Dipartimento di Economia e Finanza *Materia: Teoria e Gestione di Portafoglio*

"Gestione di un portafoglio *fixed income*"

Relatore

Prof. Nicola Borri

Candidato

Vittorio Cela 694671

Anno Accademico

2019/2020

INDICE

Introduzione……………………………………………………3

1- **Caratteristiche e tipologie dei titoli fixed-income**..……..5

2- **Funzionamento del mercato obbligazionario**...………...11

3- **I Benchmark di tasso**…………………….………………16

3.1 Riforma EURIBOR

3.2 Il tasso EONIA

3.3 EONIA review

4- **Analisi della curva dei rendimenti**……………………….28

5- **Applicazione Pratica**……….……………………………..31

5.1 Duration di un bond

5.2 Approssimazione di taylor e convexity di un bond

5.3 Duration e convexity di portafoglio

5.4 Limiti della duration

5.5 Bond Swaps

5.6 Burbell strategy

5.7 Simulazioni Monetcarlo

5.8 Il modello

5.9 Limiti della barbell Strategy

5.10 Hedging tramite future

5.11 Cenni sulla duration-based hedge ratio

INTRODUZIONE

Il reddito fisso è un approccio di investmento incentrato sulla conservazione del capitale e del reddito. Tipicamente include investmenti come obbligazioni governative e societarie e fondi del mercato monetario e può offrire un flusso costante di reddito con un rischio inferiore rispetto alle azioni.

Per la maggior parte degli investitori, siano essi istituzionali o retail, la costruzione di un portafoglio di investmento non può prescindere dalla conoscenza degli strumenti finanziari a reddito fisso.

Il motivo che mi ha spinto ad affrontare questa tematica è di duplice natura.

La prima è di natura personale e concerne la mia passione per i mercati finanziari accresciuta attraverso il mio percorso universitario e lavorativo.

La seconda è di natura accademica e riguarda la mia volontà di descrivere il funzionamento del mercato obbligazionario, argomento a mio parere con una forte connotazione di attualità e strettamente connesso alle dinamiche di politica monetaria dell'ultimo decennio.

"I tassi agiscono sui prezzi delle attività, come la forza di gravità agisce sulla materia", diceva Warren Buffet per evidenziare il ruolo cruciale dei tassi di interesse nell'influenzare il prezzo delle attività finanziarie.

In effetti l'obbiettivo del mio elaborato è di analizzare i rischi tipici di un portafoglio di bond focalizzandomi in particolare sulla gestione del rischio di tasso.

Il mondo del reddito fisso, fino agli anni '80 caratterizzato da strumenti di investmento di semplice comprensione, negli ultimi anni, complice la digitalizzazione che ha contribuito ad aumentare in maniera esponenziale il volume degli scambi (il valore di mercato dei titoli a reddito fisso è maggiormente elevato rispetto alla capitalizzazione delle borse mondiali), è cambiato radicalmente divenendo un ecosistema estremamente eterogeneo e complesso.

Nello specifico nell'ultimo decennio il mercato obbligazionario è stato caratterizzato da una discesa dei rendimenti dei titoli obbligazionari i quali hanno raggiunto tassi negativi: a settembre 2017 i titoli che avevano un rendimento negativo su scala globale valevano circa sette miliardi e mezzo.

In questo contesto le banche centrali sono portate a gestire una situazione senza precedenti.

In Europa l'obiettivo principale per la Banca Centrale è la stabilità dei prezzi, realizzata attraverso un obiettivo di inflazione vicino ma inferiore al 2% nel medio periodo (si parla di indice armonizzato di prezzi al consumo).

Le manovre di politica monetaria della BCE finalizzate al conseguimento dell'obbiettivo inflazionistico hanno causato conseguenze importanti sul mercato obbligazionario.

L'inflazione, spesso vista negativamente dal consumatore medio, è uno strumento utile per evitare fenomeni ciclici di deflazioni che porterebbero a conseguenze ancora più gravi per il quadro economico generale.

E così per generare inflazione la BCE ha rispettato i principi della teoria quantitativa della moneta, che collega l'inflazione alla moneta in circolazione.

Il Quantitative Easing (QE) rientra nel quadro delle misure non convenzionali di politica monetaria finalizzate al sostegno dell'economia e al perseguimento dell'obiettivo dell'inflazione. Il meccanismo è il seguente:

- La BCE acquista titoli obbligazionari dalle banche
- Il prezzo dei titoli aumenta e si crea moneta nel sistema bancario
- Di conseguenza, molti tassi di interesse diminuiscono e i prestiti diventano meno costosi.
- I cittadini e le imprese possono contrarre più prestiti e spendere meno per rimborsare i propri debiti.
- L'effetto che ne deriva è una ripresa dei consumi e degli investmenti.
- L'incremento dei consumi e degli investmenti sostiene la crescita economica e la creazione di posti di lavoro
- Con l'aumento dei prezzi, la BCE consegue un tasso di inflazione inferiore ma prossimo al 2% nel medio termine

In breve, l'obiettivo della BCE era di incentivare il sistema bancario a prestare denaro all'economia reale generando cosi un'ulteriore iniezione di liquidità alternativa che stimolasse investmenti e consumi. Queste politiche sono in parte riuscite a provocare un aumento dell'inflazione ed una ripartenza dell'economia, ma hanno portato con sè una discesa dei rendimenti offerti dall'intera *asset class* obbligazionaria.

CAPITOLO 1
CARATTERISTICHE E TIPOLOGIE DEI TITOLI FIXED INCOME

Nel seguente capitolo effettuerò un'analisi generale delle caratteristiche principali dei titoli a reddito fisso e delle diverse tipologie di emittenti.

Nella sua forma più semplice, un titolo a reddito fisso è una obbligazione finanziaria emessa da una qualsiasi entità che, per reperire liquidità immediata, promette di pagare un determinato ammontare di denaro generalmente sotto forma di pagamenti di interessi periodici e del rimborso del capitale iniziale a specifiche date future.

Uno stato, una società o un ente pubblico nel momento in cui effettua l'emissione di un bond si sta impegnando a ripagare il capitale preso a prestito a una determinata scadenza, perciò si distingue tra obbligazioni a breve e lungo termine.

Di solito da 1 a 5 anni vengono considerati a breve, mentre scadenze maggiori di 5 anni vengono considerate a lungo termine.

In via generale ciò che contraddistingue un'obbligazione sono:

- Il valore nominale, ovvero quanto l'emittente si impegna a restituire, quindi la quota parte del debito indicata sull'obbligazione e sulla quale sono calcolati gli interessi.
- Il prezzo di emissione, che rappresenta l'importo che l'obbligazionista si impegna a versare all'atto della sottoscrizione dell'obbligazione e che può essere superiore, pari o inferiore al valore nominale dell'obbligazione.
- La cedola (annuale, semestrale o trimestrale), che indica invece l'interesse che il possessore del bond incasserà periodicamente per tutta la durata del titolo o comunque per tutto il tempo in cui lo terrà in portafoglio.

Nel caso particolare delle obbligazioni senza cedola, le Zero-coupon, gli interessi sono impliciti nel differenziale fra il prezzo di acquisto e il rimborso a scadenza.

Per quanto riguarda i titoli di stato Italiani ad esempio, fanno parte di questa categoria Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) e Certificati del Tesoro Zero Coupon (CTZ).

Quindi la prima distinzione viene fatta in base a come viene remunerata la quota interessi.

Da qui la distinzione tra obbligazioni a tasso fisso e a tasso variabile.

Nelle obbligazioni a tasso variabile gli interessi variano periodicamente in base al parametro a cui viene indicizzata la cedola, che può essere ad esempio un tasso interbancario, l'EURIBOR a 3 mesi per intenderci, oppure un indice azionario.

Nell'obbligazione a tasso variabile di tipo *floater* la cedola è direttamente proporzionale al parametro a cui è indicizzato, nelle reverse *floater* la peculiarità e che gli interessi invece decrescono all'aumentare del parametro. Quest'ultime sono indicate in un'ottica di ribasso dei tassi.

Le obbligazioni *step-up* e *step-down* rientrano sempre nella categoria dei titoli a tasso variabile.

Le prime corrispondono cedole crescenti in base a tassi d'interesse predeterminati sul contratto di emissione, discorso inverso per le *step-down.*

Come è facile intuire esistono molteplici tipologie di titoli a tasso variabile costruite al fine di soddisfare ogni diverso profilo rischio-rendimento.

Nella categoria dei tassi variabili un ruolo importante è rappresentato dalle obbligazioni indicizzate all'inflazione (ILB), titoli obbligazionari che si rivalutano in base all'andamento appunto dell'inflazione.

Questa particolare categoria di strumenti finanziari viene concepita per andare in contro agli investitori che vogliono proteggersi dall'impatto negativo dell'inflazione.

In effetti, nel momento in cui sottoscrivi una ILB, colleghi contrattualmente il capitale e gli interessi dei bond a una misura dell'inflazione riconosciuta su scala nazionale, come il Consumer Price Index negli Stati Uniti e il Retail Price Index nel Regno Unito.

In altre parole, a ogni aumento dei prezzi corrisponde un incremento diretto del capitale.

Le ILB vengono anche utilizzate per valutare le aspettative di inflazioni previste sul mercato attraverso il cosiddetto tasso di inflazione *break-even*.

Questo viene calcolato come la differenza tra tasso di rendimento nominale e tasso reale corrispondente al rendimento del titolo indicizzato all'inflazione.

Un'altra tipologia di titoli è rappresentata dalle obbligazioni convertibili, le quali si trovano a metà tra il mondo delle obbligazioni e quello delle azioni.

Quest'ultime infatti concedono la possibilità al detentore di rimanere creditore della società emittente o convertire il titolo in azioni in base a determinate caratteristiche del contratto quali metodo di conversione, rapporto di conversione e periodo di conversione.

La facoltà di conversione rappresenta un'opzione che viene implicitamente venduta dall'emittente al sottoscrittore; a fronte di ciò, l'obbligazionista percepisce un rendimento calcolato in funzione di un tasso nominale inferiore a quello di un'obbligazione ordinaria di pari caratteristiche, poiché tale differenza risulta essere il premio dell'opzione.
Le obbligazioni convertibili non possono essere emesse a un prezzo inferiore al valore nominale e devono essere offerte in opzione ai soci.
Le *contingent convertible* si distanziano non di molto dalle obbligazioni convertibili e si collocano anch'essi a cavallo tra i titoli di debito e quelli di capitale.
In pratica in questi particolari strumenti sono presenti degli automatismi per i quali, al verificarsi o meno dell'evento, scatta la conversione da obbligazioni in azioni.
I *contingent convertible* o CoCo bond sono obbligazioni ibride destinate a investitori istituzionali. Tra le loro caratteristiche, fondamentale è quella che prevede che, allo scattare di determinati eventi di bilancio negativi per la società emittente, come la riduzione dei coefficienti patrimoniali di vigilanza sotto le soglie regolamentari previste da Basilea 3, le obbligazioni si convertano automaticamente in azioni, permettendo alla banca emittente di assorbire parte delle perdite.
Sono studiate per investitori con profili di rischio maggiori (la conversione in azioni avverrebbe in stato di crisi aziendale) che sono alla ricerca di elevati rendimenti.
Un'altra ripartizione viene fatta invece basandosi sulla tipologia di emittente.
I titoli di stato, secondo la definizione proposta da Borsa Italiana "sono obbligazioni emesse dai governi nazionali per finanziare le proprie esigenze di indebitamento, soddisfare il fabbisogno del paese e far fronte alle attività istituzionali".
Essi, appunto, vengono emessi "dalla Repubblica Italiana, tramite del Ministero dell'Economia e delle Finanze (MEF), il quale si avvale della collaborazione di Banca d'Italia per organizzare e condurre le attività di collocamento".
In Italia tra le diverse tipologie di titoli emessi, una prima necessaria distinzione è quella tra i titoli domestici e i titoli internazionali.
Ci sono sette tipologie di titoli domestici: i Buoni Ordinari del Tesoro (BOT), i Certificati del Tesoro Zero Coupon (CTZ), i Certificati di Credito del Tesoro (CCT), i Certificati di Credito del Tesoro indicizzati all'EURIBOR (CCTeu), i Buoni del Tesoro Poliennali indicizzati all'Inflazione Europea (BTP€i), i Buoni del Tesoro Poliennali indicizzati all'Inflazione Italiana (BTP Italia) e, infine, i Buoni Poliennali del Tesoro (BTP).

Oltre che le emissioni di titoli sul mercato domestico, la Repubblica Italiana implementa anche un programma di Emissioni Internazionali che prevede il collocamento sui mercati esteri di titoli denominati in euro e in valuta estera.
In generale, i titoli governativi, intuitivamente, vengono emessi da stati o da enti sovranazionali e per definizione sono titoli poco rischiosi in quanto il governo, in linea di massima, vanta un rating grade abbastanza elevato.
Il mercato dei bond governativi è indubbiamente il maggiore in termini di volumi e offre chance di diversificazione a livello globale. Una di queste è data dalle obbligazioni di paesi considerati in via di sviluppo, cosiddetti *"Emerging Market"*.
Pur essendo per definizione strumenti a basso rischio, non vanno comunque sottovalutati i fattori che influenzano il rischio di uno strumento obbligazionario, come il rischio di tasso, l'inflazione e il tasso di cambio.
Un'altra categoria di emittenti è quella dei corporate. Le obbligazioni corporate sono emesse da aziende (private e pubbliche) e come tali, a differenza delle obbligazioni governative, sono assoggettate principalmente al rischio di credito dell'emittente.
Parliamo di obbligazioni emesse da società note sui mercati azionari, che usufruiscono del mercato obbligazionario per diversificare le proprie fonti di finanziamento.
Il rating è una variabile fondamentale per stabilire il rendimento richiesto dal mercato, sia in fase di primo collocamento del titolo sul mercato primario, sia nelle fasi successive.
Le obbligazioni corporate sono quasi sempre destinate ad investitori qualificati, hanno generalmente un taglio minimo elevato e sono quotate su mercati regolamentati.
Oltre alle aziende con capitalizzazione elevata, anche le *mid cap* hanno avuto di recente accesso al mercato obbligazionario.
Un caso particolare è quello degli emittenti *High Yield* ("HY"), ovvero delle aziende che hanno un rating inferiore alla BBB- (e tipicamente compreso tra BB+ e CC). Non tutti gli investitori possono considerare obbligazioni con rating HY, il che riduce la liquidità disponibile sul mercato per questi emittenti, con effetti sui livelli degli spread di credito che devono concedere per poter collocare le loro obbligazioni.
Anche le obbligazioni "ibride" rientrano all'interno della realtà corporate e vengono definite così perché hanno peculiarità che le accostano a prodotti con rischio *"equity"*, efficienti sia per l'emittente sia per l'investitore.

In poche parole, abbiamo a che fare con obbligazioni a lunga scadenza e subordinate: in caso di default, vengono rimborsate dopo i creditori senior e tipicamente prima solo degli azionisti, ordinari/privilegiati o di risparmio.

Tra le tipologie di emissioni corporate meritano rilevanza anche quelle cosiddette "Green o Social", trattandosi di un mercato in forte crescita.

I Green/Social bond sono obbligazioni corporate emesse esattamente per finanziare investimenti in progetti con forte impatto ambientale o sociale e che rispondono ovviamente a criteri e standard definiti.

Una categoria particolare di emittenti è quella delle società finanziarie, in gran parte costituita da banche e assicurazioni.

Per questi emittenti, reperire liquidità tramite emissioni di titoli obbligazionari rientra nella gestione tipica, in quanto parte del loro business model.

Come per i corporate, anche i *financial* possono emettere titoli senior *unsecured* oppure subordinati o ancora titoli *secured.* Tra i titoli *secured* ci sono ad esempio le emissioni di ABS (*Asset Backed Securities*), titoli che derivano da operazioni di cartolarizzazione di portafogli di asset di vario tipo.

Il vantaggio per l'investitore deriva dalla diversificazione di rischio specifica del portafoglio di *asset* finanziati, rispetto al merito di credito generale della banca Originator, a fronte di una minore liquidità dello strumento rispetto alle emissioni senior *unsecured*.

Per quanto riguarda invece i titoli subordinati, le banche hanno la facoltà di emettere particolari obbligazioni che sono calcolabili come "capitale regolamentare".

Difatti, essendo sottoposti a vigilanza, devono adeguarsi alle normative sui requisiti di capitale stabiliti dalla banca centrale sotto proposta del comitato di Basilea.

Rientrano tra le emissioni subordinate, le obbligazioni AT1 (o Additional Tier 1), computate nel patrimonio di base, che insieme al capitale netto (o "CET1"), contribuiscono al raggiungimento dei requisiti minimi di capitalizzazione richiesti da Basilea, partecipando all'assorbimento delle perdite della banca.

Una particolare tipologia di obbligazioni AT1 sono i CoCo (*Contingent Covertible*), strumenti ibridi che assorbono le perdite nel momento in cui il capitale della banca emittente scende al di sotto di una determinata soglia rispetto a RWA.

Le obbligazioni senior *non preferred*, rientrano nel calcolo del capitale regolamentare.

Introdotte in Italia attraverso un decreto legislativo nel 2017, le *non preferred* sono obbligazioni senior rispetto al debito AT1 e T2, ma subordinate rispetto ad altri debiti senior (definiti ora "senior *preferred*"). Danno la possibilità alle banche di dotarsi di un cuscinetto di passività che si può interporre fra gli strumenti di capitale e le obbligazioni senior *preferred,* assicurando a queste ultime una ulteriore protezione in caso di crisi.

Attraverso questo primo capitolo spero di essere riuscito a dare un'idea generale di quanto possa essere variegato il mercato dei titoli obbligazionari e di quali siano le variabili che entrano in gioco nella loro distinzione.

CAPITOLO 2
FUNZIONAMENTO DEL MERCATO OBBLIGAZIONARIO

Malgrado il mercato obbligazionario sia considerevolmente più ampio in termini di valore rispetto al mercato azionario, le dinamiche che lo contraddistinguono sono di solito messe da parte e spesso incomprese dall'ampia platea degli investitori *retail*; proverò quindi a spiegarne il funzionamento e le peculiarità.
Quando si parla di efficienza e di mercato obbligazionario, la questione liquidità desta molta preoccupazione agli investitori in quanto per definizione i titoli obbligazionari sono poco liquidi. Per rischio di liquidità si intende la capacità di un investitore di acquistare o vendere uno strumento finanziario, in tempi rapidi e a costi accessibili, senza influenzare il prezzo dello strumento stesso: quindi tanto più uno strumento è liquido, tanto più è facile effettuare transazioni efficienti aventi ad oggetto quello strumento. Ma come si può "misurare" la liquidità di un'obbligazione? Non è possibile dare una risposta univoca poiché la liquidità è condizionata da più fattori che spesso sono difficili da misurare empiricamente.
In primis la liquidità del titolo è direttamente correlata con il nozionale del titolo: quindi ad esempio il titolo di stato italiano BTP, con i suoi quasi 20 Miliardi di euro di nozionale, è il titolo più liquido sul mercato.
Un altro elemento importante è il bid-ask spread, cioè la differenza tra quanto il dealer è disposto a comprare e vendere il titolo: infatti per i titoli più liquidi, con un nozionale maggiore, questo è notevolmente ridotto rispetto a quei titoli con un nozionale minore, meno negoziati sul mercato.
Per i concetti appena esposti sarà lecito prevedere un grado di liquidità inferiore al diminuire del nozionale, circostanza che si riscontra quindi analizzando la differenza tra il prezzo denaro e il prezzo lettera dei market maker.
Un ulteriore elemento che influenza il rischio di liquidità è il rating creditizio dell'emittente: al diminuire del rating il bid-offer spread aumenta sensibilmente e ciò

comporta una bassa liquidità dello strumento. Vicende come la crisi del debito di Eurozona nell'estate del 2011, o come la correzione degli spread di credito che si è verificata a cavallo tra il 2015 e il 2016 prima del QE della BCE, sono state motivo di riduzione della liquidità sui titoli emessi da corporate.

Un ultimo aspetto rilevante nell'analisi della liquidità di un'obbligazione è poi la valuta di emissione.

Prendendo in esame titoli di debito emessi ad esempio da ENI, i principali investitori sono prevalentemente non italiani o non europei, i quali, in caso di emissione nella valuta non domestica, richiederanno un maggiore premio al rischio; inoltre essendoci meno market maker che quotino le emissioni locali in USD c'è meno competizione ed efficienza.

Per i market maker quindi assicurare la medesima liquidità su tutte le emissioni esistenti nel mercato obbligazionario è altamente complicato.

Nel mercato azionario la liquidità è assicurata sia dal market maker che dagli investitori, mentre nell'obbligazionario, a causa dell'inesistenza di un vero e proprio mercato regolamentato, il numero di investitori retail è decisamente inferiore, altro elemento che giustifica l'elevato rischio di elevato.

La maggior parte delle transazioni in obbligazioni avviene infatti OTC (*over the counter),* ovvero un mercato dove le controparti principali sono fondi d'investmento, compagnie di assicurazione, fondi pensione e banche.

Dopo aver illustrato le caratteristiche principali del funzionamento del mercato obbligazionario, cercherò di descrivere le dinamiche che caratterizzano il processo di emissione di titoli.

Nel mercato obbligazionario l'immissione in circolazione dei titoli avviene tramite un'offerta iniziale di vendita.

Le due procedure principali sono quelle dell'asta e il collocamento sindacato *(bookbuilding).*

Per esporre il processo di asta, mi rifaccio alla modalità che usa il Ministero del Tesoro italiano per collocare i propri titoli di stato.

Il Tesoro impiega due tipologie di aste: l'asta competitiva in termini di rendimento per i Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) e l'asta marginale con determinazione discrezionale del prezzo di aggiudicazione e della quantità emessa per i titoli a medio lungo termine (ad esempio i BTP).

