

Dipartimento
di Economia e Finanza

Cattedra di Teoria e Gestione del Portafoglio

Gestione del Portafoglio post Covid shock:
un approccio Bayesiano per la determinazione
di un asset allocation ottimale.

Chiar.mo Prof. Nicola Borri

RELATORE

Chiar.mo Prof. Emilio Barone

CORRELATORE

Giacomo Di Pietro

Matricola 707821

CANDIDATO

Anno Accademico 2019/2020

Alla mia famiglia.

INDICE

INTRODUZIONE	4
I. PRIMA DI BLACK E LITTERMAN	6
1.1 ASSET ALLOCATION	6
1.2 SELEZIONE DI PORTAFOGLIO	9
1.3 VALUTAZIONE DELLA PERFORMANCE DI PORTAFOGLIO	11
1.3.1 <i>Sharpe Ratio</i>	13
1.3.2 <i>Sortino Index</i>	15
1.3.3 <i>Treynor Index</i>	16
1.3.4 <i>Alpha di Jensen</i>	17
1.3.5 <i>Information Ratio</i>	19
1.3.6 <i>Omega Ratio</i>	20
1.3.7 <i>Farinelli – Tibiletti Ratio</i>	22
1.3.8 <i>Drowdown Index</i>	23
1.4 IL TIMING NELLA PERFORMANCE.....	24
1.5 BENCHMARK.....	25
1.6 TEORIA DEL PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ	26
1.6.1 <i>Frontiera efficiente dei portafogli</i>	29
1.7 CAPITAL ASSET PRICING MODEL	37
II. APPROCCIO BAYESIANO E MODELLO DI BLACK LITTERMAN	45
2.1 APPROCCIO BAYESIANO.....	45
2.2 CORPUS E FONDAMENTI DEL MODELLO BLACK-LITTERMAN	50
2.2.1 <i>Approccio del modello Black e Litterman</i>	54
2.2.2 <i>Esempio a tre asset</i>	56
2.2.3 <i>Analisi del modello Black-Litterman – I rendimenti d’equilibrio</i>	59
2.3 LE VIEWS.....	64
2.3.1 <i>La matrice P</i>	67
2.3.2 <i>Il vettore errore ε e la matrice di covarianza Ω</i>	68
2.3.3 <i>La costante weight-on-views</i>	71
2.4 MODELLO MISTO DI THEIL	72

2.5 IMPATTO DELLE VIEWS SUI RENDIMENTI ATTESI.....	75
2.6 RISCHIO NEL MERCATO GLOBALE.....	77
III. ESTENSIONE DEL MODELLO B-L: UN METODO DI ASSET ALLOCATION BAYESIANO SEMI-PARAMETRICO BASATO SU COPULE	80
3.1 COPULE.....	80
3.1.1 Copule ellittiche.....	84
3.1.2 Copula Archimedeana.....	89
3.1.3 Copule multidimensionali.....	96
3.1.4 Inferenza Statistica per le copule.....	97
3.2 METODI MARKOV-CHAIN MONTE CARLO (MCMC).....	101
3.2.1 L'algoritmo di Metropolis-Hastings.....	104
3.2.2 Il campionamento di Gibbs.....	105
3.3 APPROCCIO NON PARAMETRICO PER LE DISTRIBUZIONI MARGINALI: METODO DELLA VEROSIMIGLIANZA DEI RANGHI.....	107
3.4 PORTAFOGLIO BAYESIANO SEMI-PARAMETRICO BASATO SU COPULE.....	109
3.4.1 Stima della verosimiglianza di rango.....	111
3.4.2 Inferenza Bayesiana per copula Gaussiana multivariata.....	111
3.4.3 Portafoglio a varianza minima.....	113
3.5 STUDIO DI SIMULAZIONE.....	115
IV. PORTAFOGLI A VARIANZA MINIMA NELL'EPOCA DEL COVID-19.	117
4.1 ANALISI DESCRITTIVA DELL'IMPATTO DEL COVID-19 SUI MERCATI FINANZIARI ..	117
4.2 APPLICAZIONE PORTAFOGLIO CLASSICO DI B-L.....	125
4.3 APPLICAZIONE DEL PORTAFOGLIO BAYESIANO SEMI-PARAMETRICO BASATO SU COPULE.....	127
4.4 CONFRONTO TRA I RISULTATI.....	129
4.5 BACKTESTING E INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI.....	130
CONCLUSIONI.....	135
BIBLIOGRAFIA.....	137
SITOGRAFIA.....	142
RIASSUNTO TESI.....	143

INTRODUZIONE

La probabilità legata all'ampia gamma di sfondi evolutivi delle variabili economico-finanziarie e di mercato comporta la determinazione del prezzo delle singole attività e l'impatto concreto di determinati shock amplifica maggiormente tale parametro. L'elevato grado di incertezza derivante dalla crisi legata al Covid-19, ha conferito ulteriore rilievo alla necessità di garantire delle alte, o per lo meno, accettabili performance di portafoglio per un asset allocation efficiente, la quale rappresenta l'ultimo tassello di un processo definito *financial planning*, che ingloba nel suo ampio significato un'area introspettiva propria dell'investitore, la propensione al rischio, gli obiettivi legati al fabbisogno del singolo e le soluzioni che soddisfano tale necessità, l'asset allocation stessa [Linguanti et al, 2008]. Un contributo fondamentale per la comprensione ed un maggior avvicinamento a tale obiettivo, per quanto concerne l'autoreferenzialità dei mercati, è stato fornito inizialmente da Markowitz, il quale non solo apre le porte alla finanza moderna ma illustra l'importanza della diversificazione dei titoli nel proprio portafoglio. La grande portata scientifica di tale modello però, cozza con l'applicazione stessa alla realtà, poiché la massimizzazione dell'errore di stima con conseguente sovrastima dei titoli caratterizzati da alto rendimento atteso, basso rischio e bassa correlazione, portano ad un portafoglio finale scarno, con pochi asset presenti; i rendimenti sono considerati come variabili aleatorie casuali continue. Inoltre si concretizza un'eccessiva sensibilità dei pesi di portafoglio ottimo, relativa ai dati di input e alle ipotesi sui rendimenti attesi. Per ovviare a tali limiti, sono stati proposti vari modelli, tra i quali si annovera, per la sua applicabilità, quello di Black e Litterman, il quale combina l'equilibrio di mercato e le views dell'investitore tramite il teorema di Bayes, per poi ricavare un vettore ed una matrice di varianza-covarianza ottimi degli asset assunti dal portafoglio; si arriva quindi ai rendimenti attesi partendo da due fonti differenti di informazione. La credibilità e la robusta struttura di tale modello poggiano le fondamenta non solo sull'ottimizzazione media varianza, ma anche su un aspetto del CAPM, l'ottimizzazione inversa. Punto di partenza dell'approccio è il disallineamento del vettore dei rendimenti di equilibrio correlato alle views dell'investitore le cui medie pesate permetteranno di definire il portafoglio finale. Inoltre l'impatto delle aspettative sullo scostamento del portafoglio finale, che tenderà più o a quello di equilibrio o più alle

aspettative, sarà direttamente proporzionale alla fiducia riposta in quest'ultime e alla loro natura. La definizione di questi strumenti e di altri forniti nei primi tre capitoli della tesi rappresenta tutti i singoli passaggi necessari alla comprensione dell'approccio impiegato e dei risultati derivanti dalla sua applicazione. Inizialmente è stata costruita una serie storica degli ultimi prezzi giornalieri di undici indici azionari dal 10/12/2018 al 17/11/2020 in modo tale da racchiudere l'andamento pre e post SARS-CoV-2 e analizzare quanto tale shock abbia impattato sui mercati. Tale processo è risultato fondamentale al fine di strutturare un'analisi che verterà sul confronto di performance tra il nostro portafoglio, definito tramite un approccio semi-parametrico basato su copule, e quello di equilibrio, secondo il modello di Black-Litterman, affinché sia possibile derivare un'allocatione ottimale nonostante il Covid shock.

In ultima istanza, si propone una simulazione in un contesto reale in modo tale da ampliare il bacino di ricerca del modello di asset allocation.

I. PRIMA DI BLACK E LITTERMAN

1.1 Asset allocation

“L’asset allocation è il processo attraverso il quale si sceglie la distribuzione delle risorse fra diversi possibili investimenti”¹. Tale procedimento si ramifica in due categorie fondamentali:

- *Attività finanziarie*: azioni, obbligazioni e liquidità
- *Attività reali*: immobili, metalli preziosi, merci, etc.

Questi sono tutti i possibili investimenti che l’operatore dovrà gestire proprio tramite il processo di asset allocation, previa valutazione dello scenario macroeconomico, degli strumenti di analisi fondamentale e tecnica, degli indicatori di performance dei fondi, ed ogni tipologia di investimento viene ripartito in gruppi e poi gestito proprio in relazione alle specifiche peculiarità e comportamenti speculari sul mercato; questi gruppi prendono il nome di asset class. Nella costruzione di un portafoglio, le asset class giocano un ruolo cruciale in quanto rappresentano i singoli fattori che saranno valutati nella procedura dell’allocazione di capitale. Ultimamente, il modello di classificazione più utilizzato si discosta da un’analisi basata sulle peculiarità strutturali o legali dello strumento finanziario, focalizzandosi più sui fattori che vanno ad impattare sul prezzo, ovvero i *risk factor allocation*. Questi ultimi sono le esposizioni al rischio sottostante che guidano il rendimento di una classe di attività. Ad esempio, il rendimento di un titolo può essere suddiviso in rischio di mercato azionario, movimento all’interno dell’ampio mercato azionario e rischio specifico per l’azienda. Il rischio di rendimento di un’obbligazione può essere spiegato dal rischio di tasso di interesse (sensibilità del prezzo alle variazioni dei tassi) e dal rischio specifico dell’emittente. Mentre il rischio di cambio è un fattore per le attività denominate in valute estere. Mirando all’esposizione a questi fattori di rischio sottostanti, gli investitori possono selezionare un insieme di asset class che fornisce un rischio di portafoglio più diversificato.

Sebbene vi sia impossibilità di investimento diretto nel fattore di rischio, l’impiego di una strategia di allocazione fondata su fattori di rischio potrebbe facilitare il processo di scelta di un insieme di classi di attività che diversifichi più efficientemente i rischi e che rifletti

¹ <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/assetallocation.htm>

contemporaneamente le opinioni relative ai mercati e all'economia generale. Compresi tutti quei fattori di rischio sottostanti alle varie asset class, in ultima istanza, gli investitori avranno la facoltà di selezionare la classe di attività che permetta loro di ottenere un'esposizione più efficiente a quel particolare fattore di rischio. Per esempio, qualora si volesse aggiungere al proprio portafoglio il rischio di valuta estera, si potrebbero seguire due strade; la prima prevede l'investimento diretto in valute, la seconda invece, considera anche le azioni, obbligazioni o anche materie prime estere, qualora le valutazioni fossero più interessanti tra quelle classi di attività. In un lungo periodo, tale flessibilità permetterebbe di associare un valore significativo al portafoglio. Ai fini di un efficiente utilizzo dell'approccio basato sui fattori di rischio è necessaria una visione macroeconomica trasversale, che vada ad abbracciare una ampia gamma di variabili quali la politica monetaria, gli sviluppi geopolitici, l'inflazione, i tassi di interesse, le valute e le tendenze di crescita economica. Ma il sistema di composizione delle classi di asset può essere indirizzato anche su canali diversi, come l'orizzonte temporale dell'investimento, per esempio, che permette di distinguere gli asset gestiti.

Sostanzialmente l'asset allocation è funzionale al perseguimento di una gestione ottimale del portafoglio, tale che possa equilibrare e correlare al meglio il rischio e il rendimento delle attività ai bisogni e alle aspettative del singolo investitore. La diretta proporzionalità tra rischio e rendimento ha attribuito al rischio stesso un ruolo di rilevanza cruciale per la distinzione tra i vari investimenti. Nello specifico si riconoscono due tipologie differenti:

- *rischio specifico*: definito dalla natura dell'investimento stesso.
- *rischio generico o sistemico*: essendo legato alle varie fluttuazioni del mercato, tale rischio è indifferente alla diversificazione del portafoglio e di conseguenza non può essere né eliminato né ridotto.

A seconda della diversa tipologia di investitore, l'asset allocation potrebbe essere assumere diverse valenze. Nel caso di un investitore professionista, tale processo è funzionale a:

- calcolo dei tassi di rendimento di specifiche asset class, determinazione di *standard deviation* e correlazioni;
- utilizzo delle precedenti variabili al fine di selezionare una combinazione di asset diversi per il rapporto rischio-rendimento.

L'investitore individuale invece, focalizza più la sua attenzione su:

- livello di tassazione relativo ad un investimento distinto nell'asset class data;
- aspetti personali e psicologici, che incidono sulla sua avversione al rischio.

Affinché un processo di asset allocation possa definirsi ben strutturato è necessario che siano rispettati tre step sequenziali.

Il punto di partenza è un'analisi da parte dell'investitore, riguardante le assunzioni sui rendimenti futuri attesi, sul livello di rischio e sulla correlazione tra i rendimenti futuri delle classi di asset. Successivamente, tutti i gruppi di asset che avranno una corrispondenza maggiore con il profilo dello stesso investitore verranno selezionati con un insieme di obiettivi che o massimizzano i rendimenti attesi per un determinato grado di rischio oppure minimizzano i rischi per un dato livello di rendimento. Poi vi è l'ipotesi di optare per un asset allocation strategica, o di lungo periodo, che riflette le variazioni della combinazione di asset futuri relativamente agli standard ottimali; vi potrebbe anche essere un'implementazione di un'asset allocation tattica. In ultima istanza potrà avvenire un ribilanciamento del portafoglio, calcolando ovviamente tasse e costi di tale riallocazione.

L'asset allocation, essendo contaminata da tre diversi approcci, è possibile scorporarla in tre categorie che si suddividono in:

- *strategica*: assume un orizzonte temporale di medio/lungo periodo nel quale pondera la ripartizione degli investimenti tra le varie alternative;
- *tattica*: impiegando un orizzonte temporale breve, essa modella gli investimenti basandosi su una visione del mercato contingente a quella strategica; infatti tale tipologia permette di modificare la composizione del portafoglio adattando l'allocazione strategica a peculiari e temporanei trend di mercato; affinché possa avvenire ciò è necessario che esista una coerenza tra strategia e tattica;
- *dinamica*: rispecchia un'allocazione degli investimenti molto più sensibile alle fluttuazioni del mercato e proprio per questo è orientato in un'ottica temporale di breve periodo. Come detto in precedenza, essendo più sensibile alle oscillazioni del mercato, e quindi anche alle più brusche, tale asset allocation è molto suscettibile a variazioni notevoli e repentine, permettendo così al portafoglio di conformarsi a tali cambiamenti anche con un timing molto ristretto.

Tale criterio viene utilizzato da investitori e manager di fondi per cercare di ottenere un investimento attivo che possa offrire loro, in maniera costante, una performance migliore

rispetto a quella del portafoglio passivo, ovvero l'indice preso come riferimento, con un rischio che sia il più basso possibile. Per arrivare a questo obiettivo è possibile selezionare un ampio numero di strumenti funzionali alla scelta di allocazione di un portafoglio attivo, il cui raggiungimento include due fasi: se con la prima è possibile scegliere lo strumento di *stock picking*, grazie al quale vengono ricavati i titoli che andranno a costituire il portafoglio attivo, la fase successiva è adatta a determinare quelli che sono i pesi dei titoli selezionati nella precedente fase, andando a definire, tramite le preferenze del soggetto economico, l'investimento efficiente. Anche se tale metodo è molto efficace nell'offrire una performance di portafoglio che sia omogenea, se non di poco superiore, a quella del benchmark, ha dei costi di gestione, conseguenti alle analisi essenziali per l'allocazione del portafoglio, notevoli, come lo sono quelli di transazione; entrambi vengono definiti *sunk cost*.

Affinchè si imposti una corretta costruzione del portafoglio è fondamentale non apportare delle modifiche sostanziali al portafoglio stesso, lasciando inalterato il concetto di asset allocation, che racchiude in sé un connubio tra analisi di mercato e tratti comportamentali dell'investitore. Quest'ultimo mette in atto un procedimento di costruzione soggettiva del modello, le cui basi sono poggiate sull'identificazione sia delle proprie necessità, sia dei fini quantificabili in termini di rischio e rendimento, secondo un preciso orizzonte temporale. Una volta delineati questi punti, è necessario che per ogni asset class vengano identificate sia le prospettive rischio e rendimento che le relazioni tra di esse. Conseguenza dell'identificazione della funzione obiettivo, è la definizione di un asset allocation ottimale legata alla massimizzazione sia del rischio che del rendimento; per poi arrivare a definire la frequenza di controllo ed un potenziale ribilanciamento dei pesi per ogni investimento.

1.2 Selezione di portafoglio

È conveniente “riporre tutte le uova in un paniere”? A tale quesito risponde il comportamento degli investitori, i quali optano per la disposizione di un portafoglio costituito da più titoli, rifiutando così la concentrazione della loro ricchezza su un unico titolo. Proprio nell'ottica di questa accezione comportamentale dell'individuo, si fonda la selezione di portafoglio, la quale ha come obiettivo la ripartizione tra più investimenti a reddito incerto di un determinato capitale. Al fine di concretizzare tale operazione, è

necessario che per ogni asset disponibile sul mercato vengano determinate e successivamente assegnate delle quote, il cui valore può oscillare tra il negativo e il positivo.

In linea generale, vige la regola, valida per ogni asset, di diretta proporzionalità tra il livello di incertezza relativo al rendimento e il rendimento stesso che è possibile ottenere; infatti, secondo l'ipotesi di razionalità del singolo investitore, quest'ultimo sceglierà, a parità di rischio, il portafoglio che massimizza il rendimento atteso. Tale scelta, determinata in un contesto di incertezza, è dipendente da tre assunti:

- quanto il singolo investitore tollera il rischio e quale metodo viene utilizzato per la misurazione della stessa tolleranza
- definizione e stima del rischio
- la metodologia attraverso cui le predisposizioni rispetto al rischio, instaurano un rapporto di interdipendenza con l'incertezza soggettiva relativa agli asset disponibili nella determinazione dei portafogli preferiti

Frank H. Knight [1921], economista e fondatore della Scuola di Chicago, affermò:

“L'incertezza va considerata in un senso radicalmente distinto dalla nozione familiare di Rischio, dalla quale non è mai stata propriamente separata[...]. Il fatto essenziale è che "rischio" significa in alcuni casi una quantità suscettibile di misura, mentre altre volte è qualcosa distintamente non di questo tipo; e ci sono differenze cruciali e di vasta portata nell'influenza di questi fenomeni a seconda di quale dei due è realmente presente ed operante[...]. Si comprenderà che un'incertezza misurabile, o propriamente "rischio", per come useremo il termine, è così tanto differente da una non misurabile che in effetti non è un'incertezza affatto.”

Queste parole fanno emergere l'enorme differenza tra incertezza e rischio, rispettivamente la soggettività dell'uno e l'oggettività dell'altro; la messa in luce di tale diversità e soprattutto l'interpretazione del rischio sotto l'ottica probabilistica, hanno permesso la delineazione di un'assicurazione contro il verificarsi di eventuali problematiche.

In una circostanza di incertezza ogni asset viene selezionato sulla base di un criterio di scelta; uno dei criteri maggiormente discriminante è quello della completezza, attraverso cui i titoli disponibili vengono ordinati secondo delle caratteristiche oggettive. Altro criterio è quello della dominanza grazie al quale i soggetti razionali escludono un asset

dominato ai fini dell'inclusione nel loro portafoglio. Tale criterio, caratterizzato dall'incertezza, potrebbe non essere sufficiente e per questo è utile ricorrere ad un altro assunto, rappresentato dalla funzione della media e della varianza specifiche dei diversi asset, dai quali poi si strutturerà il modello della media-varianza che si basa su due assunti fondamentali:

- l'investitore non è amante del rischio;
- il rischio è misurato dalla varianza.

Queste scelte degli operatori economici in un contesto di incertezza devono essere codificate attraverso la teoria dell'utilità attesa la cui funzione è definita cardinale; il che sta a significare che l'utilità stessa è misurabile attraverso una media ponderata, discostandosi così dall'esclusiva misura ordinale, tipica delle funzioni di utilità in condizioni di certezza. Questa nuova metodologia di misurazione ha permesso di delineare un vantaggio tipico dell'utilità attesa, quello della completezza secondo il quale è sempre possibile ordinare qualsiasi tipo di asset o insieme di essi.

Funzionale all'efficacia nella scelta del portafoglio più adeguato alle caratteristiche dell'investitore non è soltanto l'ordine degli asset, i rendimenti dei singoli titoli e la loro incertezza, ma anche la correlazione tra questi rendimenti; qualora quest'ultima fosse negativa è possibile contrarre il rischio. Se invece analizzassimo i due casi estremi di correlazione, perfettamente negativa e positiva, gli effetti generati saranno completamente differenti; infatti nel primo caso vi sarà la completa eliminazione del rischio tramite la diversificazione, nel secondo invece l'effetto sarà nullo, portando quindi ad un annullamento dei benefici relativi al rischio.

Tutti questi aspetti vengono affrontati da Markowitz nella Teoria della selezione del portafoglio, trattata nel paragrafo 1.6. del seguente capitolo.

1.3 Valutazione della performance di portafoglio

Ai fini di una corretta valutazione del portafoglio è necessario che i volumi dei singoli strumenti finanziari vengano applicati ai prezzi di mercato, implicando quindi, una stretta correlazione tra le oscillazioni del valore del portafoglio e le fluttuazioni dei mercati finanziari. Proprio per questo motivo le modifiche apportate alla struttura del portafoglio vengono influenzate dalle fasi rialziste o ribassiste tipiche del mercato stesso.

La valutazione ha una scansione temporale giornaliera e il valore totale ottenuto viene ripartito per le quote circolanti, definendo così la valutazione unitaria della quota. Uno dei punti fondamentali nella valutazione di un portafoglio è la misurazione della sua performance. Quest'ultima è possibile suddividerla in due macro-aree: la prima racchiude gli indici di misura assoluta, la seconda è rappresentata da indici che vengono delineati da uno specifico rapporto:

$$\frac{\text{misura rendimento}}{\text{misura rischio}} = I \text{ (indicatore di performance)}$$

Come si evince da tale rapporto, rendimento e rischio anche se entità separate, sono correlate tra loro e insostituibili; infatti la letteratura moderna impedisce la centralizzazione del rendimento come unico parametro di misurazione, includendo anche il rischio per il raggiungimento di un risultato che sia trasversale. Essendo delle quantità separate, hanno elementi costituenti differenti. Infatti, il rendimento è definito da extra rendimenti, *alpha*, momento superiore di ordine *p* e il Value at Profit. Al contrario le parti che delineano il rischio sono di quantità maggiore e richiedono uno studio più approfondito; fra queste ci sono il value at risk (*VaR*), la deviazione standard, *absolute error*, la probabilità di shortfall, il momento inferiore di ordine *q* e il massimo di *drawdown*. Vi è un'altra ipotesi secondo la quale, questi due parametri, possono essere analizzati simultaneamente in una misura di *risk adjusted performance* (RAP).

Il raggio di azione della valutazione si estende a vari ambiti; il primo è relativo all'individuazione di indicatori di performance ottimali che siano coerenti con le caratteristiche dell'investitore; il secondo si rifà all'individuazione di indicatori di performance asimmetrici che regolano, in base alle funzioni di utilità del singolo agente, i pesi di guadagni e perdite; per concludere è necessario sfruttare la finanza comportamentale, estendendo la misurazione di performance anche a questo nuovo ramo, cercando quindi di modellare gli indici secondo i canoni caratterizzanti della *behavioral finance*, come la *loss aversion* o l'*home country bias*.

Inoltre una grande maggioranza di indici di performance è non solo una misura relativa, ma è anche calcolata nell'ipotesi di distribuzione Normale dei rendimenti, il che implica una considerazione esclusiva per media e varianza, ovvero i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti. In tal modo vengono esclusi parametri di ordine superiore,

come curtosi e simmetria, la cui analisi evidenzia uno scostamento della Normale e quindi una notevole rilevanza in merito alla valutazione del rischio di un investimento dipesa proprio da queste informazioni relative alla forma della distribuzione.

Con il passare degli anni, gli indicatori di performance, oltre ad aver raggiunto un numero considerevole di tipologie di misurazione, hanno assunto una notevole importanza, derivata dall'incremento di nuove categorie di strumenti finanziari, come i fondi di investimento. Di conseguenza è necessario che gli investitori siano dotati di strumenti funzionali a misurare non solo le previsioni di rendimento del fondo, ma anche il loro rischio intrinseco, affinché possano essere in grado di selezionare il giusto investimento. Altro fattore che ha contribuito alla rilevanza delle *risk adjusted performance* è stato l'introduzione del quadro normativo di vigilanza prudenziale di Basilea II, nella quale viene richiesto alle istituzioni finanziarie una ripartizione del capitale in relazione al rischio assunto, evitando così che perdite inaspettate possano intaccare il portafoglio dell'investitore. Tra tutti questi indicatori di performance, ve ne sono alcuni la cui efficacia ha comportato un utilizzo più frequente.

1.3.1 Sharpe Ratio

Quest'indice è stato presentato da William Sharpe (Nobel per l'economia nel 1990) nel 1966 sotto la descrizione di "*reward to variability ratio*". Dal quell'anno subì molte variazioni, fino ad arrivare all'ultima versione pubblicata sul *Journal of Portfolio Management* [Sharpe,1994]. Tra tutte le varie misure di *risk adjusted performance*, l'indice di Sharpe è la più nota in quanto il suo impiego è funzionale nella selezione di diverse opportunità d'investimento, tra le quali emerge proprio quella con un indice di Sharpe superiore; maggiore è il rendimento in un determinato orizzonte temporale con una bassa rischiosità, maggiore sarà tale misura di performance. Quest'ultima esprime il valore atteso dei rendimenti ed è il risultato del rapporto tra la differenza dell'*excess return* del portafoglio titoli e il *risk free rate*, come ad esempio un ETF o un Bot a 3 mesi, e la deviazione standard (rischio) del portafoglio preso in considerazione; la deviazione standard mostra la volatilità del portafoglio. Da ciò ne deriva che per ogni unità di rischio relativa all'investimento verrà definito un rendimento in termini percentuali. Quest'indice fonda la sua analisi su una distribuzione normale dei rendimenti in quanto considera esclusivamente i primi due momenti della distribuzione; è proprio dalle fondamenta che

si intravedono le crepe. Infatti, tale assunzione è lo stesso limite di tale misura di performance in quanto l'ipotesi di distribuzione normale non è valida per tutti i rendimenti e la conseguente estromissione di curtosi e asimmetria, oltre alla propensione e avversione al rischio del soggetto economico, potrebbe portare a fornire un risultato distorto dalla realtà. Il rapporto è espresso dalla seguente formula:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Il valore positivo di tale rapporto riflette la performance storica del titolo o del fondo rettificato per il rischio, la quale sarà direttamente proporzionale all'efficienza della gestione, infatti maggiore è l'indice, maggiore sarà la performance del portafoglio corretta per il rischio. Se dovesse risultare un valore negativo, verranno selezionati tutti quegli investimenti il cui valore risulta essere minore della misura di performance stessa, quindi che il tasso privo di rischio è maggiore del rendimento del portafoglio. A livello grafico, in un piano rischio-rendimento, questa misura di performance coincide con il coefficiente angolare della retta la quale collega i punti che riflettono le attività prive di rischio, quindi, graficamente, si prediligono gli strumenti che riportano un'inclinazione maggiore.

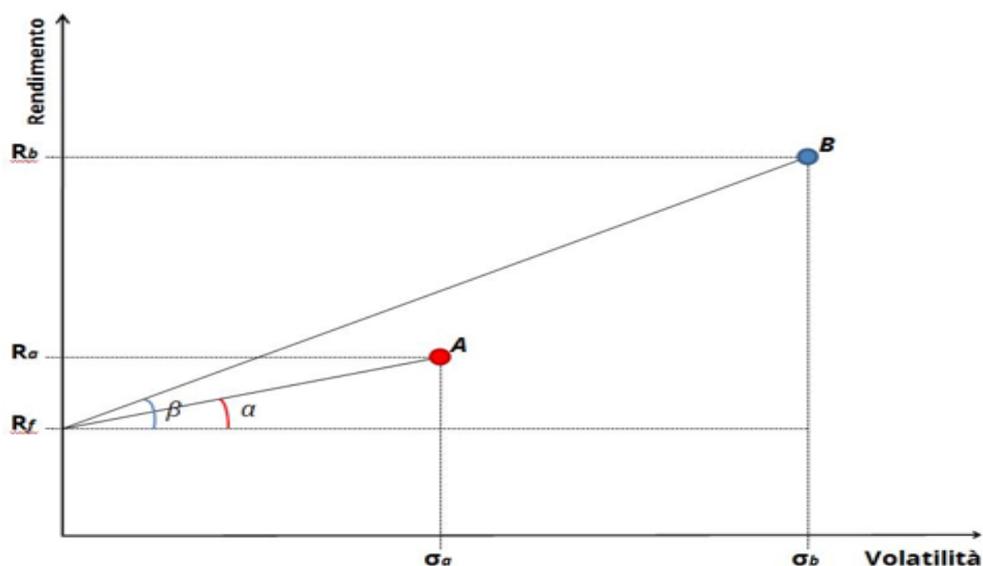


Figura n.1 – Indice di Sharpe.

Nonostante il largo impiego derivante dalla sua facilità applicativa, l'indice di Sharpe ha suscitato molti dubbi circa la sua validità sia come un'adeguata misura di rendimento corretto per il rischio di portafoglio di titoli, sia come una misura che potesse rispecchiare quelle che sono le scelte dell'investitore. La teoria moderna del portafoglio afferma che è possibile ridurre il rischio del portafoglio pur non rinunciando al rendimento, attraverso l'aggiunta di un asset ad un portafoglio ben diversificato e che abbia basse correlazioni. Questo perché l'incremento della diversificazione, contribuisce all'incremento dello *Sharpe ratio* rispetto ai portafogli speculari ma che riportano un grado di diversificazione inferiore. Tale assunto è verificato qualora gli investitori accettino la corrispondenza tra rischio e volatilità, evidenziando così un limite dell'indice in quanto, come detto in precedenza, il suo bacino di impiego d'impiego non coinvolgerebbe tutti gli investimenti. Proprio per tali motivi sono state predisposte delle misure di performance alternative, quali, ad esempio, l'indice di Sortino e di Treynor.

1.3.2 Sortino Index

Un mutamento della misura di performance di Sharpe è il rapporto di Sortino, calcolato dall'economista Frank a. Sortino, il quale elide gli effetti dei movimenti al rialzo del prezzo sulla deviazione standard, in modo tale da focalizzarsi sull'asimmetria della distribuzione dei rendimenti, caratterizzati da un livello sottostante quello del target o del rendimento richiesto. È proprio l'aspetto della deviazione standard che caratterizza maggiormente tale parametro, in quanto avviene una scissione tra la volatilità dannosa e quella complessiva totale relativa ai rendimenti negativi del portafoglio, chiamata anche *Downside Risk* o $\sigma (D)$, rispetto alla deviazione complessiva del portafoglio. Questa concentrazione sulla *Downside Risk* fornisce una prospettiva migliore di tutta la performance corretta per il rischio di un portafoglio. Infatti, l'indicatore di *risk adjusted performance* fornisce una misura della performance corretta per il rischio, la quale definisce l'extra-rendimento di un portafoglio rispetto al rendimento minimo accettabile (definito dall'investitore), *Minimum acceptable return (MAR)*, relativo al *Downside Risk* associato al portafoglio per unità di rischio. Analiticamente si ha:

$$D = \frac{\bar{r}_P - \bar{r}_f}{\sigma(D)} \quad \text{con} \quad \sigma(D) = \sqrt{\text{VAR}[r_{P,t} | r_{P,t} < 0]}$$

Da tale formula emerge la diretta proporzionalità delle sue componenti; infatti maggiore è lo scostamento dei rendimenti dei titoli rispetto al rendimento atteso dell'investitore, maggiore sarà la *Downside Risk* e quindi minore l'indice di Sortino. Causa di ciò è l'irrequietezza degli investitori di fronte a risultati discrepanti dal loro minimo accettabile e non quindi dall'incognita relativa alle fluttuazioni dei prezzi dei singoli titoli; ragion per cui il Sortino Index trascurava il comportamento di fondo nelle fasi di rialzo durante l'analisi delle serie dei rendimenti negativi.

1.3.3 Treynor Index

L'indice di Treynor, anche chiamato *reward to volatility Ratio*, introdotto nel 1965 dall'economista Jack Treynor, analizza la performance di un portafoglio, corretta per il rischio, analizzando quindi il rendimento in eccesso del portafoglio stesso per unità di rischio. In tal caso il rendimento in eccesso corrisponde al rendimento guadagnato che va al di sopra di quello che avrebbe potuto generare un investimento privo di rischio. Tale misura di rischio finanziario, si discosta dall'indice di Sharpe in quanto al posto della deviazione standard posta al denominatore, Treynor impiega rischio di mercato non diversificabile, il *beta* come indice di volatilità, sfruttando quindi l'assunto del modello del CAPM, secondo il quale una discreta diversificazione degli investimenti è sufficiente per sfruttare le correlazioni presenti tra i vari strumenti del portafoglio. Come al portafoglio di azioni, l'indice di Treynor può riferirsi anche a un fondo comune di investimento o un fondo negoziato in borsa, riflettendo quale possa essere la miglior scelta di investimento tramite la crescita del suo valore: più è alto l'indice, più è appetibile l'investimento.

$$\text{Treynor Ratio} = \frac{\text{Portfolio Return} - \text{Risk Free Rate}}{\text{Portfolio Beta}}$$

Il Beta, essendo il rischio non diversificabile, rappresenta il coefficiente angolare della retta di regressione tra i rendimenti del titolo e del mercato. L'utilità di tale indice emerge di fronte a dei titoli i quali sono costituiti da un rischio diversificato simile; qualora mancasse tale ipotesi, tutti i portafogli che presentano un rischio sistematico identico ma differiscono per rischio totale, non subiranno alcuna variazione di trattamento nella valutazione, ma il portafoglio che riporta un rischio totale maggiore, non sarà ben diversificato, comportando così il mancato prezzo reale del suo rischio sistemico.

Quindi il motivo di maggior differenziazione con Sharpe è l'obiettivo finale e quindi anche il suo utilizzo; infatti se l'indice di Sharpe cerca di definire la variabilità dell'investimento e quindi verrà utilizzato ex ante l'investimento stesso, l'indice di Treynor sarà funzionale a diversificare ulteriormente il portafoglio titoli.

1.3.4 Alpha di Jensen

Nel 1968, l'economista Michael Jensen ampliò il bacino degli indicatori di performance descrivendo un indice di rendimento di risk-adjusted il quale calcola l'extra rendimento rispetto al portafoglio o ad un fondo investimento, in relazione quindi alla redditività che avrebbe potuto generare, correlata con il suo grado di rischio sistematico misurato dal *beta*. Valutando la *security selection* del gestore, questa misura è correlata all'indice di Treynor il quale prende in esame la totalità della performance che è stata realizzata dal fondo, sempre in rapporto al rischio sistematico *beta*.

Tale indice può assumere valori negativi o positivi, dipendenti dallo scostamento o meno dei livelli di mercato; infatti il confronto tra un benchmark di riferimento e la performance del fondo riflette la qualità del fondo stesso. Lo stesso benchmark sarà oggetto di analisi in quanto, in una gestione attiva, l'investitore cercherà di batterlo, andando a sovrappesare o sottopesare alcuni titoli in portafoglio. Considerando il rischio sistemico *beta* del fondo e quindi anche la corrispondenza tra il rendimento del fondo e quello del benchmark di riferimento, un valore significativamente diverso da zero e positivo dell'Alpha di Jensen

riflette l'extrarendimento prodotto del fondo associato a tale misura, discostandosi dall'ipotetico rendimento secondo il solo rischio sistemico, evidenziando così le buone capacità del gestore del fondo di selezione dei titoli (*stock picking*). Qualora il valore dell'indice risultasse negativo, si avrà l'effetto opposto, ovvero un rendimento del fondo inferiore a quello supposto in equilibrio dal proprio rischio sistematico, quindi quello atteso secondo la Security Market Line. Graficamente, tale indice coincide con lo scostamento verticale tra la retta rappresentante il portafoglio considerato e la SML.

Graficamente:

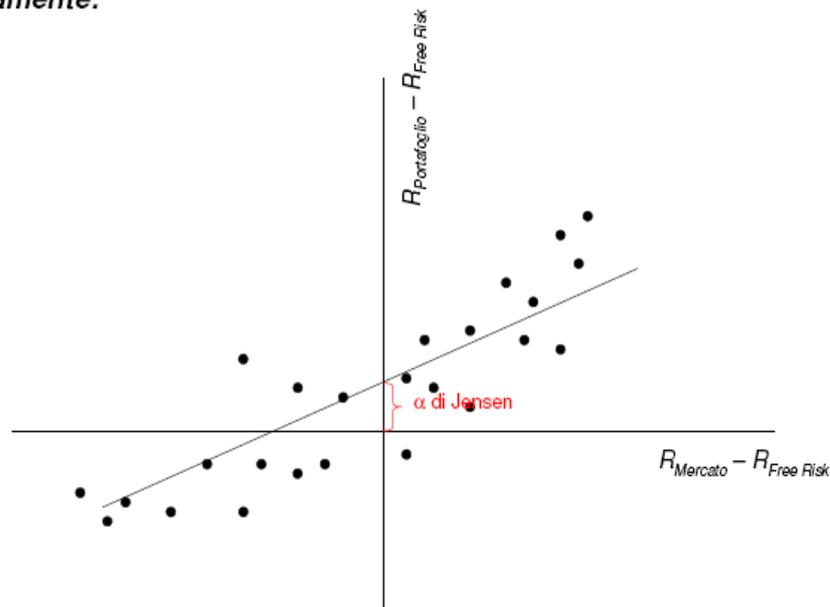


Figura n.2 – CAPM e α di Jensen.

Inoltre, l'Alpha di Jensen è una misura assoluta di performance, si discosta quindi dalle altre viste precedentemente in quanto sono considerate relative. Invece in un mercato efficiente il valore atteso di Alpha sarà zero, il che implica un ritorno equo dell'investimento in base al rischio assunto.

Analiticamente è possibile osservare che l'Alpha di Jensen è il coefficiente costante della SML nell'equazione empirica del CAPM:

$$\text{Jensen's } \alpha = R_p - R_f - \beta_p(R_m - R_f)$$

R_p : return of Portfolio

R_f : risk free rate

R_m: return of the Market

β_p: Sensitivity of the Portfolio Returns vs Market returns

Nell'equazione è possibile capire come un *beta* pari a zero implichi una formula il cui risultato è il frutto della differenza tra i rendimenti del portafoglio e quelli del mercato. Ma una considerazione del *beta* costante durante il periodo di osservazione della performance concretizza uno dei principali limiti dell'indice di Jensen, provocando così una valutazione negativa dei gestori i quali usufruiscono delle strategie di *market timing* per provare ad anticipare i trend del mercato.

1.3.5. Information Ratio

Sulla scia dell'Alpha di Jensen, anche l'Information Ratio include nella sua analisi l'extra-rendimento attivo (*alpha*) di un portafoglio rispetto al benchmark, che rapportato con la sua *tracking error volatility*, ovvero la rischiosità differenziale successiva alla scelta di investimento in un fondo invece che nel benchmark, delineano proprio quest'indice. Vi sono due differenze sostanziali tra queste due tipologie di misurazione, la prima è il rischio a cui si fa riferimento; se lo Jensen Index è corretto secondo il rischio sistematico e quindi non diversificabile, all'Information ratio viene applicato il rischio specifico (diversificabile). Da tale differenza emerge che questo indice misura la remunerazione del rischio residuale aggiuntivo, derivante dallo *stock picking*. La seconda differenza si basa sull'interpretazione di *alpha*; infatti mentre l'Alpha di Jensen arriva a definire quelle che sono le skills del gestore (quindi l'*alpha*) tramite l'impiego del portafoglio di mercato inteso come benchmark di riferimento, nel rapporto dell'Information Ratio, la natura del numeratore può riferirsi a qualsiasi tipo di benchmark, che non per forza deve essere il mercato.

Analiticamente abbiamo:

$$IR = \frac{\hat{\alpha}_p}{\hat{\sigma}_\epsilon}$$

dove $\hat{\epsilon}_t$ è il termine d'errore nell'equazione empirica del CAPM

$$\epsilon_t = \bar{r}_{p,t} - \bar{r}_{f,t} - \hat{\alpha}_p - \hat{\beta}_p(\bar{r}_{B,t} - \bar{r}_{f,t})$$

La completezza di tale indice rispetto a quello di Jensen è tangibile con un alpha positivo, in quanto oltre a mostrare la bravura del gestore nell'ottenere un sovra-rendimento rispetto al benchmark, evidenziando l'ottima Asset allocation strategica del portafoglio rispetto al benchmark scelto, descrive come tale risultato è stato raggiunto, ovvero senza che sia avvenuto un incremento eccessivo del rischio totale del portafoglio derivante dalla gestione attiva. È in tal senso che l'IR misura la remunerazione del rischio residuale. Infatti, una gestione passiva del portafoglio implicherà un numeratore nullo e quindi un indice prossimo allo zero.

A livello pratico l'IR riflette la convenienza di un investimento in un gestore attivo rispetto ad uno passivo; inoltre, per un investitore risulterà importante stimare correttamente questo indice ex-post per calcolare un investimento attivo.

1.3.6 Omega Ratio

Negli indicatori di performance precedenti non vengono considerati alcuni momenti di ordine superiore, oltre la media e la varianza, tipici della distribuzione gaussiana; questi momenti sono simmetria e curtosi. Quest'ultima, quando è elevata, indica un'elevata probabilità di valori estremi, mentre un'asimmetria positiva (negativa) riflette una coda a destra (sinistra) della distribuzione contenente più osservazioni. Nel caso in cui l'investitore fosse avverso al rischio, andrà a preferire un'asimmetria positiva, cercando di evitare casi di asimmetria negativa o curtosi elevata; ma entrambi i casi di asimmetria e di curtosi potrebbero essere discordanti con quelli previsti per una distribuzione gaussiana, allontanandosi quindi dalla Normalità.

Ora tutti questi momenti della distribuzione verranno incorporati dall'indice Omega, sviluppato da Shadwick e Keating nel 2002, in quanto tale indice, essendo una diretta trasformazione di questi momenti, è volto appunto, a sopperire all'inadeguatezza dei tradizionali indici durante la valutazione della performance di investimenti i cui rendimenti non sono distribuiti normalmente. Omega è il risultato del rapporto tra il guadagno rispetto a un valore soglia prefissato, il quale muta in base alle aspettative dell'investitore, e la perdita rispetto alla soglia stessa. Effettuando quindi una partizione dei rendimenti tra perdite e guadagno risulta che al di sopra di questo valore soglia sono situati i rendimenti positivi della distribuzione cumulata, mentre al di sotto abbiamo le perdite.

Proprietà fondamentali di questo indice sono:

- l'Omega sarà pari ad 1 se la soglia è uguale alla media della distribuzione;
- in base al valore dell'indice, qualsiasi investimento può essere ordinato, a prescindere dal livello della soglia.

