

*Dipartimento di Economia e Finanza*

*Cattedra di Metodi Matematici per Economia e Finanza*

**TESI DI LAUREA MAGISTRALE**

***ANALISI DI UN MODELLO DI VALUTAZIONE  
PER OPZIONI SU CRIPTOVALUTE***

*RELATORE*

*Ch.mo Prof. Marco Papi*

*CANDIDATO*

*Walter Venanzetti*

*Matricola 724511*

*CORRELATORE*

*Ch.mo Fausto Gozzi*

Anno Accademico 2020/2021

# INDICE

<b>INTRODUZIONE.....</b>	<b><i>I</i></b>
<b>CAPITOLO 1: CRIPTOVALUTE ED OPZIONI FINANZIARIE .....</b>	<b><i>1</i></b>
- 1.1 LA CONCEZIONE DI MONETA NEL VENTUNESIMO SECOLO .....	<i>1</i>
○ 1.1.2 STRUTTURA E COMPOSIZIONE DELLE CRYPTOVALUTE .....	<i>2</i>
▪ 1.1.2.1 LA TECNOLOGIA BLOCKCHAIN .....	<i>2</i>
▪ 1.1.2.2 IL CONCETTO DI MINING .....	<i>5</i>
○ 1.1.3 TREND PREZZO E VOLATILITÀ DEI BITCOIN .....	<i>6</i>
○ 1.1.4 CONFRONTO MONETE VIRTUALI POST BITCOIN .....	<i>11</i>
○ 1.1.5 OPINIONI E PARERI .....	<i>15</i>
○ 1.1.6 RISCHI E PROBLEMATICHE ESPOSTE NEGLI ULTIMI ANNI .....	<i>18</i>
- 1.2 OPZIONI FINANZIARIE: FUNZIONALITA' .....	<i>21</i>
○ 1.2.2 METODI PER IL PRICING DELLE OPZIONI .....	<i>26</i>
<b>CAPITOLO 2: STUDIO DELLA DINAMICA DEL PREZZO ATTRAVERSO MODELLI MATEMATICI .....</b>	<b><i>28</i></b>
- 2.1 I SISTEMI DINAMICI .....	<i>28</i>
○ 2.1.2 EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE DE .....	<i>29</i>
○ 2.1.3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ODE .....	<i>34</i>
- 2.2 PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE .....	<i>38</i>
○ 2.2.1 ESTREMI LIBERI .....	<i>39</i>
○ 2.2.2 ESTREMI VINCOLATI .....	<i>40</i>
- 2.3 DIVERSI STUDI PASSATI PER LA PREVISIONE DELLE CARATTERISTICHE DELLE CRIPTOVALUTE .....	<i>45</i>

## **CAPITOLO 3: ANALISI DI UN MODELLO**

### **MATEMATICA PER LA DINAMICA DEL PREZZO ..... 53**

- **3.1 MODELLO ANALIZZATO PER LA FASE SPERIMENTALE ..... 53**
- **3.2 CONFRONTO DEL MODELLO CON I DATI REALI ..... 58**
- **3.3 IL PROCESSO STOCASTICO ..... 61**
- **3.4 LA TEORIA DEL NON ARBITRAGGIO ..... 64**
- **3.5 ESTENSIONE DEL MODELLO ANALIZZATO ..... 66**

## **CAPITOLO 4: VALUTAZIONE DI OPZIONI SUL**

### **BITCOIN E CONFRONTO CON I DATI REALI ..... 73**

- **4.1 IL MODELLO DI HESTON ..... 74**
- **4.2 APPLICAZIONE DEL MODELLO SUL SOTTOSTANTE ANALIZZATO ..... 76**

## **APPENDICE A ..... 82**

## INTRODUZIONE

Una delle parole più gettonate del ventunesimo secolo, in particolare dell'ultimo decennio, è la parola "criptovaluta". Ma cos'è realmente, sempre se possiamo inserirla nella concezione reale, la criptovaluta? Qual'è la differenza tra quest'ultima e la classica moneta elettronica? Perché ha avuto un ruolo così centrale sia nell'economia che nella finanza negli ultimi anni?

Per rispondere a queste domande dobbiamo fare un salto temporale nel passato di circa tredici anni, più esattamente nella data del 31 ottobre 2008. In quel giorno un ingegnere, noto a tutti con il nome di Satoshi Nakamoto, ideò la prima criptovaluta, nonché la più nota a livello mondiale: il bitcoin. Questa moneta virtuale è creata attraverso un processo blockchain, una tecnologia che fa sì che la criptovaluta non abbia la possibilità di essere replicata. L'idea di Nakamoto era quella di creare un nuovo sistema monetario elettronico, e quindi rendere il bitcoin una valuta ufficiale a tutti gli effetti. Tutt'ora però non può essere considerata tale. I motivi? Sono molteplici, che vanno dall'aspetto legale, dato che non c'è possibilità di tracciamento; al problema della sua instabilità. In questo elaborato ci soffermeremo in quest'ultimo aspetto. Se andiamo a vedere il valore nominale del bitcoin nel 2010 notiamo che con un dollaro si poteva acquistare 1309 monete virtuale. Quindi un bitcoin equivaleva a circa 0.000763 dollari. Nel 9 febbraio 2011 il bitcoin raggiunge il valore di un dollaro, incrementando il proprio valore di circa il 10'000%. L'esplosione vera e propria del suo prezzo è avvenuta nel 2017, quando il valore è arrivato a toccare i 3000 dollari, e l'inizio di quest'anno con un valore di ben 50'000 dollari. Da maggio 2021 ha avuto una ricaduta toccando i 30'000 dollari.

Considerando una varianza così elevata fa sì che si presenti come un investimento troppo rischioso, di conseguenza, finché sarà così instabile, sarà difficile vederla quotata in un mercato di valute reali, e quindi essere obbligatoriamente accettata come mezzo di pagamento per le transizioni. Per ora dunque è considerata come un bene d'investimento senza valore intrinseco.

Col passare degli anni sono nate altre criptovalute, con valore nominale decisamente meno alto del bitcoin, ma comunque con un'alta volatilità e quindi molto instabili.

Lo scopo di questo elaborato è quello di riuscire a determinare il trend dei prezzi delle criptovalute attraverso un modello matematico, per poi riuscire a fare il pricing delle opzioni che hanno la moneta virtuale come sottostante.

Nel primo capitolo verrà fatta una panoramica generale delle criptovalute in generale, quindi mostrandone caratteristiche principali e scopo per cui sono nate; ed inoltre verranno accennati vari metodi di pricing di opzioni presi in considerazione fino ad oggi, con beni sottostanti composti da titoli ed azioni.

Nella seconda parte prenderemo in considerazione l'analisi elaborata da altri studiosi in altri articoli per comprendere e confrontare meglio i modelli matematici, tra cui il sistema dinamico, usati fino ad ora per avere una stima delle variabili principali che caratterizzano le criptovalute.

Nella terza parte ci sarà la vera e propria parte sperimentale, in cui attraverso un linguaggio di programmazione, MatLab, cercheremo di estrapolare il modello matematico il quale riesca a darci un output più adatto possibile al trend dei prezzi effettivi delle criptovalute. In aggiunta a questa parte verranno tratte delle conclusioni riguardo al modello creato.

# **CAPITOLO 1: CRIPTOVALUTE ED OPZIONI FINANZIARIE**

Iniziamo il primo capitolo mostrando inizialmente la struttura e lo scopo delle criptovalute, per poi fare un focus più accurato delle caratteristiche principali, in particolare il prezzo e la volatilità coi rispettivi trend.

## ***1.1 LA CONCEZIONE DI MONETA NEL VENTUNESIMO SECOLO***

In ogni corso accademico di Economia che si rispetti la moneta viene descritta come quel bene materiale senza valore intrinseco abbia tre funzioni principali:

- 1- misura del valore, quindi moneta come unità di conto;
- 2- mezzo di scambio nell'acquisto/vendita di beni e servizi o, più in generale, nelle transazioni commerciali, quindi moneta usata come mezzo di pagamento;
- 3- fondo di valore, quindi moneta come riserva di valore;

Inoltre, con riferimento alla moneta legale, sappiamo che è quella moneta capace di estinguere le obbligazioni in denaro, dato che è legalmente riconosciuta dall'ordinamento giuridico.

Oltre alla moneta legale abbiamo anche la moneta bancaria, cioè una forma di moneta privata. Essa è emessa dalle banche ed accettata da tutti perché convertibile in moneta legale.

Da circa 13 anni, è stata introdotta un nuovo tipo di moneta, la quale non ha nessun garante alla base che ne garantisca il valore, e quindi la quale non ha l'obbligo di essere accettata per compravendite di beni e servizi. Questa moneta è la moneta virtuale o criptovaluta.

## **1.1.2 STRUTTURA E COMPOSIZIONE DELLE CRYPTOVALUTE**

Come già accennato nell'introduzione, nel 31 ottobre del 2008, l'inventore Satoshi Nakamoto (in realtà pseudonimo, l'inventore ufficiale o il gruppo di inventori non sono ancora noti), rende noto il suo progetto **BITCOIN**. Il bitcoin nasce come moneta virtuale utilizzabile in un sistema di pagamenti diretti tra due parti senza la necessità di un terzo soggetto economico che regoli le transazioni, a differenza del sistema di pagamenti ufficiali che vengono regolate e vigilate dalle autorità competenti. Nakamoto infatti in una sua nota ufficiale descrive il progetto come "un sistema di pagamento elettronico basato su prova crittografica anziché sulla fiducia".

### **1.1.2.1 LA TECNOLOGIA BLOCKCHAIN**

I bitcoin vengono creati attraverso la tecnologia del **BLOCKCHAIN** (catena di blocchi). Il blockchain è un registro pubblico in cui vengono annotate le transazioni fatte tramite bitcoin. Ogni registro è composto da blocchi, in cui ognuno di essi, una volta formatosi e validato, è collegato al proprio precedente. Procedendo in questa maniera, nei portafogli bitcoin, è possibile avere i dati del bilancio, e di conseguenza capire se si hanno disponibilità sufficienti per effettuare nuove transazioni.

Riguardo queste ultime, per evitare che vengano alterate da qualsiasi altro utente, vi è stata la necessità di creare una *chiave privata*, ossia una sorta di firma digitale la quale fornisce una prova matematica sulla provenienza della transazione dal portafoglio del rispettivo proprietario.

Riguardo alla tecnologia blockchain, essa si basa su tre pilastri fondamentali: 1- la crittografia, 2- il networking, 3- la teoria dei giochi.

## 1) La crittografia:

Con il termine crittografia ci riferiamo alle varie metodologie utilizzate per occultare determinate informazioni rendendole inaccessibili/indecifrabili ad utenti non autorizzati. Nell'ambito della tecnologia del blockchain, si utilizza una crittografia particolare: *la crittografia asimmetrica*. Una tecnologia che utilizza due tipi di chiave: la chiave privata e la chiave pubblica.

La chiave privata l'abbiamo già descritta precedentemente, mentre la pubblica è quella chiave che il destinatario mette a disposizione del mittente per poter utilizzare il crittaggio.

Facendo un esempio pratico, abbiamo due soggetti: A e B. Il primo vuole inviare un messaggio criptato al secondo. B mette a disposizione di A una certa chiave pubblica, il quale la utilizza per criptare il messaggio. Una volta criptato il messaggio solo B ha la chiave privata per poterlo decifrare.

Nell'ambito del bitcoin i nostri A e B sono 2 indirizzi di due persone diverse ed il messaggio sarà una transazione di bitcoin.

Figura 1.1: Trasferimento chiave



Fonte: [criptoinvestire.com](http://criptoinvestire.com)

## 2) Il networking:

Riguardo ai canali di transazione, i bitcoin utilizzano la tecnologia *peer to peer* (P2P).

Nell'ambito informatico il P2P si riferisce ad un gruppo di dispositivi (chiamati nodi) i quali condividono ed archiviano file collettivamente, con pari poteri ed autorizzazioni.

Nell'ambito finanziario, il network peer-to-peer è il canale in cui avvengono gli scambi tra asset digitali (nel nostro caso prendiamo in considerazione solo le criptovalute).

Attraverso questo canale si riescono ad effettuare operazioni di compravendita senza la necessità dell'intervento di un terzo soggetto (ad esempio di un intermediario) che regoli la transazione. Nel P2P i vari nodi connessi condividono i file che sono archiviati nei loro dischi rigidi, e, utilizzando software adeguati, gli utenti possono consultare e scaricare i file degli altri dispositivi.

Ricollegandoci dunque al blockchain, la tecnologia P2P, oltre che permettere il trasferimento dei Bitcoin senza la presenza di intermediari e server centrali, fa in modo che chiunque possa configurare un nodo Bitcoin con lo scopo di partecipare ad un processo di verifica e di convalida dei nodi.

Inoltre, gli stessi nodi nell'ambito del blockchain, possono assumere ruoli diversi, come ad esempio i full node, cioè dei nodi che forniscono sicurezza al network verificando le transazioni seguendo le regole di consenso del sistema.

Andando ad analizzare i vantaggi di questa particolare tecnologia, possiamo affermare che i canali P2P forniscono un'adeguata sicurezza dal momento che questi ultimi, lavorando su grandi numeri di nodi, garantiscono un'immunità agli attacchi Denial-of-Service (DoS) i quali colpiscono molti sistemi. Focalizzandoci nell'ambito delle criptovalute, come già detto in precedenza, viene eliminato il rischio di censura da parte di terzi soggetti (come le autorità).

