LUISS

Dipartimento di Economia e Management

Cattedra di Finanza Aziendale

Le opzioni: dai modelli di pricing delle opzioni finanziarie alle opzioni reali nei progetti d’investimento

RELATORE
Prof. Pierluigi Murro

CANDIDATO
Andrea Felici
matricola 228171

ANNO ACADEMICO 2020/2021

a Papà, Mamma, Nico e Sofia

INDICE

Introduzione

L'oggetto della trattazione che segue saranno le opzioni, le quali verranno presentate e analizzate sia in una prospettiva tipicamente finanziaria sia secondo un approccio di tipo aziendale, mostrando come la teoria delle opzioni reali possa risultare decisiva nella valutazione di progetti d'investimento.
In particolare, lo scopo di questo elaborato è tentare di dimostrare in che modo e a quali condizioni sia possibile applicare i metodi di pricing tipici delle opzioni negoziate sui mercati finanziari alla valutazione delle opzioni reali, il cui valore intrinseco è molto più complesso da identificare, e di conseguenza da valutare in ottica finanziaria. La formulazione dei principali modelli di valutazione delle opzioni ha richiesto un grande sforzo concettuale e matematico da parte di numerosi economisti nella seconda metà del secolo scorso, portando a risultati che costituiscono pietre miliari della teoria finanziaria, specialmente nel campo dei derivati, come l'equazione differenziale proposta da Black e Scholes. Tuttavia, come verrà chiarito nel corso della trattazione, tale modello risulterà inadatto per la valutazione di opzioni su attività reali e dovremo quindi utilizzare un approccio basato sulla costruzione di alberi binomiali, proposto per la prima volta da Cox, Ross e Rubinstein nel 1979.
Nell'ultima parte della trattazione il concetto di percorso binomiale verrà ulteriormente ampliato, proponendo uno schema di tipo trinomiale per il valore di un attività tra i nodi successivi dell'albero decisionale; tale maggiore grado di complessità risulterà più adatto a descrivere la variabilità dei diversi scenari possibili per un progetto d'investimento e permetterà di cogliere meglio il valore derivante dalla flessibilità delle scelte manageriali prima e soprattutto nel corso dell'investimento in questione.
Nello specifico, il primo capitolo sarà dedicato alla definizione delle principali caratteristiche delle opzioni finanziarie, mettendo in evidenza il diverso profilo di rischio-rendimento che caratterizza gli acquirenti e i venditori di questo strumento finanziario e costruendo i differenti diagrammi di payoff e di profitto per le opzioni di tipo call e di tipo put. In seguito, verranno identificate le variabili fondamentali che determinano il valore di un'opzione finanziaria, evidenziando in che modo la variazione di ogni parametro possa influenzare il valore finale dell'opzione; infine sarà presentata e dimostrata, sia con un approccio grafico che con una rigida dimostrazione matematica, la relazione fondamentale che lega il prezzo delle opzioni put e call con lo stesso prezzo di esercizio e la stessa scadenza, chiamata appunto *put-call-parity*.
Nel secondo capitolo verranno approfonditi due tra i principali modelli di valutazione delle opzioni finanziarie, vale a dire il modello di Black-Scholes-Merton e il Metodo Binomiale nella formulazione proposta da Cox, Ross e Rubinstein. Grande attenzione sarà dedicata alla descrizione delle differenti ipotesi che stanno alla base di questi due approcci e che saranno una delle discriminanti più importanti

nel momento in cui dovremo scegliere il modello più adatto alla valutazione delle opzioni reali. In particolare, nella discussione del metodo binomiale sarà dato ampio spazio alla teoria della valutazione neutrale al rischio che rappresenta un'intuizione fondamentale nelle metodologie di valutazione dei derivati e verrà utilizzata anche nel terzo capitolo dedicato alle opzioni reali.
L'ultimo capitolo si apre con un'introduzione alla teoria delle opzioni reali che negli ultimi decenni ha impegnato numerosi studiosi nella ricerca di un criterio di scelta nelle decisioni aziendali che sia il più completo possibile e non si limiti alla prospettiva meramente finanziaria, statica e passiva tipica del metodo del Valore Attuale Netto (VAN). Infatti, la possibilità di assimilare la flessibilità manageriale e le scelte che seguono una decisione d'investimento a delle opzioni (di tipo reale, appunto) consente di avere una prospettiva molto più completa su quelli che possono essere i pro e i contro di una qualsiasi tipologia di progetto aziendale. Chiaramente, prima di passare a elencare le diverse tipologie di opzioni reali che sono state associate alle diverse decisioni aziendali, è stato doveroso segnalare tutte le differenze che si possono riscontrare tra le opzioni finanziarie e quelle reali, che in molti casi rendono di fatto impossibile applicare i modelli di valutazione presentati nel secondo capitolo alla valutazione delle opzioni reali, soprattutto perché molte ipotesi alla base di questi modelli, soprattutto nel caso delle formule di Black-Scholes, non risultano valide per le attività reali. Tuttavia, si dimostrerà che un compromesso è possibile e nell'ultimo paragrafo il modello degli alberi trinomiali (evoluzione di quello binomiale) verrà di fatto utilizzato per dare un valore finanziario alle possibilità di scelta dei manager nel corso di un progetto di investimento. Nel nostro caso il progetto sarà quello dello sfruttamento di un giacimento petrolifero che dapprima verrà valutato con il metodo del VAN e in seguito sottoposto alla valutazione con il metodo del VAN Esteso (che incorpora il valore delle opzioni reali), mostrando come i risultati possano divergere moltissimo, influenzando in modo decisivo le valutazioni dei manager.

Capitolo 1 – Introduzione alle opzioni

1.1 Opzioni: definizione e tipologie

Le Opzioni sono strumenti finanziari il cui valore non è autonomo ma deriva dal prezzo di un’attività sottostante di varia natura[1]. Perciò rientrano nella categoria degli strumenti finanziari derivati il cui valore dipende appunto dall’andamento del sottostante di riferimento. Possiamo dunque definire le opzioni come dei contratti finanziari che danno il diritto all’acquirente, dietro il pagamento di un prezzo (premio), di acquistare o vendere una certa quantità di un’attività finanziaria a una determinata data di scadenza a un determinato prezzo di esercizio (detto anche strike price).[2]

Come emerge dalla definizione precedente esistono sul mercato due tipi di opzioni. Un'opzione Call conferisce al titolare il diritto di acquistare l'attività sottostante a una certa data per un determinato prezzo. Un'opzione put, al contrario, conferisce al possessore il diritto di vendere l'attività sottostante a una certa data per un determinato prezzo. La data nel contratto è nota come data di scadenza o scadenza.

La distinzione fatta in questi termini può essere riferibile soltanto alle opzioni cosiddette Europee che hanno la caratteristica di poter essere esercitate solamente nel giorno indicato nel contratto come scadenza. Tuttavia, nel mercato esistono anche le opzioni Americane, le quali possono essere esercitate in qualsiasi momento fino alla data di scadenza. Tali denominazioni non hanno alcun riferimento geografico ma servono soltanto a distinguere le due differenti tipologie di esercizio delle opzioni. Al giorno d’oggi la maggior parte delle opzioni negoziate in borsa sono americane mentre le opzioni europee sono generalmente più facili da analizzare a livello teorico e infatti alcune delle proprietà di un'opzione americana sono spesso dedotte da quelle della sua controparte europea.
Va sottolineato che un'opzione conferisce al titolare il diritto e non l’obbligo di vendere o comprare. Questo è ciò che distingue le opzioni da altri contratti derivati come *forward* e *future,* dove il possessore è obbligato ad acquistare o vendere l'attività sottostante alla data di scadenza del contratto. Questa facoltà di decisione ha però un prezzo e di fatti mentre non costa nulla stipulare un contratto forward o future (se non per un minimo margine da versare detto margine obbligatorio), l'acquisizione di un'opzione comporta un costo detto Premio da corrispondere al venditore.

---

[1] La natura del sottostante di un’opzione può essere reale come nel caso delle materie prime, oppure finanziaria come nel caso di azioni, obbligazioni, tassi di cambio o indici.
[2] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

Ai fini della trattazione proposta in questo elaborato l'attenzione sarà dedicata in misura quasi esclusiva alle opzioni aventi come sottostante azioni. Nel tentativo di dare una prima spiegazione intuitiva del comportamento del prezzo delle opzioni su azioni, nella Tabella 1.1 sono stati riportati i prezzi delle opzioni sull'azione Amazon così come disponibili ad aprile 2021 sul sito web Yahoo Finance. Nella tabella proposta i prezzi delle opzioni vengono osservati in relazione a due variabili fondamentali: il prezzo di esercizio e la data di scadenza.

Scadenza	Prezzo di Esercizio	Prezzo Opzione Call	Prezzo opzione Put
07/05/21	$ 3.155,00	$ 150,20	$ 89,15
	$ 3.175,00	$ 141,04	$ 96,97
	$ 3.250,00	$ 104,82	$ 124,83
	$ 3.300,00	$ 81,75	$ 151,81
	$ 3.400,00	$ 48,55	$ 217,73
18/06/21	$ 3.100,00	$ 230,50	$ 98,00
	$ 3.150,00	$ 199,35	$ 117,06
	$ 3.250,00	$ 146,00	$ 163,37
	$ 3.400,00	$ 88,32	$ 261,15
	$ 3.600,00	$ 40,90	$ 407,07
16/07/21	$ 3.145,00	$ 220,50	$ 165,61
	$ 3.185,00	$ 210,15	$ 251,75
	$ 3.225,00	$ 181,96	$ 176,25
	$ 3.260,00	$ 128,55	$ 195,00
	$ 3.400,00	$ 106,72	$ 280,30

Tabella 1.1 – Prezzi di opzioni Call e Put sul titolo Amazon nel mese di aprile 2021[3]

Analizzando i dati si possono mettere in evidenza alcune proprietà fondamentali delle opzioni che saranno poi chiarite e approfondite nei prossimi paragrafi. È evidente che il prezzo di un'opzione Call, indipendentemente dalla scadenza del contratto, è inversamente proporzionale al prezzo di esercizio dell'opzione stessa; ciò significa che all'aumentare del prezzo che si dovrà pagare a scadenza per l'acquisto di azioni (Amazon in questo caso), il valore del diritto di effettuare tale acquisto diminuisce. Nel caso delle opzioni Put, considerando le medesime scadenze, la relazione tra prezzo dell'opzione e prezzo di esercizio risulta essere opposta a quella appena descritta per le opzioni Call. Il valore dell'opzione Put tende infatti ad aumentare man mano che il prezzo di esercizio ottenibile dalla vendita dell'azione aumenta. In sintesi, il prezzo di un'opzione call diminuisce

[3] Yahoo Finance, elaborazione personale dei dati.

all'aumentare del prezzo di esercizio, mentre il prezzo di un'opzione put aumenta all'aumentare del prezzo di esercizio. Entrambi i tipi di opzione condividono un’altra proprietà, il loro prezzo è infatti positivamente correlato al tempo mancante alla scadenza. Queste proprietà delle opzioni saranno discusse ulteriormente nel quarto paragrafo di questo capitolo.

Nel prossimi due paragrafi verranno invece approfondite le caratteristiche delle Opzioni Call e Put sulle azioni. Queste due tipologie saranno analizzate separatamente, mettendo in luce le determinanti del valore a scadenza di un’opzione e le ragioni che spingono a esercitare o meno i diritti garantiti dal possesso dell’opzione stessa. Ricordando che nei mercati finanziari la stesura di qualsiasi tipologia di contratto richiede la presenza di due controparti, si analizzerà anche la posizione dei venditori di opzioni e le loro possibilità di profitto dalla vendita. Il quadro dell’analisi è dunque completo soltanto se si considerano tutti e quattro i partecipanti la mercato delle opzioni:

1. Acquirenti di opzioni call
2. Venditori di opzioni call
3. Acquirenti di opzioni put
4. Venditori di opzioni put

1.2 Opzioni Call

In questo paragrafo viene definito il valore a scadenza (Payoff) di un’opzione Call sia nel caso dell’acquirente che del venditore, analizzando inoltre le opportunità di profitto per entrambe le categorie di operatori finanziari.

1.2.1 Payoff e profitto per un'opzione call acquistata

Per studiare meglio le opzioni e le opportunità di ritorno da un investimento in opzioni è utile rappresentare graficamente il valore a scadenza dell’opzione come funzione del prezzo del sottostante. Tale valore a scadenza viene detto Payoff dell’opzione ed è il fattore che determina la scelta del possessore dell’opzione tra l’esercizio o meno del diritto di acquisto o vendita incorporato nel contratto di opzione. Nel caso delle opzioni Call il possessore non è obbligato ad esercitarla e lo farà solo se il payoff al momento della scadenza è maggiore di zero. Definendo con S il prezzo sul mercato dell’azione alla data di scadenza e con K il prezzo di esercizio indicato dal contratto, indichiamo il Payoff ottenibile dall’acquisto di un’opzione Call come:

$$\text{Payoff call acquistata} = \max\,[0, S - K] \tag{1.1}$$

L'espressione max [a, b] significa prendere il maggiore dei due valori a e b. Il valore dell'opzione Call è dunque correlato al prezzo dell'azione sottostante. Come illustrato dal diagramma di posizione[4] in Figura 1.1 se il prezzo dell'azione a scadenza dovesse essere inferiore al prezzo di esercizio K il titolare dell'opzione Call sul titolo non sarà disposto ad esercitarla poiché può comprare sul mercato l'azione ad un prezzo più basso di quello indicato nel contratto in suo possesso. In questo caso l'opzione non ha valore e il Payoff dell'investimento risulta essere 0; è importante notare che basta che il prezzo dell'azione scenda al di sotto del prezzo di esercizio affinché l'opzione Call perda il suo valore ma per quanto il prezzo dell'azione scenda ulteriormente il valore dell'opzione Call rimarrà sempre 0 e non assumerà mai valori negativi. Se al contrario il titolare dell'opzione Call è fortunato e al momento della scadenza il prezzo sul mercato dell'azione risulta essere maggiore del prezzo di esercizio, egli eserciterà il diritto di opzione che gli consente di comprare il titolo a un prezzo più vantaggioso rispetto a tutti gli altri operatori sul mercato. Il Payoff dell'opzione sarà quindi positivo e pari a S – K; perciò, in linea strettamente teorica, non c'è un limite massimo al payoff positivo poiché esso dipende dal prezzo dell'azione sottostante che può crescere in modo indefinito.

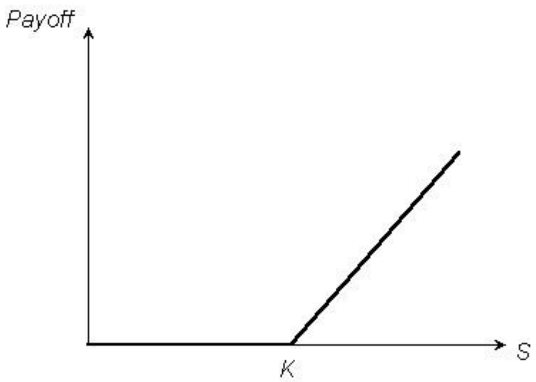

Figura 1.1 – Payoff opzione call acquistata[5]

Il diagramma di posizione mostra esclusivamente i risultati dell'opzione a scadenza senza tener conto del costo iniziale dell'acquisizione della posizione. Questa modalità di rappresentazione chiarifica il criterio di scelta di esercizio da parte del possessore di un'opzione Call ma dall'altro lato può generare confusione poiché fa sembrare l'acquisto di un'opzione Call un investimento sicuro che nella peggiore delle ipotesi prevede una perdita nulla. Tuttavia, come sottolineato in precedenza, l'acquisto di un'opzione ha un costo detto premio che possiamo considerare alla stregua di un premio

[4] Il diagramma di posizione è un grafico che mostra i possibili risultati ottenibili dall'investimento in un titolo derivato.
[5] Wikipedia. Payoff a scadenza di un'opzione call, https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_call

assicurativo poiché l'acquisto dell'opzione Call permette di proteggere il titolare da un rialzo del prezzo del titolo al di sopra di un determinato prezzo, stabilito nel contratto.

Al fine di evidenziare le possibilità di guadagno o perdita associate all'acquisto di un'opzione Call vengono costruiti degli appositi diagrammi di profitto che incorporano nella valutazione del payoff il prezzo originariamente pagato per l'acquisto dell'opzione, in modo tale da ottenere il profitto o la perdita per l'investitore. Il profitto dell'opzione viene dunque calcolato come:

$$\text{Profitto call acquistata} = \max\,[0, S - K] - \text{premio dell'opzione} \quad (1.2)$$

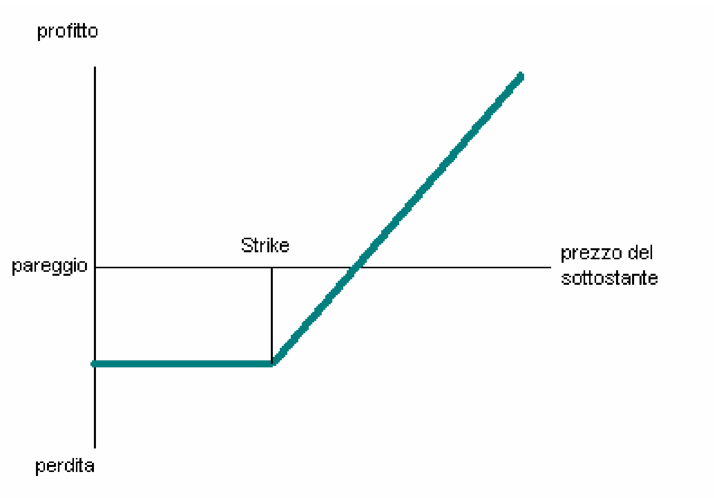

Figura 1.2 – Profitto acquirente di una Call[6]

Il diagramma di profitto esposto nella Figura 1.2 ribadisce che l'opzione Call avrà un valore positivo a scadenza solo nel caso in cui il prezzo del sottostante sia superiore al prezzo di esercizio ma aggiunge a tale valore a scadenza la componente negativa derivante dall'esborso iniziale dovuto per assicurarsi il diritto all'esercizio. È dunque chiaro come il titolare dell'opzione Call subisca una perdita pari al premio pagato nel caso in cui alla fine non eserciti il diritto acquisito. È interessante notare come anche nel caso in cui $S > K$ e quindi l'opzione di acquisto venga effettivamente esercitata, il titolare dell'opzione potrebbe ancora registrare una perdita nel caso in cui il Payoff ottenuto (S-K) risulti inferiore al premio pagato ex-ante per l'acquisto dell'opzione. Se invece il payoff a scadenza è maggiore del premio pagato il titolare dell'opzione la eserciterà e otterrà un profitto.

[6] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

1.2.2 Payoff e profitto per un'opzione call venduta

Ora esaminiamo la situazione dal punto di vista del venditore dell'opzione Call. Il venditore di opzioni è detto anche *writer* ed è l'operatore finanziario che assume una posizione corta in un'opzione call. Il writer riceve il premio per l'opzione a fronte dell'obbligo di vendere il titolo sottostante in cambio del prezzo di esercizio se l'acquirente dell'opzione la esercita alla scadenza. L'attività dell'acquirente corrisponde dunque al debito del venditore e il diagramma di posizione che evidenzia il payoff derivante dalla vendita di un'opzione call sarà esattamente speculare a quello indicato nella Figura 1.1. Infatti, se alla scadenza il prezzo dell'azione è inferiore al prezzo di esercizio, l'acquirente non eserciterà l'opzione e il venditore non sarà più obbligato a vendere; al contrario se S > K il compratore chiederà la consegna delle azioni corrispondendo il prezzo di esercizio e il *writer* sarà obbligato a consegnare il numero prestabilito di azioni al prezzo di esercizio.
In termini numerici il payoff e il profitto di una Call dal punto di vista del venditore sono esattamente l'opposto di quelli di una Call acquistata:

$$\text{Payoff della Call venduta} = -\max[0, S - K] \tag{1.3}$$

$$\text{Profitto della Call venduta} = -\max[0, S - K] + \text{premio dell'opzione Call} \tag{1.4}$$

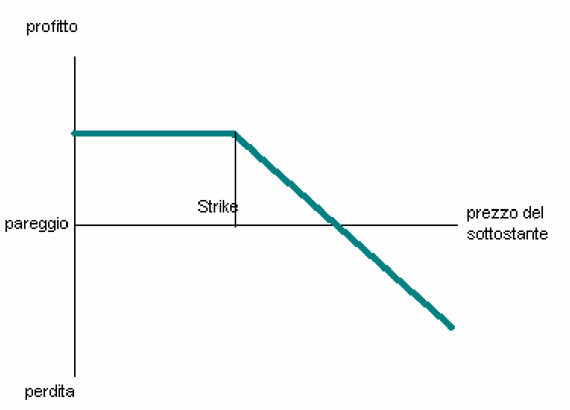

Figura 1.3 – Profitto dalla vendita di una Call[7]

Come evidenziato dal Diagramma di profitto in Figura 1.3, il profitto per il venditore di un'opzione Call può essere al massimo pari al premio incassato al momento della vendita. Il *writer* chiaramente ripone la sua fiducia nel fatto che il prezzo del sottostante non superi la soglia del prezzo di esercizio

[7] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

alla data di scadenza, altrimenti potrà incorrere in una perdita se il differenziale S - K risulta maggiore del premio incassato. La posizione del venditore di un’opzione Call risulta più rischiosa rispetto a quella della sua controparte poiché a fronte di un profitto immediato limitato egli sopporta il rischio di una perdita futura potenzialmente illimitata causata da un aumento importante del prezzo dell’azione.
Chiaramente il diagramma di profitto per un venditore sarà esattamente speculare a quello dell’acquirente di un’opzione Call esposto in Figura 1.2.

1.3 Opzioni Put

Nelle prossime due sezioni esamineremo il valore a scadenza e il profitto derivante dall’acquisto o dalla vendita di un’opzione Put. Tale tipologia di opzione dà il diritto al titolare di vendere l’azione sottostante alla data di scadenza del contratto a un prezzo predeterminato (prezzo di esercizio) a fronte dell’impegno da parte del venditore di acquistarle a quel prezzo. Si dimostrerà come le circostanze in cui l’opzione Put ha valore ed è redditizia sono esattamente opposte a quelle in cui è redditizia la Call, attraverso l’analisi dei relativi diagrammi di posizione e di profitto.

1.3.1 Payoff e profitto per un'opzione put acquistata

L'opzione put dà all'acquirente il diritto di vendere l'attività sottostante al prezzo di esercizio. L'acquirente è disposto a esercitare tale diritto solo se l'asset, al momento della scadenza, ha un valore inferiore al prezzo di esercizio, in questo modo ottiene dalla vendita un ricavo superiore a quello che potrebbe ottenere vendendo semplicemente l’azione sul mercato; tale surplus è proprio pari alla differenza tra il prezzo di esercizio incassato e il prezzo a cui è scambiata l’azione al momento della scadenza e corrisponde al valore dell’opzione Put a scadenza o payoff. Se, in caso contrario, alla data di scadenza il prezzo del sottostante S è maggiore dello strike price concordato K, il titolare dell’opzione non ha interesse a esercitarla poiché avrebbe un risultato migliore andando a vendere l’azione direttamente sul mercato; in questo caso il possesso dell’opzione non dà alcun vantaggio al titolare e dunque il suo valore finanziario è pari a 0. Riassumendo in termini numerici ciò che è stato appena detto si può formalizzare il payoff derivante dalla sottoscrizione di un’opzione Put:

$$\text{Payoff dell'opzione put} = \max[0, K - S] \tag{1.5}$$

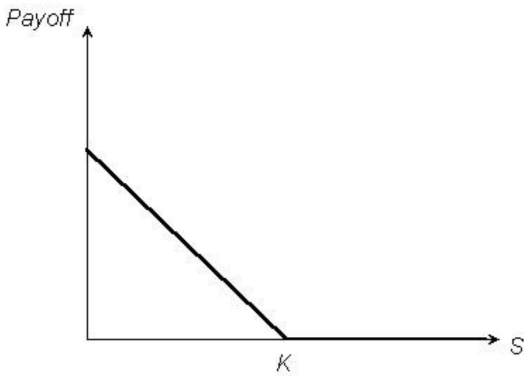

Figura 1.4 – Payoff derivante dall’acquisto di un’opzione Put[8]

Come fatto in precedenza nell’analisi dell’opzione Call consideriamo innanzitutto il diagramma di posizione che evidenzia i payoff dell’opzione trascurando il premio pagato inizialmente per l’acquisto dell’opzione Put. Dal grafico è possibile notare come per ogni prezzo S > K l’opzione Put non ha alcun valore mentre più il prezzo dell’azione diminuisce al di sotto del prezzo di esercizio più il Payoff associato all’opzione aumenta. Questa volta, a differenza di quanto accadeva per l’opzione call, c’è un limite teorico a tale payoff poiché il prezzo di un’azione sul mercato non può mai raggiungere livelli negativi e dunque il payoff teorico massimo è proprio pari al prezzo di esercizio K.

Tuttavia, al momento dell'acquisizione dell'opzione, l'acquirente della put paga il premio dell'opzione al venditore e di tale transazione si deve tenere conto nel calcolo del profitto totale realizzabile attraverso l’acquisto di un’opzione Put. Il profitto dell'opzione viene perciò calcolato come:

$$\text{Profitto put acquistata} = \max\,[0, K - S] - \text{premio dell'opzione Put} \quad (1.6)$$

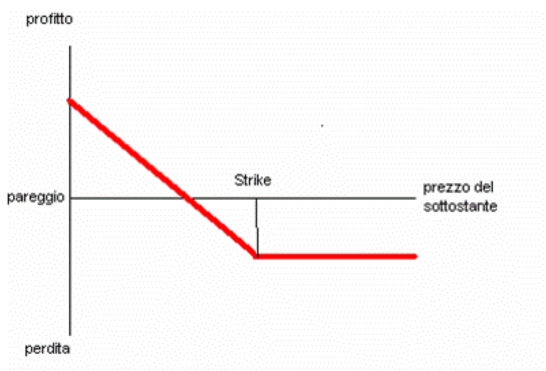

Figura 1.5 – Profitto acquisto Opzione Put[9]

---

[8] Wikipedia. Payoff a scadenza di un’opzione put, https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_ put

[9] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

Il diagramma di profitto mostrato nella Figura 1.5 presenta un andamento del tutto identico a quello del Diagramma di posizione disegnato in Figura 1.4 ma la sua posizione è traslata verso il basso poiché viene considerata la componente negativa del premio pagato al momento della sottoscrizione dell'opzione. Ciò significa che l'acquirente in t_0 avrà un saldo finanziario negativo: nel caso in cui alla data di scadenza egli non eserciti l'opzione per i motivi sopra indicati, a tale posizione finanziaria corrisponderà una perdita di pari valore. L'esercizio dell'opzione Put riduce sempre tale perdita e può portare a un profitto effettivo solo quando la differenza tra il prezzo di esercizio e il prezzo dell'azione a scadenza, ossia l'entrata, superi l'esborso iniziale costituito dal premio. Proseguendo il ragionamento fatto per il payoff, il profitto teorico massimo è pari la prezzo di esercizio K meno il premio pagato.