Inoltre, l'indice di Omega, incorporando tutti i fattori di rischio e rendimento di un portafoglio insiti nella distribuzione dei rendimenti, non solo migliora l'asset allocation tra i vari investimenti, ma investe la psicologia dell'investitore, la sua avversione al rischio, di un ruolo fondamentale per la definizione precisa del suo valore.

Per arrivare al rapporto che definisce l'indice Omega, è necessario creare la funzione di ripartizione delle serie dei rendimenti relativi a un portafoglio o a un titolo per poi definire il nuovo valore soglia, proporzionale al grado di avversione al rischio dell'investitore, tramite la specificazione di un livello "r" del rendimento, delineando una performance personalizzata. Il valore soglia non solo è un parametro esogeno, ma ha anche la funzione di spartiacque della funzione di ripartizione, la quale si scinde appunto, in probabilità di guadagno e di perdita, rispettivamente in G (gain) e L (loss). Definendo, inoltre, (a,b) come l'intervallo dei rendimenti e F(.) come la distribuzione cumulata di tali rendimenti, è possibile definire l'indice Omega come il rapporto tra probabilità pesata di guadagno e probabilità di perdita per una determinata soglia "r":

$$\Omega(r) = \frac{\int_a^b (1 - F(x)) dx}{\int_a^r F(x) dx}$$

Quest'indice presenta le seguenti proprietà; quando r, ovvero la soglia, coincide con la media dei rendimenti, Omega assumerà il valore 1 in quanto i guadagni saranno uguali alle perdite, inoltre questo rapporto è inversamente proporzionale a r. Poiché non richiede stime ed analizza direttamente dalla distribuzione osservata, questo rapporto non rappresenta l'approssimazione della distribuzione dei rendimenti, ma a quest'ultima è equivalente, riflettendo trasversalmente tutte le relative informazioni e rimanendo statisticamente significativa. Questa è un'altra caratteristica di Omega, che ne fa un indicatore di misurazione della performance ideale in quanto non interpreta il singolo effetto di ogni momento di ordine superiore della distribuzione, ma ne ingloba l'effetto

combinato di ognuno di essi. Inoltre in base al valore di questo indice relativo ai vari rendimenti per diverse classi di titoli, è possibile confrontare questi ultimi per poi ordinarli; motivo per cui verrà selezionato il portafoglio con Omega maggiore in quanto avrà maggiori possibilità di ottenere rendimenti che siano pari o superiori alla soglia prefissata. Funzionale per la scelta, ma anche per la costruzione del portafoglio tramite l'ottenimento di pesi che differiscono considerevolmente da quelli risultanti dal metodo di Media-Varianza, in quanto Omega, come visto in precedenza, ingloba tutti i momenti superiori al secondo. Inoltre, questa funzione non utilizza la distribuzione Normale tipico dell'approccio di Markowitz, ma impiega la distribuzione stessa dei rendimenti. Infatti, tale considerazione, impedisce di incappare nell'errore commesso dall'approccio Media-Varianza, ovvero quello di considerare sia perdite che guadagni ugualmente rischiosi.

1.3.7 Farinelli – Tibiletti Ratio

Oltre l'Omega Index, nel 2002, viene introdotto il Farinelli-Tibiletti Ratio con il compito di confutare le misure di performance antecedenti, fondate su primi due momenti della distribuzione dei rendimenti. La differenza sostanziale con gli altri indici è il diverso utilizzo della misura della volatilità; se, ad esempio, l'indice di Sharpe impiega una volatilità "two-sides", ovvero misure precise che inglobano la volatilità "positiva" e "negativa", rispettivamente i rendimenti attesi e deviazione standard, tale indice utilizza misure "one-sided", ovvero misure che riflettono una specifica caratteristica di una sola sezione della distribuzione presa in esame. Quindi l'FT Ratio riesce a strutturare due situazioni diametralmente opposte: scindere la volatilità del singolo investitore tra negativa e positiva, e fare lo stesso tra piccole e grandi deviazioni, relativamente alla *threshold* (soglia specifica). Per questo motivo risulta fondamentale controllare le distribuzioni asimmetriche e leptocurtiche per riuscire a pesare nel miglior modo possibile le due tipologie di volatilità, infatti due tipologie differenti di preferenze asimmetriche sono oggetto di analisi;

le asimmetrie nelle preferenze per la volatilità "buona" e "cattiva" rispetto alla soglia di paragone dei rendimenti, r^* , e per "grandi" e "piccole" deviazioni sempre relativamente alla soglia r^* .

Tali preferenze asimmetriche possono essere modellate tramite misure specifiche di volatilità “one sided”, come “one sided” sono i momenti coinvolti nella misura di performance funzionali a descrivere le “grandi” e “piccole”.

A livello analitico, il FT ratio è:

$$FT(r_t, \gamma, \delta) = \frac{E[(r_t - r^*)^+ \gamma]}{E[(r_t - r^*)^- \delta]}$$

$$\text{con } (r_t - r^*)^+ = \max(0, r_t - r^*) \quad \text{e} \quad (r_t - r^*)^- = -\min(0, r_t - r^*)$$

In tale rapporto osserviamo che il numeratore è definito Upper Partial Moment (momento parziale γ mesimo) mentre la quantità al denominatore è chiamata Lower Partial Moment (momento parziale δ esimo). Poiché le quantità rapportate sono sempre positive, per ogni valore soglia, l’indice di Farinelli-Tibiletti assumerà sempre valori positivi. In base al grado di avversione al rischio dell’investitore, si determineranno i due parametri $[\gamma; \delta]$, i quali non solo oscillano nel range $[0.5, 4]$, ma è possibile bilanciarli per adeguarli al soddisfacimento dell’agente qualora si delineasse una situazione di *overperforming* o *underperforming*. È naturale che maggiore sarà il valore del parametro relativo al momento parziale, maggiore sarà il peso dei valori estremi, e quindi alle code, nella parte coinvolta della distribuzione. Per esempio, per valore elevati di γ e bassi valori di δ , verrà assegnata una maggiore enfasi ai momenti propri della parte destra della distribuzione, dando quindi un maggior grado di interessamento ai valori estremi positivi, prediligendo, quindi, investimenti più aggressivi e volatili, andando a trascurare l’altra faccia della medaglia, ovvero le possibili perdite (δ basso). Viceversa, per un peso maggiore di δ a discapito di quello di γ , verrà data maggior rilevanza ai momenti relativi alla parte sinistra della distribuzione, quindi ai valori estremi negativi, privilegiando quelli che sono gli investimenti più difensivi e poco volatili.

1.3.8 Drowdown Index

Nell’ultimo periodo si è manifestata una crescente tendenza all’utilizzo dell’indice di DrawDown, derivante dalla discesa del mercato finanziario. Tale appellativo viene associato al costo in termini di perdite che un trader deve sostenere e proprio per tale motivo rappresenta la quantità di denaro, in percentuale rispetto al capitale complessivo,

persa facendo appunto attività di trading. È per tal motivo, che questo indice può sintetizzare contemporaneamente la perdita massima relativa a un determinato investimento e la percentuale effettivamente realizzata; tutto questo in un'unica misura. Quindi va fondamentalmente a riflettere la differenza tra il massimo locale e il successivo minimo locale tramite i valori assunti, i quali possono essere o negativi o coincidere con zero.

$$D_t = \begin{cases} r_t I(r_t < 0) & \text{se } D_{t-1} = 0 \\ \min(0, D_{t-1} + r_t) & \text{se } D_{t-1} < 0 \end{cases}$$

con

$$I(r_t < 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } r_t < 0 \\ 0 & \text{se } r_t \geq 0 \end{cases}$$

Per una valutazione efficace è necessario impiegare il DrawDown Massimo e il DrawDown Medio; se il primo descrive la massima perdita conseguibile dopo aver raggiunto un certo gain, il secondo evidenzierà quali saranno le perdite alle quali si potrà incorrere in un determinato arco temporale. In correlazione al DD Massimo viene impiegato il Massimo *Run Up* funzionale ad evidenziare qual è la forza che impenna i prezzi della gestione, mostrando così il *gain* eventuale nel miglior *timing* tramite la differenza tra il massimo e il minimo che lo precede.

1.4 Il timing nella performance

“The only problem with market timing is getting the timing right.” – Peter Lynch

Il noto investitore Peter Lynch aveva questa considerazione del market timing, ovvero della strategia funzionale a comporre o modificare il portafoglio, quindi assumere decisioni di vendita o acquisto di strumenti finanziari, basandosi sulla previsione futura delle fluttuazioni dei prezzi di mercato. Questo concetto potrebbe risultare determinante in una gestione attiva del portafoglio. Infatti, in quest'ultimo caso, se lo scopo è quello di anticipare le oscillazioni del mercato, l'assunzione di media, varianza e beta dei rendimenti costanti, come avviene nella gestione passiva, potrebbe compromettere il conseguimento positivo di una strategia. Di conseguenza, è necessario affiancare l'analisi del timing della gestione agli indici di *performance risk adjusted*.

1.5 Benchmark

Se gli indicatori di performance sono funzionali a misurare e valutare il comportamento della strategia di investimento in un determinato futuro, è necessario capire se tale performance del portafoglio coincide con il grado di soddisfazione dell'investitore stesso, questo perché l'andamento dell'investimento potrebbe essere stato positivo o negativo. Esempio concreto di tale assunto è rappresentato dalla discrepanza del livello di rischio tra due investimenti con ugual rendimento. Alla luce di ciò è stato lungimirante introdurre una misura di confronto diretto con il mercato, con il settore o con l'intera asset class, che possa offrire rendimenti simili o alternativi, una volta aver paragonato l'investimento stesso: il benchmark.

Su indicazione categorica della Consob, dal primo luglio 2004, il benchmark viene inserito in qualsiasi prospetto informativo relativo al fondo investimento, tranne per quelli sensibili. Il benchmark è un parametro oggettivo di riferimento, costituito da un paniere predefinito. Esso offre un quadro orientativo rappresentante quelle che sono le caratteristiche proprie dell'investimento, quali politica e tipologia, al fine di valutare questo tramite una stima out-performance o under-performance. Questo parametro è rappresentato da indici di mercato, indici di settore o indici di un'area, trovando pubblicazione sui maggiori quotidiani finanziari; inoltre deve essere coerente con l'obiettivo della gestione. La coerenza implica un'adeguatezza agli investimenti del fondo comune, una linearità con i rischi assunti per la gestione individuale affinché possa esser fatta luce sul grado di rischio di ogni prodotto per l'investitore. Per tali ragioni, il modus operandi del benchmark è trasversale, in quanto è il polo di riferimento dal quale vengono delineate le strategie (ex ante), e fornisce i primi risultati del confronto con il portafoglio (ex post). Quindi il benchmark può essere definito come lo starting point per il processo di asset allocation.

Quest'indice, affinché possa essere definito tale, deve soddisfare determinati requisiti:

- Oggettività di prezzi impiegati nella valutazione delle singole attività costituenti
- Rappresentatività in relazione al fatto che le opportunità di investimento devono essere riflesse da classi e titoli
- Replicabilità delle attività le quali devono essere necessariamente acquistabili sul mercato
- Trasparenza nella modalità e composizione del calcolo

Tale parametro fornisce una valutazione della qualità della gestione, poiché tramite l'andamento dei mercati e le decisioni d'investimento assunte dal gestore, delinea il rendimento; per di più, la modalità di gestione potrà influenzare l'utilizzo del benchmark stesso. Infatti, una gestione passiva implica una costruzione di portafoglio che replichi i risultati del benchmark, poiché battere il benchmark non rientra nella sua condizione, a differenza dell'ottenimento di un risultato che possa essere stimato come la miglior combinazione di rischio/rendimento. Mentre nella gestione attiva, si cerca di superare il benchmark, di ricavare un risultato migliore di quello di tale parametro. La costruzione di quest'ultimo deve essere proporzionale alle attività relative alla tipologia della gestione, per cui non può essere rappresentato dal mercato in cui il portafoglio investe; a livello pratico quindi è evidente come l'S&P 500, non possa essere considerato come indice di riferimento di un portafoglio costituito da 50 azioni, ma servirà appunto un indice che sia coerente con la quantità di azioni in relazione alla loro capitalizzazione di mercato, questo valore, chiamato Market Value, riflette perfettamente il peso dell'azienda nel mercato.

1.6 Teoria del portafoglio di Markowitz

È consuetudine riconoscere come scopo ultimo dell'investitore la mera massimizzazione del rendimento atteso o la limitazione del rischio, ma tale credenza è stata sfatata da Harry Markowitz nel 1952 con la pubblicazione del suo articolo "*Portfolio Selection*" sul "*The Journal of Finance*". L'obiettivo dello studio è quello di costruire, attraverso un modello media-varianza, un portafoglio efficiente che riesca a combinare rischio e rendimento nel miglior modo possibile, in un determinato orizzonte temporale. Inoltre si cerca di rielaborare la convenienza e il concetto di diversificazione in quanto fino a quel momento un portafoglio poteva considerarsi tale se i titoli che lo componevano, erano oggetto di valutazione limitata alle loro caratteristiche di rischio e rendimento. L'articolo prevede alcune assunti caratteristici:

- La razionalità è una peculiarità rappresentativa degli investitori, i quali vogliono massimizzare il rendimento, minimizzando il rischio
- Mercato perfettamente concorrenziale e assenza di asimmetria informativa
- Assenza di imposte e costi di transazione
- La durata di investimento è uniperiodale

- Accesso illimitato al capitale da parte degli investitori, che possono prendere a prestito il denaro ad un tasso d'interesse privo di rischio

Tale elaborato pone le sue radici su un'ipotesi fondamentale, ovvero che un livello maggiore di diversificazione è il frutto della compensazione relativa agli andamenti asincroni dei singoli titoli, generata appunto, dall'aumento del valore di un titolo in risposta all'investimento in titoli diversi, non perfettamente correlati tra loro e alla riduzione del valore di un titolo, ergo, si cerca di ottenere un trade-off fra rendimento e rischio che sia bilanciato in maniera ottimale. L'equilibrio deriva dal valore atteso e dalla varianza o deviazione standard del rendimento del portafoglio: maggiore il rischio, ovvero la potenziale ampiezza delle oscillazioni della performance dell'investimento, maggiore il rendimento, performance generale attesa dall'investitore. Partendo dal presupposto che il valore atteso, in statistica, coincide con il suo valore medio, il rendimento atteso del titolo i -esimo, μ_i , corrisponde alla media ponderata dei rendimenti del titolo con la probabilità che i pesi coincidano con la probabilità che gli stati si realizzino. Inoltre, dato che la probabilità dei rendimenti degli asset presenti nel portafoglio si distribuisce secondo una normale, anche il portafoglio stesso sarà distribuito normalmente. Il rendimento atteso del titolo i -esimo è:

$$\mu_i = \sum_{h=1}^m R_{i,h} \cdot p_{i,h}$$

$R_{i,h}$: realizzazione della variabile casuale i nello stato h -esimo

$p_{i,h}$: probabilità che si verifichi lo stato h -esimo per la variabile casuale i .

Mentre il rendimento atteso di un portafoglio è dato dalla somma, ponderata per i pesi dei titoli, dei rendimenti dei titoli che compongono il portafoglio stesso si evince come la stima degli eventuali esiti della variabile casuale sia funzionale all'identificazione del rendimento atteso. Per il calcolo del rischio di un titolo invece ci si avvale della varianza:

$$\sigma_i^2 = \sum_{h=1}^m (R_{i,h} - \mu_i)^2 \cdot p_{i,h}$$

Mentre il rischio di portafoglio, correlato ai rischi dei titoli che lo compongono, dipende da due variabili specifiche: i rischi specifici propri dei singoli titoli, definiti dalle loro varianze appunto, e il rischio sistematico generale, delineato dalla covarianza. La formula

relativa alla varianza dei singoli titoli evidenzia l'aleatorietà dei rendimenti di ogni attività finanziaria qualora sia fruibile una serie storica di prezzi o rendimenti, anche se tale misura non è l'unica a determinare il rischio di un titolo o strumento finanziario. Infatti, la deviazione standard è funzionale a definire il rischio complessivo del portafoglio nel quale è posto, dipendendo dalla correlazione o covarianza dei suoi rendimenti con quelli degli altri strumenti finanziari insiti nel portafoglio stesso. Infatti, grazie alla correlazione tra gli asset nella costruzione di un portafoglio, Markowitz afferma che la creazione di portafogli migliori potrà concretizzarsi, producendo così un rendimento atteso maggiore per lo stesso grado di rischio o un rischio minore a parità di rendimento. Da ciò si evince come il grado di correlazione tra le varie attività finanziarie sia direttamente proporzionale al livello di incremento del rischio di portafoglio successivo all'inserimento del titolo, una correlazione negativa provoca la riduzione della rischiosità totale del portafoglio. Il coefficiente di correlazione, il quale può assumere valori che oscillano tra 1 e -1, è dato dal rapporto tra la covarianza tra il tasso di rendimento del titolo 1 e il titolo 2 e le deviazioni standard relative ai rendimenti dei due singoli titoli. Si avrà correlazione positiva qualora le due variabili si muovessero nella stessa direzione e viceversa, mentre la correlazione sarà nulla se vige l'indipendenza tra le due variabili. L'interazione tra i rischi relativi ai vari strumenti finanziari e di conseguenza relativi anche al portafoglio, può essere controllata o comunque limitata attraverso la diversificazione. Ma tale strumento non ha solo risvolti positivi, questo perché il suo effetto si manifesta in maniera trasversale, annullando la reazione sia degli eventi esterni negativi, ma anche quelli positivi, incrementando così i costi di transazione e quelli relativi alla riduzione del rendimento atteso. Quindi questi due parametri, media e varianza, secondo il modello della media-varianza nella selezione del portafoglio di investimento (*mean variance framework*) sono bastevoli a gestire le decisioni degli investitori, di conseguenza le informazioni riguardanti momenti addizionali della funzione di densità del rendimento, quali coefficienti di simmetria/asimmetria o curtosi, vengono considerate superflue. Questo aspetto fa emergere un limite del modello quale la mancata considerazione e quindi misurazione di tali coefficienti funzionali a tratteggiare una distribuzione di risultati propri di un'attività che potrebbe rivelarsi importanti per le scelte dell'investitore. Tuttavia, il modello di Markowitz assume la qualifica di precursore della moderna teoria di portafoglio. Infatti, nell'ottica della razionalità dell'investitore, quest'ultimo

ottimizzerà la sua scelta selezionando un titolo che abbia un minor rendimento a discapito di un maggior rischio rispetto ad un altro titolo. Per questo è possibile identificare la combinazione di titoli/portafogli che rendono maggiormente ad un determinato livello di rischio e viceversa (rischio minore per livello di rendimento predefinito), su un'iperbole, chiamata frontiera efficiente, anche grazie all'inserimento nel processo di un nuovo input, la covarianza. L'investitore verrà guidato nella scelta dalle sue preferenze individuali di avversione al rischio; qualora fosse avverso al rischio, la scelta ricadrà su un portafoglio il cui rendimento e deviazione standard sono bassi, al contrario, un investitore amante del rischio opterà per un portafoglio che ha sì un rischio maggiore ma al contempo frutterà un rendimento atteso maggiore.

1.6.1 Frontiera efficiente dei portafogli

Prima di andare a delineare la frontiera efficiente dei portafogli è necessario individuare, a livello grafico, come si dispongono i titoli i-esimi rischiosi caratterizzati da una peculiare combinazione tra valore atteso (μ_i) e deviazione standard (σ_i).

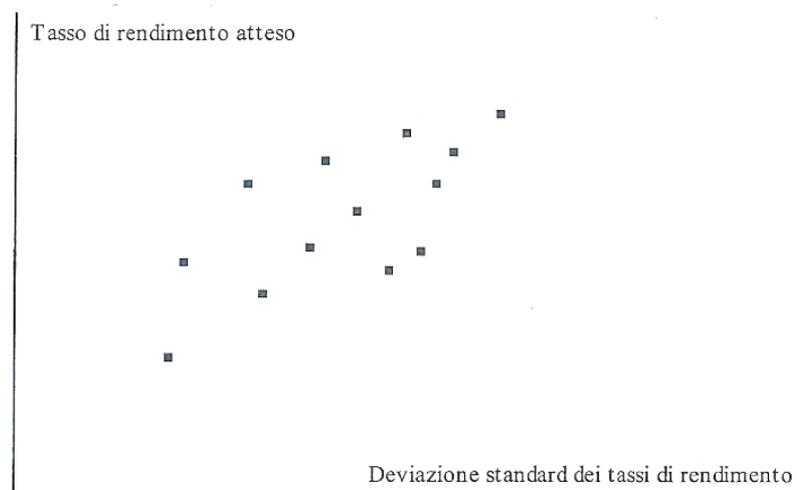


Figura n.3 – Disposizione titoli rischiosi [Hull, J. C., 2008]

Ora la combinazione lineare di questi titoli determina il rendimento del portafoglio, i cui pesi coincidono con le somme investite all'inizio del periodo. Il prodotto finale di tale combinazione, il valore atteso del tasso di rendimento del portafoglio:

$$p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

w_i : peso del titolo i-esimo nel portafoglio.

Invece la deviazione standard σ_p del tasso di rendimento del portafoglio coincide con:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n w_i w_j \sigma_{i,j}}$$

$\sigma_{i,j}$ è la covarianza fra i rendimenti dei titoli i e j .

Ora la continua espansione dell'insieme di scelta dell'investitore, e quindi il costante incremento di titoli alla combinazione iniziale, produrrà effetti sempre più positivi al trade-off tra rischio e rendimento, derivanti dallo sfruttamento della diversificazione. Reiterando tale processo si giunge alla fase in cui vengono considerati tutti i portafogli derivanti dalla combinazione dei titoli rischiosi per poter poi ottenere la frontiera efficiente, sulla quale sono riportate tutte le combinazioni di rendimento atteso e deviazione standard che massimizzano il tasso atteso di rendimento per un determinato livello di rischio.² Non ci sono investimenti il cui tasso di rendimento atteso è più elevato a parità di deviazione standard. Tra tutti questi portafogli vi è il *Global Minimum Variance Portfolio*, caratterizzato da una minor varianza rispetto a tutti gli altri, la cui funzione è quella di sparti acque; tutti i portafogli che giacciono sulla frontiera efficiente e sopra il *GMVP* sono considerati efficienti, invece tutti gli altri portafogli che si collocano al di sotto del *Global Minimum Variance Portfolio*, ma sempre sulla frontiera efficiente, vengono reputati inefficienti in quanto lasciano spazio a dei portafogli che offrono un maggior rendimento a parità di rischio.

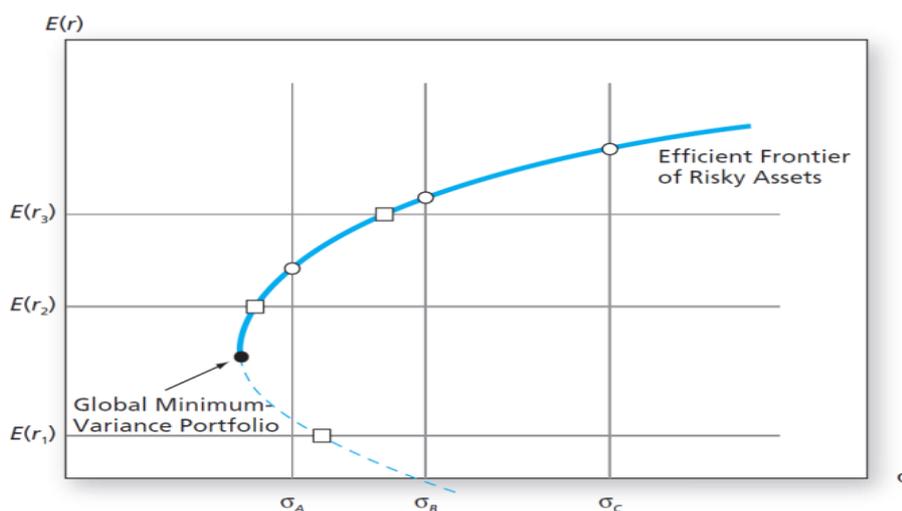


Figura n.4 – *Global Minimum Variance Portfoli*. [Bodie, Kane, Marcus, 2011]

“La frontiera efficiente è definita anche come una funzione concava nello spazio

rendimento atteso-deviazione standard che si estende dal portafoglio a varianza minima al portafoglio caratterizzato dal maggiore rendimento atteso.”

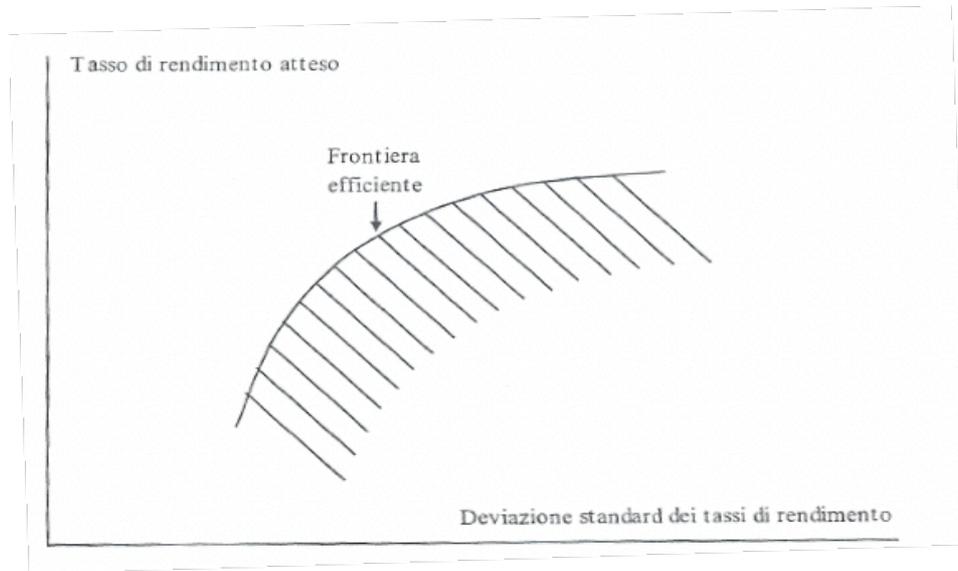


Figura n.5 – *Frontiera efficiente* [Hull, J. C. 2008]

Tutte le possibili opportunità di investimento vengono rispecchiate dall'area tratteggiata al di sotto della frontiera efficiente e, a parità di deviazione standard e tasso di rendimento, ad ogni punto dell'area tratteggiata corrisponde un punto sulla frontiera efficiente contraddistinto da un tasso di rendimento atteso più elevato. Se oltre alla frontiera efficiente si disegna la curva di indifferenza, ovvero la curva che, in base all'avversione al rischio degli individui, seleziona i portafogli indifferenti agli investitori, allora il portafoglio ottimo sarà collocato nel punto di tangenza delle due curve (la curva di indifferenza deve avere il massimo grado di utilità). Se ad un incremento del rischio corrispondesse un aumento in misura minore del rendimento, per ricondurre l'utilità al livello massimo, il punto, che rappresenta un investitore, il quale ha un'elevata avversione al rischio, sarà locato più a sinistra nella zona tangente con la frontiera efficiente. Le curve di indifferenza, per un determinato livello di utilità u , hanno determinate caratteristiche:

- Sono curve convesse
- Il numero delle curve collocate più in alto dipende dal livello di utilità (diretta proporzionalità)
- L'avversione al rischio è direttamente proporzionale alla convessità delle curve
- I portafogli relativi alla stessa curva di indifferenza saranno considerati equivalenti dall'investitore ai fini della sua scelta

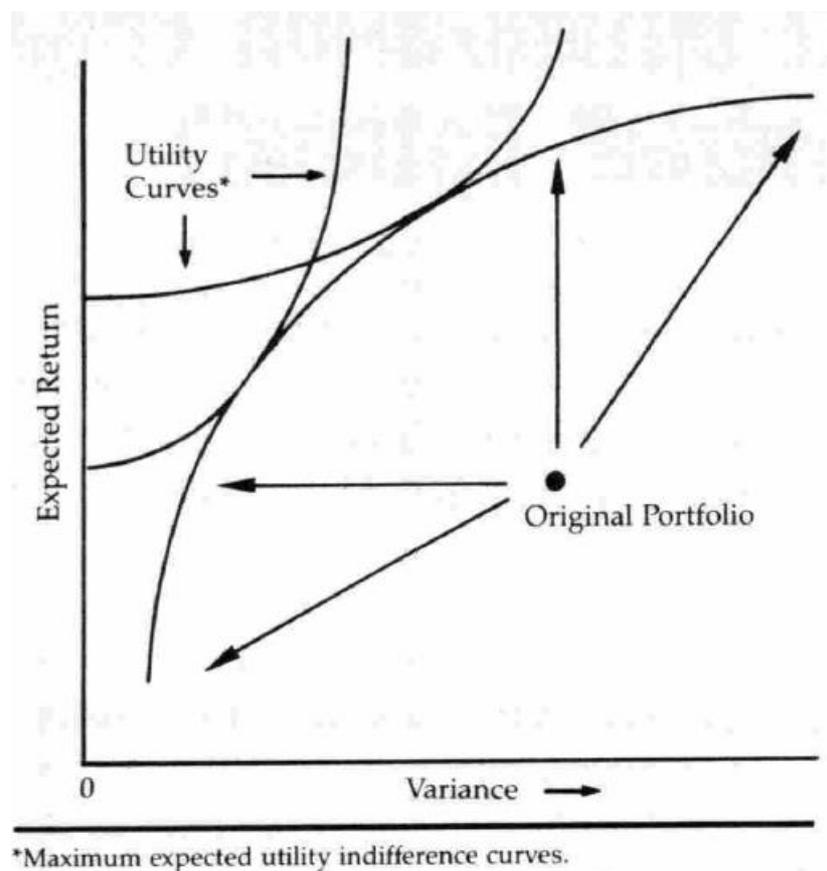


Figura n.6 - Tangenza tra frontiera efficiente e curve di indifferenza. [Michaud, 1989]

Da tale grafico si evince come la diversificazione dei singoli titoli possa rappresentare un criterio fondamentale nella costruzione del portafoglio efficiente; infatti se il lato destro della frontiera efficiente fosse occupato da tutti i singoli titoli, questo sarà simbolo di inefficienza, a conferma di quanto la diversificazione possa influenzare positivamente il grado di rendimento atteso e di rischio, i quali influenzano la scelta del portafoglio ottimo. Per la sua individuazione risulta fondamentale massimizzare l'utilità attesa, che nel caso specifico di Markowitz è una funzione quadratica, la quale dipende dall'avversione al rischio dell'investitore. La funzione di utilità attesa quadratica va a sintetizzare le preferenze del soggetto attraverso le costanti rendimento atteso e il rischio di portafoglio tenendo conto, come detto in precedenza, della sua avversione al rischio. La funzione di utilità attesa quadratica è:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$$

- μ : media

- σ^2 : varianza
- γ : coefficiente di avversione a rischio arbitrario selezionato tramite la propensione al rischio dell'investitore; maggiore sarà il suo valore, maggiore sarà la probabilità di ricavare portafogli che convergono al titolo privo di rischio.

Se con l'utilità attesa è possibile individuare il portafoglio ottimo, ovvero quello che massimizza il grado di soddisfazione in base alla sua propensione al rischio, con la diversificazione si possono ricavare dei portafogli efficienti in misura maggiore se venisse circoscritta la varianza media e covarianza media degli asset dei titoli:

$$\bar{\sigma}^2 = 1/n \sum_{i=1}^n \sigma^2 i$$

$$\overline{Cov} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{i=1}^n Cov(r_i, r_j)$$

Da queste due funzioni si può ricavare la varianza di portafoglio:

$$\sigma^2 p = \frac{1}{n} \sigma \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{Cov}$$

Definite queste funzioni, qualora il rischio complessivo fosse rappresentato interamente dal rischio sistematico, ovvero il rischio di mercato che non si può ridurre con la diversificazione, e quindi la covarianza media tra i rendimenti dei titoli è nulla, la varianza del portafoglio potrebbe risultare anche uguale a zero. Quindi con la diversificazione si potrebbe arrivare ad un valore del rischio di portafoglio veramente basso qualora ci sia non correlazione tra i rendimenti dei singoli titoli. Se invece ci trovassimo nella situazione opposta, ovvero che la covarianza media dei titoli risulti positiva, la varianza relativa si comporterà identicamente, infatti esiste un rapporto di diretta proporzionalità tra il numero dei titoli e la parte destra dell'equazione della varianza, la quale tenderà ad avvicinarsi al valore della covarianza media. Da ciò emerge come la covarianza del rendimento di un nuovo titolo inserito in un portafoglio con quella degli altri titoli, sia un criterio fondamentale per definire l'impatto che il titolo stesso possa avere sul rischio totale. È questo uno dei principali motivi che hanno reso la Teoria del Portafoglio di

Markowitz un pilastro per l'analisi di portafoglio. Infatti il portafoglio era immaginato come un'entità sintetica del rendimento e del rischio delle attività detenute, rifiutando la sua essenzialità e prediligendo l'analisi sui singoli titoli, escludendo però la correlazione tra le attività e il giovamento della diversificazione. L'impatto pratico però è stato poco efficace in quanto questo studio si propone come modello normativo, finalizzato a definire i contesti più favorevoli per la selezione dei portafogli efficienti, le migliori opportunità di investimento, a definire i tratti distintivi dell'investitore razionale per massimizzare l'utilità attesa e stabilire una connessione tra rendimento atteso e rischio. Tali considerazioni poggiano le basi su alcuni assunti, tra le quali l'utilizzo dei pesi. La derivazione di quest'ultimi infatti, è estrema e quindi inadeguata per essere inserita nei portafogli dei clienti [He and Litterman, 1999] a differenza di ciò che credeva Markowitz, che identifica i pesi come il risultato della relazione trade-off tra rischio e rendimento lungo la frontiera efficiente. Altro assunto riguarda la possibilità di intaccare quella che è la figura del *senior* all'interno delle commissioni delle società di investimento. Infatti tale ruolo potrebbe essere messo in discussione proprio dal modello quantitativo che permetta di identificare quale possa essere il miglior portafoglio e quindi la miglior opzione di investimento che la società dovrebbe seguire [Michaud, 1989]. Ora si assume di possedere un insieme di titoli che devono essere inseriti in un portafoglio e per ogni titolo viene calcolato il rendimento atteso, μ_i , la varianza, σ_i^2 e la covarianza σ_{ij} , e si assume di creare portafogli per ogni possibile combinazione di titoli. Successivamente si creano i portafogli per ogni combinazione di titoli possibile attraverso la creazione di una serie storica per titolo i (Π_i) dalla quale verranno poi estrapolati varianza e covarianza dei titoli e reiterando questo procedimento per tutte le attività finanziarie si troveranno i dati relativi a varianze e covarianze che verranno poi inseriti in una matrice Σ con forma $N \times N$ (N è il numero dei titoli) sulla cui diagonale verranno inseriti i valori relativi alle varianze e delle covarianze sugli spazi rimanenti. Inoltre il vettore Π , vettore di $1 \times N$, sarà costituito dai valori Π_i . Dopo aver stimato il rendimento atteso e varianza, si vanno a strutturare tutte le possibili combinazioni dei portafogli ipotizzando che tutti i titoli siano rischiosi. Così facendo si innesca un'operazione di scrematura delle combinazioni efficienti dei titoli, scegliendo quelle per cui non si può ottenere un rendimento atteso maggiore a parità di rischio o un rischio minore a parità di rendimento. Ed è a questo punto che

entrano in gioco le preferenze dell'investitore, la sua attitudine al rischio, che gli permetterà, anche grazie a incontro della propria funzione di utilità con la frontiera efficiente, di selezionare il portafoglio che più rispecchia il suo profilo ∂ . L'unione di questi elementi genera il portafoglio di Markowitz:

$$W = (\partial \Sigma)^{-1} \Pi$$

nella quale W rappresenta il vettore $N \times 1$ nel quale sono incorporati i valori delle quote dei titoli del portafoglio. Purtroppo ci sono delle falle all'interno del modello, soprattutto per quanto riguarda la validità della procedura e la sua applicabilità in un contesto finanziario reale, ad esempio un solo periodo di pianificazione, assenza di imposte e costi di transazione. Inoltre, anche l'approccio *backward looking*, basato su una stima di media e varianza sviluppata tramite l'osservanza dei dati storici, è indice di limitatezza e staticità, dato che il miglior approccio è dipeso da una stima fondata su rendimenti futuri dei titoli. Infatti un'analisi fondata su dati storici rende altamente instabile il portafoglio di mercato in quanto anche una leggera fluttuazione dei dati comporta un'oscillazione non indifferente del valore dei titoli e dei relativi pesi; di conseguenza l'investitore dovrà fronteggiare l'incremento dei costi, e quindi l'erosione dei profitti, a causa del continuo ricalcolo del portafoglio ottimo. La modifica radicale di quest'ultimo, successiva all'aggiornamento dei dati giornaliero e quindi ad una netta scissione e identificazione del titolo migliore e peggiore, confina comunque il portafoglio ad essere una soluzione d'angolo che agisce su un numero ristretto di asset diversi dai precedenti. Ciò avviene in quanto l'obiettivo finale è l'ottimizzazione, quindi da un processo di selezione di poche attività, solitamente due, una migliore e una peggiore ai fini del trade-off rischio/rendimento, si procede ad una vendita allo scoperto del titolo inefficiente mentre si investirà sul titolo più valido, facendo emergere però un'instabilità di questa soluzione estrema la quale porterà l'investitore ad ottenere soluzioni non completamente ottimali e molto sensibili a fluttuazioni, discostandosi così dal perseguimento della diversificazione. Tale instabilità è ancor più evidente nella mancata continuità della revisione ad intervalli periodici non ipotizzata dal modello. Questa operazione permette il modellamento nella composizione iniziale del portafoglio secondo i canoni dell'obiettivo rischio rendimento del singolo investitore, correlata alla variazione dei prezzi delle attività finanziarie nel tempo. [Marmi, 2010]. Altro problema è la difficoltà di costruzione della matrice di covarianza a causa dell'eccessiva numerosità dei titoli sul mercato e delle metodologie

statistiche utilizzate. Tra le varie mancanze presenti nel modello vi è l'utilizzo della sola deviazione standard come misura del rischio finanziario poiché fornisce solamente la volatilità del rendimento atteso e non il livello di perdita massimo o la probabilità della fluttuazione positiva o negativa dei rendimenti. Tra l'altro la stessa varianza, come la covarianza e il rendimento atteso, essendo osservabili solo ex-post, è necessario stimarli antecedentemente per poterli poi inserire nel modello, motivo per cui si manifesta una sovrastima dei titoli con elevato rendimento atteso, bassa varianza e correlazioni negative che portano alla concreta massimizzazione dell'errore di stima. La stessa stima che diventa difficile da calcolare per la numerosità dei dati di input, rendimenti attesi e matrice varianza-covarianza, considerati per il portafoglio. A ciò si aggiunge un assunto errato, ovvero la distribuzione normale dei rendimenti funzionale però ad uno snellimento dei processi matematici [Cornelis, 2004]. Proprio per tutti questi motivi il modello di Markowitz, in quanto non fornisce all'investitore la possibilità di creare delle proprie previsioni circa l'andamento dei titoli, è orientato solo nel definire delle decisioni che dovranno essere prese in un orizzonte temporale molto ristretto, successivo a quello di valutazione, evidenziando quali sono i vantaggi della diversificazione ma limitando appunto il suo raggio d'azione alla mera rilevazione della procedura con cui le informazioni e le opinioni degli investitori influiranno le quotazioni. Inoltre la soggettività del portafoglio ottimo, il quale è il risultato della combinazione efficiente dei titoli, impedisce il confronto con altri portafogli relativi ad altri investitori la cui curva di utilità differisca dal primo in quanto la frontiera efficiente soppesa esclusivamente i titoli rischiosi. A livello pratico tale situazione si concretizza nell'impossibilità, da parte dell'investitore, di sostenere che le peculiarità di un determinato titolo avranno delle oscillazioni confrontabili con quelle di altri titoli poiché tale osservazione non si può esprimere come un'osservazione dei rendimenti. Tali limiti possono essere superati cambiando gli input del modello sulla base di un nuovo approccio, il Capital Asset Pricing Model, il quale permette di definire quale sia il rendimento atteso di equilibrio per ogni titolo, basandosi sulla rischiosità sia del titolo e sia del mercato per poi calcolare il portafoglio efficiente. Per di più i livelli di confidenza relativi alle variabili di input non vengono distinti e ciò deriva dalla mancata differenziazione nel modello media-varianza delle views dell'investitore, a differenza invece di quello che accade nel modello di Black – Litterman. Inoltre, nel modello media-varianza, si dimostra che il confronto tra le scelte

finanziare decise dai due investitori con diverse tendenze al rischio è impossibile. Il motivo è derivato dalla soggettività del singolo investitore, ovvero secondo Markowitz, la combinazione di titoli che va a appagare di più l'individuo è correlata alla propensione al rischio di quest'ultimo, che a livello grafico viene raffigurato dalla curva di utilità il cui punto di tangenza con la frontiera efficiente rappresenterà il portafoglio efficiente. Ma la soggettività, appunto, di quest'ultimo, anche se rappresenta una combinazione efficiente dei titoli, non è confrontabile con altre combinazioni che dipendano da tendenze al rischio e quindi a curve di utilità differenti. Ciò è dipeso come è stato detto precedentemente, dal fatto che Markowitz considera esclusivamente i titoli rischiosi sulla frontiera efficiente. Le fragilità di tale modello verranno superate anch'esse dal modello del CAPM, secondo il quale l'investitore potrà includere tra tutti gli asset che potrà scegliere anche un titolo risk free.

1.7 Capital Asset Pricing Model

L'approccio media-varianza di Markowitz presenta un limite colmato però da un nuovo modello, il CAPM, il quale è stato suggerito da Sharpe nel 1964 e successivamente sviluppato da Lintner nel 1965. Il limite sorge proprio durante lo studio del modo cui gli investitori dovrebbero formare il loro portafogli di investimento agendo razionalmente; è stata fatta un'analisi della domanda dei titoli finanziari secondo il criterio della media-varianza. Poiché quest'ultimo è privo di linee guida che definiscono come si formano i prezzi e i rendimenti dei singoli titoli, i prezzi e i rendimenti attesi delle singole attività finanziarie vengono considerati dagli investitori come dati. Quindi il Capital asset pricing model suggerisce la formazione in equilibrio dei prezzi e dei rendimenti attesi di ogni singola attività rischiosa sul mercato e di conseguenza, spiegare come i singoli investitori si comportano. L'obiettivo è quello di inquadrare il principio di efficienza dei mercati e i vantaggi apportati dalla diversificazione dei rischi qualora le attività finanziarie siano correttamente prezzate; con ciò si cerca di carpire il grado di relazione esistente tra il rendimento atteso e le varie attività finanziarie in un contesto di equilibrio.

Tale modello pone le sue basi in due ipotesi fondamentali e alcune semplificatrici, idonee a garantire l'esistenza di una frontiera dei portafogli efficienti secondo la media-varianza che sia comune per tutti i risparmiatori.