Nell’asta competitiva gli investitori immettono le proprie richieste in termini di rendimento, invece che di prezzo; la peculiarità di questa modalità di asta è che la richiesta, se assegnata, viene aggiudicata al tasso prospettato.
Come risultato, ogni investitore vedrà aggiudicata la propria offerta a tassi diversi. Le allocazioni avvengono in ordine crescente di rendimento fino all’esaurimento della quantità offerta dal Ministero del Tesoro con accoglimento parziale delle ultime istanze con ripartizione pro-quota in base ai titoli residui ancora disponibili per l’assegnazione.
Per eliminare la possibilità che vengano attuate condotte opportunistiche da parte degli investitori viene calcolato un rendimento massimo al di fuori del quale le domande verranno escluse a priori ed in maniera analoga un rendimento minimo.
L’asta marginale invece si contraddistingue per il fatto che le richieste, se allocate, vengono aggiudicate tutte al medesimo prezzo, denominato prezzo marginale. La determinazione del prezzo marginale, così come quella del quantitativo di titoli da emettere, avviene in maniera discrezionale.
Precedentemente all’asta, verranno comunque annunciati un quantitativo minimo e massimo tra i quali sarà compresa l’offerta da parte dell’emittente, mentre il prezzo meno elevato tra quelli offerti dai partecipanti rimasti aggiudicatari, sarà il prezzo di aggiudicazione (prezzo marginale) valido per tutti.
In linea di massima questo è il processo con cui si arriva alla determinazione del prezzo durante l’asta marginale e l’asta competitiva, che rappresentano le modalità attraverso cui la maggioranza di titoli emessi dal Ministero del Tesoro vengono collocati sul mercato.
Il procedimento dell’asta approfitta della partecipazione continua di investitori, riconosciuti come specialisti in Titoli di stato, ovvero operatori che compiono la funzione di market maker o primary dealers.
Per questi ultimi sono contemplati obblighi di sottoscrizione nelle aste dei titoli di Stato e di negoziazione di volumi sul mercato secondario.
In questa maniera si può assicurare la copertura del quantitativo minimo dell’emissione con la possibilità che, in seguito, partecipino altri investitori.
Il concetto di bid to cover ratio viene spesso usato quando si parla di aste di collocamento: esprime il rapporto tra domanda degli investitori ed offerta di titoli da parte dell’emittente, è pacifico che un numero sensibilmente maggiore di 1 venga interpretato in maniera positiva da parte dei mercati.

Il processo del *bookbuilding* è il tipico processo OTC nel mercato primario e rappresenta la modalità principale attraverso cui le aziende emettono titoli di debito.
In effetti le realtà corporate hanno difficoltà a raggiungere dimensioni paragonabili a quelle degli emittenti sovrani, quindi il processo di asta si rivela non appropriato.
All'inizio vengono incaricate diverse banche d'investmento per gestire l'emissione, curandone tutti i dettagli.
I due ruoli principali sono quelli del global coordinator e del book-runner.
Il global coordinator è presente sia nella fase preliminare, in cui viene verificata la fattibilità dell'emissione, sia nelle fasi successive, in cui viene decisa tipologia e dimensione.
I potenziali lead manager sono continuamente alla ricerca di opportunità interessanti sul mercato degli investitori e una volta che individuano un'occasione, identificano un emittente a cui offrire l'operazione e in contemporanea sondano le condizioni a cui gli investitori sarebbero disposti ad operare. Una volta stabilite le caratteristiche principali, viene rilasciato un comunicato ufficiale dove si annuncia alla platea degli investitori dell'imminente emissione.
Il global coordinator è anche operativo nella fase di costruzione del book, durante la quale è affiancato dai *bookrunner*, il cui compito è di trovare investitori a cui proporre l'emissione, in modo tale da completare il book.
A questo scopo l'emittente presenterà la società ed i termini dell'emissione attraverso un roadshow nelle principali piazze finanziarie. Alla fine del roadshow la clientela istituzionale rilascerà un'indicazione sul prezzo al quale sarebbe disposto a sottoscrivere il titolo, accanto agli interessi delle varie investment banks, detti anche *Joint Leading Managers Interests.*
In questo modo emittente e global coordinator hanno una prima indicazione su dove si potrà collocare l'emissione, in maniera tale da essere pronti a rilasciare l'IPT (initial price talk).
A questo punto tutti gli investitori potranno inserire il loro ordine, in aggiunta a quelli che hanno partecipato al road show, andando a formare il vero e proprio book.
Una volta raccolti gli ordini di tutti gli investitori il book viene chiuso e il titolo "lanciato" poche ore dopo e da quel momento possono cominciare le contrattazioni sul mercato secondario.

Nelle emissioni collocate col processo di *bookbuilding* si sviluppa di solito, prima dell'offerta formale, un mercato che prende il nome di mercato grigio (grey market o pre-market).
Il mercato grigio ha di solito inizio con l'annuncio di una nuova emissione e si chiude il giorno in cui il titolo viene emesso.
In pratica i principali broker e market maker attivi sul mercato di riferimento dell'emittente, fanno circolare quotazioni a termine a cui sono disposti a operare.
L'esistenza del grey market crea vantaggi sostanziali per il mercato, in quanto svolge la funzione di *price discovery* e *information aggregation*.
Questo significa che nei prezzi del mercato grigio vengono riflesse le aspettative circa il futuro andamento dei tassi di interesse e degli spread di credito, che una volta emesso il titolo, si rifletteranno sul suo prezzo effettivo.
Il mercato obbligazionario, come è stato detto in precedenza, si contraddistingue per la prevalenza di broker e market maker rispetto alle piattaforme elettroniche, sia sul mercato primario che su quello secondario.
L'investitore, che nella maggioranza dei casi si tratta di un cliente istituzionale, può intraprendere due strade diverse per comprare o vendere un'obbligazione: rivolgersi a un broker o ad un market maker.
Il ruolo del market maker è svolto dalle banche principali che, avendo grosse disponibilità economiche, hanno la possibilità di assorbire una quantità maggiore di titoli in bilancio.
Con lo stringersi dei limiti sulle quantità di titoli che le istituzioni finanziarie possono detenere in portafoglio, la figura del market maker ha visto ridurre notevolmente la propria autonomia.

CAPITOLO 3

I BENCHMARK DI TASSO

I benchmark di tasso ricoprono un ruolo fondamentale per l'efficiente funzionamento dei mercati finanziari.

A quest'ultimi sono indicizzati innumerevoli tipologie di contratti finanziari; in aggiunta essi vengono utilizzati per valorizzare alcune grandezze di bilancio, per valutare la performance di alcuni fondi d'investmento o per ricavare i valori attuali degli strumenti finanziari scontandone i futuri flussi di cassa.

Nell'Eurozona, il sottostante di un FRA (Forward Rate Agreement) future, IRS (Interest Rate Swap) e di molti altri derivati, nonché il tasso a cui sono indicizzati (+ uno spread creditizio) numerosissimi strumenti quali *Floating rate* e bond, *corporate loans* e mutui Retail è l'EURIBOR, il tasso di riferimento del mercato monetario di rilevanza sistemica nell'eurozona.

Nel giugno 2016, in occasione della pubblicazione della *Benchmark Regulation*, la Commissione Europea ha stimato che il nozionale dei contratti indicizzati all'EURIBOR sia superiore 180 migliaia di miliardi di euro (la maggior parte dei quali sono IRS) oltre a definire "l'EURIBOR Critical Benchmark" (ovvero un Benchmark a cui sono indicizzati contratti per un valore totale superiore ai 500 miliardi di euro).

La sopraccitata *Benchmark Regulation* è entrata in vigore il 1 ° gennaio 2018, approvata il 18 giugno 2016 dal Parlamento e dal Consiglio Europeo.

Essa nasce in risposta ai tentativi di manipolazione di benchmark critici e mira a introdurre "un quadro comune per assicurare l'accuratezza e l'integrità degli indici di riferimento associati a strumenti finanziari, contratti finanziari o fondi di investmento nell'Unione europea".

Tale regolamento è inteso a contribuire al funzionamento del mercato interno, garantendo al contempo un elevato livello di protezione dei consumatori e degli investitori.

Essa introduce un regime di controllo addizionale per i benchmark critici e prevede che entro il 31 dicembre 2021 (estensione concessa dal Parlamento e del Consiglio Europeo a febbraio 2019 rispetto al termine originale del 1 °gennaio 2020) gli amministratori degli indici sia esistenti sia nuovi presentino domanda di autorizzazione o registrazione alle autorità nazionali competenti; da quella data gli indici che non soddisferanno requisiti della BMR dovranno essere autorizzati dall'autorità dove ha sede il fornitore dell'indice, mentre nessun nuovo contratto potrà più fare riferimento a tale indice.
Data la rilevanza sistemica di tali cambiamenti, diventa perciò fondamentale comprendere più a fondo attori e funzionamento dell'EURIBOR.
Vine gestito e amministrato da EMMI (European Money Markets lnstitute, ex-EURIBOR EBF), organizzazione non-profit con sede in Belgio.
La relativa autorità nazionale competente è la belga FSMA (Financial Services and Market Authority).
Ogni panel bank contribuisce il tasso a cui "ritiene che una prime bank (banca di alta solvibilità nel breve termine attiva sul mercato monetario a tassi competitivi e avente accesso al rifinanziamento in banca centrale) quoti ad un'altra prime bank un deposito interbancario unsecured all'interno dell'Eurozona su specifiche scadenze".
La metodologia di determinazione del benchmark, come sopra specificata, non deriva quindi da dati transazionali ma bensì dalle quotazioni dei vari contributori, i quali rilevano giornalmente, mediante il cosiddetto *"expert judgement"*, il tasso al quale una prime bank scambierebbe un deposito interbancario con un'altra prime bank.
Risulta evidente che un benchmark, disegnato come dall'originale definizione data sopra, presentava un evidente deficit di robustezza.
Un altro problema che affligge l'EURIBOR è la rappresentatività: si è assistito negli ultimi anni ad una notevole diminuzione del panel rispetto alla situazione iniziale di oltre 50 banche.
Gli scandali che hanno colpito il mondo dei benchmark (soprattutto il LIBOR inglese) e i sempre maggiori oneri a carico delle banche contributrici (di c*ompliance* e reputazionali), sono di certo le principali motivazioni per le quali molte banche hanno via via deciso di abbandonare il panel.
Cio' ha portato EMMI ad effettuare negli ultimi anni un profondo processo di revisione del benchmark.

Ancora prima della pubblicazione della Benchmark Regulation EMMI aveva avviato un processo di rafforzamento dell'indice al fine di rendere il benchmark più aderente ai principi Internazionali IOSCO (International Organization of Securities Commissions, ESMA (European Securities and Markets Authority), EBA (European Banking Authority).

RIFORMA EURIBOR

L'EMMI ha condotto riforme approfondite negli ultimi anni per soddisfare i requisiti del regolamento sui benchmark dell'UE, rafforzando il proprio quadro di *governance* e sviluppando una metodologia ibrida per EURIBOR.

Seguendo le raccomandazioni del report del Financial Stability Board "Reforming Major lnterest Rate Benchmarks" del luglio 2014, secondo cui i principali tassi di riferimento dovrebbero essere supportati nella massima misura da dati di transazioni, EMMI ha dato avvio a una profonda revisione dell'EURIBOR al fine di evolverlo in un indice "transato".

L'obiettivo principale della riforma EURIBOR era fornire al mercato un indice più trasparente, solido e rappresentativo, riducendo al minimo il rischio di manipolazione del mercato. In questo senso, EURIBOR sta attualmente concludendo la sua evoluzione da una determinazione basata sulle quotazioni a una metodologia ancorata, ove possibile, alle transazioni effettive fornite da un panel di banche contributive *("Panel Banks"*).

Nell'ottobre 2015 EMMI ha pubblicato un *"position paper"* consultativo in cui riassume le sue proposte per l'EURIBOR del futuro.

EMMI ha provato a percorrere la strada della *"seamless transition"*, ovvero un percorso di transizione che non cambi il cosiddetto *"Underlying lnterest"* che il benchmark vuole misurare, andando tuttavia a modificarne la sua metodologia di calcolo.

Tale soluzione permetterebbe piena continuità legale dei contratti.

La revisione della definizione, volta a catturare il mutato contesto di mercato, avrebbe assunto un "tasso al quale banche di Sound Financial Standing possono prendere a prestito fondi nelle nazioni UE e EFTA (European Free Trade Association) nel mercato monetario *unsecured* all'ingrosso in euro".

Tutto ciò a fine di fotografare il costo fondi delle banche europee in modo allargato rispetto alla situazione corrente; il mercato puramente interbancario non rappresenta oramai più che una porzione residuale del funding di una banca.

Per raggiungere questo obiettivo, tra settembre 2016 e febbraio 2017, EMMI ha effettuato un programma di *pre-live verification* e raccolto dati transazionali da 31 banche di 12 paesi diversi. Sulla base del suo risultato, l'EMMI ha concluso che la transizione dalla metodologia EURIBOR ad una metodologia interamente basata sulle transazioni non sarebbe stata sufficientemente solida, poiché la determinazione

giornaliera dell'EURIBOR sarebbe stata basata, per la maggior parte dei tenori, su un numero limitato di transazioni eseguito da un numero limitato di contributori.
La Riforma quindi ha subito una forte battuta d'arresto con la pubblicazione del risultato del cruciale studio di *pre-live verification*: l'obiettivo era quello di verificare l'impatto della nuova metodologia sul livello e sulla volatilità del benchmark in base ai dati forniti dalle banche.
EMMI ha stabilito che una transizione *seamless* non sarebbe stata percorribile dal momento che "L'attuale ambiente regolamentare e di politica monetaria, inclusi i tassi negativi e altre fonti di liquidità disponibili ai partecipanti di mercato (...) sono fattori che hanno portato a cambiamenti nell'attività del *money market unsecured*".
La conseguente strada intrapresa da EMMI è stato l'avvio dei lavori per realizzare una nuova metodologia ibrida di contribuzione, sempre adatta allo scopo e in grado di adattarsi alle condizioni di mercato prevalenti.
Tale compito è stato affidato ad una task force formata da EMMI e stakeholder del mercato e supervisionata da FSMA (Financial Services and Markets Authority).
La soluzione metodologica ibrida sviluppata permette di legare parzialmente la contribuzione ai dati transazionali, mantenendo la sufficiente flessibilità per permettere all'indice di adattarsi a una varietà di condizioni di mercato.
L'EMMI ha cercato di basare il calcolo dell'EURIBOR, per quanto possibile, in transazioni del mercato monetario in euro che riflettessero il suo interesse sottostante, ovvero il tasso al quale gli enti creditizi nei paesi dell’UE e dell’EFTA (European Free Trade Association) prendono fondi all’ingrosso in euro nel mercato monetario unsecured.
Tra marzo 2018 e febbraio 2019, l'EMMI ha organizzato due consultazioni pubbliche (Prima consultazione pubblica - Seconda consultazione pubblica) sulla metodologia ibrida.
La premessa di queste consultazioni pubbliche era che ciascuna banca contribuente fornisse all'EMMI i dati, sulla base di una cascata a tre livelli, con caratteristiche specifiche applicabili a ciascun livello.
Da maggio a fine luglio 2018, EMMI ha testato la metodologia ibrida con 16 banche partecipanti. La fase di test si è rivelata positiva e il feedback di tutte le parti interessate ha indicato che la nuova metodologia forniva robustezza e rappresentatività adeguate.

Il 2 luglio 2019, EMMI ha ottenuto un'autorizzazione dall'Autorità belga per i servizi e i mercati finanziari (FSMA) ai sensi dell'articolo 34 del Regolamento sui benchmark dell'UE per l'amministrazione di EURIBOR.
EMMI ha avviato la transizione del panel di banche contributive dalla metodologia EURIBOR basata sulle quotazioni alla metodologia ibrida.
Poiché EURIBOR è ora conforme al BMR, è stata utilizzata dopo il 1 ° gennaio 2020 per contratti e strumenti nuovi o esistenti

IL TASSO EONIA

L' EONIA è il tasso al quale le banche con una solida posizione finanziaria nei paesi dell'Unione Europea (UE) e dell'Area europea di libero scambio (EFTA) prestano fondi in euro sul mercato monetario interbancario.

Si tratta di un tasso overnight (durata 1 giorno lavorativo TARGET) e il calculation agent è la BCE.

Giace nel cosiddetto «corridoio dei tassi» ovvero fra il tasso della *Marginal Lending* e della Deposit Facility.

Il regime di *full-allotment* lo ha tuttavia «schiacciato» sulla DF, mentre prima del 2008, il *framework* delle aste di rifinanziamento competitive della BCE garantiva che il tasso si posizionasse vicino al bid rate minimo dell'MRO (*Main Refinancing Operations*).

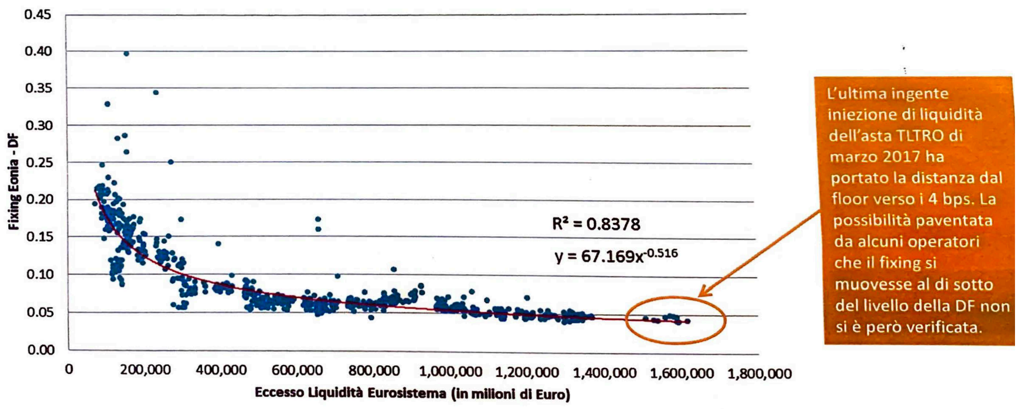
È chiaro perciò come l' EONIA sia strettamente correlato con le condizioni di liquidità dell'euro-sistema.

Analizziamo in particolare la relazione tra tasso EONIA ed eccesso di liquidità negli ultimi anni, ovvero da quando i fixing si sono mossi in territorio negativo e i programmi di stimolo dell'ECB hanno portato l'eccesso di liquidità dell'euro-sistema ai record storici di oltre 1500 miliardi.

Inserendo i dati (serie storica a partire dall'l/8/14) in un grafico a dispersione notiamo una chiara relazione inversa tra eccesso e distanza del *fixing* dal *floor* teorico della *Deposit Facility*.

In particolare, il crescente eccesso di liquidità ha ridotto man mano gli *spike* e la volatilità, «schiacciando» il tasso sulla DF.

Possiamo notare come, superato il trilione di eccesso, la crescita della liquidità influisca meno sul livello di distanza del fixing dalla DF, stabilizzato intorno ai 5 bps.



Un altro effetto dell'aumento dell'eccesso di liquidità è la diminuzione dei volumi di contribuzione al tasso EONIA (vedi grafico).

Più i volumi sono bassi più il tasso di ogni singola contribuzione può influire sulla media generale. Come conseguenza, nonostante l ' EONIA sia un parametro transato, non è allo stato attuale esente da rischi che ne compromettano robustezza, affidabilità e resilienza.

Come abbiamo visto in precedenza, la *Benchmark Regulation* europea richiede a gli amministratori degli indici di intraprendere azioni volte ad assicurare le qualità di cui si è parlato in precedenza per gli indici pubblicati.

L ' EONIA è stato dichiarato Benchmark critico dalla Commissione Europea il 28 giugno 2017, dato il suo utilizzo in strumenti *money market secured e unsecured* per 850 miliardi dl euro e come sottostante di OIS per circa 5,2 migliaia di miliardi di nozionale.

EMMI avviò perciò nel 2016 l'EONIA *Review* al fine di allineare il benchmark ai dettami della BMR.

EONIA REVIEW

La prima fase della revisione, volta a rafforzare la *governance* dell'indice, si è sostanziata nell' EONIA *Governance Framework*, approvato ad aprile 2017, contenente un documento denominato EONIA *Benchmark Determination Methodology* (BDM).

La BDM definisce un nuovo elemento, i cosiddetti *fall-back arrangements*: se il numero di contributori in una giornata con volumi non nulli sarà inferiore o uguale a 4 si attiverà una situazione di *contingency*.

In tale caso il tasso EONIA sarà la media ponderata per i volumi fra l'EONIA del giorno e quello del giorno precedente.

La seconda fase dell'EONIA *review* è stata rappresentata da un'ampia *data collection* del mercato *money market unsecured* a brevissimo al fine di supportare un cambiamento nella metodologia di calcolo dell'EONIA.

Il risultato dell'EONIA *review,* pubblicato da EMMI a febbraio 2018, conclude affermando che il Benchmark presenta un duplice grado di concentrazione, sia a livello di numero di contributori, sia a livello geografico.

In linea con quanto rilevato in un *consultation paper* della BCE sul lancio del suo nuovo indice 0/N (Over Night), la disponibilità dei dati è maggiore per le transazioni in raccolta rispetto a quelle in impiego ovvero le banche sono più attive sul *borrowing* side che non sul *lending.*

Le transazioni interbancarie non sono state la componente maggiore del mercato *unsecured* overnight negli ultimi anni, dal momento che transazioni con altre *financial* corporation anche situate al di fuori dell'Eurozona rappresentano una quota rilevante dei volumi totali (vedi grafici, fonte BCE}.

Perciò, EMMI ha interrotto il progetto di EONIA *review,* dal momento che non esisteva fra gli *stakeholders* interesse e supporto per una revisione del benchmark.

Per le ragioni analizzate EMMI ha sottolineato che l'EONIA come da attuale definizione e metodologia di calcolo non rispetterà i requisiti della BMR alla sua entrata in vigore nel 2022 (estesa dal 2020).

