LUISS

Dipartimento
di Impresa e Management

Cattedra Matematica Finanziaria

Rendite vitalizie:
teoria e applicazioni in Python

Emerito Prof.
Gennaro Olivieri

RELATORE

Matr. 238321
Filippo Ligabue

CANDIDATO

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

L'argomento centrale di questo elaborato riguarda le rendite vitalizie che verranno analizzate inizialmente da un punto di vista teorico e poi applicate in casi concreti con un'implementazione tramite codici Python.
Le rendite vitalizie appartengono alla famiglia di assicurazioni sulla durata della vita. In questo studio presenteremo inizialmente un quadro generale di matematica attuariale con concetti e nozioni che ci permetteranno di definire le rendite vitalizie. Queste sono caratterizzate da un esborso monetario per un lasso temporale che può essere definito oppure per tutta la vita da parte dell'assicuratore all'assicurato, in cambio di un pagamento denominato premio che può avvenire in un unico momento oppure in modo dilazionato.

Il rischio insito in questi contratti assicurativi sta nel riuscire a quantificare la durata di vita residua che riguarda la controparte assicurata (una o più persone) a cui la rendita si riferisce. Per far ciò bisogna svolgere uno studio statistico sulla variabile casuale riguardante la "durata della vita".
Questo calcolo è di fondamentale importanza per l'assicuratore in quanto egli deve quantificare la componente di incertezza presente in queste operazioni finanziarie così da non incorrere nel rischio di intaccare il patrimonio netto della compagnia assicurativa. La stima di questa probabilità è ovviamente centrale per calcolare l'ammontare del premio da far pagare all'assicurato, in quanto la quantità dei costi in cui incorre l'assicuratore, se procede in maniera "equa" dipende solo da questo dato.
Nel primo capitolo presenteremo un piccolo excursus di matematica finanziaria soffermandoci in particolar modo sulle classiche nozioni di valore attuale e montante di una rendita: le rendite vitalizie possono essere viste come particolari operazioni finanziarie.

Come verrà dimostrato nella trattazione il premio altro non è che la somma dei vari valori attesi riferiti alle diverse rate che l'assicuratore verserà, attualizzati per il periodo di manifestazione rispetto all'epoca iniziale. Verrà inoltre dimostrato che differenza è presente nel corrispondere una rata all'inizio del periodo di competenza, e quindi trattare una rendita anticipata, oppure alla fine e quindi trattare una rendita posticipata. Analizzeremo anche il caso di differimento dei pagamenti e di progressione delle rate.

Dopo aver studiato i casi di rendite vitalizie riguardanti un solo assicurato, detto "testa", amplieremo lo studio al caso di due teste e mostreremo le varie possibilità di rendita vitalizia. Giungeremo infine a dimostrare come il caso generale di una rendita che coinvolga più individui altro non è che una combinazione lineare dei casi già affrontati.

Primo capitolo: Cenni di Matematica Finanziaria

1.1 Introduzione generale sulle operazioni finanziarie e sulle leggi ad interesse composto

La rendita vitalizia in quanto rendita possiede determinate caratteristiche comuni di tal tipo di operazioni. Analizzando tali caratteristiche si riesce a studiare e comprendere le varie tipologie di rendite. La definizione di rendita nei testi è: “Una rendita è un’operazione finanziaria composta che è rappresentata da una successione di capitali, tutti dello stesso segno, da pagare o riscuotere a determinate scadenze”. [1]

La rendita è una particolare operazione finanziaria: “Per operazione finanziaria si intende uno scambio di importi monetari contro importi monetari, che si protrae in successivi istanti di tempo. Gli importi sono chiamati anche “flussi” dell’operazione finanziaria.”[2]

Prima di trattare le rendite occorre ricordare alcuni concetti fondamentali di Matematica Finanziaria.

La matematica finanziaria si basa sul concetto di “operazione elementare base” che può essere definita come:” Un contratto mediante il quale un soggetto dà ad un altro soggetto un certo importo P_x disponibile ad una determinata epoca x in cambio di un altro importo M_y disponibile ad un'altra epoca y. La nozione fa riferimento al solo fatto che le somme P e M sono disponibili, rispettivamente alle epoche x e y.”[3]

Si impone $x \leq y$, la rappresentazione grafica è la seguente, inoltre i due importi e le due scadenze devono essere nella stessa unità di misura:

L’esempio più comune di un’operazione di questo genere è un Buono Ordinario del Tesoro.

Questa operazione elementare può essere analizzata da due punti di vista e in base a questo viene chiamata in modo differente:

- Operazione finanziaria di investimento, quando sono noti: P_x, x e y. Mentre deve essere determinato M_y denominato montante. Viene chiamata con questo termine perché viene investita la somma P nell’arco temporale che va da x a y.
- Operazione finanziaria di anticipazione, di finanziamento o di sconto, quando sono note le date x, y e la somma M_y che è l’importo che sarà disponibile o dovuto. La somma P_x in tale operazione prende il nome di valore attuale. Questo a seconda che il soggetto riceva la somma da determinare P_x all’epoca x e all’epoca y dovrà restituire M_y, oppure viceversa.

---

[1] Olivieri G. AA.VV. Elementi di matematica finanziaria, Pearson Italia, Milano, Torino, 2018, pag. 96

[2] Pitacco E. Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Lint, Trieste, 2009, pag.7

[3] Bortot P., Olivieri G., AA.VV. Matematica finanziaria, Monduzzi editore, 1998 (2° edizione), pag.3

“La differenza M_y-P_x che in entrambi tipi di operazioni, è per quanto ipotizzato non negativa, viene detta, nelle operazioni di Investimento, Interesse sul capitale P_x maturato tra x e y; nelle operazioni di Anticipazione invece viene detto Sconto sul capitale dovuto o disponibile M_y per effetto dell’anticipazione”[4]

Queste operazioni dal punto di vista dell’investitore possono suddividersi in diversi “regimi” in base alla legge matematica utilizzata per il calcolo dell’interesse: capitalizzazione semplice, capitalizzazione composta e capitalizzazione commerciale.

Le rendite appartengono al regime di capitalizzazione composta.

Dalla teoria dell’interesse composto ricaviamo le seguenti uguaglianze, le quali sono alla base dell’analisi delle rendite:

$$r(t;t+n)=\prod_{s=0}^{n-1}[1+i(t+s;t+s+1)]$$

Definito il fattore di capitalizzazione $r(t;t+n)$ come quel valore che moltiplicato al valore attuale al tempo t restituisce il montante in epoca *t+n*, questo dati i vari tassi periodali di interesse $i(t+s;t+s+1)$ che si formano nell’intervallo di tempo considerato.

$$v(t;t+n)=\frac{1}{\prod_{s=0}^{n-1}[1+i(t+s;t+s+1)]}$$

Quest’ultima relazione definisce il fattore di attualizzazione o anticipazione $v(t;t+n)$ in funzione del fattore di capitalizzazione. Ovvero il valore attuale che si ricava in t dall’attualizzazione della somma in t+n, o della successione di somme che avviene in tale periodo.

Considerando i tassi a pronti costanti le uguaglianze possono essere espresse come:

$$r(t;t+n)=[1+i(t;t+n)]^n \qquad v(t;t+n)=[1+i(t;t+n]^{-n}$$

Se non si ha una costanza nei tassi a pronti si può calcolare un tasso di interesse medio unitario.

La prima cosa da esaminare in un’operazione finanziaria in generale ed in particolar modo in una rendita, è lo studio della sua evoluzione nel tempo.

Si possono definire graficamente la serie di importi (o rate) in un orizzonte temporale.

Nel caso che la rendita assuma degli intervalli costanti di durata q, si dice che la rendita è periodica di periodo 1.Per semplificare il nostro modello consideriamo inizialmente le rate costanti e unitarie, anche se in un secondo momento risulterà semplice l’analisi delle rendite con una rata differente.

[4] Bortot P., Olivieri G., AA.VV. Matematica finanziaria, Monduzzi editore, 1998 (2° edizione), pag.5

1.2 Concetti di rendita anticipata e posticipata

La prima caratteristica da indagare in una rendita è se essa sia posticipata o anticipata, cioè se la rata venga riscossa alla fine o all'inizio del periodo di competenza. Questo concetto è molto importante perché come si mostrerà in seguito cambierà tutti i valori della rendita e se lo applichiamo al caso pratico della rendita vitalizia renderà differente il premio e le rate a seconda della tipologia di rendita, oltre che all'orizzonte temporale dei pagamenti che l'assicurato riceverà e verserà.

Quando stiamo considerando una qualsiasi rendita, definendola in un intervallo temporale che parte dall'epoca t e indichiamo con T un'epoca qualunque, ricordiamo che: "Se l'epoca in cui calcoliamo il valore capitale è un'epoca T anteriore o uguale all'epoca t allora si parla di valore attuale della rendita, mentre se tale epoca T è superiore o uguale all'epoca t+n il valore calcolato si chiama montante o valore finale della rendita."[5]

Per valore capitale si intende "la somma delle rate riportate finanziariamente ad una determinata epoca"[6].

Iniziamo quindi ad analizzare una rendita posticipata.

Per definire il valore attuale di una rendita bisogna riprendere il principio di composizione dei contratti. Seguendo tale relazione si può dedurre che il valore attuale di una rendita, calcolato secondo un dato tasso di interesse, altro non è che la somma che investita allo stesso tasso permette di far fronte alle rate della rendita stessa.

Il valore attuale di una rendita quindi può essere calcolato secondo i dati tassi a pronti nel seguente modo:

$$V_o = R_1 * v(0,1) + R_2 * v(0,2) + \cdots + R_{n-1} * v(0, n-1) + R_n * v(0, n)$$

Dove v rappresenta il cosiddetto fattore di attualizzazione o di anticipazione, che può essere calcolato come il reciproco del fattore annuo di capitalizzazione r.

Considerando una qualunque legge di capitalizzazione, ponendo i momenti temporali $x \leq y$, che indichiamo con $r(x, y)$, il rispettivo fattore di attualizzazione $v(x, y)$ si calcola come

$$v(x, y) = \frac{1}{r(x, y)}$$

esso esprime il valore in x di una somma unitaria disponibile all'epoca y.

Nel caso delle rendite che appartengono alle leggi ad interesse composto il fattore di attualizzazione viene calcolato nel modo indicato precedentemente.

Nel calcolare il valore attuale della rendita posticipata nel situazione che sia presente una struttura piatta dei tassi di interesse, ovvero i tassi a pronti, e quindi il tasso i(0,n) è costante per tutta la durata della rendita, si può attuare la seguente semplificazione:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s * (1 + i)^{-s}$$

[5] Bortot P., Olivieri G., AA.VV. Matematica finanziaria, Monduzzi editore, 1998 (2° edizione), pag.100

[6] Bortot P., Olivieri G., AA.VV. Matematica finanziaria, Monduzzi editore, 1998 (2° edizione), pag.99

Il tasso i prende il nome di TIR, ovvero tasso interno di rendimento, ciò quel tasso i(o;s) che sostituito nei vari tassi a pronti permette di restituire lo stesso valore attuale. Questo tasso i può essere considerato anche come la media funzionale nel senso del Chisini dei tassi i(0;s).

Nel caso in cui le rate siano costanti il valore attuale può essere espresso come
$V_0 = R * (v + v^2 + \cdots + v^n)$

La sommatoria dei v può essere vista come n termini posti in progressione geometrica di ragione v (con v diverso da 1) e quindi il valore attuale può essere espresso come:
$V_0 = R * v * \frac{1-v^n}{1-v}$
dove n sono il numero di termini.

Questa formula può essere ulteriormente sviluppata in:
$V_0 = R * \frac{1-v^n}{i}$

Il secondo fattore della moltiplicazione può essere indicato come $a_{n,i}$
esso viene chiamato a di n i oppure a figurato n al tasso i, esso esprime il valore attuale all'epoca 0 di una rendita posticipata, immediata, temporanea di n periodi con flussi di cassa unitari, attualizzandoli a un tasso di interesse dato i.

Per determinare il montante di una rendita invece si riportano tutti i flussi all'epoca finale,
$$M_n = R_1 * [1 + i(1,n)]^{n-1} + R_2 * [1 + i(2,n)]^{n-2} + \cdots + R_{n-1} * [1 + i(n-1,n)] + R_n$$

Nel caso che vi sia una struttura piatta dei tassi:
$M_n = \sum_{s=1}^{n} R_s * (1 + i)^{n-s}$

Il montante si trova utilizzando la scindibilità della capitalizzazione composta, quindi:
$$M_n = A * (1 + i)^n$$
dove A è il valore attuale della rendita.

Questo può essere espresso anche con "a di n i": $M = R * a_{n,i} * (1 + i)^n = R * s_{n,i}$

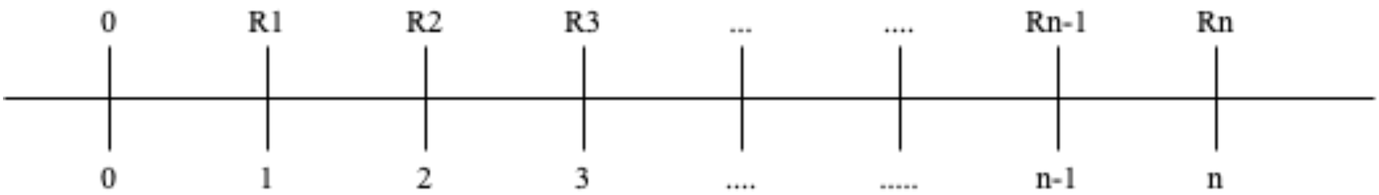
$$s_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Questo fattore costituisce il montante di una rendita, posticipata, temporanea di n periodi, immediata, con rate unitarie, capitalizzate ad un tasso di interesse i.

Si può arrivare a quest'ultimo risultato compiendo un passaggio analogo espresso prima nella dimostrazione di $a_{n,i}$, ovvero avallandosi del concetto di progressione geometrica, infatti se notiamo la formula sopra scritta anche per M_n si può arrivare a $s_{n,i}$ con il medesimo ragionamento.

Come accennato precedentemente quando la rendita viene valutata in un'epoca intermedia si usa parlare del cosiddetto "valore capitale", esso viene calcolato come la somma del valore attuale delle rate posteriori a tale epoca e del montante delle rate anteriori.

Nel momento che si analizza un particolar tipo di operazione finanziaria risulta utile rappresentare i flussi in un'asse del tempo, questa è la rappresentazione di una rendita posticipata.



Come accennato quando si studia una rendita è fondamentale conoscere un principio delle leggi ad interesse composto, il cosiddetto "Principio della composizione dei contratti", il quale enunciato esprime: "Una operazione finanziaria composta può sempre essere scissa in operazioni elementari del tipo ZCB o a capitalizzazione integrale purchè il valore attuale dell'operazione unica sia pari alla somma dei valori attuali delle singole operazioni elementari".[7]

Questa relazione vale perché senno sarebbe possibile sempre attuare una strategia di arbitraggio, comprando l'operazione che presenta il valore minore e vendendo quella col valore maggiore.

In linguaggio matematico tale relazione si esprime nel seguente modo, ricordando la relazione fondamentale tra montante e valore attuale $M = VA * r(0,n)$, dove r rappresenta il fattore di capitalizzazione da 0 a n anni e può essere espresso come $(1+i)^n$:

-dal lato del valore attuale $VA = \sum_{s=1}^{n} M_s * v(0,s)$, dove il primo fattore esprime i montanti annui mentre il secondo è il fattore di attualizzazione di tale anno.

-dal lato del montante: $M = \sum_{s=1}^{n} M_s * r(s,n)$, dove il fattore di capitalizzazione va dal periodo s al periodo n.

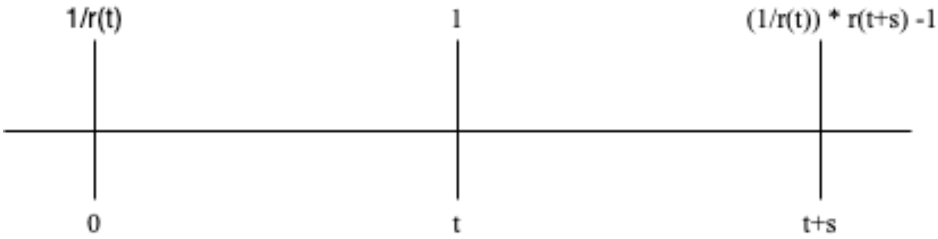
Fin qui è stato trattato il tema delle rendite posticipate, per determinare il valore attuale o il montante invece nel caso che la rendita sia anticipata bisogna sfruttare il principio di scindibilità.