### 3) La teoria dei giochi:

La teoria di giochi è una teoria sviluppata nel 1654 dai matematici Blaise Pascal e Pierre de Fermat, perfezionata poi nella metà del '900 dal matematico/economista statunitense Jhon Forbes Nash. Questa teoria si fonda su un metodo matematico applicato per analizzare i comportamenti umani basati su processi decisionali razionali. La teoria considera una situazione competitiva nei giochi non cooperativi in cui ogni giocatore non saprà le decisioni prese degli altri giocatori, quindi non vi è la possibilità di riuscire ad accordarsi in maniera vincolante, a prescindere da quale sia il loro obiettivo. La teoria dei giochi di conseguenza potrebbe essere applicata ad una molteplicità di scenari che vanno da una semplice partita a scacchi, a come si regola un mercato per gli scambi economici. Nel famoso equilibrio di Nash ogni individuo partecipa alla competizione cercando di trovare la strategia migliore per ottenere il massimo del guadagno possibile (comportamento classificato come "intelligente ottimista"). Il punto di equilibrio è quella situazione in cui si verifica un comportamento razionale e utile socialmente dato che consente a tutti i giocatori di ottenere qualcosa, in pratica l'obiettivo comune di tutti i partecipanti.

Nell'ambito delle criptovalute, la teoria dei giochi viene applicata per la creazione di un sistema economico sicuro e trasparente, ed è ciò che ha dato vita al concetto di Criptoconomia.

La Criptoconomia è lo studio dell'economia di protocolli blockchain e le possibili conseguenze a cui questi ultimi possono incorrere. L'analisi viene effettuata considerando il comportamento dei partecipanti interni, quindi gli acquirenti ed i venditori, sia degli agenti esterni, cioè quei soggetti che non fanno parte dell'ecosistema ma che avrebbero la possibilità di unirsi al network con il solo scopo di cercare di distruggerlo dall'interno.

La blockchain ha bisogno di basarsi sul consenso dei nodi alla convalida di transazioni e blocchi. Tuttavia però, si riscontra un problema rilevante, cioè che i nodi non sono in grado di fidarsi l'uno dell'altro. Di conseguenza ci si pone la questione sul come possa un sistema, avente una struttura del genere, "disinnescare" attacchi dall'esterno che possano portare disturbi significativi. La risposta la troviamo nell'algoritmo di consenso Proof to Work. Tale metodo utilizza tecniche crittografiche che rendono il processo di creazione di criptovalute estremamente costoso ed esigente, incentivando i nodi ad agire onestamente per non rischiare di perdere le risorse investite. Inoltre i nodi che risultano agire in maniera disonesta vengono espulsi dal network.

L'applicazione della teoria dei giochi nelle criptovalute quindi parte dall'analisi del comportamento degli umani, su quali decisioni essi prendono basandosi sulla propria razionalità. Grazie alla combinazione del binomio crittografia-teoria dei giochi, l'algoritmo Proof of Worl riesce a creare la blockchain di Bitcoin come un sistema economico centralizzato con una immunità efficiente agli attacchi esterni.

### **1.1.2.2 IL CONCETTO DI MINING**

Il processo di mining (tradotto letteralmente "minando") è quel processo che ci permette l'emissione vera e propria della moneta virtuale.

Vediamo ora come funziona.

Il nome mining deriva dal parallelismo tra i bitcoin e l'oro, data la somiglianza tra i minatori d'oro ed i ricercatori di codici. Il mining è un metodo utilizzato per la creazione di nuova moneta virtuale attraverso appositi applicazioni di calcolo. I terminali utilizzati per questi processi sono chiamati PC mining. Nel blockchain ogni blocco di transazione è affidato ad un singolo miner. La sua mansione è quella di installare un'applicazione in grado di riuscire a calcolare i dati delle transazioni Bitcoin, alle quali viene aggiunto un valore casuale detto Nonce. Successivamente viene generata una stringa alfanumerica chiamata Hash che comprende tutti i Nonce. Il miner per calcolare il contenuto di una stringa ha bisogno di un grande numero di tentativi e calcoli (di conseguenze di un grande numero di nonce). Dal momento che una stringa viene validata, il blocco di transazione viene a sua volta reso valido.

La conclusione del processo si ha con “l'estrazione” di Bitcoin da parte del miner con il successivo aggiornamento del registro delle transazioni nel Blockchain.

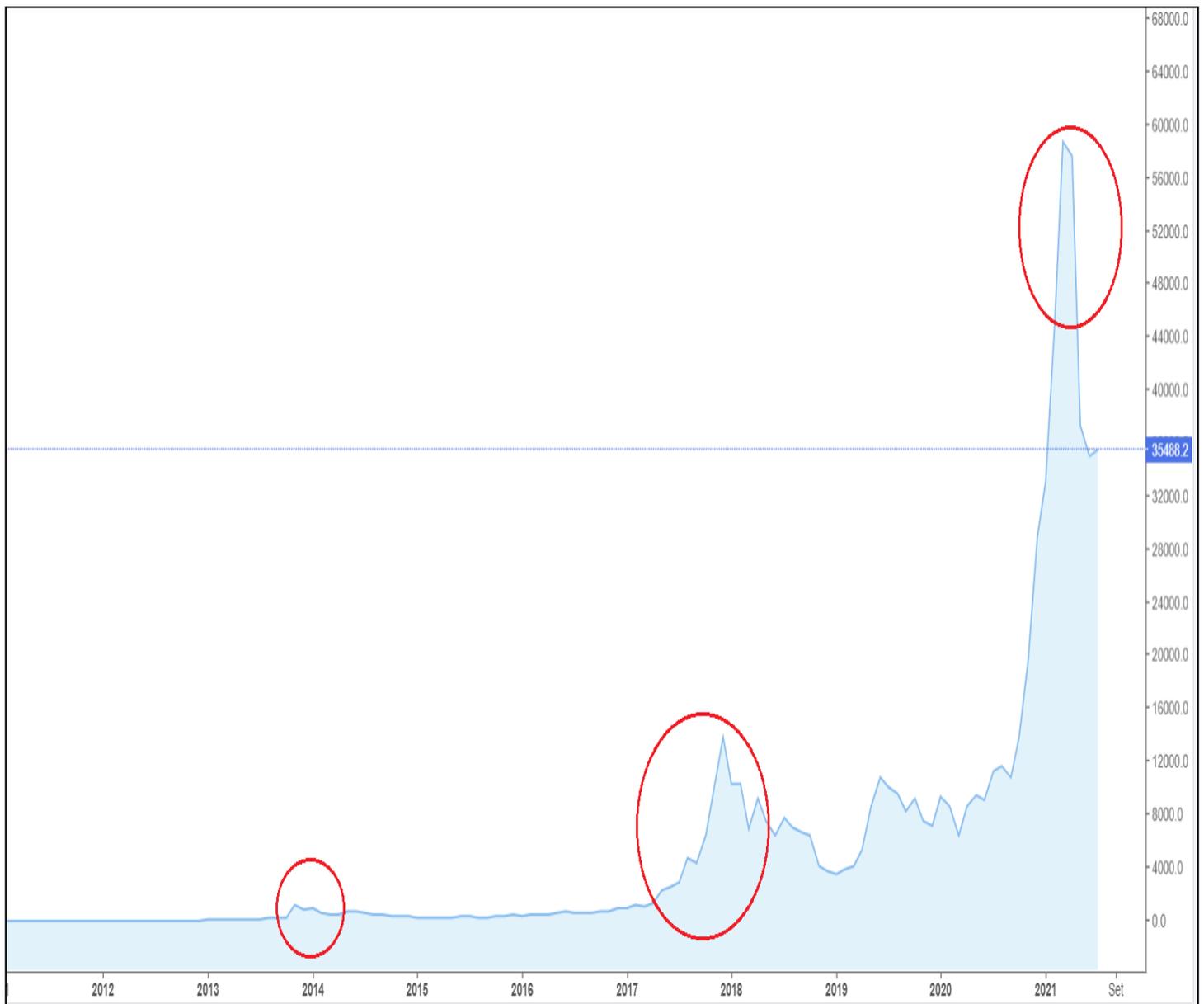
Al momento il mining è un processo che richiede alte competenze nel settore ed un gran dispendio di investimenti ed energia.

Fortunatamente da qualche anno a questa parte si è creata una valida alternativa al mining: investire direttamente in questo business. Il nuovo settore tra le criptovalute è quello del trading di queste ultime o attraverso compravendita di moneta virtuale, o in alternativa attraverso acquisto di criptovaluta sugli **exchange**. Gli exchange sono dei siti nei quali è possibile scambiare valute virtuali con le monete tradizionali. Quindi ad esempio trasformare Bitcoin in euro e viceversa, in pratica come se fosse un mercato delle valute tradizionale applicato alle monete virtuali. Il sistema funziona in maniera molto intuitiva, con dei broker che funzionano da intermediari che gestiscono le operazioni inviando ordini di acquisto/vendita da parte dei propri clienti direttamente negli exchange.

### ***1.1.3 TREND PREZZO E VOLATILITÀ DEI BITCOIN***

Se andiamo ad analizzare la definizione di moneta in economia, essa ha valore intrinseco pari a 0, è solamente un “certificato di valore”. Non può che non essere altrimenti per il valore delle criptovalute, considerando che oltre a non essere tangibili, non hanno nemmeno un'autorità garante dietro che ne certifichi il valore nominale. Nonostante ciò, dal loro approdo nei mercati mondiali, hanno subito variazioni del valore in maniera significativa. Prendiamo ora in considerazione il trend della moneta virtuale Bitcoin. Nel momento della sua creazione (fine anno 2008) valeva circa un millesimo di dollaro. In questo anno invece sono stati registrati valori tra 30'000 e 50'000 dollari. Analizziamo i momenti significativi attraverso seguente grafico.

Figura 1.2: trend prezzo Bitcoin



Fonte: *investing.com*

Analizziamo i vari step facendo particolare attenzione nei punti cerchiati in rosso:

Anno 2013: Il valore del bitcoin al termine dell'anno è di quasi 750 euro. Il prezzo cresce significativamente e qualche store inizia ad accettare bitcoin come moneta. Il concetto di moneta virtuale prende piede e diventa popolare, facendo attirare su di sé le prime considerazioni a livello normativo. Durante lo stesso anno accade un altro evento che concorre all'apprezzamento della moneta: il collasso dell'economia di Cipro.

Anno 2014: L'inizio dell'anno non è molto promettente. Si verifica un crollo del prezzo, con una perdita di circa 500 euro. Questo periodo è chiamato "l'inverno del bitcoin".

Anno 2017: Inizia l'ascesa vera e propria del Bitcoin. Alla fine del 2017 si verifica un'importante crescita della domanda, e di conseguenza un altrettanto importante aumento del valore della moneta. Parliamo di un rapporto bitcoin euro di circa 1 a 16'000. Nello stesso periodo, causa anche questo incremento del valore, per la prima volta è possibile scambiare titoli Futures sui bitcoin.

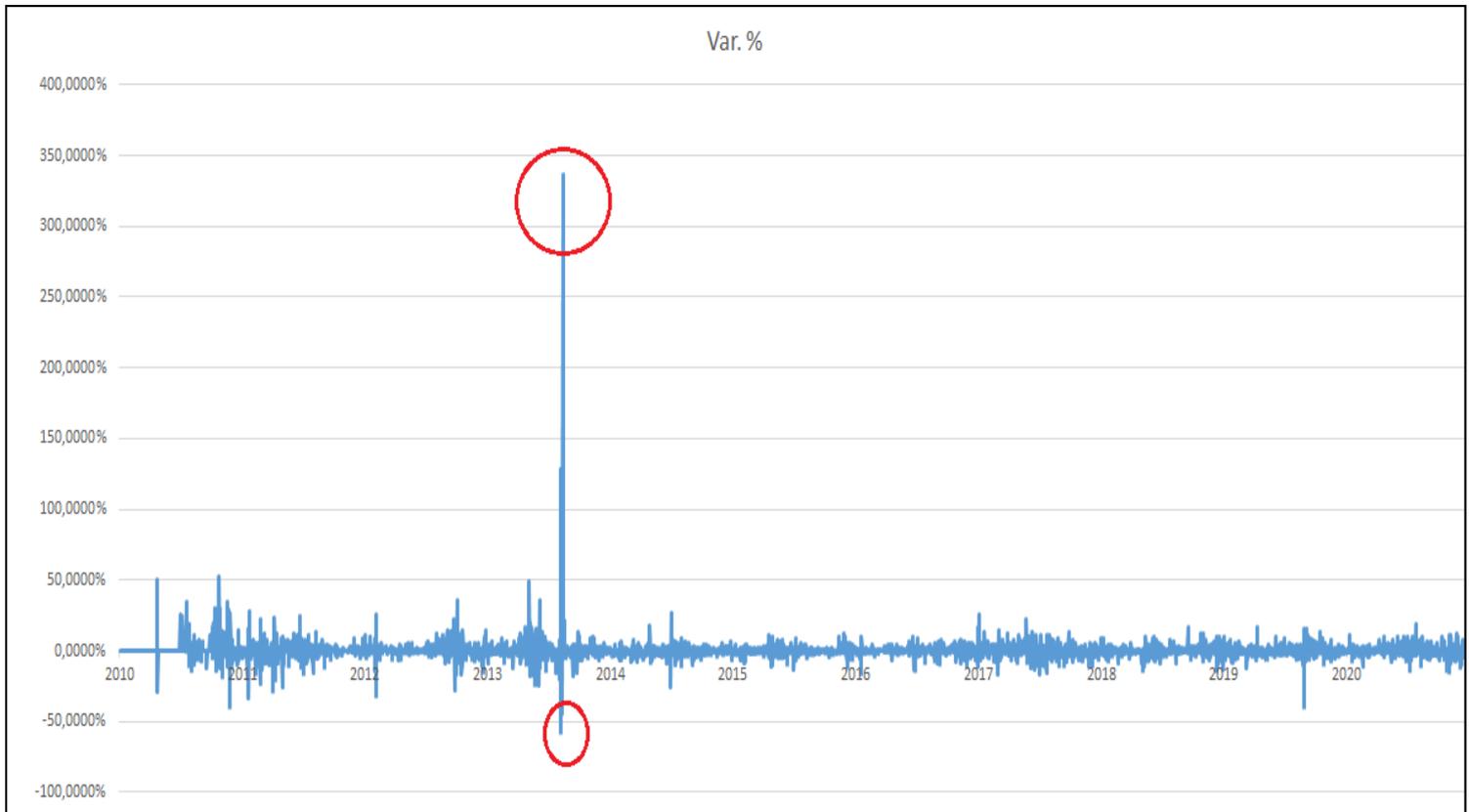
Anno 2018: All'inizio dell'anno il prezzo del bitcoin si riassetta, tornando ai valori precedenti al significativo incremento, quindi a circa 6000 euro. Ciò però non blocca l'evoluzione della criptovaluta, grazie anche ad una nuova tecnologia la quale permette di velocizzare le operazioni sulla rete: il Lightning Network. Con ciò, il bitcoin inizia ad attirare l'interesse di molte banche ed operatori istituzionali, ponendo le basi per la crescita del proprio valore.