1.3.2 Payoff e profitto per la vendita di un'opzione Put

Abbiamo appena visto che l'acquisto di un'opzione Put è subordinato al pagamento di un premio al venditore. Il *writer* della put spera che il titolare dell'opzione non la eserciti e in questo caso il suo payoff sarà pari a 0 mentre in caso contrario avrà un payoff negativo poiché sarà costretto dal contratto ad acquistare un titolo a un prezzo più alto di quello del mercato. Perciò, siccome il venditore non avrà mai un payoff positivo alla scadenza, il premio pagato dall'acquirente put al momento dell'acquisto dell'opzione lo compensa per questa posizione non vincente.
Nel caso di opzioni Put è importante essere chiari sull'uso dei termini "acquirente" e "venditore", infatti l'acquirente della put possiede un contratto che dà il diritto di vendere l'azione a un prezzo stabilito e pertanto risulta un venditore dell'attività sottostante, diremo che assume una posizione *short* sul titolo sottostante. Allo stesso modo, il venditore della put è obbligato ad acquistare l'azione qualora l'acquirente della put decida di vendere perciò egli è potenzialmente un acquirente del sottostante e in quel caso assumerà una posizione rialzista o posizione *long* sul titolo.
Anche in termini numerici possiamo vedere come i payoff e il profitto associati alla vendita di un'opzione Put siano esattamente opposti a quelli derivanti dall'acquisto della stessa tipologia di opzione:

$$\text{Payoff put venduta} = -\max[0, K - S] \tag{1.7}$$

$$\text{Profitto put venduta} = -\max[0, K - S] + \text{premio dell'opzione Put} \tag{1.8}$$

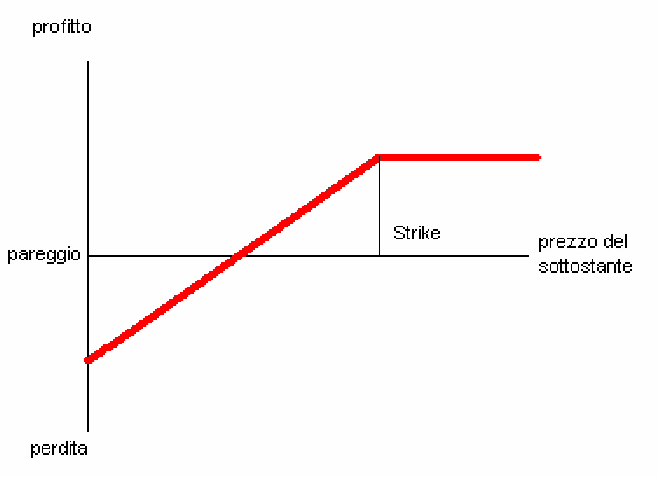

Figura 1.6 – Profitto dalla vendita di un'opzione Put[10]

Il grafico in Figura 1.6 mostra il diagramma di profitto associato alla vendita di una Put. Come ci aspettavamo l'andamento del grafico è speculare a quello relativo all'acquisto del medesimo strumento finanziario. Possiamo sottolineare come il profitto del *writer* sia legato esclusivamente al premio ricevuto al momento della sottoscrizione e sarà massimo fino a quando il prezzo dell'azione a scadenza rimane superiore al prezzo di esercizio, inibendo l'esercizio dell'opzione Put. Al contrario, l'esercizio dell'opzione da parte del titolare va ad erodere il profitto del venditore che subirà una perdita quando il prezzo che dovrà corrispondere a chi esercita l'opzione, ossia il differenziale K - S (uscita di cassa), sarà superiore all'entrata registrata al momento del pagamento del premio. Per il venditore, dunque, il profitto potenziale sarà immediato e limitato mentre la perdita può assumere cifre molto considerevoli se il prezzo del sottostante crolla vertiginosamente.

Possiamo dunque concludere che l'assunzione di una posizione corta in opzioni ha un profilo di rischio certamente superiore alla posizione lunga corrispondente. Per tale ragione molto spesso gli operatori finanziari combinano la vendita di questi strumenti finanziari con la compravendita di altre attività finanziarie (azioni, future, ETF, opzioni su indici o azioni) al fine di realizzare strategie di investimento più complesse che possono perseguire finalità differenti come, ad esempio, la copertura delle esposizioni in azioni o derivati (hedging), l'incremento della performance di portafoglio o la mera speculazione[11].

---

[10] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

[11] Borsa Italiana (2017). Le opzioni: definizione e funzionamento, https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

1.3.3 Il valore intrinseco e la “danarosità” delle opzioni

Le opzioni sono spesso descritte dal loro grado di “danarosità” o *moneyness*. Questo termine indica il valore intrinseco dell’opzione ovvero il payoff dell'opzione se questa fosse esercitata immediatamente (il termine è usato per descrivere sia le opzioni americane che quelle europee anche se le opzioni europee non possono essere esercitate fino alla scadenza). Il valore intrinseco di un’opzione può essere calcolato in qualsiasi istante di valutazione e, ricordando le formule (1.1) e (1.5) dei paragrafi precedenti, sarà pari a S_t - K per le opzioni Call e a K - S_t per le opzioni Put, dove con S_t si indica il prezzo del sottostante del contratto di opzione nell’istante di valutazione t di riferimento. Detto ciò, un'opzione *in-the-money* è un'opzione che avrebbe un payoff positivo (ma non necessariamente un profitto positivo) se esercitata immediatamente al tempo t; una call con un prezzo di esercizio inferiore al prezzo dell'asset e una put con un prezzo di esercizio maggiore del prezzo dell'asset sono entrambe in-the-money.

Un'opzione *out-of-the-money* è quella che avrebbe un payoff negativo se esercitata immediatamente; è quindi il caso di un’opzione call con un prezzo di esercizio maggiore del prezzo dell'asset e una put con un prezzo di esercizio inferiore al prezzo dell'asset, entrambe opzioni out-of-the-money.

Un'opzione *at the money* è quella per cui il prezzo di esercizio è approssimativamente uguale al prezzo dell'asset e quindi darebbe un payoff pari a 0 se venisse esercitata al momento dell’acquisto.

La relazione tra il prezzo corrente del sottostante e il prezzo di esercizio dell’opzione consente di avere delle informazioni anche sul grado di rischiosità dell’opzione e di conseguenza sul prezzo che gli operatori finanziari sarebbero disposti a pagare per questo strumento finanziario. In linea generale un’opzione in-the-money (che sia una Call o una Put) è meno rischiosa di un’opzione out-of-the-money della stessa tipologia e perciò, applicando l’ipotesi di avversione al rischio degli investitori, essi saranno disposti a pagare sempre un prezzo maggiore per lo strumento meno rischioso rispetto a quello che presenta un grado di rischio maggiore. Tale ragionamento è giustificato dai dati precedentemente riportati nella Tabella 1.1 e relativi ai prezzi delle opzioni sull’azione Amazon disponibili sul mercato ad aprile 2021. Considerando che il prezzo di un’azione Amazon in quel periodo era di circa 3.225 $ possiamo dire che tutte le opzioni Call con un prezzo di esercizio minore del prezzo dell’azione sono in-the-money, così come tutte le opzioni Put che presentano uno strike price maggiore di 3.225 $. Dai dati disponibili risulta chiaro come i prezzi di questa categoria di opzioni siano sempre maggiori rispetto a quelli delle corrispettive opzioni out-of-the-money, proprio perché darebbero un payoff positivo se esercitate immediatamente, a differenza di quelle out-of-the-money.

1.4 Determinanti del valore di un’opzione

Ci sono cinque fattori che influenzano il prezzo di un'opzione su azioni[12]:

1. Il prezzo corrente delle azioni, S_0
2. Il prezzo di esercizio, K
3. Il tempo alla scadenza, T
4. La volatilità del prezzo delle azioni, σ
5. Il tasso di interesse privo di rischio, r

In questa sezione, consideriamo cosa succede ai prezzi delle opzioni quando si verifica una modifica a uno di questi fattori, con tutti gli altri fattori che rimangono fissi.

1.4.1 Ipotesi e notazione

Prima di procedere alla discussione, occorre stabilire le ipotesi di base su cui poggia tale modello di valutazione delle opzioni, nonché la notazione e simbologia utilizzata nelle varie dimostrazioni. In questo ambito si presuppone che ci siano alcuni partecipanti al mercato, come le grandi banche di investimento, per i quali valgono le seguenti ipotesi:

1. Non ci sono costi di transazione.
2. Tutti i profitti di negoziazione (al netto delle perdite di negoziazione) sono soggetti alla stessa aliquota fiscale.
3. L'assunzione e l'erogazione di prestiti sono possibili al tasso di interesse privo di rischio.

Si ipotizza che questi partecipanti al mercato siano pronti a sfruttare le opportunità di arbitraggio non appena esse si manifestino, ciò significa che qualsiasi opportunità di arbitraggio disponibile scompare molto rapidamente. Ai fini della nostra analisi, è quindi ragionevole presumere che non vi siano opportunità di arbitraggio.

---

[12] In realtà i fattori che determinano il prezzo di un’opzione sono 6 poiché occorre considerare anche i dividendi attesi sull’azione durante la vita dell’opzione (il cui valore attuale si indica con D). I dividendi fanno diminuire il prezzo delle azioni nel giorno di stacco. Si tratta di un fatto negativo per il valore delle opzioni call, mentre aumenta il valore delle opzioni put. Perciò la relazione tra il valore di una call e l’importo dei dividendi attesi è negativa mentre la relazione tra il valore di una put e l’importo dei dividendi attesi è positiva. In questa trattazione però l’impatto dei dividendi sul valore delle opzioni verrà per semplicità ignorato; per approfondimenti sul ruolo dei dividendi nella determinazione del prezzo delle opzioni su azioni si rimanda a Hull J.C., (2015). Options, Futures and Others Derivatives. Pearson.

Useremo la seguente notazione:

S_0: prezzo corrente dell'azione
S_T: prezzo dell'azione al tempo T
K: prezzo di esercizio dell'opzione
T: scadenza dell'opzione
r: tasso di interesse privo di rischio composto in modo continuo per un investimento con scadenza temporale T
C: valore dell'opzione call americana per l'acquisto di un'azione
P: valore dell'opzione put americana per la vendita di un'azione
c: valore dell'opzione call europea per l'acquisto di un'azione
p: valore dell'opzione put europea per la vendita di un'azione

Va ricordato che r è il tasso di interesse nominale, non il tasso di interesse reale. Possiamo supporre che $r > 0$. In caso contrario, un investimento privo di rischio non fornirebbe alcun vantaggio rispetto alla liquidità (infatti se $r < 0$, la liquidità sarebbe preferibile a un investimento privo di rischio). Inoltre, nel calcolo dei valori attuali o montanti di attività finanziarie si farà sempre riferimento al regime di capitalizzazione composta, applicando la convenzione esponenziale[13].

1.4.2 Prezzo delle azioni e prezzo di esercizio

Se un'opzione call viene esercitata in un momento futuro, il payoff sarà l'importo per il quale il prezzo delle azioni supera il prezzo di esercizio. Le opzioni call aumentano quindi di valore all'aumentare del prezzo delle azioni e diminuiscono di valore all'aumentare del prezzo di esercizio come mostrato dai grafici a) e c) riportati nella Figura 1.7. Per un'opzione put, il payoff all'esercizio è l'importo per il quale il prezzo di esercizio supera il prezzo dell'azione. Le opzioni put quindi si comportano in modo opposto rispetto alle opzioni call: perdono valore all'aumentare del prezzo delle azioni e acquistano valore all'aumentare del prezzo di esercizio, come mostrato dai grafici b) e d) della Figura 1.7.

[13] Nel regime di capitalizzazione composto si considera che alla fine di ogni periodo l'interesse maturato nel periodo vada a sommarsi al capitale iniziale in modo tale da costituire un nuovo capitale su cui calcolare gli interessi nel periodo successivo. Applicando la convenzione esponenziale il montante di una somma unitaria al tempo t sarà pari a $M(t) = e^{rt}$ dove r è il tasso di interesse di riferimento; analogamente il valore attuale di una somma unitaria in t è pari a $V= e^{-rt}$.

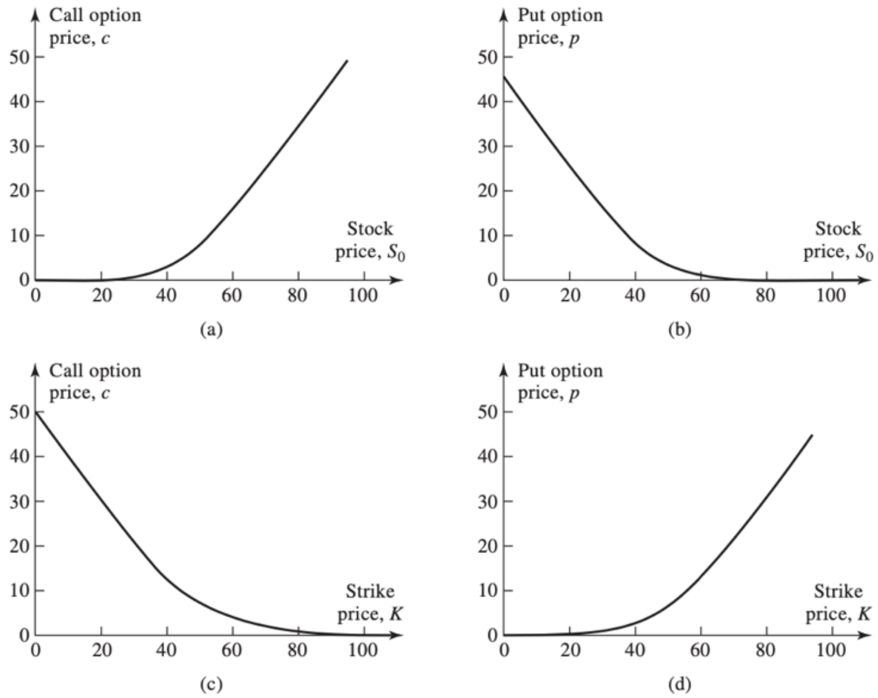

Figura 1.7 – Andamento del prezzo di opzioni call e put in relazione a prezzo di esercizio e prezzo dell'azione[14]

1.4.3 Tempo alla scadenza

Consideriamo ora l'effetto della scadenza. Sia le opzioni put che call americane valgono di più (o almeno non diminuiscono di valore) con l'aumentare del tempo alla scadenza. Per capirne il motivo, si considerano due opzioni americane che differiscono solo per quanto riguarda la data di scadenza. Il proprietario dell'opzione di lunga durata ha tutte le opportunità di esercizio del possessore dell'opzione con la vita residua minore, più altre ancora. Pertanto, l'opzione a lungo termine deve valere almeno quanto l'opzione a breve termine.

Generalmente, anche le opzioni put e call europee accrescono il proprio valore al crescere della vita residua, come evidenziato dalla Figura 1.14, ma non è sempre così.[15]

---

[14] Le Figure dalla 1.7 alla 1.10 mostrano come variano i prezzi di una call e di una put europee in funzione dei cinque fattori descritti all'inizio del paragrafo. In particolare, si ipotizza che S_0=50$, K=50$, r=5%, σ=30%. Le figure sono riportate dal testo Hull J.C. (2015). Options, Futures and Others Derivatives. Pearson (pp. 235-237)

[15] Se si considera l'effetto dei dividendi le opzioni call e put europee potrebbero diminuire di valore all'aumentare della vita residua. Si ipotizzano due opzioni call europee su un'azione: una con una data di scadenza in 1 mese, l'altra con una data di scadenza in 2 mesi. Supponendo che tra 6 settimane sia previsto un dividendo molto elevato, esso potrà far scendere il prezzo delle azioni, in modo che l'opzione di breve durata potrebbe valere di più dell'opzione di lunga durata.

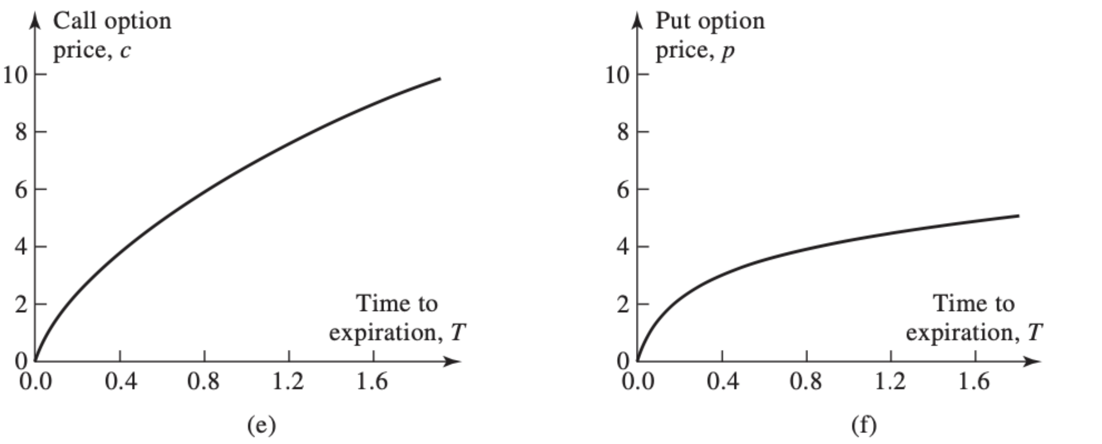

Figura 1.8 – Relazione tra prezzo e vita residua di un'opzione call e put

1.4.4 Volatilità

Semplificando, la volatilità del prezzo di un titolo è una misura dell'incertezza sui movimenti futuri del prezzo del titolo. Con l'aumentare della volatilità, aumenta la possibilità che il titolo performi molto bene o molto male. Per il proprietario di un'azione, questi due risultati tendono a compensarsi a vicenda. Tuttavia, non è così per il proprietario di un'opzione call o put. Infatti, l'acquirente di una call beneficia degli aumenti di prezzo dell'azione esattamente come un possessore dell'azione ma ha un rischio limitato in caso di diminuzione del prezzo perché il massimo che può perdere è il premio pagato al momento dell'acquisto dell'opzione. Egli trae perciò vantaggio dalla maggiore variabilità sul versante rialzista, senza conseguire alcuna perdita sul versante ribassista. Allo stesso modo, il proprietario di una put beneficia delle diminuzioni di prezzo, ma ha un rischio di ribasso limitato in caso di aumenti di prezzo. I valori di entrambe le call e le put, quindi, aumentano all'aumentare della volatilità (vedi Figura 1.9 a, b).

Possiamo estendere il ragionamento affermando che la probabilità di una variazione rilevante del prezzo di un'azione durante la vita residua di un'opzione dipende da due fattori: uno è la varianza del prezzo dell'azione, come abbiamo appena visto, e l'altro è il tempo di validità residua dell'opzione. Definiti T come vita residua dell'opzione e σ come misura della variabilità, possiamo dire che il valore di un'opzione è correlato positivamente alla variabilità cumulata σT, come ci saremo aspettati dall'analisi dei grafici precedenti.

Queste considerazioni ci portano a definire una caratteristica peculiare delle opzioni che le distingue dalla maggior parte delle attività finanziarie. Infatti, nei mercati finanziari il rischio è solitamente un elemento negativo, tale che gli investitori chiedono un maggior rendimento, detto premio, per sopportarlo e di fatti gli investitori in titoli altamente rischiosi (caratterizzati da un *Beta* particolarmente elevato) si attendono un rendimento maggiore; allo stesso modo progetti di investimento più rischiosi hanno un più alto costo del capitale e devono quindi realizzare un tasso di rendimento più elevato per avere un VAN positivo. Per le opzioni vale esattamente il contrario, poiché come si è evidenziato, opzioni su azioni più volatili e quindi più rischiose hanno un valore maggiore di quelle su titoli più "sicuri".

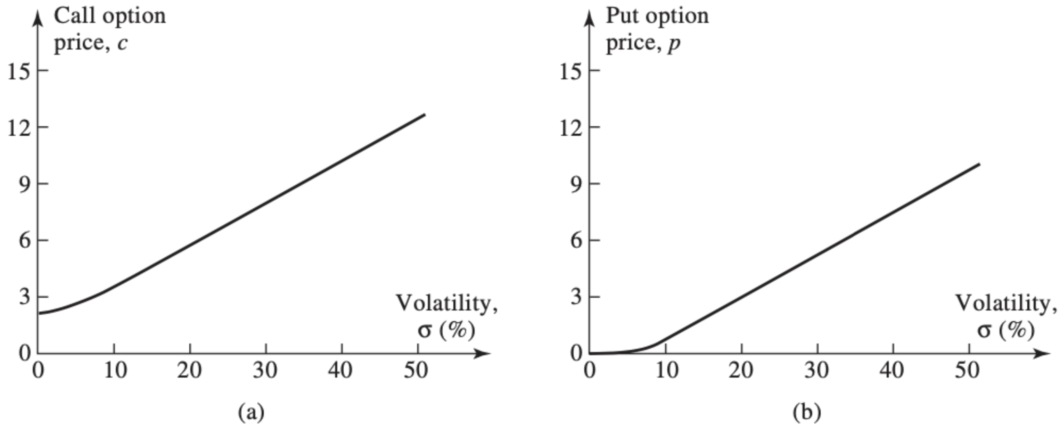

Figura 1.9 – Relazione tra valore opzioni e volatilità del sottostante

1.4.5 Tasso privo di rischio

Il tasso di interesse privo di rischio (tasso *risk-free* R_f) influisce sul prezzo di un'opzione in modo meno chiaro rispetto alle variabili analizzate finora. Con l'aumento dei tassi di interesse nell'economia, il rendimento atteso richiesto dagli investitori dal titolo tende ad aumentare, innalzando i tassi di crescita attesi dei prezzi delle azioni. Inoltre, dal punto di vista di chi detiene le azioni, l'aumento dei tassi d'interesse fa diminuire il valore attuale dei futuri flussi di cassa. L'impatto combinato di questi due effetti è quello di aumentare il valore delle opzioni call e diminuire il valore delle opzioni put (come si può notare osservando la Figura 1.10 c, d).
È importante sottolineare che stiamo assumendo che i tassi di interesse cambino mentre tutte le altre variabili, compreso il prezzo dell'azione sottostante, rimangano le stesse. Nella realtà, però, quando i tassi di interesse aumentano (diminuiscono), i prezzi delle azioni tendono a diminuire (aumentare). Pertanto, è possibile che l'effetto netto di un aumento dei tassi d'interesse e della conseguente riduzione dei prezzi azionari sia quello di far diminuire il valore delle opzioni call e di far aumentare quello delle opzioni put. Allo stesso modo, può verificarsi che in seguito alla riduzione dei tassi d'interesse e al conseguente aumento dei prezzi azionari, il valore delle opzioni call aumenti e quello delle opzioni put diminuisca.

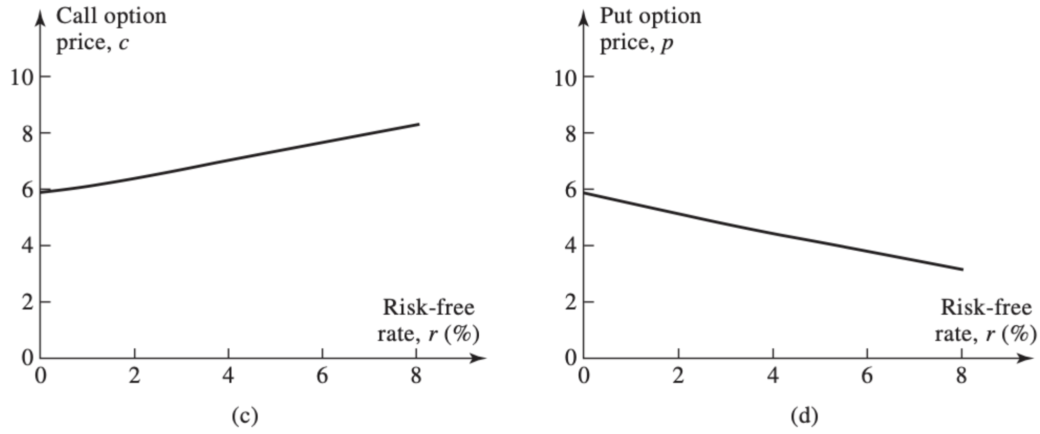

Figura 1.10 – Relazione tra valore delle opzioni e tasso risk-free

1.4.6 Limiti superiore e inferiore per i prezzi delle opzioni

In questa sezione, deriviamo i limiti superiori e inferiori per i prezzi delle opzioni. Questi limiti discendono direttamente dall'ipotesi di non arbitraggio. Infatti, se il prezzo di un'opzione fosse maggiore del limite superiore o minore del limite inferiore, ci sarebbero delle opportunità redditizie per gli arbitraggisti che verrebbero immediatamente eliminate, impedendo il verificarsi sul mercato di prezzi non compresi tra i limiti teorici che andremo a individuare.

Limiti superiori

Un'opzione call americana o europea conferisce al titolare il diritto di acquistare un'azione a un determinato prezzo. Qualunque cosa accada, l'opzione non potrà mai valere più dell'azione. Quindi, il prezzo dell'azione rappresenta un limite superiore per il prezzo dell'opzione call:

$$c \leq S_0 \quad \text{e} \quad C \leq S_0 \tag{1.9}$$

Se queste relazioni non fossero vere, un arbitraggista potrebbe facilmente realizzare un profitto senza rischi acquistando l'azione e vendendo l'opzione call.

Consideriamo ora il caso delle opzioni put. Un'opzione put americana o europea conferisce al titolare il diritto di vendere un'azione a un determinato prezzo K. Perciò, indipendentemente da quanto in basso possa scendere il prezzo dell'azione, il prezzo dell'opzione put non sarà mai maggiore di K. Perciò:

$$P \leq K \tag{1.10}$$

Se al tempo T un'opzione put europea non può valere più di K, ne consegue che il suo valore ad oggi non possa essere superiore al valore attuale di K:

$$p \leq Ke^{-rT} \tag{1.11}$$

Se questa disuguaglianza non fosse rispettata, un arbitraggista avrebbe l'opportunità di conseguire un profitto privo di rischio vendendo l'opzione e investendo la somma ottenuta in un titolo risk-free.

Limite inferiore per opzioni call europee

Un limite inferiore per il prezzo di un'opzione call europea su un'azione che non paga dividendi è dato da:

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

Per dimostrare formalmente tale limite occorre considerare due portafogli:

-Portafoglio A: composto da un'opzione e da liquidità disponibile pari a Ke^{-rT}

-Portafoglio B: comprendente una quota del titolo

Nel portafoglio A, la liquidità viene investita in un'obbligazione zero coupon che ha un rendimento pari al tasso risk-free e perciò frutterà una somma K al tempo T. Se $S_T > K$, l'opzione call viene esercitata alla scadenza e il portafoglio A vale S_T. Se $S_T < K$, l'opzione call scade senza valore e il portafoglio vale K. Quindi, al tempo T, vale il portafoglio A vale:

$$\max [S_T, K]$$

Il portafoglio B, invece, varrà sempre S_T al tempo T poiché comprende esclusivamente l'azione di riferimento. Di conseguenza, alla scadenza T, il portafoglio A vale sempre almeno quanto il portafoglio B. Ne deriva che, in assenza di opportunità di arbitraggio, tale relazione deve valere anche oggi, ossia al momento della valutazione. Pertanto

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

ossia

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Siccome il risultato peggiore per l'opzione Call è quello di non avere valore a scadenza, il valore corrente deve essere maggiore di 0. Ne consegue che $c \geq 0$ e

$$c \geq \max [S_0 - Ke^{-rT}, 0] \tag{1.12}$$

Limite inferiore per opzioni put europee

Il limite inferiore del prezzo di un'opzione Put Europea su un'azione che non paga dividendi è

$$Ke^{-rT} – S_0$$

Come fatto precedentemente, al fine di derivare tale risultato possiamo considerare due portafogli:
-Portafoglio C: composto da un'opzione put europea e un'azione
-Portafoglio D: costituito interamente da liquidità di importo pari a Ke^{-rT}

Anche in questo caso il valore dei Portafogli dipenderà dal valore a scadenza dell'azione sottostante (S_t). In particolare, se $S_t < K$, l'opzione put del portafoglio C viene esercitata al tempo T e il portafoglio avrà un valore pari al prezzo di esercizio K; in caso contrario la put scadrà senza valore e il portafoglio vale quanto il valore dell'azione S_t. Perciò al tempo T il valore del portafoglio C può essere rappresentato come

$$\max [S_t, K]$$

Rimanendo nell'ipotesi che la liquidità del portafoglio D possa essere investita al tasso privo di rischio, il portafoglio varrà in ogni caso K al tempo T (ossia il montante della somma iniziale). Abbiamo così evidenziato come al tempo T il portafoglio C vale sempre almeno quanto il portafoglio D, se non di più, e questo ci porta a dire che in assenza di opportunità di arbitraggio anche il valore attuale del portafoglio C deve essere maggiore o uguale di quello del portafoglio D. Quindi

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

ovvero

$$p \geq Ke^{-rT} – S_0$$

Siccome sappiamo che il risultato peggiore in termini di valore per un'opzione put è quello avere un valore pari a 0, il suo valore ad oggi deve necessariamente essere positivo ($p > 0$) e di conseguenza

$$p \geq \max [Ke^{-rT} – S_0, 0] \tag{1.13}$$

1.5 Put-call Parity

In questo paragrafo si dimostrerà la relazione fondamentale tra i prezzi delle opzioni put e call europee che hanno lo stesso prezzo di esercizio K e lo stesso tempo alla scadenza T. Nel procedimento si partirà dalla costruzione di una posizione di copertura attraverso l'acquisto di un'opzione Put su un'azione e si dimostrerà come sia possibile costruire una posizione analoga attraverso l'acquisto di un'opzione Call sullo stesso sottostante (e con la stessa data di scadenza), individuando così l'equazione che lega i prezzi delle opzioni Call e Put europee, detta appunto *Put-call Parity*.