[7] Olivieri G. AA.VV. Elementi di matematica finanziaria, Pearson Italia, Milano, Torino, 2018, pag.94

Questo concetto è cruciale nel caso che si analizza un'operazione finanziaria e in particolar modo una legge ad interesse composto: "Una legge finanziaria si dice scindibile se il montante di un euro investito in zero all'epoca t+s può essere calcolato facendo il prodotto tra il montante fino all'epoca t e il montante del periodo che va da t a t+s". [8]

La proprietà sopra esposta è la seguente $r(t+s) = r(t) * r(s)$, dove con r si indica il cosidetto fattore di capitalizzazione.

Si può dimostrare tale enunciato partendo da una definizione dell'operazione in un asse dei tempi:



Definiamo con il termine montante di investimento r(s), in quanto rappresenta il montante prodotto dal periodo t al periodo t+s della somma 1 disponibile in epoca t. Chiamiamo invece $\frac{1}{r(t)} * r(t+s)$ montante di proseguimento , in quanto rappresenta il montante di un investimento iniziato all'epoca 0 che in t è uguale a 1 e prosegue nel tempo di un incremento s.

Se queste due variabili sono uguali allora la legge si definisce scindibile, in linguaggio formulistico:

$$r(t) * r(s) = r(t+s)$$

La rendita è un tipo particolare di operazione ad interesse composto, e come tutte le operazioni di questo tipo è scindibile.

Un'applicazione pratica utile di questo enunciato si può considerare nel momento che stiamo studiando una legge, se notiamo che la sua forza di interesse è costante allora tale può essere definita scindibile.

Per forza di interesse intendiamo: $\delta(t) = \frac{r\prime(t)}{r(t)}$, nel caso di leggi finanziarie a capitalizzazione composta il valore che risulta è sempre una costante.

Per una più intuitiva comprensione mostriamo l'asse temporale di una generica rendita anticipata

[8] G.Olivieri, Elementi di matematica finanziaria, pag 61

Il valore attuale di una rendita anticipata può essere visto come il medesimo di una rispettiva rendita posticipata attualizzato di un periodo, quindi a t-1

$$V_0 = V_{-1} * (1 + i)$$

Quindi $V_0 = \frac{R*1-v^n}{i} * (1 + i) = \frac{R*1-v^n}{d} = R * a\acute{}_{n,\imath}$
dove d è il tasso annuo di sconto ed è uguale a (1-v) o i/(1+i)

Il fattore $a\acute{}_{n,\imath}$ esplicita il valore attuale al periodo 0 di una rendita anticipata, immediata, temporanea di n periodi, di rata unitaria, con un tasso di interesse costante pari a i.
Si noti che nelle rendite anticipate il valore attuale risulta sempre superiore rispetto a una rendita posticipata, che presenta le stesse rate investite allo stesso tasso di interesse, questo in quanto le rate vengono pagate all'inizio del periodo e quindi il loro valore sarà maggiore.

Il montante di tale tipologia di rendite viene calcolato in egual modo partendo dal valore attuale:

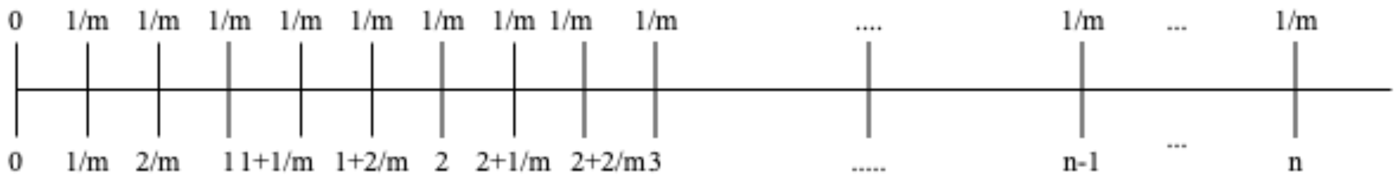
$$M_n = R * a\acute{}_{n,\imath} * (1 + i)^n = \frac{R * (1 + i)^n - 1}{d} = R * \acute{s}_{n,i}$$

Il fattore s rappresenta il montante di una rendita immediata, anticipata, temporanea di n periodi, in cui gli importi delle rate sono tutti unitari, con un tasso di interesse i.

1.3 Altre caratteristiche delle rendite

Oltre alla distinzione fondamentale tra anticipate e posticipate, le rendite presentano altri elementi pecuniari che le caratterizzano e possono essere classificate come:

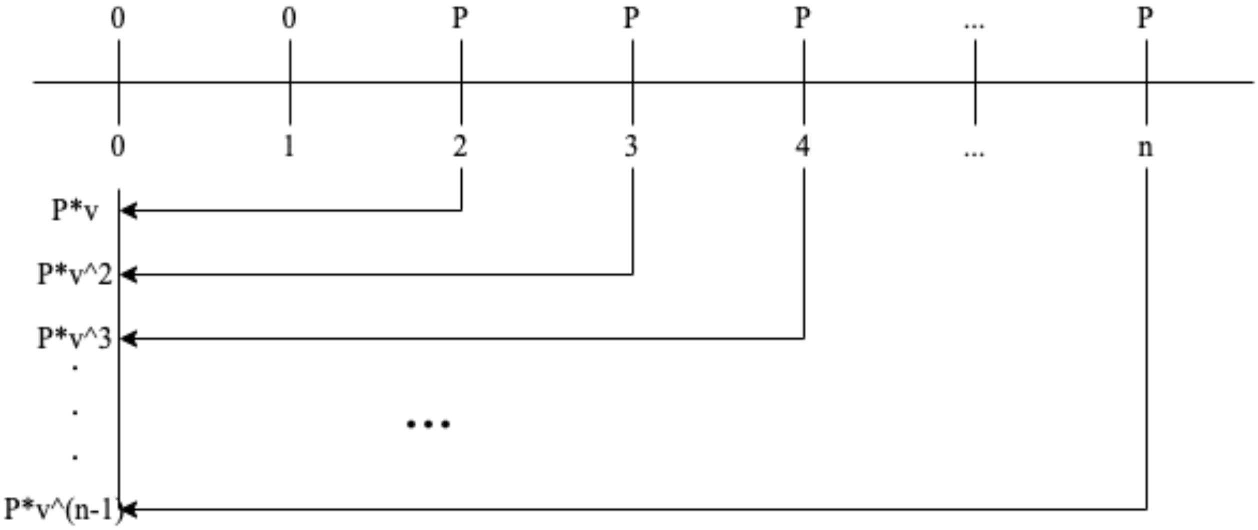
1. A rate costanti o a rate variabili, a seconda che l'importo della rata sia fisso o vari nel tempo. Nel caso in cui vi sia una variabilità definita le rendite possono essere distinte in progressione geometrica oppure in progressione aritmetica.
2. Intere se la rata viene pagata unicamente in relazione al periodo considerato o frazionate dove invece il pagamento è suddiviso in più pagamenti nel periodo di riferimento. Nel caso in cui il frazionamento sia reso infinitamente piccolo si parla di rendita a rata continua.
3. Periodiche e non periodiche a seconda che l'intervallo di tempo fra una rata e l'altra sia costante, nel caso che lo sia la rendita si definisce periodica.
4. Perpetue nel caso il cui il numero di rate sia infinito mentre temporanee se è finito.
5. Immediate, se il pagamento della prima rata avviene nel primo periodo (a prescindere che la rendita sia anticipata o posticipata), differite nel caso opposto un esempio comune di questo tipo è il fondo TFR.



La seguente rappresentazione temporale mostra un esempio di rendita frazionata in più periodi, posticipata, immediata, temporanea (fino al periodo n). In questo caso in questo caso il valore attuale viene calcolato come $VA = \frac{R}{m} * \frac{1-(1+i_{\frac{1}{m}})^{-n*m}}{i_{\frac{1}{m}}} = R * m * \frac{1-(1+i)^{-n}}{j(m)}$, dove j(m) indica il tasso nominale che rende su base annua il tasso espresso nel periodo m, scritto in termini matematici $j(m\ ) = i_{\frac{1}{m}} * m$.

Il tasso $i_{\frac{1}{m}}$ può essere ricavato dal tasso annuo secondo la relazione dei tassi equivalenti, questo prevede l'ipotesi che il tasso $i_{\frac{1}{m}}$ resti costante durante l'anno. L'uguaglianza che esprime tale proprietà nel regime della capitalizzazione composta è la seguente $1 + i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m$.

L'enunciato esprime: "Due tassi ancorchè definiti per periodi differenti, il primo per un anno e il secondo per un emmesimo di anno, si dicono equivalenti se, applicati allo stesso capitale, per lo stesso periodo, nello stesso regime finanziario, in capo a un anno producono lo stesso risultato in termini di montante, valore attuale, interesse e sconto".[9]



Il seguente grafico si riferisce a una rendita differita anticipata, si noti che nel calcolare il valore attuale quindi V_0 di tale tipologia di operazione finanziaria bisogna attualizzare il valore capitale riferito al periodo nel quale è presente la prima rata, che indichiamo con k , di t periodi di differimento, ciò in quanto si sfrutta la scindibilità delle leggi a capitalizzazione composta.
Espresso in termini matematici tale relazione risulta: $VA = V_k * v^t * (1 + i)$ nel caso che la rendita sia anticipata, $VA = V_k * v^t$ se invece è posticipata, ciò in quanto come espresso prima il valore attuale di una rendita anticipata può essere visto come il medesimo di una rendita posticipata capitalizzato di un periodo.

In questo grafico ho mostrato la rappresentazione grafica del frazionamento del premio in più periodi, con un differimento di due anni e il pagamento del premio in rate annue anticipate, di importo P, nella parte inziale a sinistra (sotto l'epoca 0) si può notare la parte che contribuisce al calcolo del valore attuale per ogni singola rata.
Ricordiamo che il frazionamento del premio deve comunque rispettare il principio di equità cioè:

$$P = \frac{U}{a'_{x,n/t}}$$

Questo significa che l'attualizzazione delle corrisposte per pagare il premio in modo frazionato devono coincidere con il valore U del premio nel caso del pagamento unico. Ritorneremo più avanti su questo concetto.

[9] Olivieri G. AA.VV. Elementi di matematica finanziaria, Pearson Italia, Milano, Torino, 2018, pag. 39

t		posticipata	anticipata	differita	perpetua
	0	0,00 €	7,57 €	0,00 €	0,00 €
	1	7,95 €	7,57 €	0,00 €	3,07 €
	2	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	3	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	4	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	5	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	6	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	7	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	8	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	9	7,95 €	7,57 €	8,77 €	3,07 €
	10	7,95 €		8,77 €	3,07 €
	11			8,77 €	3,07 €
	12				3,07 €
	13				3,07 €
	14				3,07 €
...	∞				3,07 €

Per mostrare un'applicazione pratica al mio studio ho calcolato le rate di tre differenti rendite, imponendo lo stesso valore attuale (61,39€), montante (100€), tasso di interesse (5%) e tranne il caso della rendita perpetua anche il medesimo numero di rate.

Però come si può notare cambiando il tipo di rendita il valore della rata cambia notevolmente, infatti la rata anticipata presenta un importo minore di quella posticipata perché parte da un valore all'epoca zero pari alla sua prima rata.

Invece la rata perpetua ha un valore nettamente inferiore dovendo portare i pagamenti fino all'infinito; la rendita differita presenta un valore maggiore dovuto al fatto che queste rate il fattore di attualizzazione relativo ad ogni rata verrà elevato per un numero maggiore delle altre tipologie di rendite per arrivare al valore attuale.

Secondo capitolo: Alcuni aspetti delle assicurazioni sulla durata della vita

2.1 Peculiarità formali delle assicurazioni sulla durata della vita

Le rendite vitalizie appartengono alla macro-area di assicurazioni sulla durata della vita.

Questa tipologia di operazioni finanziarie è caratterizzata dall'avere un contratto prefissato nel quale l'assicuratore si impegna a corrispondere delle somme al beneficiario dell'assicurazione in proporzione al capitale versato.

Queste somme possono essere prefissate o determinabili in modo prefissato (ad esempio seguendo l'evoluzione di un particolare indice economico). I versamenti di tali flussi futuri sono legati alla sopravvivenza di una o più persone assicurate e sono garantiti dal pagamento di un premio da parte di chi sottoscrive il contratto assicurativo.
Il premio può essere pagato in un unico momento o può essere frazionato in pagamenti periodici.

Questo tipo di contratto quindi prevede tre particolari figure oltre all'assicuratore:

- il beneficiario che è colui il quale riceve le somme
- il contraente che paga il premio e stipula il contratto
- l'assicurato che è la persona a cui si riferisce il contratto assicurativo

Dentro a questa particolare tipologia di branca assicurativa si possono distinguere tre grandi categorie:

- Le assicurazioni in caso di morte
- Le assicurazioni in caso di vita
- Le assicurazioni miste

La prima categoria riguarda un esborso futuro che effettuerà l'assicurazione nel caso che una persona (o in determinati contratti anche più persone) deceda in un determinato momento futuro. Questo versamento avverrà verso il beneficiario di tale contratto, che può essere rappresentato anche da un gruppo di individui. Tale flusso di cassa può riguardare il pagamento di un capitale singolo oppure può essere frazionato in rate. Il decesso dell'assicurato al momento della stipulazione del contratto può essere fissato senza un limite temporale (assicurazioni a "vita intera") oppure entro un intervallo di tempo prefissato (assicurazioni temporanee).

La seconda categoria ha lo scopo di costituire in caso di vita a una determinata epoca una certa disponibilità finanziaria, questo tipo di contratto viene stipulato per varie motivazioni personali. Due casi comuni sono in primis se l'assicuratore vuole coprirsi dal fatto che resti in vita più di quanto previsto e quindi non abbia disponibilità economiche sufficienti al proprio sostentamento. In secundis, se vuole integrare la propria pensione.

La definizione di tale categoria è la seguente: "Tali assicurazioni prevedono pertanto il pagamento, da parte dell'assicuratore, di un capitale se la testa assicurata raggiunge in vita una prefissata età o di una rendita che sarà corrisposta, a partire da una prefissata epoca, a condizione che l'assicurato sia in vita"[10]
Solitamente la rendita legata a questo tipo di contratto non è temporanea ma pagabile durante tutta la vita residua dell'assicurato e molti casi il pagamento delle rate è differito.
In casi specifici può essere temporanea se l'assicurato ha bisogno di una certa disponibilità finanziaria per un dato intervallo di tempo, un esempio può essere il pagamento della retta universitaria del figlio e in questo caso beneficiario e assicurato coincidono mentre il contraente è il figlio.
La terza categoria di assicurazioni sono un'unione delle precedenti, ciò in quanto con queste tipologie di contratti assicurativi l'assicurato vuole garantirsi una remunerazione in caso di vita e allo stesso tempo vuole coprirsi dal rischio eventuale di un suo decesso.
Le rendite vitalizie appartengono alla seconda divisione di assicurazioni sulla durata della vita.

Quando si stipulano contratti assicurativi sulla vita bisogna quantificare la probabilità di sopravvivenza dell'assicurato, o di un gruppo di assicurati. Per compiere ciò bisogna svolgere dei calcoli matematici, per fare questo ci si avvale della consultazione delle tavole di mortalità in Italia, come quelle stilate dall'Istat.
Tali tavole mostrano delle rilevazioni dell'età media di vita e morte della popolazione italiana.
Successivamente queste probabilità verranno analizzate in profondità con determinate formule.