Ipotesi fondamentali:

- Il modello media-varianza delle scelte di portafoglio delinea le decisioni di investimento che gli investitori dovrebbero prendere
- Si introduce il concetto di “*homogeneous beliefs*”: le prospettive di media, varianza e covarianza siano comuni per tutti gli investitori

Ipotesi semplificatrici:

- Assenza di costi di transazione e limiti allo scambio di attività;
- Attività infinitamente divisibili. Ciò comporta che anche solo un dollaro investito possa essere sufficiente ad acquistare un’azione di una società;
- Imposte neutrali: la stessa aliquota viene utilizzata per tassare tutti gli investitori;
- Investitori *price-takers*: assenza di condizioni di monopolio;
- Assenza di blocchi nel dare o prendere a prestito al medesimo tasso d’interesse risk-free;
- Solo la deviazione standard e il valore atteso vengono soppesati come tassi di rendimento dagli investitori;
- Tutte le attività sono negoziabili;
- La deviazione standard e il valore atteso dei tassi di rendimento, la correlazione tra le varie coppie di titoli vengono considerati dei parametri fondamentali e come tali, la loro stima è la stessa per ogni investitore;
- Ottica degli investimenti è uni periodale ovvero, le scelte relative alla selezione del portafoglio di investimento restano immutate nel corso dell’arco di tempo considerato.

Tali assunzioni non rispecchiano la realtà ed evidenziano i limiti applicativi del CAPM in un contesto reale, i quali danneggiano l’attitudine del modello nello spiegare i prezzi osservati sul mercato e il comportamento degli investitori. Inoltre, le ipotesi precedenti consentono agli investitori, una volta noto il valore del rendimento atteso, quali la deviazione standard e covarianza dei titoli, di delineare uno stesso insieme concavo (in virtù della omogeneità delle aspettative) e di scegliere i portafogli efficienti, giungendo così alla medesima scelta da parte di tutti gli investitori in quanto il CAPM è un modello di equilibrio di mercato. Tuttavia, la duttilità e la semplicità, rendono il capital asset pricing model il criterio più diffuso per l’identificazione della relazione tra rischio e

rendimento di un titolo finanziario nella condizione di equilibrio tra domanda e offerta aggregate. Com'è stato precedentemente detto, l'utilizzo di tale modello è funzionale alla valutazione delle attività finanziarie nell'ipotesi di equilibrio dei mercati che esplica un quadro nel quale esistono attività prive di rischio il cui tasso è correlato al rendimento dei Titoli di Stato delle economie più avanzate. Inoltre, l'obiettivo ultimo del CAPM, il quale definisce il trade-off tra rendimento del titolo o portafogli e la sua rischiosità, è espresso tramite il fattore β , il quale è stimato tramite il rapporto tra la covarianza dei rendimenti storici del titolo e dei rendimenti storici del portafoglio di mercato e la varianza dei rendimenti storici del portafoglio di mercato:

$$\beta(\text{beta}) = \frac{\text{Cov}(R_a R_b)}{\text{Var}(R_b)}$$

Ra: rendimento del portafoglio di mercato

Rb: rendimento di qualunque titolo contenuto nel portafoglio

Il β , il cui valore oscilla tendenzialmente tra 0 e 1, è funzionale a rappresentare una delle due criticità proprie della volatilità del rendimento di un investimento analizzata dal modello; tale componente, rappresentata dalle caratteristiche tipiche o del settore o dell'emittente, potrebbe essere tamponata attraverso un'attività di diversificazione, la quale permette di ridurre il rischio specifico o diversificabile, senza intaccare però, il rischio sistematico, in quanto dipende da fattori che influiscono direttamente sull'andamento generale del mercato, i quali influenzano il rendimento dell'attività stessa. Quest'ultimo rappresenta la seconda componente che caratterizza la volatilità ed è misurato dal beta stesso, che stima la variazione attesa del rendimento del titolo per ogni variazione di un punto percentuale del rendimento di mercato. Come detto precedentemente, il coefficiente β può assumere diversi valori:

- $\beta > 1$: l'attività viene considerata più rischiosa del mercato ed i titoli andranno ad amplificare i movimenti del mercato (atteggiamento aggressivo)
- $\beta < 1$: i titoli andranno ad attenuare le fluttuazioni del mercato (atteggiamento difensivo)

- $0 < \beta < 1$: i titoli eguaglieranno i movimenti del mercato quindi l'attività sarà meno rischiosa del mercato. Tali titoli sono caratteristici di società che navigano nei settori tradizionali dell'economia.

Definito il range del beta, possiamo esprimere quest'ultimo attraverso un'equazione che mostri la dipendenza del rendimento atteso con il coefficiente stesso:

$$R_J = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

Anche secondo le ipotesi del CAPM e secondo l'assunto precedente dell'omogeneità delle aspettative, ogni investitore deterrà titoli rischiosi nella stessa proporzione del mercato, la cui combinazione identifica il portafoglio di tangenza proprio del singolo investitore, o più comunemente chiamato *portafoglio di mercato* (portafoglio M), e *capital market line* (CML), ovvero la frontiera efficiente ottenuta dalla combinazione del portafoglio di mercato e del titolo privo di rischio secondo proporzioni differenti, che riflette l'equilibrio tra il rischio dei portafogli efficienti e il rendimento atteso; inoltre è tangente alla frontiera efficiente solo con le attività rischiose. Tale frontiera è rappresentata dall'equazione:

$$R(p) = R_f + \frac{R(m) - R(f)}{\sigma(m)} \cdot \sigma(p)$$

$R(p)$ e $\sigma(p)$ esprimono il rendimento atteso e la deviazione standard di un portafoglio generico efficiente P mentre $R(m)$ e $\sigma(m)$ riflettono il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio di mercato. Quindi la CML è costituita da una retta con intercetta verticale uguale a R_f e coefficiente angolare positivo

$\frac{R(m) - R_f}{\sigma(m)}$ e rappresenta il luogo geometrico nello spazio $(\sigma(p), R(p))$ dei portafogli efficienti. Su tutta la retta, viene massimizzato l'eccesso di rendimento per unità di rischio rispetto a qualsiasi altro portafoglio posto sulla frontiera efficiente con solo i titoli rischiosi. Invece il portafoglio di mercato è costituito dal portafoglio di tangenza tra la CML e al frontiera efficiente con i soli titoli rischiosi; gli investimenti vengono fatti sulle attività rischiose in relazione alle proporzioni dettate dal punto M perché prendendo e dando a prestito al tasso R_f si può raggiungere la frontiera dato l'insieme efficiente delle attività rischiose. Tale semiretta è l'immagine del mercato completo e la sua origine nel

piano cartesiano rispecchia il valore del premio al rischio e il rendimento dell'attività risk free, quindi anche la capital market line ha, come detto in precedenza, un'intercetta e una pendenza. Quest'ultima è il *premio per il rischio*, ovvero la differenza tra il rendimento del mercato e il rendimento risk free, mentre l'intercetta corrisponde al *Risk free rate*, solitamente associato a titoli di Stato a breve termine in quanto non c'è un rischio emittente troppo preponderante che possa essere associato alle emissioni obbligazionarie pubbliche. Qualora il rendimento atteso del mercato fosse maggiore del tasso risk free, allora tale retta risulterà inclinata positivamente; il rendimento atteso del titolo uguale al titolo privo di rischio implicherebbe un β uguale a zero, mentre un rendimento del titolo rischioso almeno pari al rendimento del mercato è il riflesso di un β uguale a uno. Tale indicatore è funzionale a tradurre tali aspetti in un concetto chiamato linearità, il quale si concretizza in una retta che rappresenta la relazione tra il rischio e il rendimento, infatti qualora un titolo disponga di un β elevato, verrà corrisposto a quest'ultimo un rendimento atteso maggiore rispetto a quelli con un β minore. Inoltre, partendo dal presupposto che i titoli che si trovano su tale retta sono efficienti, se un titolo dovesse avere un prezzo troppo basso (locato sopra la retta) o un prezzo troppo alto (locato sotto la retta), si incorrerebbe in un adeguamento dei prezzi, data la teoria di efficienza dei mercati, che provocherebbe un incremento o una diminuzione del rendimento di tali titoli, fino a ricondurli sulla *Security market line* (SML), ovvero quella retta che esprime, appunto, la relazione di equilibrio rendimento-rischio per i singoli titoli o portafogli. È proprio su entrambi gli elementi che questo indicatore si comporta in maniera differente; infatti per ogni singolo titolo viene calcolato il relativo β , mentre per il portafoglio viene impiegato un β frutto della media ponderata dei relativi indicatori propri di ogni titolo associato al medesimo portafoglio. Per questo motivo si arriva all'uguaglianza tra i rendimenti in equilibrio di una certa attività e il rendimento di un titolo risk free più un premio per il rischio; il rendimento del portafoglio di mercato meno il rendimento privo di rischio, moltiplicato per un fattore β , che definisce la rischiosità del titolo rispetto al mercato e la relativa correlazione. Quindi, volendo esprimere il CAPM secondo i termini di rendimento atteso ricaviamo:

$$E[ri] = rf + \beta i (E[rm] - rf)$$

Su tale equazione:

- $E[r_i]$: rendimento atteso di equilibrio per l' i -esimo titolo
- R_f : rendimento del titolo risk free (costante)
- β_i : coefficiente che esplica la rischiosità del titolo in relazione al portafoglio di mercato
- $E[r_m]$: rendimento di equilibrio del portafoglio di mercato
- $\beta_i (E[r_m] - r_f)$: premio al rischio per l'investimento fatto nel titolo i .

La finalità di questa equazione è stata quella di delineare, considerando la capitalizzazione di mercato, il rendimento di equilibrio di una data attività, andando a tamponare così un altro limite del modello di Markowitz. Nella concreta tale situazione è evidente quando vi è un'eccessiva richiesta di una determinata attività, scaturita da un elevato rendimento rispetto alla relativa rischiosità, il che implica un incremento di prezzo conseguente alla pressione della domanda e la successiva riduzione del proprio rendimento fino a quando non verranno attratti dei nuovi investitori, ovvero fino a quando domanda e offerta tornano in equilibrio. Analogamente potrebbe concretizzarsi la situazione secondo cui un'attività è presente sul mercato ma non viene detenuta dagli investitori, provocando così una riduzione repentina del prezzo e il conseguente incremento del suo rendimento atteso. Questo spinge gli investitori a richiedere l'attività e quindi, in equilibrio, il titolo entrerà a far parte di qualche proporzione positiva del portafoglio di mercato. Da ciò si evince come prezzo e rendimento definiscano la proporzione secondo la quale il titolo possa essere presente nel portafoglio di mercato in modo tale da garantire l'uguaglianza tra domanda e offerta. Per identificare concretamente il portafoglio di mercato è utile riferirsi ad alcune proxy del vero portafoglio di mercato, ovvero portafogli più limitati come, ad esempio, lo S&P 500 o il FTSE MIB, anche se tali indici azionari siano soltanto un'approssimazione del portafoglio di mercato. Ma la relazione che esiste in equilibrio tra il rendimento atteso e il rischio delle attività finanziarie non è supportata teoria del mercato dei capitali; questo perché la CML non è lo spazio di piano sul quale si collocano i vari portafogli costituiti da un solo titolo, in quanto questi ultimi sono inefficienti e come tali si dispongono al di sotto di essa. Tale problema può essere esplicito attraverso un'analisi grafica che evidenzia come il CAPM viene derivato dal problema di ottimizzazione media-varianza.

Si consideri la Figura 1.4 dove il portafoglio P_i è composto unicamente dal generico titolo i . E' evidente che il portafoglio P_i non sfrutti i vantaggi della diversificazione, quindi

esso non è un portafoglio efficiente per cui non si colloca sulla CML e neppure sulla frontiera efficiente con solo titoli rischiosi. Esistono cioè altri portafogli, che rispetto a P_i consentono, a parità di rischio, di ottenere un rendimento atteso maggiore oppure, a parità di rendimento atteso, conferiscono all'investitore un più basso rischio.

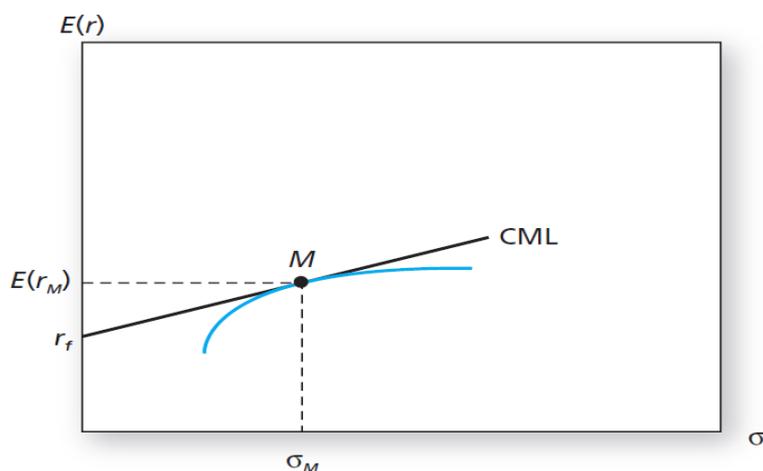


Figura n.7 - La frontiera efficiente e la Capital Market Line. [Bodie, Kane, Markus, 2011]

Il punto M rappresenta il portafoglio di mercato che si trova sulla frontiera efficiente, mentre la CML ha inizio dal tasso di interesse di un titolo risk free, passando per il portafoglio ottimo, il quale, da un punto di vista grafico, indica il punto di tangenza tra la retta e la frontiera efficiente e la pendenza di tale retta è stimata dallo *Sharpe ratio* (chiamato anche *reward-volatility ratio*), da William Sharpe, un economista, che fu il primo a proporlo, il quale rispecchia la differenza tra il rendimento del portafoglio e il rendimento del titolo privo di rischio diviso la varianza del portafoglio:

$$S = \left(\frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \right)$$

L'indice di Sharpe definisce un confronto tra il rischio e il rendimento atteso in eccesso rispetto al rendimento dell'attività priva di rischio di un singolo titolo o di un portafoglio costituito da attività rischiose con un altro costituito da attività prive di rischio.

Anche se vengono livellati alcuni limiti relativi a modelli precedenti, il CAPM è stato comunque al centro di critiche, tra le quali quella il cui bersaglio è il *beta* di un titolo poiché non può essere direttamente osservato; infatti viene calcolato tramite un metodo chiamato “regressione in due passi” di Fama e Mac Beth (1973) senza ottenere però, il risultato desiderato in quanto l’applicazione empirica impedisce di dimostrare la totale veridicità del modello. Ma la verifica empirica stessa è stata il fulcro della “critica di Roll” in quanto il suo ideatore affermava l’impossibilità di tale riscontro in quanto un test sul CAPM sarebbe un’analisi per verificare se la *proxy* del portafoglio di mercato possa appartenere o meno alla frontiera efficiente; tuttavia, tale operazione non porterebbe a nessun’assunzione circa il portafoglio di mercato.

Nonostante tali critiche, il CAPM è un modello che permette di ricavare la serie storica dei rendimenti di equilibrio solo tramite metodi di stima econometrici ed inoltre, è un modello molto utilizzato grazie alla sua semplicità di utilizzo e di calcolo, rimanendo così un modello di riferimento nella pratica di mercato, anche se sussistono delle ipotesi solide alla base:

- assenza di costi di transazione e d’imposizione fiscale
- tasso risk free al quale possono essere fatti investimenti
- richiesta rendimento maggiore direttamente proporzionale alla rischiosità dell’investimento
- opinione comune riguardante rischio e redditività delle attività scambiate.

Quindi il fulcro del CAPM è l’asserzione secondo la quale, in equilibrio esiste una relazione lineare tra il rendimento atteso di un titolo e il rischio associato a questo, espresso dal *beta* dell’attività, la quale verrà collocata sulla *security market line* insieme ad ogni portafoglio costituito dalle attività presenti sul mercato.

Conseguenza di ciò è la remunerazione intesa come un rendimento atteso maggiore, esclusiva della sezione di rischio che non è possibile eliminare tramite la diversificazione e l’esposizione dell’attività al rischio non diversificabile, in quanto connesso alle oscillazioni del mercato, che viene calcolata dal CAPM attraverso il *beta*.

II. APPROCCIO BAYESIANO E MODELLO DI BLACK LITTERMAN

2.1 Approccio Bayesiano

Il metodo bayesiano si prefigura come l'alternativa al metodo misto di Theil per la stima dei rendimenti attesi secondo Black-Litterman. Peculiarità dell'approccio è quella di accostare i rendimenti di equilibrio alle preferenze che l'investitore ha espresso, combinando così una distribuzione a priori con le informazioni derivanti da un campione di dati. Un vantaggio che è possibile riscontrare, risiede nella capacità di aggiornare periodicamente i parametri stimati in quanto vi è un'aggiunta di quelli più recenti a quelli già analizzati precedentemente.

Le fondamenta di questo approccio sono rappresentate dal teorema di Bayes, pietra miliare della statistica, grazie al quale è possibile calcolare le probabilità condizionate: ipotesi che l'evento possa accadere data la probabilità che un altro evento, ad esso correlato, accada. Secondo il reverendo Thomas Bayes, la probabilità che l'evento A accada dato B è uguale al rapporto tra la probabilità condizionata di B dato A per la probabilità di A e quella di B:

$$\begin{aligned}\Pr (A,B) &= \Pr (A|B) \Pr (B) \\ &= \Pr (B|A) \Pr (A)\end{aligned}$$

Quindi

$$\Pr (A|B) = \frac{\Pr (B|A) \Pr (A)}{\Pr (B)}$$

In quest'equazione abbiamo:

$\Pr (A)$ = probabilità di A, nasce dalla distribuzione a priori;

$\Pr (B)$ = probabilità di B, coincide con delle nuove osservazioni; è una costante di normalizzazione;

$\Pr (A|B)$ = probabilità condizionata di A dato B, risultante dalla distribuzione a posteriori;
 $\Pr (B|A)$ = probabilità condizionata di B dato A, risultante dalla distribuzione condizionata.

Dalle caratteristiche dei singoli parametri, si evince come il problema iniziale sia quello di scegliere quale distribuzione deve essere considerata a priori e quale a posteriori. È possibile considerare i rendimenti di equilibrio come informazioni a priori nell'ipotesi in cui le views vengano espresse dall'investitore, consapevole dei rendimenti d'equilibrio, quindi quest'ultimi saranno aggiornati in base alle views dell'investitore per stabilire la distribuzione a posteriori. Quindi consideriamo le views come informazioni a priori, che è possibile accostare ai rendimenti di equilibrio per stabilire i rendimenti a posteriori secondo B-L. Il teorema Bayesiano potrebbe essere scritto diversamente, se viene identificato $E(r)$ come il vettore dei rendimenti attesi al tempo t e al tempo $t+1$ e Π il vettore che indica i rendimenti impliciti:

$$\Pr (E(r)|\Pi) = \frac{\Pr (\Pi|E(r)) \Pr (E(r))}{\Pr (\Pi)}$$

dove

$\Pr (E(r))$ = priorità a priori, che rappresenta le views;

$\Pr (\Pi)$ = probabilità dei rendimenti d'equilibrio;

$\Pr (\Pi|E(r))$ = probabilità dei rendimenti di equilibrio, date le supposizioni del soggetto economico;

$\Pr(E(r)|\Pi)$ = probabilità del rendimento combinato a posteriori.

È possibile esprimere i rendimenti attesi con una matrice P di dimensione $k \times n$, nell'ipotesi che $\Pr (E(r)|\Pi)$ si definisca per k vincoli lineari sul vettore di n rendimenti attesi $E(R)$:

$$PE(R) = q + \varepsilon$$

Se consideriamo ε come un vettore costituito da elementi riflettenti l'incertezza delle view, esso costituisce, insieme a $k \times 1$ elementi raffiguranti le view relativa al sovra/sotto rendimento dell'investitore, il corpus del vettore q :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

$\varepsilon \sim N(0, \Psi)$, quindi tale termine di errore avrà varianza zero e varianza pari a Ψ ; poiché vige l'ipotesi di indipendenza tra le view dell'investitore, la varianza è una matrice diagonale costituita dalle varianze dei singoli termini di errore Ψ_i :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_k \end{pmatrix}$$

Tale tipologia della legge bayesiana genera una metodologia che implica la correlazione tra i rendimenti di equilibrio e le views proprie dell'investitore, $\Pr(E(r))$. Quest'ultime hanno una distribuzione normale, media q e varianza Ψ e vanno a rappresentare la distribuzione a priori; inoltre sono conosciuti dall'investitore e sono chiamati iperparametri:

$$\Pr(E(r)) = N(q, \Psi)$$

Inoltre, poiché la distribuzione di proprietà dei rendimenti attesi è direttamente influenzata dalla matrice Ψ , la riduzione della varianza dei singoli termini di errore implicherà una formulazione delle aspettative con una certezza maggiore.

Altro parametro è P , il quale è una matrice le cui righe coincidono con il numero delle view espresse (k), mentre le colonne con gli asset nel portafoglio (n)

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1} & \cdots & P_{k,n} \end{pmatrix}$$

Se invece dovessimo descrivere la probabilità condizionata dei rendimenti di equilibrio, $\Pr(\Pi|E(r))$, la sua distribuzione sarà sempre normale ma la cui media coincide con i rendimenti previsti dal soggetto economico e la varianza è proporzionale alla varianza dei

rendimenti relativi al valore del canone τ , “*shrinkage factor*”, il quale ritrae una costante di proporzionalità tra covarianza della media stimata dei rendimenti con la covarianza dei rendimenti:

$$E(R) \sim N(\Pi, \tau \Sigma)$$

$$\Pr(\Pi|E(r)) \sim N(E(r), \tau \Sigma)$$

Inoltre è importante sottolineare come il valore di τ sia prossimo allo zero; ciò è dipeso dall’inferiorità della media dei rendimenti rispetto all’incertezza dei rendimenti stessi. Ora è possibile ottenere la funzione di probabilità dei rendimenti che si distribuisce normalmente; tale risultato rappresenta l’applicazione del teorema di Bayes, tramite il modello di Black-Litterman per desumere la distribuzione dei rendimenti attesi [Christoduolakis, 2002].

$$\Pr(E(r)|\Pi) \sim N$$

La media:

$$[(\tau \Sigma)^{-1} + P \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P \Psi^{-1} q]$$

La varianza:

$$[(\tau \Sigma)^{-1} + P \Psi^{-1} P]^{-1}$$

Da ciò si evince l’intuitività dell’approccio bayesiano in quanto permette la determinazione della distribuzione a posteriore dei rendimenti attesi armonizzando i valori di equilibrio con le view dell’investitore; se quest’ultime dovessero essere assenti, la distribuzione a posteriori coinciderà con quella in equilibrio. Inoltre, il livello di fiducia nelle opinioni da parte del soggetto economico sarà direttamente proporzionale alla convergenza del vettore dei rendimenti attesi verso il vettore dei rendimenti previsti dalle views, il vettore q .

Da tale media è possibile calcolare i rendimenti di Black-Litterman, i quali costituiranno gli input per delineare la media e la varianza del portafoglio e la relativa allocazione nel

processo di ottimizzazione di Markowitz per la definizione di frontiera efficiente. La media e la varianza vengono definite come statistiche descrittive in quanto analizzano congiuntamente sia le aspettative dell'investitore che le movimentazioni del mercato; motivo per cui la matrice varianza-covarianza del benchmark e il grado di sicurezza per le singole view da parte dell'investitore, sono gli elementi fondanti dello sviluppo delle strategie finanziarie. Ma il grado di sicurezza del singolo investitore non lo immunizzerà dalle fluttuazioni repentine del mercato; per tale motivo è possibile diluire l'errore attraverso la correlazione tra i diversi titoli, che permette di spalmare l'incertezza intrinseca nelle view per ogni asset del portafoglio, attenuando così gli errori di stima del modello di Markowitz. Ma la mancata oggettività dell'approccio bayesiano potrebbe essere fonte di critiche anche se risulta impossibile aggettivare ogni approccio come soggettivo in quanto non risulta reale verificare ogni singola combinazione di variabili, assegnando così, una probabilità a tutte le possibili ipotesi.

Come detto in precedenza, i portafogli ottimali di media-varianza riportano errori di stima in quanto sono condizionati dalla loro sensibilità alle fluttuazioni della matrice di correlazione della varianza. La difficoltà nella previsione di quest'ultima e della correlazione, in aggiunta all'elevata sensibilità della soluzione ottimale a questi input, genera delle soluzioni estreme, con forti posizioni lunghe e forti posizioni corte. Tale fenomeno è possibile riscontrarlo nell'attitudine a massimizzare l'errore della soluzione ottimale poiché gli errori di prezzo positivi implicheranno una sovra-ponderazione delle relative attività, rispetto a quelle con errori negativi. Inoltre, vi è la possibilità che possa esistere una procedura di minimizzazione del rischio la quale poggerà le sue fondamenta su attività dotate di una volatilità relativamente bassa, invece di effettuare un'azione di diversificazione ad ampio raggio di partecipazioni.

Per questo motivo il contributo dato dal modello di Black-Litterman, nel 1992, per costruire portafogli efficienti media-varianza stabili è stato fondamentale; non solo fornisce la flessibilità di combinare l'equilibrio del mercato con le singole views dell'investitore, ma definisce pesi di portafoglio ottimali basati su una matrice di volatilità/correlazione come accade nello studio della media-varianza [Christodoulakis, 2002].

2.2 Corpus e fondamenti del modello Black-Litterman

Tale modello prende il nome dai suoi due ideatori, Fischer Black e Robert Litterman; i due lavoravano a Goldman Sachs e si erano posti l'obiettivo di apportare delle modifiche al modello di Markowitz che presentava degli errori che ne impedivano l'utilizzo ai fini di una corretta gestione. Questi limiti sono stati colmati ai fini di calcolo del portafoglio ottimo e i pesi al suo interno; poiché prende come modello di equilibrio il CAPM, il quale identifica il portafoglio ottimo con quello di mercato, al suo interno vi sarà un numero di asset proporzionale alla capitalizzazione di mercato del portafoglio stesso. Inoltre, adottando le views dell'investitore nella matrice di confidenza, disamina anche il grado di fiducia del soggetto economico negli input, mentre questo parametro verrà rappresentato dalla varianza, relativamente al portafoglio di equilibrio. Il livello di fiducia relativo alle views è direttamente proporzionale alla probabilità di inquinare il portafoglio di equilibrio. Infatti è proprio questo il fulcro della teoria e la motivazione che ha spinto il modello di B-L a contrastare il modello dell'ottimizzazione della media-varianza in cui l'utente definisce un set completo di rendimenti attesi in eccesso, ponderati per il risk free rate, dai quali verranno poi generati, tramite l'ottimizzatore di portafoglio, i pesi ottimali di portafoglio. Ma tra i due parametri vige una complessa mappatura che impedisce agli utenti degli ottimizzatori di portafoglio standard di trovare una corrispondenza tra la specificazione dei loro rendimenti attesi e i pesi del portafoglio di output. Per tali motivi è stato necessario trovare un punto di partenza neutrale, privo di previsioni soggettive, per i rendimenti d'equilibrio, ai fini della stima dei rendimenti attesi resa possibile dalle views [He and Litterman, 1999]. La sfida lanciata al modello più in auge in quel periodo e le effettive migliorie apportate, hanno fatto sì che il modello di BL, sin dalla prima pubblicazione nel 1990, fosse applicato su ampia scala da molte istituzioni finanziarie. Inoltre tale modello è stato oggetto di successivi studi apportati da Bevan e Winkelmann nel 1998, da He e Litterman nel 1999, nel 2003 dallo stesso Litterman e da Idzorek nel 2004. Questo modello di asset allocation poggia le sue basi su un'idea portante, quella di creare un connubio tra due sorgenti di informazione per darne vita ad una sola; quindi affiancare il mercato e le sue aspettative sul lungo periodo alle views dell'investitore, riguardanti i rendimenti attesi nel breve termine, per poi unirle in un unico vettore input all'interno del modello tramite o il Teorema di Bayes o l'approccio di Stima mista di Thiel. Sotto tale profilo, è possibile

chiarire l'incertezza nelle aspettative [Biondi, 2013]. La conclusione dell'articolo di Black-Litterman risale al 1992:

"...our approach allows us to generate optimal portfolios that start at a set of neutral weights and then tilt in the direction of the investor's views."

L'estratto dell'articolo evidenzia il peso delle aspettative del singolo investitore non vincolato, per il quale il portafoglio ottimo è proporzionale al portafoglio di equilibrio di mercato più un parametro che riflette le opinioni dell'investitore, la somma ponderata dei portafogli. Da qui l'intuizione economica secondo la quale l'azione dell'investitore inizia con il detenere un portafoglio in scala dell'equilibrio di mercato, riflettendo la sua certezza sull'equilibrio, per poi investire in portafoglio che rappresentano le sue opinioni [He, Litterman, 1999]. Giunti a tal punto la domanda dovrebbe sorgere spontanea: "In che modo è possibile tradurre le views del portfolio manager in previsioni di rendimento esplicite?". La risposta a tale quesito risiede nel assunto che il modello di Black-Litterman imposta la previsione in un quadro analitico bayesiano. È necessario che in tale *framework*, l'investitore delinea un numero flessibile di opinioni, le quali verranno tradotte in chiare previsioni di rendimento esplicitate contemporaneamente ad una matrice di covarianza aggiornata, ovvero con lo stesso procedimento atteso dall'ottimizzatore di portafoglio convenzionale [Cheung, 2009]. Ma qual è stata l'esigenza che ha spinto Goldman Sachs ad adottare un approccio di equilibrio degli investimenti? A tale quesito risponde lo stesso Robert Litterman nel libro *"Modern investment management: an equilibrium approach"* [Litterman, 2003]. Anche se la dinamicità del mercato rende utopica una situazione di equilibrio, quest'ultimo può essere funzionale nell'analisi dei mercati; tale affermazione è sostenuta dalla legge economica secondo la quale esistono delle forze "neutrali" il cui compito è quello di ricondurre la situazione all'equilibrio. Inoltre sono presenti le frizioni, come la scarsa liquidità o la carenza di informazioni, a caratterizzare i mercati finanziari, generando così delle deviazioni dall'equilibrio, le quali attirano gli investitori per cercare di ottenere dei profitti. Ma tale speculazione potrebbe cozzare con apparente poca rischiosità dell'approccio all'equilibrio, se non fosse che nel lungo periodo, teoricamente, il portafoglio di mercato otterrà risultati positivi. Un limite, che spinse Black e Litterman ad usufruire del CAPM, è rappresentato dalla non osservabilità dei pesi d'equilibrio che

dovranno poi essere stimati. Infatti l'efficienza del modello di equilibrio CAPM, risiede nella capacità di determinazione del vettore dei rendimenti attesi, i quali eguagliano domanda e offerta per ogni attività rischiosa e raffigurano il punto di neutralità iniziale. Il punto di partenza quindi è rappresentato dal portafoglio di mercato, sul quale potrà essere esercitata l'azione dell'investitore, basata sulle sue opinioni, creando così, come detto in precedenza, un mix che renderà il vettore di rendimenti attesi fruibile per il processo di ottimizzazione. Il CAPM quindi è stato parte integrante del progetto di correzione degli errori insite nel modello di media-varianza di Markowitz, il quale non solo era di difficile applicazione a livello pratico (input necessari stimati con molta difficoltà e la sproporzionata sensibilità di portafoglio ottimo relativa agli input stimati), la scarsa rilevanza finanziaria dei risultati, riversatasi poi negativamente sui processi di investimento e soprattutto la debilitante impossibilità di esprimere le proprie views per l'investitore, la cui numerosità non è limitata. La modalità in cui queste ultime, nel modello di B-L, saranno espresse, si suddivide in due categorie, relativa e assoluta: qualora la views verrà espressa esclusivamente in relazione al titolo, ad esempio "il titolo X avrà un rendimento del 4%", si definirà assoluta, nel caso invece, di una correlazione con un altro titolo, ad esempio "il titolo X avrà un rendimento superiore di B del 2%", allora si definisce view relativa. L'assenza di opinioni da parte dell'investitore rafforzerebbe l'utilità del portafoglio di equilibrio e qualora si verificasse uno scenario simile, Black e Litterman forniscono alcuni approcci possibili per superare tale limite, dei quali però, ne evidenziano le criticità. Il limite del primo approccio è la conseguenza delle medie storiche intese come punto neutrale dei rendimenti attesi; tale assunto implica anche la neutralità dei pesi di portafoglio che in passato hanno avuto ottime performance. Il secondo approccio presuppone per ogni classe di strumenti finanziari in tutti i Paesi, una neutralità dei rendimenti eguali; così facendo si eguaglia anche il livello di rischio relativo ad ogni Paese, generando una discrepanza tra i rendimenti condizionati dall'effettivo rischio assunto. Il terzo approccio presenta una dicotomia tra le criticità pur partendo dall'ipotesi di uguaglianza dei rendimenti attesi per unità di rischio, rappresentato dalla volatilità, tra azioni e obbligazioni. La prima criticità è evidenziata dalla mancata considerazione della correlazione tra i rendimenti degli asset, mentre la seconda incorpora la mancata considerazione gli aspetti legati all'offerta degli asset, ma solo quelli relativi alla domanda; condizioni per cui, in caso di uguaglianza tra le opinioni

tra gli investitori, i rendimenti neutrali rendono uguale domanda e offerta. Quindi, secondo il modello B-L, l'assenza di views implica il portafoglio di mercato riflesso nel portafoglio ottimo, che definisce la massima utilità attesa. Alle views, come già detto, è correlato il grado di fiducia dell'investitore che funge anche da bilanciamento del portafoglio ottimo. Altro argomento affrontato da Black e Litterman è il beneficio della diversificazione globale, per implementare la performance di portafoglio, a prescindere dalla distorta visione degli investitori verso gli asset domestici, la cui portata può essere esplicitata dall'inserimento dei asset stranieri nel portafoglio ottimo, che ne determinano l'innalzamento della frontiera. Assumendo come vera l'efficienza dei mercati, tale operazione implica delle semplificazioni derivanti dalla mancata considerazione dei costi aggiuntivi per gli investimenti internazionali. Le views quindi sono il punto focale del modello introdotto nel 1992, le quali abbiamo detto, verranno combinate con i rendimenti d'equilibrio, definendo quindi un unico sistema di rendimenti attesi. Per arrivare a tale conclusione è necessario partire da una selezione asset e stabilire, per ogni asset class, la capitalizzazione di mercato. Per ogni classe, è necessario computare i rendimenti attesi per poi definire quella che sembra identificarsi come la novità concreta apportata dall'approccio di Black-Litterman nella teoria del portafoglio, la matrice di varianza-covarianza. Per poter calcolare i rendimenti d'equilibrio per ogni classe è necessario applicare un processo di reverse optimization sul portafoglio di mercato, il quale viene ottenuto calcolando i rendimenti del portafoglio ottimo che verranno poi inseriti in un'ottimizzazione classica. Successivamente la selezione di asset considerati e dell'incertezza per ogni views, costituiscono il processo di specificazione di quest'ultime, le quali verranno combinate con i rendimenti di equilibrio, generando i rendimenti attesi secondo B-L, parte integrante nel procedimento di ottimizzazione per definire il portafoglio efficiente. Un'interpretazione congrua all'articolo del 1992 e che tollera la mancanza di views per il soggetto economico, concerne l'identificazione dei rendimenti d'equilibrio come la distribuzione a priori, mentre la distribuzione condizionata è interpretata dalle views. Per realizzare tale processo, definiamo $\mu \sim N(\Pi; \Sigma\tau)$ come distribuzione della stima della media dei rendimenti e prendiamo questo parametro come punto di partenza per calcolare media e varianza tramite il CAPM e, come detto, la *reverse optimization*. Simultaneamente vengono definite anche le distribuzioni dei rendimenti derivanti dalle views sull'andamento futuro del mercato; si osserva una distribuzione

normale di tali rendimenti, identificando in Q un vettore che ingloba tutte le opinioni dell'investitore, e in Ω una matrice diagonale che riflette il grado di fiducia relativamente alle views espresse, quindi $N \sim (Q, \Omega)$. Solo dopo aver accorpato le due distribuzioni, potrà essere applicato il teorema di Bayes, grazie al quale si ottiene un vettore di rendimenti attesi dei titoli considerati nel portafoglio dell'investitore, che, in base al grado di fiducia delle views o a quanto quest'ultime siano estreme, tenderà maggiormente i rendimenti di equilibrio o le views. Tale processo avrà come risultato il vettore dei rendimenti attesi e la matrice di varianza-covarianza, che verranno implementati nel modello di ottimizzazione di Markowitz per la definizione della frontiera efficiente e del portafoglio ottimo. Al sorgere di una nuova volontà di voler palesare delle nuove previsioni, è opportuno aggiornare i dati, in modo tale da assumere la distribuzione definita precedentemente, come un nuovo punto di partenza per il modello di B-L. La ciclicità di tale processo implicherà un sempre maggior numero di dati immessi nel processo, stabilendo anche una progressiva stabilità dei rendimenti e quindi dei risultati più incentrati intorno alla media. Quest'ultima potrebbe riflettersi nel rendimento a lungo termine per provare la tendenza di tutti i rendimenti dei titoli a tornare verso il proprio valore di equilibrio. Un punto focale del modello di Black-Litterman può considerarsi l'utilizzo delle views, il quale non intacca il portafoglio, che rimane ben saldo a quello di benchmark. Tale assunzione poggia le sue fondamenta su tre punti fondamentali:

- I due economisti ipotizzano due tipologie differenti di fonti d'informazione per i rendimenti, ovvero i rendimenti di equilibrio e le opinioni dell'investitore, le cui parti costituenti sono la media, il grado di incertezza e una distribuzione di probabilità;
- L'incertezza è il collante che, insieme ad una miglior espressione tramite una distribuzione di probabilità, accomuna queste due tipologie di informazioni;
- La coerenza dovrà essere massima tra i rendimenti di equilibrio risultanti ed entrambe le fonti di informazione [Biondi, 2013]

2.2.1 Approccio del modello Black e Litterman

Attraverso un grafico è possibile descrivere più intuitivamente le varie fasi che costituiscono il modello di Black-Litterman:

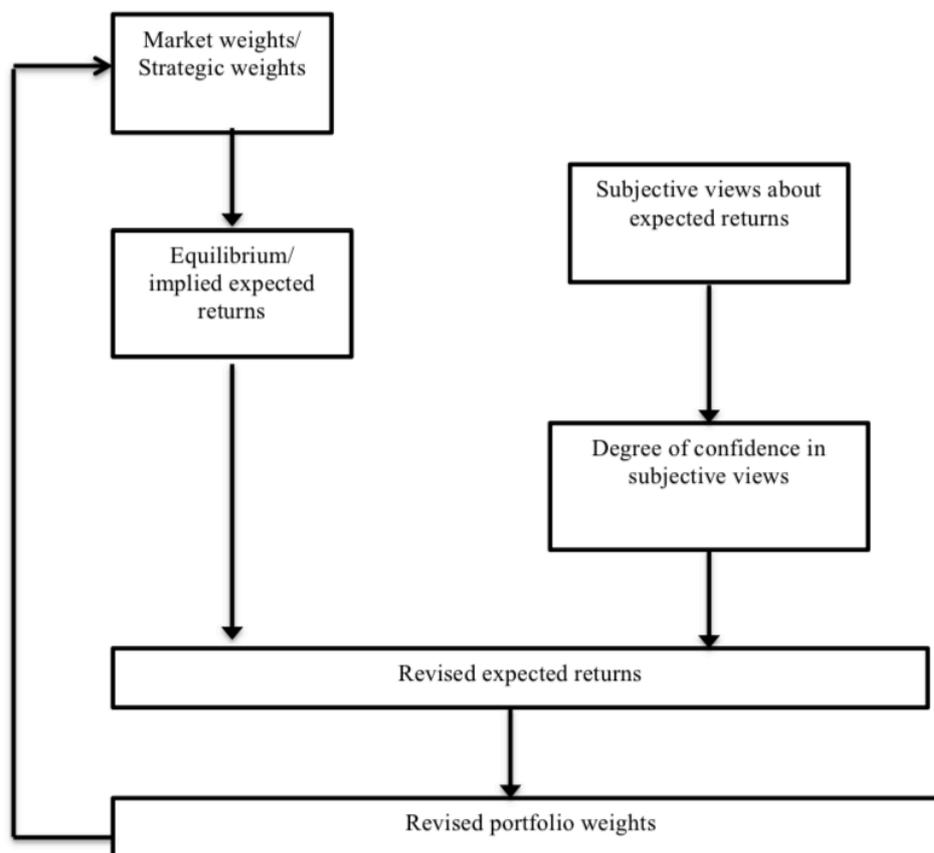


Figura 8 - Fasi del processo BL

Analizzando il primo blocco, si nota che il presupposto di questo approccio è il set dei pesi di mercato, il quale differisce dal set di pesi strategici; la combinazione di questi due insiemi definisce l'atteggiamento di norma dell'investitore di una media di quest'ultimi. In un mercato in equilibrio, questo set di pesi implica un vettore che corrisponde ai ritorni attesi per gli asset, che in base alle condizioni economiche, dissenteranno da quelli impliciti del mercato. La flessibilità del modello di Black-Litterman permette di considerare più tipologie di views, nelle quali dovrà essere inserito l'intervallo di confidenza scelto dall'investitore; inoltre le due tipologie di informazioni, quella neutra e quella soggettiva, possono essere combinate tra loro. Il totale delle informazioni viene poi traslato in bande di confidenza simmetriche secondo una distribuzione normale. Un maggiore intervallo di confidenza implicherà un maggior correlazione tra le views dell'investitore e il volume dei rendimenti attesi rielaborati, il cui vettore verrà poi assegnato ad un ottimizzatore di portafoglio.

2.2.2 Esempio a tre asset

Nell'articolo "Global Portfolio Optimization" del 1992, Black e Litterman forniscono un primo esempio applicativo del loro modello. Si assume l'esistenza di soli tre asset, il cui rendimento in eccesso sia stabilito da tre fattori: premio al rischio d'equilibrio, fattore comune e uno shock indipendente. Tale assunto è definito da uno schema.

$$R_k = \Pi_k + \gamma_k Z + v_k$$

dove:

R_k = rendimento in eccesso del k-esimo asset

Π_k = premio al rischio d'equilibrio del k-esimo asset

Z = fattore comune

γ_k = impatto del fattore comune sul k-esimo asset

v_k = fattore indipendente sul k-esimo asset

Ora sia il premio al rischio d'equilibrio, sia il valore atteso del fattore comune e del fattore indipendente sono parametri costituenti il valore atteso del rendimento:

$$E(R_k) = \Pi_k + \gamma_k E(Z) + E(v_k)$$

"We do assume that the mean, $E[R_k]$, is itself an unobservable random variable whose distribution is centered at the equilibrium risk premiums. Our uncertainty about $E[R_k]$ is due to our uncertainty about $E[Z]$ and the $E[v_k]$ s. Furthermore, we assume the degree of uncertainty about $E[Z]$ and the $E[v_k]$ s is proportional to the volatilities of Z and the v_k s themselves." (pag.34, "Global Portfolio Optimization")

Da tale estratto, si carpisce come il rendimento atteso media Π_k , la quale è una variabile casuale non osservata, con una distribuzione centrata sul premio a rischio d'equilibrio; quindi l'aleatorietà dell'errore e del fattore comune incidono sull'incertezza del rendimento atteso stesso. Quindi l'incertezza è correlata all'incertezza stessa su $E(Z)$ e su $E(v_k)$, proporzionale alla volatilità su Z e v_k . Allora l'incertezza relativa ai rendimenti attesi sarà delineata dalla matrice $\tau\Sigma$, solo se l'incertezza su Z e v_k viene definita dalla

matrice di covarianza Σ ; inoltre, τ , che misura il livello di sicurezza proprio dell'investitore riguardo il valore medio dei rendimenti d'equilibrio con il vero valore di equilibrio, sarà un valore costante prossimo allo zero, definito *weights-on views*, in quanto l'incertezza media è minore dell'incertezza dei rendimenti stessi.