Come indicato dalla BMR, dal 2022 l'EONIA dovrà essere sostituita per i nuovi contratti da un nuovo tasso overnight.

Per i contratti esistenti l 'FSMA stabilirà se sarà ancora possibile usare l’EONIA.

EMMI è quindi al lavoro per una transizione al nuovo tasso 0/N dell'Eurozona prima della dismissione dell’EONIA nel ‘22.

A settembre ‘17 la BCE è scesa direttamente in campo per fornire supporto al mondo finanziario in ambito benchmark, dal momento che una possibile dismissione dell’EONIA o un drastico calo della fiducia degli operatori nella sua affidabilità avrebbero potuto compromettere seriamente il funzionamento dei mercati finanziari e quindi impattare uno dei canali di trasmissione della politica monetaria.

Già intervenuta nei minuti successivi il risultato della *pre-live verification* sull'EURIBOR con una dichiarazione a Thomson Reuters in cui avrebbe approfondito la costruzione di un nuovo benchmark a breve termine, il 21/9/17 ha reso noto che pubblicherà un nuovo tasso overnight *unsecured* di riferimento, il quale «completerà e servirà come misura di sicurezza *(" backstop")* per i benchmark prodotti dal settore privato» (ovvero da EMMI).

In contemporanea al progetto per lo sviluppo di un nuovo tasso overnight, la BCE ha aperto un tavolo di lavoro congiunto con FSMA, ESMA, commissione europea e operatori privati chiamato *“working group on euro risk-free rates”* per designare un *risk-free reference rate* sulla scadenza overnight (" RFR") e una *term structure* di tassi *risk-free* euro come alternativa agli esistenti benchmark di mercato.

A giugno ‘18 il *Working Group* Europeo ha lanciato una consultazione per ricevere feedback dal mercato sulla scelta del nuovo RFR dell'euro-zona; i candidati per diventare il nuovo RFR a sostituzione dell'EONIA dopo il 2020 erano: €STR, GC *Pooling Deferred* (un repo rate a 1 giorno su general collateral prodotto da STOXX), il *Repo funds Rate* (un *Repo Rate* su *colleteral General* e Specific prodotto da NEX).

Il 13/9/18 il WG ha stabilito che €STR sarà il nuovo RFR dell'area Euro.

IL NUOVO TASSO €STR

Il nuovo tasso 0/N prodotto dalla BCE si chiama €STR (Euro *Short-term Rate*) e viene pubblicato a dal 2 ottobre 2019 alle 9 del mattino basandosi sulle transazioni del giorno precedente.

Viene determinato interamente sui dati già comunicati giornalmente correntemente da 52 banche tramite le rilevazioni del *money market statistical reporting* (MMSR) riguardanti depositi overnight *unsecured* di tali banche effettuano con *financial counterparties*: in tal modo non viene più catturato solo l'interbancario ma il mercato all'ingrosso *(Wholesale)* per meglio fotografare il costo fondi delle banche (verranno ricomprese transazioni con MM funds, assicurazioni, fondi pensione ma non con governi e *non-financial institutions*).

Inoltre l'€STR è un tasso BID: sulla base delle consultazioni lanciate dalla BCE gli *stakeholders* del settore hanno concordato sulla definizione di tasso suggerita dalla BCE, la quale ha chiarito sin da subito di voler fotografare il "borrowing cost" piuttosto che il lato dell'offerta di fondi, fattore che permette, alle attuali condizioni di mercato e regolamentari – che vedono gli istituti bancari più attivi sul lato della raccolta che non degli impieghi - una copertura più diversificata di controparti, anche a livello geografico.

Calcolato solo con transazioni maggiori di 1 mln di euro, fino al lancio di ESTER (*Euro Short Term Rate*) l'ECB pubblicherà il pre-ESTER, calcolato alla stessa maniera del futuro tasso.

Ester quota in media 9 bps al di sotto dell'EONIA dal momento che è determinato da *borrowing rates* e 5 bps al di sotto della DF dal momento che considera deal con istituzioni finanziarie non bancarie che, non avendo acceso alla Deposit Facility, non godono del "privilegio" di questo *floor* sui propri impieghi overnight *unsecured*.

A dicembre 2018 il *Working Group* sui RFR ha pubblicato un report con una serie di possibili scenari e raccomandazioni sulla transizione da EONIA a €STR.

Le raccomandazioni del WG, sulle quali EMMI ha recentemente lanciato una public *consultation* per recepire le considerazioni degli *stakeholders* sono le seguenti:

o Modificare la metodologia di calcolo dell'Eonia al fine di ancorarlo il più possibile a effettive transazioni di mercato, facendo corrispondere l'EONIA all' €STR più uno spread.

o Calcolare tale spread fisso basandosi su una 15% *trimmed mean* calcolata su 12 mesi di dati passati.

o Iniziare a pubblicare l'EONIA con la metodologia di calcolo rivisitata esattamente alla prima pubblicazione di €STR (2/10/19) al fine di evitare distorsioni e arbitraggi di mercato.

o Pubblicare tale tasso fino a Dicembre 2021 al fine di garantire sufficiente tempo per la transizione dei contratti esistenti, i quali potranno scadere durante il periodo o dovranno essere rinegoziati a €STR.

o Dal momento che €STR viene pubblicato a un periodo successivo rispetto all'*execution* dei *trade* di contribuzione (non dopo le 9.00 a.m. CET, con possibile ripubblicazione alle 11.00 in caso di errori di calcolo), spostare la pubblicazione dell'EONIA dalle 7 p.m. a poco dopo le 11 a.m. del giorno dopo.

Per quanto riguarda lo sviluppo di una struttura a termine basata su €STR da usare come f*allback* dei contratti indicizzati all' EURIBOR, il *working group* sta analizzando due possibili approcci (*backward and forward looking*), ipotizzando l'uso di quote scambiabili di OIS (Overnight Index Swap) nel caso del *forward apporach*.

In tutte le principali giurisdizioni Banche Centrali, *Regulators* e Gruppi di lavoro sono coinvolti nello sforzo di ·individuare i nuovi RFR in sostituzione degli esistenti tassi -IBOR e non, non più considerati affidabili.

Al momento sono stati individuati i seguenti tassi Overnight, mentre per le *term-structures* saranno necessari ulteriori lavori.

In USA, per esempio, comincia a svilupparsi un mercato per il SOFR (Secured Overnight Financing Rate), sul quale sono già quotati OIS, future a 1 mese e 3 mesi scambiati sul CME (Chicago Mercantile Exchange) e sono state già effettuate delle emissioni a tale tasso.

In UK a luglio 2018 il Working Group on Sterling Risk-Free Reference Rates ha lanciato una *consultation* per introdurre una struttura a termine per il RFR, denominata Term SONIA Reference Rates (TSRRs), la quale sarà probabilmente basata sulla curva OIS SONIA.

ISDA (International Swap and Derivatives Association) ha pubblicato a dicembre 2018 il risultato di una *consultation* sulle regole di *fallback* per i derivati indicizzati a certi -IBOR nel caso di *discontinuation* di questi ultimi.

Gli *stakeholders* hanno indicato la loro preferenza per la sostituzione del tasso -IBOR di riferimento con un dato RFR a cui applicare uno spread per catturare il rischio di credito e la struttura a termine insita nell'IBOR.

Oggetto della consultazione erano appunto le modalità di rilevazione del RFR da applicare e di calcolo dello spread (Forward Approach, Historical Mean/Median Approach, Spot-Spread Approach) fra le quali è stato scelto *l'Historical Mean/Median approach.*

ISDA procederà ora ad includere tali regole di *fallback* nelle sue standard *definition* e pubblicherà un protocollo per includerle nei contratti *legacy.*

Le basi -IBOR/OIS, in particolare, nel caso dell'Euro la base 3M EURIBOR-EONIASWAP (sia spot che forward) sono universalmente note come "termometro" del livello di rischio percepito sul sistema bancario in generale.

L'allargamento della base EURIBOR – OIS è la più efficace rappresentazione dello stress sui mercati monetari e della mancanza di liquidità interbancaria dopo il fallimento di Lehman.

Per definizione, dato che l'EURIBOR ha insito in sé una misura del rischio di credito bancario, esso dovrebbe essere superiore al tasso OIS per pari scadenza (che non altro che il *compounding* di n tassi overnight, in cui il rischio di credito sottostante -a 1 giorno è considerato trascurabile).

Tale relazione non è più rispettata per le basi fino al mese: ciò è dovuto al fatto che le metodologie di calcolo sono diverse (l'EURIBOR è un tasso stimato mentre l'EONIA è un *transaction based*) e in un contesto di rarefazione delle transazioni, si possono creare delle distorsioni.

Fondamentale ricordare che tali distorsioni possono influenzare i derivati che hanno come sottostante tali benchmark.

CAPITOLO 4
ANALISI DELLA CURVA DEI RENDIMENTI

Il processo di costruzione della struttura a termine dei tassi di interesse nasce dalla necessità di valutare correttamente uno strumento finanziario, ovvero di produrre corretti tassi *forward* e discount *factor* utilizzati nel *pricing* dello strumento.
Richiamiamo un po' di concetti matematici: il prezzo del pagamento *risk-free* di 1 euro al tempo T viene definito *discount factor* con *maturity* T, denominato P(T).
Lo *yield to maturity* di tale investmento è denominato spot rate (o zero rate), con notazione r(T). Ovvero:

$$P(T) = \frac{1}{[1 + r(T)]^T}$$

Il discount *factor* e lo spot rate sulle varie scadenze T sono chiamate discount *function* e la curva spot.
La funzione discount identifica la curva spot e viceversa.
La curva spot rappresenta quindi il rendimento annualizzato di uno ZCB con un unico pagamento alla *maturity*, di qui il termine di zero rate.
Tale curva spot *risk-free* rappresenta un benchmark per il valore temporale del denaro in qualsiasi punto nel tempo e rappresenta quindi la più basilare struttura a termine dei tassi di interesse, dal momento che non convoglia alcuna assunzione (e nessun rischio) circa il tasso di reinvestmento di cedole intermedie.
Il tasso *forward* è il tasso determinato oggi per un prestito che verrà effettuato nel futuro. La struttura a termine di tali tassi è chiamata curva *forward.*
Si consideri un contratto in cui l'acquirente si impegna a pagare al tempo t una cifra, stabilita oggi, pari a F(t,T) che rappresenti il prezzo di uno ZCB che paghi1 euro risk-free alla scadenza T.
La relazione di non arbitraggio che esiste fra i prezzi degli ZCB per scadenza t e T (ovvero utilizzando la nostra notazione P(t)e P(T)) quotati dal mercato è il prezzo di tale contratto è:$P(t) = P(t)F(T,t)$Il prezzo F(T,t) non è altro che il prezzo di uno ZCB e quindi il tasso *forward* corrispondente sarà:

$$F(t,T) = \frac{1}{[1 + f(T,t)]^T}$$

Abbiamo compreso che la curva *forward* viene costruita a partire dalla curva degli zero *rates*, ovvero i tassi *forward* sono i futuri tassi zero impliciti nella corrente struttura spot.

Dalle precedenti relazioni possiamo ricavare che:

$$r(T) = \{[1 + r(1)][1 + f(1,2)][1 + f(2,3)] \dots [1 + f(T-1,T)]\}^{\left(\frac{1}{T}\right)} - 1$$

La teoria delle aspettative afferma che l'andamento della curva dei rendimenti sia influenzata dalle aspettative degli operatori di mercato sull'andamento dei tassi di interesse futuri.

In via generale i tassi su uno strumento a lunga scadenza sono uguali alla media geometrica dei rendimenti su una serie di strumenti a breve termine.

Sotto queste ipotesi, il tasso di interesse di lungo periodo corrisponde al rendimento che un investitore attende di ottenere attraverso l'investmento successivo in una serie di titoli obbligazionari a breve termine nel periodo fino alla maturazione dell'obbligazione di lungo termine.

La teoria delle aspettative sostiene che per l'investitore dovrebbe essere indifferente investire in un titolo a 2 anni oppure investire in un titolo a 1 anno e alla sua scadenza in un nuovo titolo a 1 anno. In termini matematici tale relazione può essere formulata come indicato nella formula precedentemente indicata.

La teoria delle aspettative è fortemente correlata con la teoria sulla preferenza di liquidità, la quale afferma che le obbligazioni a lungo termine dovrebbero avere rendimenti più elevati delle obbligazioni a breve termine.

La motivazione che giustifica questa teoria è che gli investitori sono disposti a rinunciare a una parte dei rendimenti per evitare la volatilità dei tassi a lungo termine e dall'altro lato chi presta denaro preferisce prestiti a breve termine per ridurre il rischio di insolvenza.

Questo implica che la curva dei rendimenti sia inclinata positivamente.

Riassumendo, l'inclinazione della curva dei rendimenti ci dice quelle che sono le aspettative degli investitori sui futuri tassi d'interesse, rappresentando un buon indicatore del clima economico.

Per chi è interessato a investire in obbligazioni, la curva dei rendimenti è uno strumento utile per confrontare i diversi titoli a reddito fisso disponibili. Spesso viene utilizzata la curva dei rendimenti per i titoli di Stato americani, la quale non presenta alcun rischio di credito percepito, e che può quindi servire da benchmark per altre obbligazioni che invece presentano una qualche forma di rischio.

CAPITOLO 5
APPLICAZIONE PRATICA

In questo capitolo, dopo un breve richiamo ai concetti di *duration e convexity,* verranno presentate diverse tipologie di bond swap. La sezione sarà interamente dedicata ad analizzare una specifica tipologie di bond swap, la *barbell/Bullet Swap*. Verranno poi simulati, attraverso il metodo delle simulazioni Montecarlo, diversi scenari di variazione dei tassi, con diverse volatilità, per capire se e quando è opportuno attuare una *barbell strategy*. Considerando i limiti della *barbell strategy* decidiamo di proporre politiche di immunizzazione di un portafoglio di titoli obbligazionari realizzate mediante il ricorso alla negoziazione di strumenti derivati.

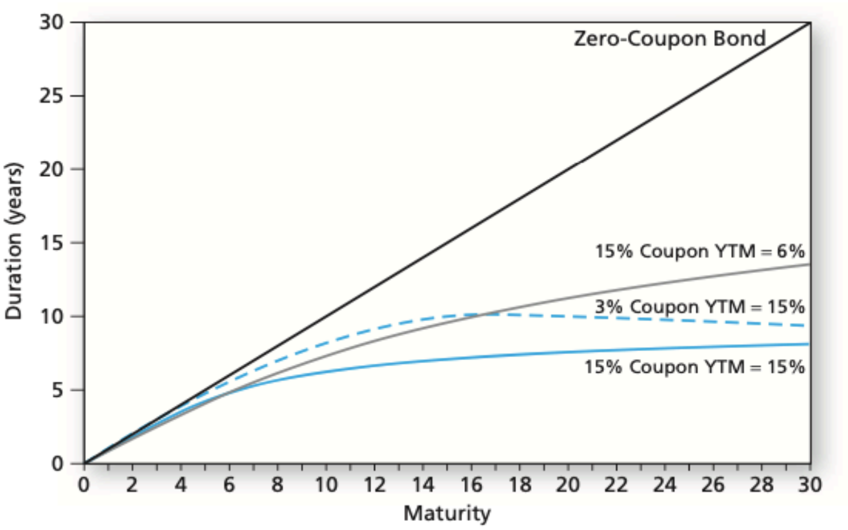
DURATION DI UN BOND

La *duration* di uno strumento finanziario è definita come la media ponderata delle scadenze dei flussi di cassa ad esso associati, dove ogni scadenza viene ponderata per il rapporto fra il valore attuale del flusso associato a quella scadenza e il prezzo (o valore di mercato) dello strumento finanziario.

Siano F_t il flusso di cassa associati ad un bond al tempo t, con $1 \leq t \leq T$, dove T rappresenta la maturity del bond, sia P il prezzo del titolo obbligazionario, sia y_0 il tasso *yield to maturity, la duration* è definita come:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t \cdot (1 + y_0)^{-t}}{P}. \tag{5.1}$$

Bond duration vs bond maturity



Fonte: Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, "Investments", McGraw-Hill Education, (2014)

Vengono evidenziate alcune proprietà fondamentali.

I. La *duration* di uno strumento finanziario è tanto maggiore quanto maggiore è, a parità di altri elementi, la vita residua dello strumento finanziario.

II. Nel caso di uno *zero-coupon bond*, la *duration* è pari alla vita residua del titolo stesso.

III. Le cedole riducono il tempo medio ponderato fino ai pagamenti e quindi la *duration*, a parità di *maturity*, cresce all'aumentare del flusso cedolare e della consistenza delle cedole.

IV. Inoltre, a parità di altri fattori, data la relazione inversa tra *duration e yield to maturity*, la *duration* di un titolo obbligazionario è più elevata quando lo *yield to maturity* del bond è minore.

La *duration* è un indicatore del grado di rischio di un titolo obbligazionario in quanto misura la sensibilità del suo prezzo a variazioni nel tasso di rendimento di mercato.

Una variazione del tasso interno di rendimento da (y_0) a $(y_0 + \Delta y)$ modifica il prezzo del titolo obbligazionario da $P(y_0)$ a $P(y_0 + \Delta y)$. Sia ΔP definito come la differenza tra $P(y_0)$ e $P(y_0 + \Delta y)$, allora vale la seguente relazione:

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{D}{1 + y_0} \cdot \Delta y\,. \tag{5.2}$$

Di seguito si fornisce una dimostrazione della relazione appena presentata.
Si consideri la relazione che lega il prezzo del titolo (P) al tasso di rendimento a scadenza richiesto dal mercato (y):

$$P = \sum_{t=1}^{T} F_t \cdot (1 + y_0)^{-t}\,,$$

derivando rispetto al tasso di rendimento si ottiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} = -\sum_{t=1}^{T} t \cdot F_t \cdot (1 + y_0)^{-t-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} = -(1 + y_0)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot F_t \cdot (1 + y_0)^{-t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_0}\frac{1}{P} = -(1 + y_0)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t \cdot (1 + y_0)^{-t}}{P}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{D}}{1+\mathrm{y}_0} \cdot \partial \mathrm{y}_0$$

L'espressione $\frac{\mathrm{D}}{1+\mathrm{y}_0}$ viene definita *duration modificata* (DM) e consente di valutare l'impatto sul prezzo di un titolo obbligazionario di una variazione infinitesima del tasso di rendimento.

$$\mathrm{DM} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{P}} \qquad (5.3)$$

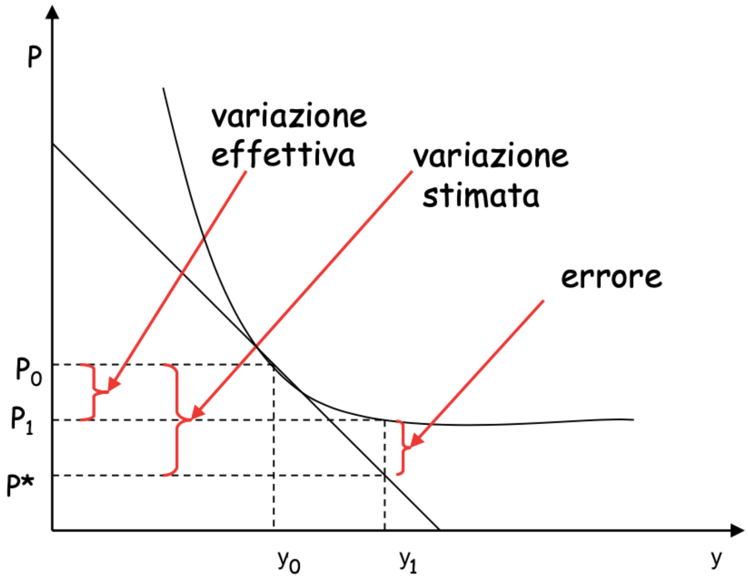
A questo punto, per ottenere la relazione (9.2) è sufficiente considerare variazioni finte del tasso di rendimento ($\Delta \mathrm{y}$).[1]

$$\frac{\Delta P}{P(y_0)} \cong -DM \cdot \Delta y \qquad (5.4)$$

La *duration* permette di cogliere la pendenza della relazione prezzo-rendimento. Si consideri la figura 2 che mostra come varia il prezzo di un titolo obbligazionario al variare del tasso di rendimento e come viene approssimato questo risultato utilizzando una sola approssimazione del primo ordine. Graficamente, utilizzare la *duration* significa approssimare la funzione prezzo con una retta tangente alla curva nel punto (y_0, P_0).

Figura 2:	Variazione del prezzo di un bond a seguito di una variazione del tasso

[1] Skinner F., "Pricing and Hedging Interest and Credit Risk Sensitive Instruments", Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005)



Fonte: Resti A., Sironi A., “Rischio e valore nelle banche”, EGEA S.p.A., (2005)

Il tasso di interesse aumenta da y_0 a y_1, di conseguenza il prezzo scende da P_0a P_1, tuttavia attraverso l’utilizzo della duration si stima che il prezzo arriva a p^*, commettendo quindi un errore tanto grande quanto grande è la variazione dei tassi.

APPROSSIMAZIONE DI TAYLOR E CONVEXITY DI UN BOND

Supponiamo di essere interessati a capire quanto effettivamente impatta una variazione del tasso di rendimento Δy sul prezzo di un titolo obbligazionario $P(y_0)$. Per poter calcolare un'approssimazione del nuovo prezzo $P(y_0 + \Delta y)$ si può utilizzare il polinomio di Taylor.