Nel quantificare le mortalità potenziali, oltre alle tavole di mortalità in molti casi l'assicuratore compie una propria stima sul risultato dei valori associati alle probabili mortalità degli associati, in questo caso teoricamente si ricorre alla differenziazione in tre principali livelli di analisi:

1. Differenze geografiche che portano a diversi stili di vita e caratteristiche del luogo che si riscontrano poi: nell'alimentazione, nelle condizioni igieniche e sanitarie, nel clima ecc. Questi fattori causano diversi valori attesi di vita residua nelle varie popolazioni del mondo.
2. Differenze nella sottopopolazione di un paese, ad esempio se è presente una zona più inquinata che causa problemi di salute, oppure ancora abitudini alimentari, o anche di sesso, anche se negli ultimi anni si è arrivati in Italia a calcolare un'unica tavola di mortalità indistinta dal dato del sesso, o altri dati.
3. Infine all'interno di un sottopopolazione, anche se il più possibile omogenea, si possono presentare differenze tra i soggetti dovute a particolari fattori individuali che causano una differenza nella mortalità relativa al singolo assicurato. Sono degli esempi: la cura personale

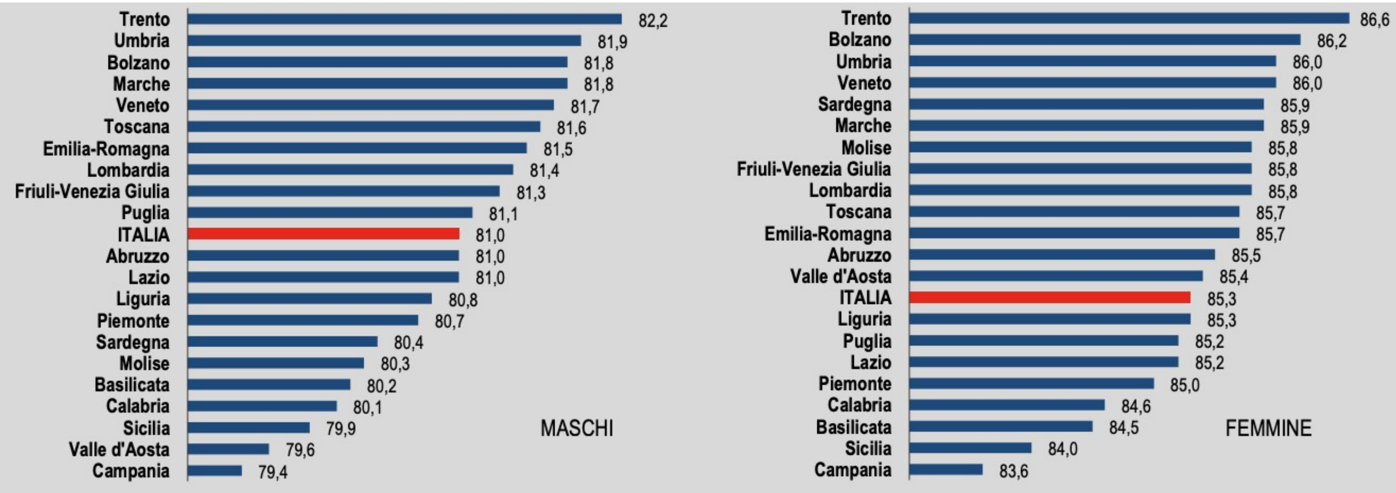
[10] Pitacco E. Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Lint, Trieste, 2009, pag.138.

medica di una persona, il lavoro che può essere più o meno pesante per la salute, lo stress, il quartiere di residenza, la ricchezza ecc..

Le ricerche demografiche che possono essere, a questi tre livelli, svolte sui fattori che incidono sulla mortalità costituiscono un particolare ambito di indagine chiamato mortalità differenziale.

In ambito assicurativo è rilevante l'approfondimento dell'analisi sugli ultimi due fattori in quanto serve a differenziare gli assicurati nelle varie classi di rischio e quindi a quantificare la perdita potenziale in cui l'assicurazione può incorrere e conseguentemente anche a quantificare il premio assicurativo da riconoscere agli assicurati.

Questo particolare tipo di studio sui gli ultimi due livelli di analisi prende il nome di classificazione dei rischi.



Stima età di vita media in Italia nel 2019, divisa per sesso[11]

[11] Il grafico in questione è stato estrapolato dal report Istat 11 Febbraio 2020 redatto da Marsili M. e Battaglini M.

2.2 Stime della durata di vita residua di un individuo

Quando parliamo di assicurazioni sulla durata della vita dobbiamo ragionare a partire da un evento incerto: la durata della vita degli assicurati. Per calcolare l'impatto probabilistico di questo dato l'assicuratore compie delle stime che gli permettono di calcolare in maniera ragionevole le spese legate all'evoluzione della rendita negli anni. Questo approccio è classico dello studio statistico delle variabili casuali.

Una variabile casuale in letteratura è definita come: "Dato un esperimento casuale, una variabile casuale è una funzione che associa a ogni possibile risultato dell'esperimento un numero reale."[12]

Le variabili casuali si dividono in discrete o continue, nel primo caso la variabile può assumere un numero finito o al più un'infinita numerabile di valori. Nel secondo caso invece la variabile può assumere dei valori compresi in un intervallo reale (illimitato o limitato) definito.

Quando noi studiamo la durata aleatoria di vita degli assicurati, pur partendo molto spesso da dati discreti (le tabelle dell'Istat o similari) ipotizziamo che il modello si basi su una variabile aleatoria continua. Questa viene definita in un intervallo di tempo che può essere dal punto di vista teorico illimitato superiormente ma comunque nell'intervallo.

Definiamo in questo modo la cosiddetta "funzione di sopravvivenza S(t) dell'individuo" che ha come dominio un intervallo reale. Il procedimento per arrivare a questa definizione non è banale: si inizia considerando un soggetto di età x uguale a 0, e si indica con T_0 la sua durata aleatoria di vita espressa in anni.

Secondariamente si introduce la funzione di ripartizione della distribuzione di probabilità della variabile aleatoria, relativa a T_0 definita come: $F_0(t) = Pr\{T_0 \leq t\}$, che al generico anno *t* indica la probabilità che la durata di vita del soggetto sia minore o uguale a *t*.

Possiamo ipotizzare esista allora una seconda funzione detta funzione di densità, anch'essa funzione di *t* espresso in anni, tale per cui si abbia che

$$F_0(t) = \int_0^t f_0\,(u)du.$$

Detto in altri termini la funzione di densità è la misura dell'area sottesa dalla funzione di ripartizione. Si può ricavare facilmente quindi che:

- l'area sotto la funzione è unitaria, cioè la probabilità di morte è pari a 1.
- funzione è sempre positiva in quanto non si può avere una probabilità negativa.

[12] Monti A. C. Introduzione alla statistica, Edizioni Scientifiche, 2008 (2° edizione), pag. 126

Ipotizzando continua la funzione di ripartizione per *t>0,* risulta

$f_0(t) = \frac{dF_0(t)}{dt}$

E quindi:

$$Pr\{t < T_0 \leq t + z\} = F_0(t + z) - F_0(t) = \int_0^z f_0(t + u)du$$

Perché è dimostrabile che: "La probabilità che una variabile casuale X, sia discreta che continua, assuma valori in un intervallo *(a,b]* può essere calcolata come differenza del valore che la funzione di ripartizione assume nell'estremo superiore dell'intervallo e quello che assume nell'estremo inferiore".[13]
Il valore che assume la funzione di ripartizione in un determinato punto si calcola nel caso di variabili casuali discrete come la somma di tutte le probabilità dei valori non superiori al punto che stiamo considerando. Mentre nelle variabili casuali continue, come nel nostro caso la probabilità si ottiene calcolando l'area sottesa alla funzione di densità fino al punto considerato.

Possiamo porre con *o(Δt)* un infinitesimo di ordine superiore a Δt, quindi esprimiamo lo stesso passaggio con questa notazione:

$$Pr\{t < T_0 \leq t + \Delta t\} = \int_0^{\Delta t} f_0(t + u)du = f_0(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \approx f_0(t)\,\Delta t$$

Con ≈ indichiamo l'uguaglianza a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δt. Grazie a questa relazione possiamo dire che la funzione di densità rappresenta la curva dei decessi nell'intervallo di tempo considerato.
La funzione di sopravvivenza *S(t)* è definita quindi come

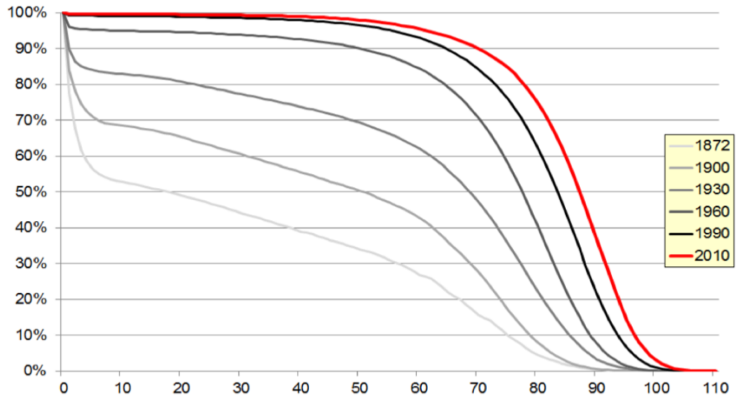
$$S(t) = Pr\{T_0 > t\} = 1 - F_0(t)$$

Questa quindi non è altro che il complemento ad uno della funzione di densità relativa alla probabilità di decesso.
Per comprendere meglio il significato di queste due funzioni è utile studiarne l'andamento grafico.

La funzione *S(t)* mappa anno per anno la probabilità di rimanere in vita: si noti come l'andamento è, ovviamente, monotono decrescente. Da sottolineare il flesso (dalle ultime tabelle intorno agli 80 anni) e la forte pendenza nel primissimo anno di vita che puoi si attenua legata alle morti neonatali, più alte delle medie degli anni immediatamente successivi.
Il secondo grafico rappresenta invece al variare degli anni la possibilità di morire esattamente in quell'anno di età.

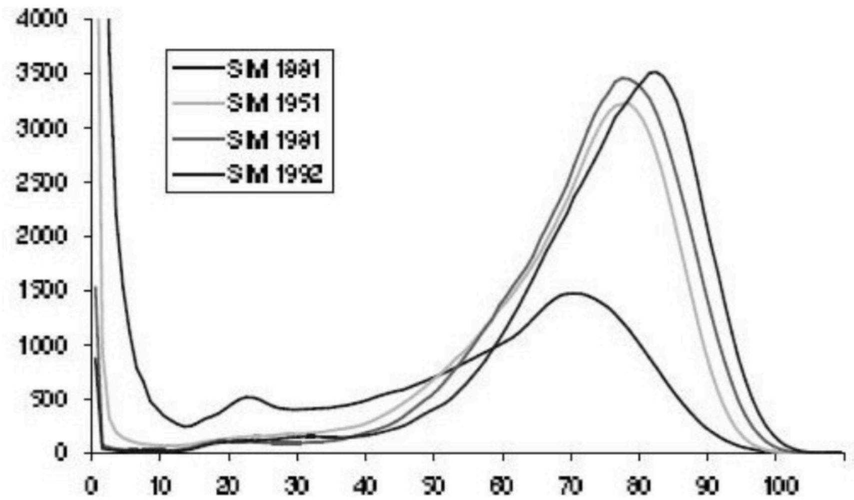
[13] Monti A. C. Introduzione alla statistica, Edizioni Scientifiche, 2008 (2° edizione), pag.134

Avremo quindi un massimo in corrispondenza del punto di flesso della funzione precedente che indica l’età in cui statisticamente è più comune morire e un valore elevato, che poi tende a calare, relativo al dato anomale legato alle morti prenatali.



Rappresentazione grafica di *S(t)* per i vari anni di analisi.

[14]



[15]

Rappresentazione grafica della funzione di densità $F_0(t)$ chiamata anche curva dei decessi degli anni di analisi.

Abbiamo definito quindi la funzione di sopravvivenza e la funzione che rappresenta in maniera probabilistica al passare degli anni la durata di vita di una persona.

Per entrare nelle applicazioni pratiche occorre studiare più a fondo le relazioni esistenti tra queste due funzioni.

[14] Grafico preso da relazione tecnico metodologica dell’ANIA denominata: “Le basi demografiche per le rendite vitalizie A1900-2020 e A62” Gennaio 2014

[15] Grafico proveniente dalla tesi di laurea Ulrich E., Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano, 2009, pag.11

Si consideri una persona di età x, indichiamo con T_x la sua durata aleatoria di vita.

Il dominio cui ci riferiamo può essere definito come un sottoinsieme dei numeri naturali interi partendo da 0 e arrivando a un'età massima che noi definiamo ω e chiamiamo età estrema ad indicare un limite superiore al numero massimo di anni che può raggiungere un uomo in vita.

La distribuzione di probabilità di qualunque T_x può essere definita come:

$T_x = (T_0 - x)|T_0 > x$, dove la seconda parte della formula indica la subordinazione a tale condizione.

Questa distribuzione si trova con la relativa funzione di ripartizione:

$$F_x(t) = Pr\{T_x \leq t\} = Pr\{T_0 \leq x + t|T_0 > x\} = \frac{Pr\{x < T_0 \leq x + t\}}{Pr\{T_0 > x\}} = \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} =$$

$$= \frac{S(x) - S(x + t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)}, \qquad con\ t \geq 0$$

Ciò si può applicare in quanto i due eventi, $T_0 \leq x + t$ e $T_0 > x$ sono indipendenti e quindi statisticamente la probabilità del primo evento dato il secondo si indica come

$Pr\{T_0 \leq x + t|T_0 > x\} = \frac{Pr\{T_0 \leq x+t\} * Pr\{T_0 > x\}}{Pr\{T_0 > x\}}$.

Ma il numeratore, sfruttando l'indipendenza tra gli eventi, può essere espresso come l'intersezione tra i due e quindi si arriva alla formula prima esposta.

Possiamo compiere il medesimo studio per la funzione di densità alla luce del risultato finale ottenuto precedentemente:

$$f_x(t) = \frac{dF_x(t)}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt}\, S(x + t)}{S(x)}, con\ t > 0.$$

In generale vale la seguente relazione:

$$Pr\{t' < T_x \leq t''\} = F_x(t'') - F_x(t') = \int_{t'}^{t''} f_x(u)\, du$$

2.3 Breve excursus sulla notazione attuariale

Accenni alla notazione attuariale

Nei calcoli pratici, che avvengono nel mondo degli attuariali, è utile ricorrere alla cosiddetta notazione attuariale, questa si basa su due probabilità principali indicate con:

- $q_{x,t}$essa rappresenta la probabilità di decesso entro t anni, risulta essere uguale a $F_x(t)$, in termini di funzione di sopravvivenza invece risulta essere pari a $1-\frac{S(x+t)}{S(x)}$, essa può anche essere espressa tramite la funzione di densità quindi: $q_{x,t} = \int_0^t f_x\,(u)du.$
- $p_{x,t}$ essa esprime la probabilità di sopravvivenza per almeno *t* anni, essa è il complemento a uno della probabilità di decesso, in termini di funzione di densità si calcola come:

  $p_{x,t} = \int_t^{+\infty} f_x\,(u)du.$

Quando si analizzano queste probabilità nelle tavole di mortalità si trovano rispettivamente p_x e q_x , ovvero i cosiddetti tassi annuali di mortalità che si riferiscono solo a un determinato anno x e non considerano un periodo t. Torneremo successivamente a parlare delle peculiarità delle tavole di mortalità e del loro utilizzo. Accenniamo solo che quando dobbiamo calcolare la probabilità di sopravvivenza con t diverso da 1, la quale svolge un ruolo centrale nelle rendite vitalizie, per qualsiasi t appartenente ai numeri interi, il passaggio da compiere è il seguente: $p_{x,t} = p_x * p_{x+1} \cdots p_{x+t+1}$

Un'altra variabile utile nei casi pratici è la probabilità differita di decesso, essa si indica con $q_{x,t'/t''}$può essere trovata in diverse maniere:

$q_{x,t'/t''} = Pr\{t' < T_x \le t''\} = \frac{S(x+t')-S(x+t'')}{S(x)} = p_{x,t'} * q_{x,t''}$, a condizione che $t' > 0$

oppure anche con la funzione di densità

$$q_{x,t'/t''} = \int_{t'}^{t''} f_x(u)du$$

2.4 Concetto di valore attuariale

Nel momento in cui l'assicuratore sottoscrive un contratto sulla durata della vita, e quindi anche una rendita vitalizia, quantifica la probabilità che una persona viva un certo numero di anni. Grazie a questo passaggio l'assicuratore calcola l'eventualità che l'individuo sia vivo o morto a una determinata epoca. Questo passaggio è di fondamentale importanza per calcolare il valore attuariale dei flussi futuri che verranno garantiti al beneficiario. Il valore attuale aleatorio che risulterà coincide con il premio che pagherà l'assicurato per coprirsi dai rischi insiti nel contratto assicurativo.