Supponiamo di acquistare un'azione al prezzo corrente sul mercato S_0, in questo caso i possibili ritorni della strategia di investimento sono intuitivi, in quanto all'istante T si avrà un guadagno se il prezzo dell'azione sarà maggiore di S_0 oppure una perdita in caso contrario. Se un investitore avverso al rischio volesse proteggere il suo investimento dal rischio che il prezzo dell'azione scenda al di sotto del prezzo iniziale potrebbe farlo attraverso l'acquisto di un'opzione Put con un prezzo di esercizio K pari a S_0 e scadenza in T, che gli consentirebbe di rivendere l'azione al prezzo di acquisto, evitando quindi una perdita. Chiaramente la costruzione di questa posizione di copertura ha un costo che è quello del premio da corrispondere al venditore dell'opzione Put, strumento che in questo caso chiameremo *protective put*. Riassumendo i possibili ritorni della strategia di investimento in un diagramma di posizione (senza quindi considerare il prezzo pagato per l'acquisto dell'opzione) otteniamo il grafico riportato di seguito.

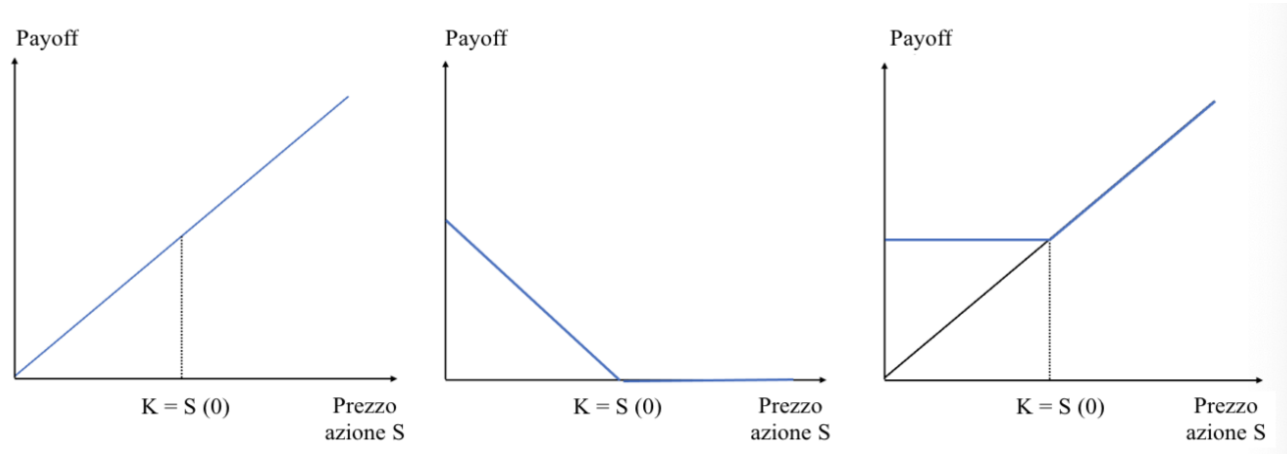

Figura 1.7 – Diagramma di posizione della strategia di protezione dal ribasso con acquisto Put[16]

I diagrammi di posizione riportati in Figura 1.7 mostrano le tappe teoriche successive che hanno portato alla costruzione della posizione di copertura evidenziata nel terzo diagramma. La combinazione dei payoff ottenibili attraverso il solo acquisto dell'azione al prezzo corrente S_0 con quelli legati all'acquisto dell'opzione Put con strike price $K=S_0$, permette di ottenere lo stesso risultato in caso di rialzo del prezzo dell'azione ma allo stesso tempo protegge dall'eventuale perdita

[16] Brealey R., Myers S., Allen F., Sandri S. (2020). Principi di finanza aziendale. Mcgraw Hill. Elaborazione personale della figura 20.5 presente a pag.527

che si avrebbe in caso di ribasso del prezzo al di sotto del prezzo di esercizio K. Il costo di ottenere tale vantaggio di copertura è ancora una volta pari al premio pagato per l'acquisto dell'opzione Put (non considerato nel diagramma di posizione).

L'obiettivo è ora quello di dimostrare che è possibile ottenere la stessa identica strategia di copertura, e quindi lo stesso schema di payoff, anche attraverso l'acquisto di un'opzione Call che abbia chiaramente lo stesso prezzo di esercizio K dell'opzione Put descritta in precedenza e la stessa data di scadenza, che supponiamo essere all'istante T.

Per far ciò si può combinare l'acquisto di un'azione Call sull'azione con l'acquisto di un titolo risk-free, come uno zero-coupon-bond ,che alla data di scadenza offra un flusso di cassa esattamente pari al prezzo di esercizio K, in modo tale da disporre in T delle risorse finanziarie necessarie per esercitare il diritto di acquisto incorporato nel contratto di opzione. Come in precedenza, viene offerta una rappresentazione grafica della combinazione dei payoff di queste due posizioni che evidenzia come il diagramma di posizione combinato sia equivalente a quello mostrato di sopra in Figura 1.7.

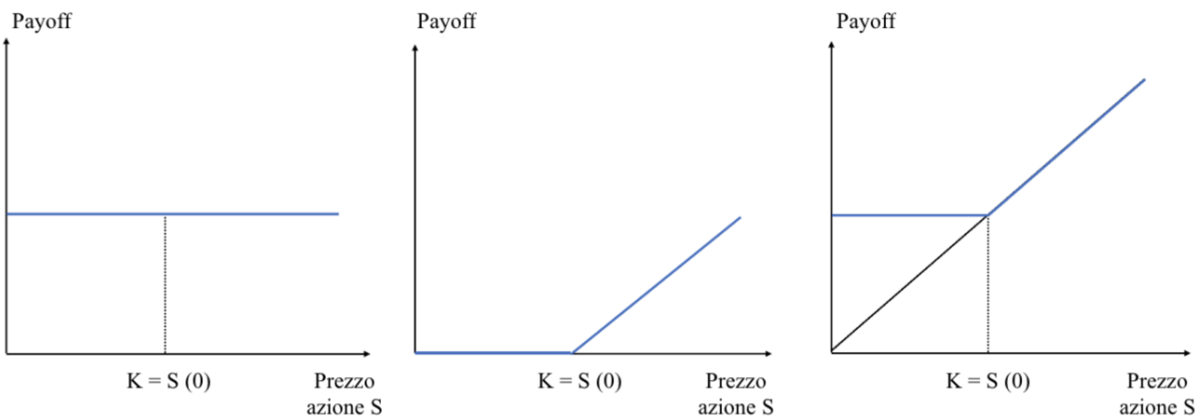

Figura 1.8 – Diagramma di posizione strategia di protezione dal ribasso con acquisto Call[17]

Il primo diagramma di posizione della Figura 1.8 mostra il Payoff derivante dall'acquisto di uno zero-coupon-bond con scadenza T. Il rendimento di questo titolo, che supponiamo essere risk-free, non è influenzato dall'andamento del prezzo dell'azione e dipenderà esclusivamente dal tasso di interesse risk-free presente sul mercato; perciò, qualunque sia il prezzo dell'azione alla scadenza, l'investitore sarà sicuro di avere a disposizione il valore nominale del titolo, che abbiamo detto essere pari al prezzo di esercizio dell'opzione K. Il secondo diagramma mostra il valore a scadenza dell'acquisto

---

[17] Brealey R., Myers S., Allen F., Sandri S. (2020). Principi di finanza aziendale. Mcgraw Hill. Elaborazione personale della Figura 20.5 presente a pag.527

di un’opzione Call con prezzo di esercizio pari a K, la cui rappresentazione grafica è stata già analizzata nei paragrafi precedenti. Infine, il terzo diagramma mostra la combinazione delle due posizioni descritte che insieme offrono un payoff atteso coincidente con quello evidenziato nel terzo diagramma della Figura 1.7. Questo perché se il prezzo dell’azione diminuisce, l’opzione Call sarà priva di valore ma l’ipotetico investitore avrebbe comunque diritto al flusso di cassa derivante dal titolo senza rischio. Se al contrario il prezzo dell’azione sale al di sopra del prezzo di acquisto S_0, a ogni dollaro di crescita del valore dell’azione corrisponderà un aumento identico del valore dell’opzione Call acquistata, consentendo di partecipare completamente ai guadagni derivanti dal rialzo del prezzo dell’azione (come se si possedesse direttamente il sottostante) con l’ulteriore vantaggio di avere una copertura in caso di andamento opposto del prezzo.

Finora abbiamo dimostrato la parità tra le due strategie dal punto di vista grafico, ma per derivare l’equazione della Put-call-Parity occorre analizzare la situazione in termini numerici. A tal fine consideriamo le due strategie descritte in precedenza come due portafogli di investimento, ognuno composto da due titoli o strumenti finanziari. Chiameremo questi due portafogli A e B.

-Il Portafoglio A si compone di un'opzione call europea più un'obbligazione zero coupon che fornisce un payoff di K al tempo T
-Il Portafoglio B è composto da un'opzione put europea e una quota del titolo sottostante (l’azione).

Continuiamo ad ipotizzare che il titolo non paghi dividendi e che le opzioni abbiano lo stesso prezzo di esercizio K e lo stesso tempo alla scadenza T.

Nel portafoglio A la somma investita al tasso di interesse privo di rischio diventa K al tempo T. Inoltre, se $S_t > K$, l’opzione Call viene esercitata al tempo T e il portafoglio varrà proprio $S_t = K + (S_t - K)$. Se al contrario $S_t < K$, la Call sarà priva di valore e il portafoglio avrà un valore pari a K.

Nel portafoglio B la situazione è parallela: l’azione varrà per definizione S_t al tempo T; inoltre, se $S_t < K$, l’opzione Put verrà esercitata e il valore totale del portafoglio sarà $K= (K-S_t) + S_t$. Se, al contrario, $S_t > K$, la put non verrà esercitata poiché priva di valore e il portafoglio avrà un valore globale pari al valore dell’azione S_t. La situazione è riassunta nella Tabella 1.2: se $S_t < K$, entrambi i portafogli valgono K al tempo T; mentre se $S_t > K$ entrambi i portafogli valgono S_t alla data di scadenza. Formalizzando, entrambi hanno un valore a scadenza pari a:

$$\max\,[S_t, K] \tag{1.14}$$

	Tempo 0	Tempo T	
Portafoglio		$S_t < K$	$S_t > K$
A	c	0	$S_t - K$
	Ke^{-rT}	K	K
	$c + Ke^{-rT}$	K	S_t
B	p	$K - S_t$	0
	S_t	S_t	S_t
	$p + S_t$	K	S_t

Tabella 1.2 – Ritorni portafogli A e B[18]

Poiché abbiamo dimostrato che i portafogli hanno valori identici al tempo T, ne deriva che essi devono avere valori identici oggi al tempo 0. Se così non fosse, un arbitraggista potrebbe acquistare il portafoglio meno costoso e vendere quello più costoso, ottenendo così un profitto immediato senza rischio. Infatti, dato che i portafogli hanno uguale valore alla scadenza, questa strategia di trading genererebbe un profitto di arbitraggio pari alla differenza dei valori dei due portafogli.

Il valore corrente del Portafoglio A è dunque pari al valore dell'opzione Call (c) più il valore attuale del prezzo di esercizio K che, in regime di capitalizzazione esponenziale, si ottiene come Ke^{-rT}, dove r è il tasso di interesse risk-free e T è il tempo che manca al momento della scadenza. Allo stesso modo, il valore corrente del portafoglio B è uguale al valore dell'opzione Put (p) più il valore corrente dell'azione al tempo T (S_t). Pertanto:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_t \tag{1.15}$$

Questa è appunto la relazione di parità tra il prezzo di un'opzione Put e Call Europee con la stessa scadenza e lo stesso prezzo di esercizio, detta *Put-call Parity*. L'equazione mostra che il valore di una call europea con un determinato prezzo di esercizio e una data di esercizio può essere dedotto dal valore di una put europea con lo stesso prezzo di esercizio e data di esercizio e viceversa.

Se tale relazione non fosse rispettata esisterebbero sul mercato delle opportunità di arbitraggio.

1.5.1 Put–Call Parity e struttura del capitale

Nelle prossime righe verrà presentata un'applicazione dell'equazione della Put-Call-Parity in campo aziendale che mostra come la relazione fondamentale tra i prezzi delle opzioni possa essere impiegata per comprendere meglio le posizioni degli azionisti e degli obbligazionisti all'interno di una società.

---

[18] Hull J.C. (2015). Options, Futures and Others Derivatives. Pearson. Elaborazione personale della Tabella presente a pag.242.

Tale applicazione si deve agli studi di Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton che sono stati i pionieri della teoria della valutazione delle opzioni e, all'inizio degli anni '70, hanno anche dimostrato che le opzioni possono essere utilizzate per caratterizzare la struttura del capitale di una società. Oggi questa analisi è ampiamente utilizzata dalle istituzioni finanziarie per valutare il rischio di credito di un'azienda.

Per illustrare il modello, si consideri una società che dispone di attività finanziate interamente con azioni e *zero-coupon bonds*. Supponiamo che le obbligazioni scadano tra cinque anni, momento in cui è richiesto il pagamento del loro valore nominale che è pari a K. La società non paga dividendi. Se le attività tra cinque anni avranno un valore maggiore di K, gli azionisti sceglieranno di rimborsare i possessori di obbligazioni; se, al contrario, le attività avranno un valore inferiore a K, gli azionisti decideranno di dichiarare fallimento e gli obbligazionisti rileveranno le attività.

Ne consegue che il valore delle azioni tra 5 anni è pari a max [V_T – K, 0], dove V_T è il valore delle attività della società dopo 5 anni. Ciò dimostra che la posizione degli azionisti è in effetti quella dei titolari di un'opzione call europea con scadenza cinque anni sulle attività della società a un prezzo di esercizio pari a K. La posizione degli obbligazionisti sarà speculare poiché il payoff dei loro titoli è pari a min [V_T, K]. Ciò equivale a K – max [K – V_T, 0] dove max [K – V_T, 0] è esattamente il payoff di un'opzione put sulle attività della società. Si può dunque dire che la situazione è equivalente alla vendita di un'opzione put dagli obbligazionisti agli azionisti. Il valore corrente degli *zero-coupon bonds* a 5 anni è quindi pari alla differenza tra il valore dei corrispondenti zero-coupon bonds privi di rischio e il valore corrente dell'opzione put.

Riassumendo, si ha:

$$\text{Valore delle azioni} = c$$

$$\text{Valore del debito} = Ke^{-rT} - p$$

Dove c è il valore corrente della call, p è il valore corrente della put e r è il tasso risk-free osservabile sul mercato. Fatto V_0 il valore corrente delle attività, esso deve necessariamente corrispondere al valore delle passività (azioni e obbligazioni) e sarà:

$$V_0 = c + Ke^{-rT} - p$$

Riordinando i termini dell'equazione si ottiene:

$$c + Ke^{-rT} = V_0 + p$$

Questa relazione è analoga alla *put-call-parity* (1.15) ma si riferisce al valore di una società, del quale possiamo dunque ottenere una stima sfruttando le proprietà delle opzioni.[19]

[19] Hull J.C. (2015). Options, Futures and Others Derivatives. Pearson. Valore di una società e Put-call parity, riquadro 11.1 pag.251

Capitolo 2 – Metodi di Valutazione delle Opzioni

Le opzioni sono state negoziate per secoli ma sono rimaste strumenti finanziari relativamente oscuri dal punto di vista della valutazione almeno fino all'introduzione di una borsa di opzioni quotate nel 1973[20], che ne ha permesso un'espansione senza precedenti nei mercati mobiliari americani.
L'estrema difficoltà riscontrata dagli economisti nel corso degli anni nel trovare un modello corretto di pricing delle opzioni deriva dal fatto che il metodo dell'attualizzazione dei flussi di cassa futuri che viene comunemente usato per la valutazione di molti asset finanziari (come le azioni o le obbligazioni), risulta invece del tutto inutile nel caso degli strumenti derivati e quindi delle opzioni. L'applicazione di tale metodo prevede infatti una stima dei flussi di cassa attesi del titolo che sono poi attualizzati al costo opportunità del capitale; nel caso delle opzioni, se la previsione dei flussi di cassa attesi, seppur molto complessa, è teoricamente possibile, l'individuazione del tasso di attualizzazione corretto diviene un'impresa praticamente impossibile in quanto il rischio associato a un'opzione varia ogni volta che si muove il prezzo del sottostante, il quale seguirà un percorso casuale (detto *random walk*) per tutta la durata dell'opzione.
La teoria della valutazione delle opzioni conta infatti numerosi tentativi da parte dei più illustri economisti di dare alle opzioni un prezzo corretto e la svolta decisiva in questo senso si è avuta proprio nel 1973. In quella data, Fischer Black e Myron Scholes presentarono il primo modello di prezzo di equilibrio delle opzioni completamente soddisfacente, poi esteso e completato nello stesso anno da Robert Merton. Il loro approccio estremamente innovativo alla valutazione degli strumenti derivati ha posto le fondamenta teoriche per gli studi accademici successivi.
Come hanno dimostrato questi studi, la teoria del prezzo delle opzioni è rilevante per quasi tutti i settori della finanza. Ad esempio, praticamente tutti i titoli societari possono essere interpretati come portafogli di put e call sulle attività dell'impresa e in effetti, la teoria della valutazione dei derivati si applica alla classe generale di problemi economici che riguardano la valutazione di contratti in cui il risultato per ciascuna controparte dipende un evento futuro incerto quantificabile.
Sfortunatamente, gli strumenti matematici impiegati negli articoli di Black-Scholes e Merton sono piuttosto avanzati e tendono ad oscurare i concetti economici sottostanti. Tuttavia, grazie a un suggerimento di William Sharpe, è possibile ricavare gli stessi risultati utilizzando solo formule matematiche elementari, come nel caso del metodo di valutazione che sfrutta la costruzione di alberi

[20] I contratti di opzione su azioni sono stati trattati per la prima volta nel 1973 alla borsa di Wall Street e da allora si è assistito a una fortissima crescita dei contratti scambiati. Le opzioni sono ora scambiate sui mercati finanziari di tutto il mondo ed enormi volumi vengono negoziati nel mercato Over The Counter (OTC), ovvero il mercato non ufficiale per le opzioni non standard, da parte di banche e altre istituzioni finanziarie.

Binomiali, sviluppato formalmente nel 1979 da Cox, Ross e Rubinstein, che sarà oggetto del prossimo paragrafo.

2.1 Metodo Binomiale

Una tecnica utile e molto popolare per la determinazione del prezzo di un'opzione implica la costruzione di un albero binomiale. Si tratta di un diagramma che rappresenta i diversi percorsi possibili del prezzo delle azioni sottostanti per tutta la durata di un'opzione. L'ipotesi di fondo è che il prezzo delle azioni segua un cammino casuale e che dunque, in ogni fase temporale, abbia una determinata probabilità di aumentare o diminuire di una certa percentuale. Si assume quindi che l'unica fonte di incertezza del modello sia l'andamento del prezzo sottostante, mentre i tassi di interesse sono deterministici e di conseguenza il rischio di tasso ad essi associato diventa un effetto di ordine inferiore rispetto all'andamento del presso S_t e puo essere trascurato.
In questo paragrafo verrà in primis analizzata la natura degli argomenti di non arbitraggio utilizzati per valutare le opzioni e in secondo luogo introdotto un principio fondamentale nella valutazione delle opzioni noto come valutazione neutrale al rischio (*risk-neutral valuation*).
L'approccio generale che verrà adottato nella spiegazione è quello utilizzato in un importante studio pubblicato da Cox, Ross e Rubinstein nel 1979[21] con il quale il modello venne di fatto introdotto e formalizzato dal punto di vista teorico e matematico. In questo *paper* viene di fatti presentato un modello di pricing delle opzioni basato su intervalli temporali discreti, che permette di arrivare a risultati economicamente rilevanti con l'utilizzo di formule matematiche più accessibili rispetto a quelle alla base del modello di Black-Scholes che analizzeremo nel paragrafo successivo.

2.1.1 Alberi Binomiali a uno Stadio

Nel descrivere il modello binomiale iniziamo col considerare una situazione teorica molto semplice, in cui si ha un titolo azionario di prezzo S_0 sul quale è stata scritta un'opzione Call europea con scadenza in T e che deve avere un prezzo pari a *f*. Adottando l'approccio binomiale immaginiamo che l'azione sottostante abbia le stesse probabilità di salire da S_0 a S_{0u} o di scendere da S_0 a S_{0d} (dove u e d sono due parametri con u > 1 e d < 1). Di conseguenza, il tasso di variazione del prezzo dell'azione sarà $u - 1$ in caso di rialzo e $1 - d$ in caso di ribasso. Date queste condizioni se il prezzo

[21] Cox J., S. Ross S., Rubinstein M. (1979). "Option Pricing: a Simplified Approach". Journal of Financial Economics

dell'azione sale a S_{0u}, il valore a scadenza dell'opzione sarà f_u, mentre in caso di ribasso del prezzo fino a S_{0d}, il valore dell'opzione sarà pari a f_d. La situazione è illustrata graficamente nella Figura 2.1.

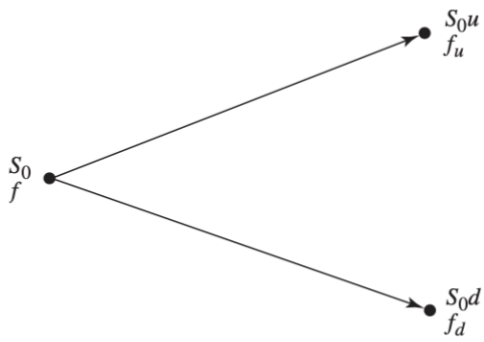

Figura 2.1 Prezzi di azione e opzione in un albero binomiale a uno stadio

Si dimostrerà che nel caso descritto è possibile ricorrere a un'argomentazione relativamente semplice per valutare l'opzione. Infatti, l'unica ipotesi di cui ci serviremo è che non siano possibili opportunità di arbitraggio per gli investitori; l'obiettivo è quello di costruire un portafoglio di azioni e opzioni tale per cui il suo valore alla scadenza T dell'opzione non sarà incerto (legato all'andamento del sottostante), bensì sarà predeterminato attraverso un'operazione di copertura (*hedging*) e il suo ritorno sarà dunque totalmente indipendente dalle dinamiche di mercato sottostanti. Siccome il rischio legato al rendimento sarà pari a 0 possiamo dedurre che il rendimento che un investitore richiederà per detenerlo è pari al tasso di interesse privo di rischio r_f. Inoltre, considerando solo due titoli come componenti del portafoglio di copertura e quindi solo due possibili risultati, nell'ipotesi semplificatrice che tutti gli asset siano infinitamente divisibili, sarà sempre possibili andare a costruire sinteticamente il portafoglio privo di rischio. Questo ci permetterà di determinare il costo legato alla composizione inziale del portafoglio e infine il prezzo dell'opzione.

Il portafoglio di copertura è costituito da una posizione lunga su un numero Δ di azioni e da una posizione short sull'opzione (si andrà dunque a vendere l'opzione Call che è in questo caso l'oggetto della valutazione). In particolare, si procede al calcolo del valore Δ (delta) che rende il portafoglio composto da azioni e opzioni un portafoglio privo di rischio. Dalle ipotesi fatte in precedenza, possiamo dire che in caso di rialzo del prezzo dell'azione il valore del portafoglio alla scadenza dell'opzione sarà pari a:

$$S_{0u}\Delta - f_u$$

Mentre in caso di ribasso del prezzo dell'azione sottostante, si avrà:

$$S_{0}d\Delta - f_{d}$$

Il portafoglio avrà dunque lo stesso ritorno indipendentemente dall'andamento del sottostante quando:

$$S_{0}u\Delta - f_{u} = S_{0}d\Delta - f_{d}$$

Questa uguaglianza ci permette di trovare la quantità Δ di azioni che è necessario comprare per costruire una posizione coperta dal rischio, essa è pari a:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \tag{0.1}$$

L'equazione dimostra come il valore Delta sia il rapporto tra la variazione del prezzo dello strumento derivato (in questo caso l'opzione) e la variazione del prezzo dell'azione che si verifica nel passaggio da un nodo all'altro dell'albero binomiale che abbiamo costruito. Il Delta così ottenuto è un parametro fondamentale per la valutazione e l'*hedging* delle opzioni. Esso, infatti, indica il numero di unità dell'azione che dovremmo acquistare per ogni opzione venduta allo scoperto al fine di creare una posizione totale coperta e quindi priva di rischio. Per questo motivo spesso la costruzione di un *hedged portfolio* viene chiamata *delta hedging.*

Riprendendo la dimostrazione, sappiamo che il portafoglio privo di rischio dovrà necessariamente avere un rendimento pari al tasso risk-free (poiché rimaniamo nell'ipotesi che non siano possibili opportunità di arbitraggio) che indichiamo con *r*, perciò il valore attuale del portafoglio dovrà essere pari a:

$$(S_{0}u\Delta - f_{u})\, e^{-rT}$$

Il costo iniziale del portafoglio corrisponde al costo della quantità delta di azioni acquistate a cui va necessariamente sottratto il premio incassato dalla vendita dell'opzione, pari a *f*, e sarà dunque

$$S_{0}\Delta - f$$

Siccome il costo iniziale del portafoglio in un mondo dove non sono possibili arbitraggi deve necessariamente essere pari al valore attuale del suo valore a scadenza possiamo scrivere

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

riordinando

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Sostituendo Δ dall'equazione (2.1) e semplificando i termini si ottiene

$$f = S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_o d}\right)(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

da cui

$$f = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

e infine

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1 - p)f_d] \qquad (0.2)$$

dove

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \qquad (0.3)$$

Le equazioni (2.2) e (2.3) così ottenute ci permettono di valutare un'opzione all'interno di un modello in cui l'andamento del prezzo dell'azione sottostante segue un percorso binomiale e sotto l'ipotesi fondamentale che non ci siano possibilità di arbitraggio nel mercato.

Vediamo come questi risultati possono aiutarci a valutare un'opzione attraverso un esempio numerico[22], nell'ambito del modello binomiale a uno stadio. Immaginiamo che il prezzo corrente di un'azione sul mercato sia di 20$ e che tale prezzo tra 3 mesi potrà esclusivamente crescere fino a raggiungere i 22$ oppure diminuire fino a 18$; supponiamo di voler valutare un'opzione call di tipo europeo su questa specifica azione a un prezzo di esercizio pari 21$ che scadrà esattamente tra 3 mesi. Il valore dell'opzione alla scadenza del periodo di esercizio dipenderà ovviamente dal prezzo del sottostante secondo la relazione già vista max [S_t – K, 0]. In questo caso se il prezzo dell'azione cresce l'opzione a scadenza avrà un valore pari (22-21) $ = 1$, mentre in caso di ribasso del prezzo dell'azione, l'opzione sarà priva di valore poiché il titolare del diritto di acquisto non lo eserciterà. La situazione è rappresentata nel grafico successivo in Figura 2.2.

[22] Esempio tratto da Hull J.C. (2015). Options, Futures and Other Derivatives. Pearson. pag. 278

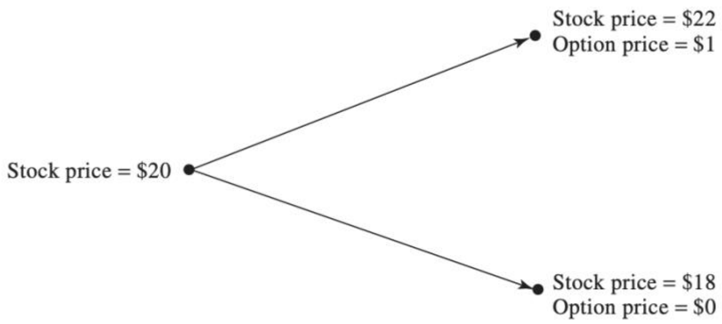

Figura 2.2 – Movimenti del prezzo dell'azione e valore dell'opzione a scadenza[23]

A questo punto abbiamo tutti i dati sufficienti per poter valutare l'opzione in questo modello. Le variazioni del prezzo dell'azione sono coerenti con valori di u=1.1 e d=0.9 in quanto il prezzo dell'azione può o aumentare del 10% (da 20$ a 22$) oppure diminuire della stessa percentuale (da 20$ a 18$). Inoltre, abbiamo visto che il valore dell'opzione in caso di rialzo del prezzo del sottostante sarà pari a f_u = 1$ mentre sarà nullo in caso contrario (f_d = 0$). L'intervallo di valutazione è pari al tempo alla scadenza dell'opzione, ossia 3 mesi, che rappresentano un quarto dell'anno e dunque poniamo T=0,25; infine ipotizziamo che il tasso di interesse privo di rischio presente sul mercato sia pari a r = 12%. A questo punto procediamo al calcolo del valore p utilizzando l'equazione (2.3):

$$p = \frac{e^{0,12\times 0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523$$

E di seguito possiamo calcolare il prezzo dell'opzione impiegando l'equazione (2.2):

$$f = e^{-0,12\times 0,25}(0,6523 \times 1\$ + 0,3477 \times 0\$) = 0,633\$$$

Uno dei risultati teorici più importanti di questo metodo di valutazione delle opzioni è che la formula del prezzo delle opzioni nell'equazione (2.2) non presenta le probabilità associate al rialzo e al ribasso del prezzo dell'azione (in questo caso la notazione p non individua una probabilità bensì un parametro introdotto per semplificare la formula di valutazione). Infatti, si ottiene lo stesso prezzo per un'opzione europea a prescindere dalla probabilità di variazione del prezzo dell'azione che potrebbe essere molto più incline all'aumento piuttosto che alla diminuzione senza tuttavia influenzare il prezzo di un eventuale opzione call scritta sul titolo. Questo risultato può sembrare sorprendente e contro-intuitivo. Parrebbe a prima vista più naturale supporre che, all'aumentare della probabilità di

---

[23] Grafico tratto da Hull J.C. (2015). Options, Futures and Other Derivatives. Pearson. pag. 279

un movimento al rialzo del prezzo delle azioni, il valore di un'opzione call sull'azione aumenti e il valore di un'opzione put sullo stesso sottostante diminuisca, ma in realtà non è così.

