volatilità del valore di liquidazione degli asset (assunta come costante) ;

Il valore dell'azienda per ipotesi segue lo stesso modello sviluppato per il prezzo delle azioni, questo vuol dire che:

$$dV = V * \mu * dt + V * \sigma v * dz$$

Ossia il valore di liquidazione degli asset dell'azienda segue un processo stocastico detto moto Browniano Geometrico. Di conseguenza il valore dell'equity può essere calcolato come il valore dell'opzione call tramite l'applicazione del modello di B&S:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

quindi:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rt}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/D) + \left(r + \frac{\sigma v^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(V_0/D) + \left(r - \frac{\sigma v^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

De^{-rt} rappresenta il valore attuale del debito. Il tasso di interesse r rappresenta il tasso di interesse del buono del tesoro con stessa maturity dell'opzione. $N(d_2)$ e $N(d_1)$ nella formula hanno un significato analogo a quello che avevano per le opzioni. $N(d_2)$ è la probabilità che il valore dell'attivo dell'azienda sia superiore al debito. Mentre $V_0N(d_1)$, esattamente come per le opzioni call, può essere interpretato come:

$$N(d_1) * V_0 = E[V_t | V_t > D] * P\{V_t > D\} = E[V_t | V_t > D] * N(d_2)$$

In cui $E[V_t | V_t > D]$ è il valore atteso condizionato del valore dell'azienda.

4.2 Le Implicazioni Del Modello Di Merton

Le implicazioni del modello sono molte e interessanti. Non solo, come adesso verrà mostrato, il modello spiega analiticamente alcuni fenomeni relative alle aziende vicine al default, ma è molto utile per valutare alcune caratteristiche dell'azienda, come il rischio di default e il default spread.

4.2.1 l'equity delle aziende vicino al fallimento

Quando un'azienda è molto vicina al fallimento ci si aspetta generalmente che il valore del suo patrimonio netto sia uguale a 0. La realtà dimostra spesso il contrario e infatti non è difficile vedere aziende sull'orlo del fallimento (con debiti molto più grandi del valore liquidabile

dell'attivo) che presentano un equity ancora positivo. Il modello di Merton offre una spiegazione analitica a questo fenomeno paradossale⁴⁴.

Se un'azienda presenta un valore liquidabile dell'attivo di 50 milioni di dollari ($V_0=50\text{mln \$}$), un debito da estinguere in un'unica soluzione tra 1 anno ($T=1$) di 80 milioni di dollari ($D_t=80\text{mln \$}$), una deviazione standard del valore dell'attivo liquidabile $\sigma_v=0.4$ e il tasso di interesse per un buono del tesoro con la stessa scadenza è $r=10\%$. Immettendo questi valori nella formula ricavata dal modello di Merton, il valore dell'equity è uguale a $E_0=2.28\text{mln \$}$. Il fatto che il patrimonio netto non sia uguale a 0 è alquanto strano a prima vista. Se infatti si attualizzassero tramite il metodo DCF (Discounted Cash Flow) i flussi negativi del debito, essi sarebbero maggiori rispetto al valore liquidabile dell'attivo, comportando un valore dell'equity negativo. Il motivo per cui E_0 è positivo va ricercato nella sua natura di opzione, che metodi come il DCF non tengono in considerazione.

L'equity dell'azienda in questo caso è un'opzione call "deep out of the money", ossia un'opzione call che presenta, oggi, un valore del sottostante (S_t) molto più basso del prezzo di esercizio (K), per cui ha un valore (c) positivo ma molto basso perché risulta molto più probabile che scadrà senza un valore (con $S_t < K$). Dal punto di vista aziendale, il fatto che l'equity sia paragonabile a un'opzione fa sì che il patrimonio netto possa avere un valore positivo anche se il valore liquidabile (il valore del sottostante), V , è particolarmente più piccolo del debito, D (il prezzo di esercizio) esattamente come per un'opzione "deep out of the money". Questo accade perché il solo fatto che esiste una probabilità non nulla che il valore dell'attivo possa salire al di sopra del debito durante la vita residua dell'opzione (dell'azienda) fa sì che il valore del patrimonio netto possa essere maggiore di zero. Nell'esempio fatto il valore dell'attivo può scendere fino a 15mln \$, mantenendo però un valore dell'equity positivo. Questo vuol dire che almeno fino a un valore dell'attivo di 15mln \$ l'azienda ha una probabilità non nulla di rimettersi in sesto.