Anno 2021: Dopo aver avuto un periodo di stagnazione, probabilmente dato anche dalla situazione pandemica, il valore del bitcoin ha un incremento del valore nominale senza precedenti. Sabato 2 gennaio c'è stato il superamento della soglia dei 25'000 euro, per arrivare a quasi 50'000 euro in aprile. La domanda sorge spontanea: che cosa ha scaturito una tale impennata? Uno dei motivi principali è stata l'ascesa nell'ambito delle criptovalute di società importanti nel settore dei pagamenti come Square e Paypal. Queste ultime nei primi mesi del 2021 hanno annunciato l'integrazione dei bitcoin nei propri portafogli digitali. Inoltre anche la società Visa ha avviato una collaborazione con BlockFi (una startup statunitense che opera nel settore fintech) con il fine di portare sul mercato una carta di credito in grado di premiare gli utenti con un cashback dell'1,5% degli acquisti effettuati in bitcoin. Alla fine del mese di aprile, si è verificato un crollo del prezzo di circa il 50%. Questo è dovuto soprattutto a delle normative restrittive da parte delle autorità finanziarie cinesi e americane.

Come abbiamo potuto notare nelle varie tappe più significative del trend del bitcoin, il prezzo oscilla in maniera significativa, come difficilmente si può osservare in qualsiasi altri asset finanziari nei mercati regolamentati. Queste analisi tendono a formulare una conclusione in cui si può affermare che il prezzo del bitcoin (per ora, poi vedremo se lo stesso vale per altre criptovalute) è soggetto ad un'alta volatilità, che ora andiamo ad analizzare.

Ci aiutiamo anche nel caso della volatilità con un grafico del suo trend.

Figura 1.3: trend volatilità Bitcoin

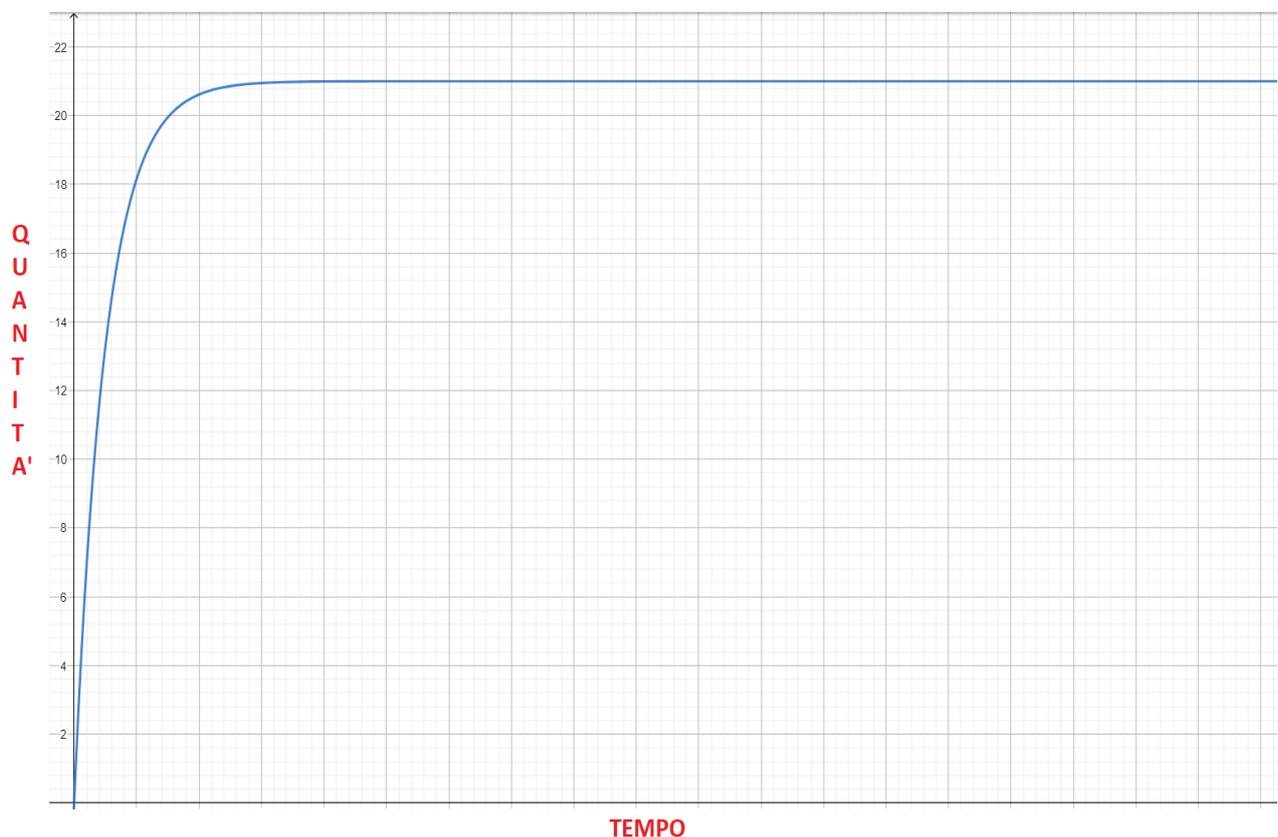


Il grafico preso in considerazione considera la varianza percentuale su base giornaliera.

In questo caso sono state cerchiati in rosso i picchi di massimo e di minimo che la volatilità del bitcoin ha raggiunto negli ultimi 10 anni. Come possiamo notare sia il picco minimo (meno del -50%) sia il picco di massimo (circa il 350%) cadono tra il 2013 ed il 2014. A primo impatto potremmo pensare che esclusi i picchi la variabilità tra un giorno ed un altro non sia così alto. Se andiamo però a confrontare la volatilità del bitcoin con un qualsiasi asset quotato in un mercato regolamentato, noteremo che lo sfioramento del  $\pm 10\%$  è evento rarissimo. In economia, soprattutto in finanza, sappiamo che una volatilità maggiore corrisponde ad un rischio maggiore data la loro correlazione. Di conseguenza, investendo in bitcoin si potrebbe avere un guadagno significativo, come una perdita importante.

Un fattore che influenza questo “sali e scendi” dei prezzi è sicuramente il limite massimo di bitcoin: 21 milioni. Il motivo di questa cifra lo spiega direttamente Satoshi Nakamoto: “*Volevo scegliere qualcosa che rendesse i prezzi simili alle valute esistenti, ma senza conoscere il futuro, è molto difficile. Alla fine ho scelto qualcosa a metà. Se Bitcoin rimane una piccola nicchia, varrà meno per unità rispetto alle valute esistenti. Se lo si immagina utilizzato per una frazione del commercio mondiale, allora ci saranno solo 21 milioni di monete per il mondo intero, quindi una unità varrà molto di più.*”. Questo perché, nel momento in cui il noto inventore ha scritto il programma, l’aggregato monetario M1 (circolante) mondiale era di circa 21 trilioni di dollari. Quindi possiamo dedurre che abbia voluto avere una certa correlazione tra i bitcoin esistenti possibili e l’aggregato. Un altro motivo di un limite superiore delle monete virtuali lo troviamo nella tecnologia blockchain. Inizialmente la ricompensa per i miner era di 50 bitcoin per ogni blocco. Dopo la prima significativa salita del prezzo nel 2012 la ricompensa si è dimezzata a 25 bitcoin, nel 2016 a 12.5, nel 2020 a 6.25, e così via, con un limite di  $t$  (tempo) che tende ad infinito con valore di 21 milioni. Possiamo riassumere l’andamento della quantità prodotta dei bitcoin con un grafico di un’esponenziale negativa inversa con limite superiore.

Figura 1.4: limite superiore Bitcoin



## 1.1.4 CONFRONTO MONETE VIRTUALI POST BITCOIN

Dopo l'ascesa del bitcoin, sono state introdotte altre monete virtuali, sempre con oscillazioni del prezzo significative nel tempo, ma con valore nominale decisamente minore. Analizziamo le più importanti.

### 1) *Ethereum*:

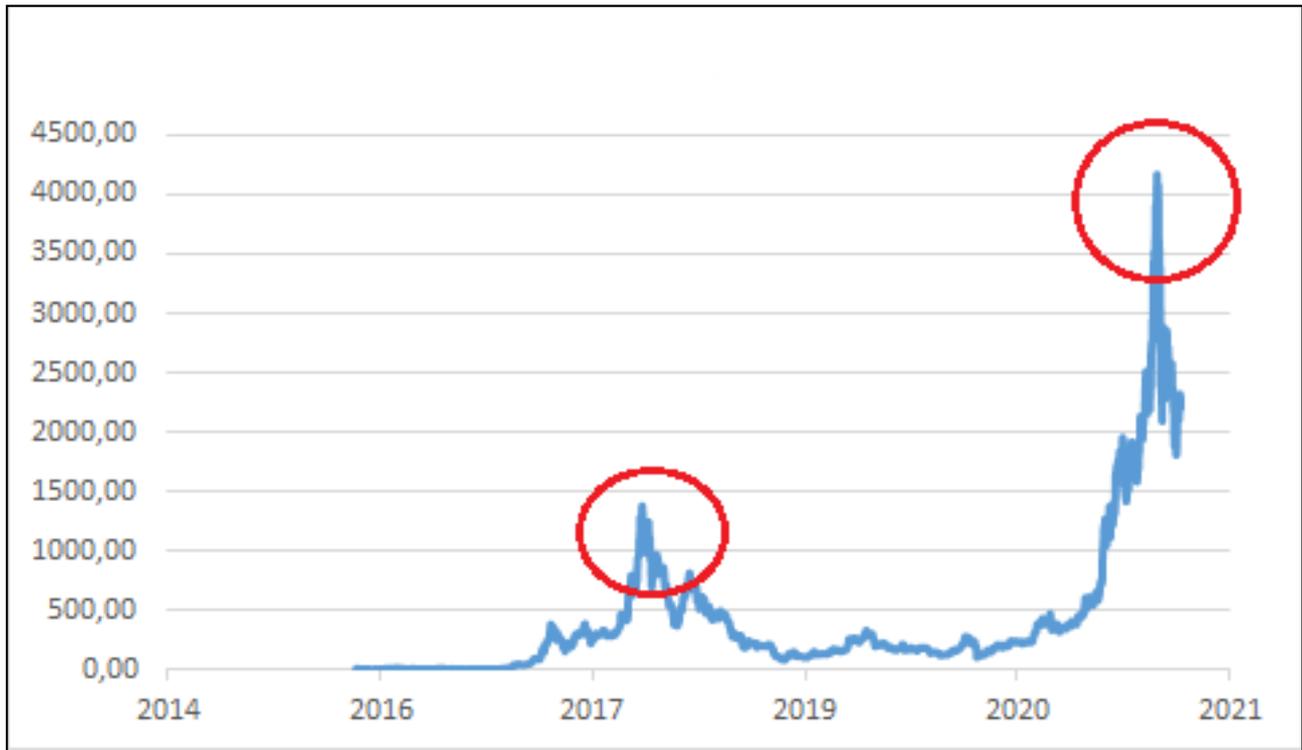
Dopo il bitcoin, la moneta virtuale più conosciuta è sicuramente Ethereum, anche se essa in sé per sé non è una criptovaluta vera e propria. Il termine Ethereum infatti si riferisce alla piattaforma digitale la quale permette di costruire una gamma di applicazioni decentralizzate, tra cui anche i suoi token (letteralmente “gettoni”, quindi in questo caso la sua moneta virtuale) chiamati ether. Nonostante ciò, comunque quando parliamo di Ethereum, il riferimento si fa alla criptovaluta. Anche Ethereum si basa sulla tecnologia blockchain. Questa piattaforma nasce nel 2013 da un programmatore canadese, Vitalik Buterin. Similmente a bitcoin, Ethereum conserva lo storico delle transazioni. La particolarità di Ethereum sta nel permettere anche ai programmatori di distribuire e costruire applicazioni decentralizzate chiamate “dapps”, ovviamente anche queste conservate nei registri della blockchain. Ethereum, come bitcoin, è decentralizzata. Però, mentre bitcoin è accettato in più ambiti, Ethereum è accettata solo per le transazioni di dapps eseguite nella propria rete.