La spiegazione sta nel fatto che non stiamo valutando l'opzione in termini assoluti, bensì in relazione al prezzo del sottostante e, di conseguenza, le probabilità dei futuri movimenti al rialzo o al ribasso sono già incorporate nel prezzo del titolo e non è necessario tenerne nuovamente conto quando si valuta l'opzione in termini del prezzo dell'azione.
Tali considerazioni sulle dinamiche di valutazione delle opzioni sono emerse per la prima volta nell'articolo di Cox, Ross e Rubinstein del 1979 dove i tre economisti hanno dimostrato che tutto ciò di cui abbiamo bisogno per valutare l'esatto valore di un'opzione call è il suo prezzo di esercizio, il prezzo dell'azione sottostante, il range entro il quale il prezzo del sottostante di muove (espresso dai valori attribuiti ai parametri u e d) e ovviamente il valore del tasso di interesse privo di rischio. La probabilità che il prezzo dell'azione salga o diminuisca non è di fatto rilevante perché tutti i partecipanti al mercato, sia coloro che si aspettano una crescita dei prezzi (*bulls*) sia coloro che hanno una visione ribassista (*bears*), devono necessariamente concordare sul valore ad oggi dell'opzione in relazione al prezzo dell'azione riscontrabile ad oggi sul mercato.
In conclusione, in un modello binomiale dove non sono possibili arbitraggi il prezzo di un'opzione f dipende esclusivamente dalle variabili K (prezzo di esercizio dell'opzione), S (prezzo dell'azione), u, d e r, dove il prezzo dell'azione rappresenta l'unica variabile casuale. Dunque, il valore dell'opzione non dipende da altre variabili casuali come, ad esempio, il prezzo di altri titoli o portafogli o il portafoglio di mercato comprendente tutti i titoli sul mercato. Infatti, "se un'altra formula di pricing delle opzioni implicasse altre variabili al fine di restituire i prezzi di equilibrio sul mercato, potremmo immediatamente dimostrare che sia incorretta utilizzando la nostra per ottenere un profitto di arbitraggio senza rischio, scambiando a quei prezzi"[24].

2.1.2 Metodo dell'indifferenza al rischio

In questa sezione applicheremo alla valutazione binomiale di un'opzione uno dei principi fondamentali nella teoria della valutazione dei derivati, ovvero il principio della "valutazione neutrale verso il rischio" (*risk-neutral valuation*). Nel paragrafo precedente abbiamo basato il nostro ragionamento sull'impossibilità di ottenere profitti di arbitraggio sul mercato che permette di concludere che il prezzo dell'opzione risultante dal modello di valutazione sia effettivamente quello vigente sul mercato, poiché se così non fosse gli arbitraggisti si attiverebbero immediatamente per

---

[24] Cox J., S. Ross S., Rubinstein M. (1979). "Option Pricing: a Simplified Approach". Journal of Financial Economics.

ottenere profitti senza rischio, riportando il prezzo al suo livello di equilibrio. In quel contesto non avevamo alcun bisogno di formulare ipotesi circa l'atteggiamento nei confronti del rischio degli investitori poiché il prezzo di equilibrio dell'opzione sarebbe lo stato lo stesso a prescindere dall'avversione al rischio degli investitori. Questa considerazione suggerisce uno spunto per un metodo alternativo di valutazione delle opzioni che è appunto quello dell'indifferenza al rischio, dove si ipotizza che tutti gli investitori siano completamente indifferenti al rischio. Secondo questo principio, quando valutiamo i derivati possiamo ipotizzare che gli investitori siano neutrali verso il rischio (*risk-neutral*). La conseguenza è che questa tipologia di investitori non chiederà un tasso di rendimento atteso più elevato per compensare il maggior rischio assunto.

Tale mondo ipotetico, in cui c'è completa neutralità al rischio da parte dei partecipanti al mercato, non è chiaramente il mondo reale in cui viviamo, dove logicamente all'aumentare del rischio legato all'investimento, l'investitore richiederà un tasso di rendimento più elevato. Tuttavia, quasi miracolosamente, in un mondo neutrale verso il rischio i prezzi dei derivati sono identici a quelli che si registrano nel mondo reale, permettendoci di tralasciare il grado di avversione al rischio di chi agisce sul mercato dei derivati quando andiamo a valutare il prezzo delle opzioni. Tale conclusione potrebbe apparire a prima vista sorprendente in quanto i derivati sono prodotti finanziari per definizione rischiosi, il cui prezzo dovrebbe essere influenzato dalla diversa propensione al rischio degli investitori; tuttavia, quando un derivato viene valutato in relazione al prezzo del suo sottostante, le attitudini verso il rischio sono del tutto irrilevanti. Ad esempio, se gli investitori diventassero maggiormente avversi al rischio, i prezzi delle azioni scenderebbero ma la relazione matematica che lega il prezzo del derivato a quello dell'azione sottostante rimarrebbe inalterata.

In un mondo indifferente al rischio ci sono quindi due implicazioni teoriche che semplificano enormemente la valutazione degli strumenti derivati:

1. il tasso di rendimento atteso di tutte le attività finanziarie (comprese le azioni) è pari al tasso di interesse privo di rischio;
2. il tasso impiegato per l'attualizzazione del payoff atteso dello strumento derivato è pari al tasso di interesse privo di rischio.

Al fine di illustrare il principio della valutazione neutrale al rischio, riprendiamo nuovamente l'equazione (2.2) del paragrafo precedente, interpretandola alla luce delle due considerazioni sopra riportate. Nell'ambito della valutazione delle opzioni descritta nel paragrafo precedente le equazioni (2.2) e (2.3) ci permettono di valutare l'opzione senza fare alcuna ipotesi sulle probabilità relative al rialzo o al ribasso del prezzo dell'azione. Tuttavia, nell'ambito di un mondo neutrale verso il rischio la variabile p all'interno dell'equazione (2.2) può essere questa volta interpretata proprio come la probabilità di rialzo del prezzo dell'azione. Infatti, sotto l'ipotesi che $u > e^{rT} > d$, ossia che in un determinato intervallo temporale T il tasso di variazione di un titolo senza rischio sia compreso all'interno del range di variazione del prezzo di un titolo rischioso come le azioni, ricordando l'equazione (2.3), si ha che $0 < p < 1$. Perciò la variabile p soddisfa i requisiti teorici di una probabilità, rappresentando di fatti la probabilità di rialzo del prezzo dell'azione nell'intervallo temporale considerato e di conseguenza $1 - p$ rappresenterà la corrispondente probabilità di ribasso del prezzo dell'azione. A questo punto possiamo interpretare l'espressione

$$[pf_u + (1-p)f_d]$$

come il valore atteso[25] dell'opzione in un mondo neutrale verso il rischio.
Pertanto, applicando il principio della valutazione neutrale verso il rischio, l'equazione (2.2) afferma che il valore corrente dell'opzione è pari al suo valore atteso alla scadenza, attualizzato al tasso privo di rischio.
Al fine di dimostrare la validità di tale interpretazione di p, supponiamo che p sia effettivamente la probabilità di rialzo del prezzo dell'azione e verifichiamo che tale assunzione porti a un risultato coerente con l'ipotesi di indifferenza al rischio. Fatta p l'effettiva probabilità che il prezzo dell'azione salga, allora il valore atteso del prezzo dell'azione al tempo T, che viene indicato con $E[S_t]$, sarà pari a

$$E[S_t] = pS_0u + (1-p)S_0d$$

ossia a

$$E[S_t] = pS_0(u-d) + S_0d$$

Sostituendo p, secondo l'equazione (2.2) si ottiene

$$E[S_t] = S_0e^{rT} \tag{0.4}$$

La relazione espressa nell'equazione (2.4) indica come il prezzo dell'azione cresca, in media, in base al tasso di interesse privo di rischio. In altri termini, se p è la probabilità di rialzo, il prezzo dell'azione si comporta esattamente come ci si aspetterebbe in un mondo neutrale al rischio, ossia continua a crescere offrendo un rendimento in linea con il tasso di interesse risk-free. Con ciò si è data

[25] In generale, il valore atteso di una variabile casuale discreta è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi), è in sostanza la media ponderata dei possibili risultati che possono essere assunti in un orizzonte temporale discreto dalla variabile di riferimento.

dimostrazione di come sotto l'ipotesi che gli investitori siano indifferenti al rischio la variabile p rappresenta proprio la probabilità di aumento del prezzo dell'azione nell'intervallo di tempo T considerato.
Dimostrata la veridicità del principio dell'indifferenza al rischio, esso può essere applicato concretamente alla valutazione di un derivato seguendo tre passaggi:

1. calcolo delle probabilità associate all'andamento dell'azione in un mondo neutrale al rischio
2. calcolo del valore atteso del derivato sulla base delle probabilità ottenute
3. attualizzazione del valore atteso del derivato in base al tasso di interesse privo di rischio

Nelle righe successive si verificherà che l'applicazione del modello di valutazione delle opzioni basato sull'ipotesi di neutralità al rischio conduce agli stessi risultati ai quali si è arrivati sulla base dell'argomentazione circa l'assenza di opportunità di arbitraggi e la costruzione di un portafoglio di copertura. A tal fine viene ripreso l'esempio precedentemente riportato in Figura 2.2.

Sappiamo che il prezzo corrente dell'azione è di 20$ e dopo 3 mesi potrà salire fino a 22$ oppure scendere a 18$; l'opzione oggetto di valutazione è una call europea con prezzo di esercizio pari 21$ e si ipotizza che il tasso risk-free sia pari al 12% annuo. A questo punto ai fini del pricing dell'opzione potremmo trovare direttamente il valore di p servendoci dell'equazione (2.3) oppure ricavarlo sapendo che il tasso di rendimento dell'azione deve necessariamente essere pari al tasso di interesse privo di rischio pari al 12% annuo. Ciò significa che p deve soddisfare la seguente equazione:

$$22\$ \times p + 18\$ \times (1-p) = 20\$ \times e^{0{,}12 \times 0{,}25}$$

Risolvendo l'equazione per p si ottiene che p deve essere pari a 0,6523.
C'è dunque una probabilità del 65,23% che dopo 3 mesi l'opzione call valga 1$ e una probabilità del 34,77% che valga 0$. Pertanto, il suo valore atteso è pari a:

$$E[f_t] = 0{,}6523 \times 1\$ + 0{,}3477 \times 0\$ = 0{,}6523\$$$

Il valore corrente dell'opzione, che rappresenta dunque il prezzo corrente dell'opzione sul mercato, si ottiene attualizzando il valore atteso al tasso privo di rischio:

$$f = 0{,}6523\$ \times e^{-0{,}12 \times 0{,}25} = 0{,}633\$$$

Si tratta dello stesso prezzo ottenuto in precedenza. Perciò possiamo concludere che l'ipotesi circa l'assenza di opportunità di arbitraggio e il principio dell'indifferenza al rischio forniscono la stessa valutazione del prezzo di un'opzione europea in un ottica di valutazione di tipo binomiale.

2.1.3 Alberi Binomiali a due stadi

A questo punto possiamo espandere la nostra analisi aumentando il numero di sottoperiodi in cui dividiamo l'orizzonte di valutazione dell'opzione, cominciando dal caso più semplice in cui abbiamo solamente due sottoperiodi (ossia due intervalli temporali). Anche qui consideriamo il prezzo iniziale dell'azione pari a S_0 e tale valore inziale, nel corso di ogni singolo intervallo, potrà esclusivamente salire fino a un livello *u* volte maggiore rispetto a quello inziale oppure scendere a un livello *d* volte inferiore rispetto a quello di partenza. I diversi scenari possibili sono mostrati nella Figura 2.3, dalla quale risulta evidente come alla scadenza dell'opzione, lo strumento derivato possa assumere 3 diversi valori che ovviamente dipendono dal prezzo dell'azione sottostante: nel caso in cui l'azione abbia un rialzo di prezzo in ciascuno dei due sottoperiodi, il suo prezzo alla scadenza dell'opzione sarà pari a S_0u^2 e il corrispondente valore dell'opzione sarà f_{uu}; se l'azione dovesse avere un andamento più incerto (positivo in un intervallo e negativo nell'altro), il suo prezzo finale sarà di S_0ud al quale corrisponderà un valore dell'opzione pari a f_{ud}; infine, qualora il prezzo dell'azione dovesse diminuire in entrambi i sottoperiodi, il suo valore finale sarà di S_0d^2 e il valore dell'opzione a scadenza sarà di f_{dd}.

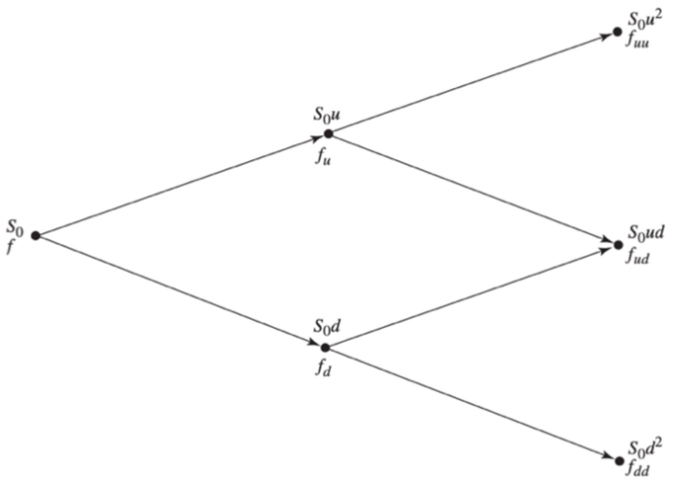

Figura 2.3 - Prezzi dell'azione e dell'opzione in un albero binomiale a due stadi[26]

[26] Grafico tratto da Hull J.C. (2015). Options, Futures and Other Derivatives. Pearson. pag. 281.

Rimanendo nell'ipotesi che il tasso privo di rischio sia pari a *r*, questa volta non avremo un singolo tempo alla scadenza pari a T, bensì diversi sottoperiodi che costituiscono intervalli temporali di uguale durata pari a Δt. Di conseguenza le equazioni (2.2) e (2.3) ottenute in precedenza diventano

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{0.5}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} \tag{0.6}$$

A questo punto il metodo di pricing dell'opzione al nodo iniziale prevede un ragionamento che parte dal valore dell'opzione all'ultimo nodo e lo riporta all'istante di valutazione secondo un processo detto di *backwards-induction*, comunemente usato nella risoluzione di alberi delle decisioni multistadio in cui si vuole ricavare il valore iniziale di una variabile. I valori a scadenza delle opzioni sono semplici da ricavare una volta che si conosce il prezzo finale dell'opzione, poiché basterà confrontare il prezzo di esercizio K con il valore finale dell'azione S_t per capire se l'opzione avrà un payoff positivo o nullo, applicando le formule ampiamente descritte nel capitolo 1. Perciò i valori f_{uu}, f_{du} e f_{dd}, sono facilmente calcolabili. A questo punto occorre computare i possibili valori dell'opzione alla fine del primo sottoperiodo e a tal fine ci serviamo delle formule (2.5) e (2.6) soprariportate. Di conseguenza, il valore dell'opzione alla fine del primo stadio intermedio, nel caso in cui il prezzo dell'azione cresca nell'intervallo corrispondente, sarà pari a

$$f_u = e^{-r\Delta t}[\, pf_{uu} + (1-p)f_{ud}\,] \tag{0.7}$$

Parallelamente, il valore al nodo intermedio dell'opzione nel caso in cui nel primo sottoperiodo l'azione sottostante abbia un andamento negativo corrisponde a

$$f_d = e^{-r\Delta t}[\, pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{0.8}$$

A questo punto, non rimane che calcolare il valore dell'opzione al nodo iniziale (ossia il prezzo dell'opzione), attualizzando ad oggi il valore atteso dell'opzione dopo il primo sottoperiodo, sapendo che nei nodi intermedi l'opzione potrà assumere un valore pari a f_u con probabilità p e un valore pari a f_d con probabilità (1-p), dove la probabilità di rialzo del prezzo dell'opzione p è espressa dall'equazione (2.5). Alla luce di ciò il prezzo dell'opzione all'istante di valutazione sarà:

$$f = e^{-r\Delta t}[\, pf_u + (1-p)f_d\,] \tag{0.9}$$

Volendo adesso riassumere tutti i passaggi logici eseguiti per trovare il prezzo dell'opzione all'interno di un'unica formula generica, possiamo sostituire le equazioni (2.7) e (2.8) all'interno dell'equazione (2.9), ottenendo un'equazione che ci restituisce il prezzo dell'opzione inserendo come input i tre possibili payoff a scadenza dell'opzione, la probabilità di rialzo del prezzo dell'opzione e ovviamente il tasso di interesse privo di rischio. Tale formula risulta essere:

$$f = e^{-2r\Delta t}[\, p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd} \,] \tag{0.10}$$

L'equazione riportata è pienamente coerente con il principio di valutazione neutrale al rischio che è stato descritto nel paragrafo precedente. Infatti, le variabili p^2, $2p(\ 1-p\ )$ e $(\ 1-p\ )^2$ rappresentano proprio le probabilità che il prezzo dell'azione ha di raggiungere allo stadio finale dell'albero binomiale rispettivamente i nodi superiore, intermedio e inferiore. Di conseguenza, il prezzo dell'opzione f può essere espresso come il valore atteso del payoff a scadenza dell'opzione in un mondo neutrale al rischio, che dunque può essere attualizzato al tasso privo di rischio[27].

2.1.4 Versione Generale del Metodo Binomiale

Le procedure sopra descritte per il calcolo del prezzo di un'opzione in un modello binomiale a due stadi si possono espandere all'aumentare del numero di sottoperiodi in cui viene diviso l'orizzonte di valutazione. Infatti, il principio teorico alla base del modello, ossia quello della valutazione neutrale al rischio, continua a valere a prescindere dal numero di intervalli temporali considerati e di conseguenza, in un mondo neutrale al rischio, il prezzo dell'opzione continuerà a essere uguale al suo valore atteso, attualizzato poi al tasso di interesse privo di rischio. Chiaramente, dato che un'attività finanziaria può assumere un numero indefinito di valori a una data futura, si può ottenere una misura probabilmente più realistica e accurata del valore dell'opzione qualora il metodo binomiale venga applicato considerando un numero abbastanza elevato di sottoperiodi. Questo ci pone però di fronte a un importante interrogativo, ossia come stabilire a priori dei valori adeguati alle possibili variazioni del prezzo dell'azione in ogni sottoperiodo. Negli esempi precedenti abbiamo infatti supposto che l'azione in ogni sottoperiodo potesse aumentare o diminuire il suo valore di una percentuale pari al 10% e che quindi i valori di u e d che esprimono tali variazioni in aumento e in diminuzione fossero sempre pari a 1,1 e 0,9 per ciascun sottoperiodo. Ma nella realtà finanziaria c'è un metodo molto più preciso e economicamente significativo per calcolare questi due parametri che sono di fatto alla base di qualsiasi modello di valutazione binomiale, a prescindere dalla sua accuratezza e dal numero di intervalli temporali considerati.

Nella pratica, i parametri necessari per costruire un albero binomiale di intervallo temporale Δt risultano essere u, d e p dove l'ultimo si ricava dalla relazione tra i primi due. In particolare, u e d

---

[27] In questo caso l'attualizzazione viene ripetuta per due sottoperiodi e ciò spiega la presenza del numero due all'esponente del numeri di Eulero presente nella formula (2.10).

devono essere scelti in modo tale che il valore di p restituisca un tasso di rendimento atteso del sottostante esattamente pari al tasso privo di rischio (così da essere coerente con l'ipotesi di indifferenza al rischio). Perciò nell'equazione (2.6) i parametri u e d devono essere scelti in modo tale che l'albero binomiale risulti coerente con la volatilità del sottostante ed è proprio la struttura dell'albero concorde con la volatilità del sottostante dell'opzione che lo rende adatto alla valutazione dell'opzione stessa. Come vedremo meglio quando verrà trattato il modello di pricing delle opzioni esposto da Black, Scholes e Merton, la volatilità σ di un'azione viene definita in modo tale che $\sigma\sqrt{\Delta t}$ sia la deviazione standard del tasso di rendimento dell'azione nell'intervallo Δt. Perciò, la varianza dei rendimenti dell'azione sarà $\sigma^2\Delta t$. La varianza di una variabile casuale[28] X è pari a $E(X^2) - [E(X^2)]^2$, dove con l'espressione E( ) si indica il valore atteso di una variabile. Sappiamo che in ogni intervallo Δt, il tasso di rendimento dell'azione è pari a u – 1 con probabilità p e a d – 1 con relativa probabilità 1 – p; perciò, affinché i parametri di base dell'albero binomiale siano coerenti con $\sigma^2\Delta t$ dell'azione sottostante, occorre che

$$p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - [p(u-1) + (1-p)(d-1)]^2 = \sigma^2\Delta t \qquad (0.11)$$

Sostituendo l'equazione (2.6) nell'equazione precedente, si ottiene

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t \qquad (0.12)$$

Adesso, trascurando i termini di ordine Δt^2 e superiore, una delle soluzione dell'equazione (2.12) risulta essere[29]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad \text{e} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Questi sono proprio i valori di *u* e *d* proposti da Cox, Ross e Rubinstein nel loro rivoluzionario studio sulla valutazione delle opzioni pubblicato nel 1979.

Siamo dunque arrivati a definire tutti i parametri che ci permettono di costruire un modello attendibile per la valutazione delle opzioni. Quando tali modelli vengono applicati nella realtà, al fine di ottenere prezzi delle opzioni accurati e attendibili, la vita dell'opzione viene divisa in almeno 30 intervalli di lunghezza Δt, dove ogni intervallo contiene un movimento binomiale del prezzo del sottostante. Pertanto, ipotizzando di avere 30 intervalli, i possibili prezzi finali dell'azione saranno 31 ma

---

[28] In statistica si definisce variabile casuale una funzione reale che associa ad E (evento elementare dell'insieme degli eventi Ω) uno ed un solo numero reale.

[29] Utilizzando l'espansione in serie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

soprattutto ci saranno 2^{30} sentieri temporali, ossia circa un miliardo di possibili variazioni combinate del prezzo. Le formule utilizzate per questo tipo di valutazione accurata rimangono le stesse enunciate in questo capitolo, tuttavia, è chiaro che bisogna avvalersi di adeguati strumenti di calcolo o software computazionali per poter svolgere in modo iterativo calcoli così complessi.

2.2 Modello di Black-Scholes-Merton

All'inizio degli anni '70 gli economisti Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton hanno dato un contributo fondamentale alla teoria di valutazione delle opzioni, teorizzando il modello di pricing detto Black-Scholes-Merton. Tale modello ha avuto un'influenza decisiva sul modo in cui gli operatori finanziari valutano le opzioni e costruiscono posizioni di copertura; l'importanza rivoluzionaria del modello è stata riconosciuta nel 1997 con l'assegnazione del premio Nobel per l'economia a Myron Scholes e Robert Merton, premio che purtroppo Black non ha potuto ricevere a causa della sua prematura scomparsa nel 1995.
Come è stato più volte ricordato, la difficoltà principale nella valutazione dei derivati e quindi delle opzioni, sta nel determinare il giusto tasso di interesse al quale attualizzare il payoff atteso dell'opzione. Black e Scholes[30] hanno brillantemente risolto questo problema utilizzando il *capital asset pricing model*[31] per correlare il tasso richiesto dal mercato per investire nell'opzione al tasso richiesto per investire nell'azione sottostante.
L'approccio seguito da Merton[32] nello sviluppo del modello è invece diverso da quello di Black e Scholes, sebbene esso conduca alla medesima formula di pricing delle opzioni. La dimostrazione di Merton si basa infatti sulla costruzione di un portafoglio di copertura, composto dall'opzione oggetto di valutazione e dall'azione sottostante, i cui pesi vengono aggiustati dinamicamente in modo che il risultato del portafoglio sia indipendente dal movimento del prezzo dell'azione e sia quindi privo di rischio. Il metodo di base è molto simile a quello descritto per la dimostrazione del metodo binomiale, ma presenta una complessità maggiore poiché il portafoglio deve teoricamente essere riponderato continuamente col passare del tempo, mentre nell'approccio binomiale la valutazione veniva fatta su intervalli temporali discreti e sulla base di variazioni discrete delle variabili quali il prezzo dell'azione. In questo capitolo verrà presentato il modello di valutazione secondo l'approccio definito da Merton e ciò ci permetterà di arrivare a una formula di valutazione delle opzioni estremamente

[30] Black F., Scholes M. (1973). "The pricing of options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy
[31] Il capital asset pricing model (CAPM) è un modello finanziario secondo il quale i rendimenti attesi aumentano linearmente con il beta di un'attività.
[32] Merton R. (1973). "The Theory of Rational Option Pricing". The Bell Journal of Economics and Management Science

semplice e di applicazione immediata che permette di ottenere il prezzo di un'opzione conoscendo le sue componenti principali ovvero:

-S_t: prezzo del titolo sottostante
-K: strike price dell'opzione
-R_f: tasso risk-free presente sul mercato e associato all'opzione
-T: scadenza dell'opzione
- σ: volatilità dell'azione sottostante

Prima di procedere all'illustrazione del modello teorico bisogna identificare le ipotesi di base del modello stesso, sulle base delle quali possiamo ricavare la formula di valutazione a partire dai dati sopraelencati. Tali ipotesi sono state definite da Black e Scholes le "condizioni ideali"[33] che devono essere presenti sul mercato delle azioni e delle opzioni affinché la formula di pricing possa essere ricavata e soprattutto utilizzata per produrre risultati accettabili. Tali condizioni sono:

a) il tasso di interesse privo di rischio è conosciuto e costante fino alla scadenza dell'opzione;
b) il prezzo dell'azione sottostante segue un cammino casuale (*random walk*) in un intervallo di tempo continuo con una varianza che è proporzionale al quadrato del prezzo dell'azione stessa. Perciò la distribuzione dei possibili prezzi dell'azione alla scadenza dell'opzione segue un andamento log-normale. Inoltre, il rendimento atteso μ e la volatilità σ dei rendimenti dell'azione sono costanti;
c) l'azione sottostante non paga dividendi nell'intervallo di valutazione;
d) l'opzione oggetto di valutazione è di tipo Europeo;
e) non sono presenti sul mercato costi di transazione nella compravendita di azioni e opzioni;
f) non esistono sul mercato opportunità di arbitraggio prive di rischio;
g) sono consentite le vendite allo scoperto e non ci sono restrizioni all'utilizzo dei relativi proventi.

Sotto queste condizioni possiamo dire che il prezzo dell'opzione dipenderà solamente dal prezzo a scadenza dell'azione sottostante e dal tempo a scadenza, mentre le altre variabili sono costanti.