Sia $P^{(i)}(y_0)$ la i-esima derivata della funzione $P(y_0)$,

$$P(y_0 + \Delta y) = P(y_0) + \sum_{i=1}^{\infty} P^{(i)}(y_0) \frac{(\Delta y)^i}{i!} \tag{5.5}$$

Il polinomio di Taylor può essere visto come una successione approssimante di funzioni, dove ogni termine aggiuntivo aumenta il grado di precisone dell'approssimazione. L'utilizzo della *duration* equivale ad arrestare tale formula ad un'approssimazione del primo ordine:

$$P(y_0 + \Delta y) \cong P(y_0) + P^{(1)}(y_0) \cdot \Delta y =$$

$$= P(y_0) - P(y_0) \cdot DM \cdot \Delta y$$

Per incrementare la qualità dell'approssimazione è possibile arrestare la formula di Taylor ad un'approssimazione del secondo ordine e quindi utilizzare un indicatore della curvatura della relazione prezzo-rendimento.

$$P(y_0 + \Delta y) \cong P(y_0) - P^{(1)}(y_0) \cdot \Delta y + P^{(2)}(y_0) \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2} =$$

$$= P(y_0) - P(y_0) \cdot DM \cdot \Delta y + P^{(2)}(y_0) \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2}$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{\Delta P}{P(y_0)} \cong -DM \cdot \Delta y + \frac{P^{(2)}(y_0)}{P(y_0)} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2} \tag{5.6}$$

Calcoliamo allora la derivata seconda della funzione $P(y_0)$ rispetto a y_0:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial {y_0}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}_0} \sum_{t=1}^{T} - t \cdot F_t \cdot (1 + y_0)^{-t-1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \mathrm{t}\,(t+1) \cdot F_t \cdot (1 + y_0)^{-t-2} =$$

$$= \frac{1}{(1+y_0)^2} \sum_{t=1}^{T} (t^2 + t) \cdot \frac{F_t}{(1+y_0)^t}$$

Dividendo entrambi i membri per $P(y_0)$ si ottiene:

$$\frac{P^{(2)}(y_0)}{P(y_0)} = \frac{1}{(1+y_0)^2} \sum_{t=1}^{T} (t^2 + t) \cdot \frac{F_t (1+y_0)^{-t}}{P(y_0)}$$

La *Convexity* è rappresentata dalla quantità:

$$\mathrm{C} = \sum_{t=1}^{T} (t^2 + t) \cdot \frac{F_t (1+y_0)^{-t}}{\mathrm{P}} \tag{5.7}$$

La *Convexity modificata (CM)* è definita come:

$$\mathrm{CM} = \frac{1}{(1+y_0)^2} \sum_{t=1}^{T} (t^2 + t) \cdot \frac{F_t (1+y_0)^{-t}}{\mathrm{P}}$$

È possibile a questo punto riscrivere la relazione (9.6):

$$\frac{\Delta P}{P(y_0)} \cong -DM \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot CM \cdot (\Delta y)^2 \tag{5.8}$$

La relazione (5.8) mette in evidenza due effetti: il primo effetto che dipende dalla *duration modificata* e ha segno opposto a quello della variazione nei tassi di mercato. Ad un aumento del tasso di rendimento y_0, corrisponde una variazione negativa del prezzo, mentre ad una diminuzione del tasso di rendimento corrisponde una variazione positiva del prezzo del bond. Il secondo effetto è invece dovuto alla *convexity modificata* ed è, indipendentemente dalla variazione dei tassi, sempre positivo. Come conseguenza di ciò, una *convexity* maggiore appare sempre desiderabile. La *convexity* comporta difatti il vantaggio di smorzare i ribassi del prezzo in seguito ad un rialzo del tasso e di accentuarne i rialzi del prezzo del bond in seguito ad un ribasso del tasso. Per tale motivo è chiaro che la *convexity* sia una caratteristica molta conveniente per quanto concerne la scelta di titoli alternativi. Su tale principio si fonda la *barbell Strategy*, che verrà più avanti discussa.

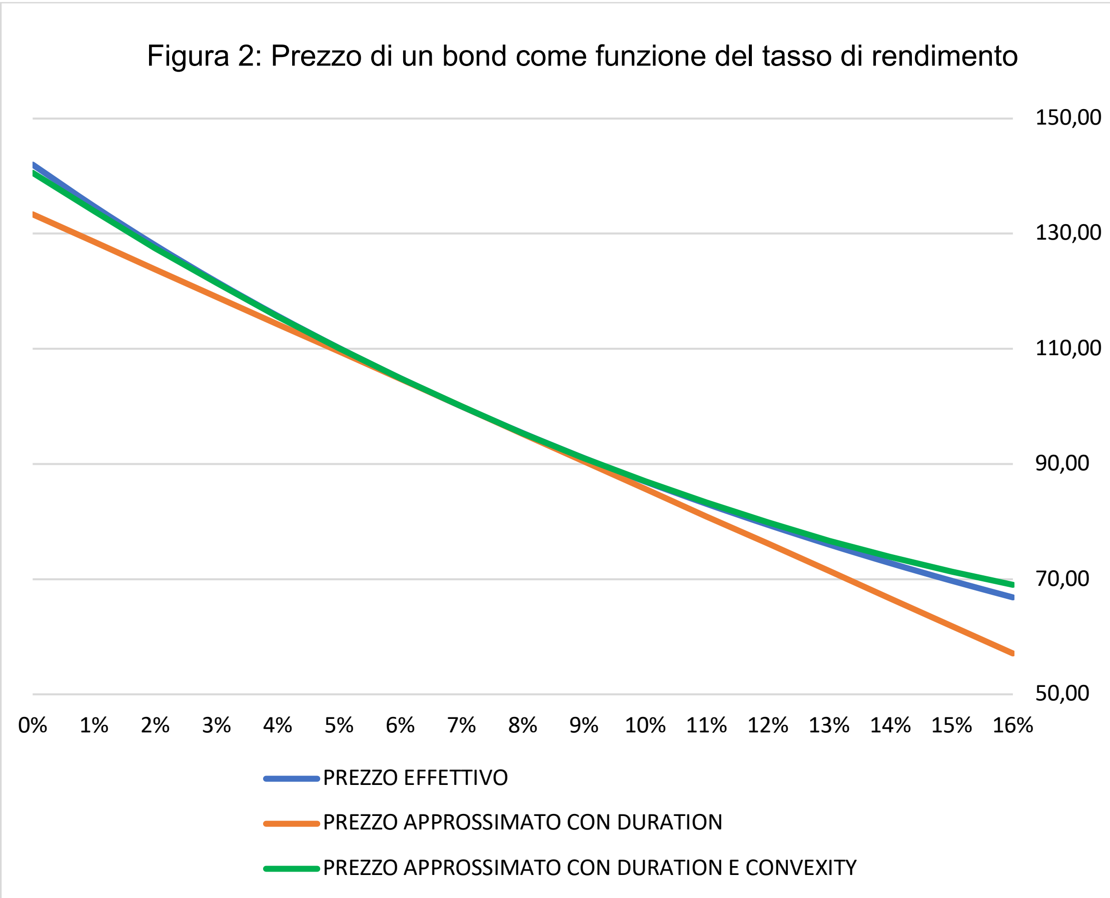
Tabella 1: Variazioni del prezzo effettivo e approssimato per un'obbligazione a 6 anni con cedola annuale del 7%

Tasso	Variazione del tasso	Prezzo effettivo	Variazione effettiva del prezzo	Prezzo approssimato con duration	Variazione approssimata con duration	Prezzo approssimato con duration e convexity	Variazione approssimata con duration e convexity
0%	-7%	142,00 €	42,00 €	133,37 €	33,37 €	140,58 €	40,58 €
1%	-6%	134,77 €	34,77 €	128,60 €	28,60 €	133,90 €	33,90 €
2%	-5%	128,01 €	28,01 €	123,83 €	23,83 €	127,51 €	27,51 €
3%	-4%	121,67 €	21,67 €	119,07 €	19,07 €	121,42 €	21,42 €
4%	-3%	115,73 €	15,73 €	114,30 €	14,30 €	115,62 €	15,62 €
5%	-2%	110,15 €	10,15 €	109,53 €	9,53 €	110,12 €	10,12 €
6%	-1%	104,92 €	4,92 €	104,77 €	4,77 €	104,91 €	4,91 €
7%	*0%*	*100,00 €*	*0,00 €*	*100,00 €*	*0,00 €*	*100,00 €*	*0,00 €*
8%	1%	95,38 €	-4,62 €	95,23 €	-4,77 €	95,38 €	-4,62 €
9%	2%	91,03 €	-8,97 €	90,47 €	-9,53 €	91,06 €	-8,94 €
10%	3%	86,93 €	-13,07 €	85,70 €	-14,30 €	87,02 €	-12,98 €
11%	4%	83,08 €	-16,92 €	80,93 €	-19,07 €	83,29 €	-16,71 €
12%	5%	79,44 €	-20,56 €	76,17 €	-23,83 €	79,85 €	-20,15 €
13%	6%	76,01 €	-23,99 €	71,40 €	-28,60 €	76,70 €	-23,30 €
14%	7%	72,78 €	-27,22 €	66,63 €	-33,37 €	73,84 €	-26,16 €
15%	8%	69,72 €	-30,28 €	61,87 €	-38,13 €	71,29 €	-28,71 €
16%	9%	66,84 €	-33,16 €	57,10 €	-42,90 €	69,02 €	-30,98 €

Si consideri un titolo obbligazionario a 6 anni con *Face Value* pari a 100 € che paga una cedola annuale del 7%. Ipotizzando uno *yield to maturity* (y_0) pari al 7%, il prezzo del titolo (P_0), calcolando attualizzando tutti i flussi di cassa, sarà ancora 100 €. La duration calcolata tramite la relazione (5.1) è di 5.10 anni mentre la duration modificata corrisponde a 4.77 anni. La *convexity* risulta essere di 33.69 e la *convexity* modificata di 29.43.

Si consideri la tabella 1: nella prima colonna troviamo lo *yield to maturity* (y_0) pari al 7%, e altri scenari di tasso di rendimento. La seconda colonna riporta la variazione dei tassi rispetto a (y_0). Nella terza colonna, il prezzo effettivo viene calcolato riattualizzando i flussi di cassa del titolo obbligazionario al nuovo tasso di rendimento. Nella quarta colonna, la variazione effettiva del prezzo è semplicemente la differenza tra il prezzo al nuovo tasso e prezzo originario (P_0). La quinta colonna riporta il prezzo calcolato con la relazione (9.5): $P(y_0 + \Delta y) = P(y_0) - P(y_0) \cdot DM \cdot \Delta y$.

La settima colonna riporta, invece, il prezzo calcolato con la relazione (5.8), mentre la sesta colonna e l'ottava riportano semplicemente quanto si discosta il prezzo calcolato tramite approssimazioni del primo e del secondo ordine dal prezzo effettivo.



Fonte: Elaborazione personale

La Figura 1 rappresenta la relazione tra in prezzo dell'obbligazione e differenti tassi di rendimento. Il grafico è stato realizzato utilizzando i dati della tabella 1.

Dalla Figura 1 risulta immediatamente evidente come l'utilizzo della sola *duration* conduce ad un errore tanto maggiore quanto maggiore è la variazione dei tassi. Un secondo risultato importante che è possibile osservare è che l'utilizzo della *convexity* conduce sempre ad un'approssimazione migliore e più vicina al prezzo effettivo. Tuttavia, anche tenendo conto della *convexity,* la variazione approssimata è leggermente diversa dalla variazione effettiva del prezzo. Questo è dovuto al fatto che la curvatura della relazione prezzo-rendimento non è costante, ma cambia al variare di y. Invece, nella relazione (5.8) si utilizza la *convexity* calcolata per un determinato *yield to maturity* (y_0) ed è poi mantenuta costante. Questo ci porta a commettere un errore tanto maggiore quanto maggiore è la variazione dei tassi.[2]

[2] Resti A., Sironi A., "Rischio e valore nelle banche", EGEA S.p.A., (2005)

DURATION E CONVEXITY DI UN PORTAFOGLIO

Il valore di un portafoglio (P_p) equivale alla somma del valore dei singoli titoli (P_i) che lo compongono:

$$P_p = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Si può calcolare la derivata del prezzo rispetto al tasso (y_0) per tutti i titoli in portafoglio:

$$\frac{\partial P_p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial y}$$

Dividiamo entrambi i membri per $-P_p$:

$$-\frac{1}{P_p} \cdot \frac{\partial P_p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{P_p} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial y}$$

A questo punto, moltiplichiamo tutti i termini della sommatoria per 1, nella forma $\frac{P_i}{P_i}$:

$$-\frac{1}{P_p} \cdot \frac{\partial P_p}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{P_i}{P_p} \cdot \frac{1}{P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial y}$$

Usando la definizione di *duration modificata* in (4.3):

$$DM_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_p} \cdot DM_i \tag{5.9}$$

Lo stesso risultato vale per la *duration*:

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_p} \cdot D_i \tag{5.10}$$

In altre parole, la *duration* di un portafoglio di titoli equivale alla somma ponderata delle duration dei singoli titoli, in cui il peso di ogni titolo è il suo valore in percentuale sul valore di portafoglio.

In maniera analoga è possibile dimostrare che ciò vale anche per la *convexity*:

$$C_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P_p} \cdot C_i \tag{5.11}$$

È importante osservare che quando la *duration* è utilizzata per stimare l'impatto di una variazione dei tassi su un portafoglio di titoli obbligazionari c'è un'assunzione implicita. Si ipotizza che i tassi di rendimento di tutti i titoli che compongono il portafoglio variano dello stesso ammontare. Nel momento in cui i titoli hanno *maturities* differenti ciò può avvenire solo se ci sono *shift* paralleli della *zero-coupon yield curve*. Possiamo quindi interpretare le equazioni (5.4) e (5.8) come una stima dell'impatto sul prezzo di un portafoglio di titoli obbligazionari di *shift* paralleli (Δy) nella curva dei tassi zero-coupon.[3]

Ipotizziamo un portafoglio in cui sia presente un titolo obbligazionario con le seguenti cartatteristiche:

- Vita residua: 3 anni
- Cedola annua: 4% pagata annualmente
- Prezzo di rimborso: alla pari
- Modalità di rimborso: unica soluzione a scadenza
- Prezzo di mercato: 101,68

[3] Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

	rendimento effettivo			**3,40%**	
			3,33%	3,40%	
	periodo	flusso	VA	VA	Calcolo duration
	0	-101,68	-101,68	-101,68	(in anni)
	1	4	3,871092616	3,86847195	0,038045554
	2	4	3,74633951	3,74126881	0,07358908
	3	104	94,26577689	94,0744576	2,775603588
		3,40%	0,20	0,00	
Duration					**2,887238222**
Modified duration					**2,792300021**

[4]

- Nel foglio Excel qui sopra viene calcolato il rendimento effettivo del titolo obbligazionario attraverso la funzione di Excel TIR.COST. Il tasso interno di rendimento effettivo è quanto rende l'obbligazione al netto delle cedole e del rimborso della quota capitale, analiticamente è quel tasso che azzera il VAN[5]. In effetti abbiamo dimostrato che attualizzando i flussi di cassa al 3,4% la somma dei valori attuali è proprio zero[6].

  In seguito è stata calcolata la Duration del titolo attraverso la formula :

  $$D = \sum_{t=1}^{n} w_t t \quad \text{dove} \quad w_t = \frac{CF_t}{P} * \frac{1}{(1+i)^t}$$ [7]

  La modified duration è uguale a:

  $$MD = \frac{D}{(1+i)}$$

[4] I periodi sono espressi in base annuale
[5] Valore attuale netto, ovvero il valore attuale dei flussi di cassa al netto dell'esborso iniziale attualizzati al tasso interno di rendimento
[6] Per un ulteriore esplicazione è stato mostrato che effettivamente utilizzando un altro tasso d'interesse i flussi di cassa non facessero somma zero.
[7] La Duration è espressa nelle stesse unità di misura delle scadenze:(normalmente in anni)

	periodo	flusso	tasso spot	VA
	1	4	3%	3,88349515
	2	4	3,25%	3,75214722
	3	104	3,40%	94,0744576
valore di mercato				**101,7101**

Qui sopra, ipotizzando una determinata struttura dei tassi spot, è stato calcolato il valore di mercato del titolo, il quale risulta essere maggiore del prezzo a cui è stata pagata l'obbligazione. Inseguito la curva dei tassi spot si sposta come indicato:

- ◊ Periodo 1: 3,5%
- ◊ Periodo 2: 3,45%
- ◊ Periodo 3: 4,15%

In questo caso si incorre a una perdita sul titolo in seguito al rialzo dei tassi ma non è possibile utilizzare la duration per calcolare approssimativamente la perdita principalmente per tre motivi[8]:

a) La struttura dei tassi a termine non è piatta
b) Lo spostamento della curva non è parallelo
c) 75 BP non è un intervallo piccolo.

Inoltre, la duration sottostima il nuovo prezzo e non esprime le asimmetrie date dalla volatilità del prezzo.

Per calcolare la perdita incorsa a seguito del rialzo dei tassi calcoliamo il nuovo valore di mercato del titolo con i nuovi tassi e calcoliamo la differenza tra il nuovo valore e il precedente. I passaggi sono rappresentati nella tabella qui di seguito.

[8] Le ipotesi provengono dal teorema di immunizzazione globale dal rischio di tasso (Fisher,Weil).

PERDITA =99,65-101,71=	**-2,05099**	2%		
	Periodo	flusso	tasso spot	VA
	1	4	3,50%	3,8647343
	2	4	3,45%	3,73765319
	3	104	4,15%	92,0567242
				99,6591116

Ipotizzando un ribasso del rendimento dello 0,5% è possibile utilizzare la *Modified duration* per stimare la variazione percentuale e assoluto del titolo: nella tabella seguente mostriamo sia il calcolo attraverso la MD sia il calcolo tramite l'attualizzazione dei flussi di cassa per mostrare la bontà dell'approssimazione attraverso la *Modified Duration*. La formula utilizzata per il calcolo della variazione percentuale di prezzo è la seguente:

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD * Dtasso$$

				2,90%
		periodo	flusso	VA
DP/P=	1,396%	1	4	3,887269193
DP=	1,41961	2	4	3,777715445
NUOVO P=	**103,10**	3	104	95,45247967
				103,1174643

La formula sopra utilizzato approssima la variazione percentuale di prezzo in maniera meno rigorosa di quanto si possa fare utilizzando la forma che combina MD con la *convexity:*

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -D * \frac{\Delta i}{(1+i)} + 0{,}5C * \frac{\Delta i^2}{(1+i)^2}$$

T	flusso	Wi=va%	Duration		(T+T^2)*WI	(T-DUR)^2*WI
1	4	0,038045554	0,03804555		0,076091108	0,135505637
2	4	0,03679454	0,07358908		0,220767239	0,028964355
3	104	0,925201196	2,77560359		11,10241435	0,011764135
		1,00	2,88723822	DURATION	**11,40**	0,18
			2,79230002	MD	CONVEXITY	VARIANZA
Convexity= somma(T+T^)*Wi=		11,398				
oppure						
Convexity= Duration+Duration^2+varianza=		11,398				
Dp/p=-MD*Di+0,5*Convexity*(Di)^2/(1+i)^2		0,014094759				
DP=		1,433155138				
Nuovo prezzo con MD e convexity		**103,1131551**				

La duration media di un portafoglio di attività e passività è pari alla media ponderata delle duration delle singole componenti del portafoglio

$$D_{PORT} = \sum_{a=1}^{n} w_a D_a$$

W_a= peso percentuale della componente a

D_a= *duration* della componente a

- ◊ Reset duration: periodo di tempo da oggi alla prossima data di revisione del tasso di indicizzazione
- ◊ Spread duration: sensibilità del prezzo del titolo a variazioni nello spread sul tasso variabile richiesto dal mercato, approssimabile come duration del titolo calcolato a cedole proiettate.

Data una variazione nel livello dei tassi di interesse di mercato la condizione di immunizzazione si ottiene se la variazione nel valore delle attività è uguale a quello delle passività

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_A \frac{\Delta i}{(1+i)} D_A$$

$$\frac{\Delta L}{L} = -D_L \frac{\Delta i}{(1+i)} D_L$$

La variazione nel valore del portafoglio (ΔE)

$$\Delta E = -\left[D_A A - D_L L \right] \frac{\Delta i}{(1+i)}$$

LIMITI DELLA DURATION

Se guardiamo indietro alla definizione di duration nell'equazione (5.1) notiamo che tutti i flussi di cassa F_t relativi a diverse scadenze sono stati scontati con un unico tasso y_0, ciò equivale a dire che i tassi di mercato i_t sono pari a y_0 per ogni t. L'ipotesi a cui abbiamo fatto ricorso è quindi che la curva dei tassi zero-coupon sia piatta.
È evidente che una simile ipotesi limita la validità delle tecniche di immunizzazione basate sulla duration nel momento in cui la curva dei tassi *zero-coupon* non è piatta. Per superare questa ipotesi è sufficiente considerare un regime d'interesse diverso. Infatti, anziché considerare il regime dell'interesse composto annuo è sufficiente utilizzare l'interesse composto continuo per rilassare l'ipotesi di curva dei tassi piatta. In effetti, il valore attuale di un titolo obbligazionario può riscriversi come:

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \mathrm{F_t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i_t t}}$$

e la *duration* diventa:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t \cdot e^{-i_t t}}{P}$$

Cosi facendo infatti, possiamo utilizzare specifici tassi i_t per ogni diversa scadenza e quindi non è più richiesta l'ipotesi che la curva dei tassi sia piatta.
La *convexity* diventa:

$$C = \sum_{t=1}^{T} t^2 \cdot \frac{F_t \cdot e^{-i_t t}}{P}$$

C'è tuttavia un altro limite importante delle tecniche di immunizzazione basate sulla duration, ovvero l'ipotesi che le variazioni dei tassi Δi sono uguali per tutte le scadenze. Non sono, dunque, possibili *twist* della curva dei tassi zero-coupon, ovvero variazioni dei tassi differenziate per le diverse scadenze, ma soltanto *shift* paralleli. Tuttavia, Litterman e Scheinkman, in [5], mostrano come l'82% dei movimenti della *yield curve* sono *shift* paralleli.

BOND SWAPS

Un Bond Swap è una tecnica finanziaria in base alla quale un investitore sceglie di vendere uno o più obbligazioni nel portafoglio, e acquistarne altre per lo stesso ammontare, in modo da raggiungere gli obiettivi prefissati.