Nel calcolare il premio e le rate bisogna ricordarsi che questo tipo di operazioni si riferiscono ad un evento incerto e quindi per calcolare i valori attuali e i montanti bisogna ricorrere ai loro valori attesi, quindi al concetto statistico di valore atteso. Questo viene nominato anche come "media" della variabile casuale. In statistica il valore atteso può essere interpretato come il valore cui converge la media dei valori osservati di X quando N diventa infinitamente grande. Dove X è la variabile discreta o continua che esprime il risultato di un esperimento casuale ed N sono le replicazioni indipendenti dell'esperimento.
Si può esprimere in forma tabellare una stima del valore atteso suddividendolo anno per anno ed è quello che fanno le tavole fornite dall'Istat fornendo agli attuariali una stima su cui calcolare aggiornata via via con i dati anagrafici rilevati in Italia dall'Istat.

Quindi, ad esempio, per calcolare il valore attuale atteso, denominato anche valore attuariale (in quanto si tratta di un valore collegato a un problema assicurativo), di una somma C abbiamo

$$E_p\ (X) = C * p$$

La somma attualizzata al tasso i, ora chiamata Y diventa:

$$E_p[Y(i)] = E_p\ (X) * (1+i)^{-n} = C * p * (1+i)^{-n}$$

Terzo capitolo: Rendite vitalizie

3.1 Forme base e principio di composizione

La rendita vitalizia è un'operazione finanziaria aleatoria che vuole stimare nella maniera più precisa possibile i pagamenti futuri che verserà l'assicuratore in modo da stabilire il premio che deve pagare l'assicurato per garantirsi tale rendita. Rimane però incognita la durata di vita dell'assicurato.
Il valore che assume questa variabile però è di fondamentale importanza, in quanto l'importo da erogare a ciascuna epoca del contratto in essere è dipendente dall'evento "essere in vita" a tale epoca.
Prima di entrare in merito a tale contratto assicurativo occorre definire alcuni aspetti comuni a tutti le assicurazioni sulla durata della vita, più in particolare ai loro valori attuariali.

Inizieremo trattando la fattispecie assicurativa nel quale la controparte assicurata è rappresentata da una sola persona, successivamente espanderemo la nostra analisi a un gruppo di più persone.
In ambito attuariale il singolo individuo assicurato prende il nome di "testa" e quando parliamo di un gruppo di assicurati è comune indicarli come "teste". Quindi in questa nostra trattazione iniziale potremmo parlare di assicurazioni sulla durata della vita di una testa.
Tali operazioni finanziarie sono caratterizzate dalla cosiddetta base tecnica: essa è funzione del tasso di interesse (i) e dei dati statistici sulla sopravvivenza $S(t)$.
Dato che trattiamo valori attuali per convenienza esprimeremo i sotto forma di $v = \frac{1}{1+i}$, ovvero il fattore annuo di attualizzazione.
Questo ci servirà per attualizzare i vari flussi finanziari, dato che agiamo nel campo delle leggi ad interesse composto. Utilizzeremo questo fattore elevato a n periodi rispetto ai quali vogliamo attualizzare il determinato flusso futuro.
Qui ipotizzeremo per semplicità di trattazione che il tasso a pronti rimanga costante durante tutta la durata della rendita, ma si può estendere la trattazione ipotizzando tassi differenti nel tempo sfruttando formule di calcolo dell'interesse composto.

I contratti assicurativi sulla durata della vita possono essere riportati alle due forme elementari, ovvero l'assicurazione elementare in caso di morte di una testa e l'assicurazione di capitale differito in caso di vita di una persona. Queste due semplificazioni, pressochè inutili da un punto di vista pratico, sono utili per comprendere i concetti teorici sui quali sono basati i contratti assicurativi sulla durata della vita.
La seconda forma in particolare per comprendere le rendite vitalizie.
In questa l'assicuratore paga un capitale unitario alla fine dell'anno h (h prefissato) se l'assicurato supera in vita l'epoca h, altrimenti non paga. Ricordiamo che noi trattiamo sempre il caso di somme unitarie ma poi nei casi pratici è di immediata applicazione cambiare l'importo.

Il valore attuariale di tale prestazione che si indica con $Y_{x,h}^{(v)}$ viene determinato da:

$$Y_{x,h}^{(v)} = \begin{cases} 0 \; se \; T_x \leq h \\ v^h \; se \; T_x > h \end{cases}$$

Ricordiamo che T_x è la durata aleatoria residua di vita della persona in considerazione.
Il valore attuale atteso di tale prestazione o la sua speranza matematica è dato da:

$$E\left(Y_{x,h}^{(v)}\right) = v^h * Pr\{T_x > h\} = v^h * p_{x,h}$$

Il fattore è moltiplicato per v^h in quanto stiamo parlando di un probabile esborso futuro che deve essere quindi attualizzato per avere il valore attuale, quindi il relativo valore all'epoca 0.

La prima forma ovvero quella di assicurazione elementare in caso di morte di una testa è caratterizzata dal pagamento da parte dell'assicuratore di una somma unitaria se l'assicurato decede in un anno prestabilito, che noi nominiamo *t*.
Il valore attuale, calcolato nel periodo *t=0*, di tale assicurazione, nominato $Y_{z,t-1/1}^{(m)}$, con *t-1* indichiamo il fatto che vi sia un differimento del periodo nel quale agisce la copertura assicurativa, mentre 1 indica la sua durata.

$$Y_{z,t-1/1}^{(m)} = \begin{cases} v^t \; se \; t-1 < T_y \leq t \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$$

Il valore attuariale della prestazione, cioè la speranza matematica di $Y_{z,t-1/1}^{(m)}$ si calcola come:

$$E\left(Y_{z,t-1/1}^{(m)}\right) = v^t * Pr\left\{t-1 < T_y \leq t\right\} = v^t * q_{x,t-1/t}$$

Nel momento che noi studiamo qualsiasi tipo di forma assicurativa sulla durata della vita grazie al cosiddetto principio di composizione possiamo riportarla alle due forme elementari.
L'enunciato di questo principio è il seguente: "Grazie alla linearità della speranza matematica, il valore attuariale delle prestazioni del contratto può dunque essere espresso come combinazione lineare (eventualmente con infiniti termini) dei valori attuariali di prestazioni delle due forme elementari".[16]

Nelle forme elementari esaminate le prestazioni aleatorie che dovrà corrispondere l'assicuratore nei casi descritti sono in funzione della variabile aleatoria T_x e non di altro. Quindi è giustificata tecnicamente la denominazione "assicurazioni sulla durata della vita" in quanto il valore attuariale di tali prestazioni dipende solo dalla durata della vita e non da altre variabili aleatorie.

[16] Pitacco E. Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Lint, Trieste, 2009, pa.142

3.2 Premio

I pagamenti della rendita possono avvenire in unico momento oppure essere periodici e quindi formano "le rate della rendita". Questi flussi di cassa futuri sono garantiti finche "la testa o le teste" sono in vita, oppure anche solo per un particolare lasso di tempo determinato a priori al momento della stipula di una polizza a condizione gli assicurati siano in vita.

Come espresso l'assicurato deve pagare una controprestazione, denominata premio, per avere diritto ai flussi di pagamento futuri. Anche questo premio può essere unico oppure frazionato per un certo periodo di tempo.

Fissato l'insieme di prestazioni l'insieme complessivo delle controprestazioni che l'assicuratore richiederà devono essere convenute di comune accordo con il contraente tramite il cosiddetto principio di calcolo del premio.

Il calcolo del premio avviene, sia che esso sia unico o periodico, secondo il dettato del principio o condizione di equità. Questo rappresenta uno dei capisaldi della matematica finanziaria, più in particolare nell'ambito dei prestiti e dei mutui, ma di applicazione anche in altri campi dove l'operazione può essere vista come un investimento o finanziamento, ovvero $\sum_{t=1}^{n} R_t * v^t = A$.

Secondo tale principio si richiede che l'operazione abbia perdita attesa pari a 0, quindi "equa", se noi definiamo:

$L = Y(valore\ attuariale\ aleatorio\ atteso\ delle\ prestazioni) - U(premio)$ e quindi $E(L) = 0$

Dove per L intendiamo il valore attuale della perdita aleatoria dell'assicuratore.

Quindi il premio stabilito dovrà coincidere con il valore atteso della sommatoria delle rate aleatorie della rendita vitalizia $U = E(Y)$.

Il fatto che la perdita attesa sia pari a 0 può porre in dubbio il lettore pensando che l'assicuratore non ottenga un guadagno da questa operazione.

Invece deve essere considerato che E(Y) è il frutto dell'attualizzazione di una serie di importi ad un tasso prestabilito (fisso o variabile che sia) che comunque genera un profitto.

Molto spesso gli assicuratori ricaricano questo premio, sia per generare un ulteriore guadagno certo, sia minimizzare la possibilità di perdite se l'individuo sopravviva più del previsto. Questa differenza di valore tra il premio equo calcolato e quello reale prende il nome di caricamento di sicurezza, questo si differenzia in esplicito e implicito.

Nel primo caso questa maggiorazione è dovuta ad una modifica della base tecnica perché considerata irrealistica da parte dell'assicuratore, che attuando confronti la corregge. Nel caso invece che sia implicito si compie una maggiorazione nella base tecnica che risulta meno realistica ma più profittevole per l'assicuratore.

Il premio unico della formula espressa precedentemente viene denominato premio unico puro equo:
"Unico in quanto pagato in soluzione unica alla stipulazione del contratto, puro in quanto calcolato a fronte delle sole prestazioni, equo in quanto determinato in base al principio di equità"[17].

Nel caso che la rendita vitalizia sia immediata è di facile comprensione il calcolo del premio in quanto si ottiene, come ribadito prima, sommando i valori attuali dei vari flussi di cassa aleatori futuri. Il calcolo diviene differente invece nel caso che sia differita, situazione molto comune nei casi pratici in quanto di solito una persona vuole garantirsi una rendita dopo l'età lavorativa.
Nel caso che il premio sia rateizzato l'assicuratore richiederà un interesse dettato dal fatto che il premio sia differito. Tale rateazione può essere vista come "ammortamento" del debito formato dal premio unico, su una durata che, anche se può risultare nettamente inferiore al contratto assicurativo, comunque si considera aleatoria in quanto i pagamenti delle varie frazioni del premio vengono corrisposti se l'assicurato è in vita.

Consideriamo il caso esemplificativo di un contratto che presenta un premio annuo costante, che chiamiamo P pagabile in caso di vita dell'assicurato per h anni. Il valore attuale aleatorio relativo alla sequenza di premi annui è definito come

$$X=\begin{cases} P * a'_{Kx+1} \ se\ T_x < h \\ P * a'_{h} se\ T_x \geq h \end{cases}$$

in questo caso abbiamo considerato il pagamento del premio anticipato e immediato, ma si può arrivare alla soluzione semplicemente cambiando la competenza dei pagamenti

Per definire a'_{Kx+1} dobbiamo definire Kx , essa è la cosiddetta durata aleatoria residua troncata di vita, esso viene nominato come "valore troncato", o parte intera di T_x, in quanto presenta i numeri interi non negativi della funzione che rappresenta la durata aleatoria residua dell'individuo *x*. La definizione matematica di Kx è quindi la seguente:

$$Kx = k \leftrightarrow k \leq T_x < k + 1\ con\ k = 0,1,2,3 \ldots.$$

La distribuzione della Kx, essendo anch'essa una variabile aleatoria, ma discreta presente in T_x è direttamente ricavabile dalla sua distribuzione, e quindi:

$$Pr\{T_x = k\} = 0, \qquad sempre\ con\ k = 0,1,2,3 \ldots$$

Qui T_x presenta una distribuzione continua e per definizione: "Una caratteristica delle variabili casuali continue è che la probabilità che assumano un singolo valore è nulla, ossia $P(X = x) = 0$ Infatti la probabilità che assumano un particolare *x* è data dall'area sotto *f(x)* su un intervallo di lunghezza nulla e di conseguenza vale zero".[18]

---

[17] Pitacco E. Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Lint, Trieste, 2009, pag.171
[18] Monti A. C. Introduzione alla statistica, Edizioni Scientifiche, 2008 (2° edizione), pag.130

Nelle variabili casuali continue infatti:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Segue che in Kx, che ricordiamo è discreta:

$$Pr\{Kx = k\} = Pr\{k \leq T_x < k + 1\} = Pr\{k < T_x \leq k + 1\} = q_{x,k/1}$$

Dove si ricorda che $q_{x,k/1}$ è la probabilità differita di decesso da k a k+1.

Il valore attuariale della prestazione *Y*, può essere considerato quindi come:

$$Y = v^0 + v^1 + \cdots + v^{Kx} = a'_{Kx+1}$$

Avendo introdotto queste nozioni possiamo arrivare a trovare il valore atteso di *X*, esso coincide con il valore dell'ipotetico premio unico, che risulta essere uguale a:

$$E(X) = P * a'_{x,h}$$

Ricordiamo che in qualunque caso il frazionamento del premio deve comunque rispettare il principio di equità, cioè:

$$P = \frac{U}{a'_{x,n}}$$

Dove con *U* indichiamo il premio unico.

Inoltre l'assicuratore deve controllare la base tecnica e confrontarla con i presumibili valori reali così da non incorrere nella possibilità di essere sotto finanziato. In tal caso, come spiegato prima, potrà esserci una eventuale caricamento di sicurezza, implicito o esplicito che sia.

3.3 Tipologie di rendite vitalizie su una testa

In questa parte abbiamo parlato dei principi cardine legati al calcolo di un premio, ma parlando di operazioni finanziarie in generale e più in particolare ponendo un'esemplificazione su un contratto sulla durata della vita di una persona. Prima di entrare nel merito dei premi legati alle rendite vitalizie occorre conoscere le varie tipologie di rendite vitalizie, essendo come anticipato precedentemente il premio visto come l'attualizzazione dei flussi di cassa futuri.

Nelle rendite vitalizie la differenza principale rispetto a una rendita generica è la quantificazione dell'incertezza relativa alla possibilità che l'individuo sia in vita a una determinata età. Quindi tutti i calcoli verranno svolti su valori attesi e non puntuali utilizzando il calcolo delle probabilità.

Partiamo dal considerare il caso di una rendita vitalizia posticipata, immediata con rata annua unitaria.

Il valore attuariale di tale rendita può essere definito sempre partendo dalla durata aleatoria residua troncata di vita, quindi come definito prima nel caso di una rendita anticipata, si può arrivare al medesimo risultato considerando però la prima rata versata alla fine del primo periodo:

$$Y = v^1 + v^2 + \cdots + v^{Kx} = a_{Kx}$$

Il valore attuale aleatorio della rendita vitalizia posticipata, immediata temporanea di t anni è il seguente:

$$Y = \begin{cases} a_{Kx}\ se\ T_x < t \\ a_t se\ T_x \geq t \end{cases}$$

Quindi il valore attuariale, che noi chiamiamo a_x ,della rendita può essere espresso come il valore atteso dell'equazione precedente.

L'approccio classico attuariale arriva al calcolo di tale valore tramite la formula di Halley, introdotta dallo studioso nel 1693, che altro non è che la sommatoria precedente esplicitando il fattore della probabilità di sopravvivenza dell'assicurato.

Questa uguaglianza si ricava dal principio di composizione, interpretando tale operazione finanziaria come una combinazione di assicurazioni di capitale differito in caso di vita dell'assicurato.

Tale relazione si esprime quindi come: $a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} p_{x,t} * v^t$

Il limite superiore di tale sommatoria è dato da ω, che come esplicitato prima si riferisce all'età massima possibile nella quale noi consideriamo l'assicurato possa essere vivo. Quando omettiamo la durata della rendita e indichiamo solo come a_x intendiamo $a_{x,\omega}$ e quindi ci riferiamo sempre all'età massima considerata.