Altre differenze sostanziali tra ethereum e bitcoin sono:

- Ethereum offre la possibilità ai programmatori di raccogliere fondi per le loro applicazioni.
- I miners di Ethereum lavorano per guadagnare ether, a differenza dei miners di bitcoin che minano per effettuare una vera e propria estrazione dei bitcoin.
- Il concetto di transazione assume valutazione diversa. In questo caso, ci si riferisce ai costi i quali dipendono dall'uso della larghezza della banda, dai requisiti di archiviazione e dalla loro complessità. Con i bitcoin le transazioni sono pressoché uguali, limitate dalla taglia del blocco.
- Mentre la quantità di bitcoin hanno limite superiore di 21 milioni, Ethereum ha un'emissione limitata di 18 milioni di token l'anno, cioè il 25% dello stock iniziale.

Andiamo ora ad analizzare l'andamento dei prezzi e della volatilità. Anche in questo caso ci aiutiamo con l'andamento dei prezzi inseriti in un grafico.

Figura 1.5: trend prezzo Ethereum



Rispetto al bitcoin il valore nominale dell'ether è decisamente più basso. Nel momento della sua creazione aveva un valore di circa 10 dollari. Nel suo picco più importante (inizio 2021) un ether ha raggiunto un valore superiore ai 4000 dollari. Nonostante sia significativamente inferiore al valore di bitcoin, possiamo notare che le oscillazioni cerchiare in rosso nel grafico coincidono all'incirca con gli anni in cui il bitcoin ha avuto oscillazioni più rilevanti. Tornando al discorso fatto in precedenza col bitcoin, la varianza giornaliera dello storico dei prezzi di Ethereum sarà pressoché simile alla varianza giornaliera dei bitcoin. Possiamo concludere quindi anche in questo caso che investire risorse nella moneta virtuale Ethereum, si potrebbero verificare grandi perdite o guadagni significativi nel breve termine data la correlazione rischio-varianza.

## 2) **BNB:**

In precedenza, quando abbiamo descritto i possibili metodi con cui acquisire le criptovalute, abbiamo detto che si possono anche acquistare come assets nei mercati regolamentati, che nel caso delle criptovalute prendono il nome di exchange. Come nei mercati regolamentati ci sono diversi tipi di mercato (MTA, AIM Italia, ecc) a seconda delle caratteristiche che presentano, lo stesso vale per le monete virtuali. Uno dei mercati di più alta qualità è **Binance**. Binance è nato nel 2017, e a maggio di quest'anno è diventato il mercato di asset digitali più grande del mondo in termini di volume di scambi. Il fondatore è Changpeng Zhao, uno sviluppatore cinese. Zhao ed il suo team, con lo scopo di finanziare la creazione della piattaforma, hanno creato una raccolta fondi tramite un'Initial Coin Offering (ICO). Questa raccolta fondi ha avuto durata di circa un mese, raccogliendo all'incirca 15 milioni di dollari con cui sono stati finanziati la campagna marketing, l'inserimento di nuovi sviluppatori e la sicurezza del server. La valuta virtuale ufficiale della piattaforma Binance è il Binance coin (BNB). Il BNB può essere utilizzato per pagare le commissioni delle transazioni per lo scambio tra monete virtuali. Gli utenti che utilizzarono il BNB in questa maniera, furono premiati con uno sconto del 50%. L'acquisto dei token di Binance può avvenire in due maniere: 1- acquistare tramite altre criptovalute, quindi dando per assunto il possesso di queste ultime; 2- acquistarle considerando di non avere nessuna criptovalute.

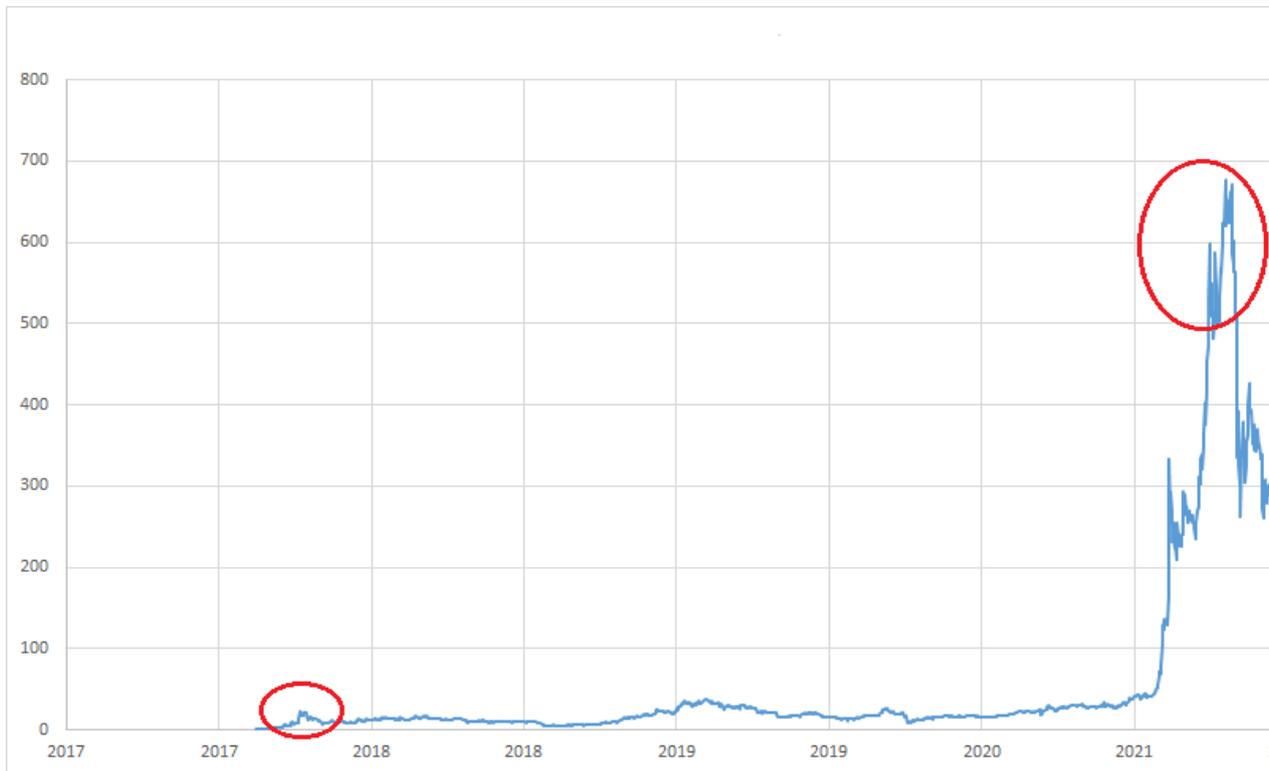
Nel primo caso occorre semplicemente scambiare le monete virtuali con i BNB. Quindi, aprendo un conto su Binance, trasferirci le criptovalute detenute, ed effettuare lo scambio.

Nel caso in cui non si è già in possesso di altre monete virtuali i passaggi sono analoghi dato che Binance non accetta valute ufficiali. Di conseguenza anche qui si è costretti ad acquistare ad acquistare altre criptovalute in exchange operanti nel proprio paese (ad esempio se si vive negli Stati Uniti, Australia od Europa attraverso **Coinbase**), trasferirli su Binance, ed effettuare lo scambio con BNB.

Come per bitcoin, anche per i BNB abbiamo un limite superiore riguardo la quantità, che è di circa 99 milioni. Grazie alla sua facilità d'uso, e grazie ai costi di transazione decisamente più contenuti rispetto ad altre criptovalute come ad esempio bitcoin, BNB è considerata una delle criptovalute più affidabili in circolazione.

Come per bitcoin ed Ethereum, andiamo ora ad analizzare il trend del prezzo di BNB aiutandoci sempre con un grafico.

*Figura 1.6: trend prezzo BNB*



Anche in questo caso abbiamo un valore nominale di gran lunga differente rispetto ad Ethereum ed a Bitcoin. D'altronde, come possiamo notare nelle aree cerchiare in rosso, le maggiori oscillazioni coincidono all'incirca con gli stessi anni cerchiati nei precedenti due grafici. Di conseguenza anche qui avremo una varianza con orizzonte temporale giornaliera più o meno simile ad Ethereum e Bitcoin, facendoci concludere che anche nel caso dei BNB avremo un rischio di prezzo assai elevato.

Il fatto di avere oscillazioni significative più o meno negli stessi anni in tre diverse criptovalute prese in considerazione, ci fa dedurre che, come nel caso dei mercati azionari uno shock importante per una società ad alta capitalizzazione impatti automaticamente negli asset di altre società, negli exchange accade il medesimo effetto. Quando il Bitcoin, il quale è la moneta virtuale di maggiore capitalizzazione, subisce fluttuazioni rilevanti, esso condiziona automaticamente, in maniera più o meno significativa, le altre criptovalute.

### **1.1.5 OPINIONI E PARERI**

Analizziamo ora delle opinioni e pareri contrastanti riguardo le criptovalute, di personaggi importanti nell'ambito dell'economia.

Iniziamo con una persona che ha avuto un'importanza assai rilevante negli ultimi anni, in particolare nel 2011 durante la crisi del debito sovrano ed ora durante la crisi pandemica: l'ex presidente BCE, nonché attuale presidente del consiglio dei ministri italiano Mario Draghi.

Draghi nel 13 febbraio 2018 tenne un'intervista chiamata #AskDraghi nella piattaforma di Twitter, in cui l'attuale premier rispondeva a delle domande fatte dagli utenti. Un giovane studente gli domandò se, al suo posto, avesse comprato bitcoin. Draghi rispose all'utente di pensarci attentamente facendo riferimento all'euro, valuta ufficiale dell'Unione Monetaria Europea *“Vedi, un euro oggi è un euro domani. Il suo valore è stabile.”*. Con questa affermazione ha voluto rimarcare che mentre il valore nominale di una valuta ufficiale non si discosta, o comunque in percentuali bassissime, rispetto al suo valore reale; mentre le criptovalute hanno percentuali di oscillazioni molto più ampie ed instabili. Il premier continua *“L'Euro ha alle sue spalle la BCE, il Dollaro USA dalla FED. Le altre valute dalle rispettive banche centrali. Non c'è nessuno dietro Bitcoin.”* facendo riferimento ad una delle funzioni principali della moneta legale ovvero quella di estinguere il debito date le autorità citate che si fanno carico della garanzia delle monete emesse. Garanzia che viene a mancare nelle criptovalute. Nonostante ciò, dalla creazione del bitcoin, si sono verificate transazioni di monete virtuali per pagamenti di beni reali. Il primo caso fu verificato nel 22 maggio del 2010, a circa 2 anni dalla creazione della criptovaluta. Un uomo in una cittadina della Florida acquistò due pizze con 10'000 bitcoin, per un valore complessivo di circa 30 dollari. Uno step importante per l'unione tra criptovalute ed economia reale è stata la partnership di Paypal, il quale da quest'anno ha autorizzato l'impiego delle criptovalute nei pagamenti, anche se per ora solo negli Stati Uniti.

Un altro passo rilevante è stato l'accettazione dei pagamenti in Bitcoin da parte di Tesla, la nota azienda statunitense specializzata nella produzione di auto elettriche. Elon Musk, il co-fondatore di Tesla, nel febbraio scorso investì attraverso la sua società, 1,5 miliardi di dollari in Bitcoin, facendo intendere di voler avere una fetta importante di portafoglio composta in criptovalute. Dopo qualche mese però, Musk, si è reso conto che la produzione di bitcoin utilizza un quantitativo enorme di energia non rinnovabile, favorendo un impatto negativo a livello ambientale: *"Siamo preoccupati per il rapido aumento dell'uso di combustibili fossili per l'estrazione e le transazioni di bitcoin, in particolare di carbone, che ha le peggiori emissioni di qualsiasi combustibile"* ha commentato il cofunder di Tesla. Come conseguenza di ciò, sono state sospese momentaneamente le direttive sull'accettazione di Bitcoin per l'acquisto delle auto Tesla. Questi eventi hanno contribuito al crollo della moneta virtuale di maggio 2021 descritto in precedenza. Il calo immediato verificatosi ha conseguito che Consob e Banca d'Italia richiamassero l'attenzione dei risparmiatori, in particolare di quelli retail, per comunicare gli elevati rischi connessi all'operatività in cripto-attività. Per disincentivare il consumo di energia inquinante, Elon Musk ha affermato che Tesla potrebbe tornare ad accettare come pagamento i bitcoin ad una condizione: *"Quando ci sarà la conferma di un uso ragionevole (~50%) di energia pulita da parte dei minatori con un trend futuro positivo, Tesla riprenderà a permettere le transazioni Bitcoin"*. Per raggiungere questi risultati nelle settimane scorse è nato il **Bitcoin Mining Council** (BMC), un consorzio in cui collaborano le più grandi aziende di mining di Bitcoin dell'America del Nord. Nonostante tra i fondatori compari il CEO di Tesla, in una nota ufficiale del BMC viene dichiarato che Musk non ricoprirà alcun ruolo in questa organizzazione.

Va precisato che è molto più semplice ottenere determinati risultati nei paesi in cui la libertà di espressione è più diffusa. Mentre nei paesi come la Cina, in cui la democrazia è limitata, è molto più difficile raggiungere certi scopi.