4.2.2 il modello di Merton per calcolare il credit spread

Un altro interessante risvolto applicativo del modello di Merton è il suo utilizzo per il calcolo del credit spread di un bond emesso da un'azienda o corporate bond.

Il credit spread⁴⁵, conosciuto anche come default premium, è una forma di compensazione per gli investitori in obbligazioni aziendali rispetto a obbligazioni del tesoro con caratteristiche simili (stessa maturity) per l'assunzione di un maggiore rischio di default dell'azienda rispetto

⁴⁴ Iliano Cianci, "Il Modello Black Scholes Merton Applicato all'Impresa," *Starting Finance*, 15 Gennaio 2015, <https://www.startingfinance.com/approfondimenti/modello-black-scholes-merton-applicato-allimpresa/>.

⁴⁵ Alan F. Marcus, Alex Kane e Zwi Bodie, "Essential of Investments."

a quello di uno stato sovrano. Questa compensazione si traduce generalmente in una diminuzione del prezzo del titolo e un incremento del YTM⁴⁶ (Yield To Maturity). Il credit spread rappresenta la differenza tra il tasso di interesse relativo all'obbligazione aziendale e il tasso di interesse dell'obbligazione con caratteristiche simili ma del tesoro. Tanto maggiore è il rischio di default tanto più alto è il “compenso” dell'investitore e maggiore è il credit spread. L'esistenza del credit spread deriva dal fatto che un investitore in titoli di debito emessi da un'azienda ha una probabilità più alta di non ricevere tutti i pagamenti di interesse e capitale promessi dal contratto di emissione, comportando un rendimento del titolo atteso (ponderato per la probabilità di ricevere effettivamente i pagamenti) minore rispetto al rendimento promesso dall'azienda.

Il modello di Merton trova applicazione perché consente di calcolare il valore dell'equity come un'opzione e quindi permette di calcolarlo anche considerando, implicitamente, il rischio di default dell'azienda. Una volta calcolato l'equity (E_0) tramite la formula del modello è possibile calcolare il valore del debito come:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rt} N(d_2)$$

$$D_0 = V_0 - E_0$$

Se il debito al tempo T ha un valore D_T allora il rendimento del debito per un investitore è:

$$\text{tasso di interesse sul debito} = \left(\frac{D_0}{D_T} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Quindi sottraendo il tasso di interesse prodotto da un titolo del tesoro con caratteristiche simili è possibile calcolare il default spread.

Molti paper hanno mostrato empiricamente come il modello di Merton risulta efficace nel prevedere i default spread dei titoli di debito aziendali. I risultati di Peter Feldhutter e Stephen Schaefer in particolare hanno mostrato come il modello di Merton sia capace di prevedere il livello medio degli spreads degli “investments grade corporate bonds” ossia obbligazioni aziendali particolarmente sicure e con rating creditizi particolarmente elevati (AAA). Il loro

⁴⁶ Tasso interno di rendimento.

approccio ha mostrato risultati incoraggianti anche grazie all'utilizzo di banche dati molto grandi, usando circa 90 anni di dati.⁴⁷

4.2.3 il modello di Merton per la valutazione della probabilità di default

Un'ultima applicazione del modello di Merton è quella per il calcolo della probabilità di default di un'azienda. La probabilità di default, in gergo PD, è la probabilità che entro una certa data l'azienda possa fallire. Il fallimento viene trattato dal modello di Merton in maniera semplice ma efficace: la PD è la probabilità che l'azienda non sia in grado di soddisfare in tutto o in parte gli obblighi sanciti dal contratto di debito alla scadenza del debito⁴⁸. Quindi un'azienda è teoricamente fallita se il suo valore liquidabile è, a scadenza, (momento nel quale va ripagato il debito, dopo il periodo T) inferiore rispetto al debito⁴⁹.

Il modello di Black e Scholes permette di calcolare il valore dell'equity come quello di un'opzione call sull'attivo dell'azienda, quindi:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rt} N(d_2)$$

In questa formula il termine $N(d_2)$ rappresenta la probabilità di esercitare l'opzione e quindi la probabilità che il prezzo dell'opzione sia maggiore del prezzo di esercizio. Nel caso dell'azienda $N(d_2)$ rappresenta la probabilità che il valore dell'azienda (V) sia maggiore del debito (D) alla scadenza dell'opzione (T):

$$N(d_2) = P\{V > D\}$$

Quindi:

$$1 - N(d_2) = P\{V < D\}$$

Oppure:

$$PD = N(-d_2) = P\{V < D\}$$

Il complemento a 1 di $N(d_2)$ rappresenta la probabilità che a scadenza il valore dell'azienda sia minore del debito in un contesto neutrale al rischio, quindi rappresenta anche la probabilità di default dell'azienda secondo la definizione data di default.