Descritti tali presupposti, si ipotizza che l'investitore, avvalendosi di ulteriori informazioni, voglia formulare una view attraverso due varietà di processo: una statistica riassuntiva di un campione di dati derivato dalla distribuzione dei futuri rendimenti attesi degli asset, oppure tramite una distribuzione di probabilità per la differenza dei rendimenti degli asset. A prescindere dalla scelta di queste due modalità, risulta fondamentale possedere il livello di confidenza dell'investitore per la propria view per poi definire il peso dell'opinione rispetto ai rendimenti d'equilibrio. La differenza sostanziale tra le due modalità di formulazione consiste nella derivazione della confidenza; infatti se nel primo caso, tale parametro potrà essere derivato dal numero di osservazioni disponibili in quanto il soggetto disporrà di un campione di dati, nel secondo la confidenza sarà associata alla deviazione standard della distribuzione di probabilità. Possiamo ora ipotizzare un caso limite nel quale l'investitore ha la piena certezza delle sue osservazioni, il cui numero della distribuzione dei rendimenti futuri è illimitato e con valor medio della differenza tra i rendimenti R_a e R_b è pari allo scalare Q . In tal caso, la singola view può essere tradotta come una restrizione lineare sui rendimenti attesi:

$$E(R_a) - E(R_b) = Q$$

Dove $E(R_a)$ e $E(R_b)$ rappresentano il valore atteso dei due rendimenti.

Successivamente è possibile calcolare la distribuzione della media dei rendimenti vincolata all'equilibrio e all'informazione:

$$E[R] = \{E[R_a], E[R_b], E[R_c]\}$$

Se ipotizziamo una distribuzione normale per le medie delle componenti aleatorie, analiticamente il rendimento atteso di equilibrio sarà distribuito:

$$E[R] \sim N(\Pi; \tau\Sigma) \quad \text{con } \Pi = \{\pi_a, \pi_b, \pi_c\}$$

Questa distribuzione condizionale andrà a soddisfare la restrizione lineare derivante dalla differenza tra i rendimenti attesi R_a e R_b . Inoltre è possibile che quest'ultima venga riscritta come un'equazione lineare:

$$P^* E(R) = Q \quad \text{dove } Q = [1 \ -1 \ 0]$$

Da ciò ne deriva la media condizionale che ha distribuzione normale, la quale andrà a risolvere il problema di minimo:

$$\pi' + \tau \Sigma P' [P \tau \Sigma P']^{-1} [Q - P \pi']$$

$$[E(R) - \pi] \tau \Sigma^{-1} [E(R) - \pi]' \text{ sv } P^* E(R)' = Q$$

Nell'ipotesi più realistica, ovvero nel caso in cui la certezza nelle proprie views non sia del 100%, la view è il frutto di un numero fisso di osservazioni dedotte dalla distribuzione dei rendimenti futuri. In tal caso si impiega un approccio diverso per la singola opinione, considerando quest'ultima come il riflesso diretto della distribuzione dei rendimenti attesi. In questo specifico caso, la view viene scritta interpretata come forma matriciale:

$$P^* E(R)' = Q + \varepsilon$$

Dove ε rappresenta la variabile casuale con distribuzione $N(0; \Sigma)$. Σ rappresenta la matrice di covarianza che riflette il grado di incertezza della view. Qualora fossero presenti più opinioni, la quantità P dovrà essere espressa come una matrice, mentre ε non solo sarà distribuita come una normale, ma deve essere diagonale; tale peculiarità rispecchia l'autonomia delle opinioni nelle distribuzioni dei rendimenti futuri, quindi l'indipendenza degli scostamenti dei rendimenti attesi dalle distribuzioni medie. Infatti, la corrispondenza tra una view e una riga della matrice P , implicherà l'esclusiva presenza del vettore P in presenza di una sola view e la matrice stessa qualora fossero presenti più opinioni.

2.2.3 Analisi del modello Black-Litterman – I rendimenti d'equilibrio

D'importanza cruciale per il bilanciamento e l'equilibrio del portafoglio sono i dati del campione ai quali verranno successivamente applicate le views. Il contesto di equilibrio è stabilito dai rendimenti d'equilibrio stessi relativi ai titoli insiti nel portafoglio, i quali sono dedotti direttamente dai mercati in quanto considerati rendimenti di lungo periodo dei mercati globali stessi [Baven, Winkelmann, 1998]; infatti i rendimenti attesi di equilibrio rappresentano un punto di riferimento neutrale per i rendimenti attesi, permettendo la costruzione di un portafoglio ottimo più stabile rispetto ad altri definiti tramite altre stime dei rendimenti. La metodologia più diffusa per assicurare un bilanciamento esente da restrizioni nella costruzione di un portafoglio è quella del Capital Asset Pricing Model i cui dati, post elaborazione, vengono introdotti come funzione di densità di probabilità condizionata, nel modello di Black-Litterman tramite il Teorema di Bayes o il Metodo della stima mista di Thiel in qualità di dato proveniente dal campione. Secondo B-L, i rendimenti attesi hanno distribuzione normale con media μ e varianza Σ :

$$E(r) \sim N(\mu; \Sigma)$$

In cui:

- $E(r)$ rappresenta il vettore $n \times 1$ dei rendimenti attesi;
- μ è il vettore $n \times 1$ che incorpora le vere medie dei rendimenti dei titoli
- Σ rappresenta la matrice $n \times n$ delle covarianze tra i titoli

Se Σ è un valore conosciuto, non si può dire altrettanto della media μ , che è sconosciuta e non osservabile; tali caratteristiche implicano la necessità di delinearne uno stimatore:

$$\pi = \mu + \varepsilon$$

in tal caso:

- π rappresenta il vettore $n \times 1$ delle medie stimate;
- ε , che è il vettore $n \times 1$ degli errori stocastici, ritrae quello che è l'errore casuale a media nulla e varianza costante, la cui distribuzione è normale.

La non correlazione tra μ e ε descrive la media stimata come uno stimatore corretto della media vera, indentificando μ stesso come il suo valore atteso. Oltre a ciò $\Sigma\pi$, la varianza costante, rispecchia il movimento di π intorno a μ ; il valore di tale varianza sarà inversamente proporzionale all'incremento dell'ampiezza del campione quindi, maggiore sarà il campione, più accurato sarà π . Quindi:

$$\pi \sim N(\mu; \Sigma\pi)$$

Inoltre, la somma della varianza della stima della media e la somma della varianza vera, produrrà come risultato, la varianza stimata dei rendimenti attesi:

$$\Sigma r = \Sigma + \Sigma\pi$$

Nella quale il vettore r è distribuito normalmente:

$$r \sim N(\mu; \Sigma)$$

Per tali motivi, verranno impiegati nel modello i rendimenti del CAPM:

$$E(r) = rf + \beta(rm - rf) + e$$

Dove:

- $E(r)$ = vettore $n \times 1$ dei rendimenti attesi di equilibrio dei titoli
- rf = tasso risk free, costante
- β = vettore $n \times 1$ riferito ad un titolo i -esimo, misura dell'esposizione al rischio sistematico
- $\beta(rm - rf)$ = risk premium per titolo i -esimo
- e = vettore $n \times 1$ dei residui

Riscrivendo tale equazione sotto forma di eccesso di rendimento, si evidenzia come la veridicità di quest'ultima trascini con se una varianza nota Σ ; è così possibile stimare:

$$\Pi = \beta (rm - rf) \quad \text{con} \quad \Pi = [E(r) - rf];$$

Π non rappresenta solo il vettore $n \times 1$ con la stima delle eccedenze dei rendimenti per gli n titoli, ma anche la media stimata della distribuzione; per tale motivo, su questo parametro convergerà sempre il vettore di equilibrio dell'eccesso dei rendimenti. La varianza di Π , indicata da $\Sigma\pi$, definisce la varianza della stima di Π relativa al suo valore che però, non è noto. Quindi

$$\Pi = \frac{\text{Cov}(\widehat{r}; \widehat{r}'mwm)(rm - rf)}{\sigma_m^2},$$

con:

$$\hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(\widehat{r}; \widehat{r}'mwm)}{\sigma_m^2},$$

e dato che:

$$\text{Cov}(\widehat{r}; \widehat{r}'mwm) = \Sigma wm$$

e che:

$$\frac{(rm - rf)}{\sigma_m^2} = \delta m,$$

è possibile riscrivere Π , attraverso un'altra formula che permette di ricavare la *reverse optimization*:

$$\Pi = \delta m \Sigma wm$$

Una volta che i rendimenti di equilibrio vengono dati, il vettore di quest'ultimi viene indicato da questa relazione, le cui componenti rappresentano la matrice delle covarianze

(Σ) che può essere ricavata dalla serie storica, fattore di avversione al rischio sistematico δ_m , che descrive il trade-off tra rischio e rendimento, definita dal CAPM e w_m che indica il vettore dei pesi del portafoglio di mercato. Inoltre δ_m è il tasso di rendimento al quale l'investitore rinuncia per raggiungere una varianza minore ed è una costante positiva derivata dal rapporto tra l'*excess return* del portafoglio di mercato e la sua varianza [Black and Fischer, 1989]

$$\delta_m = (\mu_m - r_f) / \sigma_m^2$$

in cui:

- μ_m = rendimento del portafoglio di mercato
- r_f = tasso *risk free*
- σ_m^2 = varianza portafoglio di mercato

In tal contesto δ_m rappresenta la performance di Sharpe, la quale calcola il premio che spetta all'investitore in termini di rischio assunto, spiegando ragionevolmente il suo impiego come misura dell'avversione al rischio. Nel contesto invece di ottimizzazione inversa, il parametro δ è classificatorio della stima degli extra rendimenti, evidenziando così la diretta proporzionalità tra quest'ultimo e i rendimenti attesi [Idzorek, 2004].

Conosciuti questi parametri e una volta che l'investitore abbia definito la sua avversione al rischio, è possibile determinare il portafoglio ottimo tramite il modello media-varianza. In uno degli ultimi articoli pubblicati da Sharpe riguardante il processo di *reverse optimization* [Sharpe, 2007]. Vengono delineate le linee guida di un portafoglio ottimo, il quale sarà il risultato della somma tra rendimenti attesi, rischio, correlazioni e coefficiente di avversione al rischio. Per la matrice varianza-covarianza, Bevan e Winkelmann (1998), partono dai rendimenti giornalieri per poi combinarli con i pesi di mercato al fine di definire la volatilità del portafoglio di mercato [Bevan and Winkelmann, 1998]. Derivando poi la funzione di utilità rispetto ai pesi e ponendola uguale a zero, è possibile ricavare i rendimenti di equilibrio:

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0$$

dove U è la funzione di utilità dell'investitore:

$$U = w' \Pi - (\delta/2) w' \Sigma w$$

La quale è coerente con il fine di massimizzare il rendimento del portafoglio computando sempre il livello di avversione al rischio dell'investitore; infatti $w' \Pi$ e $w' \Sigma w$ rappresentano rispettivamente rendimento atteso e varianza del rendimento del portafoglio.

Quindi si arriva a risolvere il problema di ottimizzazione inversa:

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

Da quest'equazione è possibile, una volta invertita, ricavare i pesi del portafoglio di equilibrio, quindi si riscontrerà un'equazione in cui w non solo è il portafoglio ottimo in relazione all'avversione al rischio del soggetto economico, ma sarà anche la soluzione dell'approccio media-varianza:

$$w = (\delta \Sigma)^{-1} \Pi$$

Successivamente alla derivazione, si potrà delineare la probabilità condizionata nel teorema di Bayes:

$$p(\pi | E(r)) \sim N(\Pi; \tau \Sigma)$$

$E(r)$ in Bayes riflette i rendimenti attesi dalle views dell'investitore e la funzione di densità di probabilità a priori. Poiché Π è un vettore che raffigura la stima, convergerà su di esso funzione di densità di probabilità condizionata di π rispetto a $E(r)$. Inoltre l'utilizzo di $\tau \Sigma$ a discapito di $\Sigma \pi$ ha natura prettamente semplificatrice, dipesa dalla proporzionalità reciproca tra Σ e $\Sigma \pi$ e dalla notorietà di Σ ; apparirà quindi più semplice impiegare un coefficiente di proporzionalità invece di stimare $\Sigma \pi$. Per ciò si assume che:

$$\tau = 1/n$$

Tale rapporto rivela una diretta proporzionalità tra l'ampiezza del campione sul quale viene sviluppata l'analisi e il tendere di $\Sigma \pi$ a Σ [Biondi, 2013].

2.3 Le views

Antecedentemente è stato visto come un portafoglio di mercato possa rappresentare le fondamenta per la costruzione, tramite il modello BL, di un portafoglio ottimo, il quale può essere alterato dalle views dell'investitore e dal relativo grado di fiducia; inoltre possono convergere sia ai singoli titoli o più titoli a confronto. L'assenza di opinioni riguardo i rendimenti attesi degli strumenti di mercato implicherebbe un riferimento ai pesi neutrali propri del modello di equilibrio e quindi il portafoglio dell'investitore coinciderà con il portafoglio di mercato. La costituzione delle aspettative in merito ai valori assoluti e relativi degli asset, definirà la disposizione, per gli investitori, di un portafoglio che sarà tanto più discordante da quello di equilibrio, quanto più estreme saranno le opinioni e maggiore il grado di fiducia relativo ad esse. Quindi le opinioni hanno la finalità di permettere all'investitore di costruire un portafoglio di mercato, tramite delle stime sui rendimenti futuri, per cercare di battere il portafoglio di mercato. Non necessariamente le singole views devono essere concordi tra loro, né tanto meno debbono riferirsi a tutti i titoli in quanto sono indipendenti e uniche l'una dall'altra. Il modello di BL permette di catalogare queste opinioni in due grandi macro-aree, basandosi su due caratteristiche tipiche delle opinioni, l'assolutezza e la relatività. Le views assolute, sono le uniche che possono essere implementate nell'approccio di Markowitz e rappresentate dalla valutazione dell'investitore; l'assolutezza deriva dal confronto del rendimento del titolo con quello ottenuto negli anni precedenti dallo strumento stesso, quindi un titolo Δ avrà un rendimento assoluto della $x\%$, con un grado di fiducia della $y\%$. I pareri relativi invece si concretizzano nella comparazione tra il rendimento di un asset e quello di un altro titolo o tra gruppi/settori di titoli: un titolo/settore Φ ha una performance maggiore del titolo/settore Λ di $\gamma\%$, dato un grado di confidenza del $k\%$. Se nel primo caso l'implementazione della previsione del modello è relativa al fatto che il rendimento della $x\%$ del titolo Δ si sostituirà a quello implicito di equilibrio, mentre nel secondo sarà dipesa da uno scostamento del portafoglio per l'asset più performante nel caso in cui si presenterà una maggior distorsione dei rendimenti azionari propri dell'investitore rispetto a quelli di equilibrio, non può dirsi che il terzo caso sia così lineare. La complessità di quest'ultimo concerne il confrontare diversi gruppi di asset i cui rendimenti potrebbero differire l'uno dall'altro; è opportuno analizzare dei gruppi di

titoli in base alla previsione fatta; tali gruppi prendono il nome di “mini-portafogli” i cui rendimenti sono la somma dei prodotti delle capitalizzazioni di mercato per il rendimento implicito di equilibrio di ciascun titolo, quindi l’aspettativa viene paragonata ai rendimenti dei singoli gruppi correlati alla view. Di conseguenza i titoli sovra-performanti saranno sovrappesati qualora tale differenza derivante dai “mini-portafogli” tramite rendimenti impliciti di equilibrio, viene superata dalla supposizione.

La view ha un peso e quest’ultimo [He and Litterman, 1999] sarà maggiore se l’orientamento dell’aspettativa sarà più tendente al rialzo rispetto a ciò che è stato previsto dall’equilibrio o da altre views e se incrementa il livello di fiducia dell’investitore sull’opinione stessa. In più il peso è una funzione crescente del rendimento previsto dalla view e il relativo valore assoluto è sempre una funzione crescente ma del livello di confidenza.

Analiticamente, le views si possono esprimere attraverso questa combinazione lineare:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon$$

In cui:

- P è la matrice ($k \times n$), in cui k rappresenta il numero delle views e n il numero dei titoli considerati, quindi P contiene il peso delle aspettative; inoltre il numero massimo di righe k coinciderà con n . Qualora l’asset corrispondente fosse oggetto di un’aspettativa allora il valore della matrice sarà diverso da zero, quindi il numero delle righe è strettamente correlato al numero di asset sui quali ricadono specifiche views. Tale peso coinciderà con 1 qualora l’aspettativa è assoluta, mentre in caso di view relativa, la somma dei pesi sarà zero.
 - μ è il vettore ($n \times 1$) che include la media dei rendimenti attesi
 - Q è un vettore ($k \times 1$) che comprende i rendimenti attesi per ogni views, ed è l’investitore a definire i valori. Qualora si avesse un’aspettativa assoluta, il vettore Q riflette il rendimento atteso dell’asset, invece la view è relativa racchiude la differenza tra i rendimenti attesi degli asset considerati.
 - ε è un vettore ($k \times 1$) che racchiude tutti gli errori casuali eseguiti dalle views

Altro aspetto fondamentale è la modalità con la quale le views cooperano per la determinazione del vettore dei rendimenti. È necessario fissare due punti base: il numero delle aspettative non deve coincidere con il numero dei titoli, né tanto meno lo deve superare e ad ogni opinione sarà correlato un errore casuale che avrà media zero, espresso da:

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q1 \\ M \\ Qk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon1 \\ M \\ \varepsilon k \end{bmatrix}$$

dove $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$.

Le views sono definite come il reciproco del rapporto del grado di fiducia per un fattore di correlazione e gli errori, invece che essere circoscritti nell'equazione di BL, verranno riflessi implicitamente nella loro varianza ω . Quest'ultima, per ogni errore, formerà la matrice varianza-covarianza Ω .

Un esempio [Biondi, 2013]

Si ipotizza l'esistenza di quattro asset e due views; secondo la prima, relativa, il primo asset sarà più performante dell'asset tre del 2%, il cui livello di confidenza è ω_1 , mentre la seconda views, assoluta, evidenzia come il secondo asset avrà un rendimento del 3% con un livello di incertezza di ω_2 .

$$P = \begin{bmatrix} p1,1 & \dots & p1,n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pk,1 & \dots & pk,n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q1 \\ \vdots \\ Qk \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega k \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega1 & 0 \\ 0 & \omega2 \end{bmatrix}$$

La non correlazione tra le singole views implica che matrice Ω deve essere diagonale; inoltre ha insite le informazioni riguardanti la confidenza con cui vengono espresse le aspettative stesse.

Anche se tale modello è stato sviluppato da Black e Litterman per l'implementazione delle views, è stato oggetto di numerose modifiche, tra le quali spicca quella di Idzorek alla matrice P.

2.3.1 La matrice P

La matrice P, come descritta nel modello di BL, è definita dall'investitore e sarà invertibile nel caso in cui $k = n$. Come già specificato precedentemente, il profilo di tale matrice sarà costituito in base al numero di asset presenti nel portafoglio che verranno definiti dalle righe della matrice la cui somma sarà pari a uno in caso di view assoluta e pari a zero se la view dovesse essere relativa, nella quale i titoli *overperforming* saranno soppesati positivamente, mentre gli *underperforming* sommeranno a -1, con valori equamente divisi. Inoltre entrambi i titoli, over/under-performing, saranno soppesati tramite il rapporto tra la capitalizzazione di mercato e quella di mercato complessiva relativa agli altri asset della categoria. Tale congettura permette una classificazione in base al peso che rispecchi i canoni dell'equità solo nel caso in cui la view interessi due titoli; infatti, un riferimento ad un numero maggiore di asset darebbe troppo respiro a titoli che hanno coefficiente di rendimento-rischio elevato ma con una bassissima capitalizzazione di mercato, provocando così, una distorsione della struttura del portafoglio, derivante dalla composizione finale dello stesso.

La matrice P offre tre possibili modalità di espressione della view, ovvero espressa su un unico asset, su un portafoglio di titoli ed esprimere una view relativa, che è il più comune e deve essere pari a zero quando deve tradurre la somma dei valori collocati nella riga della matrice P. Per ovviare alla risoluzione di tale problema, tramite la scissione dell'unità negativa in due ma che non tiene conto della capitalizzazione degli asset, Idzorek, propone l'inserimento di un valore all'interno della matrice P, coincidente con la media ponderata della la capitalizzazione di mercato dei pesi relativi ai titoli soggetti alle views. Tramite questo nuovo approccio è possibile colmare i limiti conseguenti all'esprimere in maniera formale una view relativa a asset multipli, tipo indici o gruppi azionari. Infatti se ipotizziamo di avere due portafogli, una in posizione corta e l'altro

lunga, sui quale ricade la view, ogni titolo *over/under-performing* avrà un peso coinciderà con il rapporto tra la capitalizzazione di mercato relativa all'asset stesso e il totale delle capitalizzazioni di mercato dei titoli con le stesse caratteristiche legati a quella view. Ricordando che se una view, rispetto alla previsione dell'equilibrio, tende di più al rialzo il peso di quest'ultima è positivo, allora i titoli sopra-performanti saranno soppesati maggiormente se il rendimento atteso dell'opinione dell'investitore è maggiore del rendimento in equilibrio medio passato. Riprendendo l'esempio di [Biondi, 2013], si ipotizza la formulazione di tre views e un paniere di otto titoli:

- il rendimento del settimo asset sarà Q1;
- il secondo titolo sarà sopra-performante rispetto al primo di Q2;
- i titoli tre e cinque renderanno meglio degli asset quattro e sei di Q3.

Date queste informazioni, è possibile scrivere la matrice del modello B

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma la matrice P di Idzorek sarà diversa in quanto le capitalizzazioni dei titoli tre e cinque è al 90% sul tre e al 10% sul cinque, mentre quella degli asset quattro e sei è 90% dal titolo quattro e 10% dal sei.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & -0.9 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Il vettore errore ε e la matrice di covarianza Ω

Il vettore ε rappresenta il livello di incertezza dell'investitore sulle views e si distribuisce normalmente con media zero e covarianza pari a Ω . I valori di questo vettore sono sia positivi che negativi, tranne nel caso in cui l'operatore fosse sicuro al 100% delle proprie convinzioni.

$$\varepsilon \sim N(0; \Omega)$$

La matrice di covarianza Ω ($k \times k$) è costituita dalle varianze di ogni termine di errore ω_1 che misura l'incertezza sulla view e quindi l'impatto che quest'ultima ha sui rendimenti d'equilibrio. La matrice, avendo assunto l'ipotesi di indipendenza e di in-correlazione reciproca delle views, sarà diagonale e simmetrica, quindi non necessariamente tutti i valori sulla diagonale devono differire da zero a meno che la certezza circa l'aspettativa dell'investitore sia certa.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \Lambda & 0 \\ M & O & M \\ 0 & \Lambda & \omega_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CF/LC_1 & \Lambda & 0 \\ M & O & M \\ 0 & \Lambda & CF/LC_k \end{bmatrix}$$

in cui CF è il fattore di correlazione e LC invece è il livello di confidenza.

Le views hanno una distribuzione normale:

$$P \cdot \mu \sim N(Q; \Omega)$$

Ora l'aspettativa, secondo [Sefton and Scowcroft,2003], è stata considerata irrazionale, di conseguenza priva di informazione negli errori. Poi la volatilità delle views supera quella dei rendimenti non ancora stimati:

$$\text{Var} = P \Sigma P' + \Omega$$

Le criticità di tale parametro sono legate alla molteplicità dei metodi di calcolo; infatti nel 1992 Black e Litterman non definiscono nessuna modalità di calcolo di questa matrice, ma si limitano a fornire degli esempi che racchiudono valori differenti della varianza a seconda del livello di confidenza dell'operatore con le proprie views. In più, questi esempi sono sorretti esclusivamente dal criterio qualitativo che a una maggior incertezza corrisponde una maggior varianza, infatti la matrice utilizzata da BL è generalmente

l'inversa di Ω , la matrice di confidenza. La carenza di approcci quantitativi, convincerà Idzorek, ad apportare delle modifiche sostanziali a tale parametro, proponendo una proporzionalità tra gli elementi (ω), costituenti la matrice diagonale Ω , e le varianze implicite delle views, grazie all'inclusione di $\tau\Sigma$. L'obiettivo ultimo di Idzorek era semplificare il modello di Black-Litterman per gli investitori comuni, traducendo il livello di confidenza in una peculiare view espressa in una percentuale tra 0% e 100%.

$$Confidence = \frac{\hat{w} - w_{mkt}}{w_{100} - w_{mkt}}$$

in cui:

- w = peso specifico del titolo rispetto ad una certa view.
- w_{100} = peso di un asset specifico il cui grado di confidenza è del 100%
- w_{mkt} = peso di un asset in assenza di views

Numeratore e denominatore esprimono lo scostamento rispetto ai pesi di mercato.

La varianza è l'elemento fondamentale per la costituzione del grado di fiducia dell'aspettativa e che impatterà direttamente sui singoli elementi ω_i . Proprio per tale motivo, fissando la confidenza di una view ($p_k \Sigma p_k'$), Idzorek dimostra l'uguaglianza tra il rapporto ω/τ e la varianza stessa, provocando l'irrelevanza del singolo valore τ .

$$\Omega = diag [P(\tau\Sigma) P']$$

Altro approccio utilizzato per definire Ω consiste nell'esprimere un intervallo di confidenza attorno alla media pesata dei rendimenti impliciti di equilibrio con le views degli investitori, i cui pesi sono il livello medio di fiducia delle aspettative e una funzione di τ , affinché venga localizzato il valore della varianza stessa servendosi della normalità delle views stesse. Queste ultime sono influenzate non solo dalla varianza, ma anche dall'accuratezza del modello o dalla discrepanza tra i valori di equilibrio e quelli offerti dall'opinione. Inoltre questa modalità di calcolo dell'incertezza risulta congruente con l'assunzione che τ sia inferiore ad uno poiché il volume dell'incertezza legata all'equilibrio coinciderà con quella delle views. Infatti si nota come un incremento del

valor medio delle costituenti di Ω decresce τ , provocando una rilevanza superiore del peso dei rendimenti impliciti di equilibrio rispetto alle opinioni degli investitori.

A livello pratico se un investitore formula la sua opinione relativamente ad un asset di un portafoglio, ipotizzando che avrà un rendimento del 2% con un livello di confidenza del 68%, il quale risulterà nell'intervallo (-3%; 2%) di rendimento. Ma in una distribuzione normale, il 68% dell'area risulta compreso tra (-1; 1) deviazione standard dalla media, traducendo così, la views dell'investitore in una varianza pari a 0.010.

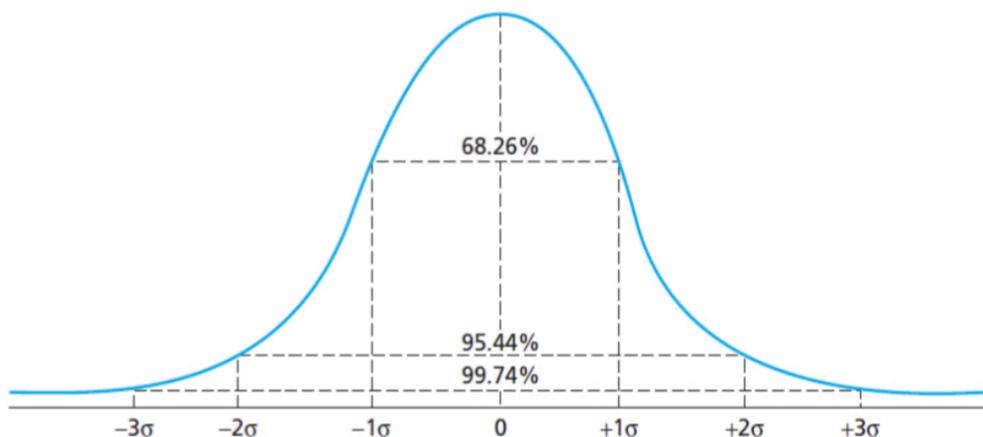


Figura n.9 - Rappresentazione di una distribuzione normale. [Bodie, Kane, Markus, 2011]

2.3.3 La costante *weight-on-views*

Questa costante, indicata con τ , in concomitanza con le costituenti di Ω , calcola la misura del peso attribuita alle views rispetto al portafoglio di equilibrio, quindi è funzionale a definire la distribuzione dei rendimenti di equilibrio tramite il rapporto tra covarianza del valore atteso dei rendimenti e covarianza dei rendimenti stessi. In base al volume di questo parametro, si modificherà il peso dei rendimenti di equilibrio in maniera inversamente proporzionale, ovvero all'aumentare di τ , il peso delle aspettative in relazione all'equilibrio subisce un incremento, al contrario, una riduzione di τ implica un impatto maggiore dell'equilibrio rispetto alle views.

Le difficoltà legate a tale parametro, risiedono nel metodo di calcolo, generando così una discrepanza circa l'assegnazione di un determinato valore tra i vari economisti. La prima corrente di pensiero, sostenuta sia da Black e Litterman che da Lee, che fonda la sua concezione sulla base di una inferiorità dell'incertezza sulla media dei rendimenti rispetto a quella che impatta sui rendimenti stessi, ipotizzava che il valore di questa costante

dovrebbe essere prossimo allo zero; più precisamente, Lee, ha circoscritto τ in un intervallo compreso tra 0.01 e 0.05. In contrapposizione a tale concezione, Satchell e Scowcroft presuppongono un valore prossimo a uno, che sia un parametro non noto e stocastico; inoltre riformulano l'approccio di B-L per la stima di tale parametro. In tal caso, τ misurerà la dispersione totale dei rendimenti d'equilibrio rispetto ai rendimenti attesi in quanto le views rappresenteranno la trasformazione dei rendimenti d'equilibrio. Ultima prospettiva è quella di Blamont e Firoozye, secondo cui $\tau\Sigma$ è lo standard error relativo alla stima dei rendimenti di equilibrio, motivo per cui questa costante sarà definita come il rapporto tra il valore 1 e il numero delle osservazioni. Secondo Idzorek è opportuno equiparare il rapporto tra le componenti di Ω e τ con la varianza implicita della view presa in esame tramite un livello di confidenza delle views che deve essere stabilito. Questo nuovo rapporto tra la matrice di covarianza e la costante *weight-on-views*, traduce un'incapacità di τ di determinare i rendimenti di equilibrio, provocando una non curanza giustificata nel palesare il proprio grado di fiducia sulla view.

Ultimo approccio è quello di Walters [2009], secondo il quale la stima della media di una distribuzione è inversamente proporzionale al numero dei dati campionari; questo giustifica un portafoglio più bilanciato, conseguenza del minor peso degli errori derivante da un maggior numero di osservazioni:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad \text{stimatore della massima verosimiglianza}$$

$$\tau = \frac{1}{T-k} \quad \text{miglior stimatore quadratico neutrale}$$

2.4 Modello misto di Theil

Il modello misto di Theil pone l'obiettivo di colmare le lacune espresse dal Black e Litterman nel loro articolo del 1990 per ciò che concerne il metodo di calcolo dei rendimenti attesi da implementare nel processo di ottimizzazione, contrapponendosi al metodo bayesiano, che sfrutta la combinazione delle distribuzioni normali per calcolare il vettore dei rendimenti attesi. Tale modello si pone come un adeguamento del metodo dei minimi quadrati e, sulla scia del modello bayesiano, presuppone l'esistenza di una distribuzione a priori, rettificata secondo le nuove informazioni.

Ora queste informazioni a priori, definite dalle views, vengono espresse:

$$q = p\beta + v$$

in cui:

q = vettore noto $k \times 1$ dei rendimenti previsti dalle views

p = matrice $k \times n$, conosciuta e delineata dall'operatore basata sul numero di asset e di views relative

v = vettore errori con media zero e varianza Ω

La distribuzione a priori è invece rappresentata dal vettore dei rendimenti d'equilibrio:

$$\pi = x\beta + u$$

dove:

π = vettore dei rendimenti d'equilibrio e quindi il valore medio della distribuzione

x = matrice identità

β = vettore $n \times 1$ della media dei rendimenti

u = vettore errori con media zero e varianza $\Phi = \tau\Sigma$

Definite queste equazioni, è possibile stimare il vettore dei rendimenti attesi tramite la combinazione della distribuzione a priori e quella condizionale:

$$\begin{pmatrix} \pi \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Il primo termine rappresenta il vettore $n \times 1$ dei rendimenti a posteriori, mentre il secondo è il risultato della combinazione di due regressori; β è la stima del vettore della media vera dei rendimenti, che stabilisce il peso sul vettore dei rendimenti definito da ogni sorgente d'informazione e l'ultimo termine è il vettore $n \times 1$ ottenuto proprio tramite la fusione delle due sorgenti di informazione.

Il valore atteso dei residui è zero e la matrice di covarianza dei residui invece è:

$$E\left[\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right] \begin{matrix} u' & v' \end{matrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

è possibile ora ricavare i rendimenti attesi tramite il metodo dei minimi quadrati:

$$\beta = [x' \Phi^{-1} x + p' \Omega^{-1} p]^{-1} [x' \Phi^{-1} \Pi + p' \Omega^{-1} q]$$

Qualora venissero tralasciate le matrici identità x , secondo B-L, il vettore dei rendimenti attesi assumerebbe tale forma:

$$\beta = [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q]$$

Ottenuto β e conoscendo il vettore nuovo dei rendimenti attesi a posteriori Π , se venissero usati in una nuova regressione, si otterrebbe:

$$\Pi = \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} \beta + u$$

Quindi la varianza della stima posteriore sarà:

$$V[\Pi] = V[\beta] + V[u] = \Sigma + V[u]$$

dove:

- Σ è la matrice delle covarianze $n \times n$ del campione
- $V[u]$ rappresenta la matrice delle covarianze dei residui $n \times n$

Si evince come la varianza del vettore finale dei rendimenti coincide con la somma della matrice delle covarianze dei residui e dei rendimenti d'equilibrio; inoltre si otterrà una miglior accuratezza della stima, incorporando una nuova sorgente di informazione:

$$V[u] \leq \Phi$$

È possibile implementare nel modello media-varianza, il vettore finale dei rendimenti:

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

In cui:

- Σ = matrice storica covarianza dei rendimenti
- δ = avversione al rischio dell'investitore

A questo punto si può definire il vettore con i pesi di ogni titolo del portafoglio w:

$$w = \Pi[\delta \Sigma]^{-1}$$

Attraverso l'implementazione del modello misto di Theil nel modello Black-Litterman è stato ottenuto il processo di allocazione ottimale del portafoglio [Biondi, 2013].

Tramite tale approccio, la risultante della media pesata tra il vettore delle aspettative e il vettore dei rendimenti d'equilibrio è il vettore dei rendimenti attesi, in cui sia τ che l'incertezza espressa sulle views sono i parametri da cui dipenderanno i pesi. Interpreta il miglior stimatore lineare non distorto che minimizza la varianza dei residui; un livello di confidenza elevato delle views espresse, si tradurrà in un allineamento maggiore tra i valori attesi dell'investitore e il vettore dei rendimenti attesi, il quale sarà più vicino invece, a quello dei rendimenti di equilibrio, qualora il grado di fiducia delle views fosse basso.

2.5 Impatto delle views sui rendimenti attesi

La metodologia di misurazione delle views a posteriori si ramifica in due applicazioni differenti tra loro; la prima presuppone una verifica della congettura che implica la contraddittorietà tra le distribuzioni a posteriori e quelle a priori, a differenza della seconda che calcola la divergenza tra le due informazioni. Sostenitore del primo approccio è Theil, il quale congegnò nel 1971, un test atto ad accertare la compatibilità delle views con le informazioni a priori.

$$\Pi = x \beta + u$$

$$Q = P \beta + \varepsilon$$

È necessario indicare con β' lo stimatore di β per poter calcolare l'errore di stima tra le views e la distribuzione a priori:

$$\gamma = (\Pi - X \beta') = -X (\beta' - \beta) + u$$

γ è un vettore la cui media è zero e varianza $V(\gamma)$

$$\Theta = E(\gamma) V(\gamma)^{-1} E(\gamma)$$

Questo parametro è chiamato distanza Mahalanobis, distribuita secondo $\chi^2(n)$ e rappresenta l'oggetto dell'ipotesi della verifica. Analogamente a quest'ultimo è il modello proposto nel 2003 da Fusai e Meucci, che introducendo una modalità per soppesare l'incertezza legata alle views, perseguono lo stesso fine di verificare la compatibilità tra la stima dei rendimenti a posteriore e quella a priori. Di tutt'altra natura è invece l'approccio offerto da He e Litterman nel 1999 e da Braga e Natale nel 2007, attraverso il quale le misure impiegate nei modelli precedenti, vengono impiegate come vincoli nel processo di ottimizzazione, distaccandosi quindi, dal fine prefissato dai modelli precedenti. I primi due economisti, definiscono il parametro A come il vettore dei pesi di portafoglio definiti dalle views, funzionale quindi a definire l'impatto delle aspettative sulla distribuzione a posteriori. Infatti l'ipotesi alla base di tale assunzione è la costruzione di un portafoglio B-L non vincolato attraverso la somma tra il peso del portafoglio di equilibrio e il prodotto tra A e la matrice di specificazione degli asset sui quali ricadono le views.

$$W^* = w + PA$$

Invece Braga e Natale identificano la volatilità del tracking error (TEV) come misura della distanza tra la distribuzione a priori e a posteriori:

$$TEV = \sqrt{(w_{actv}^T \Sigma w_{actv})}$$

in cui:

$w_{actv} = w' - w_t$ è il vettore dei pesi o portafoglio attivo;

w' = vettore dei pesi nel portafoglio dell'investitore

w_t = vettore dei pesi nel portafoglio di riferimento

Σ = matrice di covarianza dei rendimenti

2.6 Rischio nel mercato globale

Secondo il “Global portfolio optimization” del 1992 di Black e Litterman; il mercato globale è il palcoscenico sul quale avvengono le operazioni di investimento dell'operatore; quest'ultimo potrebbe aumentare i propri rendimenti ampliando il proprio raggio d'azione verso un'allocazione globale tramite l'ampliamento del bacino di categorie di asset selezionabili e una conseguente diversificazione del rischio. Quest'ultimo però si manifesta non solo come rischio legato al rendimento dell'asset stesso, ma anche come rischio di cambio; in quanto le oscillazioni della valuta estera rispetto a quella nazionale, sono indice di un cambio sfavorevole e quindi di eventuali perdite o guadagni ridotti legati agli investimenti fatti su asset stranieri. Per attenuare tale rischio è necessario assumerne in parte; tale considerazione deriva dal paradosso di Siegel, dal quali si evince che i singoli investitori, servendosi di varie unità di misura per rilevare i rendimenti, dovranno assumersi parte del rischio di cambio se vorranno ottenere un determinato rendimento. La parte di rischio assunta sarà direttamente proporzionale alla quantità di rischio aggiuntivo necessaria a bilanciare il rendimento atteso. Il rischio verrà coperto con la medesima percentuale, la quale è compresa nell'intervallo tra il 75%-85%, applicata a tutti gli investitori e per questo definita universale. La media dei rendimenti dei portafogli di mercato globali, la media della volatilità del tasso di cambio fra le coppie di paesi e tra la media della volatilità del portafoglio di mercato globale, costituiscono i parametri dai quali dipende la copertura universale in equilibrio.

Affinché la copertura (*hedging*) del rischio di cambio possa essere efficiente è necessario implementare una percentuale di valuta estera nel proprio portafoglio ricavata tramite una formula studiata da Black e illustrata nell'articolo “*Universal hedging: optimizing*

currency risk and reward in international equity portfolios” del 1989 [Black, 1989]. Da tale articolo risulta evidente come ogni investitore debba detenere un portafoglio diversificato di asset esteri specificando che in un contesto di equilibrio la volontà di detenere tutte le azioni esistenti e di essere una controparte dello scambio permetterà ai prezzi di aggiustarsi. I dati storici permettono di valutare quelli che sono gli input della formula studiata da Black:

- Deviazione standard del portafoglio
- Media dei rendimenti attesi del portafoglio di mercato globale
- Volontà del tasso di cambio

L'applicazione della formula implicherà l'assunzione di determinati requisiti tra i quali la liquidità dei mercati, l'assenza di tasse, costi di transazione, rischio di default e barriere agli investimenti internazionali, inoltre non solo ogni investitore segue il principio di media-varianza, ma assume le stesse opinioni su asset e valute ed infine un egual coefficiente di avversione al rischio globale λ per ogni investitore. $1 - \lambda$ rappresenta la posizione corta in ogni valuta funzionale a stabilire il grado di copertura del portafoglio globale:

$$1 - \lambda = \frac{\mu_m - \sigma_m^2}{\mu_m - \frac{1}{2}\sigma_e^2}$$

in cui:

μ_m : media relativa all'*excess return* del portafoglio di mercato

σ_m^2 : varianza del rendimento del portafoglio di mercato

σ_e^2 : varianza del tasso di cambio relativa ad ogni coppia di paesi

$\sigma_m^2 > \frac{1}{2} \sigma_e^2$ poiché la volatilità del tasso di cambio inficia sulla volatilità media del portafoglio di mercato; così anche $\mu_m > \frac{1}{2} \sigma_e^2$ dato che la volatilità del tasso di cambio si presta al rendimento medio del portafoglio di mercato.

Il valore della copertura globale risulta esente da effetti provocati da oscillazioni dei tassi attesi dei tassi di cambio o delle correlazioni tra i tassi di cambio stessi e i rendimenti degli asset; questo perché in equilibrio si definisce un contro-bilanciamento tra le correlazioni e i cambiamenti attesi, rendendo così la formula immune dalle loro reazioni. Se le views dell'investitore, relative a tassi di cambio reale e rendimenti, divergono da

quelle degli altri operatori, risulta necessaria una manovra di implementazione in una procedura di ottimizzazione con il fine di massimizzare il rendimento atteso del portafoglio per un dato livello di volatilità. La considerazione esclusiva dei tassi di cambio reale, senza considerare le conseguenze dell'inflazione, rende la formula di Black una buona approssimazione. Un'inclusione anche di obbligazioni estere nel portafoglio, comporta una copertura totale in quanto vi è un aumento del rischio di cambio ad eccezione del caso in cui si scommette su una fluttuazione favorevole del tasso nel breve periodo.