L'utilizzo del bond swap si presta a diversi scopi. I più rilevanti sono: aumentare il rendimento medio del portafoglio, o aumentare il grado di immunizzazione a specifici rischi a cui il portafoglio è esposto. Può essere utilizzato per aumentare la liquidità di un portafoglio, nel caso in cui si sostituisce un titolo obbligazionario con un altro caratterizzato da un maggiore grado di liquidità. Il bond swap è quindi uno strumento finanziario che si presta a diversi utilizzi e permettere di raggiungere svariati obiettivi. Per quanto concerne la nostra analisi, siamo soprattutto interessati ad utilizzare il bond swap per ottenere un portafoglio maggiormente immunizzato dal rischio di tasso.

Esistono diverse tipologie di bond swap. Possiamo sicuramente distinguere tra quelle operazioni finanziarie di scambio tra titoli obbligazionari che comportano un'alterazione del profilo di rischio del portafoglio (*risk alterning bond swaps*) e quelle che permettono di conservare invariata l'esposizione al rischio del portafoglio (*risk adjusted bond swaps*).

Tra i *risk alterning bond swaps* rientrano quelle operazioni finanziarie, denominate *rate anticipation swaps*, in cui il l'investitore scambia le componenti del proprio portafoglio obbligazionario in previsione dei movimenti attesi dei tassi d'interesse. I *rate anticipation swaps* sono di natura speculativa, poiché il loro utilizzo dipende dalle variazioni previste dei tassi di interesse. La forma più comune di *rate anticipation swaps* consiste nello scambio di obbligazioni a breve duration in cambio di obbligazioni a lunga duration, in previsione di tassi di interesse più bassi. Al contrario, gli operatori scambieranno anche obbligazioni a lunga duration con obbligazioni con una duration minore se pensano che i tassi di interesse aumenteranno.[9] I *rate anticipation swaps* si basano sul fatto che i prezzi delle obbligazioni si muovono nella direzione opposta rispetto ai tassi di interesse e sul fatto che un portafoglio di titoli con duration maggiore è più sensibile a una variazione dei tassi di interesse.

Tra i *risk alterning bond swaps* rientrano quelle operazioni finanziarie, denominate *intermarket spread swaps,* e viene attuata nel momento in cui un investitore ritiene che lo spread di rendimento tra due settori del mercato obbligazionario sia

[9] https://www.investopedia.com/

temporaneamente fuori linea. Lo swap viene impostato in modo che il riallineamento previsto fornirà un rendimento più elevato. Ad esempio, se il differenziale di rendimento tra titoli di Stato e titoli corporate è considerato troppo ampio e si prevede che si restringerà, l'investitore può scambiare i titoli del tesoro che ha in portafoglio con titoli corporate. Ovviamente, l'investitore deve considerare attentamente se esiste una buona ragione per cui il differenziale di rendimento non sia allineato.[10]

Rientrano altresì tra i *risk alterning bond swaps* quelle operazioni finanziarie denominate *pure yield pickup swap,* attuate nel momento in cui non sono attesi cambiamenti nel livello dei tassi. Il *pure yield pickup swap* consiste in un scambio di un titolo obbligazionario con yield to maturity basso con un titolo con yield maggiore. È quindi un mezzo per aumentare il rendimento di un portafoglio. Il rovescio della medaglia è che, cosi facendo, aumenta inesorabilmente, il rischio a cui il portafoglio è esposto. Ad esempio, un investitore che detiene una *Treasury* bond con un rendimento del 4% può venderla sul mercato e utilizzare i proventi per acquistare un'obbligazione corporate, soggetta ad un rischio di credito più elevato, con un rendimento del 7%. È ovviamente possibile effettuare il *pure yield pickup swap* anche con titoli soggetti allo stesso rischio di credito. Supponiamo che la curva dei tassi è inclinata positivamente, è conveniente allora muoversi su titoli con duration maggiori, e quindi con yield maggiori, per poter effettuare guadagni in conto capitale. Ovviamente, anche in questo caso, al tasso di rendimento più elevato corrisponde anche un rischio più elevato espresso come una maggiore esposizione in termini di duration.[11]

Tra i *risk adjusted bond swaps* rientrano le operazioni finanziare denominate *substitution swaps* e consistono nello scambio di un titolo obbligazionario con un altro che è simile in termini di coupon, maturity e qualità del credito e cosi via, ma che offre uno yield to maturity più elevato. Questo swap sarebbe motivato dalla convinzione che il mercato abbia momentaneamente prezzato i due titoli obbligazionari in modo errato e che la discrepanza tra i prezzi delle obbligazioni rappresenti una possibilità di profitto. Si supponga, ad esempio, di avere in portafoglio un titolo obbligazionario emesso da Toyota Motor Corporation che paga il 5% annuo e ha una maturity di 20 anni. Si supponga inoltre che il prezzo del bond sia tale da fornire uno yield to maturity del 5.18%. Sul mercato è possibile trovare un titolo obbligazionario emesso da Honda Motor Co., Ltd. con le stesse caratteristiche in termini di coupon e maturity del bond

[10] Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, “Investments”, McGraw-Hill Education, (2014)
[11] https://www.investopedia.com/

in portafoglio, ma che ha un prezzo tale da fornire uno yield to maturity del 5.26%. Pertanto, lo yield più elevato fornito dal bond emesso da Honda Motor Co., Ltd, senza un apparente motivo, lo rende relativamente interessante. In questo caso, il bond swap consiste nel vendere il titolo obbligazionario in portafoglio e acquistare il titolo con yield maggiore. In questo esempio, si assume che le due obbligazioni hanno lo stesso rating creditizio, perché è normale che se una delle due società fosse più rischiosa dell'altra ciò potrebbe spiegare il differenziale di rendimento.[12]

Tra i *risk adjusted bond swaps* rientrano le operazioni finanziare denominate *barbell/Bullet swaps.* La *barbell swap* si attua nel momento in cui si prevede una moderata variazione dei tassi e consiste nello scambio di un titolo obbligazionario con altri due titoli obbligazionari di cui uno ha maturity inferiore e uno maturity superiore al titolo in portafoglio, in modo da conservare immutata l'esposizione al rischio del portafoglio. Al contrario la *Bullet strategy* si attua quando si prevede una stazionarietà del livello dei tassi ed è speculare alla *barbell*.

[12] Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, "Investments", McGraw-Hill Education, (2014)

BURBELL STRATEGY

Il 29-Apr-2020 un investitore ha in portafoglio il bond emesso da Eni S.p.A. il 29-Gen-2014, con *face value* di 100 euro, che paga una cedola annuale di 3.625 per 15 anni fino al 29-Gen-2029. L'investitore, valutando le condizioni di mercato, ritiene che uno *yield to maturity* del 1.684% è coerente per il *pricing* del bond; da ciò ne risulta un prezzo di 116.5702 euro, la *duration* del titolo obbligazionario è di 7.69 anni, mentre la *convexity* di 71.72. D'ora in avanti chiameremo questo bond semplicemente con la lettera B, per semplicità.

L'investitore sta tuttavia considerando un'operazione di *hedging* della posizione in portafoglio. Tra le varie possibilità, sta valutando di effettuare un *barbell swap* con altri due bond, anch'essi emessi dalla medesima società.

Il primo dei due è bond emesso da Eni S.p.A. il 29-Gen-2015 con prezzo di emissione di 100 euro, cedola annuale del 1.966% e data di scadenza 27-Gen-2025. In questo caso, l'investitore ritiene che uno *yield to maturity* del 0.751% è coerente con il *pricing* del titolo obbligazionario. Da tale tasso di rendimento ne scaturisce un prezzo di 104.2487 euro, una *duration* di 4.08 anni e una *convexity* di 23.18. Per semplicità espositiva indicheremo questo bond con la lettera A.

Il secondo titolo che sta considerando è il bond emesso da Eni S.p.A. il 21-Set-2009, con *face value* di 100 euro, che paga una cedola annuale di 5.75 euro e data di scadenza 14-Set-2040. In questo caso, l'investitore ritiene che uno *yield to maturity* del 2.848% è coerente con il *pricing* del titolo obbligazionario. Da tale tasso di rendimento ne deriva un prezzo di 147.7979 euro, una *duration* di 17.23 anni e una *convexity* di 316.25. Per semplicità espositiva, indicheremo questo bond con la lettera C.[13]

TABELLA 2: DATI DI 3 BOND EMESSI DA ENI S.P.A. VALUTATI AL 29-APR-2020

TITOLO	Maturity	Prezzo	Yield
A	27-Gen-2025	104.2487	0.751%
B	***29-Gen-2029***	***116.5702***	***1.684%***

[13] I dati relativi ai tre titoli obbligazionari analizzati sono stati presi da: https://mercati.ilsole24ore.com/

C	14-Set-2040	147.7979	2.85%

Quindi alternativa al *bullet investment* nel titolo B, si può proteggere da variazioni del tasso di rendimento, costruendo un portafoglio tramite la *barbell strategy*. Può quindi costruire un portafoglio composto da due titoli: un titolo A con *duration* minore al titolo B e un titolo C con *duration* maggiore al titolo B. In particolare, un *barbell portfolio* deve essere costruito in modo tale che il costo e la *duration* del portafoglio deve essere lo stesso del *bullet investment*. Ovviamente, ciò presenta diversi vantaggi ma anche alcuni svantaggi, verrà tutto analizzato dopo aver costruito il portafoglio.
Sia P il portafoglio composto dai titoli A e C, sia V_P il valore di tale portafoglio e D_P la sua duration, sia V_B il valore del bullet investment nel titolo B e D_B la duration del titolo. Per effettuare la *barbell swap* si richiede che:

$$\begin{cases} V_P = V_B \\ D_P = D_B \end{cases}$$

Indichiamo con V_A e V_C il valore dei titoli A e C. Supponiamo che l'investitore abbia investito un 100 Milioni di euro per il *bullet investment,* ad oggi ne può ricavare 116 milioni circa vendendo il titolo sul mercato e utilizzare i soldi del ricavo per costruire il *barbell portfolio* P.

Deve, quindi, valere:

$$\begin{gathered} V_P = V_B \\ V_A + V_C = V_B \\ V_A + V_C = 116{,}570{,}197 \end{gathered} \tag{5.12}$$

Utilizzando l'equazione (4.10) che descrive come calcolare la *duration* di un portafoglio, indicando con D_A e D_C la duration dei titoli A e C, si richiede che il bullet investment e il *barbell* portfolio abbiano la stessa esposizione al rischio di tasso, quindi che la *duration* del *bullet investment* è uguale al *barbell portfolio* P.[14]

[14] Ricordiamo che nella nostra analisi non si tiene conto del rischio di credito.

$$D_P = D_B$$

$$\frac{V_A}{V_P} \cdot D_A + \frac{V_C}{V_P} \cdot D_C = D_B$$

$$\frac{V_A}{116{,}570{,}197} \cdot 4.08 + \frac{V_C}{116{,}570{,}197} \cdot 17.23 = 7.69 \qquad (5.13)$$

Mettendo a sistema le equazioni (4.12) e (4.13) è possibile mostrare che: $V_A = 84{,}635{,}393$ o il 72.6% del portafoglio e $V_B = 31{,}934{,}807$ o il 27.4% del portafoglio.

È possibile ora analizzare quali sono i vantaggi e gli svantaggi di un *barbell swap*. Utilizzando la relazione (4.11), che descrive come calcolare la *convexity* di un portafoglio di titoli obbligazionari, è possibile calcolare la *convexity* del *barbell porfolio P* formato dai titoli A e C. Indicando con C_P la convexity de portafoglio, con C_A e C_C la convexity dei titoli A e C,

$$C_P = \frac{V_A}{V_P} \cdot C_A + \frac{V_C}{V_P} \cdot C_C$$

$$C_P = 72.6\% \cdot 23.18 + 27.4\% \cdot 316.25 = 103.48$$

Il portafoglio creato, utilizzando la *barbell swap*, ha lo stesso costo e la stessa *duration* del *bullet investment*, presenta tuttavia una *convexity* maggiore (103.48 contro 71.72 del *bullet investment* nel titolo B). Come abbiamo già ricordato, la convexity comporta difatti il vantaggio di smorzare i ribassi del prezzo in seguito ad un rialzo del tasso e di accentuarne i rialzi del prezzo del bond in seguito ad un ribasso del tasso, e per questi motivi è una caratteristica desiderabile.
Per mostrare i vantaggi della *barbell strategy* verranno analizzati diversi scenari di variazione annuale dei tassi. Con un Δi pari a 0.5%, si considerano scenari di variazioni di tassi che vanno da $(i^* - 4\Delta i)$ fino a $(i^* + 15\Delta i)$, cosi da analizzare come cambia il prezzo del titolo B e del portafoglio P all'interno di ogni scenario.
La tabella 2 rappresenta la variazione del prezzo del titolo B a seguito di variazioni del tasso di rendimento.

Tabella 2: Prezzo del titolo B con diversi scenari di variazioni del tasso

	$i^* - 4\Delta i$	$i^* - 3\Delta i$	$i^* - 2\Delta i$	
YTM	-0.324%	0.184%	0.684%	…
Prezzo	135.93	130.75	125.80	

Fonte: Elaborazione personale

La tabella 3 rappresenta la variazione del prezzo del titolo A e C a seguito di variazioni del tasso di rendimento. Il prezzo del portafoglio P è ottenuto ponderando i prezzi dei titoli A e C per il rispettivo peso nel portafoglio.

Tabella 2: Prezzo del portafoglio P con diversi scenari di variazioni del tasso

	$i^* - 4\Delta i$	$i^* - 3\Delta i$	$i^* - 2\Delta i$	
YTM(A)	-1.251%	-0.751%	-0.251%	…
Prezzo(A)	114.24	111.63	109.10	
YTM(C)	0.848%	1.348%	1.848%	…
Prezzo(C)	194.89	181.46	169.20	
Prezzo(P)	136.34	130.76	125.56	…

Fonte: Elaborazione personale

È possibile osservare come più le variazioni di tasso sono consistenti ed estreme più conviene investire nel *barbell portfolio P* piuttosto che nel *bullet investment*. Infatti, in caso di variazioni di tasso molto negativa il valore del portafoglio si mantiene comunque superiore al *bullet investment*. Lo stesso vale per variazioni di tassi molto positive, in questo caso la maggiore *convexity* smorza il ribasso del prezzo e il portafoglio P mostra sempre un valore maggiore del *bullet investment* nel titolo B.

Analizziamo adesso il principale svantaggio un una *barbell strategy*. Lo *yield to maturity* del portafoglio è dato da:

$$y_0 = 72.6\% \cdot 0.751\% + 27.4\% \cdot 2.848\% = 1.33\%$$

comparato con lo *yield to maturity* di 1.684% del bullet investment.
Quindi, il rendimento del *barbell* non sarà mai alto come quello di un *bullet investment* se i tassi restano più o meno ai livelli correnti. Se invece ci si aspetta un'elevata volatilità dei tassi, il *barbell portfolio* sarà più performante del *bullet*. In base al livello di volatilità si preferirà quindi l'uno o l'altro investmento. Naturalmente sono necessari ulteriori calcoli per stabilire quanto devono essere volatiti i tassi per preferire un *barbell* portfolio ad un bullet investment.
Notiamo che è conveniente effettuare lo swap se la variazione dei tassi poi si rivela essere almeno 0.15%.

SIMULAZIONI MONTECARLO

All'istante t_0 il tasso di rendimento del *bullet investment* è 1,68%, sia t_1 l'istante in cui si verifica una variazione dei tassi, il nostro obiettivo è quello di valutare se in t_1 è stato conveniente effettuare la *barbell swap*. Limitiamo quindi la nostra analisi ad un solo periodo temporale, relativamente breve, ossia tra t_0 e t_1.

Per tale scopo ci serviamo delle simulazioni Montecarlo, andiamo quindi a simulare diversi scenari di variazione del livello dei tassi con diverse volatilità, cosi da riuscire a valutare l'efficacia della *barbell swap* in differenti situazioni. Cosi da capire con quale volatilità è più probabile che la variazione dei tassi superi lo 0.15%.

L'algoritmo che useremo è basato sui seguenti step:

1. Definiamo un modello (un'equazione differenziale stocastica) che descriva l'evoluzione dei tassi e che meglio si presta ai nostri scopi.
2. Simuliamo tanti diversi scenari del livello dei tassi al tempo t_1 per un determinato livello di volatilità, generando numeri casuali dalla distribuzione implicita nel modello.
3. Calcoliamo la variazione percentuale dei tassi.
4. Ripetiamo i passaggi (2. e 3.) con volatilità diverse.

IL MODELLO

Considerando il lavoro di Pegoraro in [7] che ha mostrato la capacità del modello elaborato da *Cox, Ingersoll e Ross*[15] di ottenere informazioni economicamente rilevanti sull'andamento futuro dei prezzi dei BTP.
Nel modello di *Cox, Ingersoll e Ross* l'evoluzione del tasso è descritta dalla seguente equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \tag{5.14}$$

dove μ è lineare in r_t e σ è costante nel tempo.
Con $\mu(t, r_t) = k(u - r_t)$ si ottiene una struttura che tiene conto della *mean reversion*, una caratteristica tipica dei tassi di interesse.

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \tag{5.15}$$

con k, μ, σ costanti non negative.
Tuttavia, nel modello la deviazione standard del cambiamento dei tassi a breve in un periodo di tempo ristretto è proporzionale a $\sqrt{r_t}$. Questo significa che se il tasso di interesse a breve è elevato, anche la deviazione standard aumenta, ma significa anche che se i tassi sono vicino a zero l'evoluzione dei tassi è governata esclusivamente dal fattore di deriva. Se i tassi sono vicini a zero, il fattore di deriva spinge l'evoluzione del tasso verso l'alto per effetto della *mean reversion.* Per tal motivo il modello CIR evita la possibilità di tassi di interesse negativi.
Nel modello elaborato da Vasicek, l'evoluzione dei tassi r_t è descritto dalla seguente equazione differenziale:

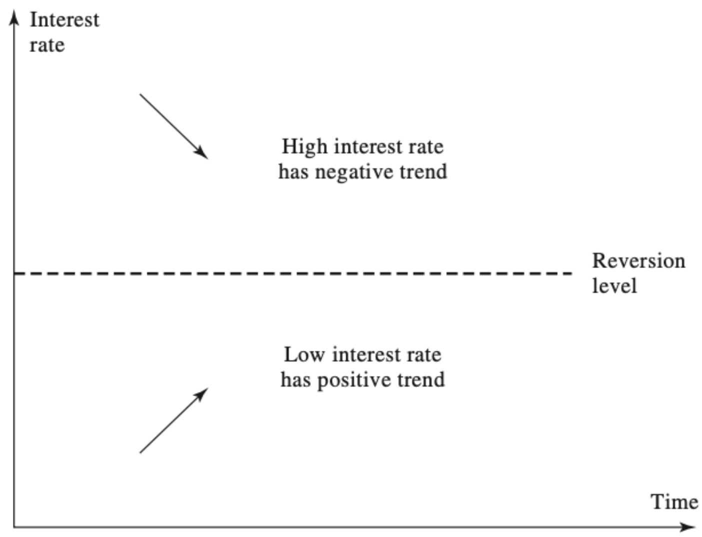
$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{5.16}$$

dove $k, \mu\ e$ σ sono costanti non negative.[16]
Cosi come il CIR model, anche il modello di Vasicek incorpora la proprietà nota come mean reversion, secondo la quale i tassi tendono nel tempo ad essere riportati verso il loro livello medio. In particolare, si può osservare che quando il tasso di interesse r è

[15] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, ''A Theory of the Term Structure of Interest Rates,'' Econometrica, 53 (1985)
[16] O.A. Vasicek, ''An Equilibrium Characterization of the Term Structure,'' Journal of Financial Economics, 5 (1977)

elevato la *mean reversion* tende a determinare un *drift* negativo; quando invece r è basso, la *mean reversion* tende a determinare un *drift* positivo. Il *drift term* è pari a $k(\mu - r)$ e rappresenta la direzione che seguono i tassi nel loro percorso di aggiustamento verso il livello medio. Il parametro k rappresenta la velocità di aggiustamento del tasso r al valore suo medio μ.[17]

Figura 3: Mean reversion



Fonte: Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

Vi sono argomentazioni economiche convincenti a favore della mean reversion. Quando i tassi sono alti, la domanda di fondi da parte dei *borrowers* è bassa e, di conseguenza, i tassi diminuiscono. Quando i tassi sono bassi, tende ad esserci una forte domanda di fondi da parte dei *borrowers* e i tassi tendono ad aumentare.[18]

Il parametro dW_t è un processo di *Wiener*, ossia una variabile aleatoria normale con media nulla e varianza pari a dt. Presenta una varianza proporzionale all'intervallo temporale considerato: in particolare, si ha $dW_t = \varepsilon\sqrt{dt}$, dove ε rappresenta un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata.

Per le simulazioni Montecarlo scegliamo il modello elaborato da Vasicek, assumeremo quindi che le evoluzioni dei tassi possano essere descritte dalla seguente equazione differenziale:

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{5.16}$$

[17] Padovani Maria Cristina, "I modelli strutturali per la valutazione dei corporate debt. Creditgrades: un modello strutturale di recente creazione", Lulu Press Inc. (2018)

[18] Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

Il *modello di Vasicek* è un *modello univariato*, ovvero un modello che utilizza una singola variabile (i tassi di interesse a breve) per descrivere l'intera yield curve. Solitamente, un *modello univariato* è scritto nella forma $dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t$, dove sia il *drift* $\mu(r_t)$ che la volatilità $\sigma(r_t)$ sono funzioni solo di r_t e non anche del tempo t. Con questa scelta, tutte le scadenze della *term structure* sono descritte da un'unica variabile stocastica. In altre parole, il *Vasicek's model* implica una correlazione perfetta tra i movimenti della *yield curve* a differenti *maturities*. Un modello univariato implica che tutti i tassi si muovono tutti nella stessa direzione in qualsiasi intervallo di tempo breve, ma non che si muovano tutti dello stesso ammontare. La forma della curva zero-coupon può quindi cambiare con il passare del tempo.