2.2.1 Processo stocastico per i prezzi delle azioni

Il prezzo dell'azione sottostante al contratto di opzione è di fatto una variabile che cambia valore nel tempo in modo incerto e segue quindi un "percorso stocastico"[34]. I processi stocastici possono essere

[33] Black F., Scholes M. (1973). "The pricing of options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy
[34] Un processo stocastico (processo aleatorio) descrive l'andamento nel tempo di una o più grandezze la cui evoluzione futura non si può conoscere con certezza ma si può individuare in termini probabilistici.

classificati come processi in tempo discreto o in tempo continuo. Nel caso dell'approccio binomiale alla valutazione delle opzioni si utilizza un processo stocastico in tempo discreto poiché la variabile di riferimento può cambiare solo in intervalli temporali prefissati; al contrario, nei processi a tempo continuo la variabile può cambiare il suo valore continuamente e in ogni istante. Inoltre, i processi stocastici possono essere divisi in processi a variabile continua, dove la variabile può assumere qualsiasi valore all'interno del campo di definizione, e processi a variabile discreta, nei quali la variabile può assumere solo alcuni valori discreti (come nel caso del prezzo dell'azione negli alberi binomiali che ad ogni nodo poteva aumentare o diminuire secondo i valori percentuali discreti u e d).

In questo capitolo, invece, la variabile che descrive il prezzo dell'azioni all'interno del modello Black-Scholes-Merton segue un processo stocastico con variabile continua e in tempo continuo. Nelle prossime pagine verrà mostrato come i processi stocastici di questo tipo siano fondamentali per la comprensione delle opzioni e dei derivati in generale e verrà presentato il cosiddetto "Lemma di Ito" che è alla base della teoria di valutazione dei derivati.

Nell'ambito del modello che si vuole descrivere possiamo assumere che il prezzo dell'azione sottostante segua un percorso stocastico chiamato *moto Browniano geometrico*[35] che viene rappresentato con la seguente equazione differenziale

$$dS = \mu S \, dt + \sigma S \, dz \tag{0.13}$$

dove S è il prezzo dell'azione, μ è il tasso di rendimento atteso dell'azione, mentre σ è la volatilità del prezzo dell'azione. I parametri μS e σS sono detti "tasso di deriva"[36] (*drift rate*) e "tasso di varianza" (*variance rate*) e come vedremo contribuiscono a spiegare il valore atteso e la varianza delle variazioni infinitesime del prezzo dell'azione nel tempo continuo.

Inoltre, possiamo considerare il modello di movimento del prezzo dell'azione individuato dall'equazione (2.13) come il caso limite dei movimenti di prezzo di tipo binomiale descritti nel paragrafo precedente, che si ottiene approssimando a 0 i valori degli intervalli temporali e di conseguenza facendo tendere a infinito il numero degli intervalli in cui andiamo a dividere l'albero binomiale.

[35] Il moto Browniano è un modello probabilistico utilizzato per descrivere l'evoluzione nel tempo di fenomeni rilevanti nel mondo della fisica, come i movimenti nello spazio di particelle immerse in un fluido, tuttavia è stato successivamente applicato con successo anche per descrivere fenomeni di natura economico-finanziaria.

[36] Il tasso di deriva (drift rate) è un coefficiente che compare in alcune equazioni differenziali stocastiche che descrivono l'andamento aleatorio nel tempo di una variabile finanziaria. Nell'equazione (2.13) il tasso di deriva indica il valore atteso dell'intensità istantanea di rendimento del titolo, il cui prezzo S cambia nel tempo seguendo l'equazione differenziale.

2.2.2 Lemma di Ito

Come detto in precedenza, nel modello che stiamo analizzando il prezzo dell'opzione può essere ridotto a funzione delle variabili prezzo dell'azione e tempo alla scadenza. Tale affermazioni vale anche in termini generali poiché si può affermare che il prezzo di qualsiasi derivato è in realtà funzione delle variabili stocastiche sottostanti e del tempo. Per capire meglio come si comportano le funzioni delle variabili stocastiche occorre conoscere le formule elaborate dal matematico giapponese Kiyoshi Ito che sono note come Lemma di Ito.

Per descrivere questi risultati supponiamo che una variabile x segua un processo stocastico detto di Ito, espresso dalla seguente equazione

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{0.14}$$

Si tratta dunque di una versione generalizzata del moto Browniano geometrico con il quale avevamo descritto l'andamento del prezzo dell'azione in precedenza, poiché i parametri di riferimento a e b sono espressi in funzione sia della variabile sottostante x sia del tempo t. Pertanto, nei processi di Ito sia il tasso di deriva atteso sia il tasso di varianza possono cambiare con il passare del tempo.

In particolare, nell'equazione (2.14) la variabile x presenta un tasso di deriva pari a a e un tasso di varianza pari a b^2. A questo punto definiamo la funzione $G(x,t)$ che in base al lemma di Ito seguirà il seguente processo

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\, dz \tag{0.15}$$

dove *dz*[37] rappresenta la stessa componente di variabilità presente nell'equazione (2.14) che rende le equazioni differenziali delle equazioni di tipo stocastico caratterizzate appunto da una componente aleatoria.

Pertanto, possiamo dire che anche la funzione G segue un processo di Ito. In particolare, il tasso di deriva è pari a

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

[37] In realtà la variabile dz indica un processo stocastico detto processo di Wiener. Una variabile z segue un processo di Wiener se soddisfa due proprietà: la prima è che la variazione discreta Δz in un piccolo intervallo Δt sia $\Delta z = \varepsilon\sqrt{t}$ dove ε è un'estrazione casuale da una normale standardizzata $\varphi(0,1)$; la seconda è che i valori di Δz di due qualsiasi intervalli Δt sono indipendenti. La prima proprietà implica che Δz si distribuisce secondo una normale con media 0, varianza Δt e deviazione standard $\sqrt{t}$; la seconda implica che la variabile z segue un processo stocastico di tipo markoviano.

e il tasso di varianza corrisponde a

$$\frac{\partial G}{\partial x} b^2$$

La dimostrazione rigorosa del lemma di Ito va ben al di là degli scopi di questa trattazione, ma i risultati ottenuti risulteranno poi fondamentali al fine di dimostrare l'equazione differenziale che costituisce la base portante del modello di valutazione di Black-Scholes-Merton.
Infatti, applicando il lemma di Ito all'equazione (2.14), che abbiamo detto descrive l'andamento del prezzo dell'azione sottostante, otteniamo che il processo seguito da una funzione G di S e t, ovvero l'andamento del prezzo di un'opzione espresso in funzione delle sue variabili, è dato da

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\, dz \tag{0.16}$$

Il risultato fondamentale dell'applicazione del lemma di Ito è che il prezzo dell'azione S e il valore della funzione G (che ha come variabili sia S che il tempo) sono influenzati dalla stessa fonte di incertezza dz. Questa considerazione sarà assolutamente fondamentale ai fini della derivazione dei risultati di Black, Scholes e Merton.

2.2.3 Log-Normalità dei prezzi delle azioni

In questo paragrafo le proprietà del lemma di Ito verranno utilizzate per evidenziare il perché dell'assunzione circa la distribuzione Lognormale dei prezzi delle azioni che abbiamo evidenziato tra le ipotesi di base del modello.
Ipotizziamo di costruire la funzione G introdotta in precedenza come logaritmo naturale del prezzo dell'azione S, ovvero

$$G = \ln(S)$$

dai risultati precedenti legati al lemma di Ito otteniamo che

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

e in base all'equazione (2.15) si ha che il processo seguito dalla funzione G è

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dz \tag{0.17}$$

Dal momento che μ e σ sono costanti l'equazione (2.17) indica che G segue un *moto Browniano geometrico* con tasso di deriva costante $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e tasso di varianza costante σ^2. Pertanto, possiamo dire che la variazione di G tra il tempo zero un istante futuro T si distribuisce normalmente con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ e varianza $\sigma^2 T$.

Espresso in modo più formale

$$ln(S_t) - ln(S_0) \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{0.18}$$

e di conseguenza

$$ln(S_t) \sim \varphi\left[ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{0.19}$$

Dove S_t è il prezzo dell'azione a un generico istante T, S_0 è il prezzo dell'azione al tempo 0 e $\varphi(m, v)$ sta ad indicare una distribuzione normale con media m e varianza v.
In particolare, l'equazione (2.19) mostra la distribuzione di $ln(S_t)$ è di tipo normale da cui discende che la distribuzione di S_t, ossia dell'andamento del prezzo dell'azione, sarà di tipo log-normale. Abbiamo quindi dimostrato come nel modello sviluppato da Black, Scholes e Merton la distribuzione probabilistica del prezzo del sottostante al tempo T debba necessariamente seguire un andamento log-normale.

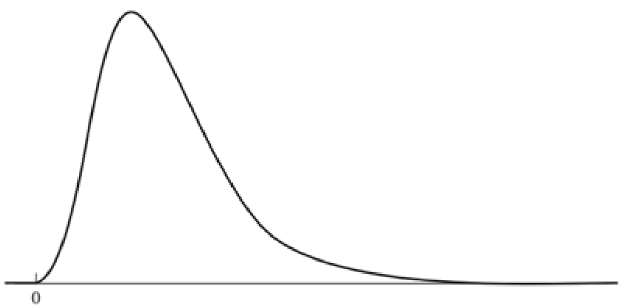

Figura 2.4 - Andamento di una distribuzione log-normale

Come si evince dalla Figura 2.4, una variabile che presenta una distribuzione log-normale, come nel nostro caso il prezzo dell'azione, può assumere qualsiasi valore compreso nell'intervallo $[0; +\infty]$.
A differenza di quanto accade per la distribuzione normale, la distribuzione log-normale è asimmetrica per cui media, mediana e moda risultano diverse una dall'altra.

Inoltre, sulla base dell'equazione (2.19) e sfruttando le proprietà delle distribuzioni log-normali, si può dimostrare che il valore atteso di S_t è dato da $E(S_t) = S_0 e^{\mu T}$; mentre la varianza del prezzo dell'azione si ottiene come $var(S_t) = {S_0}^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$.

2.2.4 Concetti alla base del modello

Il modello di valutazione di Black, Scholes e Merton porta alla derivazione di un'equazione differenziale valida per il prezzo f di ogni derivato presente sul mercato che dipenda dal prezzo di un titolo sottostante che non paga dividendi. Tale equazione verrà ricavata nel prossimo paragrafo mentre in questa sezione vengono illustrati i concetti economici che rendono possibile la derivazione matematica.

L'analisi proposta dai tre economisti è di fatto analoga a quella che è stata illustrata nel capitolo precedente, quando la dinamica possibile del prezzo dell'opzione era esclusivamente binomiale. Infatti, la chiave per prezzare l'opzione è anche in questo modello quella di formare un portafoglio privo di rischio formato da opzioni e azioni, il cui rendimento, in assenza di opportunità di arbitraggio, sarà proprio pari al tasso di interesse privo di rischio.

Ciò che ci permette di costruire tale portafoglio privo di rischio è il fatto che il prezzo dell'opzione e il prezzo dell'azione, come evidenziato nel paragrafo precedente, dipendono dalla stessa fonte di incertezza (*dz*) che è legata alle possibili variazioni nel continuo del prezzo dell'azione. Di conseguenza, in ogni intervallo infinitesimale di tempo, il prezzo di un'opzione call è perfettamente correlato (positivamente) al prezzo del sottostante e allo stesso modo il prezzo di un'opzione put è perfettamente correlato (negativamente) al prezzo dell'azione sottostante. Perciò, in entrambi i casi, quando si realizza un portafoglio adeguato di opzioni e azioni, il profitto (perdita) sulla posizione in azioni viene sempre compensato dalla perdita (profitto) sulla posizione in opzioni in modo tale che il valore complessivo del portafoglio in ogni intervallo di tempo risulta calcolabile con certezza.

C'è tuttavia una fondamentale differenza tra l'approccio di Black-Scholes-Merton e quello alla base del modello binomiale descritto in precedenza: in questo caso, infatti, il portafoglio creato sinteticamente rimane privo di rischio (*hedged*) solo per un periodo di tempo istantaneamente breve e per mantenere questa posizione di copertura per tutto il tempo fino alla scadenza dell'opzione occorrerà procedere a un aggiustamento continuo dei pesi di opzioni e azioni all'interno del portafoglio, attraverso operazioni di trading dette di ribilanciamento.

Inoltre, anche in questo modello, alla fine il tasso di tasso di rendimento del portafoglio privo di rischio, in ogni istante nel continuo, deve necessariamente essere pari al tasso di interesse privo di rischio, essendo questa uguaglianza l'elemento chiave che permette di ottenere la formula di valutazione.

2.2.5 Equazione Differenziale Fondamentale

In questo paragrafo, a partire dalle ipotesi di base e dai concetti teorici fondamentali, viene ricavata l'equazione differenziale fondamentale del modello di Black-Scholes-Merton, la cui importanza è data dal fatto che rappresenta una pietra miliare nella teoria della valutazione dei derivati in generale e non solo dello strumento delle opzioni.

Partiamo dall'ipotesi che il prezzo *spot* S dell'azione segua il processo descritto nella sezione 2.2.1 ed esplicitato dall'equazione (2.13). A questo punto, definito f come il prezzo di un'opzione call (o di qualsiasi altro derivato) che dipenda dal prezzo sottostante S, la variabile f deve necessariamente essere una determinata funzione di *S* e *t*:

$$f = f(S, t)$$

Tale relazione è descritta da un'equazione differenziale che si ottiene applicando il lemma di Ito (2.15) all'equazione che descrive l'andamento dell'azione sottostante (2.13). Dunque, avremo

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\, dz \qquad (0.20)$$

Come detto in precedenza, dal confronto tra le equazioni (2.13) e (2.20) risulta evidente come la variabilità *dz* influenzi la dinamica sia del prezzo dell'azione S che del prezzo del derivato (opzione) *f*. Ne consegue che l'obiettivo della dimostrazione sarà quello di costruire un portafoglio bilanciato di opzioni e azioni tale da eliminare la componente stocastica *dz* e far si che il rendimento del portafoglio sia certo a prescindere dalle dinamiche del mercato e quindi dai movimento di prezzo del sottostante[38]. Tale portafoglio si compone di una posizione corta in opzioni di entità pari ed opposta al valore f dell'opzione da valutare e di una quantità di azioni (posizione lunga) pari a $\frac{\partial f}{\partial S}$. Il valore del portafoglio, indicato con Π, sarà per definizione pari a

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \qquad (0.21)$$

Inoltre, la variazione ΔΠ del valore del portafoglio nell'intervallo di tempo Δt è data da

[38] In verità, per motivi di chiarezza e facilità di comprensione, la dimostrazione dell'equazione differenziale fondamentale viene effettuata immaginando delle variazioni di prezzo e intervalli temporali discreti e dunque la variabile aleatoria da eliminare attraverso la copertura sarà in effetti Δz.

$$\Delta\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{0.22}$$

A questo punto sostituiamo le equazioni (2.13) e (2.20) all'interno dell'equazione (2.22) e otteniamo

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{0.23}$$

Dal momento che nell'equazione (2.23) così ricavata non è presente il termine Δz, il portafoglio deve essere privo di rischio all'interno dell'intervallo temporale Δt. Di conseguenza, sulla base delle ipotesi fatte finora, il portafoglio dovrà avere nel prossimo intervallo temporale lo stesso tasso di rendimento dei titoli privi di rischio, ovvero il tasso risk-free R_f. Questo perché se rendesse di più (di meno), gli arbitraggisti avrebbe un'opportunità di ottenere un profitto senza rischio semplicemente vendendo (comprando) i titoli privi di rischio e acquistando (vendendo) il portafoglio costruito. Da ciò segue che

$$\Delta\Pi = r_f \Pi \Delta t \tag{0.24}$$

A questo punto sostituiamo nell'equazione (2.24) i valori di Π e ΔΠ così come individuati dalle equazioni (2.21) e (2.23), ottenendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta \mathrm{t} = r_f\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta \mathrm{t}$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r_f f \tag{0.25}$$

L'equazione così ottenuta è la celebre equazione differenziale di Black-Scholes-Merton. Essa presenta infinite soluzioni, una per ciascun derivato il cui valore dipenda da un sottostante generico S.

Questa equazione ha la caratteristica distintiva di non presentare nessuna variabile che sia influenzata dalla propensione al rischio degli investitori. Infatti, le variabili che compaiono nell'equazione sono il tasso d'interesse privo di rischio, la volatilità dell'azione, il tempo e il prezzo corrente dell'azione; nessuna di queste è correlata alla propensione al rischio degli investitori. Questo perché nell'equazione non figura il tasso di rendimento atteso μ dell'azione, che dipende proprio dalla propensione al rischio poiché più è elevata l'avversione al rischio degli investitori, maggiore sarà il tasso di rendimento atteso sul titolo. Questa caratteristica fondamentale dell'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton ci permette di argomentare che se la propensione al rischio degli investitori non è presente nella formula di valutazione di un derivato allora non può essere in grado di influenzarne la soluzione (ossia il prezzo del derivato stesso). Pertanto, nel determinare il prezzo f di un derivato possiamo semplicemente assumere che tutti gli investitori siano neutrali al rischio, come abbiamo peraltro ipotizzato nella valutazione delle opzioni attraverso il metodo binomiale. In un mondo neutrale al rischio il rendimento di qualsiasi titolo è uguale al tasso di interesse privo di rischio e ciò ci consente di attualizzare qualsiasi payoff futuro al tasso risk-free, semplificando enormemente l'analisi e la valutazione dei derivati.

Di conseguenza, l'ipotesi di neutralità verso il rischio può rappresentare un utile espediente per ottenere le soluzioni dell'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton, soluzioni che però rimangono ugualmente valide anche quando viene rilassata questa ipotesi. Infatti, passando al mondo reale, dove gli investitori sono avversi al rischio, il tasso di rendimento atteso dell'azione non può che cambiare a seconda del titolo e di conseguenza cambierà anche il tasso di interesse che deve essere utilizzato per la valutazione dei derivati, ma nel modello analizzato questi due effetti si controbilanciano perfettamente tra loro.

2.2.6 Formule di Black-Scholes-Merton

Le soluzioni dell'equazioni differenziale individuate da Black-Scholes-Merton per la valutazione di opzioni call e put europee su titoli che non distribuiscono dividendi sono le seguenti:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{0.26}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{0.27}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{t}} \qquad \text{e} \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Nelle formule di pricing proposte, l'espressione N(x) indica la funzione di distribuzione di una variabile normale con media nulla e deviazione standard uguale a 1, ossia la probabilità che una variabile normale standardizzata assuma un valore pari o inferiore a x.

Abbiamo dunque dimostrato ciò che avevamo introdotto all'inizio della sezione 2.2 di questo capitolo ovvero che attraverso il modello di Black-Scholes-Merton si possono ricavare delle formule in grado di restituire immediatamente il prezzo di un'opzione europea semplicemente inserendo come valori di input il prezzo dell'azione S_0, il prezzo di esercizio dell'opzione K, il tasso di interesse privo di rischio r_f, la volatilità σ del prezzo dell'azione e la vita residua T dell'opzione.

Significato di $N(d_1)$ e $N(d_2)$

Proviamo brevemente a dare una spiegazione di tipo concettuale a due termini puramente matematico statistici che sembrano quasi apparire all'improvviso nella formula di pricing degli strumenti derivati. In realtà l'espressione $N(d_2)$ nell'equazione (2.26) ha un significato molto semplice poiché rappresenta la probabilità che l'opzione call venga esercitata, rimanendo nell'ipotesi di un mondo neutrale al rischio.

L'interpretazione del termine $N(d_1)$ non è altrettanto immediata. L'espressione $S_0 N(d_1) e^{-rT}$ rappresenta il valore atteso (in un mondo neutrale al rischio) di una variabile che sarà pari a S_t quando $S_t > K$, mentre sarà pari a 0 in caso contrario. Infatti, lo strike price K verrà pagato solo se $S_t > K$ e come si è detto la probabilità che ciò accada è pari a $N(d_2)$. Dunque, il valore atteso della call in un mondo indifferente al rischio è pari a

$$S_0 N(d_1) e^{-rT} - K N(d_2).$$

Se attualizziamo il valore atteso ottenuto al tasso privo di rischio, si ricava la formula Black-Scholes-Merton per il valore corrente della call, ovvero esattamente l'equazione (2.26).

Interpretando la formula (2.26) in modo diverso si può notare che il valore corrente della call può essere scritto anche come:

$$c = e^{-rT} \left[S_0 e^{rT} \frac{N(d_1)}{N(d_2)} - K \right] N(d_2)$$

I cui termini presentano il seguente significato:

- e^{-rT}: fattore di attualizzazione
- $S_0 e^{rT} \frac{N(d_1)}{N(d_2)}$: valore atteso di S_t, subordinato a $S_t > K$
- K: prezzo di esercizio dell'opzione
- $N(d_2)$: probabilità di esercizio dell'opzione call

Capitolo 3 – Le opzioni Reali

3.1 Teoria delle Opzioni Reali

Nell'ambito della valutazione dei progetti di investimento da parte di un'impresa, il metodo più utilizzato e affidabile è sicuramente quello basato sull'attualizzazione dei flussi di cassa. Il metodo del Valore Attuale Netto (VAN) o *discounted-cash-flow* permette infatti di valutare un investimento attraverso l'applicazione di un tasso di sconto adeguato alla rischiosità del progetto, al quale vengono attualizzati i flussi di cassa attesi legati al progetto stesso. Il risultato ottenuto dalla somma di questi flussi di cassi attualizzati dà un'indicazione fondamentale ai manager dell'azienda circa la convenienza finanziaria dell'investimento; quest'ultimo dovrebbe essere intrapreso qualora il VAN risulti maggiore di 0, mentre distruggerebbe valore nel caso in cui il VAN risultasse negativo e dunque per i manager aziendali non è conveniente aviare l'investimento.

Tali modelli basati sull'attualizzazione dei flussi di cassi presentano però dei punti critici in quanto non permettono di considerare nella valutazione globale il valore della flessibilità del management, che consente di adattare e modificare decisioni strategiche prese in precedenza, a seguito di sviluppi inaspettati del mercato di riferimento. Nei modelli tradizionali, infatti, si assume che il management assuma un comportamento totalmente passivo in seguito alla decisione di investimento e che quindi la struttura e le dimensioni del progetto rimangano inalterate per tutta la vita dell'investimento. Tale assunzione diviene particolarmente irrealistica quando la stima dei flussi di cassa derivanti dall'investimento copre un arco temporale molto esteso, per il quale risulta praticamente impossibile che le stime possano essere confermate dai risultati effettivi, in quanto aumenta l'incertezza e la variabilità dei flussi stessi. Perciò in un mercato caratterizzato da elevata incertezza e competizione, l'arrivo di nuove informazioni nel corso del tempo permette di ridurre l'incertezza e migliorare sensibilmente la stima dei flussi di cassa attesi, dando la possibilità ai dirigenti dell'azienda di modificare il piano iniziale al fine di cogliere ulteriori opportunità di investimento o al contrario ridurre le perdite potenziali. Il management sarebbe dunque in grado di ritardare nel tempo, espandere, abbandonare o modificare dei progetti di investimento durante le varie fasi della loro vita operativa.

La teoria delle Opzioni Reali ha esattamente lo scopo di considerare il valore di tale flessibilità operativa all'interno del modello di valutazione dei progetti di investimento aziendali. In effetti, come sarà evidenziato in seguito, nella formulazione di una strategia di investimento è conveniente considerare le possibilità di intervento futuro da parte del management che in alcuni casi (opzioni di espansione della capacità produttiva e opzioni di crescita) potrebbe pianificare l'esercizio di tali opzioni a fronte di una maggiore spesa iniziale che verrà poi ricompensata dalla maggiore flessibilità del progetto. I fondamenti di questa teoria di valutazione degli investimenti sono stati introdotti dalle pubblicazioni di Myers[39] nel 1977, aprendo la strada a numerose teorie sviluppatesi negli anni successivi sull'idea fondamentale di integrare nella valutazione degli investimenti anche il valore aggiunto costituito dalla possibilità di esercitare opzioni reali, le quali vengono valutate applicando le teorie di pricing sviluppate negli anni per le opzioni finanziarie e che sono state descritte nei capitoli precedenti. Questo approccio innovativo permette di includere nella valutazione del progetto il valore intrinseco della flessibilità manageriale, con lo scopo ultimo di supportare il management nello scegliere la migliore allocazione possibile delle risorse aziendali, in particolare in un ambiente esterno caratterizzato da elevata incertezza. In questo modo diventano parte integrante della valutazione di un investimento anche aspetti quali la flessibilità operativa, le interazioni strategiche potenziali tra i vari progetti aziendali e le opportunità di future di crescita, altrimenti escluse dalla valutazione tradizionale basata sul VAN. Al contrario, combinando la logica dei flussi di cassa attualizzati con la teoria delle opzioni reali, Trigeorgis e Mason[40] sono giunti alla formulazione del cosiddetto VAN esteso (*extended net present value*) che permette di scomporre il valore creato da un investimento in due componenti fondamentali: la prima è costituita dalla sommatoria dei flussi di cassa attesi dal progetto attualizzati al costo opportunità del capitale, a cui poi andrà sottratto il costo iniziale legato all'avvio del progetto; mentre la seconda componente è costituita dal valore delle opzioni reali definite e presenti durante la vita residua del progetto. Secondo l'approccio tradizionale i manager di un'azienda dovrebbero intraprendere tutti i progetti che presentano un VAN positivo, poiché l'obiettivo è quello di effettuare scelte immediate e i progetti vengono considerati singolarmente senza valorizzare le possibili interdipendenze; ciò comporta che dopo aver effettuato l'investimento iniziale il management dovrebbe limitarsi ad attuare le relative strategie operative, difficilmente modificabili nel corso del tempo. Nella realtà, però, sono presenti forze esogene quali l'interazione competitiva e l'incertezza ambientale che nella maggior parte dei casi fanno discostare i flussi di cassa reali da quelli attesi. Ma è proprio questa incertezza, legata all'arrivo di nuove informazioni più precise nel futuro, che permette all'impresa di avere la facoltà di modificare o revisionare le strategie operative che erano state programmate e lo scopo principale della teoria delle opzioni reali è esattamente quello di includere questi aspetti aleatori nella valutazione dei progetti di investimento aziendali.

[39] Myers S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. Journal of Financial Economics. (pp. 147-175)
[40] Trigeorgis L. (1996). Real Options. MIT Press, Cambridge.

Alla luce di quanto detto finora, possiamo affermare che siamo in presenza di opzioni reali quando i manager di un'azienda hanno la possibilità di implementare diverse strategie a seconda degli scenari di mercato che si presentano durante il progetto. Perciò, affinché l'approccio basato sulle opzioni reali sia giustificato occorre che sussistano le seguenti caratteristiche nel progetto di investimento di riferimento:

-*Incertezza ambientale*. Per applicare l'approccio delle opzioni reali occorre ipotizzare che gli scenari futuri, così come i flussi di cassa, non siano conosciuti con certezza dall'impresa. Infatti, se al contrario il futuro fosse prevedibile, l'importanza e il valore dati alla flessibilità manageriale perderebbero di significato poiché in T_0 si potrebbe implementare una strategia operativa ottimale che possa adattarsi perfettamente alle dinamiche future del mercato, escludendo la necessità di aggiustamenti o modifiche in corso d'opera.

-*Nuove informazioni nel corso del progetto*. Sono proprio le nuove informazioni che ci si attende nel corso dello svilupparsi dell'investimento che permettono al management di ridurre l'incertezza e di individuare la migliore strategia con più chiarezza e sicurezza rispetto al periodo precedente. Senza questa possibilità, non potrebbe esserci riduzione dell'incertezza e di conseguenza non ci sarebbe nessun valore aggiunto nella possibilità di modificare la strategia in futuro.

-*Possibilità di adattamento dell'impresa*. Una volta acquisite le nuove informazioni, l'impresa deve essere dotata della flessibilità organizzativa e gestionale adeguata a trasferire l'input delle nuova conoscenza in una strategia che permetta di reagire prontamente alle modifiche ambientali.

-*Irreversibilità della spesa*. Ad ogni decisione strategica aziendale è collegato un progetto di spesa irreversibile, infatti se così non fosse e gli investimenti potessero essere rimborsati una volta effettuati, verrebbe totalmente a mancare il valore aggiunto insito nella flessibilità manageriale.

Riassumendo, le opzioni reali racchiudono un approccio sistematico alla valutazione dei progetti di investimento che trova fondamento nella teoria delle opzioni finanziarie con la finalità di applicarla ad attività fisiche reali, in un ambiente di business caratterizzato da incertezza e dove le scelte manageriali sono flessibili.
L'utilità dell'approccio delle opzioni reali è stata ben presto riconosciuta da molte aziende, operanti in industrie caratterizzate da un ambiente molto instabile e soggetto a grande variabilità come quello del settore petrolifero e minerario. Infatti, queste industrie sono caratterizzate dall'incertezza legata ai prezzi futuri del bene oggetto di estrazione e dalla facoltà dei manager di dividere il progetto in diverse fasi e processi di ricerca e successiva estrazione, dove quindi le opzioni reali costituiscono

uno strumento più che valido ai fini della valutazione economica delle diverse strategie di investimento. Proprio tale utilizzo delle opzioni reali sarà oggetto del caso pratico che verrà presentato e analizzato dettagliatamente nell'ultimo paragrafo di questo capitolo.