Una valuta, quindi, verrà soppesata in base al peso degli investimenti in un singolo Paese per la costante di copertura universale.

$$W_i = \lambda w_j^c$$

III. ESTENSIONE DEL MODELLO B-L: UN METODO DI ASSET ALLOCATION BAYESIANO SEMI-PARAMETRICO BASATO SU COPULE

3.1 Copule

Durante il processo di *asset allocation*, uno dei fattori cruciali è lo studio dello scheletro delle dipendenze tra un pool di attività e il rischio di un portafoglio. Un approccio tradizionale permette di misurare i fattori di rischio rilevanti in tale ambito, come la volatilità, le cosiddette code pesanti (*fat tails*) tradotte con la non-normalità della distribuzione dei rendimenti degli asset e la dipendenza tra quest'ultimi, espressa esclusivamente da una correlazione lineare; questi parametri vengono affrontati in maniera trasversale dal metodo delle copule, le quali permettono la costruzione delle funzioni di distribuzioni cumulative congiunte relative ad un vettore di rendimenti di attività finanziarie derivate dal prodotto tra funzione copula e distribuzioni marginali di ciascun rendimento di attività finanziaria [Cherubini et al, 2004]. La presenza di un numero elevato di fattori di rischio definisce una multidimensionalità alla quale la mera assunzione della distribuzione normale multivariata non può far fronte, di conseguenza i risultati finali derivanti dalle analisi di misure dei rischi unidimensionali del Var, “*value at risk*”, e del CVar, “*conditional value at risk*”, si discostano da quelle rilevate empiricamente. L'impiego congiunto tra questa nuova misura *d-dimensionale* di analisi finanziaria e le distribuzioni marginali di ogni rendimento degli asset è risultato proficuo e ha permesso di colmare quei limiti, ampliando la capacità della ricerca di nuove distribuzioni multivariate, che si modellino all'andamento veritiero dei fattori di rischio, costruendo così la funzione di distribuzione cumulativa congiunta di un vettore di rendimenti di attività finanziarie [D'Amico and Petroni, 2018]. Questo nuovo approccio di analisi viene stimato attraverso tre approcci: il metodo semi parametrico, il metodo non parametrico e il modello parametrico completo. Quest'ultimo viene reso attivo attraverso la stima di massima verosimiglianza a due stadi (MLE). Tramite questo approccio parametrico, la copula viene modellata, dando vita ad un nuovo metodo, noto come *Inference Functions for Margin* (IFM). L'idea di base di questo concetto risiede nello scindere in due la funzione di distribuzione congiunta in due parti, una che definisce la struttura di dipendenza, l'altra che descrive il comportamento marginale. Il caso bi-

variato comprende tre famiglie principali di copula: ellisse (gaussiana, t di Student), archimedeica (Clayton, Frank, Joe) ed estrema (Gumbel, Cauchy) [Semenov and Smagulov, 2017]. Prima di dare una definizione di copula, la quale permette di studiare la dipendenza tra le variabili casuali, è necessario menzionare due proprietà, che permettano alla copula stessa di rispettare la proprietà di funzione di distribuzione. La prima proprietà riguarda la trasformazione integrale di probabilità, il cui teorema afferma che data una variabile aleatoria X in uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , la cui funzione di ripartizione è F_X , se quest'ultima è assolutamente continua allora $F_X(X)$ è uniformemente distribuita su $[0,1]$ e $F_X(X)$ è definita trasformazione integrale di probabilità. Ponendo poi $Y = F_X(X)$, si nota che:

$$\begin{aligned}
 &F_Y(Y) \\
 &= P [Y \leq y] \\
 &= P [F_X(X) \leq y] \\
 &= P [X \leq F_X^{-1}(y)] \\
 &= F_X [F_X^{-1}(y)] = y
 \end{aligned}$$

Risultato di tale equazione sarà $Y = F_X(X)$ che ha una distribuzione normale su $[0,1]$. Questa probabilità consente di ottenere variabili casuali distribuite uniformemente, partendo da variabili casuali di ogni distribuzione continua.

L'altra proprietà permette di definire la funzione di ripartizione congiunta, ovvero la copula.

Si ipotizza che X_1 e X_2 siano due variabili aleatorie continue la cui funzione di ripartizione sono rispettivamente F_1 e F_2 . Poiché $U_1 = F_1(X_1)$ e $U_2 = F_2(X_2)$ sono uniformemente distribuite su $[0,1]$, allora la loro distribuzione di probabilità congiunta sarà:

$$\begin{aligned}
 &F(x_1, x_2) \\
 &= P [X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2] \\
 &= P [F_1(X_1) \leq F_1(x_1); F_2(X_2) \leq F_2(x_2)] \\
 &= P [U_1 \leq F_1(x_1); U_2 \leq F_2(x_2)] \\
 &= C(F_1(x_1); F_2(x_2))
 \end{aligned}$$

Una funzione $C: I^2 \rightarrow I$ è chiamata *copula d-dimensionale*, o più comunemente *d-copula*, se soddisfa le seguenti condizioni:

- È d-crescente, quindi per ogni $u, v \in [0,1]$, $C(0, v) = C(u, 0) = 0$;
- Le marginali sono la funzione identità dell'intervallo unitario, quindi per ogni $u, v \in [0,1]$, $C(1, v) = u$, $C(u, 1) = v$;
- Il cubo d-dimensionale conterrà sempre il suo grafico perché per ogni $0 < u_1 < u_2 < 1$ e $0 < v_1 < v_2 < 1$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) > 0$$

Quindi la funzione di distribuzione di una variabile casuale bi-variata rappresenta una copula bi-variata le cui marginali sono delle distribuzioni uniformi (0,1) [Nelsen, 2006].

Per ogni copula, le derivate parziali $\frac{\partial C}{\partial u}$ e $\frac{\partial C}{\partial v}$ esistono per quasi tutti $u, v \in [0,1]$. Quindi $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}$ e $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}$ esistono e sono continue su I^2 . È possibile quindi che la densità della copula sia:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}.$$

Qualora $u = F(x)$ e $v = G(y)$ sono due funzioni di distribuzione, qualsiasi funzione $C(F(x), G(y))$ è una valida funzione bi-variata. In tal caso è possibile affermare che anche il contrario è vero; infatti anche una funzione di distribuzione di probabilità congiunta sarà una copula. La funzione di densità bi-variata (X, Y) può essere così riscritta:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dG}{dy} = f(x) \cdot f(y) \cdot c(u, v),$$

inoltre:

$$F(x|y) = \frac{\partial C(F(x), G(y))}{\partial G(y)}.$$

Un apporto fondamentale a questo modello è stato offerto da Sklar, il quale afferma che non solo ogni copula è una funzione di distribuzione congiunta i cui argomenti sono le distribuzioni marginali, ma anche ciò che è stato detto in precedenza, ovvero che ad ogni distribuzione congiunta corrisponde una copula se e solo se le marginali sono continue e quest'ultima è unica. Per verificare entrambe le condizioni è necessario identificare K come funzione di distribuzione congiunta con marginale F e G . Di conseguenza esisterà una copula C tale che per ogni x e y si avrà:

$$K(x, y) = F(x) \cdot G(y) = C(F(x), G(y))$$

Quindi se F e G sono continue, allora anche C sarà unica. A questo punto è possibile enunciare il Teorema di Sklar [Sklar, 1996]:

Sia (X_1, X_2, \dots, X_d) un vettore aleatorio e denotiamo con $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ le rispettive distribuzioni marginali. Se chiamiamo H la distribuzione congiunta del vettore di variabili aleatorie, allora esiste un'unica copula C tale che:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$$

Al contrario, se indico la distribuzione marginale con $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ e la copula con C , allora H sarà una funzione di distribuzione congiunta le cui marginali sono $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ e delineata sul prodotto cartesiano relativo all'immagine delle distribuzioni marginali $\text{Im}(F_1) \times \text{Im}(F_2) \times \dots \times \text{Im}(F_d)$. Tra copule e funzioni di ripartizione vi è una corrispondenza biunivoca, verificata da tale teorema; dunque la costruzione di una distribuzione multivariata implica la precisazione di quelle che sono le distribuzioni marginali di ogni variabile aleatoria, dalle quale poi partirà la funzione di copula corrispondente. Quest'ultima permette di delineare quella che è la struttura di dipendenza tra le variabili aleatorie e inoltre dovrà essere selezionata quella copula che descrive al meglio la struttura di dipendenza tra le variabili casuali per determinare poi la distribuzione multivariata relativa alle distribuzioni marginali. Estendendo il bacino delle tipologie di copule, si nota che oltre a quella indipendente, vi sono anche quella di minimo W_d e di massimo M_d che costituiscono, insieme a quella indipendente le copule di Fréchet, il quale permette di definire il limite superiore e inferiore ad una copula. Quest'ultima, $\Pi(u_1, \dots, u_n)$ potrà essere definita copula di indipendenza se:

$$\Pi(u_1, \dots, u_m) = \prod_{i=1}^m u_i$$

L'assunto da cui trae origine tale equazione è l'indipendenza tra le variabili aleatorie delle quali si vuole trovare la struttura multivariata. Qualora il vettore aleatorio X avesse dimensione m , funzione di ripartizione congiunte F e marginali F_1, \dots, F_m si otterrà:

$$F(x_1, \dots, x_m) = \prod (F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)) = \prod_{i=1}^m F_i(x_i).$$

Ciò implica che l'indipendenza delle componenti del vettore aleatorio sarà verificata se e solo se la copula verrà espressa come nell'equazione soprastante.

Data una copula e un vettore di dimensione d , chiamato $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$, allora vale la disuguaglianza soddisfatta dalla copula:

$$\max(u_1 + \dots + u_d - 1, 0) \leq C(u) \leq \min(u_1, \dots, u_d) \quad \forall (u_1, \dots, u_d) \in I^d$$

W_d rappresenterà la copula della contro-monotonia, ovvero quella relativa alla massima dipendenza negativa, mentre M_d coincide con quella della co-monotonia, di dipendenza massima positiva; pertanto sarà possibile riscrivere la seguente formulazione:

$$W_d(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_d) \leq M_d(u_1, u_2, \dots, u_d)$$

È possibile notare come M sia una funzione di distribuzione, mentre W lo sarà solo nel caso bi-variato. I limiti sono:

$$\inf_{C \in \Omega} C(u) = W_d(u) \quad e \quad \sup_{C \in \Omega} C(u) = M_d(u)$$

Si osserva come la definizione di copula per $d > 2$, anche se vi sarà sempre una copula, parametrizzata con i punti coincidenti con la banda inferiore, che assumerà sempre il suo valore. Presentiamo ora le due famiglie di copule.

3.1.1 Copule ellittiche

Una delle tipologie di copule più comunemente impiegata è sicuramente quella ellittica, che comprende le copule gaussiane e le t di Student. Le distribuzioni ellittiche rappresentano un'estensione delle distribuzioni normali multivariate $N(\mu; \Sigma)$. Tra le varie proprietà di queste distribuzioni troveremo:

- *Combinazione lineare* tra un vettore casuale e una distribuzione ellittica, il vettore manterrà una distribuzione ellittica con la medesima funzione generatrice ψ , che raffigura la funzione caratteristica delle distribuzioni sferiche, ovvero delle

estensioni delle normali standard multivariate $N(0, 1_n)$;

- Ellittica e con la stessa funzione generatrice dovrà essere anche la *distribuzione marginale* di X ;
- *Convoluzione* che lascia immutata, e quindi ellittica, un'unione di due vettori indipendenti, la cui distribuzione è ellittica e con la medesima matrice di dispersione Σ .

Caratteristiche principali di queste copule sono la simmetria e capacità di specificazione del livello di correlazione tra le marginali; tali connotati cozzano però con il limite circa i valori estremi delle distribuzioni multivariate i quali non sono correttamente modellati. Come detto, una peculiarità di questa gamma di copule, è la simmetria ellittica, secondo cui una copula $C(u, v)$ si definisce ellitticamente simmetrica qualora la simmetria stessa è verificata non solo relativamente alla diagonale principale dell'unità quadrata, $u = v$, ma anche alla diagonale $u = 1 - v$. Varrà la seguente identità:

$$C(u, v) = C^*(u, v)$$

che mostra come la copula concorda con la propria versione di sopravvivenza C^* .

$Q_\rho(s, t)$ rappresenta la classe delle distribuzioni ellittiche bi-variate, la cui funzione di densità è:

$$q_\rho(s, t) = \frac{k^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} g\left(\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{1 - \rho^2}\right)$$

in cui $\rho \in (-1; 1)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ in cui $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt < \infty$ e k è la costante normalizzata. Avremo quindi:

$$q(s) = \int_{\mathbb{R}} q_0(s, t)dt = \int_{\mathbb{R}} q_0(t, s)dt$$

$$q(t) = \int_{\mathbb{R}} q_0(s, t)ds = \int_{\mathbb{R}} q_0(t, s)ds$$

che rappresenteranno le funzioni di densità marginale delle componenti del vettore (s, t) con $\rho = 0$.

3.1.1.1 Copula Gaussiana

La classe ellittica, abbiamo detto è costituita da due famiglie di copule, l'archimedeana e la gaussiana. Il vincolo per cui la funzione di distribuzione congiunta di quest'ultima sia normale, è una distribuzione normale standard per le marginali, le quali avranno quindi una media pari a zero e varianza uno. La distribuzione n-variata normale standard, quindi, lega n variabili normali standard uni-variate. Indicando con Φ_ρ la funzione di distribuzione di una distribuzione normale bi-variata con appunto media zero e varianza uno e correlazione pari a ρ , mentre Φ^{-1} è l'inversa della funzione di distribuzione normale uni-variata. Definiti tali parametri è possibile ricavare la copula Gaussiana:

$$C_\rho(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

Nel caso bi-variato, ponendo Φ^{-1} la densità della copula gaussiana sarà:

$$c_\rho(u, v) = \frac{\partial^2 C_\rho(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Phi_\rho(s, t)}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\phi_\rho(s, t)}{\phi(s)\phi(t)},$$

in tale contesto la densità della distribuzione bi-variata il cui vettore medio è zero, le varianze sono unitarie e la correlazione è ρ , viene riflesso da Φ_ρ ; invece la densità di una distribuzione normale standard è rappresentata da ϕ . La forma esplicita sarà:

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \rho^2)}} \exp\left(-\frac{\rho^2 s^2 + \rho^2 t^2 - 2\rho st}{2(1 - \rho^2)}\right).$$

Altro impiego di questa famiglia di copule è legato alla relazione diretta tra i coefficienti di associazione di rango (τ di Kendall e ρ di Spearman) e il coefficiente di correlazione lineare; quindi prendendo il vettore gaussiano bi-variato la cui copula è Normale, X , e le funzioni di ripartizione marginali continue, si otterrà:

$$\rho_c(X) = \frac{\pi}{2} \arcsin \rho$$

$$\rho_s(X) = \frac{\pi}{6} \arcsin \frac{1}{2} \rho$$

la cui dipendenza di coda sarà data da:

$$\lambda = \lambda_U = \lambda_L = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho < 1 \\ 1 & \text{se } \rho = 1 \end{cases}$$

Sia i coefficienti di coda superiori che inferiori della copula gaussiana hanno un comportamento speculare in quanto la copula non solo beneficia della proprietà della simmetria radiale, ma le marginali condizionate presentano una distribuzione identica, e quindi è scambiabile. Di conseguenza si avrà:

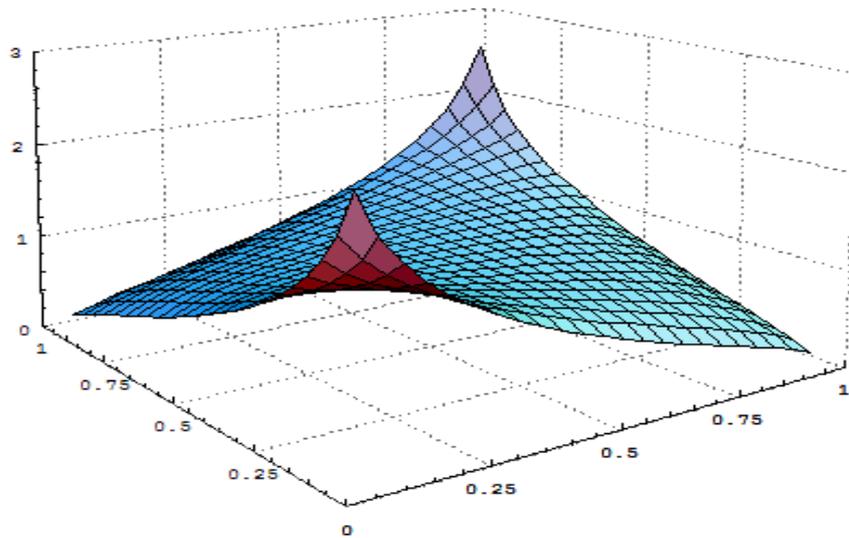


Figura n.10 - Funzione di distribuzione di probabilità di una copula Gaussiana il cui coefficiente di correlazione ρ è 0,6.

3.1.1.2 Copula t-Student

La seconda tipologia costituente la famiglia delle ellittiche è la copula t-Student, impiegata maggiormente nell'interpretazione della dipendenza fra i prezzi degli asset per poi definirne, ad esempio, la rischiosità. La peculiarità che contraddistingue questa tipologia è legata ad un maggior peso che viene assegnato ai valori estremi delle code delle distribuzioni multivariate, approssimando più adeguatamente gli eventi verificati incrementando la meticolosità della previsione; tale approccio è funzionale all'analisi in un contesto di crollo dei mercati finanziari. Utilizzando il teorema di Sklar, è possibile ricavare questa copula:

$$C_{\text{tp}}(u, v) = T_{\text{tp}}(T_{\text{tp}}^{-1}(u), T_{\text{tp}}^{-1}(v))$$

In cui

- $T_{\eta\rho}$ riflette la distribuzione bi-variata t-Student η gradi di libertà e correlazione pari a ρ
- T_{η} rappresenta la distribuzione t-Student con η gradi di libertà.

Eguagliando $T_{\eta}^{-1}(u) = s$ e $T_{\eta}^{-1}(v) = t$ è possibile ottenere la densità di copula:

$$c_{\eta\rho}(u, v) = \frac{\partial^2 C_{\eta\rho}(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\psi_{\eta\rho}(s, t)}{\psi_{\eta}(s)\psi_{\eta}(t)}$$

$\psi_{\eta\rho}$ rappresenta la distribuzione bi-variata t di Student con η gradi di correlazione e correlazione ρ ; ψ_{η} invece, rappresenta la densità della distribuzione t di Student con η gradi di libertà. Implementando la funzione gamma di Eulero, è possibile esplicitare la formula della densità si ottiene:

$$c_{\eta\rho}(u, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{\eta+1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\left(1 + \frac{s^2}{\eta}\right) \left(1 + \frac{t^2}{\eta}\right)\right)^{\frac{\eta+1}{2}}}{\left(1 + \frac{s^2+t^2-2\rho st}{\eta(1-\rho^2)}\right)^{\frac{\eta+2}{2}}}.$$

Come si dimostra che all'incrementare di d corrisponde il convergere della densità della distribuzione t di Student su quella normale standard, è possibile farlo anche per la copula t, la quale converge ad una copula gaussiana se il grado di libertà tende ad infinito. Anche se tale copula differisce dalla gaussiana per il numero di parametri in quanto ne ha due, coincide con quest'ultima per i limiti di Fréchet-Hoeffding che comprende:

$$C_{-1,d}(u, v) = W(u, v) \quad C_{1,d}(u, v) = M(u, v)$$

Quindi ad un elevato grado di correlazione corrisponde un livello di concordanza tra le loro distribuzioni marginali, indipendentemente dai gradi di libertà. Altra caratteristica che accomuna le due tipologie di copule è interpretata dalla caratteristica di simmetria radiale propria anche per le copule t di Student, il che implica la coincidenza tra entrambi i coefficienti di dipendenza di cosa. Ma la derivazione di tale valore da:

$$\lambda_U = \lambda_L = 2 - 2t_{v+1} \left(\sqrt{v+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right).$$

risulta diverso dal valore pari a zero relativo alle gaussiane; specificatamente il valore del coefficiente di dipendenza di coda, il quale oscilla tra valori positivi e negativi, risulta avere una relazione inversa con i gradi di libertà ed essere correlato positivamente al coefficiente di correlazione. Come nella copula Gaussiana, vi sarà la dipendenza di coda che tenderà a zero in quanto a distribuzione t-Student coincide asintoticamente con quella normale standard.

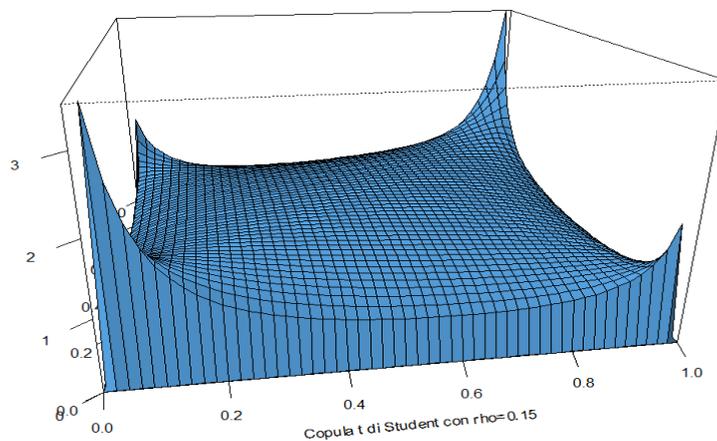


Figura n.11 - Copula t-Student con $\rho = 0,15$ e $d = 2$

3.1.2 Copula Archimedeana

Le copule ellittiche sono il risultato ultimo dell'applicazione diretta teorema di Sklar e inoltre, come detto, sono contraddistinte da simmetria radiale che impedisce, durante le fasi di crollo dei mercati finanziari in cui vi è una maggiore correlazione tra gli asset, una corretta conformazione alla struttura asimmetrica di dipendenza, derivante proprio da una dipendenza maggiore fra eventi negativi che tra fenomeni positivi. Tale difetto può essere colmato da un'altra famiglia di copule, contenente un numero elevato di varietà di classi di copule parametriche e di proprietà, tra cui la simmetria e la proprietà associativa, che permette di accrescere le possibilità di plasmare al meglio la struttura di dipendenza, le

copule Archimedee. Quest'ultime, non derivando dall'applicazione del teorema di Sklar, non sono il risultato della distribuzione multivariata, e quindi per far sì che l'estensione multivariata delle copule Archimedee bi-variate possa essere una copula è necessario impostare delle condizioni. A livello computazionale, la struttura di dipendenza è rappresentata da un solo parametro, il che implica un'adattabilità limitata di adattamento e conseguentemente una riduzione della precisione. Tra le varie tipologie di copule Archimedee, ognuna con un approccio diverso alla struttura di dipendenza, abbiamo la Gumbel, la Frank e la Clayton.

Si ipotizza che una copula $C(u, v)$ in cui la dipendenza tra i margini u e v può essere assunta come deviazione dal caso di indipendenza, il quale coincide con la copula $C(u, v) = uv$. Data la funzione φ , è possibile stabilire una sottoclasse di copule $\varphi(C) = \varphi(u) + \varphi(v)$, poiché la trasformazione di tale funzione, le quali sostengono l'additività, sono soggette ad una manipolazione più semplice.

φ è una funzione continua $\varphi: \mathbb{R}^+ \text{ da } [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ e strettamente decrescente, tale che:

- $\varphi(0) = 1$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$
- φ è strettamente decrescente su $[0, \inf_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = 0]$

è possibile ricavare la funzione pseudo-inversa di φ della funzione generatrice, fondamentale per la costruzione della copula Archimedea, ovvero:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & 0 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

$$\varphi^{[-1]}(t) = \max \{ \varphi^{-1}(t), 0 \}$$

Se $\varphi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$, la funzione pseudo-inversa coinciderà con la funzione inversa.

Con dimensione pari a 2, la costruzione della copula Archimedea dipende dalla scissione della distribuzione congiunta H in due distribuzioni marginali F e G attraverso una funzione $\lambda(t)$, positiva nell'intervallo $[0, 1]$, quindi avrò $\lambda(H(x_1, x_2)) = \lambda(F(x_1)) \lambda(G(x_2))$.

Se successivamente si pone la funzione generatrice della copula $\varphi(t) = -\ln(\lambda(t))$ per poter riscrivere la funzione H come la somma delle funzioni marginali F e G :

$$\varphi(H(x_1, x_2)) = \varphi(F(x_1)) + \varphi(G(x_2))$$

È possibile ora enunciare il teorema delle copule Archimedee, infatti sia $\varphi: I \rightarrow [0, \infty)$ una funzione continua e strettamente crescente tale che $\varphi(1) = 0$. Inoltre sia $\varphi^{[-1]}$ la funzione inversa di φ , allora:

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

è una copula se e solo se φ è convessa.

Qualora C_φ soddisfacesse tali condizioni, è possibile definirla copula Archimedeica il cui parametro φ è definito generatore, o più precisamente, funzione generatrice additiva di C : qualora $\varphi(0) = \infty$ allora il generatore sarà in senso stretto, come sarà in senso stretto anche la copula Archimedeica se $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ e quindi $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$. È possibile identificare la copula Archimedeica anche dalla proiezione diagonale di una copula, indicata con $\delta_c(u) = C(u, u)$, se $\forall u \in (0,1) \delta_c(u) < u$, quindi $C(u, v)$ sarà Archimedeica. Tale famiglia di copule ha anche delle proprietà espresse nel Teorema 4.1.5 in [Nelsen, 1999]:

- C è simmetrica, ovvero $C(u, v) = C(v, u) \forall u, v$ in $[0,1]$
- C è associativa, quindi $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \forall u, v, w$ in $[0,1]$
- Se $c > 0$ è una costante, allora $c\varphi$ è ancora una funzione generatrice di C .

Inoltre è possibile esprimere la densità della copula Archimedeica tramite la sua funzione generatrice e le relative derivate qualora esistesse la derivata seconda φ'' :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = - \frac{\varphi''(C(u, v)) \varphi'(u) \varphi'(v)}{(\varphi'(C(u, v)))^3}$$

Abbiamo detto che vi sono molte tipologie di copule Archimedee, tra cui quella di Clayton, di Gumbel e di Frank.

3.1.2.1 Copula di Gumbel

La copula di Gumbel [1960] presenta una funzione generatrice

$$\varphi(t) = (-\log t)^\theta \text{ con } \theta \geq 1$$

la cui pseudo-inversa è

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\theta})$$

è possibile ottenere la copula di Gumbel:

$$C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta]^{1/\theta}\}, \theta \geq 1$$

La cui densità è:

$$c_\theta(u, v) = (uv)^{-1} (\log u \cdot \log v)^{\theta-1} (w^{2/\theta-2} + (\theta-1) w^{1/\theta-2}) C_\theta(u, v),$$

in cui $w = (-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta$

L'impiego della copula di Gumbel si concretizza nel momento in cui la dipendenza più forte è propria dei valori di u e v prossimi a uno, questo perché questa famiglia di copule ammette coefficiente di dipendenza di coda superiore; per questo motivo viene consigliata per evidenziare fenomeni correlati a rischi di enorme entità. Quindi si ottiene:

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\theta}) \quad \text{e} \quad \varphi^{-1'}(t) = -t^{1/\theta-1} \exp(-t^{1/\theta})$$

e viene applicato il teorema che definisce una funzione φ generatrice in senso stretto di una generica copula archimedeica, e φ^{-1} la sua inversa. Se $\varphi^{-1}(0)$ ha dimensione finita allora

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

Non ha dipendenza di coda. Se invece $\varphi^{-1'}(0) = \infty$ allora C ha dipendenza di coda superiore e il suo coefficiente è dato da:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} [\varphi^{-1'}(2s)/\varphi^{-1'}(s)]$$

Quindi la copula di Gumbel avrà un coefficiente di dipendenza di coda superiore pari a:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\frac{\exp(-(2s)^{1/\theta})}{\exp(-s^{1/\theta})} \right] = 2 - 2^{1/\theta}$$

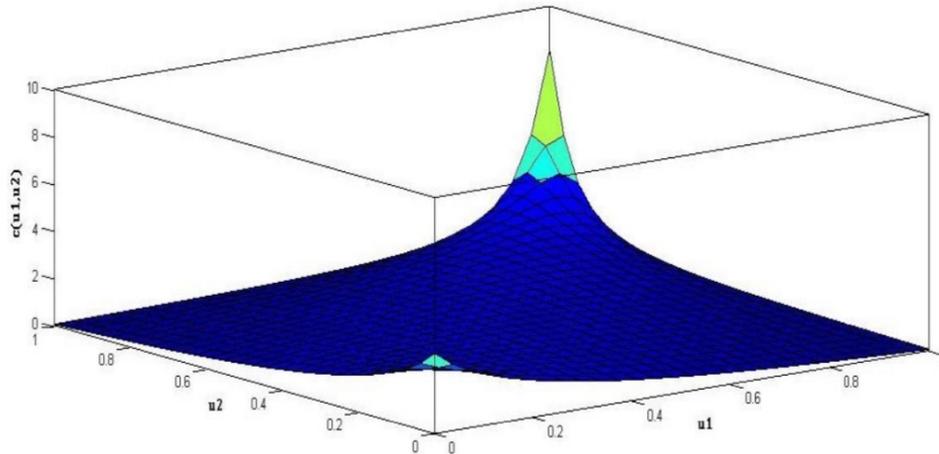


Figura n.12 - Funzione di distribuzione di probabilità di una copula di Gumbel, con $\theta = 1,6940$ il quale corrisponde al coefficiente di correlazione 0,6.

3.1.2.2 Copula di Clayton

La copula di Clayton [1978] avrà una funzione generatrice che corrisponde a

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^\theta - 1) \quad \text{con } \theta \geq 0$$

la cui funzione pseudo-inversa è:

$$\varphi^{-1}(t) = (\theta t - 1)^{-1/\theta}$$

è quindi possibile definire la copula di Clayton:

$$C_\theta(u, v) = \max \{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\} \quad \text{con } \theta \in [-1, 0] \cup (0, \infty)$$

La densità di tale copula è ottenuta partendo dall'assunto che $\theta > 0$, quindi:

$$c_{\theta}(u, v) = \frac{(\theta+1)(uv)^{\theta}}{(u^{\theta}+v^{\theta}-(uv)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}+2}}, \theta > 0$$

Il contesto di utilizzo di questa famiglia di copule è quando la dipendenza tra i valori minimi di u e v è maggiore della dipendenza tra i valori prossimi a 1, infatti la copula di Clayton ammette coefficiente di dipendenza di coda inferiore. Infatti avendo:

$$\varphi^{-1}(t) = (1 + \theta t)^{-1/\theta} \text{ e } \varphi^{-1'}(t) = (-1/\theta)(1 - \theta t)^{-1/\theta-1}$$

e applicando il teorema che afferma che data una φ funzione generatrice in senso stretto di una generica copula archimedeica e φ^{-1} la sua inversa, il coefficiente di dipendenza di coda inferiore per la copula $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ coincide con:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow \infty} [\varphi^{-1'}(2s)/\varphi^{-1'}(s)]$$

per cui avremmo:

$$\lambda_U = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + 2\theta s)^{-1/\theta-1}}{(1 + \theta s)^{-1/\theta-1}} \right] = 2 * 2^{-1/\theta-1} = 2^{-1/\theta}$$

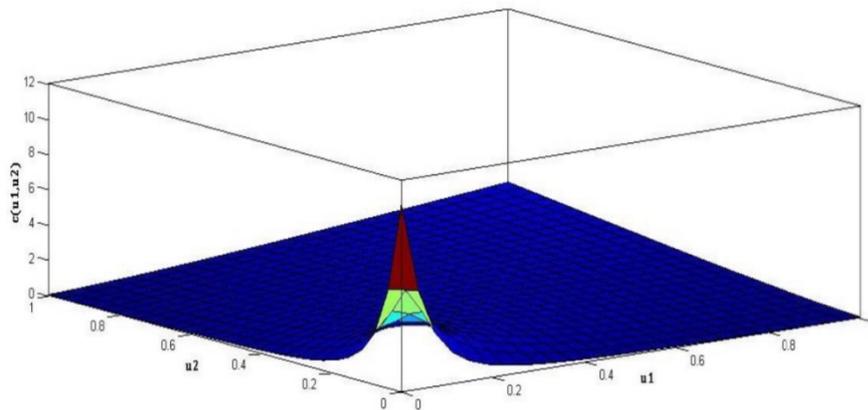


Figura n. 13 - Funzione di distribuzione di probabilità di una copula di Clayton, con $\theta = 1,6940$ il quale corrisponde al coefficiente di correlazione 0,6.

3.1.2.3 Copula di Frank

La funzione generatrice di quest'ultima è

$$\varphi(t) = -\log \frac{e^{\theta t} - 1}{e^{\theta} - 1}$$

invece la funzione pseudo-inversa è:

$$\varphi^{[-1]}(t) = -\frac{1}{t} \log (1 + e^{-t} (e^{-\theta} - 1))$$

Quindi è possibile delineare la copula di Frank:

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right), \text{ con } \theta \neq 0$$

La densità della copula è:

$$c_{\theta}(u, v) = \frac{\theta (1 - e^{-\theta}) e^{\theta(u+v)}}{(e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1))^2}$$

Quando la dipendenza della forza è molto simile per valori di u e v , la copula di Frank interviene. Essa non perde la proprietà della simmetria radiale, di conseguenza non ha né il coefficiente di coda superiore né il coefficiente di coda inferiore; si ha

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \log (1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-t}) \quad \text{e} \quad \varphi^{-1'}(t) = \frac{\frac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta})e^{-t}}{(1 - (1 - e^{-\theta})e^t)}$$

e applicando lo stesso teorema impiegato per le copule di Gumble, si ottiene:

$$\varphi^{-1'}(0) = -\frac{e^{\theta} - 1}{\theta} \neq \infty$$

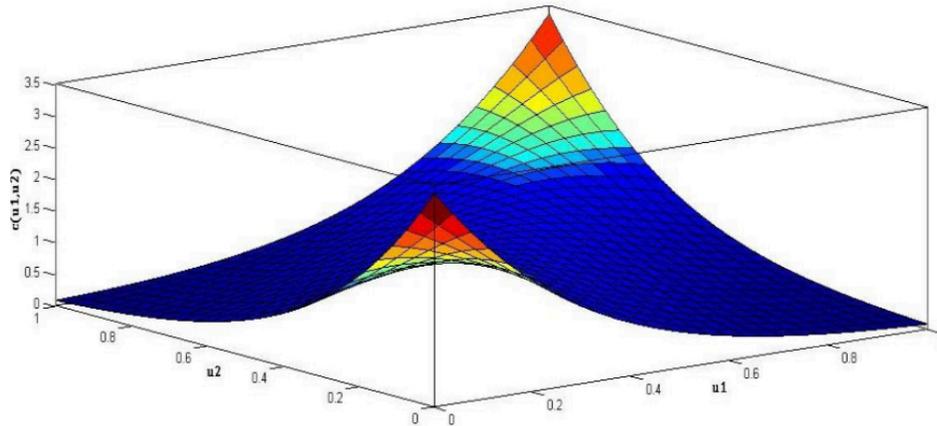


Figura n.14 - Funzione di distribuzione di probabilità di una copula di Frank, con $\theta = 4,3$ il quale corrisponde al coefficiente di correlazione 0,6.

Queste tre tipologie di copule sono le più utilizzate perché si adattano facilmente alle applicazioni, grazie alle loro strutture, che permettono loro di modellare molte tipologie di dipendenza lineare, in particolar modo quella della coda. Da tali copule posso essere estrapolate le copule di sopravvivenza.

3.1.3 Copule multidimensionali

La flessibilità e la varietà delle copule bi-variate, Ellittiche e Archimedee, permettono loro di spaziare tra i vari contesti e di risultare estremamente efficaci nell'analisi della struttura di dipendenza tra due variabili aleatorie. Fin ora la discussione è stata ristretta a copule bivariate, tuttavia le applicazioni di maggior interesse risultano essere quelle con $d \geq 3$. La costruzione per copule ellittiche e archimedee può essere estesa in maniera naturale a dimensioni maggiori. Le distribuzioni ellittiche, $Q_{d,R}$, di un vettore casuale $t = (t_1, \dots, t_d)$, verranno identificate dalla sua funzione di densità congiunta:

$$Q_{d,R} = |\Sigma|^{-1/2} k [(t-1)^T \Sigma^{-1} (t-1)]$$

In cui

- μ è un vettore d -dimensionale di medie;
- Σ rappresenta la matrice di covarianza definita positiva $d \times d$;
- $k(t)$ coincide con la funzione non negativa di una variabile integrale su R ;
- R , anche con gli elementi $R_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$ rappresenta la matrice di correlazione la quale definisce tutte le associazioni a coppie tra i componenti di t ;

Definita $Q_i(t_i)$ come la distribuzione marginale su t , è possibile scrivere la copula ellittica come:

$$Q_{d,R} = Q_{d,R} (Q_1^{-1}(u_1), \dots, (Q_d^{-1}(u_d))).$$

La copula Gaussiana è la copula ellittica multidimensionale più usata. Se identifichiamo $u_i = F(y_i)$ come i dati delle distribuzioni marginali, allora:

$$.. C_{\Sigma\rho}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{d, \Sigma\rho} (\Phi^{-1}(F_1(y_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_d(y_d))).$$

In cui:

- Φ rappresenta la distribuzione normale standard
- $\Phi_{d, \Sigma\rho}$ è la normale d -variata la cui media è zero, varianze unitarie e $\Sigma\rho$ matrice di covarianza e correlazione.

Le proprietà normali multivariate permettono di descrivere le associazioni di coppie tramite gli elementi fuori diagonale della matrice $\Sigma\rho$, di conseguenza, per coppie differenti di componenti del vettore Y , la forza dell'associazione può variare.

3.1.4 Inferenza Statistica per le copule

La stima dei parametri di copula è ottenibile tramite due diversi approcci: o viene racchiusa tutta la stima in un solo ed unico passaggio o attraverso due passaggi, come lo stimatore della massima verosimiglianza e una sua versione, chiama IFM (*Inference for the margins*), attraverso una previa stima delle distribuzioni dei parametri marginali per poi calcolarne l'associazione. Si ipotizzi un campione la cui dimensione è n (y_1, \dots, y_d), con $i = 1, \dots, n$. Accettando la continuità dei margini, è possibile impiegare un approccio semi-parametrico, mentre, selezionerà un approccio di tipo parametrico nel caso della copula. L'inclusione di tale approccio parametrico nel modello di copula semi-parametrico è funzionale per la distribuzione congiunta di due variabili trasformate $u_1 = F_1(y_1)$ e $u_2 = F_2(y_2)$ con distribuzioni marginali uniformi, ma non implica nessuna restrizione parametrica su F_1 e F_2 . Infatti la modellizzazione della copula è un processo volto a parametrizzare la distribuzione congiunta di u_1 e u_2 distintamente dalle distribuzioni marginali di F_1 e F_2

[Hoff, 2007]. Per la copula, la funzione di verosimiglianza è:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \prod_{i=1}^n c_{\alpha} \left(\hat{F}(y_{1_i}), \dots, \hat{F}(y_{d_i}) \right) \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^d f(y_{j_i})$$

in cui F è la funzione di distribuzione empirica. Nel caso frequentista, la stima dei parametri di copula si ottiene tramite la massimizzazione della funzione di verosimiglianza

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha=0} \mathcal{L}$$

in cui $\hat{\alpha}$ rappresenta lo stimatore di massima verosimiglianza relativo al parametro di associazione della copula C . Invece la scelta di un approccio parametrico completo produrrà una funzione di verosimiglianza differente. Per giungere a tale risultato Y_{ji} deve essere modellato per $j = 1, \dots, d$ come distribuzione di probabilità $F_j(y_{ji}; \theta_j)$; in base poi ad α , parametro di associazione, verrà scelto un modello di copula C , ottenendo così questa funzione di verosimiglianza:

$$\mathcal{L}(\alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n c_{\alpha} (F_1(y_{1_i}; \theta_1), \dots, F_d(y_{d_i}; \theta_d)) \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^d f_j(y_{j_i}; \theta_j).$$

In maniera analoga, attraverso la massimizzazione della funzione di verosimiglianza si otterrà:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) = \arg \max \mathcal{L}(\alpha, \theta),$$

in cui $\hat{\alpha}$ indica sempre lo stimatore di massima verosimiglianza relativo al parametro di associazione della copula C , invece il vettore dimensionale d proprio dei stimatori di massima verosimiglianza per i parametri marginale è $\hat{\theta}$. Quindi la stima della verosimiglianza potrebbe risultare complicata nel caso in cui uno o più margini risultano discreti oppure se i parametri della copula vengono stimati contemporaneamente ai parametri dei modelli parametrici [Smith et al., 2010]. Strutture marginali complesse o funzioni copula, richiedono una massimizzazione diretta della funzione di verosimiglianza, la quale però potrebbe essere di difficile applicazione.