Per il nostro scopo questi limiti non ci appaiono cosi restrittivi, in quanto stiamo considerando un periodo relativamente breve di variazione dei tassi (il periodo che va da t_0 a t_1), inoltre le tecniche di immunizzazione basate sulla *duration* finora mostrate sono basate su shift paralleli della *yield curve*.

Dopo aver scelto il modello, il prossimo passo consiste nel determinare i parametri dai movimenti passati nel tasso di interesse a breve termine. I dati possono essere raccolti su variazioni giornaliere, settimanali o mensili e i parametri possono essere stimati facendo una regressione di Δr contro r, o usando i metodi di massima verosimiglianza.[19]

Decidiamo di utilizzare l'EURIBOR a 1 mesi come *proxy* del tasso di interesse a breve. Consideriamo, quindi, la serie storica giornaliera del tasso EURIBOR a 1 mese dal 02 Gennaio 2015 fino al 30 Aprile 2020 e calcoliamo la variazione del tasso tra il giorno i e il giorno $i-1$. Abbiamo 1350 osservazione del tasso r_t a cui corrispondono 1349 variazioni del tasso Δr. A questo punto ci affidiamo a RStudio per effettuare una semplice regressione lineare con la funzione *lm( )*. I risultati della regressione lineare sono illustrati nella Figura 4.

[19] Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

Consideriamo la relazione:

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{5.16}$$

Dalla figura 4 si evince che l'intercetta della regressione è -0.0012254, mentre la pendenza della retta di regressione è -0.0027267, infine lo *standard error* dei residui è $-$
0.004499. Considerando 250 osservazioni annuali e seguendo l'argomentazione di [3] si ottiene: $k = 0.6816$, $\mu = -0.4494\ e\ \sigma = 0.0711$.

Allora possiamo riscrivere la relazione (5.16) come:

$$dr_t = 0.6816\ x\ (-0.4494 - r_t)dt + 0.0711\ x\ \varepsilon\sqrt{dt} \tag{5.17}$$

Figura 4: Regressione lineare con RStudio

```
Call:
lm(formula = Seriestorica_euribor$Delta_r ~ Seriestorica_euribor$r)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.049920  0.000217  0.000217  0.000298  0.039808

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)            -0.0012254  0.0003265  -3.753 0.000182 ***
Seriestorica_euribor$r -0.0027267  0.0009490  -2.873 0.004126 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.004499 on 1347 degrees of freedom
  (1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.006092,  Adjusted R-squared:  0.005354
F-statistic: 8.256 on 1 and 1347 DF,  p-value: 0.004126
```

Fonte: Elaborazione personale

Costruiamo quindi un codice in VBA che ci permetta di simulare diversi scenari di variazione del livello di tassi, per diverse volatilità. Abbiamo capito nell'analisi precedente sulla *barbell strategy* che se la variazione dei tassi supera lo 0.15% allora è conveniente effettuare la *barbell* swap. Andiamo adesso a plottare le variazioni dei tassi e vediamo con quale frequenza si verifica $|\Delta r_t| > 0.15\%$.

Nel codice abbiamo inserito l'algoritmo di Box-Muller, un metodo per generare coppie di numeri casuali indipendenti e distribuiti secondo una normale con media nulla e varianza uno.[20]

Come si può vedere dal codice abbiamo scelto di effettuare 10000 simulazioni. Calcoliamo poi quante volte la variazione del tasso $|\Delta r_t| > 0.15\%$, cosi possiamo ottenere una frequenza di scenari di variazione favorevoli alla *barbell strategy*.

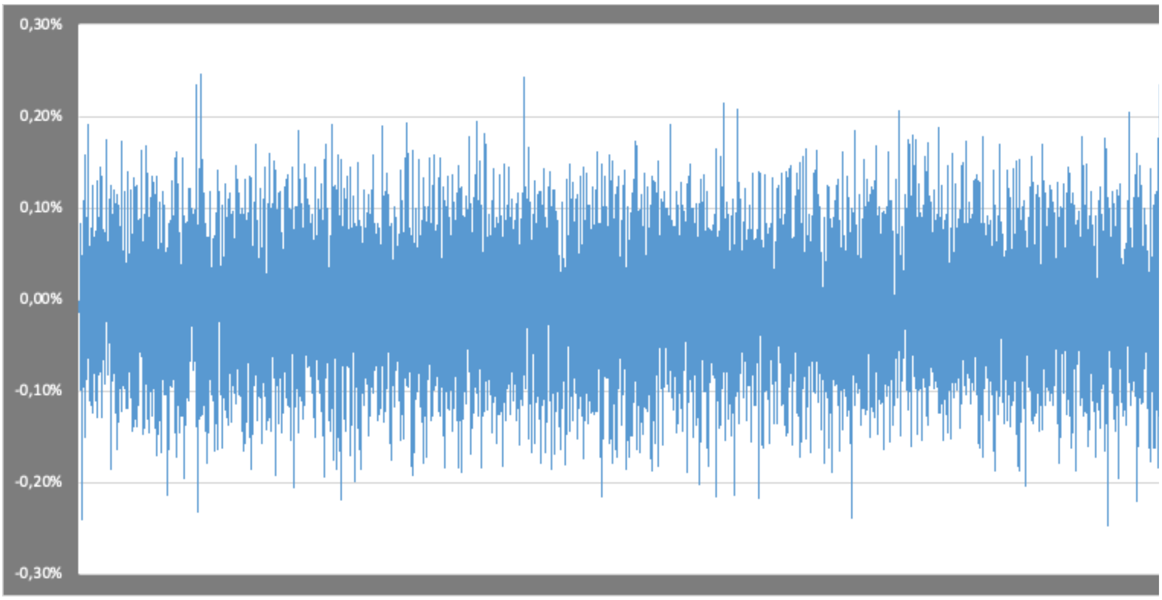
Ci serviamo della relazione (4.17), e il valore dell'EURIBOR al 30 Aprile 2020 è -0.46, per cui $r_0 = -0.46$.

```
Sub Vasiceksmodel()

'Dati
k = Worksheets("CIRmodel").Range("B1")
mu = Worksheets("CIRmodel").Range("B2")
sigma = Worksheets("CIRmodel").Range("B3")
dt = Worksheets("CIRmodel").Range("B4")
r0 = Worksheets("CIRmodel").Range("B5")
Pi = Worksheets("CIRmodel").Range("B6")

'Simulazioni
For i = 1 To 10000
        r = r0

        'Algoritmo di Box-Muller per generare numeri casuali
         random1 = Rnd
         random2 = Rnd
         theta = 2 * Pi * random2
         rho = (-2 * Log(random1)) ^ 0.5
         epsilon = rho * Cos(theta)

         'Equazione differenziale stocastica del modello di Vasicek
         r = r + k * (mu - r) * dt + sigma * epsilon * (dt ^ 0.5)

'Risultati:
   'Numero di simulazioni
   Worksheets("CIRmodel").Cells(10 + i, 1) = i
   'Valori di r
   Worksheets("CIRmodel").Cells(10 + i, 2) = r
   'Valori di Δr
   Worksheets("CIRmodel").Cells(10 + i, 3) = r-r0

Next i
End Sub
```

[20] wikipedia.org

Con una volatilità σ = 1%, simuliamo diversi scenari di variazione dei tassi e sono raffigurati nella figura 5. L'asse delle ascisse rappresenta il numero delle simulazioni mentre l'asse delle ordinate riporta la variazione del tasso. In 289 scenari su 10000 la variazione del tasso è stata superiore a 0.15%, e in quei 289 casi la variazione del tasso non è stata cosi elevata da consentire un ampio guadagno. Concludiamo quindi che con una volatilità del 1% non sarebbe opportuno effettuare una strategia di *barbell swap* tra il titolo obbligazionario (B) e il portafoglio formato dai titoli A e C.

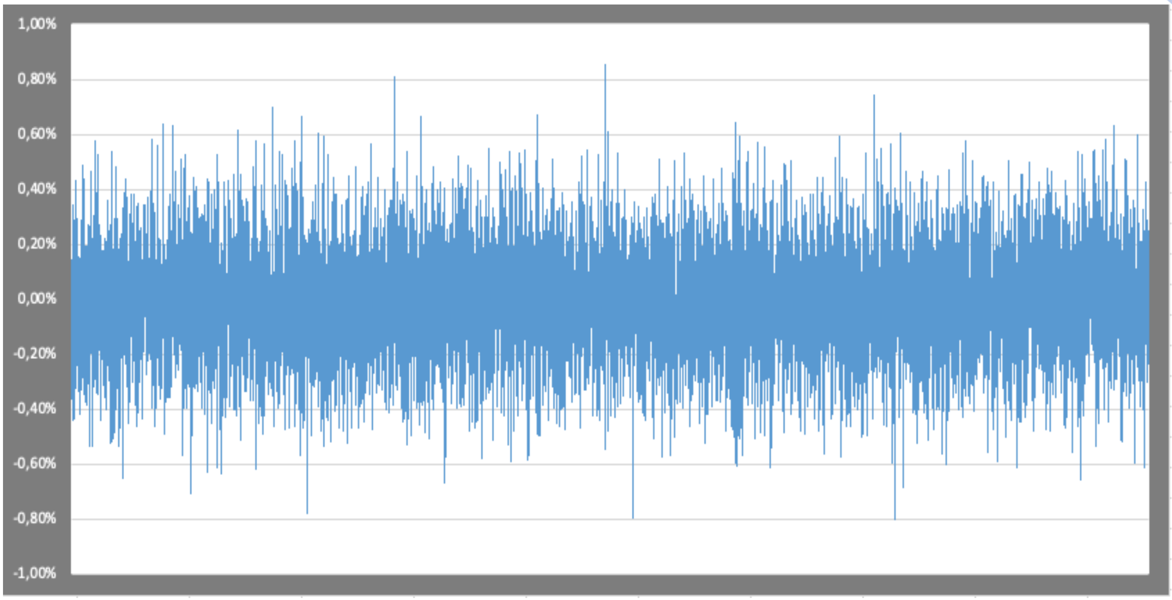
Figura 5: Variazioni simulate del tasso con una volatilità del 1%



Fonte: Elaborazione personale

Già con una volatilità σ = 3%, otteniamo un numero maggiori di variazioni favorevoli al *barbell swap*. In 4652 scenari su 10000 la variazione del tasso è stata superiore a 0.15%. Con una volatilità del 3% quasi uno scenario su due fa favorire il *barbell portfolio* al *bullet investment*, in quanto offre un rendimento più basso ma offre una maggiore protezione in caso di variazione inattesa dei tassi.

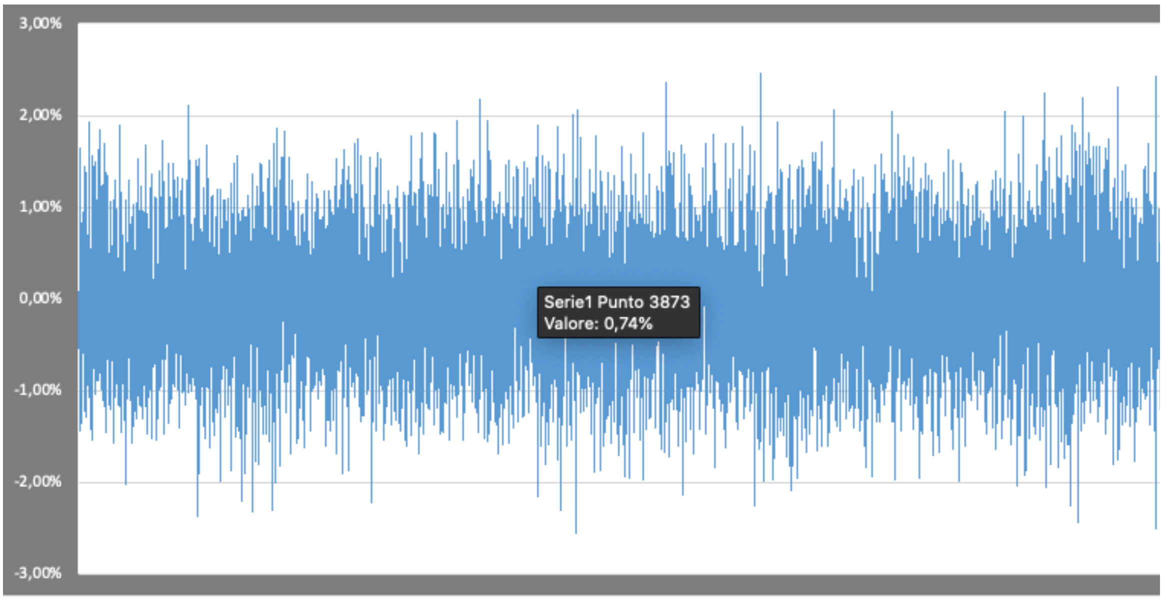
Figura 6: Variazioni simulate del tasso con una volatilità del 3%



Fonte: Elaborazione personale

La figura 7 rappresenta scenari di variazione dei tassi una volatilità $\sigma = 10\%$. In 8782 scenari su 10000 la variazione del tasso è stata superiore a 0.15%. Con una volatilità cosi alta il *barbell portfolio* è sicuramente favorito al *bullet investment*.

Figura 7: Variazioni simulate del tasso con una volatilità del 10%



Fonte: Elaborazione personale

LIMITI DELLA BARBELL STRATEGY

La *barbell strategy* non è una vera e propria tecnica di immunizzazioni di portafoglio, in quanto il portafoglio *barbell* non è propriamente immunizzato da variazione dei tassi. Ad ogni modo, possiamo sicuramente affermare che il *barbell* portfolio risponde meglio, in termini di maggior guadagno o di minor perdita, in determinate situazioni, a variazione dei tassi. Abbiamo, infatti, osservato che se la variazione dei tassi al ribasso è consistente, il portafoglio *barbell*, che è dotato di una maggiore *convexity*, permette di ottenere un profitto maggiore. È vero anche che in caso di una consistente variazione dei tassi al rialzo, il portafoglio *barbell* permette di minimizzare le perdite, anche se non ne permette l'azzeramento. Quindi, per coloro i quali l'azzeramento delle perdite risulta un punto cardine della strategia di immunizzazione di portafoglio, la *barbell strategy* può non essere sufficiente.

Proponiamo nel resto della trattazione politiche di immunizzazione di un portafoglio di titoli obbligazionari realizzate mediante il ricorso alla negoziazione di strumenti derivati.

HEDGING TRAMITE FUTURE

In questa sessione utilizzeremo il mercato dei future per ridurre il rischio di un particolare portafoglio di titoli obbligazionari. Il nostro obiettivo è quello di ricavare un *hedge ratio* che possiamo usare per formare portafogli coperti da particolari rischi. Gli *hedge ratios* hanno l'obiettivo di minimizzare la variazione di valore di un portafoglio. Per la presente trattazione utilizzeremo *regression-based hedge ratio*.

Sia P il portafoglio formato da titoli obbligazionari e strumenti di *hedging* e V_P il valore del portafoglio. Il portafoglio P è composto da una posizione lunga in titoli obbligazionari B e una posizione corta in strumenti di *hedging* (nel nostro caso *futures*) F.

L'hedge ratio h è il rapporto tra la grandezza della posizione assunta nei contratti *futures* e la grandezza dell'esposizione. Quando l'attività sottostante il contratto *futures* è uguale all'attività che si desidera coprire, è naturale utilizzare un *hedge ratio* di 1,0. Tuttavia, ciò non sempre accade. Ci chiediamo allora su quale criterio scegliere l'*hedge ratio*. L'*hedger* dovrebbe scegliere un valore per il rapporto di copertura che minimizzi la varianza del valore della posizione coperta.[21]

Si consideri la seguente relazione:

$$V_P = B - hF,$$

allora la variazione di valore del portafoglio si può esprimere come:

$$\Delta V_P = \Delta B - h\,\Delta F.$$

Il nostro obiettivo è di minimizzare la varianza della variazione di valore del portafoglio, in termini matematici:

$$\min_h \mathrm{Var}(\Delta V_P) = \min_h Var(\Delta B - h\Delta F).$$

Indicando con ${\sigma_P}^2$ la varianza delle variazioni di valore del portafoglio P, con ${\sigma_B}^2$ e ${\sigma_F}^2$ la varianza delle variazioni del prezzo del titolo obbligazionario che vogliamo coprire e, rispettivamente, la varianza delle variazioni nel prezzo del future utilizzato per la copertura, si ha che:

[21] Fonte: [3]

$$\sigma_P{}^2 = \sigma_B{}^2 + h^2\sigma_F{}^2 - 2h\sigma_{BF} \qquad (5.18)$$

dove σ_{BF} indica la covarianza tra variazione della posizione del titolo obbligazionario ΔB e la variazione della posizione dello strumento di *hedging* ΔF.

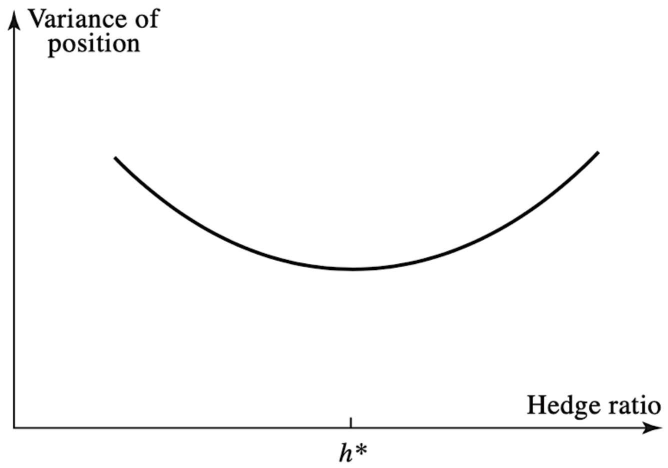
Assumendo che la funzione che esprime la varianza del portafoglio $\sigma_P{}^2(h)$ sia convessa rispetto ad h[22], come mostrato in figura 8, possiamo trovare il valore minimo della funzione e quindi la varianza minima, attraverso la condizione del primo ordine, semplicemente ponendo la derivata prima della funzione uguale a zero.[23] La condizione del secondo ordine impone che la derivata seconda della funzione $\sigma_P{}^2(h)$ rispetto ad h sia uniformemente positiva.

[22] Una funzione $f(x)$ definita su un intervallo I è convessa su I se comunque presi x_1 e x_2 nell'intervallo I è verificata la seguente relazione:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad per\ ogni\ t \in [0,1]$$

[23] Siamo sicuri che la funzione sia continua e derivabile rispetto ad h in quanto è una funzione quadratica e quindi somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni continue e derivabili.

Figura 8: Relazione tra varianza del portafoglio e hedge ratio



Fonte: Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

La figura 8 mostra la relazione tra la varianza del portafoglio e l'hedge ratio. Inizialmente la varianza si riduce all'aumentare di h, fino ad arrivare al punto di minimo h^* e poi riprende a salire. Il punto di minimo può essere identificato nel punto in cui la tangente alla curva ${\sigma_P}^2(h)$ ha pendenza nulla.

Dalla relazione (4.18) otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial h}\,{\sigma_P}^2(h) = 0 + 2\,h\,{\sigma_F}^2 - 2\sigma_{BF}$$

La condizione del primo ordine impone:

$$\frac{\partial}{\partial h}\,{\sigma_P}^2(h) = 0$$

Si ottiene, quindi:

$$h^* = \frac{\sigma_{BF}}{{\sigma_F}^2}$$

Possiamo a questo punto riscrivere la covarianza tra ΔB e ΔF come il prodotto delle relative deviazioni standard e il coefficiente di correlazione tra ΔB e ΔF, che indichiamo con ρ_{BF}.
Per cui otteniamo:

$$h^* = \frac{\rho_{BF}\, \sigma_B}{\sigma_F} \tag{5.19}$$

L'equazione (5.19) mostra che l'*hedge ratio* ottimale è dato dal prodotto tra il coefficiente di correlazione tra ΔB e ΔF e il rapporto tra le deviazioni standard di ΔB e ΔF.
Occorre notare che se $\rho = 1$ e $\sigma_F = \sigma_B$, allora l'hedge ratio ottimale $h^* = 1.0$, infatti in questo caso il prezzo dei future rispecchia perfettamente il prezzo spot.[24]
Può essere mostrato che l'hedge ratio ottimale h^* è l'inclinazione della retta di regressione (β) in una regressione lineare di ΔB contro ΔF. Si consideri:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \tag{5.20}$$

dove y_t è la serie storica delle osservazioni della variabile dipendente, ovvero la variazione nel prezzo del bond che abbiamo intenzione di coprire; x_t è la serie storica delle osservazioni della variabile indipendente, ovvero la variazione nel prezzo dello strumento di copertura. I parametri α e β sono i parametri stimati mediante la regressione OLS e ε_t è la serie storica degli errori prodotti dalla regressione.

[24] Fonte: [3]

Assumiamo di avere in portafoglio il BTP IT0003934657 con scadenza 01 Febbraio 2037. Il titolo frutta interessi annui lordi posticipati, pagabili semestralmente il 1° febbraio e il 1° agosto di ciascun anno a partire dal 1° febbraio 2006 e pari al 4% del valore nominale di 100 euro.

Oggi è il 29 Aprile 2020 e desideriamo coprire la posizione in BTP, dobbiamo scegliere un future che presenta un elevata correlazione con il BTP. Tuttavia, non avendo modo di reperire dati sui future e quindi non avendo modo di fare una scelta ottimale, ci costruiamo una serie storia simulata del prezzo dei future in modo tale che la variazione nel prezzo del BTP e la variazione nel prezzo del future presentino un'elevata correlazione.