Un'applicazione del modello in questo ambito è il calcolo della percentuale del debito prestatato che verrà ripagato dall'azienda: il tasso di recupero o recovery rate (rr%). La relazione che lega rr% alla PD è stata studiata nel primo capitolo:

⁴⁷Peter Feldhutter e Stephen Schaefer, "The Credit Spread Puzzle in the Merton Model - Myth or Reality?" London Business School, Luglio 2015, <https://www.q-group.org/wp-content/uploads/2015/12/Credit-Spread-Puzzle-in-the-Merton-Model.pdf>.

⁴⁸ Robert C. Merton, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates."

⁴⁹ Per questo motivo il modello si definisce anche come "strutturale."

$$EL = LGDR * PD$$

in cui:

$$LGDR = 1 - rr\%$$

La perdita attesa (EL) è uguale al valore del debito calcolato attualizzandolo tramite il tasso di interesse risk free meno il valore del debito calcolato tramite il modello di Merton:

$$Dt^* = V0 - E0 = V0 - (V0 N(d1) - De^{-rt}N(d2))$$

$$EL = Dt * e^{-rt} - Dt^*$$

quindi è uguale al valore attuale del debito che l'azienda dovrebbe pagare come da contratto **meno** il valore attuale del debito calcolato considerando anche la possibilità che l'azienda a scadenza non sarà capace di rispettare l'obbligazione in tutto o in parte,

In termini percentuali:

$$EL = \frac{Dt * e^{-rt} - Dt^*}{Dt * e^{-rt}}$$

Ora conoscendo la perdita attesa (EL) e la probabilità di default (PD) è possibile calcolare rr%:

$$rr\% = 1 - \frac{EL}{PD}$$

Conclusioni

Il modello che è stato analizzato per quanto interessante in termini matematici e finanziari presenta, indubbiamente, molti limiti. Alcuni sono limiti strettamente pratici e modificando il modello possono essere superati, altri vengono ereditati dal modello di Black e Scholes e risultano più difficili da risolvere.

Alcuni limiti del modello di Merton derivano dalle ipotesi del modello di Merton, come:

- considerare il debito come uno ZCB
- considerare che il default avvenga solo se il valore dell'azienda è minore o uguale a quello del debito alla scadenza
- la probabilità di default è una probabilità calcolata in un contesto neutrale al rischio

Questi limiti sono stati risolti modificando il modello. Ad esempio, alcuni lo hanno modificato in modo da poter considerare diverse scadenze del debito mentre altri lo hanno modificato in modo da includere dei valori soglia entro i quali avviene il default. Per quanto riguarda l'ultimo punto, invece, è da sottolineare il fatto che anche se la probabilità di default è neutrale al rischio questo non cambia il ranking della rischiosità delle aziende. Questo vuol dire che il modello può essere usato per fare delle comparazioni del rischio di due società diverse perché il ranking delle probabilità di default neutrali al rischio è uguale a quello delle probabilità di default reali.

L'esigenza di ottenere un valore reale della probabilità di default aziendale ha portato comunque alla realizzazione di altri modelli basati su quello di Merton in grado di trasformare la probabilità di default neutrale al rischio in una probabilità reale, tra questi modelli c'è il modello KMV (Kealhofer-McQuown-Vašíček).

Altri limiti sono più complessi e di difficile risoluzione. Molti di questi limiti derivano dalle numerose ipotesi del modello. Uno dei limiti più importanti è quello derivante dal modello di Black e Scholes. Esso riguarda il calcolo della varianza del sottostante, questo parametro infatti può essere calcolato solo tramite i dati passati e viene considerato per ipotesi costante durante tutta la vita dell'opzione. Molte delle ipotesi del modello possono essere eliminate modificando il modello, ma non c'è modo di prevedere la volatilità del sottostante rendendo difficile l'applicazione del modello nel mondo reale. Su questo punto debole si sono espressi molti esponenti della finanza mondiale e studiosi, tra questi anche l'attuale amministratore delegato della Berkshire Hathaway Warren Buffet che durante un'assemblea degli azionisti nel 2003: "Il modello di Black e Scholes è un tentativo di misurare il valore di mercato delle opzioni, e usa alcune variabili per farlo. [...] ma è basato sulla volatilità passata del asset

sottostante. E la volatilità passata non rappresenta il miglior parametro su cui basare le valutazioni”⁵⁰.