Nella base teorica il limite superiore di questa successione di rate tende a $+\infty$, ma per praticità noi dalle tavole di mortalità stabiliamo sempre un'età finale del nostro studio e quindi consideriamo la rendita come temporanea.

In alternativa a tale formula possiamo considerare quella trovata da "de Witt" nel 1671, essa può essere ricavata partendo dalla precedente e viceversa. De Witt al posto di considerare la probabilità di sopravvivenza della testa si occupa invece di raggiungere lo stesso risultato ma utilizzando anche la probabilità di decesso, quindi:

$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_t * p_{x,t} * q_{x+t}$

La moltiplicazione tra gli ultimi due fattori $p_{x,t} * q_{x+t}$ esprime la probabilità di decesso tra l'età *x+t* e *x+t+1* dell'assicurato di età pari a x, mentre q_{x+t} esprime lo stesso fattore ma si riferisce a un anno e ad una persona di età $x+h$. Il primo termine a_t invece è riferito al valore attuale di una rendita certa posticipata di durata *t*. Negli ultimi anni è sorto un grosso dibattito in letteratura rispetto all'utilizzo di queste due formule. Disputa che tratterò più avanti, ma restano comunque applicate anche nei giorni odierni.

Nel caso invece che la rendita vitalizia sia anticipata, per semplificazione, la consideriamo immediata con rata annua unitaria. Si arriva così alla definizione sempre partendo da Kx, e quindi compiendo la serie di passaggi matematici svolti precedentemente con la differenza che ora considereremo anche il termine in *t=0* essendo il pagamento anticipato rispetto al periodo di competenza della rata, ciò risulta quindi essere:

$$a'_x = E(Y) = E(a'_{Kx+1})\ con\ a'_{Kx+1} = v^0 + v^1 + v^2 + \cdots + v^{Kx}$$

Il valore attuale aleatorio della rendita vitalizia anticipata, immediata temporanea di t anni è il seguente:

$$Y = \begin{cases} a'_{Kx+1}\ se\ T_x < t \\ a'_t se\ T_x \geq t \end{cases}$$

Ciò espresso rispetto alle formule dei due studiosi analizzate prima risulta essere uguale a:

$$a'_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} a_t * p_{x,t} * q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} p_{x,t} * v^t$$

Analogamente anche per le seguenti formule e in particolare per la seconda viene applicato il principio di composizione per dimostrare la relazione matematica.

Dove i fattori indicati sono i medesimi espressi prima. Cambia solo il punto di partenza della successione di importi che parte in *t=0*, quindi è di immediata deducibilità che il valore attuale di una rendita immediata anticipata temporanea altro non è che il risultato del calcolo della rispettiva rendita posticipata riferita però a un periodo in meno, quindi se la rendita ha come limite ω si considera la posticipata con $\omega - 1$.

$$a'_{x,\omega} = 1 + a_{x,\omega-1}$$

Ora possiamo descrivere anche i valori attuali attesi di altre tipologie di rendite vitalizie:

- Anticipata, temporanea di n periodi, differita di m periodi:

$$a'_{x,n/m} = \sum_{h=m}^{m+n-1} v^h * p_{x,h} = a'_{x,m+n} - a'_{x,m}$$

- Posticipata, temporanea di n periodi, differita di m periodi:

$$a_{x,n/m} = \sum_{h=m+1}^{m+n} v^h * p_{x,h} = a_{x,m+n} - a_{x,m}$$

- Rendita vitalizia posticipata, immediata, temporanea, con le rate poste in progressione aritmetica, data una generica crescenza con i flussi pari a: R+k, R+2k, R+3k si può studiare la formula ponendo k=1 e R=0 per semplificare i passaggi. Quindi si può ridurre il calcolo alla seguente somma: $Ra_{x,n} + k(Ia)_{x,n}$ dove il secondo fattore implica il valore aleatorio atteso della ragione, esso può essere espresso come:

$$k(Ia)_{x,\omega} = \sum_{t=1}^{\omega-x} (t+1) * p_{x,t} * v^t$$

- Può essere svolto il medesimo passaggio nel caso che l'operazione finanziaria sia anticipata e risulta come:

$$E(Y) = Ra'_{x,n} + k(Ia')_{x,n}$$

$$k(Ia')_{x,\omega} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} (t+1) * p_{x,t} * v^t$$

3.4 Premio frazionato

Il frazionamento nell'acquisto di una rendita vitalizia avviene di solito nel caso che la rendita sia differita, mentre nel caso che sia immediata il pagamento di solito viene effettuato in un unico momento, di solito in t=0.

L'assicuratore deve considerare che il pagamento del premio nei vari periodi di frazionamento è anch'esso legato alla variabile aleatoria legata alla sopravvivenza della controparte, in quanto il pagamento avverrà solo se l'individuo sarà in vita. Bisogna ricordare che in caso di morte prima del pagamento dei premi si possono avere due possibilità, denominate rispettivamente: modalità finanziaria, la quale prevede che il montante costituito al momento del decesso sarà corrisposto agli eredi; oppure la modalità attuariale la quale non prevede alcuna prestazione nel caso di morte dell'assicurato.

L'assicuratore nel concedere il frazionamento dei premi all'assicurato richiederà comunque un interesse dato dal fatto che il valore attuale della rendita (premio) non è disponibile al periodo 0, quindi questo può essere visto come un finanziamento da parte dell'assicuratore.

Il valore fondamentale che è da considerare nella sottoscrizione, di una rendita vitalizia differita tramite più pagamenti è il cosiddetto "capitale di copertura" (o "capitale costitutivo") della rendita. Esso è calcolato come il montante dei premi frazionati che l'assicurato corrisponderà fino al versamento della prima rata della rendita. Il capitale di copertura inoltre coincide con il valore attuariale della rendita vitalizia alla fine del differimento. Per arrivare alla costituzione del capitale di copertura l'assicurato provvederà a versare una sequenza di flussi chiamati P_h con h che appartiene all'intervallo che parte dall'epoca 1. Quindi i pagamenti possono essere considerati posticipati, ma si può compiere lo stesso ragionamento anche con pagamenti anticipati, fino al periodo finale di differimento n. La rendita vitalizia invece si corrisponde fino al periodo di competenza individuato dal termine ω.

Questa relazione espressa in notazione matematica equivale a:

- Nel caso che la rate della rendita siano anticipate:

$$\sum_{h=1}^{n} P_h * (1+i)^{n-h+1} = R * a'_{x+n,\omega}$$

- Se invece le rate della rendita sono corrisposte in modo posticipato:

$$\sum_{h=1}^{n} P_h * (1+i)^{n-h} = R * a_{x+n,\omega}$$

I casi opposti in cui le rate per formare il "capitale di copertura" siano corrisposte all'inizio del periodo di competenze risultano essere:

- Rendita anticipata:

$$\sum_{h=0}^{n} P_h * (1+i)^{n-h} = R * a'_{x+n,\omega}$$

- Rendita posticipata

$$\sum_{h=0}^{n} P_h * (1+i)^{n-h-1} = R * a_{x+n,\omega}$$

Per unificare concettualmente le diverse possibilità temporali di pagamento dei premi si può introdurre la nozione di "legge di tariffazione". Si vuole in questo modo formulare una legge che associ, per una fissata durata contrattuale *n* (eventualmente *n*=+∞), agli interi *0, 1, …, n-1* i premi esigibili in quella unità di tempo..

Si possono formulare una serie di esempi che esplicitano la rappresentazione di legge di tariffazione tramite la successione dei pagamenti per acquistare la rendita in questione:

- Pagamento in un'unica soluzione: $\{U, 0, \dots 0\}$
- Frazionamento del pagamento in somme costanti pagabili per un periodo minore della durata della rendita: $\{P, \dots P, 0, \dots, 0\}$
- Premi basati sulla successione di due rate prefissate (denominate anche livelli): $\left\{\frac{P}{3}, \dots \frac{P}{3}, P, \dots, P\right\}$
- Premio che segue una progressione aritmetica, con ragione *b*, crescente di termini *n-1*, con *b>0*: $\{P, P+b, P+2b, \dots, P+nb\}$
- Frazionamento dei pagamenti con importo costante per l'intera durata contrattuale: $\{P, P, \dots, P\}$
- Pagamento tramite premi unici ricorrenti: $\{U_1, U_2 \dots, U_n\}$
- Frazionamento dei pagamenti tramite premi naturali: $\left\{P_1^{(N)}, P_2^{(N)}, \dots, P_n^{(N)}\right\}$

Un premio è definito naturale se "la sequenza dei premi garantisce in modo naturale che, in ciascun anno, l'impegno dell'assicuratore sia esattamente coperto dall'introito del premio, evitando situazioni di sotto-finanziamento"[19]. La regola che sta alla base dei premi naturali è che la loro somma non equivale al premio unico pagato nel momento inziale, ma è presente un interesse dovuto al rischio che incorre l'assicuratore nel concedere il frazionamento dei premi. Pur rispettando il principio di equità la somma dei premi naturali si concretizza con la nozione di "riserva matematica" che può essere paragonata al "capitale di costituzione" trattato precedentemente.
I premi unici ricorrenti invece sono utilizzati nel caso che il contratto assicurativo preveda una prestazione differita da finanziare mediante una successione di premi.

[19] Pitacco pag 175

La peculiarità di questi pagamenti consiste nel fatto che il loro ammontare non risulta prestabilito a priori ma viene definito anno dopo anno. Questa variazione dell'ammontare dei premi cambierà anche l'entità della prestazione totale che l'assicuratore verserà all'assicurato dopo il pagamento dei premi.

In questo caso solo dopo il pagamento dell'ultimo premio ricorrente si può avere la certezza dell'ammontare delle rate che riceverà l'assicurato.

3.5 Tavole di mortalità e loro interpretazione

Come prima accennato nel calcolo del premio e delle rate di una rendita vitalizia il punto di partenza è sempre l'analisi delle tavole di mortalità, in Italia esse sono disponibili negli archivi Istat, che andranno elaborate a seconda dello scopo e della formula che si vuole utilizzare.

Qui per esemplificazione viene mostrata la tavola di mortalità del 2018, esposta come media totale della popolazione senza distinguere più il sesso dell'assicurato, come negli ultimi anni è pratica comune delle compagnie assicurative fare.

Funzioni biometriche		sopravviventi - lx	decessi - dx	probabilità di morte (per 1.000) - qx	anni vissuti - Lx	probabilità prospettiva di sopravvivenza - Px	speranza di vita - ex
Età							
0 anni		100000	293	2,9299	99724	0,9997251	82,98
1 anni		99707	20	0,20305	99697	0,9998264	82,223
2 anni		99687	14	0,14407	99680	0,9998737	81,239
3 anni		99672	11	0,1086	99667	0,9999013	80,251
4 anni		99662	9	0,08872	99657	0,9999142	79,26
5 anni		99653	8	0,08285	99649	0,9999188	78,266
6 anni		99644	8	0,07948	99641	0,9999212	77,273
7 anni		99637	8	0,07805	99633	0,9999236	76,279
8 anni		99629	7	0,07467	99625	0,9999254	75,285
9 anni		99621	7	0,07445	99618	0,9999232	74,291
10 anni		99614	8	0,07909	99610	0,9999187	73,296
11 anni		99606	8	0,08344	99602	0,9999128	72,302
12 anni		99598	9	0,09094	99593	0,9999041	71,308
13 anni		99589	10	0,10081	99584	0,999889	70,314
14 anni		99579	12	0,12118	99573	0,999867	69,321
15 anni		99567	14	0,14484	99559	0,9998382	68,33
16 anni		99552	18	0,17879	99543	0,999807	67,339
17 anni		99534	21	0,20723	99524	0,9997801	66,351
18 anni		99514	23	0,23261	99502	0,9997562	65,365
19 anni		99491	25	0,25495	99478	0,9997366	64,38
20 anni		99465	27	0,2718	99452	0,9997238	63,396
21 anni		99438	28	0,28062	99424	0,999713	62,414
22 anni		99410	29	0,29343	99396	0,9997037	61,431
23 anni		99381	30	0,29919	99366	0,9996966	60,449
24 anni		99351	31	0,30766	99336	0,9996875	59,467
25 anni		99321	32	0,31741	99305	0,9996795	58,485

26 anni		99289	32	0,32351	99273	0,9996761	57,503
27 anni		99257	32	0,32437	99241	0,9996761	56,522
28 anni		99225	32	0,32341	99209	0,9996736	55,54
29 anni		99193	33	0,32932	99177	0,9996611	54,558
30 anni		99160	35	0,34844	99143	0,9996396	53,576
31 anni		99126	37	0,37242	99107	0,9996102	52,594
32 anni		99089	40	0,40718	99069	0,9995795	51,613
33 anni		99048	43	0,43384	99027	0,9995566	50,634
34 anni		99005	45	0,45302	98983	0,9995293	49,656
35 anni		98961	48	0,4883	98936	0,9994927	48,678
36 anni		98912	52	0,52625	98886	0,9994485	47,702
37 anni		98860	57	0,57676	98832	0,9993903	46,727
38 anni		98803	63	0,64264	98771	0,9993262	45,753
39 anni		98740	70	0,70492	98705	0,999257	44,782
40 anni		98670	77	0,78106	98632	0,9991821	43,814
41 anni		98593	84	0,85486	98551	0,9991112	42,848
42 anni		98509	91	0,92279	98463	0,9990368	41,884
43 anni		98418	99	1,00363	98368	0,9989516	40,922
44 anni		98319	107	1,0932	98265	0,9988494	39,963
45 anni		98212	119	1,20812	98152	0,9987196	39,006
46 anni		98093	133	1,35282	98027	0,9985834	38,052
47 anni		97960	145	1,48043	97888	0,9984444	37,103
48 anni		97815	160	1,63082	97735	0,9982892	36,158
49 anni		97656	175	1,79085	97568	0,9981218	35,216
50 anni		97481	192	1,96572	97385	0,9979376	34,278
51 anni		97289	210	2,15919	97184	0,9977323	33,345
52 anni		97079	231	2,37635	96964	0,9975134	32,416
53 anni		96848	252	2,59718	96723	0,9972806	31,492
54 anni		96597	275	2,84188	96460	0,9970303	30,572
55 anni		96322	298	3,0978	96173	0,9967343	29,658
56 anni		96024	330	3,43414	95859	0,9963964	28,749
57 anni		95694	361	3,77372	95514	0,9959973	27,846
58 anni		95333	404	4,23255	95131	0,995555	26,95
59 anni		94930	442	4,65828	94708	0,9951245	26,062
60 anni		94487	481	5,09373	94247	0,9946514	25,182
61 anni		94006	527	5,60477	93743	0,994134	24,308
62 anni		93479	573	6,12866	93193	0,9935973	23,442
63 anni		92906	620	6,67839	92596	0,9929892	22,584
64 anni		92286	678	7,3454	91947	0,992253	21,732
65 anni		91608	747	8,15157	91235	0,9914646	20,889
66 anni		90861	811	8,92239	90456	0,9905836	20,057
67 anni		90051	893	9,9149	89604	0,989646	19,233
68 anni		89158	963	10,79743	88676	0,9885739	18,421
69 anni		88195	1064	12,06166	87663	0,9875763	17,616
70 anni		87131	1114	12,79006	86574	0,9866335	16,825
71 anni		86017	1200	13,95048	85417	0,9853071	16,037
72 anni		84817	1310	15,44573	84162	0,9835513	15,256
73 anni		83507	1459	17,46731	82777	0,9815051	14,488
74 anni		82048	1603	19,54074	81246	0,9789085	13,737
75 anni		80445	1824	22,67325	79533	0,9761376	13
76 anni		78621	1972	25,07906	77635	0,9735831	12,29