Utilizziamo le simulazioni Montecarlo per calcolare le variazioni nel prezzo dei future al tempo *t* (ΔF_t), servendoci della serie storica del prezzo del BTP. Assumiamo che le variazioni nel prezzo del BTP al tempo *t* (ΔB_t) e le variazioni nel prezzo dei future al tempo *t* (ΔF_t) siano legate dalla seguente relazione:

$$\Delta F_t = \Delta B_t + \varepsilon_t \tag{5.21}$$

dove $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{9})$.[25]

```
Sub VariazioniFuture()

'Simulazioni
For i = 1 To 882

        'Algoritmo di Box-Muller
         random1 = Rnd
         random2 = Rnd
         theta = 2 * Pi * random2
         rho = (-2 * Log(random1)) ^ 0.5
         epsilon = rho * Cos(theta)

'Risultati:
   Worksheets("Future").Cells(6 + i, 10) = epsilon / 3

Next i
End Sub
```

[25] Scegliamo di utilizzare in modo arbitrario una varianza, relativamente bassa, di $\frac{1}{9}$ per ottenere un coefficiente di correlazione elevato tra la serie storica della variazione nel prezzo del BTP e la serie storica simulata della variazione nel prezzo del future.

Consideriamo la serie storica del prezzo del BTP dal 01 Gennaio 2017 al 29 Aprile 2020, calcoliamo le variazioni giornaliere del prezzo del BTP, ottenendo 882 osservazioni. A partire da ciò simuliamo 882 scenari di variazioni giornaliere del prezzo del future in VBA tramite la relazione (5.21). Con la simulazione otteniamo un coefficiente di correlazione tra le due serie storiche di +0.9441. La figura 9 mostra il prezzo del BTP e del Future simulato dal 30 Dicembre 2016 al 29 Aprile 2020.

Figura 9: Prezzo del BTP e prezzo del future simulato

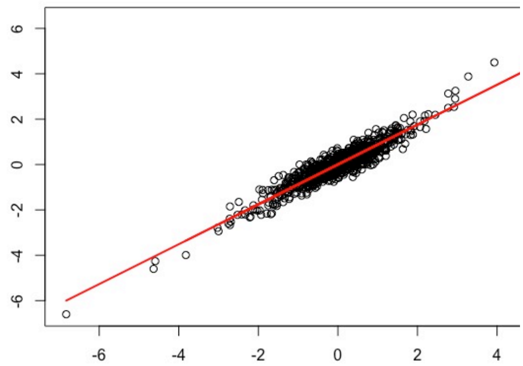
Fonte: Elaborazione Personale

Per trovare l'hedge ratio ottimale h^* decidiamo di fare una regressione lineare scegliendo le variazioni nel prezzo del BTP come variabile dipendente e le variazioni nel prezzo del future simulato come variabile indipendente. In questo modo il beta della simulazione corrisponderà all'hedge ratio ottimale. La figura 10.a) mostra il risultato della regressione su RStudio.

Figura 10.a) Regressione lineare con RStudio

Figura 10.b) Retta di regressione

```
Call:
lm(formula = Variazioni$btp ~ Variazioni$future)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.88042 -0.21408  0.00169  0.20850  1.04416

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|
(Intercept)       0.001077   0.010299   0.105    0.
Variazioni$future 0.878568   0.010346  84.922   <2e
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.

Residual standard error: 0.3059 on 880 degrees of f
Multiple R-squared:  0.8912,    Adjusted R-squared:
F-statistic:  7212 on 1 and 880 DF,  p-value: < 2.2
```



Fonte: Elaborazione personale

La figura 10.b) mostra la relazione positiva tra le variazioni nel prezzo del BTP e le variazioni nel prezzo del future simulato e, in rosso, la retta di regressione.

Dalla figura 10.a) possiamo notare che il beta della regressione e quindi anche l'hedge ratio ottimale è di 0.8786. Ciò indica, in base a quale è il valore del portafoglio da coprire, qual è il numero di contratti future da *shortare* per coprire la posizione. Supponiamo di aver fatto un investmento di 3 Milioni di euro nel BTP. L'hedge ratio ottimale suggerisce che ogni 100 000 euro che desideriamo coprire occorre vendere 0.8786 contratti future. Allora per coprire la posizione sul BTP occorre vendere 26.36 (in pratica 26) contratti future.

CENNI SULLA DURATION-BASED HEDGE RATIO

Seguendo la trattazione di [3], si consideri la situazione in cui una posizione in un bond sia coperta tramite un *interest rate future*. Sia:

V_F:	Il prezzo di un contratto *interest rate future*
D_F:	Duration dell'attività sottostante il contratto future con maturity del contratto future
B:	Valore a termine del portafoglio di bond oggetto di copertura alla scadenza della copertura (in pratica, si presume che sia uguale al valore del portafoglio oggi)
D_B:	Duration del portafoglio di bond

Sia P il portafoglio formato da titoli obbligazionari e strumenti di *hedging* e V_P il valore del portafoglio. Il portafoglio P è composto da una posizione lunga in titoli obbligazionari B e una posizione corta in strumenti di *hedging*, nel nostro caso *futures*. L'hedge ratio K rappresenta il numero di futures che dovrebbero essere venduti per coprire la posizione in bond. Si consideri la seguente relazione:

$$V_P = B - KV_F,$$

allora la variazione di valore del portafoglio si può esprimere come:

$$\Delta V_P = \Delta B - K\, \Delta V_F. \tag{5.22}$$

Ricordando la relazione (5.4), assumendo che le variazioni nello yield, sia del bond che dello strumento di *hedging*, sia lo stesso per tutte le scadenze,[26] si può ottenere:

$$\Delta B \cong -D_B\, B\, \Delta y_B. \tag{5.23}$$

$$\Delta V_F \cong -D_F\, V_F\, \Delta y_F. \tag{5.24}$$

[26] Ciò significa che assumiamo che possono presentarsi soltanto shift paralleli della yield curve.

In genere, si assume che le variazioni dello yield del bond sia in qualche modo correlato alle variazioni dello yield dello strumento di hedging. Sia assume, quindi, una relazione del tipo:

$$\Delta y_B = s\,\Delta y_F + \varepsilon \tag{5.25}$$

dove s è una costante e indica lo spread tra Δy_B e Δy_F.

Sostituendo la (5.23) e la (5.24) nell'equazione (5.22) si ottiene:

$$\Delta V_P \cong -D_B\, B\, \Delta y_B - K\,(-D_F\, V_F\, \Delta y_F). \tag{5.26}$$

Sostituendo la relazione (5.25) nella relazione (5.26) si ottiene:

$$\Delta V_P \cong -D_B\, B\,(s\,\Delta y_F + \varepsilon) - K\,(-D_F\, V_F\, \Delta y_F) \tag{5.27}$$

Raggruppando, a questo punto, rispetto a Δy_F e ε:

$$\Delta V_P \cong (KD_F V_F - D_B Bs)\Delta y_F - D_B B\varepsilon \tag{5.28}$$

Ricordiamo che l'obiettivo è di minimizzare la varianza della variazione di valore del portafoglio, e quindi:

$$\min_K Var(\Delta V_P) = \min_K Var\big((KD_F V_F - D_B Bs)\Delta y_F - D_B B\varepsilon\big)$$

$$= \min_K\big((KD_F V_F - D_B Bs)^2 Var(\Delta y_F) - (D_B B)^2 Var(\varepsilon)\big)$$

Per minimizzare rispetto a K la relazione occorre calcolare la derivata prima e porla uguale a zero. Indicando con ${\sigma_P}^2$ la varianza delle variazioni di valore del portafoglio P,

$$\frac{\partial}{\partial K}\,{\sigma_P}^2(K) = 0$$

Per cui si ottiene:

$$KD_FV_F - D_BBs = 0$$

Da cui:

$$K^* = \frac{D_BBs}{D_FV_F} \tag{5.29}$$

Se assumiamo che le variazioni dello yield del bond e le variazioni dello yield dello strumento di *hedging* sono uguali, e quindi $s = 1$, si ottiene:

$$K^* = \frac{D_BB}{D_FV_F} \tag{5.30}$$

Altrimenti lo spread tra le variazioni dello yield del bond e le variazioni dello yield dello strumento di *hedging* può essere stimato mediante una regressione OLS.

RIASSUNTO

Nella sua forma più semplice, un titolo a reddito fisso è una obbligazione finanziaria emessa da una qualsiasi entità che, per reperire liquidità immediata, promette di pagare un determinato ammontare di denaro generalmente sotto forma di pagamenti di interessi periodici e del rimborso del capitale iniziale a specifiche date future.

Uno stato, una società o un ente pubblico nel momento in cui effettua l'emissione di un bond si sta impegnando a ripagare il capitale preso a prestito a una determinata scadenza, perciò si distingue tra obbligazioni a breve e lungo termine.

In via generale ciò che contraddistingue un'obbligazione sono:

- Il valore nominale, ovvero quanto l'emittente si impegna a restituire, quindi la quota parte del debito indicata sull'obbligazione e sulla quale sono calcolati gli interessi.
- Il prezzo di emissione, che rappresenta l'importo che l'obbligazionista si impegna a versare all'atto della sottoscrizione dell'obbligazione e che può essere superiore, pari o inferiore al valore nominale dell'obbligazione.

La cedola (annuale, semestrale o trimestrale), che indica invece l'interesse che il possessore del bond incasserà periodicamente per tutta la durata del titolo o comunque per tutto il tempo in cui lo terrà in portafoglio.

Malgrado il mercato obbligazionario sia considerevolmente più ampio in termini di valore rispetto al mercato azionario, le dinamiche che lo contraddistinguono sono di solito messe da parte e spesso incomprese dall'ampia platea degli investitori retail; proverò quindi a spiegarne il funzionamento e le peculiarità.

Quando si parla di efficienza e di mercato obbligazionario, la questione liquidità desta molta preoccupazione agli investitori in quanto per definizione i titoli obbligazionari sono poco liquidi. Per rischio di liquidità si intende la capacità di un investitore di acquistare o vendere uno strumento finanziario, in tempi rapidi e a costi accessibili, senza influenzare il prezzo dello strumento stesso: quindi tanto più uno strumento è liquido, tanto più è facile effettuare transazioni efficienti aventi ad oggetto quello strumento.

DURATION

La *duration* di uno strumento finanziario è definita come la media ponderata delle scadenze dei flussi di cassa ad esso associati, dove ogni scadenza viene ponderata per il rapporto fra il valore attuale del flusso associato a quella scadenza e il prezzo (o valore di mercato) dello strumento finanziario.

Siano F_t il flusso di cassa associati ad un bond al tempo t, con $1 \leq t \leq T$, dove T rappresenta la maturity del bond, sia P il prezzo del titolo obbligazionario, sia y_0 il tasso yield to maturity, la duration è definita come:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t \cdot (1+y_0)^{-t}}{P}. \tag{5.1}$$

La *duration* è un indicatore del grado di rischio di un titolo obbligazionario in quanto misura la sensibilità del suo prezzo a variazioni nel tasso di rendimento di mercato.

Una variazione del tasso interno di rendimento da (y_0) a $(y_0 + \Delta y)$ modifica il prezzo del titolo obbligazionario da $P(y_0)$ a $P(y_0 + \Delta y)$. Sia ΔP definito come la differenza tra $P(y_0)$ e $P(y_0 + \Delta y)$, allora vale la seguente relazione:

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{D}{1+y_0} \cdot \Delta y\,. \tag{5.2}$$

L'espressione $\frac{D}{1+y_0}$ viene definita *duration modificata* (DM) e consente di valutare l'impatto sul prezzo di un titolo obbligazionario di una variazione infinitesima del tasso di rendimento.

$$DM = -\frac{\partial P}{\partial y_0} \cdot \frac{1}{P} \tag{5.3}$$

A questo punto, per ottenere la relazione (9.2) è sufficiente considerare variazioni finte del tasso di rendimento (Δy).

$$\frac{\Delta P}{P(y_0)} \cong -DM \cdot \Delta y \tag{5.4}$$

La *duration* permette di cogliere la pendenza della relazione prezzo-rendimento. Si consideri la figura 2 che mostra come varia il prezzo di un titolo obbligazionario al variare del tasso di rendimento e come viene approssimato questo risultato utilizzando una sola approssimazione del primo ordine. Graficamente, utilizzare la duration significa approssimare la funzione prezzo con una retta tangente alla curva nel punto (y_0, P_0).

Se guardiamo indietro alla definizione di duration nell'equazione (5.1) notiamo che tutti i flussi di cassa F_t relativi a diverse scadenze sono stati scontati con un unico tasso y_0, ciò equivale a dire che i tassi di mercato i_t sono pari a y_0 per ogni t. L'ipotesi a cui abbiamo fatto ricorso è quindi che la curva dei tassi zero-coupon sia piatta.

È evidente che una simile ipotesi limita la validità delle tecniche di immunizzazione basate sulla duration nel momento in cui la curva dei tassi zero-coupon non è piatta. Per superare questa ipotesi è sufficiente considerare un regime d'interesse diverso. Infatti, anziché considerare il regime dell'interesse composto annuo è sufficiente utilizzare l'interesse composto continuo per rilassare l'ipotesi di curva dei tassi piatta. In effetti, il valore attuale di un titolo obbligazionario può riscriversi come:

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \mathrm{F_t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i_t t}}$$

e la duration diventa:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t \cdot e^{-i_t t}}{P}$$

Cosi facendo infatti, possiamo utilizzare specifici tassi i_t per ogni diversa scadenza e quindi non è più richiesta l'ipotesi che la curva dei tassi sia piatta.

La convexity diventa:

$$C = \sum_{t=1}^{T} t^2 \cdot \frac{F_t \cdot e^{-i_t t}}{P}$$

C'è tuttavia un altro limite importante delle tecniche di immunizzazione basate sulla duration, ovvero l'ipotesi che le variazioni dei tassi Δi sono uguali per tutte le scadenze. Non sono, dunque, possibili *twist* della curva dei tassi zero-coupon, ovvero variazioni dei tassi differenziate per le diverse scadenze, ma soltanto *shift* paralleli.

Tuttavia, Litterman e Scheinkman, in [5], mostrano come l'82% dei movimenti della *yield curve* sono *shift* paralleli.

BURBELL STRATEGY

Il 29-Apr-2020 un investitore ha in portafoglio il bond emesso da Eni S.p.A. il 29-Gen-2014, con *face value* di 100 euro, che paga una cedola annuale di 3.625 per 15 anni fino al 29-Gen-2029. L'investitore, valutando le condizioni di mercato, ritiene che uno *yield to maturity* del 1.684% è coerente per il *pricing* del bond; da ciò ne risulta un prezzo di 116.5702 euro, la *duration* del titolo obbligazionario è di 7.69 anni, mentre la *convexity* di 71.72. D'ora in avanti chiameremo questo bond semplicemente con la lettera B, per semplicità.

L'investitore sta tuttavia considerando un'operazione di *hedging* della posizione in portafoglio. Tra le varie possibilità, sta valutando di effettuare un *barbell swap* con altri due bond, anch'essi emessi dalla medesima società.

Il primo dei due è bond emesso da Eni S.p.A. il 29-Gen-2015 con prezzo di emissione di 100 euro, cedola annuale del 1.966% e data di scadenza 27-Gen-2025. In questo caso, l'investitore ritiene che uno *yield to maturity* del 0.751% è coerente con il *pricing* del titolo obbligazionario. Da tale tasso di rendimento ne scaturisce un prezzo di 104.2487 euro, una *duration* di 4.08 anni e una *convexity* di 23.18. Per semplicità espositiva indicheremo questo bond con la lettera A.

Il secondo titolo che sta considerando è il bond emesso da Eni S.p.A. il 21-Set-2009, con *face value* di 100 euro, che paga una cedola annuale di 5.75 euro e data di scadenza 14-Set-2040. In questo caso, l'investitore ritiene che uno *yield to maturity* del 2.848% è coerente con il *pricing* del titolo obbligazionario. Da tale tasso di rendimento ne deriva un prezzo di 147.7979 euro, una *duration* di 17.23 anni e una *convexity* di 316.25. Per semplicità espositiva, indicheremo questo bond con la lettera C.

TABELLA 2: DATI DI 3 BOND EMESSI DA ENI S.P.A. VALUTATI AL 29-APR-2020

TITOLO	Maturity	Prezzo	Yield
A	27-Gen-2025	104.2487	0.751%
B	***29-Gen-2029***	***116.5702***	***1.684%***
C	14-Set-2040	147.7979	2.85%

Quindi alternativa al *bullet investment* nel titolo B, si può proteggere da variazioni del tasso di rendimento, costruendo un portafoglio tramite la *barbell strategy*. Può quindi costruire un portafoglio composto da due titoli: un titolo A con *duration* minore al titolo B e un titolo C con *duration* maggiore al titolo B. In particolare, un *barbell portfolio* deve essere costruito in modo tale che il costo e la *duration* del portafoglio deve essere lo stesso del *bullet investment*. Ovviamente, ciò presenta diversi vantaggi ma anche alcuni svantaggi, verrà tutto analizzato dopo aver costruito il portafoglio.
Sia P il portafoglio composto dai titoli A e C, sia V_P il valore di tale portafoglio e D_P la sua duration, sia V_B il valore del bullet investment nel titolo B e D_B la duration del titolo. Per effettuare la *barbell swap* si richiede che:

$$\begin{cases} V_P = V_B \\ D_P = D_B \end{cases}$$

Indichiamo con V_A e V_C il valore dei titoli A e C. Supponiamo che l'investitore abbia investito un 100 Milioni di euro per il *bullet investment,* ad oggi ne può ricavare 116 milioni circa vendendo il titolo sul mercato e utilizzare i soldi del ricavo per costruire il *barbell portfolio* P.

Deve, quindi, valere:

$$V_P = V_B$$
$$V_A + V_C = V_B$$
$$V_A + V_C = 116{,}570{,}197 \tag{5.12}$$

Utilizzando l'equazione (4.10) che descrive come calcolare la *duration* di un portafoglio, indicando con D_A e D_C la duration dei titoli A e C, si richiede che il bullet investment e il *barbell* portfolio abbiano la stessa esposizione al rischio di tasso, quindi che la *duration* del *bullet investment* è uguale al *barbell portfolio* P.

$$D_P = D_B$$

$$\frac{V_A}{V_P} \cdot D_A + \frac{V_C}{V_P} \cdot D_C = D_B$$

$$\frac{V_A}{116{,}570{,}197} \cdot 4.08 + \frac{V_C}{116{,}570{,}197} \cdot 17.23 = 7.69 \tag{5.13}$$

Mettendo a sistema le equazioni (4.12) e (4.13) è possibile mostrare che: $V_A = 84{,}635{,}393$ o il 72.6% del portafoglio e $V_B = 31{,}934{,}807$ o il 27.4% del portafoglio.

È possibile ora analizzare quali sono i vantaggi e gli svantaggi di un *barbell swap.* Utilizzando la relazione (4.11), che descrive come calcolare la *convexity* di un portafoglio di titoli obbligazionari, è possibile calcolare la *convexity* del *barbell porfolio P* formato dai titoli A e C. Indicando con C_P la convexity de portafoglio, con C_A e C_C la convexity dei titoli A e C,

$$C_P = \frac{V_A}{V_P} \cdot C_A + \frac{V_C}{V_P} \cdot C_C$$

$$C_P = 72.6\% \cdot 23.18 + 27.4\% \cdot 316.25 = 103.48$$

Il portafoglio creato, utilizzando la *barbell swap*, ha lo stesso costo e la stessa *duration* del *bullet investment*, presenta tuttavia una *convexity* maggiore (103.48 contro 71.72 del *bullet investment* nel titolo B). Come abbiamo già ricordato, la convexity comporta difatti il vantaggio di smorzare i ribassi del prezzo in seguito ad un rialzo del tasso e di accentuarne i rialzi del prezzo del bond in seguito ad un ribasso del tasso, e per questi motivi è una caratteristica desiderabile.

Per mostrare i vantaggi della *barbell strategy* verranno analizzati diversi scenari di variazione annuale dei tassi. Con un Δi pari a 0.5%, si considerano scenari di variazioni di tassi che vanno da $(i^* - 4\Delta i)$ fino a $(i^* + 15\Delta i)$, cosi da analizzare come cambia il prezzo del titolo B e del portafoglio P all'interno di ogni scenario.

La tabella 2 rappresenta la variazione del prezzo del titolo B a seguito di variazioni del tasso di rendimento.

Tabella 2: Prezzo del titolo B con diversi scenari di variazioni del tasso

	$i^* - 4\Delta i$	$i^* - 3\Delta i$	$i^* - 2\Delta i$	
YTM	-0.324%	0.184%	0.684%	…
Prezzo	135.93	130.75	125.80	

Fonte: Elaborazione personale

La tabella 3 rappresenta la variazione del prezzo del titolo A e C a seguito di variazioni del tasso di rendimento. Il prezzo del portafoglio P è ottenuto ponderando i prezzi dei titoli A e C per il rispettivo peso nel portafoglio.

Tabella 2: Prezzo del portafoglio P con diversi scenari di variazioni del tasso

	$i^* - 4\Delta i$	$i^* - 3\Delta i$	$i^* - 2\Delta i$	
YTM(A)	-1.251%	-0.751%	-0.251%	…
Prezzo(A)	114.24	111.63	109.10	
YTM(C)	0.848%	1.348%	1.848%	…
Prezzo(C)	194.89	181.46	169.20	
Prezzo(P)	136.34	130.76	125.56	…

Fonte: Elaborazione personale

È possibile osservare come più le variazioni di tasso sono consistenti ed estreme più conviene investire nel *barbell portfolio P* piuttosto che nel *bullet investment*. Infatti, in caso di variazioni di tasso molto negativa il valore del portafoglio si mantiene comunque superiore al *bullet investment*. Lo stesso vale per variazioni di tassi molto positive, in questo caso la maggiore *convexity* smorza il ribasso del prezzo e il portafoglio P mostra sempre un valore maggiore del *bullet investment* nel titolo B.