Il problema del modello di Black e Scholes colpisce il modello di Merton in maniera ancora più forte. Se infatti calcolare la volatilità passata del prezzo del sottostante di un’opzione finanziaria è relativamente semplice, farlo per l’attivo di un’azienda è un’operazione più complessa.

Per calcolare la volatilità passata di un’azione, un indice azionario o un tasso di interesse è sufficiente reperire i dati riguardanti le fluttuazioni passate del loro valore e calcolarne la varianza con uno dei moltissimi software applicativi esistenti. Reperire questi dati è quasi sempre un compito semplice, perché il valore di borsa delle azioni delle aziende quotate sono quasi sempre disponibili almeno ai professionisti del settore. Per applicare il modello di Merton sono necessari invece due valori: V_0 e σ_V . Questi sono considerati entrambi non direttamente osservabili perché non è sufficiente calcolarli dai bilanci dell’azienda, essi devono essere infatti calcolati ai valori di mercato e ovviamente il valore di bilancio degli asset di un’azienda non riflette sempre il loro valore di mercato.

Tutte le problematiche esposte possono sembrare poco incoraggianti, ma in realtà, come già accennato, il modello di Merton è in continua evoluzione e su di esso sono stati realizzati numerosi nuovi studi e modelli capaci di ridurre il numero di assunzioni necessarie alla sua applicazione e che consentono di ottenere risultati sempre più utili e potenti. Questo è dimostrato anche dalla grande attenzione che le società di rating pongono nella ricerca e sviluppo in questo ambito e dalle numerose acquisizioni di aziende specializzate nelle analisi quantitative avvenute negli anni. Un esempio lampante è dato da Moody’s, una delle più influenti agenzie di rating al mondo, che ha acquisito una società che forniva analisi quantitative sul rischio di credito, la KMV, che aveva sviluppato il modello KMV/Merton precedentemente citato.

⁵⁰ “Warren Buffett & Charlie Munger on Black Scholes Option Pricing Model (2003).” *YouTube*, Investment Knowledge, 15 Aprile 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=Fd4IfVNJjk>.

Bibliografia

- Altman Edward I. "Predicting Financial Distress of Companies: Revisiting The Z-Score and Zeta Models." NYU Stern School of Business, July 2000, <http://pages.stern.nyu.edu/~ealtman/Zscores.pdf>.
- American Stock Exchange, LLC, Chicago Board of Trade, "Characteristics and Risks of Standardized Options."
- Bachelier L., "Théorie de la Speculation," *Annales Scientifiques de l' E.N.S*, vol. 3, no. 17, pp. 21-86, 1900.
- Banca d'Italia. Rischio di Credito. <https://www.bancaditalia.it/footer/glossario/index.html?letter=r>.
- Black, Fischer. "Fact and Fantasy in the Use of Options." *Financial Analysts Journal* 31, no. 4 (1975): 36-72. Accessed September 4, 2020. <http://www.jstor.org/stable/4477843>.
- Black, Fischer, and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81, no. 3 (1973): 637-54. Accessed September 4, 2020. <http://www.jstor.org/stable/1831029>.
- Borsa Italiana. "Guida alle Opzioni Aspetti Teorici," Mercato Italiano dei Derivati, 30 Aprile 2001, <https://www.borsaitaliana.it/derivati/archiviopdf/homepage/prodottiidempubblicazioni/guidaalleopzioni2991.pdf>.
- Borsa Italiana. Standard per la Gestione del Credito delle Banche. Financial Trend Analysis. Gennaio 22, 2010, <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/basileaii.htm>.
- Boyle Phelim, Feidhlim Boyle, "The Quest for the Option Formula," in *Derivatives: The Tools That Changed Finance*, Risk Books, 2001, <http://web.archive.org/web/20120326213505/http://www.thederivativesbook.com/Chapters/05Chap.pdf>.
- Brealey A, Stewart C. Myers e Franklin Allen e Sandro Sandri, "Principi di Finanza Aziendale," Edizione Settima, McGrawHill, Gennaio 2015, p. 481.
- Cianci, Iliano. "Il Modello Black Scholes Merton Applicato all'Impresa," *Starting Finance*, 15 Gennaio 2015, <https://www.startingfinance.com/appfondimenti/modello-black-scholes-merton-applicato-allimpresa/>.

- Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. “Convergenza internazionale della misurazione del capitale e dei coefficienti patrimoniali: Nuovo”. Banca dei Regolamenti Internazionali, 2006, <https://www.bis.org/publ/bcbs128ita.pdf>
- Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. “Lo schema di Regolamentazione: Bilanciare Sensibilità al Rischio, Semplicità e Comparabilità.” Banca dei Regolamenti Internazionali, 2013, https://www.bis.org/publ/bcbs258_it.pdf.
- Consob. “I Derivati” Consob.it, <http://www.consob.it/web/investor-education/i-derivati>.
- Cox C. John e Stephen A. Ross, “The Evaluation of Corporate Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Financial Economics* vol.3, 1976, pp. 145-166,
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.540.5486&rep=rep1&type=pdf>.
- D’Annunzio Nadia e Greta Falavigna. *Modelli di Analisi e Previsione del Rischio di Insolvenza. Una Prospettiva delle Metodologie Applicate*. Ceris-Cnr, 2004, <https://core.ac.uk/download/pdf/6524031.pdf>.
- Farley Alan, “How to Avoid Closing Options below Intrinsic Value,” Investopedia, 4 Luglio 2018, <https://www.investopedia.com/trading/avoid-closing-options-below-intrinsic-value/#:~:text=Theoretically%2C%20an%20option%20should%20not,until%20intrinsic%20value%20is%20restored>.
- Feldhutter Peter e Stephen Schaefer. “The Credit Spread Puzzle in the Merton Model - Myth or Reality?” London Business School, Luglio 2015, <https://www.q-group.org/wp-content/uploads/2015/12/Credit-Spread-Puzzle-in-the-Merton-Model.pdf>.
- GeeksforGeeks “Random Walk (Implementation in Python),” 22 Ottobre 2017, <https://www.geeksforgeeks.org/random-walk-implementation-python/>.
- Hal R. Varian, “The Arbitrage Principle in Financial Economics.” *Economic Perspectives* Vol. 1, No. 2 1987, pp. 55- 72,
<https://pubs.aeaweb.org/doi/pdfplus/10.1257/jep.1.2.55>.
- Hull John C. “Value at Risk.” In *Options, Futures, and other Derivatives*, Ninth Edition, Pearson, 2015.

- Ilievski Vladimir, "Animated Visualization of Brownian Motion in Python,"
Medium, 19 Aprile 2020, <https://towardsdatascience.com/animated-visualization-of-brownian-motion-in-python-3518ecf28533>.
- Inc., NYSE Arca, Inc. and Philadelphia Stock Exchange, Inc., 1994,
<https://www.theocc.com/getmedia/a151a9ae-d784-4a15-bdeb-23a029f50b70/riskstoc.pdf>;
- Lawler F. Gregory e Vlada Limic, "Random Walk: A Modern Introduction,"
Cambridge University Press 2010,
https://books.google.it/books?hl=en&lr=&id=UBQdwAZDeOEC&oi=fnd&pg=PR5&dq=random+walk+introduction&ots=Qf1FRjQE-j&sig=6Gqf9gv3rx1M3Qf1dwxG_iQ5uxw&redir_esc=y#v=onepage&q=random%20walk%20introduction&f=false.
- Marcus F. Alan, Alex Kane e Zwi Bodie, "Essential of Investments," McGrawHill,
Nona Edizione, 2012.
- Merton, Robert C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." *The Journal of Finance* 29, no. 2 (1974): 449-70.
doi:10.2307/2978814.
- Mishkin F.S., Eakins S.G., Beccalli E. "La Regolamentazione Bancaria." In
Istituzioni e Mercati Finanziari," Nona edizione, Pearson, 2019.
- Nielsen, Lars Tyge. "Understanding $N(d_1)$ and $N(d_2)$: Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model." INSEAD, Ottobre 1992,
<https://financetrainingcourse.com/education/wp-content/uploads/2011/03/Understanding.pdf>.
- Numpy.random.randn — NumPy v1.19 Manual, Consultato 4 settembre 2020,
<https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.randn.html>.
- Options Exchange, Incorporated, New York Stock Exchange,
- Sironi Andrea. "La gestione del rischio di credito: l'esperienza delle grandi banche italiane" (con P. Savona), 2000.
- QuantPie, "An Intuitive Explanation the Black Scholes' Formula," *YouTube*, 26
Luglio 2020,
<https://Www.Youtube.Com/Watch?V=M2mlrz1pu70&Lc=Z224fxp5zmqt1n0zacdp430ojirq50v2oyyx2yswyhw03c010c.1595945061042040>.