77 anni		76649	2130	27,78922	75584	0,9707415	11,594
78 anni		74519	2293	30,7697	73373	0,9677205	10,911
79 anni		72226	2444	33,83722	71004	0,9640222	10,241
80 anni		69782	2665	38,19333	68450	0,9590757	9,582
81 anni		67117	2937	43,76368	65648	0,9530044	8,943
82 anni		64180	3233	50,37548	62563	0,9460077	8,33
83 anni		60947	3523	57,80102	59185	0,938226	7,745
84 anni		57424	3789	65,9907	55529	0,929009	7,189
85 anni		53634	4095	76,34465	51587	0,9187374	6,662
86 anni		49540	4290	86,58705	47395	0,9080725	6,171
87 anni		45250	4424	97,77425	43038	0,8958775	5,709
88 anni		40826	4538	111,15871	38557	0,8822211	5,273
89 anni		36288	4544	125,22705	34016	0,8673546	4,87
90 anni		31744	4480	141,12583	29504	0,8507275	4,496
91 anni		27264	4328	158,75786	25100	0,8324457	4,152
92 anni		22935	4083	178,01073	20894	0,8134841	3,842
93 anni		18853	3711	196,86289	16997	0,7933517	3,565
94 anni		15141	3313	218,83221	13485	0,7715022	3,317
95 anni		11828	2849	240,87096	10403	0,7517343	3,106
96 anni		8979	2317	258,0069	7821	0,7388044	2,933
97 anni		6662	1769	265,49317	5778	0,7319238	2,779
98 anni		4893	1329	271,59292	4229	0,7218872	2,603
99 anni		3564	1023	287,06372	3053	0,6995411	2,386
100 anni		2541	811	319,24762	2136	0,6584067	2,146
101 anni		1730	648	374,41837	1406	0,6136987	1,918
102 anni		1082	439	405,29633	863	0,582919	1,767
103 anni		644	281	436,89709	503	0,5515468	1,63
104 anni		362	170	468,97545	277	0,5198226	1,507
105 anni		192	96	501,27245	144	0,4879941	1,396
106 anni		96	51	533,52758	70	0,4563079	1,296
107 anni		45	25	565,48227	32	0,4250027	1,207
108 anni		19	12	596,89537	14	0,3942984	1,127
109 anni		8	5	627,54753	5	0,3643933	1,056
110 anni		3	2	657,24469	2	0,3354595	0,992
111 anni		1	1	685,82638	1	0,3076373	0,935
112 anni		0	0	713,1677	0	0,2810352	0,884
113 anni		0	0	739,17538	0	0,2557328	0,839
114 anni		0	0	763,78924	0	0,2317797	0,798
115 anni		0	0	786,97925	0	0,209199	0,762
116 anni		0	0	808,74173	0	0,1879911	0,73
117 anni		0	0	829,09133	0	0,1681392	0,701
118 anni		0	0	848,06512	0	0,1496078	0,675
119 anni		0	0	865,70887	0	0,1323525	0,652

Nel sito del Istat, oppure da un lavoro di raccolta dati di una compagnia di assicurazione che fa una statistica sui propri assicurati, si ricavano le cosiddette tavole aggregate ovvero: "Una sequenza $\{q_x\}$ del tipo $q_a, q_{a+1}, \dots, q_x, \dots, q_{\omega-1}$ i cui elementi sono le probabilità di morte entro un anno in funzione della sola età raggiunta (solitamente intera)." Questa è chiamata tavola di mortalità aggregata, dove il numero a è l'età iniziale mentre ω rappresenta l'"età estrema" tale che $q_{\omega-1} = 1$"[20].

Questi valori di probabilità non possono però essere utilizzati direttamente nel calcolo dei vari valori attuariali. Questo perché, ad esempio, se consideriamo una rendita vitalizia, posticipata o anticipata che sia, il flusso futuro aleatorio legato alla sopravvivenza al secondo anno non è vincolato solo alla sopravvivenza dal primo al secondo anno (e quindi dal valore che ricaviamo dalle tavole Istat per l'età desiderata) ma questa probabilità va calcolata solo nel caso in cui uno sia sopravvissuto anche dal tempo zero al primo anno.

Per compiere questo passaggio introduciamo la nozione di tavola di mortalità selezionata: "E' chiamata tavola di mortalità selezionata una tabella a doppia entrata il cui generico elemento, $q_{[x]+t}$, è la probabilità di decesso tra le età x+t e x+t+1 per una persona di età x+t, avente età x all'ingresso in assicurazione e pertanto antidurata pari a t".[21]

Di immediata comprensione è la relativa probabilità di sopravvivenza tra *x+t* e *x+t+1* denominata $p_{[x]+t}$, essa risulta essere uguale a 1-$q_{[x]+t}$, per calcolare le varie probabilità di sopravvivenza utilizzate nelle formule delle rendite vitalizie occorre usare la seguente formula:

$$p_{[x]+t,n} = \prod_{h=0}^{n-1} p_{[x]+t+h}$$

Questa formula interpretata a parole mostra la relazione che impone la modifica delle tavole aggregate nel caso di calcolo di una determinata rendita vitalizia. La probabilità di sopravvivenza che sarà utilizzata nel calcolo del premio o della rata ogni anno è data dalla moltiplicazione della p_x del primo anno per le p_x precedenti fino a quella dell'anno che si sta considerando. Per raggiungere una età di *n* anni debbo necessariamente raggiungere l'età di *n-1* anni

Dobbiamo quindi compiere una successione di moltiplicazioni per trovare la probabilità da inserire nella formula del valore attuariale.

Quindi riguardando la formula di Halley

$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} p_{x,t} * v^t$

dobbiamo considerare attentamente i vari $p_{x,t}$ relativi alla sommatoria.

Quando si applica tale formula occorre iniziare il calcolo sempre dal valore relativo alla sopravvivenza cui compete il primo anno. Quindi facendo un esempio pratico, supponiamo che la persona assicurata abbia 50 anni e che stiamo trattando una rendita vitalizia, posticipata, di rata annua unitaria, immediata. In questo scenario, la prima probabilità che andremmo a considerare per il calcolo della prima rata è p_{50}, in quanto la rata sarà corrisposta alla fine del 50-esimo anno.

---

[20] Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Ermanno Pitacco pag 94

[21] Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Ermanno Pitacco pag 95

Successivamente per la seconda rata invece il valore della probabilità da inserire nella sommatoria sarà dato da $p_{50} * p_{51}$. Per il terzo anno $p_{50} * p_{51} * p_{52}$ e così via fino all' anno ω che abbiamo definito come età massima nel quale l'individuo possa essere ancora in vita.
In alcuni casi specifici la rendita può terminare anche in un altro anno o considerare un altro intervallo di tempo, ma il calcolo è il medesimo con la sola differenza dell'orizzonte temporale.
Supponiamo invece che la rendita sia anticipata: bisogna utilizzare sempre le medesime probabilità, ma per il primo anno la rata sarà unitaria in quanto l'individuo è per forza in vita.
Per esemplificare nell'esempio trattato si dovrebbe partire da p_{50} nel calcolo della seconda rata e poi per il terzo flusso $p_{50} * p_{51}$, per il quarto $p_{50} * p_{51} * p_{52}$ e così via.

Abbiamo visto che per calcolare i vari dati della rendita occorre elaborare i dati originali delle tabelle Istat. Tutti i calcoli di qualunque tipologia possono essere comunque svolti studiando solo le prime due colonne della tavola, quindi il numero di sopravvissuti (lx) e di decessi (dx) che sono presenti ogni anno.
Questi dati poi tramite una serie di formule vengono traslati in notazione attuariale così da poter essere maneggiati con semplicità e arrivare al risultato voluto. In particolare:
Considerando q_x e p_x espressi precedentemente, ovvero la probabilità di decesso entro un anno e la probabilità di sopravvivenza per un anno all'età x può risultare utile conoscere le seguenti relazioni notevoli dati l_x e d_x

- $d_{x,n} = l_x - l_{x+n}$ è il numero atteso di decessi tra l'età x e x+n;
- $l_{x+1} = l_x * (1 - q_x)$, esprime il numero atteso delle persone in vita al tempo x;
- $d_x = l_x * q_x = l_x - l_{x+1}$, è il numero di decessi che ci si aspetta tra l'età x e l'anno successivo.

$p_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - q_{n,x}$ ovvero la probabilità di sopravvivenza per n anni all'età x.
Questo dato ci è molto utile in quanto viene utilizzato per calcolare il valore attuale aleatorio di una rendita vitalizia tramite la formula di Halley.
Mentre per la probabilità complementare ricordiamo che
$q_{x,n} = 1 - p_{x,n}$
quindi la probabilità di decesso entro n anni di un individuo all'età x, si ottiene come:

$$q_{x,n} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{d_{x,n}}{l_x}$$

Questi due valori sono espressi in relazione annua, quindi il rispettivo tasso annuo di sopravvivenza e di decesso risultano essere rispettivamente:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

3.6 Rendite vitalizie su più teste con esempio numerico su un gruppo famigliare

Il contratto assicurativo riguardante le rendite vitalizie può riguardare più persone, fino a estendersi ad esempio anche su un gruppo famigliare come mostrerò successivamente nell'applicazione pratica sviluppata in linguaggio Python.

La base di un contratto su più teste si basa su tre modelli di capitale differito su due teste. Questi modelli si differenziano in base al fatto che i versamenti siano fatti a condizione che

- sia in vita almeno una testa,
- siano in vita entrambe le teste
- o il caso speciale di pagamento nella situazione di sopravvivenza di una testa se l'altra è deceduta.

Nel primo caso, la compagnia assicurativa si impegna a esborsare un capitale all'epoca h che noi supponiamo unitario, ma poi moltiplicando per i valori reali il passaggio è identico, all'epoca n se almeno uno dei due assicurati è in vita.

Il valore attuale aleatorio, quindi in pratica il premio di un'assicurazione di capitale differito in caso di sopravvivenza di almeno una delle teste assicurate è dato dunque da:

$$Y = \begin{cases} v^h \;\; se\; T_{\overline{x,y}} > h \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$$

la notazione $T_{\overline{x,y}}$ fa riferimento al modello del "Last Survivor Status" dove il gruppo è considerato estinto solo all'ultimo decesso. E' quindi un'assicurazione su più persone la cui durata di vita residua aleatoria legata al gruppo di assicurati è la seguente: $T_{\overline{x,y,z.....}}$=max($T_x, T_y, T_z$,…..).

Il valore attuariale di Y chiamato $E\overline{x,y}_h$ si calcola come

$$E\overline{x,y}_h = v^h * Pr\{\,T_{\overline{x,y}} > h\}$$

Ponendo l'ipotesi di uguale distribuzione ed indipendenza stocastica tra le durate aleatorie di vita dei due soggetti T_x e T_y si arriva al risultato: $E\overline{x,y}_h = v^h * (p_{x,h} + p_{y,h} - p_{x,h} * p_{y,h})$

Dove "gli eventi di un insieme finito sono stocasticamente indipendenti se la probabilità del prodotto di qualsiasi parte di essi si fattorizza"[22]

Definito in termini matematici: "Siano $E, E_1, \dots\dots, E_n$ eventi. Diremo che E è stocasticamente indipendente da $E_1, \dots\dots, E_n$ se e solo se $P(E|\omega) = P(E)\; per\; ogni\;\; \omega \epsilon \mathbb{P}_G^{\emptyset}(E_1, \dots\dots, E_n)$. Ovvero, se e solo se la probabilità su $\{E\} \cup \{E|\omega\text{: } \omega \epsilon \mathbb{P}_G^{\emptyset}(E_1, \dots\dots, E_n\}$ è costante".[23]

Un esempio di tale relazione dati due eventi E e H: $P(E|H) = (P|\bar{H}) = P(E)$.

[22] Crisma L., Indipendenza stocastica senza paradossi, Convegno Economia e Incertezza (23 Ottobre 2009), pag 121, 2010.

[23] Crisma L., Indipendenza stocastica senza paradossi, Convegno Economia e Incertezza (23 Ottobre 2009), pag 122, 2010

Per calcolare tale valore $p_{x,h} * p_{y,h}$ avendo introdotto i concetti di indipendenza stocastica e egual distribuzione delle funzioni di durata residua di vita delle due teste, dobbiamo esprimere tale concetto in base alla funzione di durata di vita dalla nascita:

$$S_{\overline{x,y}}(h) = Pr\{ T_{\overline{x,y}} > h\} = Pr\{T_x > h \vee T_y > h \} = p_{x,h} + p_{y,h} - p_{x,h} * p_{y,h}$$
$$= \frac{S(x+h)}{S(x)} + \frac{S(y+h)}{S(y)} - S_{x,y}(h)$$

Per $S_{x,y}(h)$ si intende la funzione di sopravvivenza legata alla sopravvivenza congiunta delle teste *x-y* fino alla data *h*. Questa si collega al primo caso, ovvero quello dell'assicurazione di capitale differito in caso di sopravvivenza di entrambi gli assicurati.

In tale contratto il versamento delle rate si estingue nel momento del primo decesso e quindi la durata aleatoria di vita del gruppo viene definita come $T_{x,y} = \min(T_x, T_y)$.

La funzione di sopravvivenza relativa invece si calcola come

$S_{x,y}(h) = Pr\{T_{x,y} > h\} = Pr\{T_x > h \ \wedge \ T_y > h\}$.

Questa è espressa rispetto alle durate di vita dalla nascita.

Secondariamente considereremo l'ipotesi fondamentale che queste siano stocasticamente indipendenti ed egualmente distribuite, indicando le due funzioni con $T_0^x \ e \ T_0^y$ otteniamo tale relazione:

$$S_{x,y}(h) = Pr\{T_0^x > x + h \wedge \ T_0^y > y + h \mid T_0^x > h \ \wedge \ T_0^y > h\} = \frac{Pr\{T_0^x > x + h \wedge \ T_0^y > y + h\}}{Pr\{T_0^x > x \ \wedge \ T_0^y > y\}}$$

Applicando le ipotesi fondamentali sopra esposta si arriva alla seguente uguaglianza:

$$S_{x,y}(h) = \frac{Pr\{T_0^x > x + h\} * Pr\{ \ T_0^y > y + h\}}{Pr\{T_0^x > x\} * Pr\{T_0^y > y\}} = \frac{S(x+h)}{S(x)} * \frac{S(y+h)}{S(y)} = p_{x,h} * p_{y,h}$$

Quindi in tal tipo di assicurazione, l'assicuratore promette un pagamento di capitale, che noi per semplificazione consideriamo unitario, se entrambe le persone superano in vita il periodo h.

Il valore attuale aleatorio di tale contratto si esprime come:

$$Y = \begin{cases} v^h \ \ se \ T_{x,y} > h \\ \qquad 0 \end{cases}$$

Il suo valore attuariale considerando le ipotesi enunciate precedentemente si esprime come:

$$E(Y) = v^h * Pr\{T_{x,y} > h\} = v^h * p_{x,h} * p_{y,h}$$

Il terzo modello è particolare in quanto riguarda il pagamento di un importo unitario nel caso che, in una epoca n, la prima testa (z) sia deceduta mentre la testa (w) sia ancora in vita.

Esso è differente sia dal punto di vista delle assicurazioni in quanto si compone di un'assicurazione in caso di morte per la testa z e in caso di vita per la testa w.

Infatti nel comporre la formula, a differenza dei casi precedenti, si porranno le condizioni che rispettivamente la funzione che esprime la durata della vita di *z* assuma come input valori minori dell'epoca *n*, mentre per *w* assuma valori maggiori.

Il valore attuariale aleatorio di tale prestazione può essere espresso come:

$$Y = \begin{cases} v^n \ se \ (T_z \leq n) \wedge (T_w > n) \\ 0 \end{cases}$$

La relazione per il calcolo del valore attuariale così come per i modelli precedenti si trova dalle ipotesi già enunciate (indipendenza stocastica in generale ed in particolare indipendenza stocastica delle variabili aleatorie relative alla durata di vita residua dei due individui)

Il valore attuariale delle prestazioni in essere, nominato $E_{x|y,n} = v^n * \left(1 - p_{x,n}\right) * p_{y,n}$.

Definiti tali modelli base poi è possibile studiare le varie rendite vitalizie in base al principio di composizione. Inizialmente li applicheremo a casi con due persone assicurate che in un secondo momento generalizzeremo in base al gruppo.

Tutti i casi di rendita vitalizia su due persone possono essere risolti mediante la formula che riguarda la cosiddetta rendita reversibile, su due teste. Tale tipologia di rendita è articolata in modo tale che l'assicuratore garantisca una rata unitaria finchè entrambi gli assicurati sono vivi. Nel caso che sia vivo invece solo il primo assicurato, che chiamiamo *x*, corrisponde una rata di importo α, invece se sopravvive solo la seconda persona, che nominiamo *y*, garantisce una rata di importo pari a β. Alpha e beta prendono nome di aliquote di reversibilità.