Un'ulteriore persona, avente ruolo importante durante la crisi del 2008, che ha espresso la sua posizione riguardo le criptovalute è stato Michael Burry. Michael Burry, laureato in medicina, lascia la professione di medico per intraprendere la carriera di trader data la sua curiosità per la finanza. Burry è famoso soprattutto perché poco prima della crisi dei mutui subprime, scommise contro il mercato immobiliare, un mercato che prima del 2008 era considerato uno dei più stabili. Burry si è espresso riguardo le criptovalute in questa maniera: *“Il problema con le criptovalute, come nella maggior parte delle cose, è la leva finanziaria. Se non sai quanta leva c'è nelle criptovalute, non sai nulla delle criptovalute, non importa quanto altro pensi di sapere”*. Burry quindi vede il “pericolo” principale nella posizione degli investitori e dei broker rispetto alle criptovalute piuttosto che nelle criptovalute stesse. Inoltre, l'investitore americano, è preoccupato che i governi possano effettuare interventi restrittivi nei confronti delle criptovalute. Infatti a febbraio di quest'anno ha affermato che i concorrenti nell'arena valutaria verranno schiacciati in una crisi inflazionistica.

Un importante imprenditore che si è espresso in maniera netta e concisa è Warren Buffet, considerato da molti il più grande value investor di sempre. Warren Buffet descrive il bitcoin con “veleno per topi al quadrato”. Questo perché lo considera un asset che di per sé non crea nulla. Infatti dal momento in cui si detiene una criptovaluta, oltre a non rispettare le tre caratteristiche principali della moneta, essa non produce nessun dividendo, diversamente dagli asset scambiati nei mercati regolamentati. Il 29 febbraio, alla CNBC, Buffet afferma: *“Il bitcoin è una illusione e attrae soltanto i ciarlatani. Puoi rimanere a guardare un bitcoin tutto il giorno, e non produrrà nessun piccolo bitcoin o qualcosa del genere. È un'illusione, praticamente.”*. Nella stessa intervista, chiarisce che il ruolo della blockchain deve essere indipendente dal bitcoin, dato che è un argomento interessante e rivoluzionario.

### ***1.1.6 RISCHI E PROBLEMATICHE ESPOSTE NEGLI ULTIMI ANNI***

Mostriamo ora i limiti principali e le rischi, in particolare soffermandoci nell'anno attuale.

Iniziamo nel considerare con uno di quello che è considerato un obiettivo della nascita delle criptovalute: la decentralizzazione. È nato come obiettivo per fare in modo che non ci siano autorità che rallentino o blocchino transazioni con regole o provvedimenti. Se da un lato però si velocizzano e soprattutto non si limitano le operazioni di scambio, dall'altro avremo un mercato in cui regnerebbe l'anarchia. Basti pensare ad esempio alla mancata tracciabilità dello scambio di criptovalute, con cui si potrebbero compiere tranquillamente acquisti in maniera illegale. Inoltre, come abbiamo già visto, verrebbe a mancare una delle funzioni principali della moneta, l'estinzione del debito. Quando abbiamo istituzioni garanti, come ad esempio BCE o FED, l'acquirente che utilizza la moneta ufficiale del paese per acquistare un bene o un servizio, detiene l'obbligo di estinguere il debito verso il venditore, e di conseguenza il venditore è obbligato a ricevere la moneta legale in cambio del bene o servizio messo in vendita. Oltre ciò, i costi di transazione della rete delle criptovalute rimangono molto alti, e diventano insostenibili nei periodi in cui la domanda fluttua verso l'alto. Basti pensare che nel 2017 le transazioni sono passate da gennaio con un costo di 0.3 dollari a 50 dollari nel dicembre dello stesso anno, mentre dalla fine dello scorso anno ad oggi siamo passati da 1 dollaro a 22 dollari. Queste problematiche appena descritte conseguono che le criptovalute rimangono incompatibili con la funzione di mezzo di scambio. Infatti, analizzando i dati passati, notiamo chiaramente che tra il totale dei bitcoin prodotti, un 10% è fermo negli wallets dall'avvio del progetto (2009-2010). Parliamo di bitcoin prodotti quando i costi di mining erano minimi. Inoltre oltre il 75% dei BCT non circola attivamente negli exchange da oltre 2 mesi, cioè dal momento in cui si è verificato il crollo.

Dopo il crollo di quest'anno, molti governi hanno preso seri provvedimenti contro la detenzione di criptovalute. Questo ha fatto sì che si verificasse un rischio di una bolla crittografica. Nel mese di maggio la Cina ha vietato l'utilizzo delle criptovalute alle banche e ai canali di pagamento online. Questo provvedimento ha mandato in tilt gli exchange mondiali dato che la maggior parte di mining di Bitcoin avviene proprio in Cina. Nei periodi successivi, provvedimenti simili sono stati presi in altri paesi. Ad esempio la Turchia ha emanato un divieto sui pagamenti in criptovaluta, paesi come Bolivia, Ecuador, Nigeria e Algeria hanno anche loro vietato valuta digitali. Tutto ciò consegue nel concludere che finché non ci sarà un'istituzione riconosciuta a livello mondiale la quale si faccia garante dell'utilizzo di criptovalute, non sarà possibile l'uso globale delle monete virtuale.

Un altro problema rilevante collegato alle criptovalute lo si riscontra nel momento in cui non si verifica l'effettiva correlazione tra queste ultime ed il mondo reale. Se pensiamo all'oro, sappiamo che c'è una relazione inversa tra questo ed il dollaro americano, ossia nel momento in cui il valore del dollaro diminuisce, probabilmente il valore dell'oro aumenterà. Con le criptovalute, almeno per ora, non abbiamo nessuna correlazione con qualche variabile reale.

Ritornando alle considerazioni viste in precedenza di Michael Burry riguardo la leva implicita nelle criptovalute, l'implosione di queste ultime può appunto essere attribuita agli investitori eccessivamente indebitati. Basti pensare che alcuni degli scambi di monete virtuali più popolari consentono agli investitori di utilizzare una leva finanziaria che va dal 50x al 125x sul proprio patrimonio del conto. Questi dati ci fanno concludere che, con questo trend, potrebbe effettivamente verificarsi una bolla finanziaria di importanza significativa data l'alta capitalizzazione che hanno acquisito negli ultimi anni gli exchange.

Tutto ciò influenza in maniera rilevante la variabilità delle criptovalute, come abbiamo visto in bitcoin, Ethereum e BNB. L'alta volatilità, come già detto, si traduce in alto rischio.

Infatti cambiamenti inaspettati nel mercato possono riflettersi in movimenti secchi ed improvvisi nel prezzo, con crolli di centinaia se non migliaia di euro.

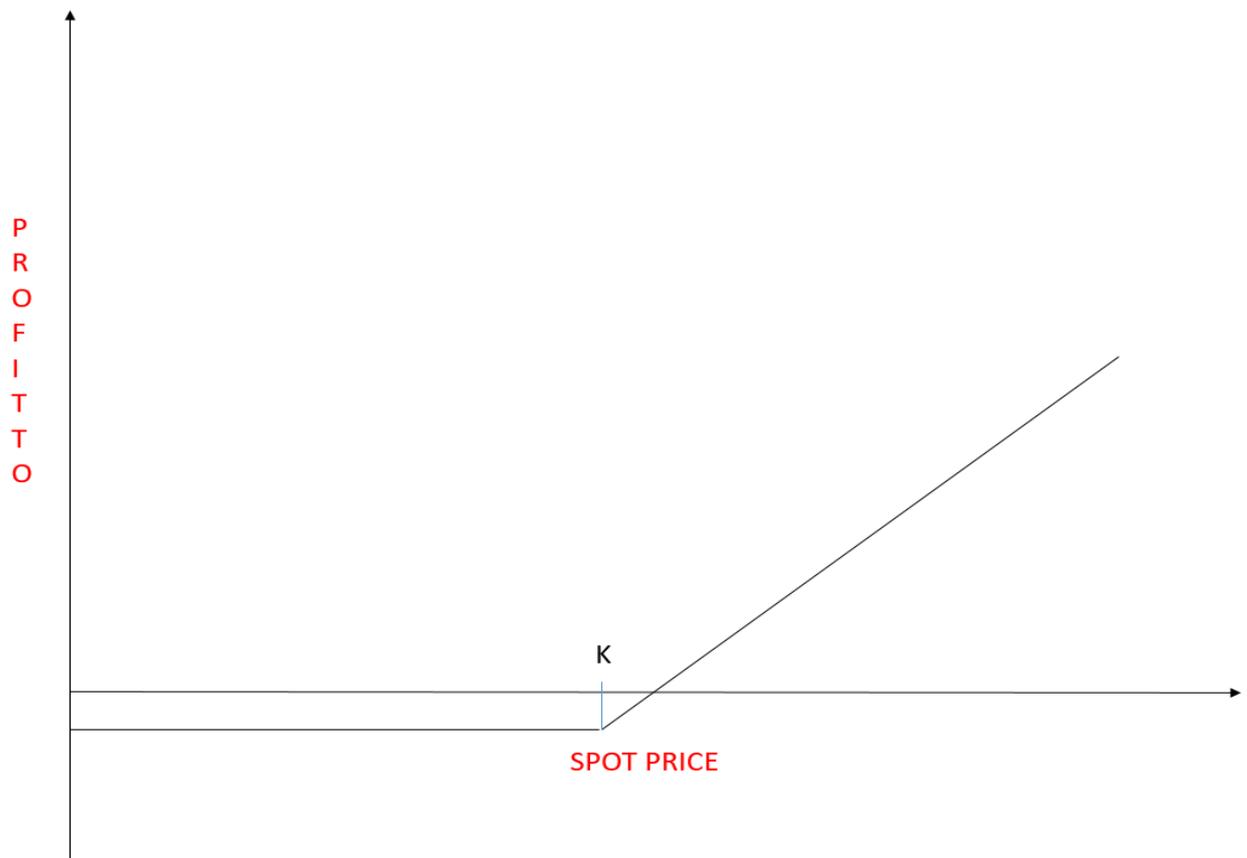
Un altro rischio di non poco conto lo si riscontra nell'assenza di un metodo infallibile per prevenire problemi tecnici, errori umani o attività di hacking. Questo sempre per l'assenza di un'autorità di regolamentazione e di vigilanza. E sempre per queste mancanze analizziamo ora come gli investitori retail possono trovarsi in una posizione di svantaggio rispetto agli investitori detentori di grandi capitali. Il fatto che ci sia l'anonimato delle transazioni pone uno dei principali incentivi alle truffe. Negli exchange, i singoli investitori possono cadere negli investitori "whales". Questi grandi investitori possono utilizzare massicce quantità di risorse per aumentare il prezzo di una o più criptovalute. L'incremento di valore attirerà gli investitori retail provocando un rialzo aggiuntivo. A quel punto, gli investitori che hanno scaturito il primo incremento venderanno le criptovalute aggiudicandosi il guadagno. Nel frattempo però il valore delle criptovalute vendute automaticamente scenderà, facendo registrare perdite significative nei portafogli degli investitori più piccoli che hanno investito nelle criptovalute in precedenza. Ciò si è verificato nell'ultimo anno proprio nel momento in cui Tesla ha investito 1.5 miliardi in bitcoin. Prima dell'operazione, il bitcoin aveva un valore di circa 30'000 dollari. Una volta effettuato l'investimento, si è verificato un incremento superiore del 60%, facendo arrivare il prezzo a circa 50'000 dollari. Questo ci fa concludere che nel mercato delle criptovalute, diversamente dai mercati regolamentati, chi ha capitali più grandi potrebbe far salire e scendere il prezzo a proprio piacimento, almeno finché non ci sarà un'autorità che non regoli il tutto.

Questi rischi e limiti riscontrati nelle criptovalute fanno sorgere non pochi dubbi riguardo alla convenienza nell'investire nelle monete virtuali, soprattutto per la loro alta volatilità la quale potrebbe far verificare perdite incalcolabili soprattutto per i piccoli investitori.

## 1.2 OPZIONI FINANZIARIE: FUNZIONALITA'

Quando parliamo di opzioni finanziarie ci riferiamo al diritto, quindi non l'obbligo, di fare qualcosa. Nel caso delle "call" il diritto di comprare, nel caso delle "put" il diritto di vendere. In un contratto di opzioni abbiamo la "data di estinzione" o "data di scadenza" (la prima per le opzioni europee, la seconda per le opzioni americane) ed il "prezzo di base" o strike price. Quando si detiene un'opzione call, si spera che il prezzo dell'azione sottostante aumenti.