3.1.4.1 Approccio Bayesiano

A colmare tale limite potrebbero esserci due diverse tipologie di approcci, una è utilizzare uno stimatore a due stadi, l'altra invece è usufruire di un algoritmo di punteggio iterativo per massimizzare la probabilità [Song et al., 2005]. Ma a tali soluzioni potrebbe aggiungersi un'altra alternativa di risoluzione; ovvero una catena di Markov Monte Carlo (MCMC) con un passaggio Hamiltoniano Monte Carlo (HMC) [Hoffman and Gelman 2014] per andare a valutare dei parametri marginali contemporaneamente alla costruzione di un'inferenza della distribuzione a posteriore dell'associazione. L'inferenza a posteriore approssimativa è possibile calcolarla anche tramite uno stimatore variazionale di Bayes (VB) [Jordan et al. 1999; Ormerod and Wand 2010] in caso di dimensione del campione molto elevata. La stima dell'inferenza fonda le sue radici su un'approssimazione Gaussiana la cui rappresentazione è sparsa tra i fattori della matrice di covarianza. Attraverso la stima del gradiente stocastico si ottiene uno stimatore VB della copula di regressione il quale può adattarsi a set di dati molto grandi [Stanley and Klein 2020]. Assumiamo ora che il campione sia (y_1, \dots, y_d) , $i = 1, \dots, n$. La scelta di un approccio semi-parametrico tramite una delimitazione non parametrica delle marginali, ha un duplice riscontro; nel caso in cui verrà specificato il processo dei parametri marginali si avrà un modello totalmente bayesiano, altrimenti si avrà una stima frequentista non parametrica dei marginali, definita con una funzione di distribuzione empirica. La funzione di verosimiglianza coinciderà in entrambi i casi:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \prod_{i=1}^n c_{\alpha} \left(\hat{F}(y_{1_i}), \dots, \hat{F}(y_{d_i}) \right).$$

$\pi(\theta)$ viene intesa come distribuzione a priori del parametro di associazione; per cui la distribuzione posteriore è:

$$\pi(\alpha | \hat{F}(y_{1_i}), \dots, \hat{F}(y_{d_i})) \propto \mathcal{L}(\alpha) \cdot \pi(\alpha).$$

La scelta di un approccio parametrico per la modellazione marginale, implica la definizione della distribuzione a priori dei marginali e dei parametri relativi alla copula. $\pi(\alpha)$ rappresenta la distribuzione a priori relativa al parametro di associazione e $\pi(\theta) = \prod_{j=1}^d \pi(\theta_j)$ corrisponde alla distribuzione a priori d-dimensionale per il vettore dei parametri marginali. Ipotizziamo che la densità f_1, \dots, f_d sia tale per le marginali, quindi la funzione di verosimiglianza è indicata da:

$$\mathcal{L}(\alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n c_{\alpha}(F_1(y_{1_i}|\theta_1), \dots, F_d(y_{d_i}|\theta_d)) \cdot \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^d f_j(y_{j_i}|\theta_j).$$

La distribuzione posteriore per i parametri di interessi è:

$$\pi(\alpha, \theta | F_1(y_1), \dots, F_d(y_d)) \propto \mathcal{L}(\alpha, \theta) \cdot \pi(\alpha) \cdot \pi(\theta)$$

e tramite la marginalizzazione si ottiene:

$$\pi(\theta_j | F_1(y_1), \dots, F_d(y_d)) = \int \dots \int \pi(\alpha, \theta) d\alpha d\theta_1, \dots, d\theta_{j-1} d\theta_{j+1}, \dots, d\theta_d$$

$$\pi(\alpha | F_1(y_1), \dots, F_d(y_d)) = \int \dots \int \pi(\alpha, \theta) d\theta_1, \dots, d\theta_d.$$

Ad eccezione del caso in cui la distribuzione a priori sia correlata con il modello statistico, è possibile evidenziare come risulti essere difficile fare inferenza in quanto sarà necessaria la risoluzione di numerosi integrali nell'ambito delle distribuzioni di probabilità. Sicuramente, tra i vari modelli più utilizzati per analizzare la distribuzione a posteriori qualora quest'ultima non sia in forma chiusa, sono i metodi Monte Carlo basati su catene di Markov (MCMC), poiché permettono di superare lo scoglio legato alle difficoltà riscontrate nel calcolo analitico o numerico di integrali a più dimensioni, così da ottenere degli stimatori che siano maggiormente completi e precisi. L'inferenza Bayesiana risulta essere il terreno fertile per l'applicazione degli algoritmi MCMC, funzionali all'ottenimento della densità a posteriori di θ , ovvero del vettore di parametri, che sono considerati delle variabili casuali. Come detto, il superamento del limite di calcolo analitico prende forma nel caso di calcolo di un integrale tramite simulazione. Generando una serie di replicazioni di $\theta^{(i)}$ della distribuzione a posteriori, si otterrà $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}\}$, definendo così uno stimatore non distorto di $h(\theta)$:

$$\hat{\mu}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\theta^{(i)})$$

$\theta^{(i)}$ sono identicamente distribuite, ma non devono essere necessariamente indipendenti in

quanto $\pi(\theta|y)$, la funzione di probabilità a posteriori, solitamente essendo multivariata, risulta complicato valutarne i valori indipendenti. Una possibilità non sempre applicabile però in quanto implica degli integrali in $d-1$ che spesso non sono noti, è impiegare le distribuzioni a posteriori marginali e quindi $\{\pi(\theta_1|y), \pi(\theta_2|y), \dots\}$. Tale approccio è relativo alla statistica Bayesiana, nella quale vengono evidenziate le difficoltà appena descritte; quindi ci si può avvicinare alla metodologia MCMC. Solitamente, prima cosa, si ha una matrice di transizione attraverso la quale si trova la distribuzione stazionaria della catena. Con i metodi MCMC si attua un processo inverso; la distribuzione stazionaria si definisce nota per cercare di ottenere la probabilità di transizione tra gli stati. Tramite il Teorema della Convergenza alla distribuzione stazionaria si ottengono delle condizioni per cui una catena di Markov ha distribuzione stazionaria, e quindi per $t \rightarrow \infty$, la matrice di conversione converge sulla distribuzione stazionaria. Quindi la probabilità di transizione in t passi dallo stato i a j , $p_{ij}^{(t)}$, tende ad un limite π_j che è indipendente dallo stato iniziale. L'ottenimento di una catena con distribuzione stazionaria π è strettamente dipendente dal definire una matrice di transizione P che vada a soddisfare le condizioni del Teorema della Convergenza della distribuzione stazionaria, per cui $\pi P = \pi$ e tale che, fornite le osservazioni $x \sim \pi(x)$, se $y \sim P(y, x)$, allora $y \sim \pi(y)$. [Brooks, 1998]. Ora scegliere se applicare il campionamento di Gibbs oppure l'algoritmo di Metropolis-Hastings dipende dalla congiunzione del modello. Il primo metodo potrà essere implementato, nel caso di ipotesi parametriche sui margini, risulta necessario che i parametri marginali delle distribuzioni a priori siano coniugati.

3.2 Metodi Markov-Chain Monte Carlo (MCMC)

I vari metodi MCMC sono rappresentati da un insieme di algoritmi necessari alla simulazione di distribuzioni di probabilità note, la funzionalità di tali metodologie è volta a superare i difetti legati al campionamento, tramite approccio bayesiano, per definire degli stimatori più precisi attraverso un processo ricorsivo con il quale verranno estrapolati dei valori dalla catena. Questi metodi sono fondati su una sequenza di variabili casuali, ovvero la catena di Markov, che deve godere della proprietà caratteristica della ergodicità, sono contraddistinte da una forte dipendenza. Tale processo è stocastico ed è definito da un *kernel di transizione*, K , che rappresenta una densità di probabilità condizionale tale che $X_{n+1} = K(X_n, X_{n+1})$. La catena verrà definita irriducibile qualora

tutto lo spazio degli stati possa essere teatro dei movimenti liberi del *kernel*. Questa condizione definisce la ricorrenza delle catene di Markov interne agli algoritmi MCMC, ovvero l'assegnazione, ad ogni catena, di un medesimo comportamento limite per quasi tutti i valori iniziali. [Robert and Casella, 2004]. L'efficienza di una MCMC è direttamente proporzionale alla minor tempo di *mixing*, ovvero il processo di convergenza che si attua partendo da una posizione arbitraria per poi finire alla distribuzione stazionaria [Levin and Wilmer; 2009]. L'introduzione di questi metodi è giustificata dal loro maggior dinamismo rispetto ad un classico metodo Monte Carlo inefficiente in condizioni di multidimensionalità della distribuzione di probabilità. Di quest'ultima si è a conoscenza esclusivamente, di una funzione proporzionale alla funzione di densità di probabilità, la quale, nel caso in cui riportasse dei valori positivi, il suo integrale relativo è definito tramite un metodo MCMC, nello specifico tramite l'algoritmo di Metropolis [Casella, Robert, 2011-2012]. Questo primo algoritmo getterà le basi per la successiva rivisitazione da parte di Hastings nel 1970 e per il campionamento di Gibbs, orientato alla rilevazione delle distribuzioni a priori.

Per descrivere l'algoritmo di Metropolis-Hastings, prima è necessario che, in una prospettiva bayesiana, ci si focalizzi sulla funzione multivariata di probabilità a posteriori $\pi(\theta|y)$ che per semplicità definiremo $\pi(x)$ abbia valori in stati, $S \subseteq \mathbb{R}^p$. Definita anche la matrice di transizione $P(z|x)$, la catena di Markov omogenea da origine ad una sequenza di vettori $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ tale da delineare:

$$P[z|x] = P[X^{(t)} \leq z | X^{(t-1)} = x^{(t-1)}, \dots, X^{(0)} = x^{(0)}] = P[X^{(t)} \leq z | X^{(t-1)} = x^{(t-1)}];$$

e poiché omogenea:

$$P [X^{(t)} \leq z | X^{(t-1)} = x] = P [X^{(1)} \leq z | X^{(0)} = x], \quad \forall x, z \in S, \quad \forall t = 1, 2, \dots, \infty$$

$Z \in S, P(z|x)$ è una funzione di ripartizione, ragion per cui la funzione di densità è raffigurata dalla sua derivata:

$$p(z|x) = \frac{\partial P(z|x)}{\partial z}$$

Come detto prima, la catena di Markov è ergodica, quindi, secondo il *Teorema Ergodico*, la distribuzione stazionaria π è unica. Appena superato il periodo iniziale, definito di *burn-in*, è possibile stimare μ_h con il vettore:

$$\mu_h = \int_S h(x)\pi(x) \partial x ,$$

$$\hat{\mu}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^n h(X^{(i)}) .$$

Il vettore invece sarà soggetto a campionamento se, dato uno stato generico $X^{(i)}$, $X^{(i+1)}$ diverrà z con la probabilità di un passaggio $\alpha(x,z)$ che rimarrà inalterato con probabilità $1 - \alpha(x,z)$; la stessa probabilità sarà:

$$\alpha(x,z) = \min\left[1, \frac{\pi(z)q(x|z)}{\pi(x)q(z|x)}\right] ,$$

in cui il rapporto $\frac{\pi(z)q(x|z)}{\pi(x)q(z|x)}$ è definito *ratio*.

Poiché la densità $q(z|x)$ campiona z , lo stesso stesso funzione $q(\cdot|\cdot)$, detta *Jumping distribution*, può assumere qualsiasi forma. La catena di Markov omogenea è costituita da i vettori $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$:

$$p(z|x) = \alpha(x,z)q(z|x) , \quad \forall x,z \in S \text{ con } x \neq z$$

inoltre se $\alpha(x,z) < 1$, $\alpha(x,z) = 1$ e viceversa, allora

$$\alpha(x,z)\pi(x)q(z|x) = \alpha(z,x)\pi(x)q(x|z) \Rightarrow 1\pi(z)q(x|z) ;$$

quindi la catena di Markov è *Time Reversal*, di conseguenza:

$$\pi_x p_{z|x} = \pi_z p_{x|z} .$$

π sarà quindi unica, rappresenta il limite della distribuzione a catena e una distribuzione stazionaria per la catena, la quale è ergodica. La catena dovrà essere ripetuta fin quando μ_h non sarà stimato così che l'effetto del valore iniziale possa svanire.

3.2.1 L'algoritmo di Metropolis-Hastings

L'algoritmo di Metropolis-Hastings getta le sue radici sia sulla densità *proposal* $q(z|x)$, che permette lo spostamento da x a z della catena di Markov, sulla probabilità di accettazione del $\alpha(x,z)$, funzionale a stabilire la proprietà di reversibilità. Hastings ha successivamente perfezionato l'algoritmo; l'idea di base è quella di considerare una distribuzione simmetrica, $q(z|x) = q(x|z)$, quindi:

$$\alpha(x,z) = \min (1; \pi(z)/ \pi(x))$$

se ora q è una distribuzione Normale:

$$q(z|x) \propto \exp [-(z-x)' \Sigma^{-1} (z-x)]$$

Il processo dell'algoritmo è articolato in varie fasi:

- $\pi(x)$ è necessario che venga avviato tramite un valore *start*
- tale procedimento verrà reiterato per ogni $t = 1,2,3,\dots, \infty$
- dato un vettore antecedente x_{t-1} , verrà simulato nuovo vettore dei parametri x_t^* relativo alla *Proposal o Jumping distribution*
- viene calcolato il *ratio*

$$r = \frac{\pi(x_t^*)}{\pi(x_{t-1})}$$

- viene assegnato un valore nuovo $X_t = x_t$:

$$X_t = \begin{cases} x_t^* & \text{Con probabilita' } \min(1,r) \\ x_{t-1} & \text{Con probabilita' } 1 - \min(1,r) \end{cases}$$

La distribuzione a posteriori, $\pi(x)$, rappresenta il parametro sul quale convergerà la sequenza X_t se sussistono le condizioni di regolarità, inoltre la buona stima di $\pi(x)$ è strettamente correlata alla lunghezza delle sequenze. Il valore u risulta cruciale; quest'ultimo viene simulato da una uniforme $(0, 1)$ e dal suo valore dipenderà l'accettazione o il rifiuto, infatti un valore di $u < \alpha(x_{t-1}, x_t^*)$ implicherà un valore di x che al tempo t diventa x_t^* , in caso contrario, x rimarrà x_{t-1} .

Nel 1970 Hastings generalizza il metodo proposto da Metropolis nel 1953 attraverso un'ipotesi secondo la quale è possibile escludere la simmetricità della *Proposal distribution* $q(\cdot|\cdot)$ comportando così una rettifica della regola di salto α :

$$r = \frac{\pi(x_t^*)/q(x_t^*|x_{t-1})}{\pi(x_{t-1})/q(x_{t-1}|x_t^*)} = \frac{\pi(x_t^*)q(x_{t-1}|x_t^*)}{\pi(x_{t-1})q(x_t^*|x_{t-1})}$$

Inoltre è possibile definire $q(\cdot|\cdot)$ come una *random walk*:

$$q(z|x) = g(z-x)$$

di conseguenza

$$z = x + \sigma^{1/2} Z$$

in cui Z rappresenta la realizzazione di una Normale $N(0, 1)$.

3.2.2 Il campionamento di Gibbs

Caso particolare dell'algorithmo di Metropolis-Hastings è il campionamento di Gibbs. Quest'ultimo è teso a superare le difficoltà di calcolo imposte da un campionamento troppo articolato. Il punto di partenza di questo algorithmo MCMC è una distribuzione di probabilità congiunta di due o più variabili casuali, e quindi di una probabilità multivariata, per poi arrivare ad una sequenza di campioni casuali, che viene impiegata per l'approssimazione o di una distribuzione congiunta o di una distribuzione marginale di una variabile. Generalmente utilizzato per l'inferenza bayesiana, può essere adattato anche al campionamento della della distribuzione a posteriori relativa ad una rete bayesiana. La semplicità di calcolo è strettamente correlata all'adattabilità del modello stesso a vari contesti, quali ad esempio quello dell'inferenza. Per far ciò è necessario identificare in $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ i tre parametri di interesse e in Y il totale dei dati disponibili. Si ipotizzi che anche se distribuzioni condizionate relative ad ogni singolo parametri

risultano disponibili, non può dirsi lo stesso della funzione di verosimiglianza del modello M . Sono conosciute quindi, le seguenti distribuzioni condizionate:

$$\mathcal{F}(\Delta_1|\Delta_2, \Delta_3, Y, M), \quad \mathcal{F}(\Delta_2|\Delta_1, \Delta_3, Y, M), \quad \mathcal{F}(\Delta_3|\Delta_1, \Delta_2, Y, M)$$

\mathcal{F} rappresenta la distribuzione di un singolo parametro condizionata sia agli altri due che ai dati del modello. Successivamente, non sarà necessario normalizzare quanto lo sarà l'estrapolazione da ogni distribuzione condizionata, della relativa realizzazione casuale. Quest'operazione ha il fine di generare dei valori, partendo dal valore arbitrario di due elementi del vettore dei parametri $\Delta_{2,0}, \Delta_{3,0}$, definito start:

- da $\mathcal{F}(\Delta_{1,1}|\Delta_{2,0}, \Delta_{3,0}, Y, M)$ viene estrapolato il valore per $\Delta_{1,1}$
- da $\mathcal{F}(\Delta_{2,1}|\Delta_{1,1}, \Delta_{3,0}, Y, M)$ viene estrapolato il valore per $\Delta_{2,1}$
- da $\mathcal{F}(\Delta_{3,1}|\Delta_{1,1}, \Delta_{2,0}, Y, M)$ viene estrapolato il valore per $\Delta_{3,1}$

ottenendo così Ω_1 tramite la delineazione di un'iterazione del campionamento di Gibbs. La reiterazione di tale processo avviene fin quando non vengano definiti m vettori,

$$(\Delta_{1,1}, \Delta_{2,1}, \Delta_{3,1}) \dots (\Delta_{1,m}, \Delta_{2,m}, \Delta_{3,m}) .$$

La distribuzione congiunta dei tre parametri, $\mathcal{F}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3|Y, M)$, è approssimata alquanto bene dalla serie dei vettori trovata in caso di m sufficientemente grande e sotto alcune condizioni di regolarità. I successivi campionamenti verranno ritenuti convergenti alla distribuzione, $\mathcal{F}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3|Y, M)$, una volta ottenuto un numero sufficientemente grande di m iterazioni; verrà fatta inferenza sui parametri una volta rifiutati i primi m campionamenti e impiegando i successivi $(n-m)$:

$$(\Delta_{1,m+1}, \Delta_{2,m+1}, \Delta_{3,m+1}) \dots (\Delta_{1,n}, \Delta_{2,n}, \Delta_{3,n})$$

Ai fini di ottenere una funzione che sia proporzionale alla distribuzione a posteriori, $\mathcal{F}(\Delta_i, \Delta_{j \neq i}, \Delta_{l \neq \{i,j\}}|Y, M)$, basta impostare delle distribuzioni a priori sia dei parametri che della funzione di verosimiglianza del modello. Il campionamento di Gibbs funzionale all'inferenza è il risultato di una lunga catena ottenuta con tale processo e dopo il periodo di *burn-in*, ovvero dopo lo scarto delle prime m realizzazioni che garantiscono una relativa vicinanza tra le successive realizzazioni e la distribuzione congiunta dei parametri. In ogni catena, l'ultima iterazione formerà il campionamento di Gibbs.

3.3 Approccio non parametrico per le distribuzioni marginali: Metodo della verosimiglianza dei ranghi

La crisi finanziaria del 2008 è stata come una Caterpillar che ha abbattuto una casa costruita sui mattoni della fiducia delle teorie finanziarie convenzionali in quanto si sono rivelate inabili nell'evidenziare e spiegare realisticamente il rischio. Questa conseguenza è il frutto della discrepanza tra l'andamento realistico dei mercati e l'impostazione delle strategie tradizionali di *asset pricing* per la formulazione di ipotesi di mercato. Tali strategie si basano su una distribuzione Normale, la quale è definita negativamente da Nassim Nicholas Taleb come "*grande frode intellettuale*" in quanto "*ignora le grandi deviazioni, non riesce a gestirle, eppure ci fa credere di aver domato l'incertezza*" [Taleb, 2007]. Infatti la distribuzione normale implica una sottostima del rischio e della volatilità, derivante dalla gran parte della variazione delle attività la quale rientra in 3 deviazioni standard della sua media. Ma l'andamento del mercato non ha seguito sempre questa linea, evidenziando delle code definite più "pesanti" rispetto a quanto tradizionalmente previsto. Tale caratteristica è un fenomeno statistico che riflette una leptocurtosi di grandi dimensioni; il che permette il concretizzarsi con maggior probabilità degli eventi come la crisi finanziaria, ovvero estremi. L'imprevedibilità delle code spesse quindi implica un possibile impatto devastante sui rendimenti del portafoglio da parte degli eventi propri della coda sinistra; per tale motivo una copertura del rischio di coda è un argomento fondamentale da includere nella protezione di un portafoglio. Le code pesanti rappresentano una distribuzione di probabilità che prevede movimenti di tre o più deviazioni standard, più frequentemente di una distribuzione normale, la quale sottostima i rendimenti delle azioni, i prezzi delle attività e le conseguenti strategie di *risk management*. Ma le code grasse non riflettono solo eventi potenzialmente catastrofici, ma anche periodi di stress finanziario, giustificando così la continua rilevanza di tali fenomeni nel settore ed inclinando maggiormente la posizione delle misure tradizionali di rischio in quanto pongono attenzione ai primi due momenti, risultando inefficaci nel carpire totalmente il rischio reale nella distribuzione dei rendimenti del mercato. Caratteristica di quest'ultima è l'asimmetria, che è definita dal rischio stesso e che rende allo stesso tempo la diversificazione del rischio difficile. Inoltre, nei rendimenti finanziari, sono individuate delle evidenze di skewness negativa e leptocurtosi le quali cozzano appunto, con una distribuzione dei rendimenti condizionata, assunta come

normale. Questo contrasto è il frutto della natura della distribuzione in quanto è considerata simmetrica e mesocurtica, e quindi non conforme ad interpretare dati con caratteristiche non conformi a tali congetture. L'asimmetria nelle serie è giustificata da un diverso approccio degli operatori riguardo le aspettative di perdita rispetto a quelle di mancato guadagno: infatti la tendenza del mercato azionario ad essere più ribassista che tendente al rialzo è tradotta da variazioni decrescenti più estese rispetto alle crescenti. Vi sono stati molti autori che hanno testato questo fenomeno, tra i quali Kim e White [2003] che, una volta assunto la media come una misura non robusta e quindi inadatta anche a misurare skewness e curtosi, hanno ricercato delle nuove forme di misura robuste di skewness e curtosi, le quali sono state poi confrontate con delle misure convenzionali con l'ausilio delle simulazioni Monte Carlo.

Quindi è possibile non solo strutturare un'ipotesi più chiara circa il comportamento dei rendimenti del mercato tramite l'impiego di nuove misure di asimmetria e curtosi, ma anche dimostrare come le assunzioni dei log-rendimenti gaussiani siano inadeguate.

Il raro soddisfacimento della normalità e di altre assunzioni che giustificano l'applicazione di metodi parametrici funzionali a risolvere problemi di tipo univariato e multivariato, ha inciso sul passaggio ad un approccio non parametrico, eludendo tanti limiti caratteristici dell'approccio parametrico, quali un campione meno numeroso delle variabili, la normalità non è applicabile o le variabili sulle quali è rivolta l'inferenza sono di tipo qualitativo. I dati caratteristici di questo approccio sono gli *score* e le votazioni impiegate dagli osservatori nella valutazione di diverse tipologie di fenomeni; ma, in ogni caso, la scala fa riferimento a livelli qualitativi di espressione del fenomeno che sono tra loro differenti e trasformati numericamente solo per convenzione. È stato detto precedentemente, che Kim e White hanno definito la media come un indicatore di misura non robusto; invece la mediana rappresenta uno stimatore robusto e quindi risulta più semplice derivare la distribuzione della statistica test per ogni variabile casuale continua.

$$\Pr(X \geq \text{Me}) = \Pr(X \leq \text{Me}) = \frac{1}{2}$$

Alternativamente è possibile ricorrere alla variabile casuale rango (*rank*) il quale individua la grandezza di uno specifico valore relativa a quella di altri valori della serie. In particolar modo, i test fondati sui ranghi hanno un peso notevole. Il loro obiettivo è quello di testare se h campioni casuali X_1, X_2, \dots, X_h la cui dimensione è n_1, n_2, \dots, n_h (N

= $n_1 + n_2 + \dots + n_k$), appartengono tutti alla medesima popolazione. L'ipotesi nulla è possibile verificarla con un test dei ranghi:

$$H_0: E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_h)$$

Contro l'alternativa:

H_1 : la stessa media non è propria per tutte le distribuzioni.

Ma l'ipotesi nulla è verificata solo se valgono le seguenti condizioni [Conover, 1980]:

- Da ogni popolazioni vengono estratti i relativi campioni;
- Esiste una doppia forma di indipendenza, tra i vari campioni e internamente ad ogni campione;
- La scala di misura è almeno ordinale
- La differenza che vi è tra le funzioni di distribuzione relative alle h variabili casuali, è definita differenza di posizione che si concretizza in una differenza tra media qualora sia una distribuzione normale.

[Hoff, 2007] presenta un approccio Bayesiano semi-parametrico per inferenza su copule gaussiane multivariate modellando le marginali non parametricamente tramite il metodo della verosimiglianza dei ranghi. L'idea della tesi è di riportare, nell'ambito dell'asset allocation, la suddetta metodologia al fine di superare le problematiche relative al trattamento dei log-rendimenti finanziari con distribuzioni gaussiane e tenere in considerazione molteplici forme di dipendenza e non solo quella lineare.

3.4 Portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule

L'efficienza dei modelli Bayesiani circa la formulazione e la valutazione dei modelli multivariati, non ha comunque permesso loro di essere tra gli approcci più impiegati, a differenza della stima della massima verosimiglianza completa o in due fasi [Joe, 2005] e il metodo degli stimatori dello stile dei momenti in dimensioni ridotte [Genest e Rivest, 1993]. Uno dei metodi di selezione delle copule bi-variate è da attribuire a Huard et al. [2006] e a Dos Santos Silva e Lopes [2008] che impiegano dei metodi MCMC per definire le funzioni di copula parametrica a bassa dimensione. Il campionamento della catena di Markov Monte Carlo è funzionale per delineare la distribuzione a posteriori come espresso da Sahu et al. [2003] che definiscono la *skew t distribution* come una gaussiana, definita esplicitamente nello schema di campionamento.

Altro impiego dell'approccio MCMC è attribuito a Min e Czado [2010] grazie al quale hanno stimato le *vine copulas* con margini continui. Attraverso la stima di marginali con la probabilità di rango, è stato proposto da Hoff [2007] un campionatore di copule gaussiane semi-parametriche. L'inferenza su quest'ultime è stata ottenuta tramite un metodo bayesiano Monte Carlo approssimativo studiato da Grazian e Liseo [2017]. Altro metodo Bayesiano non parametrico che considera le covarianze durante il calcolo della densità di copula ed è funzionale a definire le copule condizionali bivariate è stato apportato da Dalla valle et al, [2018].

Due approcci differenti, quali modelli uni-variati parametrici gaussiani e di Poisson, non forniscono dei risultati che siano compatibili fra loro in quanto dati $f_1(y_1|y_2, \mathbf{x})$ e $f_2(y_2|y_1, \mathbf{x})$, due modelli condizionali, vi sarà una distribuzione di probabilità congiunta, $p(y_1, y_2|\mathbf{x})$, solo in condizioni specifiche in cui f_1 e f_2 rappresentano due sue distribuzioni condizionate. Il problema sorge quando si necessita l'analisi di differenti dati multivariati in quanto l'assenza di un approccio adatto, viene sostituita da modelli di regressione uni-variati i quali definiscono la variabile che corrisponde alla risposta più adatta. Ciononostante diverse variabili scelte corrispondono a diversi modelli incompatibili per conclusioni apportate. Per superare tale limite è possibile seguire due strade; metodi non parametrici che forniscono flessibilità e costruzioni di modelli pair- copula che riflettono la copula multivariata come prodotto di pair-copula. Wu et al. [2014] ha presentato un modello di inferenza bayesiana non parametrica riguardante copule multidimensionali le quali si integrano con una copula multivariata skew-Normal. Lo stesso autore, nel [2015] ha evidenziato che, nella combinazione della densità delle copule bidimensionali con le copule Gaussiane, ogni densità di copula bi-variata è approssimata da una miscela infinita di funzioni di densità di copula gaussiana. Sempre Wu et al [2014] ha delineato un approccio DPM dotato di una copula multivariata skew-Normal che riflette la densità del *kernel*. Anche se le proprietà e la facilità di trattazione hanno reso la copula Gaussiana una delle più utilizzate, la proprietà simmetrica impedisce un'efficace trattazione distorta dei dati. Tuttavia la metodologia parametrica per stimare le marginali non impedisce l'incremento del costo computazionale anche con l'inserimento di un altro parametro nel modello copula. È necessario quindi superare i problemi di modellizzazione delle copule multidimensionali per cercare di ottenere la miglior approssimazione di ogni classe di copula simmetrica. Al fine di fornire la stima di portafoglio semi-parametrica Bayesiana,

adottiamo un approccio in due fasi. In particolare, deriviamo prima la probabilità di rango [Hoff, 2007] per il trattamento marginale e successivamente attingiamo dalla distribuzione posteriore dei parametri della matrice della copula tramite il campionamento di Gibbs.

3.4.1 Stima della verosimiglianza di rango

Più specificatamente definiamo la verosimiglianza di rango. Supponiamo $(y_{1,1}, \dots, y_{1,d}), \dots, (y_{n,1}, \dots, y_{n,d})$ rappresentano i campioni relativi ad una popolazione che verrà modellata con una copula gaussiana. Qualora le distribuzioni marginali $F_j, j = 1, \dots, d$, sono continue e note, quindi i valori $z_{i,j} = \Phi^{-1} [F_j (y_{i,j})]$ potrebbero essere trattati come dati osservati ed è possibile stimare ρ tramite gli z , anche impiegando possibilmente lo stimatore corretto $\rho^\wedge = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{i,1} z_{i,2}$; inoltre le marginali non sono note. Una tipologia di stima semi-parametrica comprende il collegamento tra le funzioni di ripartizione empiriche F_1^* e F_2^* per ottenere degli pseudo dati $z_{i,j}^* = \Phi^{-1} [\frac{n}{n+1} F_j^*(y_{i,j})] \equiv \Phi^{-1} [F_j^*(y_{i,j})]$, in cui il *rescaling* è funzionale ad evitare infiniti. Se i dati sono continui, lo stimatore $\rho^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{i,1}^* z_{i,2}^*$, risulterà asintoticamente equivalente al coefficiente di correlazione rango asintoticamente efficiente dei punteggi normali di Van der Weerden [Hájek and Šidák (1967); Klaassen and Wellner (1997)]. La somiglianza di tale stimatore con quello di [Genest et al, 1995] è lampante e quest'ultimo è il risultato di una stima di pseudo-verosimiglianza molto più generale.

3.4.2 Inferenza Bayesiana per copula Gaussiana multivariata

Nella notazione seguiamo [Barone, 2020]. Sia $(u_{1i}, \dots, u_{di}) = (F(y_{1i}), \dots, F(y_{di})), i = 1, \dots, n$ sia i.i.d. osservazioni definite in I^d . Sia $\Sigma \equiv R \in \Theta$ la matrice di covarianza $d \times d$ della copula Gaussiana d -dimensionale. Per sfruttare la coniugazione con il modello della copula Gaussiana multidimensionale, definiamo la distribuzione a priori sulla matrice della copula Σ come distribuzione di Wishart inversa d -dimensionale:

$$\pi(\Sigma) \equiv \mathcal{W}_d^{-1}(S_0, \eta),$$

che in forma esplicita è:

$$\pi(\Sigma) = \frac{|S_0|^{\eta/2}}{2^{\eta d/2} \Gamma_d(\eta/2)} |\Sigma|^{-(\eta+d+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} S_0 \cdot \Sigma^{-1}\right),$$

in cui S_0 è una matrice di scala definita positiva e $\eta > d-1$ sono i gradi di libertà.

Scriviamo la funzione di verosimiglianza per il modello di copula d -dimensionale come:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \prod_{i=1}^n \left(|\Sigma|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_{1i}) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_{di}) \end{pmatrix}^T \cdot (\Sigma^{-1} - I) \cdot \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(u_{1i}) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_{di}) \end{pmatrix}\right) \right),$$

$$\mathcal{L}(\Sigma) = |\Sigma|^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}^T \cdot (\Sigma^{-1} - I) \cdot \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}\right).$$

Deriviamo la densità a posteriori delle matrici di correlazione $\pi(\Sigma | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$ come

$$\pi(\Sigma | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) = G_0(\Sigma) \cdot \mathcal{L}(\Sigma),$$

riscritta in forma esplicita è:

$$\pi(\Sigma | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) = \frac{|S_0|^{\eta/2}}{2^{\eta d/2} \Gamma_d(\eta/2)} |\Sigma|^{-(\eta+d+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} S_0 \cdot \Sigma^{-1}\right) \times$$

$$|\Sigma|^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}^T \cdot (\Sigma^{-1} - I) \cdot \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}\right),$$

in cui $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma multivariata d -dimensionale. Si nota che $\pi(\Sigma^* | \psi, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$ è ancora un'inversa di Wishart:

$$\pi(\Sigma | \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) \equiv \mathcal{W}^{-1} \left(S_0 + \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}, \eta + n_h \right)$$

in cui S_0 è la matrice della scala precedente η e rappresenta la prior sui gradi di libertà, mentre la matrice $n \times d$ è

$$\begin{pmatrix} \Phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1}(\mathbf{u}_d) \end{pmatrix}$$

3.4.3 Portafoglio a varianza minima

Tra tutti i possibili portafogli, il Portafoglio a Varianza Minima ha la varianza minore, motivo per cui sarà tale portafoglio verrà selezionato da un investitore avverso al rischio rispetto ad un altro portafoglio che offre sì un maggior rendimento ma anche un maggior rischio.

Al fine di trovare il portafoglio a varianza minima bisogna minimizzare la seguente funzione:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^k \omega_i^2 \text{Var} R_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \omega_i \omega_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

tale che:

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k = 1$$

Per tale problema, la funzione di Lagrange è:

$$\begin{aligned} L(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \lambda) = & \sum_{i=1}^k \omega_i^2 \text{Var} R_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \omega_i \omega_j \text{Cov}(R_i, R_j) \\ & + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k - 1) \end{aligned}$$

Le condizioni per il primo ordine del minimo sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_1} &= 2\omega_1 \text{Var}R_1 + 2 \cdot \sum_{i \neq 1}^k \omega_i \text{Cov}(R_1, R_i) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_2} &= 2\omega_2 \text{Var}R_2 + 2 \cdot \sum_{i \neq 2}^k \omega_i \text{Cov}(R_2, R_i) + \lambda = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_k} &= 2\omega_k \text{Var}R_k + 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \text{Cov}(R_k, R_i) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k - 1 = 0 \end{aligned}$$

Attraverso la matrice, è possibile minimizzare il problema appena espresso:

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$$

tale che

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} = 1$$

Ora si avrà una nuova funzione di Lagrange:

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda) = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} - 1)$$

La condizione del primo ordine per il problema di minimizzazione espresso tramite la matrice, è possibile esprimerlo in tal modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\partial \boldsymbol{\omega}^T} &= 2 \cdot \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} + \lambda \cdot \mathbf{1} = 0 \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\partial \lambda} &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

rispetto a $\boldsymbol{\omega}$ è possibile ottenere

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

che combinata con la seconda derivata è possibile risolvere rispetto a λ

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\omega} &= -\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \implies \\ \lambda &= -\frac{2}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned}$$

Sostituendo λ alla prima derivata si risolve il problema, ottenendo così il portafoglio di varianza minima:

$$2 \cdot \Sigma \omega = -\lambda \cdot \mathbf{1} = \frac{2 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \implies$$

$$\omega_{\text{MVP}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

Quindi il rendimento atteso μ_{MVP} e il rischio σ_{MVP}^2 relativi al portafoglio con varianza minima sono:

$$\mu_{\text{MVP}} = \omega^T \mathbf{m} = \left(\frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^T \cdot \mathbf{m} = \frac{\mathbf{1}^T (\Sigma^{-1})^T \mathbf{m}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{m}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

e

$$\sigma_{\text{MVP}}^2 = \omega^T \Sigma \omega = \left(\frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^T \cdot \overbrace{\Sigma \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{1}}^I = \frac{\mathbf{1}^T (\Sigma^{-1})^T}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \cdot \frac{I \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

In cui I rappresenta la matrice Identità con dimensione uguale alla matrice di covarianza.

3.5 Studio di simulazione

Al fine di testare la nuova metodologia proposta e confrontarla con il modello di Black-Litterman, è stato effettuato uno studio di simulazione in diversi scenari. L'idea è di verificare che in un contesto di normalità dei log-rendimenti, le performance, tra il portafoglio di B-L e portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, siano equivalenti in termini di stima di pesi di portafoglio a varianza minima. Abbiamo simulato 100 campioni di log-rendimenti di tre serie storiche di 500 osservazioni. Queste serie sono simulate da distribuzioni normali con media nulla, le dipendenze sono simulate con una copula gaussiana, con elementi diagonali della matrice Sigma unitari e correlazioni $\rho_{1,2} = 0.4$, $\rho_{1,3} = 0.4$ $\rho_{2,3} = -0.4$. I pesi di portafoglio sono dunque $\omega_1 = 0.18$, $\omega_2 = 0.41$, $\omega_3 = 0.41$. Di seguito sono elencati i risultati ottenuti dall'implementazione dei due modelli sugli stessi *dataset*:

	Portafoglio BL	Portafoglio Bayesiano SP
E(ω_1)	0,23	0,22
E(ω_2)	0,39	0,39
E(ω_3)	0,38	0,39
SD(ω_1)	0,03	0,03
SD(ω_2)	0,02	0,02
SD(ω_3)	0,02	0,02
E($\rho_{1,2}$)	0,55	0,29
E($\rho_{1,3}$)	0,56	0,29
E($\rho_{2,3}$)	-0,18	-0,09

Tabella 1: Risultati propri dei due portafogli relativi a Valore atteso dei pesi [$E(\omega_i)$], Standard deviation dei pesi [$SD(\omega_i)$] e valore atteso delle correlazioni [$E(\rho_{i,j})$]

I pesi sono ben stimati da entrambi i modelli, anche se nella stima della matrice di copule il metodo proposto performa meglio, dato che cattura anche le forme di dipendenza non-lineari.

IV. PORTAFOGLI A VARIANZA MINIMA NELL'EPOCA DEL COVID-19

4.1 Analisi descrittiva dell'impatto del Covid-19 sui mercati finanziari

La pandemia di Coronavirus è considerata una delle maggiori crisi mondiali del dopoguerra in quanto, dopo essere partita da Wuhan, in Cina, verso la fine del 2019, si è propagata a macchia d'olio prima in Giappone e Corea del Sud, poi in Italia per poi ampliare considerevolmente il bacino di nazioni coinvolte per tutto il globo. La criticità è il risultato dell'impatto che questo virus ha avuto su vari livelli; una portata molto vasta che ha colpito più duramente la perdita di vite umane, poi il sistema sanitario impreparato a fronteggiare una situazione di così ampia gamma, le condizioni psicologiche precarie dipese dalle rigide manovre di blocco adottate, soprattutto in Italia, e l'economia mondiale la quale è rovinosamente caduta in una profonda crisi. Eccezion fatta per quello sanitario, il settore più colpito è stato sicuramente quello bancario, le cui condizioni hanno fatto riaffiorare dei parallelismi con gli effetti della crisi finanziaria globale del 2008, come i prestiti bancarie zombie, salvataggi bancari costosi, politiche economiche di sostegno difficile da architettare e attuare e accumulazione del debito sovrano. La crisi del 2008 ha evidenziato i limiti della regolamentazione del rischio di mercato introdotta nel 1996 dal Comitato di Basilea, e nello specifico del VaR, il quale sottostima il rischio nei mercati molto sensibili e turbolenti. Per tale motivi, nel 2019, è stato incluso il passaggio tra Var a *Expected Shortfall* (ES) per apportare delle miglione nel calcolo del rischio di coda, e anche gli orizzonti temporali variabili: 10 giorni per azioni *large cap*, 20 giorni per azioni *small cap* e un limite massimo di 120 giorni per determinate categorie di rischio. L'impatto della crisi del Covid-19 sui mercati finanziari globali può essere esplicitato se, per esempio, vengono presi in considerazione, gli indici di mercato S&P 500 (*spx*), FT-SE 100 (*ftse*), DAX (*dax*), Nikkei 225 (*nky*) e Shanghai Composite (*sse*), ma anche delle materie prime tra cui i prezzi spot del petrolio greggio Brent Europa (petrolio), i prezzi spot dei gas naturale Henry Hub (gas), i prezzi fissi dell'oro di Londra PM (oro), i contratti futures del rame del 20 luglio (cop-per) e il contratto futures Sugar #11 Ottobre 20 (zucchero) da Gennaio 2019 a Gennaio 2020. Ipotizziamo un rapporto tra l'ES medio relativo agli ultimi cinque *trading days* del periodo la cui conclusione è datata 23 Giugno 2020, e l'ES medio dei primi 5 *trading days* a partire dal 23 Gennaio 2020, il cui risultato

finale siano i moltiplicatori per la simulazione storica. La stima di quest'ultimi verrà calcolata su tre differenti orizzonti temporali: 1 giorno, 10 giorni e 20 giorni. I rendimenti dei primi quattro indici menzionati, *spx*, *ftse*, *dax* e *nky*, presentano un trend caratterizzato da un incremento del livello di rischio analogo, infatti, in base all'orizzonte di rischio; quest'ultimo ha presentato un incremento che oscilla dalle 3 alle 6 volte superiore. Invece l'indice *sse* non ha presentato un incremento delle stime di rischio ES in quanto il moltiplicatore assume un valore inferiore ad uno. Non si può dire lo stesso per l'oro, il rame e lo zucchero, in quanto si evidenzia un livello di rischio maggiorato del doppio, a differenza del petrolio che ha presentato delle stime di rischio considerevolmente aumentate durante la crisi. Si nota come il moltiplicatore per l'orizzonte di rischio a 10 giorni sia maggiore di quello a un giorno e quello per l'orizzonte di 20 giorni è più ampio, anche se sarebbe dovuto esserci un pari livello dei moltiplicatori, a prescindere dall'orizzonte temporale, se a validità della regola della "radice quadrata del tempo" fosse rimasta integra. Ciò sta ad indicare una maggior incidenza della crisi finanziaria da Covid-19 sui rischi il cui è orizzonte maggiore rispetto a quelli con un orizzonte temporale breve [Lazar and Zhang, 2020; Billio and Varotto, 2020].

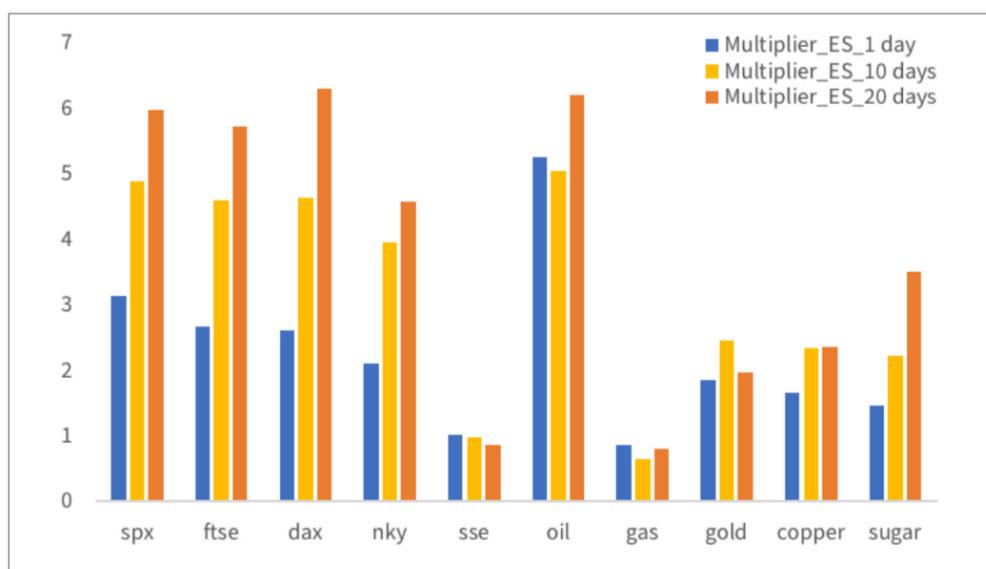


Figura n.15: Moltiplicatori per HSES al 97.5%

Il metodo HS presenta però delle debolezze in quanto la simulazione storica risulta essere un metodo non sufficiente a misurare gli eventi estremi del mercato dall'inizio del 2020;

proprio per questo motivo sarà necessario un miglioramento del modello di rischio di mercato.