3.2 Opzioni reali e opzioni finanziarie

L'analogia concettuale tra opzioni finanziarie e opzioni reali è abbastanza intuitiva e la tabella nella Tabella 3.1 evidenzia gli elementi paralleli delle due tipologie di opzioni secondo le cinque variabili che determinano il valore di un'opzione finanziaria nell'ambito del modello di Black-Scholes. Come verrà messo in evidenza nei paragrafi successivi è invece meno scontato che le ipotesi economiche e i concetti matematici alla base del modello, utilizzati per il prezzo delle opzioni finanziarie, siano effettivamente sempre applicabili anche alla valutazione delle opzioni reali.

Opzione finanziaria	**Variabile**	**Opzione reale**
Prezzo di esercizio	K	Costi per l'acquisizione dell'attività
Prezzo del sottostante	S_t	Valore attuale dei flussi di cassa futuri dall'attività
Tempo alla scadenza	T	L'opzione di durata è praticabile
Varianza del sottostante	σ^2	Rischiosità del progetto d'investimento
Tasso di rendimento privo di rischio	R_f	Tasso di rendimento privo di rischio

Tabella 3.1 – Comparazione tra le variabili delle opzioni reali e finanziarie[41]

Come visto per le opzioni finanziarie è quindi possibile individuare le variabili fondamentali in base alle quali si può determinare il valore di un'opzione reale nell'ambito di un progetto di investimento da parte di un'impresa.

-*Valore attuale dell'attività sottostante*. Nell'ambito delle opzioni reali il sottostante è rappresentato da un'attività reale che può essere un progetto d'investimento o una potenziale acquisizione; se il valore attuale del progetto sottostante aumenta, di conseguenza aumenterà il valore dell'opzione reale quando questa è equiparata a un'opzione call, al contrario se l'opzione reale ha le caratteristiche di

[41] Elaborazione personale

una put (come l'opzione di abbandono) il suo valore sarà ridotto da una crescita del valore attuale dell'investimento sottostante.

-*Prezzo di esercizio*. Nel caso delle opzioni reali lo strike price è costituito dall'investimento monetario necessario per avviare un progetto nel caso in cui l'opzione reale sia assimilabile a una call, mentre rappresenta la somma incassata dall'alienazione di un progetto, o i benefici derivanti dalla sua dismissione, nel caso in cui l'opzione reale sia assimilabile a un'opzione finanziaria di tipo put. Chiaramente un prezzo di esercizio maggiore farà aumentare il valore di un'opzione reale di tipo put e diminuire il valore intrinseco di un'opzione reale di tipo call.

-*Tempo alla scadenza*. Si tratta dell'intervallo temporale nel quale è possibile avviare, modificare, espandere o dismettere il progetto di investimento. Seguendo l'approccio visto per le opzioni finanziarie dovremmo dire che all'aumentare della lunghezza di tale intervallo, aumentano le opportunità di esercizio e diminuisce l'incertezza, comportando un aumento di valore sia delle opzioni reali call che di quelle put. Come vedremo successivamente, però, le opzioni reali presentano delle caratteristiche peculiari che fanno si che tale relazione non sia sempre verificata.

-*Rischiosità (volatilità) del progetto d'investimento*. La volatilità dell'attività reale sottostante misura la rischiosità ossia l'incertezza associata al valore nel tempo di un determinato progetto d'investimento. Sempre da un punto di vista puramente teorico, sulla scia di quanto detto per le opzioni finanziarie, ci potremmo aspettare che a un aumento di tale variabilità corrisponda un aumento di valore sia delle opzioni reali call che put poiché aumenta la probabilità che il prezzo si discosti molto dal prezzo di esercizio, permettendo un profitto maggiore. Tuttavia, nelle prossime righe verrà mostrata l'ambiguità dell'effetto della volatilità sulle opzioni reali, il cui valore a volte ha un andamento inversamente proporzionale rispetto a tale parametro.

Come mostrato, è dunque possibile rilevare delle somiglianze parallele tra opzioni reali e finanziarie, tramite la corrispondenza tra le variabili che determinano il valore delle due tipologie di opzioni. Inoltre, possono essere individuati altri elementi di somiglianza come il fatto di essere entrambi degli investimenti in condizioni di incertezza, l'irreversibilità di tali investimenti e il fatto che in entrambi i casi ci sia la facoltà di scegliere tra due o più alternative, senza alcun tipo di obbligo legato all'acquisto o alla vendita del sottostante. Partendo proprio da questi elementi comuni si sviluppa la teoria delle opzioni reali, che si propone di traslare i sistemi matematici e gli strumenti utilizzati per la valutazione delle opzioni finanziarie, anche ai progetti d'investimento e alle attività reali.

Tuttavia, c’è da dire che le differenze tra le due tipologie di opzioni superano di gran lunga le somiglianze, e sono piuttosto importanti.
In primo luogo, vi sono diversità concettuali: infatti occorre prendere decisioni su opzioni reali anche se non tutta l'incertezza è stata risolta; al contrario, per le opzioni finanziarie, al momento dell'avvicinarsi della data di esercizio, sono note tutte le variabili necessarie per prendere una decisione corretta e consapevole legata all’esercizio dell’opzione.
La differenza principale risiede nel fatto che, al contrario di ciò che è previsto per le opzioni finanziarie, nella quasi totalità dei casi il sottostante delle opzioni reali non è negoziato in mercati regolamentati. Tale diversità presenta tre principali conseguenze: la prima è che, mentre per le opzioni finanziare è sempre possibile scambiare il titolo sottostante su un mercato concorrenziale e presumibilmente efficiente, nel caso delle opzioni reali l’attività reale sottostante è per definizione illiquida e di difficile negoziazione. Ciò determina che anche quando la transazione riesce a concretizzarsi, spesso ciò avviene attraverso negoziazioni individuali effettuate in mercati non efficienti e questo fa venire meno alcune ipotesi fondamentali, come quella di assenza di opportunità di arbitraggio, che sono alla base di diversi modelli di analisi delle opzioni finanziarie che vengono estesi a quelle reali. La seconda conseguenza implica che durante la sua vita, un'opzione finanziaria, si potrebbe spostare continuamente tra valutazioni *in, out* e *at the money* e il titolare dell'opzione osserva passivamente tali movimenti. Di contro, il manager detentore di un’opzione reale ha la flessibilità e la capacità, nonché l'obbligo nei confronti dei suoi azionisti, di influire sui movimenti dell'attività sottostante e quindi di mitigarne il rischio di ribasso o espandendo il potenziale di rialzo. La terza conseguenza è l’estrema difficoltà nell’implementazione di strategie di hedging per le posizioni in opzioni reali, che determina limitazioni alla capacità di assicurarsi dai rischi assunti. Infatti, siccome le opzioni reali non sono scritte su attività negoziate nei mercati finanziari, risulta di fatto complesso creare un portafoglio di strumenti finanziari tali da consentire la realizzazione di un portafoglio di copertura.
Anche la fonte del valore è diversa tra le opzioni finanziarie e le opzioni reali. Per le opzioni finanziarie il valore dell'opzione è facilmente determinato come la differenza numerica tra il valore del sottostante e il prezzo di esercizio (nel caso delle opzioni call, mentre per le put è esattamente il contrario). Per le opzioni reali, una parte del valore deriva sempre da competenze o contingenze legate alla singola impresa e al suo contesto competitivo di riferimento, dalla posizione di mercato o dalla tecnologica esistente, dalle possibili barriere all'ingresso, tra cui la proprietà intellettuale esistente, le conoscenze e le esperienze acquisite, le competenze tecniche o un marchio esistente. Spesso, parte del valore deriva in modo indiretto investimenti in R&D, proprietà intellettuale, programmi di sviluppo tecnologico, infrastrutture, accordi contrattuali con altri stakeholder dell’impresa.

Un’altra importante differenza sta nel diverso modo con il quale opzioni finanziarie e reali reagiscono alla modificazione di determinati parametri. Ad esempio, il tempo alla scadenza, come visto nel primo capitolo, aumenta sempre il valore dell'opzione finanziaria poiché, soprattutto nel caso dell’opzione americana, aumentano le possibilità di esercizio. Per le opzioni reali, tale relazione dipende dal fatto che l'opzione sia proprietaria (l’impresa è l’unica a detenerla) oppure sia condivisa con altri competitors. Solo nel primo caso il valore dell'opzione può aumentare con il tempo e viene rispettato il principio valido per le opzioni finanziarie; mentre nel secondo caso il vantaggio di avere più opportunità di esercizio deve essere confrontato con la possibilità che ad esempio, rinviando ulteriormente l’avvio di un progetto di investimento, si corra il rischio di perdere quote di mercato, per il ritardo nell’ingresso, a favore delle imprese concorrenti. Di conseguenza, la relazione individuata per le opzioni finanziarie in molti casi può non essere valida per le opzioni reali.

Un secondo parametro di riferimento in base al quale valutare le differenze di comportamento tra opzioni reali e finanziarie è costituito dalla volatilità. Sappiamo che il valore delle opzioni finanziarie aumenta con la volatilità del sottostante, poiché una maggiore volatilità aumenta il potenziale di rialzo o di ribasso del prezzo del titolo sottostante e quindi rispettivamente il valore dell’opzione call o put. Ciò non vale necessariamente per le opzioni reali, le quali presentano la caratteristica distintiva di essere *path-dependent* ovvero che il loro valore, e di conseguenza la possibilità che siano esercitate o meno, non dipende solamente dal fatto che abbiamo un valore intrinseco positivo al momento della scadenza, ma anche dal loro andamento e da quello del loro sottostante durante l’intera vita dell’opzione. Alla scadenza, infatti, i manager possono decidere di non espandere un progetto di investimento, seppure abbia in quel momento un valore attuale positivo e quindi conveniente per l’impresa, semplicemente perché durante la vita dell’opzione si sono riscontrate performance decisamente negative relative al progetto.

Infine, possiamo riscontrare notevoli differenze anche nella data e nell’esercizio a scadenza tra le due tipologie di opzioni. Per le opzioni finanziarie scadenza e strike price sono certi in quanto predeterminabili contrattualmente e il valore del sottostante è facilmente osservabile sul mercato lungo tutto l’arco temporale dell’opzione. Al contrario nelle opzioni reali il valore dell’attività reale sottostante e il prezzo di esercizio non sono facilmente osservabili poiché evolvono nel tempo, al variare dell’andamento del mercato; inoltre, la data di scadenza non è fissata da un contratto tra due controparti ben precise e in generale l’orizzonte temporale delle opzioni reali risulta notevolmente più lungo rispetto alle opzioni finanziarie.

Una volta fatte le dovute distinzioni tra queste due tipologie di opzioni, possiamo essere più consapevoli e attenti nell'applicare i principi utilizzati per il pricing delle opzioni finanziarie alla valutazione delle opzioni reali, operazione che ancora oggi viene contestata da quella parte delle letteratura che ritiene che tale approccio possa funzionare solamente a livello puramente teorico e risulti ben lontano da poter essere applicato concretamente alla normale attività d'impresa. In questa trattazione le opzioni reali verranno utilizzate come strumenti in grado di ampliare e arricchire il processo di valutazione di un progetto tramite la tecnica del VAN, permettendo di mettere in luce possibilità e opportunità manageriali che altrimenti verrebbero trascurate.

3.3 Tassonomia delle Opzioni Reali

Abbiamo più volte ricordato come la teoria delle opzioni reali si ponga l'obiettivo di includere nella valutazione dei progetti aziendali il valore aggiunto derivante dalla flessibilità associata alle decisioni dei manager prima, e soprattutto dopo, l'avvio del progetto. Tale flessibilità, vista la complessità dei progetti di investimento aziendali, può manifestarsi in diverse forme, ad ognuna delle quali può essere associata una corrispettiva opzione call o put tipica delle opzioni finanziarie. In prima battuta è possibile inquadrare l'enorme varietà di investimenti strategici all'interno delle diverse tipologie proposte nel 1999 da Martha Artman e Nalin Kulatilaka[42].

-*Irreversible investments*. Si tratta di tutte le spese e i costi sostenuti che non possono essere recuperati se non rinunciando a gran parte del loro valore iniziale

-*Flexibility Investments*. Sono gli investimenti che incorporano la possibilità di modificare in corsa il progetto iniziale.

-*Insurance Investments*. Si tratta degli investimenti effettuati nell'ottica di ridurre l'esposizione al rischio e all'incertezza.

-*Modular Investments*. Sono gli investimenti scomponibili in diversi moduli indipendenti che si interfacciano tra loro ma mantengono la caratteristica di poter essere modificati singolarmente.

-*Platform Investments*. Si tratta degli investimenti che pongono le basi strutturali per opportunità di investimento future; l'esempio tipico è quello degli investimenti in ricerca e sviluppo.

-*Learning Investments*. Sono gli investimenti effettuati con lo specifico obiettivo di ottenere informazioni strategiche che altrimenti non sarebbe stato possibile ottenere.

[42] Amram M., Kulatilaka N. (1999), "Real Options Managing Strategic Investment in an Uncertain World".

Muovendo da questa distinzione, è possibile classificare l'elevata incertezza e variabilità delle scelte e delle opportunità di investimento, legata alla flessibilità del progetto, all'interno di cinque tipologie di opzioni reali[43] che andremo a descrivere nel dettaglio nelle sezioni successive.

3.3.1 Opzione di differimento

L'opzione di differimento, detta anche opzione di attesa, rappresenta il caso in cui il momento temporale in cui dovrà essere effettuato l'investimento non è predeterminato, bensì è flessibile e dipende dalle valutazione dei manager. Il valore intrinseco di questa tipologia di opzione è rappresentato dalla riduzione di incertezza derivante dal ritardare l'avvio dell'investimento fino a quando il management non abbia a disposizione maggiori informazioni che incidono sul valore attuale del progetto d'investimento. Tale flessibilità risulta quindi fondamentale in contesti in cui bisogna effettuare degli investimenti irreversibili con un'elevata incertezza ambientale; non a caso i settori dove si può osservare maggiormente la presenza si questa tipologia di opzioni reali sono quelli dell'industria mineraria e dell'industria farmaceutica.

Il valore derivante da un'opzione di differimento è quindi paragonabile a quello derivante dal possesso di un'opzione call americana scritta sul valore attuale dei flussi di cassa operativi derivanti dal progetto (che indicheremo con VA) che ha come strike price il costo dell'investimento iniziale che è necessario sostenere per avviare il progetto (I). Al momento dell'esercizio, la cui data non è predeterminata come nel caso delle opzioni europee, il valore dell'opzione di differimento risulta essere:

$$O_D = Max(VA - I; 0)$$

3.3.2 Opzione di abbandono

L'opzione di abbandono consiste nella facoltà in capo ai manager aziendali di rinunciare alla prosecuzione di un progetto attraverso la liquidazione dei relativi asset materiali o immateriali. Tale opzione può essere esercitata nel caso in cui ci siano delle variazioni sfavorevoli delle condizioni di mercato che rendono di fatto svantaggioso per l'impresa proseguire l'investimento, permettendole di incassare il cosiddetto valore di recupero che può essere ottenuto attraverso la vendita delle attività

[43] Brach M. A. (2003), Real options in practice, Wiley Finance, New Jersey.

reali al prezzo di mercato, oppure prestabilito contrattualmente. In ogni caso l'esercizio di tale opzione consente all'impresa di minimizzare le perdite in situazioni ambientali sfavorevoli.

Il valore insito in questa tipologia di opzione è assimilabile al prezzo di un'opzione put americana scritta sul valore attuale dei cash-flow operativi derivanti dall'investimento, che ha un prezzo di esercizio rappresentato dal valore di recupero del progetto (VR), attualizzato all'istante della dismissione e depurato dall'effetto negativo di possibili costi di chiusura. Perciò quando viene esercitata l'opzione di abbandono ha un valore pari a:

$$O_A = Max(VR - VA; 0)$$

Le opzioni di abbandono vengono spesso utilizzate in industrie caratterizzate da un uso intensivo del capitale, come ad esempio l'industria aerea o ferroviaria; tuttavia, i manager devono essere prudenti nell'esercizio dell'opzione di abbandono in modo tale da non rinunciare a nuove opportunità di profitto derivanti dall'innovazione tecnologica.

3.3.3 Opzione di cambio (*switch option*)

L'opzione di cambio si riferisce alla possibilità del management di modificare la linea operativa di un determinato business o progetto; le modifiche possono riguardare gli input o i parametri di output nonché i processi o la capacità produttiva, anche se nella maggior parte dei casi si tratta di un aggiornamento della tecnologia di produzione. Tale flessibilità operativa permette all'impresa di non perdere competitività sul mercato, reagendo prontamente e nel modo migliore possibile ai cambiamenti dell'ambiente in cui opera.

La possibilità offerta da una *switch option* è quella di passare dal progetto nella sua modalità corrente a un nuovo progetto, che può avere un diverso grado di rischio, sostenendo il costo necessario per la modifica operativa (*switching cost*). Ciò detto, questo tipo di opzione è assimilabile a un'opzione call americana scritta sul valore attuale dei flussi di cassa del nuovo progetto che si vorrà intraprendere (VA_N), che ha uno strike price pari alla somma del valore attuale dei flussi di cassa del progetto a cui si rinuncia (costo opportunità che indichiamo con VA_V) e dello *switching cost* (SC). In virtù di ciò, al momento dell'esercizio il valore intrinseco di un'opzione di cambio è dato da:

$$O_C = Max[VA_N - (VA_V + SC); 0]$$

Il valore della flessibilità derivante dalla possibilità di scelta della capacità produttiva trova larga applicazione nell'industria automobilistica, farmaceutica o dei giocattoli. Infatti, in settori dove la domanda di mercato è fortemente volatile, l’opportunità di adattare rapidamente il mix di produzione acquisisce un valore ancora maggiore.

3.3.4 Opzione di espansione o riduzione

Questa tipologia di opzioni reali riflette la facoltà dei dirigenti aziendali di cambiare la scala produttiva del progetto in corso, in risposta alle condizioni di mercato e alle nuove informazioni disponibili, così che il progetto potrà essere ampliato, ridotto di dimensioni o focalizzato su un nuovo obiettivo o target. Un tipico esempio di espansione è quello costituito dall’acquisizione di competitors per aumentare la quota di mercato, al contrario un’impresa deciderà di ridurre l’esposizione in un determinato progetto quando le condizioni della domanda non sono favorevoli oppure non è riuscita a raggiungere l’obiettivo di output previsto.

L’opzione di espansione, analogamente all’opzione di cambio, permette di passare dal progetto corrente al progetto cosiddetto esteso, che per definizione è più rischioso del precedente, sostenendo chiaramente il costo necessario all’espansione della scala produttiva ovvero di fatto compiendo un investimento aggiuntivo. L’opzione in questione è dunque riconducibile a un’opzione call americana scritta sul valore attuale dei cash-flow operativi che verranno generati dal progetto esteso (VA_E), il cui prezzo di esercizio è dato dalla somma del valore attuale del progetto corrente che verrà ampliato (VA) e del costo sostenuto per l’espansione (CE). Il valore dell’opzione reale sarà dunque:

$$O_E = Max[VA_E - (VA + CE); 0]$$

Inoltre, ponendo

$$VA_E = (1 + e)\, VA$$

Dove il parametro *e* indica l’aumento percentuale della scala di produzione del progetto, ossia del valore attuale dei flussi di cassa attesi dal progetto stesso, si può riscrivere l’equazione come:

$$O_E = Max[eVA - CE; 0]$$

L’opzione reale di riduzione della dimensione della scala del progetto è in sostanza analoga e opposta a quella appena descritta, poiché permette di ridurre le spese operative future qualora il progetto non vada secondo i piani. Tale facoltà è dunque assimilabile ad un’opzione put americana scritta esclusivamente sulla parte del progetto che può essere ridotta e il cui prezzo di esercizio corrisponde alla percentuale dei costi programmati per il futuro che sarà possibile eliminare. Indicato con R il valore attuale dei costi eliminati e con r il fattore percentuale di riduzione della scala produttiva attuabile e quindi di riduzione del valore del progetto, possiamo scrivere il valore dell'opzione di riduzione al momento dell'esercizio come:

$$O_R = Max[R - rVA; 0]$$

Chiaramente la possibilità di esercizio di queste due tipologie di opzioni è spesso vincolata ad un investimento precedente che abbia una struttura flessibile e quindi modificabile in seguito dai manager dell'impresa.

3.3.5 Opzioni composte

Nella realtà delle decisioni di capital budgeting, molto spesso i manager si trovano davanti a degli investimenti che presentano diverse fasi di sviluppo, dove in ogni nodo decisionale si dovrà optare per la strategia migliore da attuare in virtù di quelle che sono le caratteristiche ambientali e le informazioni disponibili in quel momento. I progetti che prevedono investimenti sequenziali (*step-by-step*), nella maggior parte dei casi incorporano delle opzioni composte. In sostanza, un'opzione composta rappresenta una sorta di opzione su opzione poiché i manager, investendo in ogni singola fase, acquistano la facoltà ma non l'obbligo di continuare a investire nella fase successiva. Di fatto, il prezzo di esercizio di un'opzione composta è commisurato al valore di un'altra opzione sottostante poiché esercitare l'opzione in una determinata fase comporta la creazione di una nuova opzione su una fase di investimento successiva. Le opzioni composte si manifestano quindi secondo un ordine rigoroso e sequenziale, in relazione al percorso seguito dal progetto d'investimento. In merito a ciò possiamo distinguere due tipologie di opzioni composte: le opzioni sequenziali e le opzioni parallele; le prime devono necessariamente essere esercitate secondo un ordine specifico, mentre le secondo possono essere esercitate anche simultaneamente. In entrambi casi chiaramente la vita di un'opzione composta dipende dalla vita residua delle opzioni reali sottostanti.

Alcuni esempi di opzioni composte possono essere ricavati dal settore petrolifero e da quello farmaceutico. Nel primo caso abbiamo le diverse fasi d'investimento che compongono il progetto di sfruttamento di un giacimento: infatti l'opzione di estrazione dipende dall'opzione reale di sviluppare un'adeguata riserva e, in modo sequenziale, l'opzione di sviluppo è collegata alla decisione presa durante la fase di esplorazione. Nel settore farmaceutico, invece, spesso la teoria delle opzioni reali, e in particolare delle opzioni composte, viene impiegata per giustificare gli ingenti investimenti iniziali richiesti da un progetto di ricerca e sviluppo che potrebbero sembrare non profittevoli se giudicati secondo le metodologie di valutazione tradizionali, mentre in realtà generano delle opzioni composte nelle successive fasi dalla ricerca in laboratorio fino all'approvazione finale del farmaco, che hanno un valore così elevato da rendere finanziariamente conveniente l'investimento.

3.4 Metodi di Valutazione delle Opzioni Reali

Dopo aver identificato le variabili che determinano il valore per ogni tipologia di opzione reale, in questo paragrafo si procederà a descrivere i principali modelli di valutazione delle opzioni reali, tratti dalla teoria riguardante la valutazione delle opzioni finanziarie, che sono utilizzati nella pratica delle decisioni aziendali. L'obiettivo dell'analisi sarà quello di individuare il metodo più adatto ad essere applicato alle opzioni reali, in virtù delle ipotesi sottostanti e delle modalità operative.

3.4.1 Modello di Black-Scholes

Come abbiamo visto nel paragrafo 3.2 di questo capitolo, ci sono delle corrispondenze intuitive tra le variabili che influenzano il valore (o il prezzo) delle opzioni reali e finanziarie; proprio tale parallelismo evidenziato dalla Tabella 3.1 potrebbe suggerire di applicare il modello di valutazione sviluppato e descritto nel precedente capitolo anche al caso delle opzioni reali, semplicemente sostituendo alle variabili di tipo finanziario le corrispondenti variabili relative alla attività reali, facendo attenzione nella distinzione tra opzione reale di tipo call e di tipo put. Purtroppo, sia la letteratura che molti manager finanziari sono concordi sul fatto che una mera traslazione del modello di Black-Scholes al campo delle opzioni reali, sia innanzitutto molto rischiosa se non addirittura totalmente irrealistica. Nei paragrafi precedenti abbiamo infatti evidenziato le numerose differenze sia di tipo teorico-concettuale che puramente operativo tra queste due tipologie di opzioni, le quali rendono molto difficile traslare gli schemi teorici usati per la valutazione delle opzioni finanziarie al mondo delle opzioni reali. In particolare, il modello di Black-Scholes si basa su delle ipotesi fondamentali che non risultano valide per le opzioni reali, a causa delle loro caratteristiche peculiari, e per questo impediscono ai manager di utilizzare le formule di applicazione immediata risultanti dal modello. Tra le ipotesi discordanti ricordiamo:

-volatilità del titolo sottostante costante per tutta la durata dell'opzione finanziaria; mentre nel caso delle opzioni reali la volatilità dei rendimenti del progetto non è costante;
-il titolo sottostante dell'opzione finanziaria segue un andamento di tipo Lognormale secondo un moto stocastico continuo, al contrario delle variazioni discrete proprie delle attività reali;
-il titolo sottostante dell'opzione finanziaria viene negoziato in modo continuo, mentre un'attività reale non ha un mercato regolamentato efficiente dove può essere continuamente scambiata e prezzata;

-il prezzo d'esercizio dell'opzione finanziaria è fisso e predeterminato, al contrario del costo di avvio del progetto d'investimento;
-l'esercizio dell'opzione finanziario è di fatto istantaneo, mentre l'avvio o la modifica di un progetto d'investimento richiedono tempo.

Sono inoltre riscontrabili altre differenze che rendono sconsigliabile nella pratica l'utilizzo da parte dei manager del modello di Black-Scholes per individuare il valore delle opzioni reali nei loro progetti d'investimento. Infatti il modello di valutazione delle opzioni finanziarie si basa sull'assunto che sia possibile costruire un portafoglio di copertura costituito da posizioni di segno opposto sull'opzione in questione e sul titolo sottostante; a causa della diversa natura del sottostante delle opzioni reali, risulta evidente come tale ipotesi di fatto crolli, comportando che il risultato della valutazione di un'opzione scritta su un'attività reale non negoziabile debba essere interpretato con cautela e non dato per buono a prescindere.

Riguardo l'ipotesi di volatilità fissa e costante durante la vita dell'opzione, essa può valere nel caso di opzioni a breve termine quotate e scritte su titoli a loro volta quotati su mercati efficienti, ma in un orizzonte di lungo periodo come è tipicamente quello dei progetti di investimento, la volatilità risulta un parametro difficilissimo da stimare e soprattutto è molto improbabile che rimanga costante durante tutto l'arco del progetto. Molto spesso per ovviare a tale problema, i manager utilizzano la varianza dei rendimenti azionari dei titoli delle società quotate che svolgono attività similmente rischiose come proxy del rischio legato al singolo progetto da valutare, ma è chiaro come questo metodo non possa rappresentare una regola generale totalmente affidabile; infatti quando un'impresa vuole intraprendere un progetto innovativo, risulta difficile trovare sul mercato il termine di paragone adatto alla rischiosità del progetto. La difficoltà nell'identificazione della volatilità e quindi della rischiosità del singolo progetto di investimento diviene ancor più problematica nel caso del modello di Black-Scholes poiché il risultato finale delle relative formule risulta essere molto sensibile proprio al parametro che indica la volatilità, facendo sì che variazioni centesimali di un parametro così difficile da stimare correttamente determinino scostamenti enormi del risultato finale restituito dalla formula. Inoltre, mentre il modello di Black-Scholes ipotizza ragionevolmente uno strike price fisso (poiché predeterminato contrattualmente), mentre nel contesto delle opzioni reali il prezzo di esercizio risulta essere una variabile di tipo aleatorio, seppur con un grado di dispersione inferiore rispetto al valore attuale del progetto di investimento. Tale valore, infatti, si modifica nel corso del tempo con l'arrivo di nuove informazioni, ma tale percorso casuale non può seguire il percorso descritto dal processo di Ito che si ipotizza per il sottostante delle opzioni finanziarie, poiché le modificazioni non avvengono nel continuo ma attraverso salti discreti e i rendimenti del progetto non si distribuiscono normalmente.