Figura 1.7: grafico opzione Call

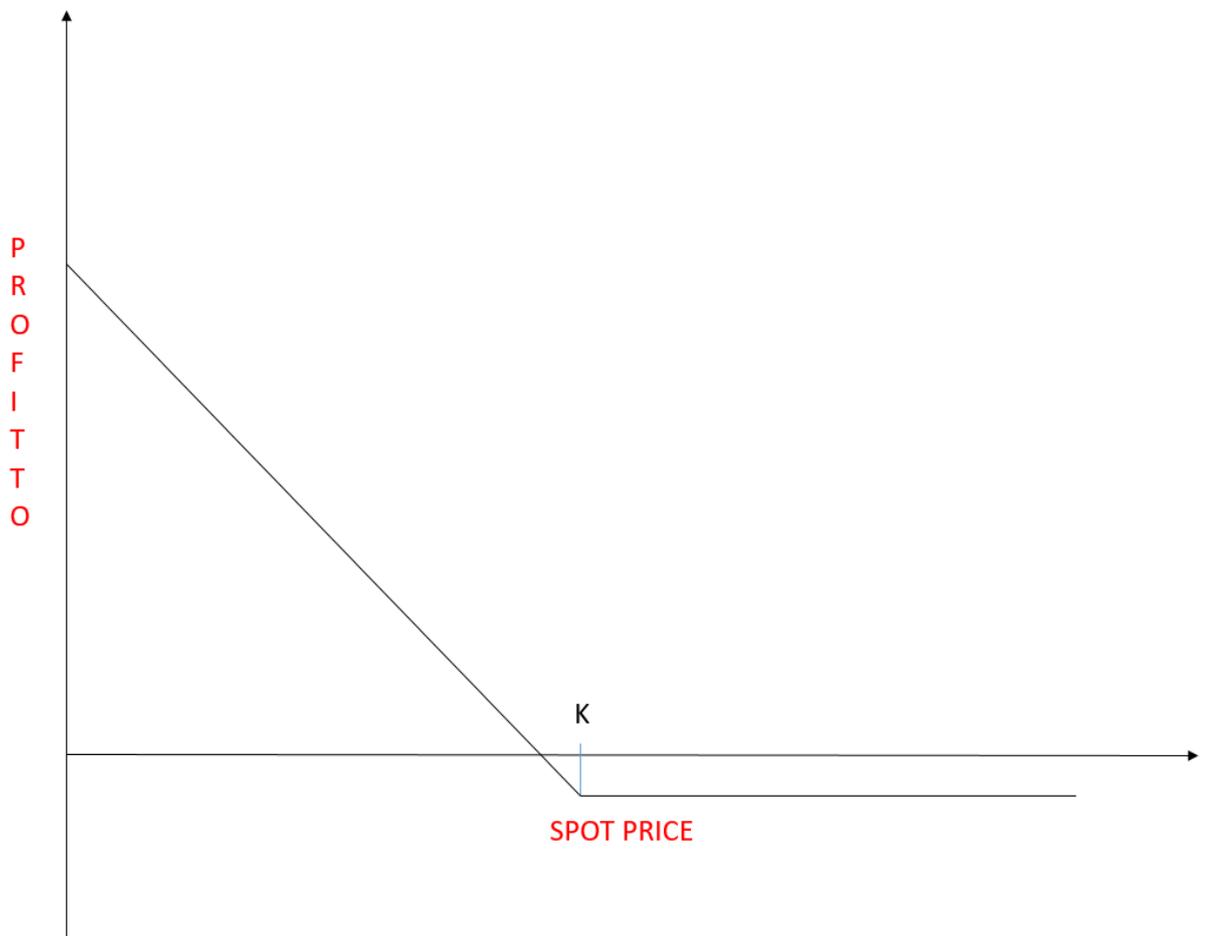


Il grafico sovrastante ci mostra il funzionamento di una call (C) finanziaria dal punto di vista di chi la detiene. Un acquirente di un'opzione call su un'azione (o su un pacchetto azionario) sottostante, ha il diritto di acquistare l'azione entro una certa data ad un determinato prezzo chiamato strike price (K) entrambi stabiliti da contratto. Finché il prezzo corrente  $S_0$  (SPOT PRICE) non raggiungerà almeno un valore equivalente alla somma di C e K, il detentore della call non la eserciterà dato che non ne trarrebbe nessuna convenienza.

Se  $S_0$  rimarrà inferiore a quel valore soglia fino alla scadenza, il detentore della call registrerà una perdita pari al prezzo di acquisto dell'opzione. Nel momento in cui  $S_0$  sarà maggiore di  $C+K$  a quel punto l'acquirente eserciterà la call aggiudicandosi l'azione sottostante, la rivenderà a prezzo di mercato registrando il profitto  $S_0-C-K$ .

Diversamente accade per le opzioni put. Il grafico sottostante rappresenta il trend di chi la detiene, quindi di chi la acquista.

Figura 1.8: grafico opzione Put



Se per la call l'acquirente sperava in un rialzo del prezzo, nel caso della put il detentore spererà che il prezzo dell'azione sottostante diminuisca. Se  $S_0$  sarà superiore alla somma tra strike price ed il valore della put ( $P$ ), non si avrà convenienza ad esercitare l'opzione. E se il prezzo spot rimarrà tale per tutta la durata del contratto, il detentore della put registrerà una perdita pari a  $P$ . Se invece  $S_0$  sarà inferiore od uguale a  $P+K$ , il detentore della put la eserciterà vendendo l'azione ad un prezzo  $K$ . Dopo di che ricomprerà la stessa azione al prezzo di mercato  $S_0$ , registrando un guadagno  $K-P-S_0$ .

Analiticamente possiamo riassumere le condizioni per esercitare le opzioni in questa maniera:

### ACQUIRENTE CALL

$$S_0 \geq K + C$$

### ACQUIRENTE PUT

$$S_0 \leq P + K$$

Le analisi fatte finora sono state fatte considerando solo gli acquirenti delle opzioni, quindi solo chi le detiene. Se invece considerassimo i venditori delle opzioni avremo dei comportamenti differenti dei soggetti economici.

Figura 1.9: posizione lunga Call

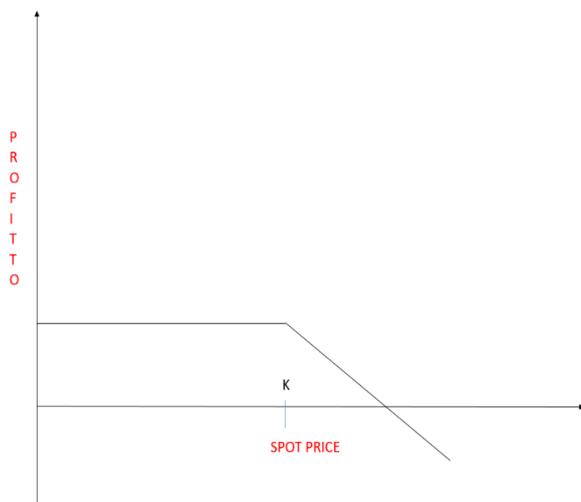
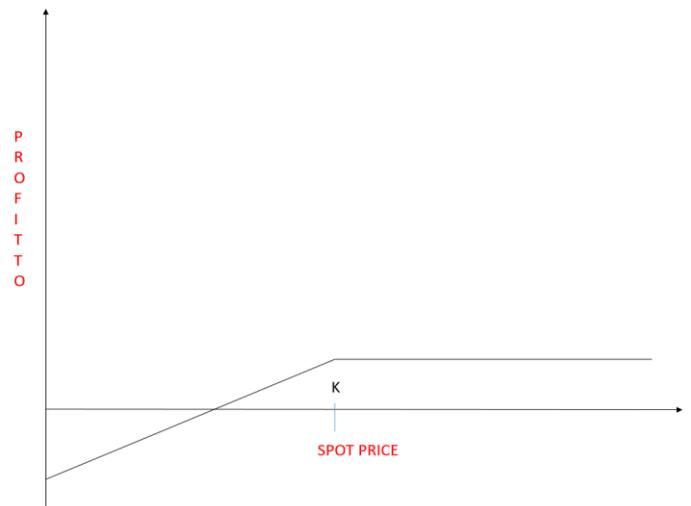


Figura 1.10: posizione lunga Put



Come possiamo notare nei grafici, nel caso di una posizione corta su una call, il venditore dovrà sperare che il prezzo dell'azione sia sempre inferiore al prezzo di esercizio, mentre nel caso del venditore della put il venditore spererà che  $S_0$  rimanga superiore allo strike price per tutta la durata del contratto. Quindi analiticamente:

### VENDITORE CALL

$$S_0 \leq K + C$$

### VENDITORE PUT

$$S_0 \geq P + K$$

Analizziamo ora i fattori che più influenzano il prezzo di un'opzione scritta su un'azione: 1- lo spot price, ossia il prezzo corrente dell'azione ( $S_0$ ); 2- lo strike price, ossia il prezzo di esercizio ( $K$ ); 3- la vita residua ( $T$ ); 4- la volatilità del prezzo dell'azione  $\sigma$ ; 5- il tasso di interesse risk-free ( $r$ ); 6- i dividendi ( $D$ ).

1) e 2) *Il prezzo dell'azione ed il prezzo di esercizio:*

Nel momento dell'esercizio di una call, il suo valore dovrà essere pari alla differenza tra prezzo dell'azione e prezzo di esercizio quindi:  $C = S_0 - K$ .

Questo ne consegue che la call ha una relazione diretta con il prezzo dell'azione ed inversa con il prezzo di esercizio.

Invece, per quanto riguarda una put, il suo valore nel momento in cui viene esercitata è pari alla differenza tra prezzo di esercizio e prezzo dell'azione sottostante:  $P = K - S_0$ . In questo caso, a differenza della call, il prezzo di un'opzione put sarà correlata positivamente con il prezzo di esercizio e negativamente con il prezzo del sottostante.

3) *La vita residua:*

Il termine di scadenza varia a seconda se l'opzione è americana oppure europea. Nel caso delle opzioni americane, esse possono essere esercitate in qualsiasi momento purché all'interno della vita residua. Invece le opzioni europee hanno data di possibile esercizio esclusivamente il giorno della scadenza  $T$ . Questo ne consegue che le calls e le puts americane avranno un prezzo più alto al crescere della scadenza, dato che, ad esempio, due opzioni che differiscono tra di loro solo nella data di scadenza, ovviamente chi deterrà l'opzione con scadenza più lunga avrà almeno le stesse opportunità di esercizio del detentore dell'opzione con scadenza più breve. Per quanto riguarda invece le opzioni europee, spesso anche lì si verifica che le opzioni con scadenza più lunga valgano di più, anche se non è sempre così.

4) *La volatilità:*

Come detto in precedenza, in finanza la volatilità è sinonimo di rischio. Nelle opzioni finanziarie, se la volatilità aumenta, aumenta anche la probabilità con cui la performance del titolo sia più o meno brillante. Nel caso di un detentore di una call, esso ne trarrà beneficio dai rialzi, ma nello stesso tempo ha un rischio verso il basso, il cosiddetto downside risk, limitato, perché se si dovesse verificare il ribasso non può perdere più del premio pagato. Nel caso delle put, il detentore ne trae beneficio dai ribassi, ma anche qui c'è un downside risk, cioè un limite verso l'alto in caso di rialzo, che nel caso in cui si verificasse non perderà più del premio pagato.

5) *Il tasso risk-free:*

Il tasso risk-free, è un tasso privo di rischio. Vediamo questi influenzano il pricing delle opzioni. Se i tassi aumentano, tendono ad aumentare anche i tassi di crescita attesi dei prezzi delle azioni. Chi detiene le opzioni, inoltre, vedrà diminuire il valore attuale dei flussi di cassa all'aumentare dei tassi di interesse. Ciò ne consegue che il prezzo delle opzioni call tenderebbe ad aumentare, mentre quello delle put tenderebbe a diminuire. Di norma il tasso di interesse è correlato negativamente con il prezzo delle azioni, cioè al crescere dei tassi i prezzi diminuiscono e viceversa. Questa correlazione fa sì che in caso di un aumento del tasso di interesse, quindi una diminuzione dei prezzi, si verifichi una diminuzione del valore delle opzioni call ed un aumento del valore delle opzioni put, e viceversa.

- 6) La presenza di dividendi fa diminuire il prezzo delle azioni nel giorno in cui vengono staccati. Questo ne consegue che, nell'istante dello stacco, il valore delle call diminuirà, mentre il valore delle put aumenterà.

Vediamo ora i limiti superiori ed inferiori per il pricing delle opzioni.

Per quanto riguarda i limiti superiori il prezzo dell'opzione non potrà mai superare il prezzo dell'azione. Di conseguenza il prezzo dell'azione rappresenta un limite superiore per le call:

$$C \leq S_0$$

Nel caso in cui questa condizione non fosse rispettata, un investitore potrebbe effettuare operazioni di arbitraggio conseguendo un profitto privo di rischio comprando l'azione e vendendo la call.

Nel caso delle put, il prezzo dell'opzione non potrà mai essere superiore allo strike price:

$$P \leq K$$

Anche qui, nel caso in cui la disuguaglianza sovrastante non fosse rispettata un arbitraggista avrebbe la possibilità di conseguire un profitto vendendo l'opzione ed investendo il ricavato al tasso privo di rischio.

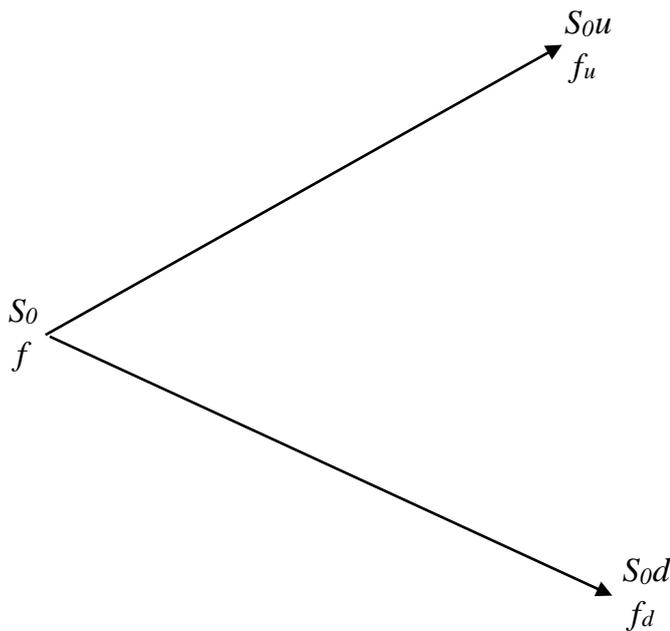
## 1.2.2 METODI PER IL PRICING DELLE OPZIONI

Analizziamo ora due metodi utilizzati per il effettuare il pricing delle opzioni.

### 1) Modello degli alberi binomiali:

Negli alberi binomiali consideriamo un titolo con prezzo  $S_0$ , ed un'opzione scritta su quel titolo con prezzo  $f$  con scadenza  $T$ . Presumiamo che il prezzo dell'azione possa salire a  $S_{ou}$  o scendere a  $S_{od}$ . Se il prezzo dell'azione sale, l'opzione varrà  $f_u$ , altrimenti in caso di decremento varrà  $f_d$ . Considerando di costruire un portafoglio con una posizione lunga su  $\Delta$  azioni e una posizione corta su un'opzione.