Nonostante il Coronavirus abbia messo la parola fine ad un decennio in cui il mercato, soprattutto quello statunitense, era in rialzo, la propensione al rischio degli investitori è stata maggiore, facendo registrare un 35% di propensione verso i prodotti più rischiosi, in quanto una riduzione dei prezzi, a partire da Febbraio, ha rappresentato un'opportunità di speculazione su molti investimenti. Infatti, in un sondaggio di *Schroder*², tra il 30 aprile e il 15 giugno 2020, si è mostrato come l'estrema volatilità di tale periodo ha reso gli investitori più consapevoli del valore in quanto, nel breve termine, il rally registrato dai mercati azionari rispetto a quello che hanno fatto registrare i dati economici, potrebbe aver fatto fruttare determinate azioni. Inoltre, lo scoppio della pandemia ha cambiato rotta al 18% degli intervistati, in quanto il riposizionamento del portafoglio ha visto una parte significativa sulla liquidità, la quale riflette un duplice approccio dell'investitore: considerata un bene rifugio in tempi di crisi oppure una ricerca incessante tramite la vendita di azioni. Questo ci fa capire come il Covid-19 possa aver modificato molti meccanismi che sembravano già consolidati e tale cambiamento ha coinvolto anche l'*asset allocation* in maniera trasversale. È stato coniato un nuovo termine da Clayton Christensen, professore di Harvard: *digital disruption*. Quest'ultimo è un fenomeno innovativo, che rimanda alla rottura degli schemi precedenti e che strizza l'occhio a nuovi modi di investire. La scintilla che ha innescato questo meccanismo è stata la celerità del progresso e dell'innovazione che è penetrata nelle nostre vite ed ha fornito una nuova struttura di quotidianità, di lavoro e di scelte finanziarie.³

Una recente analisi [Ramelli and Wagner, 2020] offre una documentazione su determinati fatti dell'andamento del mercato azionario globale. Prima di tutto, vengono definite cronologicamente le fasi del virus in quattro fasce: dal 2 gennaio al 17 Gennaio (incubazione), dal 20 Gennaio al 21 Febbraio (focolaio), dal 24 febbraio al 20 Marzo (febbre) e dal 23 Marzo all'8 Giugno (recupero). Definiti i prezzi azionari, questi verranno

² <https://www.schroders.com/it/it/investitori-privati/approfondimenti/global-investor-study/shock-del-mercato-come-hanno-reagito-gli-investitori-allimpatto-del-covid-19/>

³ https://www.tgcom24.mediaset.it/economia/jp-morgan-am-l-impatto-della-digital-disruption-sui-mercati-finanziari_27626601-202102k.shtml

adeguati per dividendi e frazionamenti azionari, mantenendo esclusivamente azioni ordinarie quotate nelle borse valori principali in tutti i paesi coperti dall'indice MSCI EQWI index. Si evidenzia come i due trimestri considerati siano lo scenario di una riduzione costante del valor medio per tutti i paesi, come Polonia, Turchia e Arabia Saudita abbiano registrato i migliori risultati per le imprese medie a differenza di Messico, Brasile e Sud Africa e come la miglior performance ponderata per il valore sia attribuita alla Cina, Arabia Saudita e Danimarca. Inoltre i periodi di febbre e recupero so stati caratterizzati rispettivamente da rendimenti medi negativi e positivi calcolati per il loro valore.

Come stato detto, la grande volatilità derivante dalla crisi Covid-19, ha innescato una sensazione di panico che ha avvolto anche i mercati azionari. Tale condizione, può essere esaminata tramite indici per il livello di volatilità principali: l'indice VIX (*CBOE Volatility Index*) impiegato negli USA e il Vstoxx in Europa (*Euro Stoxx 50 Volatility Index*). Proprio in tali mercati, l'incertezza cresce e viene carpita da tali indicatori della paura che, dal 2000, hanno registrato il massimo in due episodi, la crisi del credito nel 2008 (ottobre) e proprio a marzo del 2020, quando anche le autorità americane hanno apportato delle drastiche misure restrittive. Gli effetti della pandemia e dell'impatto dell'incertezza sui due relativi mercati si sono concretizzati in maniera differente: facendo un parallelismo con l'indice registrato nel 2008, il VIX ha raggiunto il picco maggiore durante la crisi pandemica, a differenza del Vstoxx che ha fatto registrare il suo massimo durante la crisi del credito. Tali scenari potrebbero essere tradotti tramite una ragione geopolitica, poiché il Covid-19 ha colpito gravemente New York, lasciando invece, inizialmente, più respiro ai poli finanziari europei, quali Londra e Francoforte. La crisi Covid-19 è stata uno shock di così grandi dimensioni che, ad esempio, il mercato azionario britannico, il 12 marzo, ha fatto annotare il calo più grande dal 2000 in un'unica giornata, -10,87%. Ma il FTSE 100 non è il solo ad esser stato così sensibile alla crisi, l'S&P 500 infatti, tra il 19 e il 23 febbraio, ha perso circa il 34% dei relativi valori e soprattutto il FTSE MIB in un mese, ha registrato un - 41% con il picco il 12 marzo 2020 [Dufour, 2020].

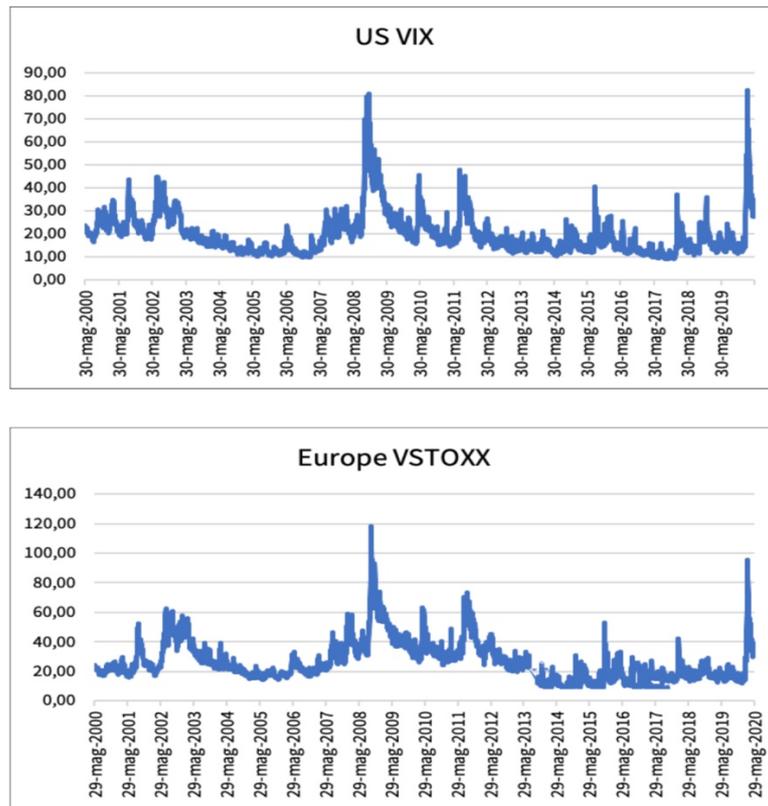


Figura n.16: Serie storica - indici di volatilità giornalieri [Dufour, 2020]

I tonfi del FTSE MIB sono attribuiti alla grave condizione in cui ha riversato l'Italia in quanto essendo stato il primo paese in Europa colpito pesantemente, è stato costretto ad impiegare delle politiche di blocco molto severe, le quali hanno immobilizzato non solo i movimenti dei cittadini ma anche le stesse attività economiche, prima con le attività di ristorazione, ospitalità, vendita al dettaglio non alimentare e poi il 23 marzo con quelle non essenziali (riaperte il 4 maggio), interessando il 51% delle imprese e il 55% dei lavoratori e determinando una netta differenza nel frazionamento dei lavoratori inattivi tra le diverse province, dipesa dall'eterogeneità nelle distribuzioni delle attività essenziali. La grande esposizione che ha avuto l'Italia è derivata anche da un debito pubblico particolarmente elevato, al 150%, legato ad una considerevole riduzione delle tasse e ad un incremento della spesa pubblica, e da una crescita economica stagnante, il che implica un incremento del rischio di una profonda recessione. Tale condizione si ripercuote anche sui mercati azionari, i quali, come abbiamo visto prima, hanno subito un'enorme flessione verso il basso del 35% in Italia e nell'eurozona, e del 30% negli USA, la quale è stata attutita dalla BCE tramite un programma di acquisto di asset, il PEPP (*Pandemic*

Emergency Purchase Programme). Tuttavia, tale disegno, anche se ha aggirato il rischio di una crisi del debito sovrano, non è stato sufficiente nell'avviare un recupero convincente del mercato europeo e soprattutto di quello italiano, sotto ancora del 15% rispetto a inizio anno, che sia al pari di quello americano il quale ha invece recuperato quasi tutto il gap [Borri, 2020].

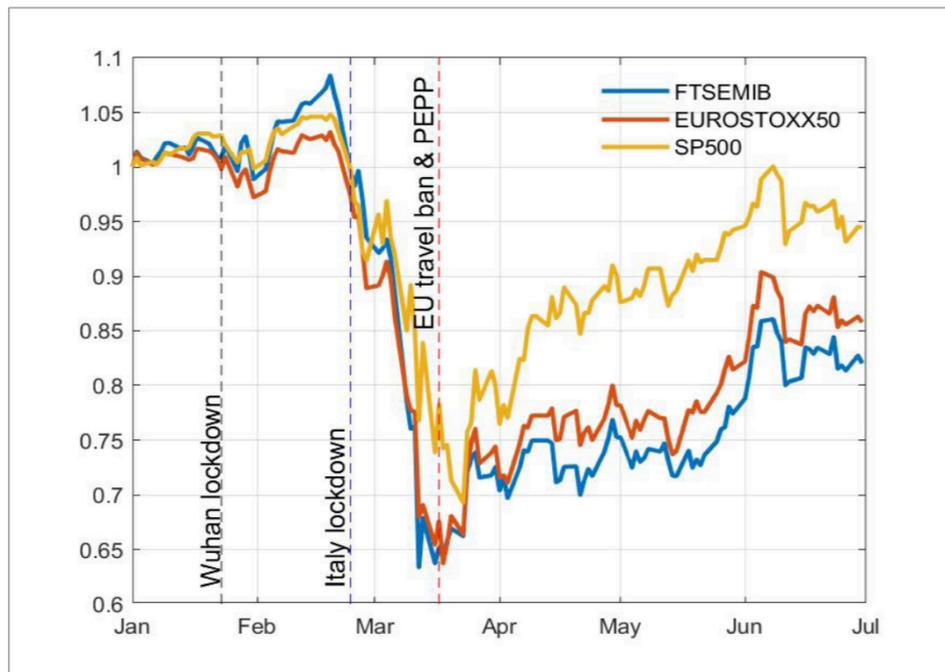


Figura n.17: Serie storica dei rendimenti di S&P 500, Eurostoxx50 e FTSE MIB [Borri, 2020]

Osservando il trend, dal 10/12/2018 al 20/01/2021, degli undici benchmark presi in esame, si nota un comportamento quasi speculare dei vari indici in periodi specifici:



Figura n.18: Trend degli ultimi prezzi giornalieri relativi agli undici indici azionari - Fonte: Bloomberg (consultazione: 20/01/2021)

Da tale grafico si evince come il primo trimestre del 2020 sia stato lo scenario di un andamento a V degli indici il quale però si adatta più o meno velocemente ad una ripresa, come abbiamo visto precedentemente la differenza tra l'S&P 500 e il FTSE MIB. Infatti il primo trimestre ha evidenziato, ad esempio, una riduzione più contenuta del mercato azionario cinese a fronte del 18% di quello russo o del 17% del Nikkei, e tale parametro, correlato alla velocità di ripresa, è strettamente legato a specifiche caratteristiche strutturali del sistema economico cinese che hanno tamponato gli effetti negativi sia del *lockdown* che delle imponenti misure fiscali e monetaria, evidenziando così la “resilienza” del paese [Hofmann et al., 2020]. Alle contrazioni dei primi tre mesi del 2020 è susseguito un deprezzamento delle valute domestiche correlato con un incremento dei rendimenti del debito sorano in valuta domestica, in quanto vi sono stati dei forti deflussi di capitale verso paesi ritenuti più sicuri e attività. Invece nell'area euro, il DAX, con una riduzione del 7% dei corsi azionari rispetto a inizio anno e rilevata il 30 giugno 2020, è

stato uno dei migliori recuperi. I mercati europei hanno fatto registrare una forte crescita del livello di interconnessione tra i paesi definiti *core* e quelli “periferici”, i quali riflettono una finanza pubblica e delle condizioni di crescita inferiori rispetto ai paesi del primo gruppo; tale presupposto è indice dell’enorme portata della crisi pandemica. Questo perché i paesi “periferici”, poiché esposti a fattori idiosincratici, in una condizione di normalità, presentano un grado di interconnessione inferiore, alterato poi da un contesto di crisi, che tenderà ad abbassare il gap relativo alle due tipologie di paesi. L’effetto negativo dello shock da Covid-19, che si estende uniformemente per tutta la zona euro, è tangibile anche in merito delle aspettative di un netto calo degli utili per azione per il prossimo anno per le imprese domestiche e per le società quotate. L’ampio bacino pandemico ha permesso di irrobustire non solo il grado di connessione tra i vari paesi dell’eurozona, ma anche la connessione tra i vari indici azionari, tradotta dalla *volatility spillover*, un indicatore di propagazione di volatilità da un mercato all’altro. Tramite ogni mercato e il contributo che quest’ultimo offre alla volatilità totale, al netto di fattori idiosincratici relativi ad altri mercati considerati, la *volatility spillover* si presta ad un duplice utilizzo: identificare il passaggio da un mercato all’altro e il verso del contagio. Quindi l’intensità di propagazione dello shock per i mercati azionari ed in particolar modo per il settore delle banche, è direttamente proporzionale alla diffusione della pandemia, giustificando l’Italia come sorgente di contagio della volatilità negli altri mercati in quanto prima nazione, a livello europeo, ad esser stata vittima del virus [Linciano et al, CONSOB, 2020].

La grande incertezza, derivante dalle views negative relative agli scenari futuri, e il relativo crollo delle quotazioni, ha innescato un pronto intervento da parte delle Autorità di vigilanza dei mercati finanziari, concretizzatosi con varie restrizioni operative volte alla tutela non solo dei singoli investitori, ma anche dell’integrità e del consueto andamento dei mercati. A livello europeo, l’ESMA (*European Securities and Markets Authority*), con l’ausilio delle Autorità nazionali competenti, ha indetto un processo decisionale volto alla salvaguardia della disciplina comunitaria, dando così forma a quello che è un *public statement* del 20 maggio 2020, riguardante le relazioni finanziarie semestrali delle società quotate, e quello del 6 maggio afferente la protezione degli investitori *retail* operanti in un contesto di incertezza. Nello specifico, la CONSOB, ha adottato dei provvedimenti atto a limitare la volatilità dei mercati finanziari e il numero

di attacchi speculativi ai titoli delle imprese italiane. In particolar modo, i provvedimenti restrittivi adottati dalle Autorità di vigilanza riguardano le vendite allo scoperto in quanto comportano un incremento del livello di volatilità dei prezzi, che è una conseguenza di un abbassamento rapido e consistente dei corsi dei titoli. Tale sfondo negativo viene accentuato in condizioni di forte tensione dei mercati, il che potrebbe portare ad acutizzare notevolmente il trend ribassista del mercato. Ulteriore provvedimento restrittivo è rivolto alle posizioni nette corte con particolare rilievo per le soglie che, a seconda di determinate condizioni, possono venir meno. Mentre l'idea di chiusura dei mercati durante la crisi pandemica non è stata assolutamente presa in considerazione da G20, IOSCO ed ESMA.⁴

Nel nostro caso sono state selezionate 400 osservazioni di prezzi azionari dei quali viene prima calcolato il logaritmo e le relative differenze di quest'ultimi, per poi ottenere i log-rendimenti.

Sia y_t , $t = 1, \dots, T$ la serie storica finanziaria dei prezzi di un asset, il log-rendimento è calcolato come $r_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$. Partendo da un orizzonte temporale di 50 osservazioni stimiamo i portafogli ottimali aumentando l'orizzonte temporale di un'osservazione per volta. Per ogni osservazione aggiunta le stime Bayesiane sono effettuate con 10000 iterazioni e un *burnin* di 1000 iterazioni. Saranno riportate le dinamiche dei pesi di portafoglio per entrambi i modelli e le performance complessive di portafoglio. Sulla stessa logica sarà effettuato il *backtesting* introdotto nell'ultima sezione del capitolo.

4.2 Applicazione portafoglio classico di B-L

Per l'applicazione del metodo di Black-Litterman sono stati considerati quattro *benchmark*, S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei e FTSE MIB, in un orizzonte temporale che va dal 10/12/2018 al 17/11/2020. È stato adottato un approccio poco informativo sulle distribuzioni a priori dei parametri del modello. I log-rendimenti sono assunti normali, il vettore delle medie è assunto a priori nullo e la matrice di varianze-covarianze è assunta a priori diagonale con varianze 1; i pesi, di conseguenza, hanno una distribuzione a priori uniforme. Le stime sono fornite tramite 10000 iterazioni di un

⁴ <https://www.consob.it/web/investor-education/crisi-misure-sostegno>

algoritmo MCMC con un *burnin* di 1000. La convergenza delle distribuzioni a posteriori dei parametri è immediata e il costo computazionale per 10000 iterazioni è di 8 secondi. Nelle figure sono riportati rispettivamente le performance di portafoglio con i pesi stimati su tutto l'orizzonte temporale di riferimento e le dinamiche dei pesi di portafoglio determinate a partire dalla cinquantesima osservazione con un aumento di un'unità temporale alla volta.

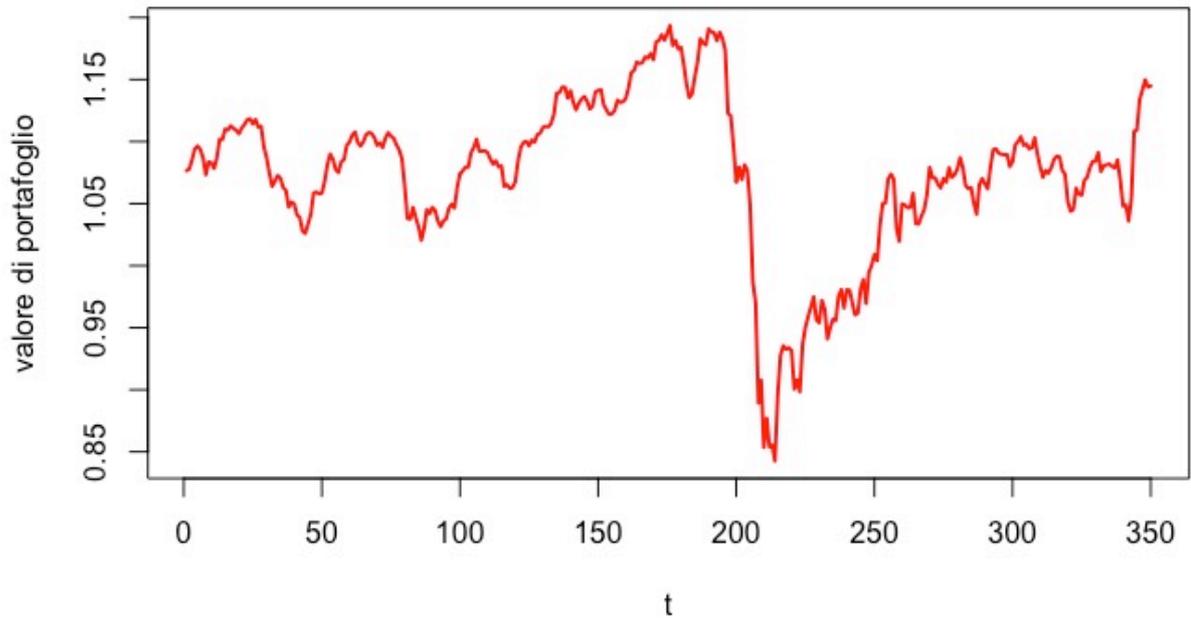


Figura 19: Rendimenti portafoglio BL

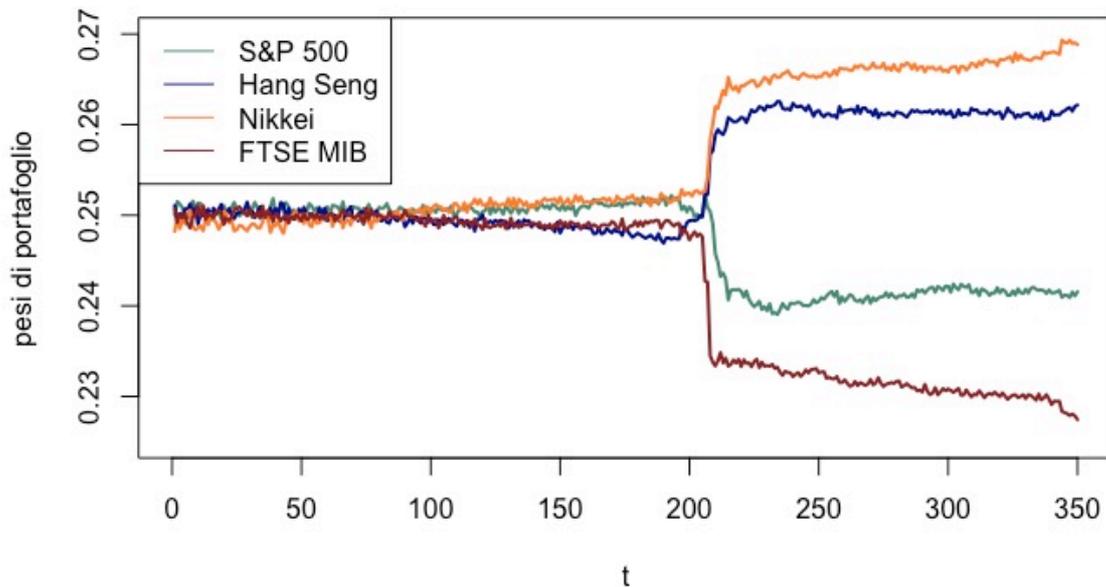


Figura 20: *Pesi relativi agli indici presi come campione stimati con il modello di Black-Litterman.*

4.3 Applicazione del portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule

Per l'applicazione del metodo semi-parametrico basato su copule sono stati considerati, ancora una volta, le serie storiche degli indici S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei e FTSE MIB, nell'orizzonte temporale compreso tra il 10/12/2018 e il 17/11/2020. Per coerenza, è stato adottato, anche in questo caso, un approccio poco informativo sulle distribuzioni a priori dei parametri del modello. Essendo le distribuzioni marginali modellate non parametricamente, non ci sono assunzioni probabilistiche a priori sulle densità dei parametri dei log-rendimenti. L'unica assunzione è sulla matrice di copula a priori diagonale con varianze 1; anche in questo caso i pesi, hanno una distribuzione a priori uniforme. Le stime sono fornite tramite 10000 iterazioni di un algoritmo MCMC con un *burnin* di 1000. La convergenza delle distribuzioni a posteriori dei parametri della matrice di copula è immediata e il costo computazionale per 10000 iterazioni è di 3.5 secondi. Come nel caso precedente, nelle figure sono riportati rispettivamente le performance di portafoglio con i pesi stimati su tutto l'orizzonte temporale di riferimento e le dinamiche dei pesi di portafoglio determinate a partire dalla

cinquantesima osservazione con un aumento di un'unità temporale alla volta. È possibile osservare che le dinamiche di portafoglio sono completamente diverse rispetto al caso precedente; ciò è dovuto alla sostanziale differenza di valori stimati della matrice di copule rispetto alla matrice varianze-covarianze.

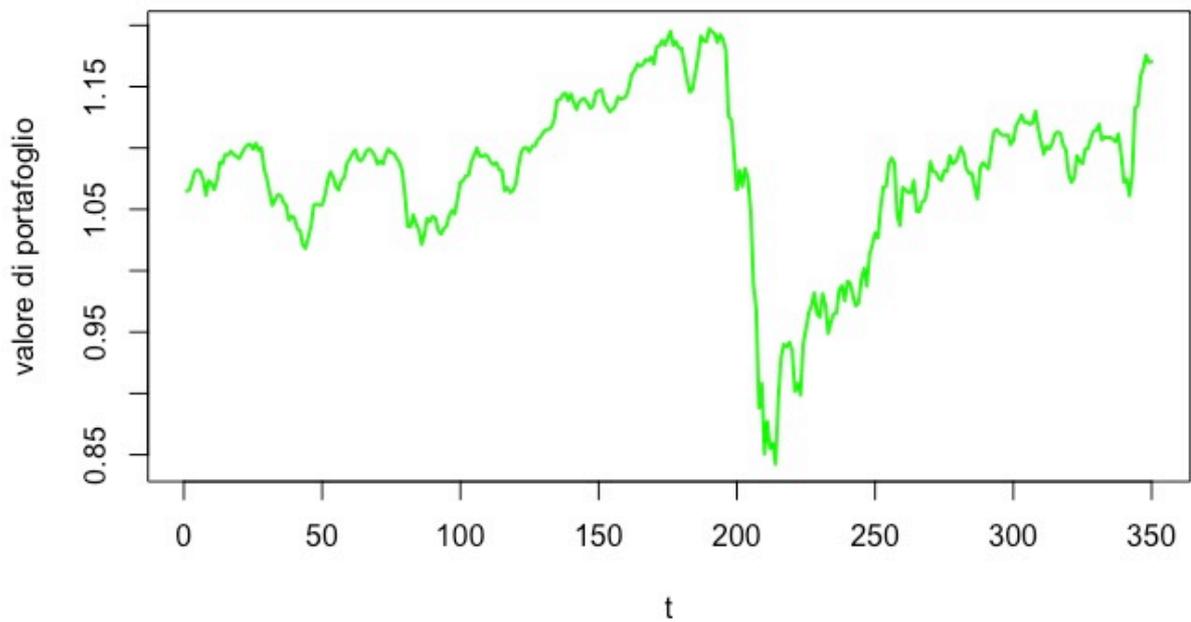


Figura 21: Rendimenti portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule

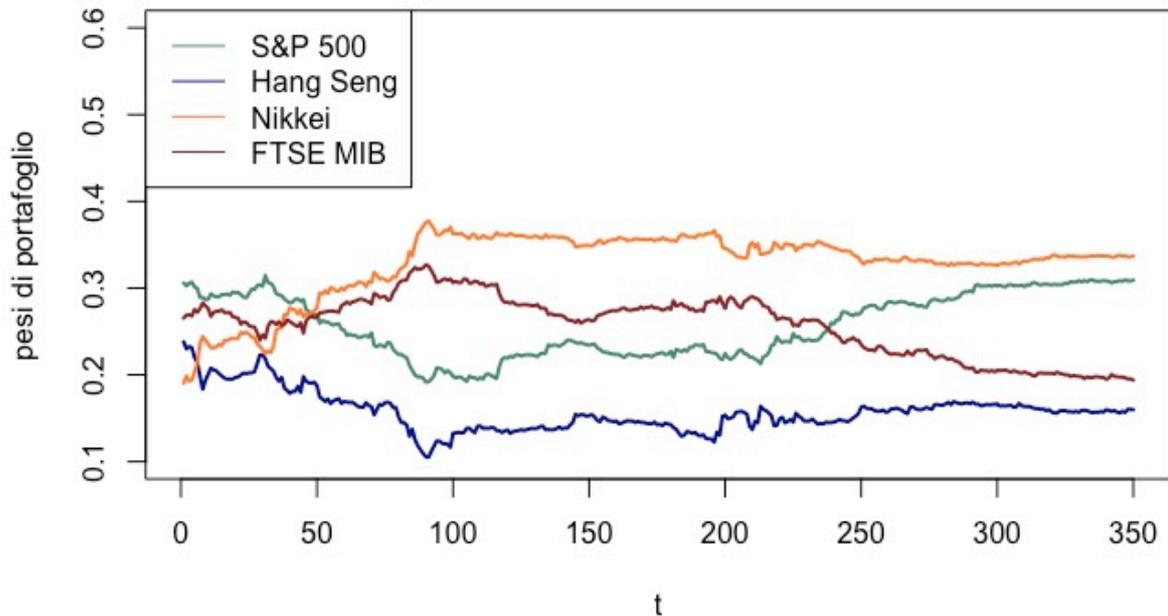


Figura 22: *Pesi relativi agli indici presi come campioni stimati con il modello Bayesiano semi-parametrico basato su copule*

4.4 Confronto tra i risultati

Dal confronto fra i risultati emerge come il portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule abbia un andamento approssimativamente migliore rispetto al portafoglio di Black-Litterman; entrando nello specifico il rendimento stimato da BL è del 14.42% mentre quello relativo al nostro approccio è pari a 17.08%. Tali percentuali emergono solo dopo lo shock da Covid-19. Infatti, la sovrapposizione dei trend dei due portafogli, evidenzia come il portafoglio B-L si più performante in un periodo antecedente allo scoppio della pandemia, anche se non si mantiene tale successivamente. Per tale motivo è possibile assegnare al portafoglio definito tramite l'approccio proposto, gli aggettivi di *resiliente* e reattivo in quanto, anche se è molto evidente la specularità tra i relativi andamenti, il portafoglio basato su copule risponde meglio ai “cigni neri” che colpiscono il mercato finanziario.

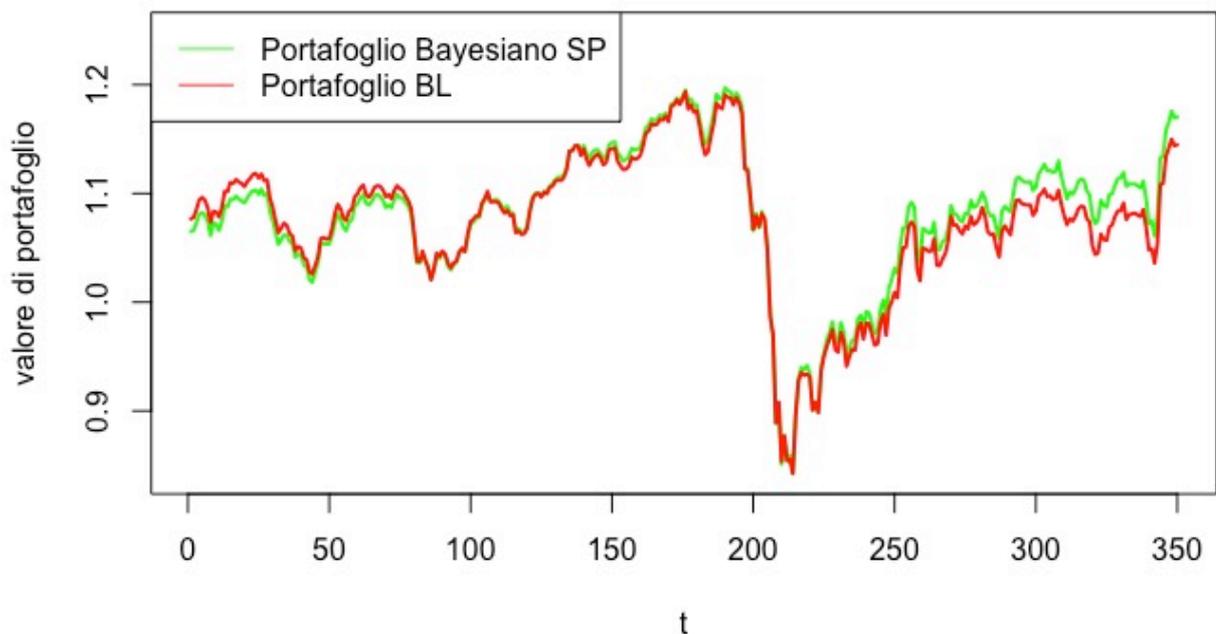


Figura 23: Trend storico del rendimento dei due portafogli

4.5 Backtesting e interpretazione dei risultati

Il VaR stimato tramite l'approccio proposto risulta più efficiente del VaR ottenuto tramite il modello Black-Litterman in un contesto di shock Covid-19, quindi la soglia di questo parametro non viene mai superata. Soglia perché il VaR rappresenta la massima perdita, espressa in una misura sintetica e compatta, che un singolo titolo o un portafoglio di titoli può subire come conseguenza delle fluttuazioni sfavorevoli del mercato in un determinato arco temporale; per tale motivo il VaR è funzione di tre parametri, il livello di confidenza, solitamente pari a 95% o 99%, l'orizzonte temporale (*holding period*) e la valuta funzionale a denominare il valore del rischio. Poiché le relazioni verificatesi in passato vengono assunte come ricorsive, anche il futuro dovrebbe accogliere il manifestarsi di queste ultime così come tali, attribuendo così l'aggettivo di *backward looking* al processo di calcolo del VaR. Il suo utilizzo implica l'ipotesi di normalità dei rendimenti, la quale vige anche per ricavi e perdite dell'investimento, con media coincidente con il rendimento medio e la volatilità viene rappresentata dalla varianza. Quest'ultima viene calcolata tramite la matrice varianze-covarianze, una volta che sono

rese note le correlazioni tra i titoli del portafoglio. La misura sintetica del VaR è il frutto di un'analisi oculata dell'esposizione totale generata dalla presa in esame della correlazione esistente tra le varietà di fattori di rischio. L'assunzione probabilistica sulla perdita massima potenziale non concerne la previsione e la conseguente prevenzione da shock economici, quali ad esempio la crisi finanziaria da Covid-19, ma comunque può adattarsi e quindi essere impiegata anche in tali contesti. Generalmente la finestra temporale sulla quale viene calcolato il VaR che varia tra uno e dieci giorni, eccezion fatta per quello impiegato per il rischio di credito, che assume degli orizzonti temporali più lunghi, di circa un anno. Da ciò e dal ruolo di tale parametro come metro di confronto tra le varie rischiosità proprie delle posizioni in portafoglio, si evince come tale strumento si qualifichi come misura universale, adattabile alle molteplici varietà di attività e di rischio. Come stato detto, questo strumento è una misura probabilistica, per cui vi è necessità di computare la distribuzione di probabilità attraverso un metodo che permette la distinzione dei modelli VaR in tre differenti approcci:

- Analitico: assume una distribuzione normale multivariata per ogni fattore di rischio considerato;
- Delle serie storiche: considera un arco temporale significativo e ampio da definire quelle che sono le stime relative dei parametri, il che implica un VaR determinato da una distribuzione empirica dei fattori de rischio, motivo per cui si prescinde la considerazione di un'oculata distribuzione dei rendimenti;
- Monte Carlo: approccio matematico-statistico che implica delle simulazioni funzionali a definire la stima del VaR, infatti medie, varianze e correlazione saranno il frutto di una distribuzione dei fattori di rischio.

Una volta quindi applicato tale modello, dal confronto effettuato tra i rendimenti dei due portafogli emerge un trend speculare tra i due sul lungo periodo, mentre, come osservato anche dal VaR, in situazioni di stress finanziario, il nostro portafoglio performa meglio; in ottica di copertura dalla crisi, risulta più efficiente in quanto l'assunzione di dipendenze, non solo lineari, implica una maggior incorporazione delle informazioni all'interno del portafoglio stesso, quindi una minimizzazione della matrice delinea una maggiore copertura dal rischio rispetto all'approccio standard.

Successivamente è stato sviluppato un modello di *backtesting* per entrambi gli approcci. Tale test retrospettivo, istituito dal Comitato di Basilea nel 1996, fonda la sua analisi su

un confronto fra la stima giornaliera del VaR e le perdite effettivamente registrate il giorno seguente (*static profit loss*). Qualora quest'ultime fossero superiori a tale strumento di misurazione con una frequenza congruente con quella del livello di confidenza, allora il modello potrà definirsi corretto. Tale valutazione poggia le basi su due aspetti fondamentali:

- La coerenza delle eccezioni: giorni in cui le perdite superano la stima del VaR secondo lo stesso livello di confidenza impiegato per la stima del VaR stesso;
- La portata delle eccezioni: quanto la perdita eccede il limite del VaR [Resti and Sironi, 2008].

Il vantaggio di questo sistema, impiegato nella valutazione dei risultati di una strategia di gestione del portafoglio in un determinato arco temporale, riflette la vulnerabilità del metodo di previsione stesso rispetto all'andamento reale del mercato. Da tale assunto ne deriva la logica che, una strategia efficace in passato può rivelarsi tale in futuro, come una strategia non oculata e con risultati negativi potrà comportare lo stesso esito successivamente, anche se tale considerazione espone il *backtesting* al problema di *overfitting*, ovvero una strategia proficua passata potrebbe non riuscire a ripetersi in un contesto futuro.

Nel nostro caso sono state selezionate 400 osservazioni di prezzi azionari dei quali viene prima calcolato il logaritmo e le relative differenze di quest'ultimi, per poi ottenere i log-rendimenti.

Sia y_t , $t = 1, \dots, T$ la serie storica finanziaria dei prezzi di un asset, il log-rendimento è calcolato come $r_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$. Ora assumeremo un procedimento, per il calcolo del VaR, ricorsivo che implica la stima dei parametri sulle prime cinquanta osservazioni e la verifica del VaR sull'osservazione successiva. L'operazione è ripetuta aumentando la finestra temporale delle osservazioni (*rolling window*) di un'unità alla volta verificando che l'osservazione successiva non violi questo parametro. Da tale processo risulta una performance migliore del nostro portafoglio rispetto a quello di Black-Litterman in termini di volatilità. Inoltre Black-Litterman assume normalità dei log-rendimenti, mentre il nostro approccio, essendo semi-parametrico, tratta non parametricamente le marginali dando maggiore peso alle osservazioni sulle code delle distribuzioni dei log-rendimenti.

Nel grafico seguente si evidenzia la chiarissima violazione del VaR, sia al 5% che all'1% di confidenza, nel caso del modello Black-Litterman, e quindi la perdita inattesa si concretizza maggiormente nel periodo di inizio della pandemia con relative ripercussioni e altrettanti eccessi della soglia del VaR, ma meno accentuati, nell'arco temporale successivo.

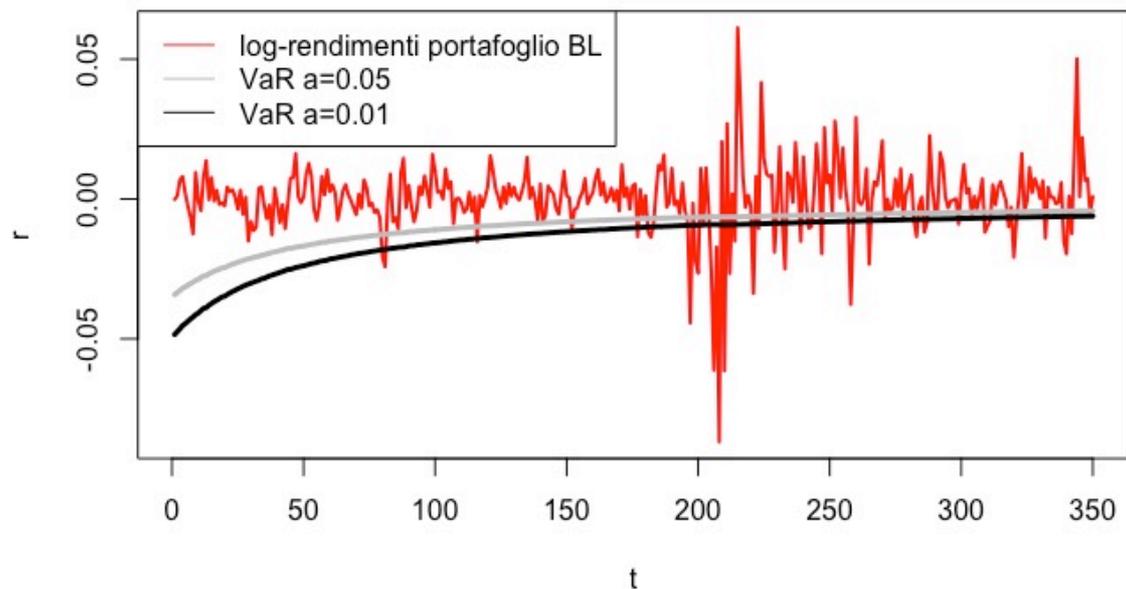


Figura 24: Log-rendimenti del portafoglio BL

Non è possibile giungere alle stesse conclusioni nel caso dell'approccio proposto in quanto si evince una migliore stima delle perdite inattese e un migliore contenimento delle perdite nell'orizzonte temporale considerato; infatti la soglia del VaR non viene mai superata per entrambi i livelli di confidenza considerati.

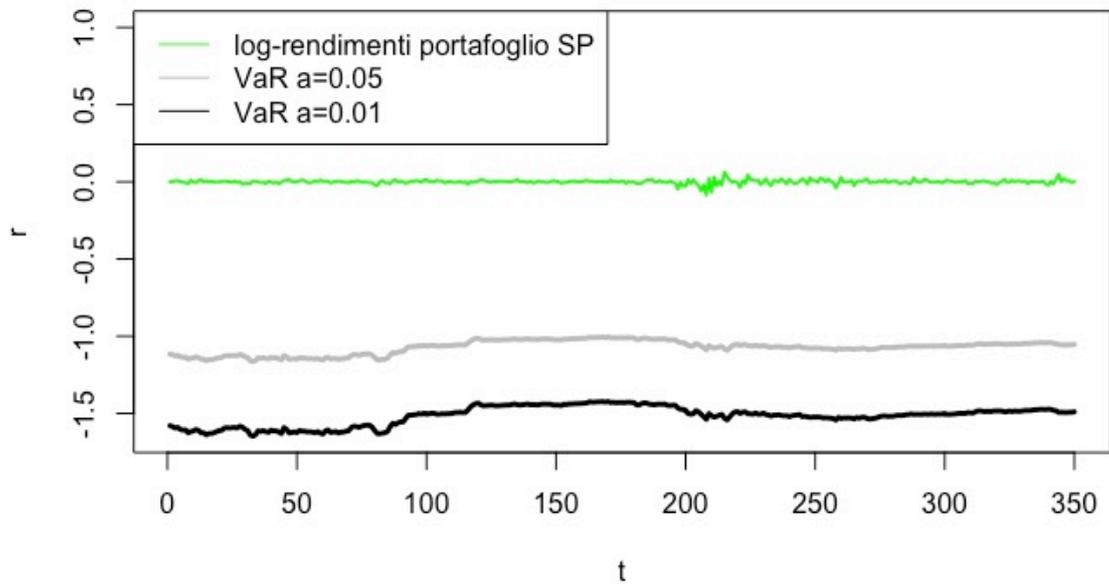


Figura 25: Log-rendimenti del portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule.

CONCLUSIONI

L'obiettivo della tesi consisteva nell'attuare una strategia di gestione del portafoglio che potesse risultare ottimale in situazioni di crisi o elevata volatilità dei mercati; quindi il lavoro è stato focalizzato sui portafogli a varianza minima. Partendo da un approccio Bayesiano standard, anche noto in letteratura come modello di Black-Litterman, è stata definita una metodologia innovativa che, oltre a mantenere le peculiarità dell'approccio Bayesiano, risulta più flessibile in termini di modellizzazione dei log-rendimenti degli asset e delle dipendenze tra asset, con lo scopo di ottenere una maggiore copertura dal rischio in situazioni estreme, proprio come quelle dei recenti shock dei mercati finanziari dovuti al Covid-19.

È stato dunque definito un approccio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, più flessibile rispetto alle metodologie presenti in letteratura. Grazie all'assenza di assunzioni probabilistiche sui log-rendimenti, trattati a livello inferenziale con il metodo della verosimiglianza dei ranghi, il metodo garantisce un'affidabile soluzione al noto problema delle "fat tails" dei log-rendimenti degli asset finanziari, evitando inadeguate assunzioni di Gaussianità. Inoltre la linearità dei legami tra le dipendenze dei rendimenti relativi ai diversi mercati, viene superata grazie ai modelli di copula, che permettono di trattare quest'ultime in maniera trasversale e quindi decisamente più completa in quanto permettono una migliore adattabilità delle distribuzioni multivariate al reale andamento dei fattori di rischio. Non a caso, seppur i portafogli a varianza minima sono ottenuti analogamente per entrambe le metodologie, data la struttura decisamente più informativa dell'approccio proposto, le stime dei pesi di portafoglio sulla stessa finestra temporale risultano differenti e i portafogli più efficienti nel caso del nuovo metodo, come emerge dal backtesting. Il confronto tra le due tipologie di portafogli, viene effettuato tramite la misura di rischio VaR (*Value at Risk*), inteso come vincolo di perdita attesa, seguita successivamente proprio dal modello di *backtesting* poiché i rendimenti passati di un titolo costituiscono una fonte di informazione imprescindibile per l'acquisto di un asset, fornendo così un ampio rilievo alla variabilità passata.