La formula generale nel caso sia posticipata risulta questa:

$$a_{\underset{x,y}{\underline{[\alpha,\beta]}}} = \alpha * a_x + \beta * a_y + (1 - \alpha - \beta) * a_{x,y}$$

Dove il valore attuariale $a_{x,y} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t * p_{x,t} * p_{y,t}$

Ricordiamo che teoricamente la sommatoria va fino a $+\infty$ ma nelle applicazioni pratiche dovendo fare un'approssimazione noi consideriamo un'età massima chiamata ω oltre la quale l'individuo non sopravvive per definizione.

Dalla formula generale cambiando i coefficienti troviamo i vari modelli assicurativi:

- Nel caso che i due coefficienti siano uguali a zero, l'assicurato firma un contratto di rendita vitalizia valido sino al primo decesso e si indica come $a_{x,y}$ e assume il valore dell'equazione scritta sopra.
- Se i due coefficienti sono unitari, invece la rendita si dice totalmente reversibile, ovvero la rendita viene garantita fino all'ultimo decesso e il suo valore attuariale, che si indica $a_{\overline{x,y}}$si calcola come:

$$a_{\overline{x,y}} = a_x + a_y - a_{x,y}$$

- Negli altri casi invece la rendita si dice reversibile, solitamente $\beta \leq \alpha \leq 1$, un caso particolare si ha quando $\alpha = 1 \; e \; \beta < 1$ (potrebbe essere anche viceversa) e quindi viene considerata la testa con coefficiente di reversibilità unitario principale rispetto all'altra in quanto in caso sopravviva solo la testa *y* la rata che sarà corrisposta presenterà un ammontare inferiore.

Tutti questi casi di rendite vitalizie possono essere trattati anche cambiando la competenza della operazione finanziaria e rendendole anticipate, oltre che differite o introducendo altre varianti. Per fare questo passaggio logico, come si può notare nei calcoli dei valori attuariali nei casi di assicurazioni su un'unica testa esplicati precedentemente, basta far iniziare la sommatoria dal termine *0* e non dal termine uno. Questo perché la rata viene pagata all'inizio dell'epoca e non alla fine dell'epoca (quindi termine *1*). Nel caso di una rendita anticipata la prima rata da ricevere quindi sarà unitaria.

Come si è potuto riscontrare "i valori attuariali delle prestazioni assicurative su gruppi di due teste non estinguentisi al primo decesso sono esprimibili come combinazioni lineari di valori attuariali di prestazioni su gruppi estinguentisi al primo decesso, cioè in particolare su singole teste o su gruppi di due teste estinguentisi al primo decesso". Si può svolgere il medesimo ragionamento quando si analizza la cosiddetta "rendita di sopravvivenza" su un determinato gruppo, che noi ipotizziamo come famigliare.

In relazione a un gruppo di *r* teste, con età al momento di stipulazione del contratto pari a $x_1, x_2, \dots, x_r$, ponendo l'ipotesi di uguale distribuzione tra le variabili aleatorie e d'indipendenza stocastica tra esse si può calcolare il valore attuariale di un capitale differito in caso di sopravvivenza del gruppo in analisi come:

$$E\left(Y_{r,n}\right) = v^n * \prod_{j=1}^{r} p_{x(j),n}$$

Nel caso di una rendita posticipata, immediata, temporanea pagata finchè siano in vita tutte le teste si ha

$$a_{x1,x2\dots\dots xr,\omega} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t * p_{x1,t} * p_{x2,t} * \dots * p_{xr,t}$$

Se consideriamo il premio unico, ma può essere svolto anche nel caso di premio frazionato avvalendosi di ciò che è stato analizzato precedentemente, esso può essere esplicitato come combinazione lineare dei valori attuariali di rendite estinguendosi al primo decesso.

Per dimostrare tale affermazione ci avvalliamo di un caso pratico che sarà poi ripreso successivamente in Python, studiamo la rendita vitalizia su un gruppo.

Affrontiamo quindi un particolare caso pratico di rendita vitalizia su un gruppo famigliare composto da 4 persone, per semplificazione tratteremo il caso nel quale la competenza della rata è alla fine del periodo considerato e il pagamento è immediato con un premio unico.

In questo contratto indichiamo con x l'assicurato principale, in quanto tale definiamo che finchè resterà in vita sarà garantito il pagamento totale della rendita. Gli altri soggetti sono: il coniuge (y) e due figli (z e w). Nel caso che resti vivo solo una delle teste che non sia l'associato la compagnia assicurativa garantirà solo il 60% di remunerazione della rata. Invece nel caso che siano vive tutte le 3 persone anche se l'assicurato è morto i famigliari saranno comunque remunerati totalmente.

Inoltre ipotizziamo che la rendita sia garantita all'80% nei casi che rimangano in vita solo i 2 figli o il coniuge e 1 figlio.

Questi coefficienti che noi abbiamo ipotizzato poi potranno essere cambiati facilmente, li imponiamo solo in questo modo per rendere il sistema comprendibile.

Il premio unico, U, quindi espresso come combinazione lineare dei valori attuariali di rendite su gruppi estinguendosi al primo decesso risulta essere pari a:

$$U = c_1 a_x + c_2 a_y + c_3 a_z + c_4 a_w + c_5 a_{x,y} + c_6 a_{x,z} + c_7 a_{x,w} + c_8 a_{y,z} + c_9 a_{y,w} + c_{10} a_{z,w} + c_{11} a_{x,y,z} + c_{12} a_{x,y,w} + c_{13} a_{x,z,w} + c_{14} a_{y,z,w} + c_{15} a_{x,y,z,w}$$

Per determinare i coefficienti dell'equazione occorre conoscere che tipo di pagamento verrà versato nel determinato evento al quale si riferiscono i vari fattori. Ad esempio, nel caso che sia in vita solo y considereremo solo il fattore $c_2 a_y$ e quindi il coefficiente c_2 secondo il tasso di interesse (i) dato che abbiamo posto precedentemente deve avere un pagamento del 60% quindi considerando ad esempio la rata unitaria porremmo il coefficiente uguale a 0.6.

Per trovare tutti i coefficienti quindi avendo alcuni dati noti occorre impostare un sistema. In questo caso il sistema sarà il seguente:

$c_1 = 1$ in quanto se sarà in vita solo x riceveremo l'intero importo della rata

$c_2 = 0.6$ in quanto se sarà in vita solo y riceveremo il 60% della rata.

$c_3 = 0.6$ in quanto se sarà in vita solo z riceveremo il 60% della rata.

$c_4 = 0.6$ in quanto se sarà in vita solo w riceveremo il 60% della rata.

$c_1 + c_2 + c_5 = 1$ questo caso si avvera quando rimangono in vita solo x e y

$c_1 + c_3 + c_6 = 1$ questo caso si avvera quando rimangono in vita solo x e z

$c_1 + c_4 + c_7 = 1$ questo caso si avvera quando rimangono in vita solo x e w

$c_2 + c_3 + c_8 = 0.8$ in quanto nel caso di sopravvivenza del coniuge e z riceveremo solo l'80% della rata

$c_2 + c_4 + c_9 = 0.8$ in quanto nel caso di sopravvivenza di y e w riceveremo solo l'80% della rata

$c_3 + c_4 + c_{10} = 0.8$ in quanto nel caso di sopravvivenza dei soli due figli riceveremo solo l'80% della rata

$c_1 + c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + c_8 + c_{11} = 1$ la rata che verrà versata sarà intera in questo caso, dove sono vivi x-y-z perché x è ancora vivo

$c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_7 + c_9 + c_{12} = 1$ In vita x-y-w

$c_1 + c_3 + c_4 + c_6 + c_7 + c_{10} + c_{13} = 1$ In vita x-z-w

$c_2 + c_3 + c_4 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{14} = 1$ In vita y-z-w

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} = 1$ In vita x-y-z-w

Impostando questo sistema di equazioni lineari riusciamo a ricavare tutti i valori dei coefficienti ottenendo i seguenti risultati:

- Per i coefficienti da 5 a 7 : -0.6
- Per i coefficienti da 8 a 10: -0.4
- Per i coefficienti da 11 a 14: +0.4
- Per l'ultimo coefficiente: -0,4

Questi risultati presentano molti valori comuni in quanto abbiamo richiesto rendite comuni per differenti casistiche di sopravvivenza delle diverse teste.

Quarto capitolo: Applicazioni in Python di alcuni casi di rendite vitalizie

Python è un linguaggio di programmazione che nasce in Olanda, creato da Guido Van Rossum ufficialmente nel febbraio del 1991.
Precede di sei mesi la nascita ufficiale del sistema operativo Linux presentato al mondo nell'agosto dello stesso anno dal finlandese Linus Thorvalds.

Questi due progetti caratterizzeranno la storia della informatica degli anni successivi, non solo per le novità che portano al loro interno, ma per un nuovo modo di sviluppare software basato sull'uniformare i quotidiani piccoli contributi di tantissimi prgrammatori sparsi in tutto il mondo: la community.
Sono anni in cui Microsoft sta varando progetti sempre più ambiziosi: prima windows NT seguito dopo poco da windows 95 che incontreranno un soccesso in termin i di licenze che darà in quegli anni alla azienda di Bill Gates un quasi monopolio che non aveva mai avuto prima e non risucirà a mantenere in maniera così assoluta per troppo tempo.

Il mondo open source in contrapposizione a queste vere e propie "cattedrali informatiche" caratterizzate da dimensioni sempre più ipertrofiche in termini di codice sottostante, propongono lo sviluppo "a bazar" per richiamare una attività composta da tanti piccoli artigiani che insieme e solo insieme producono qualcosa di grande.

E da subito il python per le sue caratteristiche si propone come attore protagonista di questa svolta.
Dal punto di vista tecnico è un linguaggio interpretato (e non compilato come C/C++, C# o Java) che si pone come una evoluzione di un linguaggio di scripting.
Per sua natura quindi non raggiungerà mai le velocità di esecuzione ottenibili dopo una vera e propria compilazione, ma sulle macchine di oggi decisamente più potenti di quelle di quegli anni è in grado di svolgere i suoi compiti in quasi ogni ambito: dalla gestione di centri dati alla analisi grafica, dalla intelligenza artificiale allo sviuppo di raffinati algoritmi numerici. Basta dire che è il linguaggio di elezione di Google per sviluppare tutto quello che non richieda scelta specialistiche.

Viene da subito distribuito "batteries included" in modo che possa svolgere senza aggiunte la stragrande maggioranza dei lavori cui viene dedicato, ma possiede anche un sofisticato sistema di "moduli" esterni facilmente aggiungibili al codice base (https://pypi.org/). Ed è qui che si è concentrato per anni lo sforzo della comunità che ha prodotto vere e proprie "suite" informatiche: basti pensare a NumPy per gli algoritmi numerici, OpenCv per la computer graghics o scikit per l'intelligenza artificiale e l'analisi del linguaggio.
Ad oggi in tutti questi, ed altri settori Python si propone come prima scelta per chi vuole affrontarli professionalmente.

Permette una programmazione funzionale come i moderni Haskell o Erlang insieme ad un classico approccio Object Oriented.
Lo si trova in numerosissimi sistemi operativi (oltre alle classiche versioni per Windows e Linux/Apple) e negli ultimi anni in numerosi dispositivi erodendo il monopolio di Java su tutto quello che è molto più piccolo di un pc.
La curva di apprendimento non troppo impegnativa e la natura open source lo consigliano come primo linguaggio in numerose scuole o università.
Il suo approccio alla programmazione (the Zen of Python) è presente in ogni installazione ottenibile con l'istruzione
import this

ed è formato dagl ormai classici 19 punti:

Beautiful is better than ugly.
Explicit is better than implicit.
Simple is better than complex.
Complex is better than complicated.
Flat is better than nested.
Sparse is better than dense.
Readability counts.
Special cases aren't special enough to break the rules.
Although practicality beats purity.
Errors should never pass silently.
Unless explicitly silenced.
In the face of ambiguity, refuse the temptation to guess.
There should be one—and preferably only one—obvious way to do it.
Although that way may not be obvious at first unless you're Dutch.
Now is better than never.
Although never is often better than right now.[a]
If the implementation is hard to explain, it's a bad idea.
If the implementation is easy to explain, it may be a good idea.
Namespaces are one honking great idea—let's do more of those!

I codici che listerò nel seguito: richiedono all'utente di inserire tra gli altri età e tasso di interesse. Restituiscono il valore attuale della rendita vitalizia utilizzando le probabilità di sopravvivenza ricavate dalla tavola di mortalità dell'Istat, che hanno come limite superiore i 120 anni. Per semplificazione considereremo sempre le rate unitarie e applicheremo la formula di Halley.

Come primo caso ho analizzato una rendita vitalizia su una testa, dove viene richiesto all'utente: l'età, il tasso di interesse, la competenza della rata e l'eventuale periodo di differimento. Il programma restituisce il valore attuale della rendita considerando un orizzonte temporale esteso fino a 120 anni.

```
from pathlib import Path
#l'utente inserisce gli input
if __name__ == '__main__':
    età = int(input('età:'))
    tasso = float(input('tasso:'))
    competenza= input("competenza della rata: (anticipata/posticipata)")
    file_csv = Path("./tabella probabilità di sopravvivenza.csv")
    differimento= int(input('inserisci periodo di differimento:'))
    anni2prob = {}
    accumulo_differimento=0

#il programma carica le probabilità dal file Istat
    with file_csv.open() as si:
        for line in si.readlines():
            line = line.strip()
            vett = line.split(';')
            if len(vett) != 2:
                continue
            try:
                eta_loc = int(vett[0])
            except:
                continue
            anni2prob[eta_loc] = float(vett[1].replace(',', '.'))

#calcolo del valore attuale nel caso che sia posticipata
    if competenza == "posticipata":
        accumulo = 0
        for i in range(età + 1, 121):
            incremento = i - età
            value= 1 / ((1 + tasso) ** (incremento))
            for j in range(età, i):
                value *= anni2prob[j]
            accumulo += value
#calcolo nel caso che sia posticipata e differita
        if differimento!= 0:
            accumulo_differimento = 0
            for i in range(età + 1, età+differimento+1):
                incremento = i - età
                value = 1 / ((1 + tasso) ** (incremento))
                for j in range(età, i):
                    value *= anni2prob[j]
                accumulo_differimento += value
```

```
#calcolo del valore attuale nel caso sia anticipata
    elif competenza == "anticipata":
         accumulo = 0
         for i in range(età + 1, 120):
             incremento = i - età
             value = 1 / ((1 + tasso) ** (incremento))
             for j in range(età, i):
                 value *= anni2prob[j]
             accumulo += value
         accumulo+= 1

#calcolo nel caso che sia anticipata e differita
         if differimento!= 0:
            accumulo_differimento = 0
            for i in range(età + 1, età+differimento):
                incremento = i - età
                value = 1 / ((1 + tasso) ** (incremento))
                for j in range(età, i):
                    value *= anni2prob[j]
                accumulo_differimento += value
                print((value, accumulo_differimento))
                print()
            accumulo_differimento += 1

    va= accumulo - accumulo_differimento

    print(f"valore attuale: {va:.6f}")   #stampa valore attuale
```