Infine, risulta altamente improbabile ipotizzare che un'opzione reale possa essere esercita immediatamente quando si manifestano le condizioni favorevoli sul mercato (come avviene per le opzioni finanziarie) poiché l'esercizio stesso spesso richiede il completamento di attività collaterali come la costruzione di impianti di produzione, edifici, l'acquisto di macchinari, che chiaramente non possono essere realizzate nell'immediato e nemmeno in un intervallo temporale breve. Ciò comporta che la vera durata di un'opzione reale sia in realtà inferiore a quella teorica; ad esempio, consideriamo un'impresa che svolge attività di estrazione petrolifera e gode di un diritto di estrazione presso una determinata area della durata di 20 anni. Inizialmente potremmo assumere che la vita residua dell'opzione di avviamento del progetto di estrazione sia proprio di 20 anni, ma nella realtà dei fatti il tempo necessario a completare le attività funzionali all'inizio del progetto ne riduce la durata.

3.4.2 Metodo degli alberi binomiali

Proprio a causa delle difficoltà di applicazione del modello di Black-Scholes, nella quasi totalità dei casi i manager ricorrono al metodo binomiale per la valutazione delle opzioni reali incorporate nei loro progetti di investimento. Tale modello, nonostante manchi della facilità di applicazione tipica della formula elaborata da Black e Scholes, permette di valutare le opzioni reali in intervalli temporali di tipo discreto, più conformi alla natura dei processi decisionali aziendali. Il meccanismo operativo di applicazione è del tutto simile a quello descritto nel capitolo precedente: in primis vengono identificate le cause della volatilità del progetto di investimento, dopodiché si arriva a una stima di tale volatilità (come deviazione standard) che viene utilizzata per il calcolo dei parametri fondamentali u e d che permettono di costruire i rami dell'albero binomiale del valore attuale dell'investimento nei diversi stadi considerati.

Inoltre, è necessario ricordare che anche nel caso delle opzioni reali l'applicazione del modello binomiale si basa sull'ipotesi di neutralità al rischio degli investitori, permettendo di utilizzare la probabilità p neutrale al rischio per il calcolo dei payoff attesi in ogni periodo e il tasso d'interesse privo di rischio r_f per la loro attualizzazione.

Come visto nel precedente capitolo, il metodo binomiale segue la logica della *backwards-induction* dove il valore iniziale del progetto viene ricavato attraverso un processo a ritroso che partendo dal valore ai nodi terminali giunge, attraverso il calcolo del valore ai nodi intermedi, alla restituzione del valore in T_0. Nel caso delle opzioni reali, ad ogni nodo dell'albero binomiale verrà calcolato il VAN Esteso del progetto, ovvero il valore maggiore tra il payoff atteso del periodo successivo attualizzato (senza l'esercizio dell'opzione reale) e la somma di quest'ultimo con il payoff ottenibile dall'esercizio dell'opzione reale nel periodo di riferimento; dove il valore ottenibile dall'esercizio immediato dell'opzione viene calcolato in modo diverso a seconda della tipologia di opzione reale, come descritto nel paragrafo precedente. Le formule utilizzate sono quindi:

$$VAN\ Esteso_t = Max[VAN_t + O_t; VAN_t] \tag{3.1}$$

Dove

$$VAN_t = \frac{p * VAN_{t+1,u} + (1-p) * VAN_{t+1,d}}{1+r_f}$$

In questo modo si otterrà un valore attuale del progetto che sarà di fatto comprensivo anche del valore della flessibilità delle possibili scelte dei manager, dunque coerente con la teoria delle opzioni reali.

Tuttavia, è doveroso ricordare che anche il metodo binomiale ha dei limiti, riferiti soprattutto alle difficoltà applicative riscontrate dai manager nella costruzione dell'albero stesso che richiede numerosi passaggi concatenati, i quali possono diventare molto complessi all'aumentare della durata del progetto e soprattutto del grado di dettaglio assunto nella valutazione, ovvero del numero di sottoperiodi in cui si intende dividere la vita residua del progetto. Tale difficoltà risulta ancora più evidente qualora il progetto preveda delle opzioni che siano tra loro integrate, poiché non possono essere considerate in modo indipendente in quanto la loro interconnessione può creare o distruggere valore nell'ambito del progetto.
Nonostante queste possibili difficoltà di applicazione, il metodo Binomiale è molto utilizzato in questo tipo di valutazioni aziendali per via dei vantaggi derivanti dal suo impiego, soprattutto rispetto alla formula di Black-Scholes. Innanzitutto, il fatto di operare in intervalli temporali discreti e secondo il principio della *backwards-induction* permette di semplificare il processo di monitoraggio, ad ogni nodo, delle scelte dei manager (che sono i possessori delle opzioni reali) e soprattutto delle modificazioni dell'ambiente circostante e dell'incertezza del progetto. Tale approccio consente di superare i vincoli derivanti dall'ipotesi di varianza costante del prezzo del sottostante che abbiamo riscontrato nel modello di Black-Scholes, poiché, in linea teorica, a ogni nodo è possibile adeguare il parametro che descrive la volatilità ai cambiamenti dell'ambiente esterno, comportando l'aggiustamento dei relativi tassi di crescita e decrescita periodali *u* e *d*.

3.5 Valutazione di un progetto di investimento con opzioni reali

In questo paragrafo verrà presentato un caso pratico in cui l'analisi basata sulle opzioni reali verrà applicata alla valutazione di un progetto di investimento. Il progetto si riferisce a un'industria dove l'applicazione di questo metodo di valutazione è frequente, ovvero l'industria petrolifera e l'investimento considerato è quello della realizzazione di un impianto di estrazione di petrolio. Nella prima sezione l'investimento sarà valutato secondo l'approccio tradizionale del VAN e come vedremo risulterà essere finanziariamente svantaggioso. Successivamente il valore dell'investimento verrà legato all'evoluzione temporale del prezzo spot del petrolio (secondo uno scenario di tipo trinomiale) e si dimostrerà come tale metodo, mantenendo l'ipotesi di assenza di opzioni reali, sia del tutto equivalente al criterio del VAN. Nelle sezioni 3.5.4 e 3.5.5, verrà effettivamente implementata una valutazione comprensiva delle future opportunità manageriali legate alla decisione di investimento iniziale e si dimostrerà come il valore delle opzioni reali incorporate nel progetto, catturato attraverso il criterio del VAN Esteso, possa ribaltare la decisione presa sulla base del VAN, mostrando come il progetto sia a questo punto molto vantaggioso per le azionisti della società petrolifera.

3.5.1 Valutazione con il metodo del VAN

Nel nostro caso pratico consideriamo una società petrolifera che sta valutando un progetto di investimento in un nuovo pozzo per l'estrazione di petrolio. I dati iniziali da considerare sono i seguenti:

-il costo iniziale per avviare il progetto è pari a $50 milioni
-il pozzo petrolifero potrebbe garantire un output di 2 milioni di barili all'anno
-la durata totale dell'investimento è di 3 anni, dopodiché supponiamo che il giacimento del pozzo si esaurisca
-i costi fissi necessario al funzionamento dell'impianto di estrazione sono pari a $40 milioni all'anno
-i costi variabili ammontano a $35 al barile
-per quanto riguarda il tasso d'interesse risk-free viene approssimato al rendimento annuo dei titoli di stato USA a tre anni che al momento della scrittura di questo elaborato (giugno 2021) è pari allo 0,325%[44]. Nelle sezioni successive utilizzeremo sempre un metodo di attualizzazione basato sul tasso privo di rischio poiché rimaniamo nell'ipotesi, fatta per le opzioni finanziarie, di valutare strumenti derivati in un mondo neutrale al rischio.
-il prezzo spot del barile di petrolio a giugno 2021 è pari a 70$[45]
-il prezzi futures del petrolio a 1,2 e 3 anni sono rispettivamente pari a $67, $63, $60[46]

---

[44] Dati ricavati da Yahoo Finance
[45] Dati ricavati da Yahoo Finance, https://it.finance.yahoo.com/quote/WTI
[46] Dati ricavati da Yahoo Finance, https://it.finance.yahoo.com/quote/WTI

Vogliamo innanzitutto valutare la bontà di tale progetto applicando il tradizionale metodo del VAN, ovvero calcolando, in base ai dati in nostro possesso, i flussi di cassa associati a ogni periodo e dopodiché attualizzandoli al tasso di interesse privo di rischio. Stiamo chiaramente facendo delle ipotesi molto forti poiché immaginiamo di valutare l'investimento in un mondo neutrale al rischio, dove quindi gli investitori non richiederanno un tasso di rendimento maggiore a seguito della maggiore rischiosità del progetto, e in prima battuta supponiamo che il progetto non comporti la presenza di opzioni reali esercitabili in futuro dai manager dell'azienda petrolifera.

Anni	0	1	2	3
Investimento iniziale	$ 50.000.000,00			
Ricavi		$ 134.000.000,00	$ 126.000.000,00	$ 120.000.000,00
Costi operativi		$ 70.000.000,00	$ 70.000.000,00	$ 70.000.000,00
Costi fissi		$ 40.000.000,00	$ 40.000.000,00	$ 40.000.000,00
Flusso di cassa		$ 24.000.000,00	$ 16.000.000,00	$ 10.000.000,00

Tabella 3.2 – Calcolo flussi di cassa progetto di investimento[47]

Inserendo i dati di riferimento all'interno di un foglio di lavoro Excel sono stati calcolati i flussi di cassa corrispondenti a ogni anno dell'orizzonte di investimento. A questo punto, una volta sommati i flussi di cassa attualizzati al tasso di interesse risk-free, e sottratto l'investimento inziale, otteniamo un valore del VAN pari a $ - 0,28 milioni di dollari. In virtù di tale risultato i manager dell'azienda petrolifera non dovrebbero intraprendere il progetto poiché esso comporterebbe una distruzione di valore per gli azionisti esattamente pari al valore negativo del VAN.

Il nostro obiettivo è però quello di valutare l'investimento secondo un approccio che tenga in considerazione la flessibilità manageriale associata alla realizzazione del progetto. A tal fine adotteremo un approccio di tipo trinomiale (evoluzione del metodo binomiale con il quale condivide le ipotesi di base) alla variazione del prezzo spot del petrolio secondo intervalli annuali, dove in ogni nodo dell'albero a un determinato prezzo del barile di petrolio corrisponderà un valore attuale del progetto. Chiaramente più il prezzo spot del petrolio aumenta, più il progetto di estrazione incrementa il suo valore e viceversa.

[47] Elaborazione personale

3.5.2 Albero trinomiale per il prezzo spot del petrolio

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato il valore del progetto, basandoci sui prezzi dei contratti future sul petrolio per gli orizzonti temporali di nostro interesse. In questa sezione costruiremo un albero di tipo trinomiale che evidenzierà un percorso stocastico del prezzo spot del petrolio che sia coerente con i valori dei futures riscontrabili sul mercato. Per farlo supponiamo che il prezzo spot del petrolio (S) segua un processo casuale, rappresentato da un albero trinomiale.

Inoltre, dobbiamo supporre che in ogni intervallo temporale il prezzo spot del petrolio abbia tre percorsi possibili, ognuno con la relativa probabilità di verificarsi. Lo schema dei possibili percorsi del prezzo spot del petrolio è rappresentato dall'albero trinomiale riportato nella Figura 3.1, costruito secondo il processo matematico individuato da Hull e White[48]. In particolare, nel passaggio dal nodo precedente a quello successivo dell'albero trinomiale il prezzo del petrolio ha una probabilità pari a p_u di aumentare in modo significativo, una probabilità pari a p_m di mantenere un valore prossimo a quello del periodo precedente e infine una probabilità pari a p_d di ridursi in modo consistente.

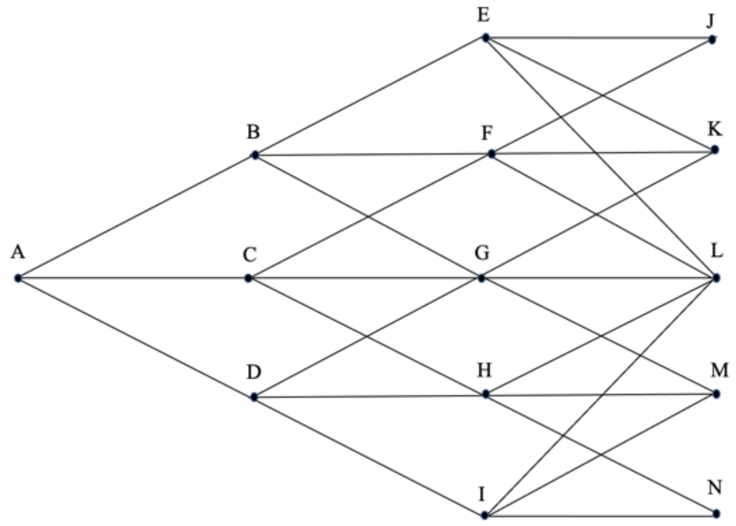

Figura 3.1 – Albero Trinomiale di Hull e White[49]

[48] In realtà l'obiettivo principale dell'analisi di Hull e White era quello di individuare un percorso trinomiale per il tasso di interesse istantaneo *r* il quale si ipotizzava seguisse un percorso casuale stocastico del tipo $dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$. Essi hanno individuato con p_u, p_m e p_d le probabilità connesse con i rami superiore, intermedio e inferiore che vengono generate in ogni singolo nodo. Le probabilità sono state quindi calcolate in modo coerente con il valore atteso e la varianza del tasso istantaneo *r* in ogni intervallo infinitesimale Δt. A questo punto viene impostato un sistema in tre equazioni con le tre probabilità come incognite che permette di arrivare alle soluzioni esposte nella Tabella 3.3.

[49] Elaborazione personale

Le probabilità che consentono di disegnare il percorso della variabile in un ottica trinomiale vengono solamente riportate nella Tabella 3.3, poiché la dimostrazione teorica relativa al risultato finale supera gli scopi di questa trattazione[50].

Nodo	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
p_m	0,6667	0,6567	0,6667	0,6567	0,0267	0,6567	0,6667	0,6567	0,0266
p_d	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Tabella 3.3 – Probabilità di un movimento al rialzo, intermedio, o al ribasso del prezzo spot del petrolio nei vari nodi[51]

A questo punto abbiamo le basi teoriche necessarie per disegnare il percorso trinomiale del prezzo spot S del petrolio per i prossimi 3 anni. L'albero è stato costruito in modo tale che il valore medio del prezzo spot alla fine di ogni anno (ponderato per le singole probabilità ad ogni nodo) risulti uguale al valore di mercato rappresentato dal contratto future disponibile sul mercato attuale.

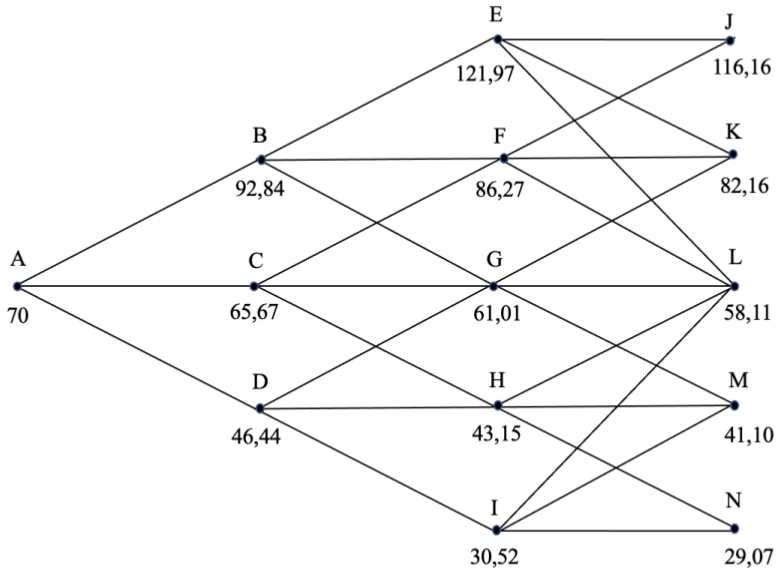

Figura 3.2 – Percorso trinomiale del prezzo spot del petrolio previsto per i prossimi 3 anni[52]

Osservando l'albero che abbiamo costruito possiamo verificare con dei semplici passaggi matematici come il prezzo dei futures sul petrolio che si registra sui mercati rappresenti il valore atteso del prezzo spot del petrolio nei rispettivi orizzonti temporali. Infatti, ricordando la definizione di valore atteso

---

[50] Per approfondimenti vedi Hull J.C. (2015). Options, Futures and Other Derivatives. Pearson. pag.768
[51] Hull J.C. (2015). Options, Futures and Other Derivatives. Pearson. pag.753
[52] Elaborazione personale, dati espressi in milioni di dollari

come sommatoria dei risultati possibili ponderati per la probabilità che hanno di verificarsi, passiamo a verificare tale uguaglianza analizzando i risultati esposti nella Figura 3.2.

Partendo dal nodo A dove il prezzo spot del petrolio è certo (probabilità=1) e pari a 70$ al barile, c'è una probabilità pari al 16,67% che il prezzo del petrolio raggiunga il livello di 92,84$, la stessa probabilità che abbia un calo fino ai 46,44$; mentre lo scenario più probabile tra un anno è che il prezzo rimanga su un livello medio e si attesti attorno ai 65,67$. In questo momento gli operatori sul mercato prevedono che il prezzo di un barile di petrolio tra un anno sarà di 67$, come evidenziato dal prezzo dei contratti future con scadenza giugno 2022. Tale valore è concorde con le nostre aspettative del prezzo spot poiché il calcolo del valore atteso restituisce lo stesso risultato:

$$[S_1] = 16{,}67\% * 92{,}84\$ + 16{,}67\% * 46{,}44\$ + 66{,}67\% * 65{,}67\$ = 67\$$$

Chiaramente la stessa relazione vale per i prezzi spot attesi tra due e tre anni, il cui valore atteso sarà esattamente uguale al prezzo del contratto future sul petrolio con la stessa scadenza. In questi ultimi due casi, bisogna effettuare un passaggio in più nel calcolo delle probabilità di raggiungere i singoli nodi dell'albero binomiale. Ad esempio, la probabilità che il prezzo spot del petrolio tra due anni sia quello rappresentato dal nodo F nella Figura 3.2 è pari alla probabilità (p_u=0,1667) di passare dal nodo A al nodo B, moltiplicata per la probabilità (p_m=0,6566) di passare da B a F, sommata alla probabilità (p_m = 0,6667) di passare da A a C, moltiplicata per la probabilità (p_u=0,1667) di passare da C a F. Tale passaggio va ripetuto per ognuno dei nodi possibili al secondo anno, analizzando i diversi percorsi che possono produrre lo stesso risultato finale e successivamente anche per tutti i valori spot possibili dopo 3 anni.

Una volta costruito lo scenario atteso del prezzo spot del barile di petrolio nell'orizzonte temporale relativo all'investimento siamo in grado di utilizzare questo schema per evidenziare le diverse valutazioni del progetto di investimento, relativamente all'andamento del mercato petrolifero.

3.5.3 Albero trinomiale del valore del progetto

In questo paragrafo si procederà alla costruzione dell'albero trinomiale che mostra il valore del progetto in ogni nodo dell'albero, in relazione al prezzo spot che ci si attende in quel determinato nodo, come calcolato nella Figura 3.2.

Il primo passo di questo processo consiste nel calcolo del flusso di cassa prodotto dal progetto in ogni singolo nodo dell'albero trinomiale. Abbiamo visto che il flusso di cassa generato ogni anno dipende dallo scenario atteso del prezzo del petrolio secondo una relazione del tipo:

$$FCF = 2.000.000 * (S - 35\$) - \$40.000.000$$

Dove 2 milioni sono i barili di petrolio che si ipotizza di estrarre ogni anno dal giacimento, 35$ rappresentano i costi variabili per la produzione di ogni barile e 40 milioni costituiscono i costi fissi che è necessario sostenere ogni anno per mantenere attivo lo stabilimento di estrazione.
A questo punto non resta che sostituire nella formula precedente i valori del prezzo spot del petrolio così come sono presentati nella Figura 3.2 per ottenere i corrispondenti valori dei flussi di cassa che si prevede l'impianto possa generare in ogni possibile scenario. L'albero trinomiale ottenuto è rappresentato nella Figura 3.3 e possiamo notare come le variazioni circa i possibili andamenti del prezzo del petrolio producono degli effetti giganteschi sui possibili profitti derivanti dal progetto di investimento in questione.

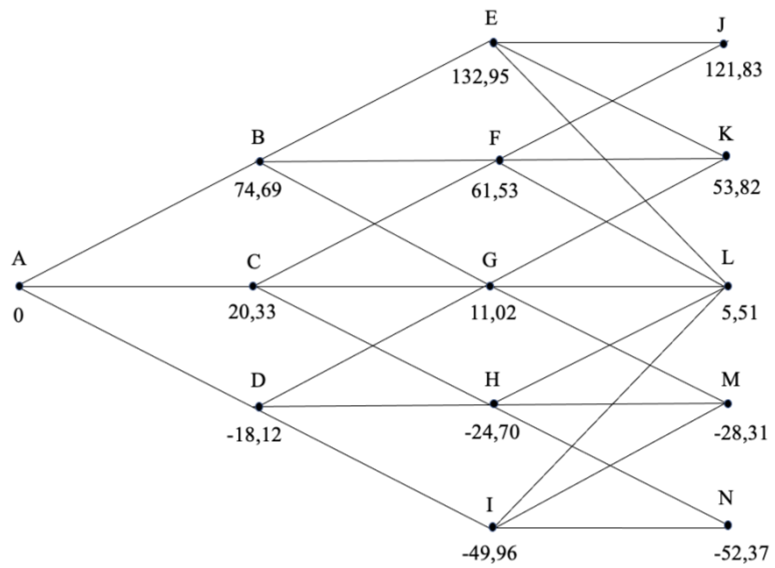

Figura 3.3 – Flussi di cassa attesi del progetto in relazione al prezzo spot atteso[53]

A questo punto possiamo ricavare il valore attuale del progetto in ogni nodo dell'albero trinomiale sulla base dei flussi di cassa ricavabili dal progetto nei periodi successivi; utilizzeremo quindi un approccio basato sulla *backwards-induction* che dal valore del progetto tra 3 anni ci permetterà di risalire al valore del progetto al tempo 0 in cui deve essere presa dai manager la decisione circa l'avvio

[53] Elaborazione personale, dati espressi in milioni di dollari

del progetto di investimento o meno. In questa prima fase non consideriamo all'interno della valutazione la possibilità che il progetto incorpori un valore maggiore dato dalla flessibilità manageriale e quindi dalla possibilità di esercizio di opzione reali, perciò ci aspettiamo di ottenere un valore attuale del progetto (VAN) esattamente identico a quello ottenuto attraverso la valutazione tradizionale descritta nella sezione 3.5.1. Tuttavia, è utile introdurre ora il metodo di valutazione basato sull'albero trinomiale poiché esso costituirà la base della valutazione basata sulla teoria delle opzioni reali ed è quindi fondamentale descrivere i passaggi operativi necessari alla sua costruzione e verificare che il risultato ottenuto in ipotesi di assenza di tali opzioni coincida perfettamente con il metodo del VAN, altrimenti la valutazione comprensiva delle opzioni reali sarebbe in qualche maniera falsata e non corretta.

Partiamo quindi dalla fine, ossia dal valore attuale del progetto alla fine del terzo anno poiché abbiamo ipotizzato un orizzonte di investimento pari a 3 anni, al termine del quale l'investimento deve essere dismesso; supponendo che il valore di recupero al termine dell'investimento sia nullo e non ci siano costi legati alla chiusura dell'impianto, possiamo affermare che in tutti gli scenari possibili alla fine del terzo anno, il progetto in questione avrà sempre un valore attuale residuo pari a 0 poiché non sarà più in grado di generare flussi di cassa per l'azienda oltre tale orizzonte temporale.
Il prossimo step consiste nel ricavare il valore del progetto dopo 2 anni dall'investimento iniziale e i diversi risultati ottenuti dipendono dalle diverse prospettive relative ai flussi di cassa ottenibili dopo 3 anni e contestualmente dalla probabilità che ognuno di tale flussi ha di verificarsi. In sostanza il valore attuale del progetto in ogni nodo dell'albero trinomiale corrispondente al secondo anno dell'orizzonte di investimento è dato dalla formula:

$$VA = \frac{p_u * FCF_u + p_m * FCF_m + p_d * FCF_d}{(1 + r_f)}$$

Perciò per ottenere i possibili valori del progetto tra due anni abbiamo bisogno dell'albero trinomiale relativo ai possibili flussi di cassa (FCF), rappresentato in Figura 3.3, e della Tabella 3.1 che ci mostra quali sono le probabilità di un movimento positivo, medio o negativo del valore oggetto dell'albero trinomiale. Si consideri ad esempio il nodo H della Figura 3.4 sottostante. In questo punto dell'albero c'è una probabilità (p_u) pari a 0,2217 che il prezzo spot del petrolio salga e che quindi il flusso di cassa dell'anno successivo sia pari a 5,51 milioni di dollari; una probabilità di 0,6566 (p_m) che il prezzo spot alla fine del terzo anno sia di 41,10$, quindi che il flusso di cassa corrispondente sia negativo di 28,31 milioni di dollari; infine, una probabilità pari a 0,1217 (p_d) che il prezzo spot del petrolio diminuisca e quindi il progetto realizzi un flusso di cassa ancora più basso pari a -52,37 milioni di dollari. Fatte queste considerazioni, otteniamo il valore del progetto al nodo H come:

$$VA_H = \frac{p_u * FCF_L + p_m * FCF_M + p_d * FCF_N}{(1 + r_f)} = \frac{0{,}2217 * 5{,}51 + 0{,}6566 * (-28{,}31) + 0{,}1217 * (-52{,}37)}{(1 + 0{,}325\%)} = \$ - 23{,}66\ milioni$$

Tale valore fortemente negativo è chiaramente frutto dell'eventualità in cui una brusca discesa del prezzo del petrolio renda di fatto totalmente svantaggioso e non profittevole l'investimento iniziale. Ripetendo lo stesso ragionamento e applicando la stessa formula, ricaviamo il valore del progetto negli altri nodi E, F, G, I che completano il quadro dei possibili valori del progetto inziale dopo due anni.

Continuando nel ragionamento a ritroso, passiamo a individuare il valore attuale del progetto ai nodi B, C, D ovvero i possibili scenari a un anno dall'avvio del progetto. In questo caso il valore del progetto non dipenderà solamente dai flussi di cassa attesi per l'anno successivo ma anche da quelli previsti per il terzo anno, perciò nella formula di valutazione dovremo considerare non solo i FCF del secondo anno ma anche il corrispondente valore attuale del progetto alla fine del secondo anno che incorpora le aspettative sui flussi di cassa del terzo anno. Formalizzando tale ragionamento utilizziamo la seguente formula per individuare il possibile valore attuale del progetto alla fine del primo anno:

$$VA = \frac{p_u * (FCF_u + VA_u) + p_m * (FCF_m + VA_m) + p_d * (FCF_d + VA_d)}{(1 + r_f)}$$

Per esemplificare l'applicazione di tale formula consideriamo il nodo C dell'albero trinomiale. In questo punto c'è una probabilità (p_u) pari a 0,1667 di passare al nodo F l'anno successivo e ciò significherebbe ottenere un flusso di cassa di 61,53 milioni di dollari e avere a disposizione un investimento con un valore attuale pari a 51,22 milioni di dollari; se invece il prezzo spot del petrolio fosse stabile al secondo anno, eventualità a cui è associata una probabilità (p_m) di 0,6667, si avrebbe un flusso di cassa di 11,02 milioni di dollari e un progetto con un valore di 7,90 milioni di dollari; infine, nello scenario peggiore individuato nel punto H del grafico in Figura 3.4 e che ha una probabilità di verificarsi pari a p_d = 0,1667, si otterrà al secondo anno un flusso di cassa pari a -24,70 milioni di dollari e il valore del progetto, come visto in precedenza sarà pari a -23,66 milioni di dollari. Il valore attuale al nodo C è quindi pari a:

$$VA_C = \frac{p_u*(FCF_F+VA_F)+p_m*(FCF_G+VA_G)+p_d*(FCF_H+VA_H)}{(1+r_f)} =$$

$$\frac{0,1667*(61,53+51,22)+0,6667*(11,02+7,90)+0,1667*(-24,70-23,66)}{(1+0,325\%)} = \$23,28\ mil\text{ioni}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento, otteniamo il valore attuale del progetto ai nodi B e D e a questo punto siamo finalmente in grado di ricavare il valore attuale del progetto al nodo A, ossia il valore che permette ai manager aziendali di prendere la decisione finale circa l’avvio del progetto d’investimento, tramite il confronto con il costo iniziale dell’investimento stesso.