Tramite tutti questi strumenti è stato possibile soppesare i due portafogli ed ottenere un risultato che si concretizza sotto due aspetti critici dell'asset allocation, il rendimento e la volatilità. Ma prima di riassumere i risultati è necessario precisare che sono stati

considerati 11 *benchmark*: S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei Index, GB FTSE 100, Svezia OMX, FTSE MIB, ASX 200, Canada SPTSX, DAX di Francoforte, MOEX Index e l'SMI svizzero. Poiché la direzione dei mercati ha implicato un'elevata correlazione tra i rendimenti di tutti i titoli, per semplicità, sono stati selezionati quattro indici che rappresentassero ognuno una diversa zona in modo tale da ottenere un paniere rappresentativo mondiale: S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei Index e FTSE MIB. Ulteriore motivo riguardante tale scelta è l'efficacia del meccanismo copula, il quale performa meglio su distribuzioni a dimensione relativamente ridotta in quanto, in presenza di un numero elevato di distribuzioni, la matrice di copula Gaussiana tende a quella di varianze-covarianze.

Trattando di rendimento si è evidenziato come un andamento nel lungo periodo, apparentemente speculare, possa essere alterato in misura diversa da uno shock di mercato. Infatti se il portafoglio B-L assume dei rendimenti maggiori nel periodo pre-Coronavirus, dimostra poi una ridotta reattività, a differenza del portafoglio ottenuto con il metodo proposto che fa registrare un rendimento migliore, seppur relativamente; ma il miglior risultato è stato ottenuto in termini di volatilità. Infatti la strategia implementata ha risposto positivamente alle aspettative in quanto ha mostrato una netta differenza del riscontro ottenuto dal portafoglio semi-parametrico rispetto a quello di Black-Litterman successivo all'analisi del VaR. Posti due intervalli di confidenza del 5% e dell'1%, il test ha dimostrato come il nostro portafoglio non ecceda mai la soglia del VaR, anche in un contesto di shock finanziario. Per tanto e per la mole di informazioni relativa alla struttura fondata su dipendenze non solo lineari, il portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, in ottica di copertura dal Covid-19 shock, può essere definito meno rischioso e quindi più efficiente.

BIBLIOGRAFIA

- Arnold, B. C. and PRESS, S. J. “Compatible conditional distributions.” *J. Amer. Statist. Assoc.* 84 152–156., 1989
- Barone R., “MCMC methods for continuous time multi-state models and high dimensional copula models”, Istitutional Research Information System Sapienza Università di Roma, 2020
- Bevan A., Winkelmann K., “Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience”, Fixed Income Research, Goldman Sachs & Co., June 1998
- Bevan A., Winkelmann k., “Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience”, Fixed Income Reasearch, Goldman Sachs, june 1998
- Biondi L., “Il Modello Black & Litterman descrizione teorica del modello” Edizioni Accademiche Italiane, 2013.
- Biondi L., “Il Modello Black & Litterman descrizione teorica del modello” Edizioni Accademiche Italiane, 13., 2013
- Biondi L., “Il Modello Black & Litterman descrizione teorica del modello” Edizioni Accademiche Italiane, 27-32., 2013
- Biondi L., “Il Modello Black & Litterman descrizione teorica del modello” Edizioni Accademiche Italiane, 41-45., 2013
- Biondi L., “Il Modello Black & Litterman descrizione teorica del modello” Edizioni Accademiche Italiane, 4., 2013
- Black F., “Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios”, *Financial Analysts Journal*, pag.18., 1989
- Black, Fischer. "Universal hedging: Optimizing currency risk and reward in international equity portfolios." *Financial Analysts Journal* 45.4 (1989): 16-22.
- Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A., “Investments”, McGraw-Hill Education. 9° edizione, 2011
- Brooks S.P., “Markov Chain Monte Carlo Method and Its Application”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 47, No. 1, pages 69-100., 1998
- Caella G., Robert C., “A Short History of Markov Chain Monte Carlo: Subjective

- Recollections from Incomplete Data*”, in *Statistical Science*, vol. 26, n.1: 102-115., 2011-2012
- Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W., “*Copula methods in finance. Wiley finance series*”. Wiley, Chichester., 2004
 - Cheung W., “*The Black-Litterman Model Explained*”; February 2009.
 - Christodoulakis G.A., “*Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach*”, Faculty of Finance; Sir John Class Business School, City University, London; Notes for Quantitative Asset Pricing, MSc Mathematical Trading and Finance; November 2002
 - Christodoulakis G.A., “*Bayesian Optimal Portfolio Selection: The Black-Litterman Approach*”, pag. 7-8, 2002
 - Clayton D.G. “*A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence.*”, *Biometrika*, (65):141-151, 1978.
 - Conover W. J., “*Practical Nonparametric Statistics*”, 2th. ed., J. Wiley & sons, 1980
 - Cooke R.M. Bedford, T. “*Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines.*” *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, (32):245-268, 2001.
 - Cornelis A., November 2004, “*Measuring the Degree of Financial Market Efficiency: An Essay*”, Los Kent State University, College of Business Administration and Graduate School of Management.
 - Czado C. *Pair-Copula Constructions of Multivariate Copulas*, pages 93-109. 1 2010.
 - D’Amico G., Petroni F., “*Copula based multivariate semi-Markov models with applications in high-frequency finance*”; *European Journal of Operational Research* 267 (2018) 765–777
 - Dalla Valle L., Leisen F., and Rossini L. “*Bayesian non-parametric conditional copula estimation of twin data.*” *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 67(3):523–548, 2018
 - dos Santos Silva R., Freitas Lopes H. “*Copula, marginal distributions and model selection: a bayesian note.*” *Statistics and Computing*, 18(3):313–320, 2008
 - Elton, E., J., Gruber, M. J. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Op. Cit. (p. 80).*

- Farinelli, S., Tibiletti, L., “*Sharpe Thinking with Asymmetrical Preferences. Technical Report*” presented at European Bond Commission 2003b; Winter Meeting; Frankfurt.
- Frigessi A. Bakken H. Aas K., Czado C. *Pair copula constructions of multiple dependence*. Insurance: Mathematics and Economics, 2(44): 182-198, 2009.
- Genest C., Ghoudi K. and RIVEST, L.-P. “*A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions.*” Biometrika 82 543–552., 1995
- Genest C., Rivest L-P. “*Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas.*” Journal of the American statistical Association, 88(423):1034–1043, 1993
- Grazian C., Liseo B. “*Approximate bayesian inference in semi- parametric copula models. Bayesian Analysis.*” 12(4):991–1016, 2017
- Gumbel E.J., “*Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions*”. Inst. Statist. Univ. de Paris, (9):171 173, 1960.
- Hájek, J. and Šidák, Z. *Theory of Rank Tests*. Academic Press, New York, 1967
- He G., Litterman R., “*The intuition behind Black-Litterman Model Portfolios*”, Goldman Sachs Asset Management, New York, NY 10005, 1999
- Hoff P.D., “*Extending the rank Likelihood for semiparametric copula estimation*”, The Annals of Applied Statistics, University of Washington, Vol. 1, No. 1, 265–283., 2007
- Hoffman, M. D., Gelman, A. (2014), “*The No-U-Turn Sampler: Adap- tively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo*”, Journal of Machine Learning Research, 15, 1351–1381, 2014
- Huard D., Évin G., and Anne-Catherine Favre. Bayesian copula selection. Computational Statistics & Data Analysis, 51(2):809–822, 2006.
- Hull, J. C. *Risk Management e istituzioni finanziarie*, Pearson Prentice Hall, 2008
- Idzorek T.M., “*A Step-by-step Guide To The Black-Litterman Model - Incorporating user-specified confidence levels*”, July 2004
- Joe H. “*Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models.*” Journal of Multivariate Analysis, 94(2):401–419, 2005.
- Jordan, M. I., Ghahramani, Z., Jaakkola, T. S., and Saul, L. K., “*An Introduction to Variational Methods for Graphical Models*”, Machine Learning, 37, 183–233, 1999
- Kim T.H., White H., “*On more robust estimation of skewness and kurtosis*” Finance Research Letters 1 (2004) 56-73, 2003

- Klassen C. A. J. and Wellner, J. A. “*Efficient estimation in the bivariate normal copula model: Normal margins are least favourable.*” *Bernoulli* 3 55–77., 1997
- Knight, Frank H. *Risk, Uncertainty, and Profit*, Boston, Houghton Mifflin Company, 1921.
- Levin D.A., Wilmer E.L., “*Markov chains and mixing times.*” American Mathematical Society, 2009
- Linguanti E., Bertelli R., “*Analisi finanziaria e gestione di portafoglio*”, Op. Cit. (p. 45)., 2008
- Litterman R and the Quantitative Resources Group Goldman Sachs, “*Modern Investment Management - an equilibrium approach*”, 2003
- Marmi S., 10 Feb., “*Dynamics and time series: theory and application*”, Scuola Normale Superiore Lecture 7., 2010
- Menn, C., Fabozzi, F.J., Rachev, S.T. “*Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing*”, New Jersey, John Wiley & Sons: Hoboken, 2005.
- Michaud R.O., “*The Markowitz optimization enigma: is ‘optimized’ optimal?*”, *Financial analysts journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31-42., 1989
- Min A., Czado C. “*Bayesian inference for multivariate copulas using pair-copula constructions.*” *Journal of Financial Econometrics*, 8(4): 511–546, 2010
- Nelsen R. B., “*An introduction to copulas.*”, *Lecture Notes in Statistic*, Springer, New York, 2 edition, 2006.
- Ormerod, J. T., and Wand, M. P., “*Explaining Variational Approximations,*” *The American Statistician*, 64, 140–153., 2010
- Robert, C., Casella, G., “*Monte Carlo Statistica Methods*”. Springer. 2004
- Sahu SK, Dey DK, Branco MD. “*A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models.*” *Canadian Journal of Statistics* 31: 129–150., 2003
- Scowcroft A., Sefton J., “*Enhanced Indexation*”, (Stephen Satchell and Alan Scowcroft, “*Advances in Portfolio Construction and Implementation*”), Butterworth- Heinemann, 2003
- Semenov M., Smagulov D., “*Portfolio Risk Assessment using Copula Models*”, Mikhail Semenov and Daulet Smagulov, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia, 2017.

- Sharpe W.F., “*Expected utility asset allocation*”, Financial Analysts Journal, Vol. 63, No. 5, pp. 18., 2007
- Sharpe, William F., “*The Sharpe Ratio*” in *The Journal of Portfolio Management* Fall”, pp. 49-58., 1994
- Sklar A. “*Random variables, distribution functions and copulas.*”; Lecture Notes-Monograph Series, (28):1-14, 1996
- Smith M.S., Gan Q. and Kohn R.J., “*Modelling dependence using skew t copulas: bayesian inference and applications*”; J. Appl. Econ. 27: 500–522, 2012
- Song P.X-K, Yanqin Fan Y., Kalbfleisch J.D., “*Maximization by parts in likelihood inference.*” Journal of the American Statistical Association, 100 (472):1145–1158, 2005.
- Stanley M., Klein N.; “*Bayesian Inference for Regressesion Copulas*”; JOURNAL OF BUSINESS & ECONOMIC STATISTICS, VOL. 00, NO. 0, 1–17, 2020
- Taleb N.N., “*Il cigno nero*”, Il Saggiatore, pag.18, 2007
- Walters J., “*The Black-Litterman Model In Detail*”, pag.15., 2009
- Wu J., Wang X, Walker S.G. “*Bayesian nonparametric es- timation of a copula.*” Journal of Statistical Computation and Simulation, 85(1):103–116, 2015
- Wu J., Wang X., Walker S.G., “*Bayesian nonparametric in- fference for a multivariate copula function.*” Methodology and Computing in Applied Probability, 16(3):747–763, 2014

SITOGRAFIA

- <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/assetallocation.htm>
- <https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp>
- <https://www.investopedia.com/terms/s/sortinoratio.asp>
- <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/sortino-index.html>
- <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/alfa-di-jensen.html>
- https://www.bankpedia.org/index_voce.php?lingua=it&i_id=86&i_alias=a&c_id=18276-alfa-di-jensen
- <https://www.startingfinance.com/approfondimenti/indicatori-rischio-rendimento-performance/>
- <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/information-ratio.html>
- <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/tracking-error.html>
- <https://www.startingfinance.com/approfondimenti/indicatori-rischio-rendimento-performance/>
- <https://www.money.it/Drawdown-la-bestia-nera-del-Forex>
- <https://www.educazionefinanziaria.com/finanza-comportamentale/cose-il-drawdown-e-quanto-e-importante/>
- <https://www.schroders.com/it/it/investitori-privati/approfondimenti/global-investor-study/shock-del-mercato-come-hanno-reagito-gli-investitori-allimpatto-del-covid-19/>
- https://www.tgcom24.mediaset.it/economia/jp-morgan-am-l-impatto-della-digital-disruption-sui-mercati-finanziari_27626601-202102k.shtml
- <https://www.consob.it/web/investor-education/crisi-misure-sostegno>

RIASSUNTO TESI

La probabilità legata all'ampia gamma di sfondi evolutivi delle variabili economico-finanziarie e di mercato comporta la determinazione del prezzo delle singole attività e l'impatto concreto di determinati shock amplifica maggiormente tale parametro. L'elevato grado di incertezza derivante dalla crisi legata al Covid-19, ha conferito ulteriore rilievo alla necessità di garantire delle alte, o per lo meno, accettabili performance di portafoglio per un asset allocation efficiente, la quale rappresenta l'ultimo tassello di un processo definito *financial planning*, che ingloba nel suo ampio significato un'area introspettiva propria dell'investitore, la propensione al rischio, gli obiettivi legati al fabbisogno del singolo e le soluzioni che soddisfano tale necessità, l'asset allocation stessa (vd. *Bibliografia* Linguanti et al, 2008). Un contributo fondamentale per la comprensione ed un maggior avvicinamento a tale obiettivo, per quanto concerne l'autoreferenzialità dei mercati, è stato fornito inizialmente da Markowitz, il quale non solo apre le porte alla finanza moderna ma illustra l'importanza della diversificazione dei titoli nel proprio portafoglio. La grande portata scientifica di tale modello però, cozza con l'applicazione stessa alla realtà, poiché la massimizzazione dell'errore di stima con conseguente sovrastima dei titoli caratterizzati da alto rendimento atteso, basso rischio e bassa correlazione, portano ad un portafoglio finale scarno, con pochi asset presenti; i rendimenti sono considerati come variabili aleatorie casuali continue. Inoltre si concretizza un'eccessiva sensibilità dei pesi di portafoglio ottimo, relativa ai dati di input e alle ipotesi sui rendimenti attesi. Per ovviare a tali limiti, sono stati proposti vari modelli, tra i quali si annovera, per la sua applicabilità, quello di Black e Litterman, il quale combina l'equilibrio di mercato e le views dell'investitore tramite il teorema di Bayes, per poi ricavare un vettore ed una matrice di varianza-covarianza ottimi degli asset assunti dal portafoglio; si arriva quindi ai rendimenti attesi partendo da due fonti differenti di informazione. La credibilità e la robusta struttura di tale modello poggiano le fondamenta non solo sull'ottimizzazione media varianza, ma anche su un aspetto del CAPM, l'ottimizzazione inversa. Punto di partenza dell'approccio è il disallineamento del vettore dei rendimenti di equilibrio correlato alle views dell'investitore le cui medie pesate permetteranno di definire il portafoglio finale. Inoltre l'impatto delle aspettative sullo scostamento del portafoglio finale, che tenderà più o a quello di equilibrio o più alle

aspettative, sarà direttamente proporzionale alla fiducia riposta in quest'ultime e alla loro natura. La definizione di questi strumenti e di altri forniti nei primi tre capitoli della tesi, con particolare rilevanza per il metodo delle copule (capitolo 3), rappresenta tutti i singoli passaggi necessari alla comprensione dell'approccio impiegato e dei risultati derivanti dalla sua applicazione. Inizialmente è stata costruita una serie storica degli ultimi prezzi giornalieri di undici indici azionari dal 10/12/2018 al 17/11/2020 in modo tale da racchiudere l'andamento pre e post SARS-CoV-2 e analizzare quanto tale shock abbia impattato sui mercati. Tale processo è risultato fondamentale al fine di strutturare un'analisi che verterà sul confronto di performance tra il nostro portafoglio, definito tramite un approccio semi-parametrico basato su copule, e quello di equilibrio, secondo il modello di Black-Litterman, affinché sia possibile derivare un'allocatione ottimale nonostante il Covid shock.

In ultima istanza, al fine di testare la nuova metodologia proposta e confrontarla con il modello di Black-Litterman si propone una simulazione in un contesto reale in modo tale da ampliare il bacino di ricerca del modello di asset allocation, processo attraverso il quale si sceglie la distribuzione delle risorse fra diversi possibili investimenti.

L'idea è di verificare che in una condizione di normalità dei log-rendimenti, le performance, tra il portafoglio di B-L e portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, siano equivalenti in termini di stima di pesi di portafoglio a varianza minima. Sono stati simulati 100 campioni di log-rendimenti di tre serie storiche di 500 osservazioni. Queste serie sono simulate da distribuzioni normali con media nulla, le dipendenze sono simulate con una copula gaussiana, con elementi diagonali della matrice Sigma unitari e correlazioni $\rho_{1,2} = 0.4$, $\rho_{1,3} = 0.4$ $\rho_{2,3} = -0.4$. I pesi di portafoglio sono dunque $\omega_1 = 0.18$, $\omega_2 = 0.41$, $\omega_3 = 0.41$.

I pesi sono ben stimati da entrambi i modelli, anche se nella stima della matrice di copule il metodo proposto performa meglio, dato che cattura anche le forme di dipendenza non-lineari.

Riguardo allo scenario globale, l'impatto della crisi del Covid-19 sui mercati finanziari può essere esplicitato se, per esempio, vengono presi in considerazione, gli indici di mercato S&P 500 (*spx*), FT-SE 100 (*fise*), DAX (*dax*), Nikkei 225 (*nky*) e Shanghai Composite (*sse*), ma anche delle materie prime tra cui i prezzi spot del petrolio greggio Brent Europa (petrolio), i prezzi spot dei gas naturale Henry Hub (gas), i prezzi fissi

dell'oro di Londra PM (oro), i contratti futures del rame del 20 luglio (cop-per) e il contratto futures Sugar #11 Ottobre 20 (zucchero) da Gennaio 2019 a Gennaio 2020. Ipotizziamo un rapporto tra l'ES medio relativo agli ultimi cinque *trading days* del periodo la cui conclusione è datata 23 Giugno 2020, e l'ES medio dei primi 5 *trading days* a partire dal 23 Gennaio 2020, il cui risultato finale siano i moltiplicatori per la simulazione storica. La stima di quest'ultimi verrà calcolata su tre differenti orizzonti temporali: 1 giorno, 10 giorni e 20 giorni. I rendimenti dei primi quattro indici menzionati, *spx*, *ftse*, *dax* e *nky*, presentano un trend caratterizzato da un incremento del livello di rischio analogo, infatti, in base all'orizzonte di rischio; quest'ultimo ha presentato un incremento che oscilla dalle 3 alle 6 volte superiore. Invece l'indice *sse* non ha presentato un incremento delle stime di rischio ES in quanto il moltiplicatore assume un valore inferiore ad uno. Non si può dire lo stesso per l'oro, il rame e lo zucchero, in quanto si evidenzia un livello di rischio maggiorato del doppio, a differenza del petrolio che ha presentato delle stime di rischio considerevolmente aumentate durante la crisi. Si nota come il moltiplicatore per l'orizzonte di rischio a 10 giorni sia maggiore di quello a un giorno e quello per l'orizzonte di 20 giorni è più ampio, anche se sarebbe dovuto esserci un pari livello dei moltiplicatori, a prescindere dall'orizzonte temporale, se a validità della regola della "radice quadrata del tempo" fosse rimasta integra. Ciò sta ad indicare una maggior incidenza della crisi finanziaria da Covid-19 sui rischi il cui è orizzonte maggiore rispetto a quelli con un orizzonte temporale breve.

L'analisi sviluppata da Ramelli and Wagner nel 2020 di cui si parla nel quarto capitolo, offre una documentazione su determinati fatti dell'andamento del mercato azionario globale. Prima di tutto, vengono definite cronologicamente le fasi del virus in quattro fasce: dal 2 gennaio al 17 Gennaio (incubazione), dal 20 Gennaio al 21 Febbraio (focolaio), dal 24 febbraio al 20 Marzo (febbre) e dal 23 Marzo all'8 Giugno (recupero). Definiti i prezzi azionari, questi verranno adeguati per dividendi e frazionamenti azionari, mantenendo esclusivamente azioni ordinarie quotate nelle borse valori principali in tutti i paesi coperti dall'indice MSCI EQWI index. Si evidenzia come i due trimestri considerati siano lo scenario di una riduzione costante del valor medio per tutti i paesi, come Polonia, Turchia e Arabia Saudita abbiano registrato i migliori risultati per le imprese medie a differenza di Messico, Brasile e Sud Africa e come la miglior performance ponderata per il valore sia attribuita alla Cina, Arabia Saudita e Danimarca.

Inoltre i periodi di febbre e recupero sono stati caratterizzati rispettivamente da rendimenti medi negativi e positivi calcolati per il loro valore.

La grande volatilità derivante dalla crisi Covid-19, ha innescato una sensazione di panico che ha avvolto anche i mercati azionari; tale condizione, può essere esaminata tramite indici per il livello di volatilità principali: l'indice VIX (*CBOE Volatility Index*) impiegato negli USA e il Vstoxx in Europa (*Euro Stoxx 50 Volatility Index*). Proprio in tali mercati, l'incertezza cresce e viene carpita da tali indicatori della paura che, dal 2000, hanno registrato il massimo in due episodi, la crisi del credito nel 2008 (ottobre) e proprio a marzo del 2020, quando anche le autorità americane hanno apportato delle drastiche misure restrittive. Gli effetti della pandemia e dell'impatto dell'incertezza sui due relativi mercati si sono concretizzati in maniera differente: facendo un parallelismo con l'indice registrato nel 2008, il VIX ha raggiunto il picco maggiore durante la crisi pandemica, a differenza del Vstoxx che ha fatto registrare il suo massimo durante la crisi del credito. Tali scenari potrebbero essere tradotti tramite una ragione geopolitica, poiché il Covid-19 ha colpito gravemente New York, lasciando invece, inizialmente, più respiro ai poli finanziari europei, quali Londra e Francoforte. La crisi Covid-19 è stata uno shock di così grandi dimensioni che, ad esempio, il mercato azionario britannico, il 12 marzo, ha fatto registrare il calo più grande dal 2000 in un'unica giornata, -10,87%. Ma il FTSE 100 non è il solo ad esser stato così sensibile alla crisi, l'S&P 500 infatti, tra il 19 e il 23 febbraio, ha perso circa il 34% dei relativi valori e soprattutto il FTSE MIB in un mese, ha registrato un - 41% con il picco il 12 marzo 2020 (vd. *Bibliografia Dufour, 2020*).

I tonfi del FTSE MIB sono attribuiti alla grave condizione dell'Italia in quanto essendo stato il primo paese in Europa colpito pesantemente, è stato costretto ad impiegare delle politiche di blocco molto severe, le quali hanno immobilizzato non solo i movimenti dei cittadini ma anche le stesse attività economiche, come la ristorazione, l'ospitalità, la vendita al dettaglio non alimentare e poi il 23 marzo con quelle non essenziali (riaperte il 4 maggio), interessando il 51% delle imprese e il 55% dei lavoratori e determinando una netta differenza nel frazionamento dei lavoratori inattivi tra le diverse province, dipesa dall'eterogeneità nella distribuzione delle attività essenziali. La grande esposizione che ha avuto l'Italia è derivata anche da un debito pubblico particolarmente elevato, al 150%, legato ad una considerevole riduzione delle tasse e ad un incremento della spesa pubblica e da una crescita economica stagnante, il che implica un incremento del rischio di una

profonda recessione. Tale condizione si ripercuote anche sui mercati azionari, i quali, come abbiamo visto prima, hanno subito un'enorme flessione verso il basso del 35% in Italia e nell'eurozona, e del 30% negli USA, la quale è stata attutita dalla BCE tramite un programma di acquisto di asset, il PEPP (*Pandemic Emergency Purchase Programme*). Tuttavia, tale disegno, anche se ha aggirato il rischio di una crisi del debito sovrano, non è stato sufficiente nell'avviare un recupero convincente del mercato europeo e soprattutto di quello italiano, sotto ancora del 15% rispetto a inizio anno, che sia al pari di quello americano il quale ha invece recuperato quasi tutto il gap (vd. *Bibliografia* Borri, 2020). Dalla Figura n.18 si evince come il primo trimestre del 2020 sia stato lo scenario di un andamento a V degli indici il quale però si adatta più o meno velocemente ad una ripresa, come abbiamo visto precedentemente la differenza tra l'S&P 500 e il FTSE MIB. Infatti il primo trimestre ha evidenziato, ad esempio, una riduzione più contenuta del mercato azionario cinese a fronte del 18% di quello russo o del 17% del Nikkei, e tale parametro, correlato alla velocità di ripresa, è strettamente legato a specifiche caratteristiche strutturali del sistema economico cinese che hanno tamponato gli effetti negativi sia del *lockdown* che delle imponenti misure fiscali e monetaria, evidenziando così la "resilienza" del paese (vd. *Bibliografia* Hofmann et al., 2020). Alle contrazioni dei primi tre mesi del 2020 è seguito un deprezzamento delle valute domestiche correlato con un incremento dei rendimenti del debito sovrano in valuta domestica, in quanto vi sono stati dei forti deflussi di capitale verso paesi ritenuti più sicuri e attività. Invece nell'area euro, il DAX, con una riduzione del 7% dei corsi azionari rispetto a inizio anno e rilevata il 30 giugno 2020, è stato uno dei migliori recuperi. I mercati europei hanno fatto registrare una forte crescita del livello di interconnessione tra i paesi definiti *core* e quelli "periferici", i quali riflettono una finanza pubblica e delle condizioni di crescita inferiori rispetto ai paesi del primo gruppo; tale presupposto è indice dell'enorme portata della crisi pandemica. Questo perché i paesi "periferici", esposti a fattori idiosincratici, in una condizione di normalità, presentano un grado di interconnessione inferiore, alterato poi da un contesto di crisi, che tenderà ad abbassare il gap relativo alle due tipologie di paesi. L'effetto negativo dello shock da Covid-19, che si estende uniformemente per tutta la zona euro, è tangibile anche in merito delle aspettative di un netto calo degli utili per azione per il prossimo anno per le imprese domestiche e per le società quotate. L'ampio bacino pandemico ha permesso di irrobustire non solo il grado di connessione tra i vari

paesi dell'eurozona, ma anche la connessione tra i vari indici azionari, tradotta dalla *volatility spillover*, un indicatore di propagazione di volatilità da un mercato all'altro. Tramite ogni mercato e il contributo che quest'ultimo offre alla volatilità totale, al netto di fattori idiosincratici relativi ad altri mercati considerati, la *volatility spillover* si presta ad un duplice utilizzo: identificare il passaggio da un mercato all'altro e il verso del contagio. Quindi l'intensità di propagazione dello shock per i mercati azionari ed in particolar modo per il settore delle banche, è direttamente proporzionale alla diffusione della pandemia, giustificando l'Italia come sorgente di contagio della volatilità negli altri mercati in quanto prima nazione, a livello europeo, ad esser stata vittima del virus (vd. *Bibliografia* Linciano et al, CONSOB, 2020).

La grande incertezza derivante dalle views negative relative agli scenari futuri e il relativo crollo delle quotazioni, ha innescato un pronto intervento da parte delle Autorità di vigilanza dei mercati finanziari, concretizzatosi con varie restrizioni operative volte alla tutela non solo dei singoli investitori, ma anche dell'integrità e del consueto andamento dei mercati.

Nel nostro caso sono state selezionate 400 osservazioni di prezzi azionari dei quali viene prima calcolato il logaritmo e le relative differenze di quest'ultimi, per poi ottenere i log-rendimenti.

Sia y_t , $t = 1, \dots, T$ la serie storica finanziaria dei prezzi di un asset, il log-rendimento è calcolato come $r_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$. Partendo da un orizzonte temporale di 50 osservazioni stimiamo i portafogli ottimali aumentando l'orizzonte temporale di un'osservazione per volta. Per ogni osservazione aggiunta le stime Bayesiane sono effettuate con 10000 iterazioni e un *burnin* di 1000 iterazioni. Saranno riportate le dinamiche dei pesi di portafoglio per entrambi i modelli e le performance complessive di portafoglio. Sulla stessa logica sarà effettuato il *backtesting* introdotto nell'ultima sezione del capitolo.

Per l'applicazione del metodo di Black-Litterman sono stati considerati quattro *benchmark*, S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei e FTSE MIB, in un orizzonte temporale che va dal 10/12/2018 al 17/11/2020. È stato adottato un approccio poco informativo sulle distribuzioni a priori dei parametri del modello. I log-rendimenti sono assunti normali, il vettore delle medie è assunto a priori nullo e la matrice di varianze-covarianze è assunta a priori diagonale con varianze 1; i pesi, di conseguenza, hanno una

distribuzione a priori uniforme. Le stime sono fornite tramite 10000 iterazioni di un algoritmo MCMC con un *burnin* di 1000. La convergenza delle distribuzioni a posteriori dei parametri è immediata e il costo computazionale per 10000 iterazioni è di 8 secondi. Nelle figure sono riportati rispettivamente le performance di portafoglio con i pesi stimati su tutto l'orizzonte temporale di riferimento e le dinamiche dei pesi di portafoglio determinate a partire dalla cinquantesima osservazione con un aumento di un'unità temporale alla volta.

Per l'applicazione del metodo semi-parametrico basato su copule sono stati considerati, ancora una volta, le serie storiche degli indici S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei e FTSE MIB, nell'orizzonte temporale compreso tra il 10/12/2018 e il 17/11/2020. Per coerenza, è stato adottato, anche in questo caso, un approccio poco informativo sulle distribuzioni a priori dei parametri del modello. Essendo le distribuzioni marginali modellate non parametricamente, non ci sono assunzioni probabilistiche a priori sulle densità dei parametri dei log-rendimenti. L'unica assunzione è sulla matrice di copula a priori diagonale con varianze 1; anche in questo caso i pesi, hanno una distribuzione a priori uniforme. Le stime sono fornite tramite 10000 iterazioni di un algoritmo MCMC con un *burnin* di 1000. La convergenza delle distribuzioni a posteriori dei parametri della matrice di copula è immediata e il costo computazionale per 10000 iterazioni è di 3.5 secondi. Come nel caso precedente, nelle figure sono riportati rispettivamente le performance di portafoglio con i pesi stimati su tutto l'orizzonte temporale di riferimento e le dinamiche dei pesi di portafoglio determinate a partire dalla cinquantesima osservazione con un aumento di un'unità temporale alla volta. È possibile osservare che le dinamiche di portafoglio sono completamente diverse rispetto al caso precedente; ciò è dovuto alla sostanziale differenza di valori stimati della matrice di copule rispetto alla matrice varianze-covarianze.

Dal confronto fra i risultati emerge come il portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule abbia un andamento approssimativamente migliore rispetto al portafoglio di Black-Litterman; entrando nello specifico il rendimento stimato da BL è del 14.42% mentre quello relativo al nostro approccio è pari a 17.08%. Tali percentuali emergono solo dopo lo shock da Covid-19. Infatti, la sovrapposizione dei trend dei due portafogli, evidenzia come il portafoglio B-L si più performante in un periodo antecedente allo scoppio della pandemia, anche se non si mantiene tale successivamente. Per tale

motivo è possibile assegnare al portafoglio definito tramite l'approccio proposto, gli aggettivi di *resiliente* e reattivo in quanto, anche se è molto evidente la specularità tra i relativi andamenti, il portafoglio basato su copule risponde meglio ai “cigni neri” che colpiscono il mercato finanziario.

Il VaR stimato tramite l'approccio proposto risulta più efficiente del VaR ottenuto tramite il modello Black-Litterman in un contesto di shock Covid-19, quindi la soglia di questo parametro non viene mai superata. Soglia perché il VaR rappresenta la massima perdita, espressa in una misura sintetica e compatta, che un singolo titolo o un portafoglio di titoli può subire come conseguenza delle fluttuazioni sfavorevoli del mercato in un determinato arco temporale; per tale motivo il VaR è funzione di tre parametri, il livello di confidenza, solitamente pari a 95% o 99%, l'orizzonte temporale (*holding period*) e la valuta funzionale a denominare il valore del rischio. Poiché le relazioni verificatesi in passato vengono assunte come ricorsive, anche il futuro dovrebbe accogliere il manifestarsi di queste ultime così come tali, attribuendo così l'aggettivo di *backward looking* al processo di calcolo del VaR. Il suo utilizzo implica l'ipotesi di normalità dei rendimenti, la quale vige anche per ricavi e perdite dell'investimento, con media coincidente con il rendimento medio e la volatilità viene rappresentata dalla varianza. Quest'ultima viene calcolata tramite la matrice varianze-covarianze, una volta che sono rese note le correlazioni tra i titoli del portafoglio. La misura sintetica del VaR è il frutto di un'analisi oculata dell'esposizione totale generata dalla presa in esame della correlazione esistente tra le varietà di fattori di rischio. L'assunzione probabilistica sulla perdita massima potenziale non concerne la previsione e la conseguente prevenzione da shock economici, quali ad esempio la crisi finanziaria da Covid-19, ma comunque può adattarsi e quindi essere impiegata anche in tali contesti. Generalmente la finestra temporale sulla quale viene calcolato il VaR che varia tra uno e dieci giorni, eccezion fatta per quello impiegato per il rischio di credito, che assume degli orizzonti temporali più lunghi, di circa un anno. Da ciò e dal ruolo di tale parametro come metro di confronto tra le varie rischiosità proprie delle posizioni in portafoglio, si evince come tale strumento si qualifichi come misura universale, adattabile alle molteplici varietà di attività e di rischio. Come stato detto, questo strumento è una misura probabilistica, per cui vi è necessità di computare la distribuzione di probabilità attraverso un metodo che permette la distinzione dei modelli VaR in tre differenti approcci:

- Analitico: assume una distribuzione normale multivariata per ogni fattore di rischio considerato;
- Delle serie storiche: considera un arco temporale significativo e ampio da definire quelle che sono le stime relative dei parametri, il che implica un VaR determinato da una distribuzione empirica dei fattori di rischio, motivo per cui si prescinde la considerazione di un'oculata distribuzione dei rendimenti;
- Monte Carlo: approccio matematico-statistico che implica delle simulazioni funzionali a definire la stima del VaR, infatti medie, varianze e correlazione saranno il frutto di una distribuzione dei fattori di rischio.

Una volta quindi applicato tale modello, dal confronto effettuato tra i rendimenti dei due portafogli emerge un trend speculare tra i due sul lungo periodo, mentre, come osservato anche dal VaR, in situazioni di stress finanziario, il nostro portafoglio performa meglio; in ottica di copertura dalla crisi, risulta più efficiente in quanto l'assunzione di dipendenze, non solo lineari, implica una maggior incorporazione delle informazioni all'interno del portafoglio stesso, quindi una minimizzazione della matrice delinea una maggiore copertura dal rischio rispetto all'approccio standard.

Successivamente è stato sviluppato un modello di *backtesting* per entrambi gli approcci. Tale test retrospettivo, istituito dal Comitato di Basilea nel 1996, fonda la sua analisi su un confronto fra la stima giornaliera del VaR e le perdite effettivamente registrate il giorno seguente (*static profit loss*). Qualora quest'ultime fossero superiori a tale strumento di misurazione con una frequenza congruente con quella del livello di confidenza, allora il modello potrà definirsi corretto. Tale valutazione poggia le basi su due aspetti fondamentali:

- La coerenza delle eccezioni: giorni in cui le perdite superano la stima del VaR secondo lo stesso livello di confidenza impiegato per la stima del VaR stesso;
- La portata delle eccezioni: quanto la perdita eccede il limite del VaR (*vd. Bibliografia Resti and Sironi, 2008*).

Il vantaggio di questo sistema, impiegato nella valutazione dei risultati di una strategia di gestione del portafoglio in un determinato arco temporale, riflette la vulnerabilità del metodo di previsione stesso rispetto all'andamento reale del mercato. Da tale assunto ne deriva la logica che, una strategia efficace in passato può rivelarsi tale in futuro, come una strategia non oculata e con risultati negativi potrà comportare lo stesso esito

successivamente, anche se tale considerazione espone il *backtesting* al problema di *overfitting*, ovvero una strategia proficua passata potrebbe non riuscire a ripetersi in un contesto futuro.

Nel nostro caso sono state selezionate 400 osservazioni di prezzi azionari dei quali viene prima calcolato il logaritmo e le relative differenze di quest'ultimi, per poi ottenere i log-rendimenti.

Sia y_t , $t = 1, \dots, T$ la serie storica finanziaria dei prezzi di un asset, il log-rendimento è calcolato come $r_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$. Ora assumeremo un procedimento, per il calcolo del VaR, ricorsivo che implica la stima dei parametri sulle prime cinquanta osservazioni e la verifica del VaR sull'osservazione successiva. L'operazione è ripetuta aumentando la finestra temporale delle osservazioni (*rolling window*) di un'unità alla volta verificando che l'osservazione successiva non violi questo parametro. Da tale processo risulta una performance migliore del nostro portafoglio rispetto a quello di Black-Litterman in termini di volatilità. Inoltre Black-Litterman assume normalità dei log-rendimenti, mentre il nostro approccio, essendo semi-parametrico, tratta non parametricamente le marginali dando maggiore peso alle osservazioni sulle code delle distribuzioni dei log-rendimenti.

Si evidenzia una violazione del Var, sia al 5% che all'1% di confidenza, nel caso del modello Black-Litterman, e quindi la perdita inattesa si concretizza maggiormente nel periodo di inizio della pandemia con relative ripercussioni e altrettanti eccessi della soglia del VaR, ma meno accentuati, nell'arco temporale successivo.

Non è possibile giungere alle stesse conclusioni nel caso dell'approccio proposto in quanto si evince una migliore stima delle perdite inattese e un migliore contenimento delle perdite nell'orizzonte temporale considerato; infatti la soglia del VaR non viene mai superata per entrambi i livelli di confidenza considerati.

L'obiettivo della tesi consisteva nell'attuare una strategia di gestione del portafoglio che possa risultare ottimale in situazioni di crisi o elevata volatilità dei mercati; quindi il lavoro è stato focalizzato sui portafogli a varianza minima. Partendo da un approccio Bayesiano standard, anche noto in letteratura come modello di Black-Litterman, è stata definita una metodologia innovativa che, oltre a mantenere le peculiarità dell'approccio Bayesiano, risulta più flessibile in termini di modellizzazione dei log-rendimenti degli asset e delle dipendenze tra asset, con lo scopo di ottenere una maggiore copertura dal

rischio in situazioni estreme, proprio come quelle dei recenti shock dei mercati finanziari dovuti al Covid-19.

È stato dunque definito un approccio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, più flessibile rispetto alle metodologie presenti in letteratura. Grazie all'assenza di assunzioni probabilistiche sui log-rendimenti, trattati a livello inferenziale con il metodo della verosimiglianza dei ranghi, il metodo garantisce un'affidabile soluzione al noto problema delle "fat tails" dei log-rendimenti degli asset finanziari, evitando inadeguate assunzioni di Gaussianità. Inoltre la linearità dei legami tra le dipendenze dei rendimenti relativi ai diversi mercati, viene superata grazie ai modelli di copula, che permettono di trattare quest'ultime in maniera trasversale e quindi decisamente più completa in quanto permettono una migliore adattabilità delle distribuzioni multivariate al reale andamento dei fattori di rischio. Non a caso, seppur i portafogli a varianza minima sono ottenuti analogamente per entrambe le metodologie, data la struttura decisamente più informativa dell'approccio proposto, le stime dei pesi di portafoglio sulla stessa finestra temporale risultano differenti e i portafogli più efficienti nel caso del nuovo metodo, come emerge dal backtesting. Il confronto tra le due tipologie di portafogli, viene effettuato tramite la misura di rischio VaR (*Value at Risk*), inteso come vincolo di perdita attesa, seguita successivamente proprio dal modello di *backtesting* poiché i rendimenti passati di un titolo costituiscono una fonte di informazione imprescindibile per l'acquisto di un asset, fornendo così un ampio rilievo alla variabilità passata.

Tramite tutti questi strumenti è stato possibile soppesare i due portafogli ed ottenere un risultato che si concretizza sotto due aspetti critici dell'asset allocation: il rendimento e la volatilità. Ma prima di riassumere i risultati è necessario precisare che sono stati considerati 11 *benchmark*: S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei Index, GB FTSE 100, Svezia OMX, FTSE MIB, ASX 200, Canada SPTSX, DAX di Francoforte, MOEX Index e l'SMI svizzero. Poiché la direzione dei mercati ha implicato un'elevata correlazione tra i rendimenti di tutti i titoli, per semplicità, sono stati selezionati quattro indici che rappresentassero ognuno una diversa zona in modo tale da ottenere un paniere rappresentativo mondiale: S&P 500, Hang Seng di Honk Kong, Nikkei Index e FTSE MIB. Ulteriore motivo riguardante tale scelta è l'efficacia del meccanismo copula, il quale "performa" meglio su distribuzioni a dimensione relativamente ridotta in quanto,

in presenza di un numero elevato di distribuzioni, la matrice di copula Gaussiana tende a quella di varianze-covarianze.

Trattando di rendimento si è evidenziato come un andamento nel lungo periodo, apparentemente speculare, possa essere alterato in misura diversa da uno shock di mercato. Infatti se il portafoglio B-L assume dei rendimenti maggiori nel periodo pre-Coronavirus, dimostra poi una ridotta reattività, a differenza del portafoglio ottenuto con il metodo proposto che fa registrare un rendimento migliore, seppur relativamente; ma il miglior risultato è stato ottenuto in termini di volatilità. Infatti la strategia implementata ha risposto positivamente alle aspettative in quanto ha mostrato una netta differenza del riscontro ottenuto dal portafoglio semi-parametrico rispetto a quello di Black-Litterman successivo all'analisi del VaR. Posti due intervalli di confidenza del 5% e dell'1%, il test ha dimostrato come il nostro portafoglio non ecceda mai la soglia del VaR, anche in un contesto di shock finanziario. Per tanto e per la mole di informazioni relativa alla struttura fondata su dipendenze non solo lineari, il nostro portafoglio Bayesiano semi-parametrico basato su copule, in ottica di copertura dal Covid-19 shock, può essere definito meno rischioso e quindi più efficiente.