Secondariamente ho analizzato il caso di una rendita vitalizia immediata, posticipata, su due teste con i coefficienti di reversibilità che vengono dati dall'utente. Gli altri dati che vengono introdotti dall'utente sono l'età degli assicurati e il tasso di interesse. Il valore che restituisce il programma è il valore attuale di tale operazione finanziaria.

```
import sys

from pprint import pprint
from pathlib import Path

 #viene chiesto all'utente di inserire: tasso,premio, età, coefficienti di reversibiltà

if __name__ == '__main__':
    names = [
        "assicurato uno",
        "assicurato due",
    ]
    TASSO = float(input('tasso: '))
    ETA = []
    for i in range(0, 2):
        ETA.append(int(input(f'eta {names[i]}: ')))
    alpha = float(input(f'coefficente alpha: '))
    beta = float(input(f'coefficente beta: '))
```

```
#il programma carica    le probabilità di sopravvivenza dal file Istat
file_csv = Path("./tabella probabilità di sopravvivenza.csv")
anni2prob = {}

with file_csv.open()  as si:
    for line in si.readlines():
        line = line.strip()
        vett = line.split(';')
        if len(vett) != 2:
            continue
        try:
            eta_loc = int(vett[0])
        except:
            continue
        anni2prob[eta_loc] = float(vett[1].replace(',', '.'))

# vivi entrambi quindi calcolo a_{x,y}
sommatoria_entrambi = 0
eta_max = max(ETA)
for i in range(eta_max + 1, 121):
    incremento = i - eta_max
    v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
    value = v
    for j in range(0, incremento):
        value *= anni2prob[ETA[0] + j]
        value *= anni2prob[ETA[1] + j]
    sommatoria_entrambi += value


# singoli
accumulo = [0 for i in range(0, 2)]
for i in range(1, 121):
    for p in range(0, 2):
        if ETA[p] >= i:
            continue

        incremento = i - ETA[p]
        v = 1 / ((1 + TASSO) ** (incremento))

        value = v
        for j in range(ETA[p], i):
            value *= anni2prob[j]
        accumulo[p] += value

res = (alpha * accumulo[0] + beta * accumulo[1]
     + (1 - alpha - beta)* sommatoria_entrambi)

print(f"risultati: {res}") #stampa il valore attuale
```

L'ultimo codice che vogliamo mostrare tratta il caso di una rendita vitalizia immediata, posticipata su un gruppo famigliare composto da: assicurato(x), coniuge(y), primo figlio(z), secondo figlio(w).
Questo altro non è che l'applicazione dell'esempio mostrato nel terzo capitolo.
L'utente inserisce le età dei vari assicurati e il tasso di interesse. Inoltre viene richiesto il valore che si vuole garantire al beneficiario nei vari casi di sopravvivenza del gruppo, questi numeri vengono chiamati coefficienti. L'ultimo valore che viene richiesto all'utente è per quanti anni vuole garantire la rendita nel caso che siano vivi solo i due figli oppure uno solo di loro. Questo particolare richiesta è molto frequente nei casi pratici. Il valore che restituisce il programma è il valore attuale della rendita.

```
import sys
from pprint import pprint
from pathlib import Path


def carica_anni2prob(file_csv):
    anni2prob = {}
    with file_csv.open() as si:
        for line in si.readlines():
            line = line.strip()
            vett = line.split(';')
            if len(vett) != 2:
                continue
            try:
                eta_loc = int(vett[0])
            except:
                continue
            anni2prob[eta_loc] = float(vett[1].replace(',', '.'))
    return anni2prob



# calcolo dei coefficienti
def calcola_coefficenti(coeff, cy_piu_1, cz_w, cy_piu_2):
    coeff.append(1 - coeff[0] - coeff[1])
    coeff.append(1 - coeff[0]  - coeff[2])
    coeff.append(1 - coeff[0] - coeff[3])

    coeff.append(cy_piu_1 - coeff[2] - coeff[1])
    coeff.append(cy_piu_1 - coeff[3] - coeff[1])
    coeff.append(cz_w - coeff[3] - coeff[2])

    coeff.append(1 - coeff[0] - coeff[1] - coeff[2] - coeff[4] - coeff[5] - coeff[7])
    coeff.append(1 - coeff[0] - coeff[1] - coeff[3] - coeff[4] - coeff[6] - coeff[8])
    coeff.append(1 - coeff[0] - coeff[2] - coeff[3] - coeff[5] - coeff[6] - coeff[9])

    coeff.append(cy_piu_2 - coeff[1] - coeff[2] - coeff[3] - coeff[7] - coeff[8] -
coeff[9])

    coeff.append(1 - sum(coeff[0:14]))

    return coeff
```

```
#vengono chiesti all'utente i vari dati della rendita
if __name__ == '__main__':
        "assicurato",
        "coniuge",
        "figlio uno",
        "figlio due"
    ]
    TASSO = float(input('tasso:'))
    ETA = []
    coeff=[]
    for i in range(0, 4):
        ETA.append(int(input(f'età {names[i]}:')))
    for c in ["x","y","z","w"]:
        coeff.append(float(input(f"coefficiente di reversibilità {c}:")))
    cy_piu_1 = float(input("coefficiente coniuge più un figlio:"))
    cz_w = float(input("coefficiente due figli:"))
    cy_piu_2 = float(input("coefficiente coniuge più due figli:"))
    garantefigli=int(input("quanti anni vuoi garantire il
    pagamento della rendita nel caso di sopravvivenza solo dei
    due figli o di uno di loro?:"))
    anni2prob = carica_anni2prob(Path('./tabella probabilità di sopravvivenza.csv'))

    somme = {}
    # quattro vivi
    eta_max = max(ETA)
    somme['xyzw'] = 0
    for i in range(eta_max + 1, 121):
        incremento = i - eta_max
        v = 1 / ((1 + TASSO) ** (incremento))
        value = v
        for p in range(0, 4):
            for j in range(0, incremento):
                value *= anni2prob[ETA[p] + j]
        somme['xyzw'] += value
    # due vivi insieme assicurato
    slot = [[1, 2], [1, 3], [2, 3]]
    for enne, (p1, p2) in enumerate(slot):
        somma = 0
        eta_max = max([ETA[0], ETA[p1], ETA[p2]])
        for i in range(eta_max + 1, 121):
            incremento = i - eta_max
            v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
            value = v
            for j in range(0, incremento):
                value *= anni2prob[ETA[0] + j]
                value *= anni2prob[ETA[p1] + j]
                value *= anni2prob[ETA[p2] + j]
            somma += value
        if enne == 0:
            somme['xyz'] = somma
        elif enne == 1:
            somme['xyw'] = somma
        elif enne == 2:
            somme['xzw'] = somma
```

```
# uno vivo insieme assicurato
   for enne, p1 in enumerate(range(1, 4)):
       somma = 0
       eta_max = max(ETA[0], ETA[p1])
       for i in range(eta_max + 1, 121):
           incremento = i - eta_max
           v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
           value = v
           for j in range(0, incremento):
               value *= anni2prob[ETA[0] + j]
               value *= anni2prob[ETA[p1] + j]
           somma += value
       if enne == 0:
           somme['xy'] = somma
       elif enne == 1:
           somme['xz'] = somma
       elif enne == 2:
           somme['xw'] = somma

# uno vivo insieme coniuge
   for enne, p1 in enumerate(range(2, 4)):
       somma = 0
       eta_max = max(ETA[1], ETA[p1])
       for i in range(eta_max + 1, 121):
           incremento = i - eta_max
           v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
           value = v
           for j in range(0, incremento):
               value *= anni2prob[ETA[1] + j]
               value *= anni2prob[ETA[p1] + j]
           somma += value
       if enne == 0:
           somme['yz'] = somma
       else:
           somme['yw'] = somma

   # due vivi insieme coniuge
   somma = 0
   eta_max = ETA[1]
   for i in range(eta_max + 1, 121):
       incremento = i - eta_max
       v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
       value = v
       for j in range(0, incremento):
           value *= anni2prob[ETA[1] + j]
           value *= anni2prob[ETA[2] + j]
           value *= anni2prob[ETA[3] + j]
       somma += value
   somme['yzw'] = somma
```

```
# due figli
somma = 0
eta_max = max(ETA[2], ETA[3])
for i in range(eta_max + 1, eta_max+1+garantefigli):
    incremento = i - eta_max
    v = 1 / ((1 + TASSO) ** (i - eta_max))
    value = v
    for j in range(0, incremento):
        value *= anni2prob[ETA[2] + j]
        value *= anni2prob[ETA[3] + j]
    somma += value
somme['zw'] = somma

# singoli
for enne, p in enumerate(range(0, 2)):
    somma = 0
    for i in range(1, 121):
        if ETA[p] >= i:
            continue

        incremento = i - ETA[p]
        v = 1 / ((1 + TASSO) ** (incremento))

        value = v
        for j in range(ETA[p], i):
            value *= anni2prob[j]
        somma += value

    if enne == 0:
        somme['x'] = somma
    elif enne == 1:
        somme['y'] = somma
# z
accumuloz= 0
for i in range(ETA[2] + 1, ETA[2]+1+garantefigli):
    incremento = i - ETA[2]
    value = 1 / ((1 + TASSO) ** (incremento))
    for j in range(ETA[2], i):
        value *= anni2prob[j]
    accumuloz += value
# w
accumulow = 0
for i in range(ETA[3] + 1,ETA[3]+1+garantefigli):
    incremento = i - ETA[3]
    value = 1 / ((1 + TASSO) ** (incremento))
    for j in range(ETA[3], i):
        value *= anni2prob[j]
    accumulow += value
```

```
coeff= calcola_coefficenti(coeff, cy_piu_1, cz_w, cy_piu_2)

valore_attuale= (coeff[0]*somme['x'] +
                 coeff[1]*somme['y'] +
                 coeff[2] * accumuloz +
                 coeff[3] * accumulow +
                 coeff[4] * somme['xy'] +
                 coeff[5] * somme['xz'] +
                 coeff[6]*somme['xw']+
                 coeff[7]*somme['yz']+
                 coeff[8] * somme['yw'] +
                 coeff[9] * somme['zw'] +
                 coeff[10] * somme['xyz'] +
                 coeff[11] * somme['xyw'] +
                 coeff[12] * somme['xzw'] +
                 coeff[13] * somme['yzw'] +
                 coeff[14]*somme['xyzw'])

print(valore_attuale) #stampa del valore attuale
```

Conclusione

L’argomento che ho trattato nella tesi risulta molto attuale in quanto negli ultimi decenni si è decisamente allungata l’aspettativa di vita e quindi diventeranno sempre più importanti quegli strumenti finanziari che permettano di garantire un’alta qualità di vita in una età in cui le entrate saranno sempre più ridotte.
A maggior ragione se andremo incontro a tagli sempre più significativi del sistema pensionistico che porteranno ad una maggiore attenzione a strumenti finanziari sostitutivi e/o integrativi.
Un ruolo centrale dovrà essere svolto dal governo in questa transazione compiendo azioni quali: tramite un’opportuna politica fiscale incentivare l’uso di tali operazioni finanziarie, creare appositi specifici database con dati aggiornati sull’andamento della mortalità del paese, porre in essere una legislazione che obblighi a una maggiore trasparenza da parte delle assicurazioni ed informare i pensionati consapevolizzandoli sulla durata media di vita odierna.
Una frase nota di Oscar Wild riassume il senso di responsabilità che deve essere trasmesso alle generazioni future: “E’ meglio avere un reddito duraturo piuttosto che avere fascino”.

Le formule che abbiamo trattato pur risalendo alla seconda metà del ‘600 sono ancora attuali in quanto rappresentano le basi del calcolo del valore attuariale in una rendita vitalizia. Negli ultimi decenni sono state mosse critiche a questi modelli: il professor Grasso, docente di Matematica Attuariale alla Sapienza e noto attuario, nel rapporto tecnico stilato nel 2012 denominato “Modelli e strumenti di calcolo attuariale per la previdenza” esprime dubbi sulla applicabilità concreta ai giorni nostri di tali teorie. ”Sono emerse nuove esigenze di calcolo e di valutazioni attuariali, anche connesse a profili non appartenenti alla tradizione della modellistica attuariale in campo previdenziale (ad esempio la solvibilità di un fondo pensione). La matematica e la tecnica attuariale, fermi restando alcuni fondamentali e consolidati principi di calcolo, non possono ignorare la necessità di innovazione modellistica”.

Ma le critiche non provengono solo dalla letteratura attuariale: il limitarsi ad una applicazione strettamente classica di questi concetti ha sicuramente portato nel 2000 ad una grossa crisi la compagnia assicuratrice inglese “Equitable Life Assurance Society”. Ciò è sfocato nell’utilizzo di un altro approccio denominato “Risk Management”, questo non si distacca completamente dalle base fornite dai modelli classici ma pone un insieme di traiettorie che l’assicuratore deve attraversare nel momento che stipula un contratto legato ad una rendita vitalizia.
I detrattori dell’uso esclusivo delle formule classiche mettono in dubbio alcune caratteristiche alla base del modello attuariale, in particolare il fatto che sia deterministico e statico.

Deterministico in quanto le probabilità di sopravvivenza sono utilizzate solamente per calcolare i valori attesi, quindi il rischio di mortalità è determinato solo mediante il calcolo del valore attuariale eventualmente con un caricamento di sicurezza favorevole all'assicuratore. Si può evidenziare però che è assente una qualsiasi misura del rischio di mortalità (ad esempio la varianza del valore attuale aleatorio della prestazione assicurata). Quando misuriamo determinati dati relativi alla mortalità incorriamo in due rischi originatosi da due casi: scarti accidentali della mortalità, scarti sistematici della mortalità.
Il primo tipo può essere diversificato al crescere delle polizze presenti nel portafoglio dell'assicurazione e quindi teoricamente può giustificare l'utilizzo di un approccio deterministico.
Il secondo invece non è diversificabile ed è soprattutto legato al rischio che è di odierno approfondimento chiamato "longevity risk" ovvero l'incertezza che è presente nell'assunzione di una probabile trend di mortalità futuro e quindi causa di probabili scarti sistematici.
Per risolvere questo problema ci si è avvalsi di modelli stocastici per calcolare nel modo più preciso possibile questo rischio ed inoltre sono state richiesti dal legislatore grandi requisiti patrimoniali per protezione come ad esempio Solvency II che è la normativa di riferimento assicurativo in Europa.

L'altro aspetto che è stato molto contestato riguarda la staticità delle formule classiche, questo si evince nell'utilizzo delle probabilità di sopravvivenza (o di morte) estrapolate dalle tavole di mortalità che si basano sull'ipotesi di una mortalità statica che è in contrasto con l'evidenza recente di un miglioramento della durata di vita media della popolazione. Questo nel caso pratico implica una sottovalutazione del costo di una rendita vitalizia da parte dell'assicuratore che può incorrere quindi in un intaccamento del patrimonio netto dell'azienda e una conseguente situazione di crisi.
Per risolvere ciò nel calcolare le probabilità necessarie per quantificare il valore attuariale dei flussi futuri di cassa si propone di avvalersi di cosiddette "tavole di mortalità proiettate", nelle quali la stima della percentuale di sopravvissuti in un dato campione futuro viene fatta proiettando il trend di mortalità osservato in un periodo passato nel futuro. Per compiere ciò ci si avvale di teorie molto complesse basate soprattutto su stime puntuali ed intervallari di varie funzioni biometriche, un metodo importante riguardante questo processo è quello di Lee-Carter.

Recentemente quindi si è passati al processo di cosiddetto "Risk Management" (o RM) esso viene implementato in ambito assicurativo, è dettato da un insieme di materie (quali finanza aziendale, contabilità ec..) e "costituisce un insieme di linee guida per una reinterpretazione, formale ed operativa, del processo assicurativo e ri-assicurativo"[24]. Il processo si articola in quattro passaggi: identificazione dei rischi, quantificazione dei rischi, analisi delle azioni disponibili, scelta delle azioni, monitoraggio.

[24] Pitacco E., "Rendite vitalizie: tra vecchie formule e nuovi scenari", pag.145

Bibliografia

- Olivieri G. AA.VV. Elementi di matematica finanziaria, Pearson Italia, Milano, Torino, 2018.

- Pitacco E. Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata della vita, Lint, Trieste, 2009.

- Bortot P., Olivieri G., AA.VV. Matematica finanziaria, Monduzzi editore, 1998 (2° edizione).

- Monti A. C. Introduzione alla statistica, Edizioni Scientifiche, 2008 (2° edizione).

- Crisma L., Indipendenza stocastica senza paradossi, Convegno Economia e Incertezza (23 Ottobre 2009),2010.

- Pitacco E., "Rendite vitalizie: tra vecchie formule e nuovi scenari", in "Convegno di studi su Economia e Incertezza, Trieste, 23 ottobre 2009", Trieste, EUT Edizioni Università di Trieste, 2010, pp. 137-155.

- Mitchell O., Il valore delle rendite, Relazione in occasione del conferimento (ex aequo con Elsa Fornero) del premio INA per gli studi in materia assicurativa, da parte dell'Accademia Nazionale dei Lincei (3 marzo 2004).

- Grasso F., Modelli e strumenti di calcolo attuariale per la previdenza, Rapporto tecnico 2012 n 26.