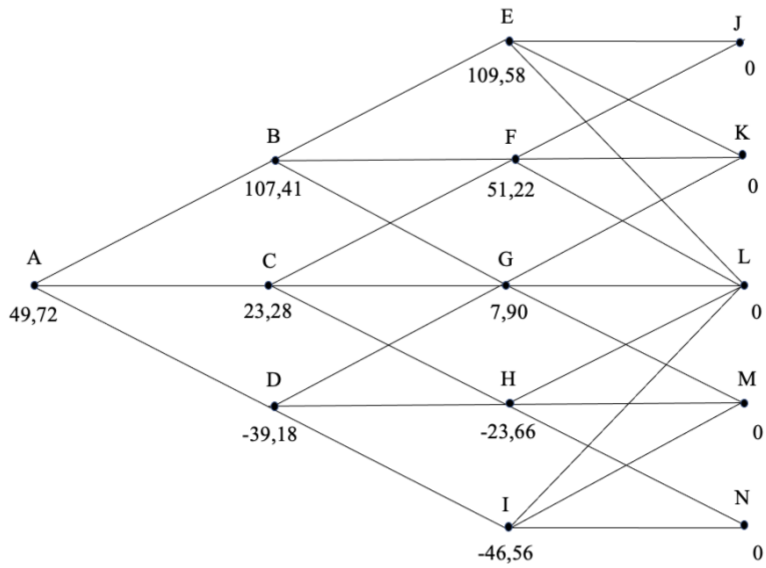

Figura 3.4 – Valore del progetto nei vari nodi, escluso l’investimento iniziale[54]

Come si evince dalla Figura 3.4 di sopra, il valore attuale del progetto all’istante 0 di valutazione è pari a 49,72 milioni di dollari, perciò il valore attuale netto risulta essere:

$$VAN = VA_0 - I_0 = 49,72 - 50 = \$ - 0,28\ mil$$

Come volevasi dimostrare, si tratta di un risultato esattamente identico a quello ottenuto utilizzando direttamente il metodo del VAN, tuttavia l’albero costruito durante la dimostrazione sarà fondamentale poiché ci permetterà di estendere la valutazione considerando il valore della flessibilità manageriale e dunque delle opzioni reali.

[54] Elaborazione personale, dati espressi in milioni di dollari

3.5.4 Opzione di abbandono

In questa sezione si intende evidenziare come può modificarsi la valutazione di un progetto di investimento e di conseguenza anche la relativa decisione manageriale, quando includiamo nella valutazione la possibilità di abbandonare il progetto in qualsiasi istante, ovvero includiamo un'opzione di abbandono. Come abbiamo visto nella sezione 3.3.2, il valore di un'opzione di abbandono è assimilabile a quello di un'opzione di tipo put scritta sul valore attualizzato dei flussi di cassa di futuri del progetto e dipende dal valore di recupero, ossia il valore che riusciamo a recuperare dal disinvestimento al netto dei costi di chiusura. Nel nostro esempio ipotizziamo che entrambi il valore di recupero e gli eventuali costi di chiusura siano nulli quindi di fatto l'opzione di abbandono viene valutata come una put americana con prezzo di esercizio nulla scritta sul valore del progetto. Dal momento che l'opzione è di tipo americano e quindi può essere esercitata in qualsiasi momento dai manager dell'azienda, dovremo calcolare il valore dell'opzione in ogni singolo nodo dell'albero trinomiale che descrive il valore del progetto (Figura 3.4), considerando il più alto tra il valore in caso di esercizio immediato al nodo in questione (opzione "morta") e il valore che deriva dal non esercizio dell'opzione (opzione "viva") e quindi dalla facoltà che i manager si riservano di esercitarla in futuro. Per quanto riguarda la formula di valutazione di un'opzione put americana al momento dell'esercizio faremo riferimento a quanto detto nella sezione 3.3.2, mentre il valore di un'opzione americana della quale viene ritardato l'esercizio sarà calcolato attualizzando il valore dell'opzione nei tre possibili scenari futuri, ponderato per la probabilità relativa degli scenari, al tasso privo di rischio. I risultati ottenuti sono riportati nell'albero trinomiale in Figura 3.5.

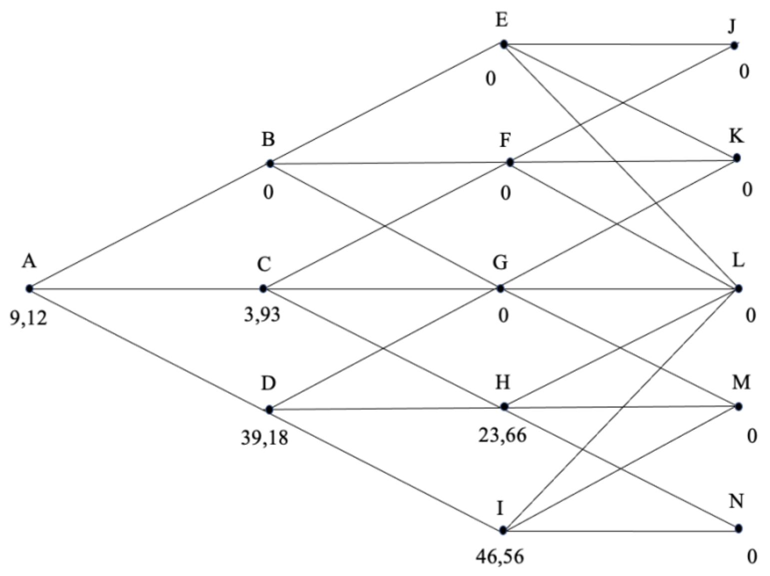

Figura 3.5 – Valore dell'opzione di abbandono del progetto

Nei calcoli di seguito ci muoveremo come fatto finora, ovvero procedendo a ritroso dagli ultimi nodi fino a ricavare il valore in 0 (ovvero al nodo A) dell'opzione di abbandono, che sarà poi la discriminante decisiva nelle scelta di investimento da parte del management aziendale. Innanzitutto, possiamo escludere dalla valutazione tutti i nodi che si riferiscono al terzo anno del progetto poiché in ogni caso il management sarà obbligato a interrompere l'investimento. Spostandoci su un orizzonte temporale di due anni, osserviamo dalla Figura 3.4 come il valore del progetto nei nodi E, F, G sia positivo dunque maggiore del valore di recupero e di conseguenza il valore dell'opzione di abbandono in quei nodi è pari a 0, rendendo privo di senso economico l'esercizio dell'opzione di abbandono da parte dei manager. Al contrario, notiamo come nei nodi H e I il valore attuale del progetto sia negativo, ciò significa che le prospettive future dell'investimento non siano affatto positive, tanto da indurre i manager a voler abbandonare il progetto. In particolare, il valore di tale opzione di abbandono sarà pari all'opposto del valore negativo del progetto, vale a dire 23,66 e 45,66 milioni di dollari rispettivamente ai nodi H e I.

Passiamo ora a valutare le possibilità di esercizio dell'opzione a un anno dall'inizio del progetto. Se i manager si trovassero davanti una situazione come quella del nodo B nella Figura 3.4, in cui il prezzo del petrolio è salito, e quindi di conseguenza anche il valore del progetto, sarebbero ben felici di continuare il progetto e non ci sarebbe nessun valore aggiunto dalla possibilità di esercizio di un'opzione di abbandono ed infatti tale opzione in B ha un valore nullo. Passando al nodo C, la valutazione dell'opzione di abbandono diviene più complessa, in quanto bisogna confrontare il suo valore in caso di esercizio con quello in caso di attesa. Nel primo il valore sarebbe chiaramente nullo poiché il progetto ha valore positivo, mentre nel secondo caso tale valore è dato dalla possibilità di esercitare l'opzione in futuro, concetto equiparabile al valore temporale di un'opzione finanziaria, che ne può aumentare il valore a prescindere dal valore intrinseco dato dalla differenza tra strike price e prezzo del sottostante. Perciò il valore dell'opzione in C (considerando anche il valore temporale) è dato dal valore atteso dell'opzione reale all'anno successivo, attualizzato al tasso r_f secondo la relazione:

$$O_C = \frac{p_u * O_F + p_m * O_G + p_d * O_H}{1 + r_f}$$

Tale formula di valutazione restituisce un valore pari a 3,93 milioni di dollari che, essendo maggiore del valore intrinseco nullo, rappresenta il vero valore dell'opzione di abbandono al nodo C; in questo caso diremo quindi che l'opzione reale vale più da "viva" che da "morta".

Lo stesso ragionamento va applicato anche per la valutazione dell'opzione al nodo D: in questo caso il valore dell'opzione esercitata è pari all'opposto del valore negativo del progetto poiché permette ai manager di evitare la futura perdita di valore pari a 39,18 milioni di dollari. Applicando la formula precedente, ovviamente modificando i nodi di riferimento, siamo in grado di ottenere il valore derivante dall'opportunità di esercitare l'opzione in futuro, pari a:

$$O_D = \frac{p_u * O_G + p_m * O_H + p_d * O_I}{1 + r_f} = \frac{0{,}2217 * 0 + 0{,}6566 * 23{,}66 + 0{,}1217 * 46{,}56}{(1 + 0{,}325\%)}$$
$$= \$21{,}14\ milioni$$

In questo caso, quindi, ai manager conviene esercitare l'opzione di abbandono immediatamente poiché otterrebbero un valore maggiore di quello ottenibile ritardando l'esercizio per aspettare l'evolversi del mercato; stavolta l'opzione reale di abbandono vale più da "morta" che da "viva". In sostanza per i manager è più conveniente uscire subito da un investimento negativo piuttosto che aspettare e correre il rischio che la situazione peggiori ulteriormente.

A questo punto siamo in grado di ricavare il valore dell'opzione di abbandono nel nodo decisionale di nostro interesse, ossia al tempo 0, in cui i manager aziendali devono decidere se intraprendere il progetto o meno. Applicando lo stesso procedimento svolto in precedenza il valore O_A dell'opzione reale di abbandono è pari a:

$$O_A = \frac{p_u * O_B + p_m * O_C + p_d * O_D}{1 + r_f} = \frac{0{,}1667 * 0 + 0{,}6667 * 3{,}93 + 0{,}1667 * 39{,}18}{1 + 0{,}325\%}$$
$$= \$9{,}12\ milioni$$

Il valore in 0 dell'opzione reale di abbandono è pari a 9,12 milioni di dollari, perciò se i manager aziendali decidessero di adottare il metodo del VAN esteso per la valutazione del progetto di investimento, la decisione sarebbe ribaltata rispetto a quella suggerita dall'applicazione del solo metodo del VAN e a questo punto sarebbe conveniente intraprendere il progetto di estrazione di petrolio, poiché permetterebbe di creare valore per gli azionisti per un importo pari a:

$$VAN\ esteso = VAN + O_A = -0{,}28 + 9{,}12 = \$8{,}84\ milioni$$

I manager dell'azienda, accettando di intraprendere il progetto caratterizzato dalla possibilità di abbandono in qualunque momento, creano valore per gli azionisti per un totale di 8,84 milioni di dollari.

3.5.5 Opzione di espansione

Esaminiamo ora il caso in cui il management, qualora decidesse di attuare il progetto avrebbe la possibilità di ampliarne le dimensioni in qualsiasi momento lo ritenga conveniente, in particolare il progetto potrebbe essere ampliato secondo un coefficiente di espansione *e* pari al 20% del progetto originario e ciò comporterebbe un incremento dei barili estratti annualmente da 2 a 2,4 milioni. Ipotizziamo inoltre che, in caso di esercizio, i costi variabili per barile rimangano costanti mentre i costi fissi subiscano un proporzionale aumento del 20% passando da 40 a 48 milioni di dollari. Sotto questa ipotesi, siccome i nuovi introiti aumentano proporzionalmente rispetto ai costi (entrambi del 20%), i calcoli saranno facilitati poiché eviteremo di dover costruire un nuovo albero trinomiale con riferimento ai nuovi valori attuali del progetto ampliato.

Come visto nella sezione 3.3.3 di questo capitolo, l'opzione di espansione è assimilabile a un'opzione call americana scritta sulla percentuale del valore dell'investimento che sarà ampliata (il 20% nel nostro caso) e che presenta come strike price il costo necessario per realizzare tale ampliamento, che ipotizziamo essere pari a 2 milioni di dollari. Come nella situazione precedente relativa all'opzione di abbandono, anche in questo caso l'opzione di espansione è di tipo americano e quindi può essere esercitata in qualsiasi momento dai manager; ciò comporta che per ottenere il valore dell'opzione al momento di decidere se investire o meno dovremo calcolare il valore dell'opzione di espansione in corrispondenza di tutti i nodi dell'albero trinomiale (come effettuato nell'albero trinomiale raffigurato in Figura 3.6), procedendo secondo la consueta una logica di *backwards-induction.* In particolare, nell'assegnare il corretto valore all'opzione reale in ogni nodo occorre confrontare il suo valore se fosse esercitata nell'istante di valutazione (espresso dalla formula riportata nella sezione 3.3.4) con il valore che essa avrebbe se l'esercizio fosse ritardato in attesa di nuovi sviluppi del mercato, calcolato nello stesso modo descritto nella sezione precedente e quindi comprensivo anche del valore temporale dell'opzione di espansione. Il risultato di questo procedimento di calcolo è riportato nella Figura sottostante.

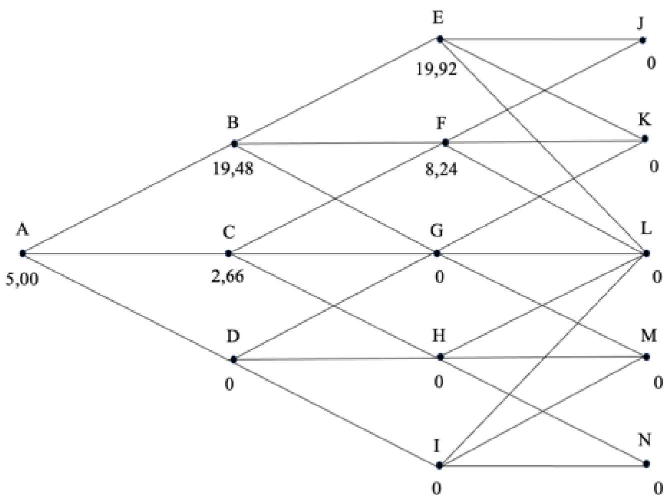

Figura 3.6 – Valore dell'opzione di espansione del progetto

Partendo dalla valutazione al terzo anno, risulta evidente come le opzioni di espansione, in ogni scenario possibile, abbiano comunque un valore pari a 0 poiché il management in ogni caso deciderà di interrompere il progetto.

Al secondo anno del progetto il valore dell'opzione di espansione dipende dall'andamento del mercato del petrolio e dal conseguente valore del progetto. Infatti, in caso di un mercato stazionario o al ribasso (identificato dai nodi G, H e I dell'albero), il payoff risultante dalla differenza tra la percentuale del valore del progetto oggetto di espansione e il costo necessario all'espansione è negativa, ciò rende svantaggioso per il management procedere all'espansione poiché non farebbe altro che amplificare l'andamento negativo del mercato. Di conseguenza, il valore dell'opzione di espansione nei nodi sopra menzionati è pari a 0 poiché non c'è alcun valore aggiunto nel possedere questa opportunità di espansione. Diverso è il caso che si manifesta nei nodi E e F, dove, per via della crescita del prezzo spot del petrolio, il valore del progetto è aumentato e quindi il management potrebbe considerare favorevolmente l'opzione di aumentare la produzione per aumentare ancora di più i benefici derivanti da questa situazione favorevole. In particolare, qualora fossero esercitate, le opzioni di espansione ai nodi E e F avrebbe rispettivamente un valore intrinseco pari a:

$$O_E = eVA_E - CE = 0{,}2 * 109{,}58 - 2 = \$19{,}92\ milioni$$

$$O_F = eVA_F - CE = 0{,}2 * 51{,}22 - 2 = \$8{,}24\ milioni$$

Perciò, le due opzioni andrebbero esercitate, in quanto permettono di aumentare il valore del progetto e di conseguenza il valore per gli azionisti della società.

Muovendoci all'indietro, affrontiamo la valutazione dell'opzione di espansione che può essere esercitata tra un anno. Qualora si verificasse il caso del nodo D nella Figura 3.3, il valore del progetto sarebbe negativo, riflettendo un mercato del petrolio al ribasso nei periodi successivi, perciò il management non avrebbe alcun interesse nell'aumentare la capacità produttiva per avere più barili, poiché su ogni barile incorrerà in delle perdite. Di conseguenza, non eserciterà l'opzione di espansione che quindi avrà un valore pari a 0. Al contrario, la situazione presentata nei nodi B e C vede un valore del progetto positivo, ma ciò non basta a rendere profittevole l'esercizio dell'opzione di espansione poiché si deve tener conto del costo di espansione e anche dell'eventualità che sia più conveniente attendere il prossimo periodo, e quindi riservarsi la possibilità di espandere la produzione se il mercato dovesse andare nella direzione giusta. Al nodo C, il valore dell'opzione di espansione in caso di esercizio immediato è pari a:

$$O_C = eVA_C - CE = 0{,}2 * 23{,}28 - 2 = \$2{,}66\, milioni$$

Mentre il valore derivante dall'attesa nell'esercizio dell'opzione si misura come visto nell'esempio precedente, ovvero attualizzando al tasso d'interesse privo di rischio il valore atteso dell'opzione al periodo successivo. In virtù di ciò, il valore dell'opzione di espansione, qualora non fosse esercitata al nodo C, è dato da:

$$O_C = \frac{p_u * O_F + p_m * O_G + p_d * O_H}{1 + r_f} = \frac{0{,}1667 * 8{,}24 + 0{,}6667 * 0 + 0{,}1667 * 0}{(1 + 0{,}325\%)} = \$1{,}37 milioni$$

Di conseguenza, ai manager dell'azienda converrà esercitare l'opzione di abbandono immediatamente nel caso in cui la situazione di mercato sia quella identificata dal nodo C e, nell'albero trinomiale disegnato in Figura 3.6, registreremo il valore più alto pari a 2,66 milioni di dollari; si può dire che al nodo C l'opzione di espansione vale più da "morta" che da "viva".

Analizzando la prospettiva che si presenta al nodo B dell'albero trinomiale, notiamo come il valore del progetto subisca un notevole rialzo grazie all'ottimo andamento del prezzo spot del petrolio; ciò può rappresentare un ottimo incentivo all'espansione del progetto, in modo da aumentare i profitti grazie a una maggiore capacità produttiva. Nel caso in cui i manager decidessero di esercitare l'opzione di espansione, il progetto avrebbe un incremento di valore pari al valore intrinseco dell'opzione reale, ovvero:

$$O_B = eVA_B - CE = 0{,}2 * 107{,}41 - 2 = \$19{,}48\, milioni$$

Si tratta sicuramente di una cifra considerevole ma, anche in questo caso, è d'obbligo effettuare la controprova per controllare quale sia il valore aggiunto derivante dal non esercizio dell'opzione e, in particolare, se sia superiore o inferiore al valore appena trovato. Al nodo C in questione, il valore dell'attesa nell'esercizio dell'opzione dipende dalle aspettative circa il valore della stessa opzione al periodo successivo ed è pari a:

$$O_B = \frac{p_u * O_E + p_m * O_F + p_d * O_G}{1 + r_f} = \frac{0{,}1217 * 19{,}92 + 0{,}6566 * 8{,}24 + 0{,}2217 * 0}{(1 + 0{,}325\%)}$$
$$= \$7{,}81 milioni$$

Anche in questo caso quindi, i manager dovrebbero esercitare immediatamente l'opzione di espansione per sfruttare al massimo l'andamento positivo del mercato e l'opzione di espansione vale più da "morta" che da "viva"; perciò riportiamo in Figura 3.6 il valore più alto tra i due, corrispondente a 19,48 milioni di dollari, che rappresentano il maggior valore per gli azionisti derivante dall'esercizio dell'opzione di espansione al nodo B dell'albero trinomiale dopo un anno dall'avvio dell'investimento.

Ora siamo giunti all'ultimo passaggio che ci permetterà di ricavare il valore dell'opzione di espansione nel nodo decisionale più importante, ossia il nodo A, corrispondente al momento in cui i manager devono prendere la decisione di avviare o meno il progetto. Al tempo 0 l'opzione di espansione non ha un valore intrinseco poiché il progetto deve ancora essere intrapreso; tutto il suo valore è di tipo temporale, poiché deriva dalle aspettative future circa l'andamento dell'investimento e dal valore dell'opzione di abbandono nei diversi scenari possibili nei periodi successivi. Ripetendo la stessa formula applicata in precedenza il valore dell'opzione di abbandono in A risulta essere:

$$O_A = \frac{p_u * O_B + p_m * O_C + p_d * O_D}{1 + r_f} = \frac{0{,}1667 * 19{,}48 + 0{,}6667 * 2{,}66 + 0{,}1667 * 0}{1 + 0{,}325\%} = \$5{,}00\ milioni$$

Perciò, la possibilità futura di espandere la capacità produttiva dell'impianto estrattivo aggiunge ad oggi un valore pari a 5 milioni di dollari al progetto, valore che esprime l'importanza monetaria della flessibilità manageriale inclusa nei progetti di investimento. Nella situazione descritta, se i manager non avessero tenuto in considerazione tale flessibilità, limitandosi a valutare il progetto in base all'attualizzazione dei flussi di cassa futuri, avrebbero trovato conveniente la decisione di non intraprendere il progetto poiché non avrebbe creato valore per gli azionisti. Al contrario, seguendo il metodo di valutazione descritto in questo paragrafo, e applicando lo strumento del VAN Esteso, la decisione sarebbe ben diversa poiché il valore aggiunto del progetto risulta essere pari a:

$$VAN\ Esteso = VAN + O_A = -0{,}28 + 5 = \$4{,}72 milioni$$

Anche in questo caso quindi, l’applicazione del metodo di valutazione del VAN Esteso ha permesso al management aziendale di avere una visione più ampia delle opportunità offerte dall’investimento, suggerendogli di intraprendere il progetto poiché crea valore per l’impresa per un totale di 4,72 milioni di dollari.

Conclusioni

Nell'ultimo capitolo della trattazione, la teoria di valutazione delle opzioni finanziarie, introdotta e analizzata nel primo e nel secondo capitolo, è stata testata su una tipologia diversa di opzione, avente come sottostante delle attività reali, nello specifico dei progetti d'investimento legati a decisioni aziendali. Da questo tentativo è emerso come il modello di Black-Scholes non sia in alcun modo adatto alla valutazione delle opzioni reali, poiché si tratta di formule applicabili in un orizzonte temporale continuo, mentre le scelte manageriali avvengono per definizione in intervalli temporali di tipo discreto nel corso dei quali i manager possono ottenere nuove informazioni e osservare lo scenario di mercato al fine di prendere la decisione corretta riguardo un determinato progetto. Sono invece applicabili al contesto delle opzioni reali, le ipotesi alla base del modello binomiale, il quale valuta una determinata attività (finanziaria o non) attraverso la costruzione di un albero delle decisioni dove l'intervallo temporale tra i vari nodi è di tipo discreto e risulta conforme alle modalità con le quali avvengono i processi decisionali aziendali. Inoltre, dal modello di Cox, Ross, Rubinstein ricaviamo un'altra teoria fondamentale e applicabile alla valutazione dei progetti aziendali, ovvero il metodo dell'indifferenza al rischio. Adottando l'ipotesi, come si è fatto nel caso pratico illustrato nell'ultimo paragrafo, che tutti gli investitori siano egualmente indifferenti al rischio, riusciamo a semplificare enormemente la costruzione dell'albero decisionale, poiché il tasso richiesto dagli investitori e quindi il tasso di attualizzazione dei flussi di cassa ai vari nodi, sarà sempre lo stesso e pari al tasso di interesse privo di rischio r_f. Nell'ultimo paragrafo, mantenendo come detto le ipotesi alla base del metodo binomiale, si è fatto un ulteriore passo in avanti proponendo tre possibili percorsi del prezzo dell'attività tra un periodo e l'altro, in modo tale da cogliere meglio l'estrema variabilità che caratterizza il valore degli investimenti aziendali, i quali possono appunto andare molto bene, avere un esito fortemente negativo oppure mantenere un valore sostanzialmente costante nel corso della loro vita. Il metodo dell'albero trinomiale permette inoltre di legare il valore del progetto alla variabilità del prezzo spot del petrolio durante la vita dell'investimento, restituendo una situazione realistica in cui i decisori all'interno dell'azienda devono continuamente adattare, qualora possibile, le decisioni prese in precedenza all'ambiente esterno che varia ,e alle diverse condizioni del mercato di riferimento.

Una volta stabilito lo schema concettuale con il quale affrontare l'analisi dell'investimento, i risultati della valutazione hanno confermato come l'integrazione del valore derivante dalla flessibilità manageriale all'interno del tradizionale metodo del VAN, faccia emergere il valore aggiunto dell'investimento che è possibile catturare solamente analizzando le eventuali opzioni reali presenti all'interno dell'intero progetto di investimento. Infatti, nel nostro caso, il progetto di sfruttamento di

un pozzo petrolifero, secondo le attuali prospettive circa il prezzo del greggio nei prossimi tre anni, ha un VAN negativo, anche se di poco, e distrugge valore per un totale di 0,28 milioni di dollari.
Tuttavia, se consideriamo l'opportunità che i manager aziendali hanno di abbandonare il progetto senza costi di dismissione, il risultato cambia radicalmente. Infatti, tale opzione, esercitabile in qualsiasi momento ha un valore intrinseco pari a 9,12 milioni di dollari e se tale valore viene adeguatamente considerato nel calcolo del VAN Esteso, il progetto risulterà fortemente vantaggioso per l'azienda dal punto di vista finanziario e creerà valore per gli azionisti.
Alla stessa conclusione si arriva considerando l'opportunità di espandere il progetto, qualora le condizioni di mercato siano favorevoli in futuro e lo permettano. Tale flessibilità decisionale, descritta dall'opzione di espansione, viene valutata, attraverso il metodo dell'albero trinomiale, come avente un prezzo pari a 5 milioni di dollari e quindi ancora una volta indirizzerebbe il management verso l'avvio del progetto di estrazione del greggio.
In virtù di quanto emerge dall'analisi effettuata, i manager dovrebbero sempre di più abbinare al metodo del VAN, che in ogni caso fornisce un eccellente supporto decisionale nel valutare progetti d'investimento, una valutazione puntuale delle eventuali opzioni reali che l'avvio del progetto permetterebbe di acquisire, in modo tale da valorizzare nel modo corretto la flessibilità decisionale che è tipica di tutte le aziende che operano in mercati fortemente competitivi e caratterizzati da un'ambiente esterno instabile. Infatti, nonostante la maggiore complessità di un approccio come quello del VAN Esteso, che richiede ai manager di costruire alberi decisionali che possono essere anche molto complessi, i vantaggi di questo metodo sono evidenti e possono guidare le aziende verso decisioni di investimento più consapevoli e quindi più corrette e profittevoli.

Bibliografia

Amram M., Kulatilaka N. (1999), “Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World”. *Harvard Business School Press.*

Black F., Scholes M. (1973). “The pricing of options and Corporate Liabilities”. *Journal of Political Economy*.

Black F. (1989). “How we came up with the Option Formula”. *Journal of Portfolio Management.*

Black F. (1988). “The Holes in Black-Scholes”. *RISK Magazine.*

Black F. (1989). “How to use the Holes in Black-Scholes”. *Journal of Applied Corporate Finance*.

Brach M. A. (2003). “Real options in practice”. *Wiley Finance, New Jersey*.

Brealey R., Myers S., Allen F., Sandri S. (2020). “Principi di finanza aziendale”. *Mcgraw Hill*.

Cox J., S. Ross S., Rubinstein M. (1979). “Option Pricing: a Simplified Approach”. *Journal of Financial Economics.*

Hull J.C. (2015). “Options, Futures and Other Derivatives”. *Pearson*.

McDonald R.L. (2012). “Derivatives Markets”. *Pearson Addison Wesley*.

Merton R. (1973). “The Theory of Rational Option Pricing”. *The Bell Journal of Economics and Management Science.*

Myers S. (1977). “Determinants of Corporate Borrowing”. *Journal of Financial Economics. (pp. 147-175).*

Smith H., Trigeorgis L. (2004). “Strategic Investments, Real options and Games”. *Princeton University Press.*

Trigeorgis L. (1996). “Real Options”. *MIT Press, Cambridge*.

Sitografia

https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/opzioni.htm

https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_call

https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_ put

https://it.finance.yahoo.com/quote/WTI/