Analizziamo adesso il principale svantaggio un una *barbell strategy*. Lo *yield to maturity* del portafoglio è dato da:

$$y_0 = 72.6\% \cdot 0.751\% + 27.4\% \cdot 2.848\% = 1.33\%$$

comparato con lo *yield to maturity* di 1.684% del *bullet investment.*
Quindi, il rendimento del *barbell* non sarà mai alto come quello di un *bullet investment* se i tassi restano più o meno ai livelli correnti. Se invece ci si aspetta un'elevata volatilità dei tassi, il *barbell portfolio* sarà più performante del *bullet*. In base al livello di volatilità si preferirà quindi l'uno o l'altro investmento. Naturalmente sono necessari ulteriori calcoli per stabilire quanto devono essere volatiti i tassi per preferire un *barbell* portfolio ad un *bullet investment.*
Notiamo che è conveniente effettuare lo swap se la variazione dei tassi poi si rivela essere almeno 0.15%.

IL MODELLO

Considerando il lavoro di Pegoraro in [7] che ha mostrato la capacità del modello elaborato da *Cox, Ingersoll e Ross* di ottenere informazioni economicamente rilevanti sull'andamento futuro dei prezzi dei BTP.
Nel modello di *Cox, Ingersoll e Ross* l'evoluzione del tasso è descritta dalla seguente equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \tag{5.14}$$

dove μ è lineare in r_t e σ è costante nel tempo.
Con $\mu(t, r_t) = k(u - r_t)$ si ottiene una struttura che tiene conto della *mean reversion*, una caratteristica tipica dei tassi di interesse.

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \tag{5.15}$$

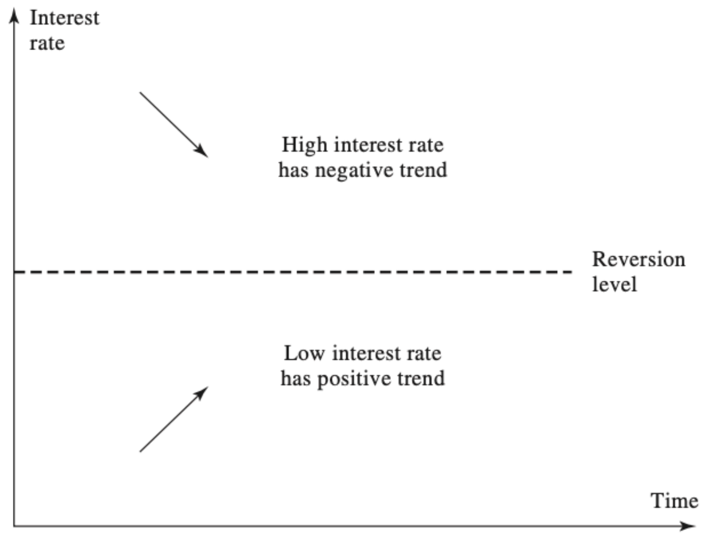
con k, μ, σ costanti non negative.
Tuttavia, nel modello la deviazione standard del cambiamento dei tassi a breve in un periodo di tempo ristretto è proporzionale a $\sqrt{r_t}$. Questo significa che se il tasso di interesse a breve è elevato, anche la deviazione standard aumenta, ma significa anche che se i tassi sono vicino a zero l'evoluzione dei tassi è governata esclusivamente dal fattore di deriva. Se i tassi sono vicini a zero, il fattore di deriva spinge l'evoluzione del tasso verso l'alto per effetto della mean reversion. Per tal motivo il modello CIR evita la possibilità di tassi di interesse negativi.
Nel modello elaborato da Vasicek, l'evoluzione dei tassi r_t è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{5.16}$$

dove $k, \mu\ e$ σ sono costanti non negative.
Cosi come il CIR model, anche il modello di Vasicek incorpora la proprietà nota come mean reversion, secondo la quale i tassi tendono nel tempo ad essere riportati verso il loro livello medio. In particolare, si può osservare che quando il tasso di interesse r è elevato la *mean reversion* tende a determinare un *drift* negativo; quando invece r è basso, la *mean reversion* tende a determinare un *drift* positivo. Il *drift term* è pari a

$k(\mu - r)$ e rappresenta la direzione che seguono i tassi nel loro percorso di aggiustamento verso il livello medio. Il parametro k rappresenta la velocità di aggiustamento del tasso r al valore suo medio μ.

Figura 3: Mean reversion



Fonte: Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

Vi sono argomentazioni economiche convincenti a favore della mean reversion. Quando i tassi sono alti, la domanda di fondi da parte dei *borrowers* è bassa e, di conseguenza, i tassi diminuiscono. Quando i tassi sono bassi, tende ad esserci una forte domanda di fondi da parte dei *borrowers* e i tassi tendono ad aumentare.

Il parametro dW_t è un processo di *Wiener*, ossia una variabile aleatoria normale con media nulla e varianza pari a dt. Presenta una varianza proporzionale all'intervallo temporale considerato: in particolare, si ha $dW_t = \varepsilon\sqrt{dt}$, dove ε rappresenta un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata.

Per le simulazioni Montecarlo scegliamo il modello elaborato da Vasicek, assumeremo quindi che le evoluzioni dei tassi possano essere descritte dalla seguente equazione differenziale:

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{5.16}$$

Il *modello di Vasicek* è un *modello univariato*, ovvero un modello che utilizza una singola variabile (i tassi di interesse a breve) per descrivere l'intera yield curve. Solitamente, un *modello univariato* è scritto nella forma $dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t$, dove sia il *drift* $\mu(r_t)$ che la volatilità $\sigma(r_t)$ sono funzioni solo di r_t e non anche del tempo t. Con questa scelta, tutte le scadenze della *term structure* sono descritte da un'unica variabile stocastica. In altre parole, il *Vasicek's model* implica una correlazione perfetta tra i movimenti della *yield curve* a differenti *maturities*. Un modello univariato implica che tutti i tassi si muovono tutti nella stessa direzione in qualsiasi intervallo di tempo breve, ma non che si muovano tutti dello stesso ammontare. La forma della curva zero-coupon può quindi cambiare con il passare del tempo.

Per il nostro scopo questi limiti non ci appaiono cosi restrittivi, in quanto stiamo considerando un periodo relativamente breve di variazione dei tassi (il periodo che va da t_0 a t_1), inoltre le tecniche di immunizzazione basate sulla *duration* finora mostrate sono basate su shift paralleli della *yield curve*.

Dopo aver scelto il modello, il prossimo passo consiste nel determinare i parametri dai movimenti passati nel tasso di interesse a breve termine. I dati possono essere raccolti su variazioni giornaliere, settimanali o mensili e i parametri possono essere stimati facendo una regressione di Δr contro r, o usando i metodi di massima verosimiglianza.

Decidiamo di utilizzare l'Euribor a 1 mesi come proxy del tasso di interesse a breve.

Consideriamo, quindi, la serie storica giornaliera del tasso Euribor a 1 mese dal 02 Gennaio 2015 fino al 30 Aprile 2020 e calcoliamo la variazione del tasso tra il giorno i e il giorno $i-1$. Abbiamo 1350 osservazione del tasso r_t a cui corrispondono 1349 variazioni del tasso Δr. A questo punto ci affidiamo a RStudio per effettuare una semplice regressione lineare con la funzione *lm( )*. I risultati della regressione lineare sono illustrati nella Figura 4.

Consideriamo la relazione:

$$dr_t = k(u - r_t)dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{5.16}$$

Dalla figura 4 si evince che l'intercetta della regressione è -0.0012254, mentre la pendenza della retta di regressione è -0.0027267, infine lo *standard error* dei residui è -0.004499. Considerando 250 osservazioni annuali e seguendo l'argomentazione di [3] si ottiene: $k = 0.6816$, $\mu = -0.4494$ e $\sigma = 0.0711$.

Allora possiamo riscrivere la relazione (5.16) come:

$$dr_t = 0.6816 \ x \ (-0.4494 - r_t)dt + 0.0711 \ x \ \varepsilon\sqrt{dt} \quad (5.17)$$

Figura 4: Regressione lineare con RStudio

```
Call:
lm(formula = Seriestorica_euribor$Delta_r ~ Seriestorica_euribor$r)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.049920  0.000217  0.000217  0.000298  0.039808 

Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)            -0.0012254  0.0003265  -3.753 0.000182 ***
Seriestorica_euribor$r -0.0027267  0.0009490  -2.873 0.004126 ** 
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.004499 on 1347 degrees of freedom
  (1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.006092,	Adjusted R-squared:  0.005354 
F-statistic: 8.256 on 1 and 1347 DF,  p-value: 0.004126
```

Fonte: Elaborazione personale

LIMITI DELLA BARBELL STRATEGY

La *barbell* strategy non è una vera e propria tecnica di immunizzazioni di portafoglio, in quanto il portafoglio *barbell* non è propriamente immunizzato da variazione dei tassi. Ad ogni modo, possiamo sicuramente affermare che il *barbell* portfoflio risponde meglio, in termini di maggior guadagno o di minor perdita, in determinate situazioni, a variazione dei tassi. Abbiamo, infatti, osservato che se la variazione dei tassi al ribasso è consistente, il portafoglio *barbell,* che è dotato di una maggiore convexity, permette di ottenere un profitto maggiore. È vero anche che in caso di una consistente variazione dei tassi al rialzo, il portafoglio *barbell* permette di minimizzare le perdite, anche se non ne permette l'azzeramento. Quindi, per coloro i quali l'azzeramento delle perdite risulta un punto cardine della strategia di immunizzazione di portafoglio, la *barbell* strategy può non essere sufficiente.
Proponiamo nel resto della trattazione politiche di immunizzazione di un portafoglio di titoli obbligazionari realizzate mediante il ricorso alla negoziazione di strumenti derivati.

HEDGING TRAMITE FUTURE

In questa sessione utilizzeremo il mercato dei future per ridurre il rischio di un particolare portafoglio di titoli obbligazionari. Il nostro obiettivo è quello di ricavare un *hedge ratio* che possiamo usare per formare portafogli coperti da particolari rischi. Gli *hedge ratios* hanno l'obiettivo di minimizzare la variazione di valore di un portafoglio. Per la presente trattazione utilizzeremo *regression-based hedge ratio*.

Sia P il portafoglio formato da titoli obbligazionari e strumenti di *hedging* e V_P il valore del portafoglio. Il portafoglio P è composto da una posizione lunga in titoli obbligazionari B e una posizione corta in strumenti di *hedging* (nel nostro caso *futures*) F.

L'hedge ratio h è il rapporto tra la grandezza della posizione assunta nei contratti futures e la grandezza dell'esposizione. Quando l'attività sottostante il contratto futures è uguale all'attività che si desidera coprire, è naturale utilizzare un *hedge ratio* di 1,0. Tuttavia, ciò non sempre accade. Ci chiediamo allora su quale criterio scegliere l'*hedge ratio*. L'hedger dovrebbe scegliere un valore per il rapporto di copertura che minimizzi la varianza del valore della posizione coperta.

Si consideri la seguente relazione:

$$V_P = B - hF,$$

allora la variazione di valore del portafoglio si può esprimere come:

$$\Delta V_P = \Delta B - h\,\Delta F.$$

Il nostro obiettivo è di minimizzare la varianza della variazione di valore del portafoglio, in termini matematici:

$$\min_h \mathrm{Var}(\Delta V_P) = \min_h Var(\Delta B \; - \; h\Delta F).$$

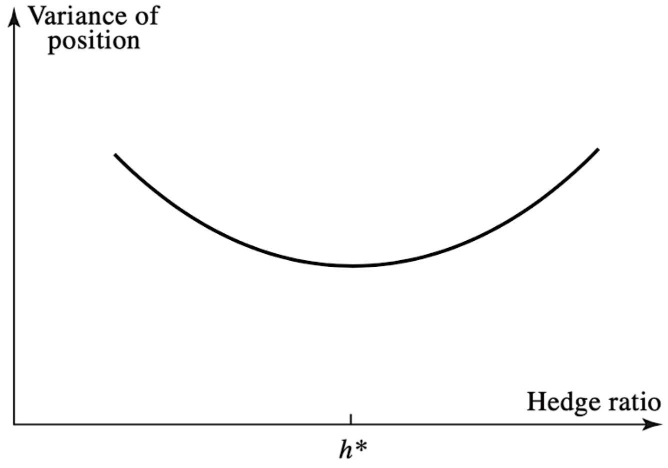
Indicando con ${\sigma_P}^2$ la varianza delle variazioni di valore del portafoglio P, con ${\sigma_B}^2$ e ${\sigma_F}^2$ la varianza delle variazioni del prezzo del titolo obbligazionario che vogliamo coprire e, rispettivamente, la varianza delle variazioni nel prezzo del future utilizzato per la copertura, si ha che:

$$\sigma_P{}^2 = \sigma_B{}^2 + h^2\sigma_F{}^2 - 2h\sigma_{BF} \tag{5.18}$$

dove σ_{BF} indica la covarianza tra variazione della posizione del titolo obbligazionario ΔB e la variazione della posizione dello strumento di hedging ΔF.

Assumendo che la funzione che esprime la varianza del portafoglio $\sigma_P{}^2(h)$ sia convessa rispetto ad h, come mostrato in figura 8, possiamo trovare il valore minimo della funzione e quindi la varianza minima, attraverso la condizione del primo ordine, semplicemente ponendo la derivata prima della funzione uguale a zero. La condizione del secondo ordine impone che la derivata seconda della funzione $\sigma_P{}^2(h)$ rispetto ad h sia uniformemente positiva.

Figura 8: Relazione tra varianza del portafoglio e hedge ratio



Fonte: Hull J. C., "Option, futures and other derivative", Pearson, (2008)

La figura 8 mostra la relazione tra la varianza del portafoglio e l'hedge ratio. Inizialmente la varianza si riduce all'aumentare di h, fino ad arrivare al punto di minimo h^* e poi riprende a salire. Il punto di minimo può essere identificato nel punto in cui la tangente alla curva ${\sigma_P}^2(h)$ ha pendenza nulla.

zDalla relazione (4.18) otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial h}\,{\sigma_P}^2(h) = 0 + 2\,h\,{\sigma_F}^2 - 2\sigma_{BF}$$

La condizione del primo ordine impone:

$$\frac{\partial}{\partial h}\,{\sigma_P}^2(h) = 0$$

Si ottiene, quindi:

$$h^* = \frac{\sigma_{BF}}{{\sigma_F}^2}$$

Possiamo a questo punto riscrivere la covarianza tra ΔB e ΔF come il prodotto delle relative deviazioni standard e il coefficiente di correlazione tra ΔB e ΔF, che indichiamo con ρ_{BF}.
Per cui otteniamo:

$$h^* = \frac{\rho_{BF}\ \sigma_B}{\sigma_F} \tag{5.19}$$

L'equazione (5.19) mostra che l'*hedge ratio* ottimale è dato dal prodotto tra il coefficiente di correlazione tra ΔB e ΔF e il rapporto tra le deviazioni standard di ΔB e ΔF.
Occorre notare che se $\rho = 1$ e $\sigma_F = \sigma_B$, allora l'hedge ratio ottimale $h^* = 1.0$, infatti in questo caso il prezzo dei future rispecchia perfettamente il prezzo spot.
Può essere mostrato che l'hedge ratio ottimale h^* è l'inclinazione della retta di regressione (β) in una regressione lineare di ΔB contro ΔF. Si consideri:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \tag{5.20}$$

dove y_t è la serie storica delle osservazioni della variabile dipendente, ovvero la variazione nel prezzo del bond che abbiamo intenzione di coprire; x_t è la serie storica delle osservazioni della variabile indipendente, ovvero la variazione nel prezzo dello strumento di copertura. I parametri α e β sono i parametri stimati mediante la regressione OLS e ε_t è la serie storica degli errori prodotti dalla regressione.

Assumiamo di avere in portafoglio il BTP IT0003934657 con scadenza 01 Febbraio 2037. Il titolo frutta interessi annui lordi posticipati, pagabili semestralmente il 1° febbraio e il 1° agosto di ciascun anno a partire dal 1° febbraio 2006 e pari al 4% del valore nominale di 100 euro.

Oggi è il 29 Aprile 2020 e desideriamo coprire la posizione in BTP, dobbiamo scegliere un future che presenta un elevata correlazione con il BTP. Tuttavia, non avendo modo di reperire dati sui future e quindi non avendo modo di fare una scelta ottimale, ci costruiamo una serie storia simulata del prezzo dei future in modo tale che la variazione nel prezzo del BTP e la variazione nel prezzo del future presentino un'elevata correlazione.

Utilizziamo le simulazioni Montecarlo per calcolare le variazioni nel prezzo dei future al tempo *t* (ΔF_t), servendoci della serie storica del prezzo del BTP. Assumiamo che le variazioni nel prezzo del BTP al tempo *t* (ΔB_t) e le variazioni nel prezzo dei future al tempo *t* (ΔF_t) siano legate dalla seguente relazione:

$$\Delta F_t = \Delta B_t + \varepsilon_t \tag{5.21}$$

dove $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{9})$.

```
Sub VariazioniFuture()

'Simulazioni
For i = 1 To 882

        'Algoritmo di Box-Muller
         random1 = Rnd
         random2 = Rnd
         theta = 2 * Pi * random2
         rho = (-2 * Log(random1)) ^ 0.5
         epsilon = rho * Cos(theta)

'Risultati:
   Worksheets("Future").Cells(6 + i, 10) = epsilon / 3

Next i
End Sub
```

Consideriamo la serie storica del prezzo del BTP dal 01 Gennaio 2017 al 29 Aprile 2020, calcoliamo le variazioni giornaliere del prezzo del BTP, ottenendo 882 osservazioni. A partire da ciò simuliamo 882 scenari di variazioni giornaliere del prezzo del future in VBA tramite la relazione (5.21). Con la simulazione otteniamo un coefficiente di correlazione tra le due serie storiche di +0.9441. La figura 9 mostra il prezzo del BTP e del Future simulato dal 30 Dicembre 2016 al 29 Aprile 2020.

Figura 9: Prezzo del BTP e prezzo del future simulato

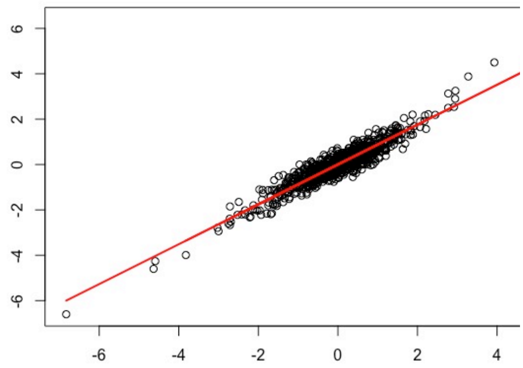
Fonte: Elaborazione Personale

Per trovare l'hedge ratio ottimale h^* decidiamo di fare una regressione lineare scegliendo le variazioni nel prezzo del BTP come variabile dipendente e le variazioni nel prezzo del future simulato come variabile indipendente. In questo modo il beta della simulazione corrisponderà all'hedge ratio ottimale. La figura 10.a) mostra il risultato della regressione su RStudio.

Figura 10.a) Regressione lineare con RStudio

Figura 10.b) Retta di regressione

```
Call:
lm(formula = Variazioni$btp ~ Variazioni$future)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.88042 -0.21408  0.00169  0.20850  1.04416

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|
(Intercept)       0.001077   0.010299   0.105    0.
Variazioni$future 0.878568   0.010346  84.922   <2e
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.

Residual standard error: 0.3059 on 880 degrees of f
Multiple R-squared:  0.8912,    Adjusted R-squared:
F-statistic:  7212 on 1 and 880 DF,  p-value: < 2.2
```



Fonte: Elaborazione personale

La figura 10.b) mostra la relazione positiva tra le variazioni nel prezzo del BTP e le variazioni nel prezzo del future simulato e, in rosso, la retta di regressione.

Dalla figura 10.a) possiamo notare che il beta della regressione e quindi anche l'hedge ratio ottimale è di 0.8786. Ciò indica, in base a quale è il valore del portafoglio da coprire, qual è il numero di contratti future da shortare per coprire la posizione. Supponiamo di aver fatto un investmento di 3 Milioni di euro nel BTP. L'hedge ratio ottimale suggerisce che ogni 100 000 euro che desideriamo coprire occorre vendere 0.8786 contratti future. Allora per coprire la posizione sul BTP occorre vendere 26.36 (in pratica 26) contratti future.

BIBLIOGRAFIA

[1] Resti A., Sironi A., “Rischio e valore nelle banche”, EGEA S.p.A., (2005)

[2] Skinner F., “Pricing and Hedging Interest and Credit Risk Sensitive Instruments”, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005)

[3] Hull J. C., “Option, futures and other derivative”, Pearson, (2008)

[4] Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, “Investments”, McGraw-Hill Education, (2014)

[5] Litterman R., Scheinkman E., “Common factors affecting bond returns”, Journal of Fixed Income, (1991)

[6] Padovani M. C., “I modelli strutturali per la valutazione dei corporate debt. Creditgrades: un modello strutturale di recente creazione”, Lulu Press Inc. (2018)

[7] Pegoraro, “F. La struttura a termine dei tassi di interesse e trading su titoli: un approccio con il modello CIR al mercato italiano dei BTP.” Preprint

[8] Uboldi A., “Modelling Interest Rates for Public Debt Management”

[9] Stock H. J., Watson M.W., “Introduction to Econometrics”, (2010)

[10] Adams James F., Smith, Donald J. (2015), Understanding fixed-income risk and return, CFA Program Curriculum, equity and fixed income

[11] Ametrano, Ferdinando M., Discounting and Forwarding Curves Models and Implementation, Intesa Sanpaolo-Banca IMI

[12] Corno Cristiana, Grimaldi Anna (2016), “Negative rates: Freigeld”

[13] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, jr. and Stephen A.Ross (1981). The relation between forward prices and future prices, journal of Financial Economics, 9, 321-346.

[14] Fixed Income a cura di CFA Society Italy con la collaborazione di J.P. Morgan

[15] EMMI website

[16] BCE website

[17] Forward contracts and future contracts, journal of financial economics