Figura 1.11: modello albero binomiale



Calcoliamo  $\Delta$  tale per ottenere un portafoglio privo di rischio. Con un rialzo del prezzo dell'azione il valore del portafoglio alla scadenza dell'opzione sarà

$$S_{ou} \Delta - f_u$$

Con un decremento del prezzo invece avremo

$$S_{od} \Delta - f_d$$

Le due espressioni si eguagliano nel momento in cui

$$S_{ou} \Delta - f_u = S_{od} \Delta - f_d$$

Ovvero quando

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_{ou} - S_{od}}$$

2) *Modello Black-Sholes:*

Nel modello Black-Sholes, le formule per il pricing di calls e puts europee su titoli senza pagamento di dividendi sono:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$d_1$  e  $d_2$  sono 2 variabili che vengono normalizzate,  $N(x)$  con media 0 e deviazione standard pari a 1. Le formule di  $d_1$  e  $d_2$  sono le seguenti:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Con cui  $S_0$  indichiamo il prezzo dell'azione,  $K$  è lo strike price,  $r$  è il tasso di interesse risk free composto continuamente,  $T$  è la vita residua dell'opzione e  $\sigma$  è la volatilità del prezzo dell'azione.

# CAPITOLO 2: STUDIO DELLA DINAMICA DEL PREZZO ATTRAVERSO MODELLI MATEMATICI

Questo capitolo verrà introdotto con la descrizione dettagliata dei sistemi dinamici, con particolare attenzione alle equazioni differenziali (ODE), e dei problemi di ottimizzazione. Nella seconda parte invece utilizzeremo le concezioni descritte dei primi sotto capitoli per comprendere bene alcune analisi delle caratteristiche dei Bitcoin fatte da alcuni autori.

## 2.1 I SISTEMI DINAMICI

Un sistema dinamico è un sistema che varia nel tempo. Matematicamente parlando ci riferiamo ad un sistema che utilizza variabili di stato, cioè cui valore descrive lo stato del sistema, e ne studia l'evoluzione nel tempo. Ci riferiamo a tali variabili con  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x} \in X \subseteq U$  con  $U$  spazio vettoriale che coincide quasi sempre con  $\mathbb{R}^n$ . Quindi, delle nostre variabili di stato, saremo interessati a studiarne la funzione:

$$\mathbf{x}: \mathcal{T} \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^n$$

in cui:

- $\mathcal{T}$  è un sottoinsieme assegnato  $\mathbb{R}$
- $X$  è un sottoinsieme assegnato di  $\mathbb{R}^n$  dove vive la variabile di stato. Con  $n$  indichiamo il numero delle componenti della variabile di stato presa in considerazione.

Euristicamente parlando, tale funzione  $\mathbf{x}$  è il cuore di un sistema dinamico di dimensione  $n$  il quale descrive l'evoluzione nel tempo della variabile di stato.  $\mathbf{x}$  sarà dipendente dal valore dei parametri che compaiono. Di solito il primo istante di  $\mathcal{T}$  è il presente, si prende quindi in considerazione l'evoluzione futura. La funzione  $\mathbf{x}$  non è nota, infatti l'obiettivo è quello di calcolarla e studiarne alcune proprietà utili per i problemi applicati.

Solitamente si conoscono:

- Il valore di  $\mathbf{x}$  in uno o più tempi fissati;
- La legge di evoluzione di  $\mathbf{x}$ , ossia quell'equazione locale che descrive l'incremento/la derivata di  $\mathbf{x}$  ad ogni tempo. Tale equazione può avere  $\mathcal{T}=\mathbb{N}$  nel caso di **equazioni alle differenze** (tempo discreto) oppure  $\mathcal{T}=\mathbb{R}_+$  nel caso di **equazioni differenziali** (tempo continuo).

### 2.1.2 EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE DE

Nelle equazioni alle differenze, che indichiamo con DE, la legge di evoluzione è una relazione tra il valore  $\mathbf{x}(t)$  della variabile di stato al tempo  $t$  e i suoi valori ad istanti successivi. Fissando l'insieme dei tempi  $\mathcal{T}\subseteq\mathbb{Z}$  e un insieme di stati  $X\subseteq\mathbb{R}$ , la formula generale delle DE si rappresenta così:

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1), \mathbf{x}(t+2), \dots, \mathbf{x}(t+k)) = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Dove  $\mathbf{G} : \mathcal{T} \times X^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$  è una funzione data. Definiamo la funzione sovrastante come una DE di ordine  $k$  dato che contiene i valori della variabile di stato da  $\mathbf{x}(t)$  a  $\mathbf{x}(t+k)$ . Il numero  $p$  invece rappresenta il numero delle equazioni, e quando  $p = n$  semplifica la funzione in questa maniera:

$$\mathbf{x}(t+k) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1), \mathbf{x}(t+2), \dots, \mathbf{x}(t+k-1)) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

per una funzione assegnata  $\mathbf{g} : \mathcal{T} \times X^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . DE di questo tipo si dicono scritte in forma normale. Una DE viene definita autonoma dal momento in cui  $\mathbf{G}$  (oppure, rispettivamente,  $\mathbf{g}$ ) è indipendente dal tempo  $t$ . Se invece dipendesse da  $t$  viene chiamata non autonoma. Considerando solo la forma normale delle DE avremo:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

e tale legge di evoluzione sarà solitamente accompagnata dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in X$ . Nella maggior parte (ma non sempre) dei casi  $t_0$  sarà il primo punto dell'insieme dei tempi  $\mathcal{T}$ . Anche con  $t_0$  come punto finale o un altro punto non iniziale la sostanza del teorema potrebbe rimanere invariata.

Il risultato di questo accoppiamento ci introduce ai cosiddetti **Problemi di Cauchy** (CP):

$$\begin{cases} x(t+1) = g(t, x(t)) & \forall t \in \mathcal{T} \\ x(t_0) = x_0 \in X & \forall t \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Per evidenziare la dipendenza di tali soluzioni dai dati iniziali denoteremo le soluzioni da con  $\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{x}_0)$ , o molto più semplicemente con  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  quando  $t_0 = 0$  è dato una volta per tutte.

Definiamo ora alcune caratteristiche principali:

- L'immagine della funzione  $\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{x}_0)$  ovvero l'insieme  $C = \{\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), t \in \mathcal{T}\}$  è chiamato l'orbita (del sistema dinamico) associata alle condizioni iniziali  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ . Si tratta di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .
- Ogni soluzione  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  con condizioni iniziali  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  è chiamata anche traiettoria o curva integrale del sistema dinamico,
- La famiglia delle curve integrali del sistema dinamico è la famiglia di curve  $\{\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{x}_0), t_0 \in \mathcal{T}, \mathbf{x}_0 \in X\}$ . Nella maggior parte dei casi  $t_0$  è fissato una volta per tutte e di conseguenza la famiglia delle curve integrali del sistema dinamico è la famiglia di curve  $\{\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{x}_0), t_0 \in \mathcal{T}, \mathbf{x}_0 \in X\}$ . In molti casi le curve integrali sono anche chiamate traiettorie del sistema dinamico. Ogni curva integrale è un sottoinsieme di  $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^k$ ,
- Un punto  $\mathbf{x}_0 \in X$  tale che per ogni  $t$  e  $t_0$  la funzione costante  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  è soluzione del Problema di Cauchy dell'equazione alle differenze e viene chiamato punto di equilibrio.

Facendo una piccola osservazione, notiamo che per dare senso al Problema di Cauchy delle DE, abbiamo bisogno che  $\mathbf{x}(t) \in X$ , o più in generale che  $\mathbf{g}$  sia ben definita su tutta  $\mathbf{x}(t)$ . Inoltre, una volta appreso come studiare una DE del primo ordine in forma normale, risulta molto semplice trattare una DE del  $k$ -esimo ordine in forma normale. Infatti ogni sistema DE in  $n$  variabili di ordine  $k$  in forma normale equivale ad una DE del primo ordine in forma normale con  $kn$  variabili.

Vediamo ora il caso con  $n = 1$ .

Un'equazione alle differenze DE è detta lineare se la sua funzione  $g$  è lineare o affine. Analiticamente parlando:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{a}_D(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_D(t) \quad t \in \mathcal{T}$$

dove  $\mathbf{a}_D, \mathbf{b}_D: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni assegnate. In caso di  $\mathbf{b}_D = 0$ , allora l'equazione alle differenze è detta lineare omogenea dato che il termine noto è nullo. In caso di termine noto non nullo la DE si chiamerà equazione lineare non omogenea. L'unica soluzione su  $\mathcal{T} = [t_0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{a}_D(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_D(t) & t \in \mathcal{T} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è data da

$$x(t) = x_0 \left( \prod_{s=t_0}^{t-1} a_D(s) \right) + \sum_{s=t_0}^{t-1} b_D(s) \left( \prod_{r=s+1}^{t-1} a_D(s) \right)$$

Considerando il caso omogeneo, quindi con  $\mathbf{b}_D = 0$

$$x(t) = x_0 \left( \prod_{s=t_0}^{t-1} a_D(s) \right)$$

Inoltre, nel caso in cui  $\mathbf{a}_D$  sia costante avremo

$$x(t) = x_0 a_D^{t-t_0} + \sum_{s=t_0}^{t-1} b_D(s) a_D^{t-s-1}$$

La soluzione sovrastante è data dalla somma di due termini:

- il primo è dato dalla soluzione dell'equazione alle differenze omogenea associata, che è linearmente dipendente dal dato iniziale;
- il secondo è dato dalla soluzione non omogenea nel momento in cui scegliamo come dato iniziale 0 nel momento  $t_0$ .

Quando abbiamo invece  $n > 1$ , consideriamo una matrice  $\mathbf{A}$ , una base di autovettori (o autovettori generalizzati) per  $\mathbf{A}$  che chiamiamo  $\mathbf{F}$ , e sia inoltre  $\mathbf{U}$  la matrice del cambiamento di base. Considero quindi il seguente **CP-DE**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Di cui la soluzione è:

$$x(t) = UA_F^t U^{-1} x_0$$

Considerando  $c = U^{-1} x_0$

$$x(t) = UA_F^t c$$

Nel caso la DE fosse affine (o non omogenea)

$$x(t+1) = A(t)x(t) + b(t) \quad t \in \tau \subseteq \mathbb{Z}$$

Dove  $\mathbf{A} : \tau \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathbb{R}(n,n)}$  e  $\mathbf{b} : \tau \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Sia  $A$  indipendente da  $t$ , con  $t_0 \in \mathcal{T}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , l'equazione alle differenze accoppiata con la condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , ha un'unica soluzione dalla formula:

$$x(t) = A_D^{t-t_0} x_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} A_D^{t-s-1} b_D(s)$$

Vediamo ora i casi particolari con le DE lineari omogenee con  $n > 1$ . Quindi

$$x(t+1) = Ax(t)$$

con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  con soluzione  $x(t) = UA_F^t c$ .

Nel caso in cui  $A$  sia diagonalizzabile si ha, chiamando  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  le colonne di  $U$

$$\begin{aligned} x(t) &= U \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \\ &= c_1 \lambda_1^t v^1 + \dots + c_n \lambda_n^t v^n \end{aligned}$$

Quindi si potrebbe dedurre che la soluzione generale sia

$$GS = \left\{ x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^t v^i, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Nel caso ci siano autovalori complessi, allora la soluzione generale (GS) contiene potenze di autovalori complessi coniugati associate ad autovettori complessi coniugati e di conseguenza a coefficienti  $C_i$  complessi.

Ora cerchiamo di comprendere le traiettorie od orbite di un sistema dinamico alle differenze lineare. Iniziamo dai punti di equilibrio.

Data una DE in forma lineare autonoma  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t))$ ,  $\bar{x} \in X$  è un punto di equilibrio dell'equazione se e solo se  $\mathbf{g}(t, \bar{x}) = \bar{x}$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$ . In particolare, se la DE è autonoma i punti di equilibrio sono tutti soli i punti fissi di  $\mathbf{g}$ . Nel caso di  $n=1$ , una volta trovato il punto di equilibrio  $\bar{x}$ , procediamo nel derivare la funzione  $\mathbf{g}$ , e troviamo  $\mathbf{g}'(\bar{x})$  cioè la derivata nel punto di equilibrio. A quel punto nel caso il modulo della derivata nel punto di equilibrio è minore di 1 il punto è stabile; se fosse maggiore di 1 il punto è instabile; nel caso di un valore uguale ad 1 bisogna procedere con un'analisi grafica. Analiticamente:

$$|\mathbf{g}'(\bar{x})| < 1 \quad \text{STABLE + ASYMPTOTICALLY STABLE (S + AS)}$$

$$|\mathbf{g}'(\bar{x})| > 1 \quad \text{UNSTABLE (U)}$$

Nel caso di  $n>1$ , per lo studio delle orbite si fa l'analisi del segno degli autovalori. Prendendo il caso più semplice, con  $n=2$ , autovalori reali semplici.

- $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ . Il vettore di punti di equilibrio in questo caso è stabile ed asintoticamente stabile.
- $|\lambda_1| > 1$  oppure  $|\lambda_2| > 1$ . È un vettore di punti di equilibrio instabile
- $\lambda_1 = 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ . Avremo un vettore di punti di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

### 2.1.3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ODE

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato le equazioni alle differenze, ora analizziamo le equazioni differenziali ovvero le ODE.

Nel caso delle equazioni differenziali l'insieme dei tempi  $\mathcal{T}$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  possibilmente non limitato, quindi parleremo di un sistema dinamico a tempi continui. In questo caso la legge di evoluzione è una relazione che lega il valore  $\mathbf{x}(t)$  della variabile di stato al tempo  $t$  alle sue successive derivate allo stesso istante. Analizzandola in forma generale:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Dove  $F : \mathcal{T} \times X_0 \times X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione assegnata. L'espressione in alto prende il nome di Equazione Differenziale Ordinaria (ODE) di ordine  $k$ , perché coinvolge i valori delle derivate fino all'ordine  $k$ .  $p$  invece è il totale delle equazioni.

Anche nelle ODE prendiamo il caso più semplice, cioè il caso in cui  $p = n$ , scrivendo l'equazione come:

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

per una funzione assegnata  $\mathbf{f}: \mathcal{T} \times X_0 \times X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

Determinate ODE vengono chiamate equazioni differenziali in forma normale. Nel caso l'ODE fosse autonoma,  $F$  (o  $\mathbf{f}$ ) non dipenderà da  $t$ . Altrimenti sarà non autonoma.

Considerando il sistema dinamico del primo ordine in forma normale avremo:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

con la condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in X$ . Anche in questo caso il risultato di questo accoppiamento ci condurrà al Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in X \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Anche per le ODE valgono le stesse caratteristiche principali delle DE.

Con  $n = 1$ , l'ODE del primo ordine è definita in  $\mathcal{T}$  è detta lineare se la funzione è lineare o affine. Analiticamente parlando

$$x'(t) = a_C(t)x(t) + b_C(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

dove  $a_C, b_C: \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni assegnate. Se  $b_C = 0$ , come nelle DE, l'equazione differenziale sarà lineare omogenea. Altrimenti sarà non omogenea.

Considerano  $a_C$  e  $b_C$  due funzioni continue in  $\mathcal{T}$ , fissando ogni  $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}$  esiste sempre un'unica soluzione del problema di Cauchy (CP-ODE)

$$\begin{cases} x'(t) = a_C(t)x(t) + b_C(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

L'unica soluzione in  $\tau = [T_0, T_1] \cap \mathbb{R}$  del CP-ODE è data da

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a_C(s) ds} + \int_{t_0}^t b_C(s) e^{\int_s^t a_C(r) dr} ds$$

Che nel caso omogeneo quindi con  $b_C = 0$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a_C(s) ds}$$

Nel caso in cui  $a_C$  fosse costante

$$x(t) = x_0 e^{a_C(t-t_0)} + \int_{t_0}^t b_C(s) e^{a_C(t-s)} ds$$

Come già osservato nelle equazioni alla differenze, anche nelle ODE la soluzione è data dalla somma di due termini: la soluzione omogenea associata, linearmente dipendente dal dato iniziale; la soluzione della parte non omogenea quando scegliamo come dato iniziale  $t_0 = 0$ .

Analizziamo ora il caso con  $n > 1$ .

Dovremo risolvere l'equazione  $x'(t) = Ax(t)$  con condizione iniziale  $x(0) = x_0$ . La soluzione possiamo scriverla come:

$$x(t) = e^{At} x_0 = U e^{A_F t} U^{-1} x_0 = U e^{A_F t} c$$

Nell'ipotesi in cui  $A$  fosse diagonalizzabile si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v^n \end{aligned}$$

Da cui se ne può dedurre che la soluzione generale sia:

$$GS = \left\{ x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Facciamo lo stesso discorso fatto in precedenza per le DE, cioè che in caso di autovalori complessi semplici, la soluzione generale conterrebbe esponenziali di autovalori complessi coniugati associati ad autovettori complessi coniugati, quindi con coefficienti  $c_i$  complessi. Si riscrivono usando come base la parte reale ed immaginaria degli autovettori.

Facciamo ora anche qui l'analisi delle orbite e dei punti di equilibrio.

Considerando un'equazione differenziale in forma normale  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ ,  $\bar{x} \in X$  è un punto di equilibrio della ODE se e soltanto se  $\mathbf{f}(t, \bar{x}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ . In particolare, nel caso in cui la ODE fosse autonoma, i punti di equilibrio sono tutti e soli gli zeri di  $\mathbf{f}$ . Nel caso di  $n=1$ , trovato il punto di equilibrio  $\bar{x} \in X$  ne studiamo la stabilità. Procediamo nel derivare la funzione  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ . Dopo di che sostituiamo il punto di equilibrio  $\bar{x}$  trovato in precedenza. Se il valore finale ottenuto sarà maggiore di zero, il punto di equilibrio sarà instabile; se sarà minore di zero sarà stabile; altrimenti se sarà uguale a zero bisognerà continuare l'analisi per via grafica. Analiticamente

$f'(\bar{x}) < 0$                       STABLE + ASYMPTOTICALLY STABLE (S + AS)

$f'(\bar{x}) > 0$                       UNSTABLE (U)

Nel caso di  $n>1$ , per lo studio delle orbite si fa l'analisi del segno degli autovalori. Prendendo il caso più semplice, con  $n=2$ , autovalori reali semplici.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Nel caso in cui  $\lambda \neq 0$ , l'origine si dice nodo a stella. Se  $\lambda > 0$ , sarà instabile, altrimenti sarà stabile.
- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ . L'origine si chiama nodo proprio e sarà instabile.
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Anche qui avremo un nodo proprio però stabile.
- $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ . L'origine si chiama sella o colle e sarà instabile.
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ . Retta di punti di equilibrio ( $X_0$ ). Punti che saranno instabili nel caso in cui  $\lambda_2 > 0$ , altrimenti saranno stabili.

## 2.2 PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

Il concetto di ottimizzazione in matematica riguarda la selezione di un elemento migliore, rispetto ad un criterio, da un insieme di alternative disponibili. Ad esempio un problema di ottimizzazione consiste nel massimizzare o minimizzare una funzione reale selezionando determinate variabili di input all'interno dell'insieme consentito, cioè all'interno del dominio. Nella pratica l'ottimizzazione è la ricerca dei valori migliori disponibili di alcune funzioni obiettivo dato un dominio definito, compresa una varietà di diversi tipi di funzioni obiettivo e diversi tipi di domini. Nello specifico:

Data una funzione  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ , dove  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'ottimizzazione consente di trovare gli eventuali punti estremali locali e globali e i relativi valori estremali. I possibili punti candidati sono gli stessi visti per le funzioni ad una variabile:

- 1- Max globale
- 2- Min globale
- 3- Max locale
- 4- Min locale

Andiamo ora ad analizzare diversi casi.

Considerando  $A$  il dominio di una funzione a più variabili. Nel caso in cui esso sia aperto, si avrà un problema di estremi liberi, o al massimo interni. Qualora invece  $A$  non sia aperto, ad esempio definito da alcuni vincoli di uguaglianza o disequaglianza (quindi più piccolo del campo di esistenza), si avranno problemi di estremi vincolati. In quest'ultimo caso, per la ricerca dei massimi e dei minimi occorrono tecniche diverse da quelle usate per i punti in un dominio aperto.

### 2.2.1 ESTREMI LIBERI

Quando ci riferiamo agli estremi liberi richiamiamo il teorema di Fermat “Data una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  che ammette un punto di minimo o di massimo relativo  $x_0 \in A$ ,  $x_0$  interno ad  $A$ , ed è differenziabile in  $x_0$ , allora  $\nabla f(x_0) = 0$ .” I punti di  $A$  (interni) in cui  $\nabla f(x_0) = 0$  si dicono punti stazionari per  $f$ .

Quindi, con  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in A$  si dice:

- di massimo globale per  $f$  se  $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in A$
- di minimo globale per  $f$  se  $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in A$
- di massimo locale se  $\exists$  un intorno di  $\bar{x}$  in  $A$  tale che  $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x$  in tale intorno.
- di minimo locale se  $\exists$  un intorno di  $\bar{x}$  in  $A$  tale che  $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x$  in tale intorno.

Con il teorema di Fermat sappiamo che gli unici punti interni candidati ad essere punti di massimo o di minimo sono quelli che annullano la derivata. Tali punti sono chiamati punti stazionari. In caso di dominio chiuso, non troveremo i punti della frontiera ed i punti di non derivabilità. Tornando al teorema di Fermat notiamo che esso ci fornisce le condizioni necessarie per trovare i punti critici, ma non sufficienti per stabilirne la natura, infatti il teorema rientra nelle condizioni di primo ordine. Per determinare se un punto critico è di minimo o di massimo dobbiamo ricorrere alle condizioni di secondo ordine ossia: data  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$  continua su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $x_0 \in \text{int } A$  un punto stazionario e sia  $f \in C^2(I(x_0))$ . Avremo cinque diverse situazioni:

- 1) se la matrice Hessiana è definita positiva nel punto  $x_0 \in \text{int } A$  allora  $x_0$  è un punto di minimo locale.
- 2) se la matrice Hessiana è definita negativa nel punto  $x_0 \in \text{int } A$  allora  $x_0$  è un punto di massimo locale.
- 3) se la matrice Hessiana è semi-definita negativa nel punto  $x_0 \in \text{int } A$  allora  $x_0$  non sarà sicuramente punto di minimo.
- 4) se la matrice Hessiana è semi-definita positiva nel punto  $x_0 \in \text{int } A$  allora  $x_0$  non sarà sicuramente punto di massimo.
- 5) se la matrice Hessiana è indefinita (determinante negativo) allora  $x_0$  è un punto di sella, cioè non è né di massimo né di minimo.

Con le condizioni di secondo ordine però non sempre riusciamo a concludere che un punto critico sia estrema globale, che è quello che ci interessa maggiormente. Vediamo ora qualche possibile metodo che potrebbe darci qualche informazione in più.

- 1) Provare ad utilizzare la definizione di punto di massimo o di minimo globale. Quindi o tramite la soluzione di una disequazione, oppure, nel caso valga il teorema di Weierstrass, confrontano i valori della funzione nei punti candidati.
- 2) Studiare le restrizioni di  $f$  rispetto a delle rette, semirette o segmenti. Con questo metodo si riesce a far vedere che un eventuale punto candidato non è punto estrema globale
- 3) Usando la convessità o concavità. Analizziamo al dettaglio questo metodo.  
 In caso di convessità: sia  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$  convessa su  $A$  convesso e sia  $x_0$  punto stazionario. Allora  $x_0$  è punto di minimo globale su  $A$ .  
 In caso di concavità: sia  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$  concava su  $A$  convesso e sia  $x_0$  punto stazionario. Allora  $x_0$  è punto di massimo globale su  $A$ .  
 In caso di concavità/convessità stretta, il punto di massimo/minimo se esiste sarà unico.  
 Per determinare la convessità/concavità di una funzione dobbiamo procedere in questa maniera: sia  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e convesso e sia  $f \in C^2(A)$  allora:
  - o  $f$  è convessa su  $A$  se e soltanto se la matrice Hessiana è semi-definita positiva  $\forall x \in A$ ,
  - o  $f$  è concava su  $A$  se e soltanto se la matrice Hessiana è semi-definita negativa  $\forall x \in A$ ,
 Inoltre nel caso in cui  $f$  sia concava/convessa su un insieme  $A$  concavo/convesso e continua su  $B = A \cup \text{frontiera di } A$  allora essa sarà concava/convessa in  $B$ .

### 2.2.2 ESTREMI VINCOLATI

Nella ricerca dei punti di massimo o di minimo vincolati si studia l'ottimizzazione di una funzione  $f$ , chiamata funzione obiettivo, di più variabili ristretta all'insieme degli zeri di altre funzioni, come ad esempio  $g$  e/o  $h$ , chiamate funzioni vincolari o semplicemente vincoli.

Siano  $f, g \in C^1(A)$ , con  $A$  inteso come sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

Ponendo  $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$ , questo insieme è chiamato vincolo.

Un punto  $(x_0, y_0) \in E_0$ :

- è un punto di massimo assoluto o globale vincolato di  $f$  rispetto al vincolo  $E_0$  se  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in E_0$ ;
- è un punto di massimo relativo o locale vincolato di  $f$  rispetto al vincolo  $E_0$  se  $\exists$  un intorno di  $I_r(x_0, y_0)$  tale che  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in E_0 \cap I_r(x_0, y_0)$ .

La forma generale dei problemi di ottimizzazione vincolata è la seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} \min/\max f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \\ h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{array} \right.$$

Qualora in un punto  $x_0$  si ha  $g_i(x_0) = 0$ , allora si dirà che il vincolo di disuguaglianza  $g_i$  è attivo in  $x_0$ . Anche in questo caso abbiamo le condizioni del primo (necessarie) e del secondo (sufficienti) ordine.

Come negli estremi liberi, anche in quelli vincolati le condizioni del primo ordine servono ad individuare l'insieme dei punti candidati, che poi attraverso le condizioni del secondo ordine (ed altri metodi che poi vedremo) verrà stabilita la loro natura.

Iniziamo con le condizioni del primo ordine. Utilizziamo un teorema analogo al teorema di Fermat, il teorema di Lagrange, con qualche complessità in più.

Siano  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g}: A_I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  definiamo l'insieme  $B \subseteq A \cap A_I$  come  $B = \{x \in A_I \cap A : \mathbf{g}(x) = 0\}$ . Sia  $x_0$  un punto estremale locale per  $f$  sull'insieme  $B$ , supponendo che  $f, g$  siano  $C^1$  in  $x_0$  e che il rango della matrice Hessiana di  $g$  nel punto  $x_0$  sia uguale a  $p$ . Allora esisterà un vettore  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  tale che  $x_0$  e  $\lambda_0$  risolvono il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(x) = 0 \\ g_j(x) = 0 \quad \forall j \end{array} \right.$$

Nel caso in cui una coppia  $(x_0, \lambda_0)$  risolva il sistema sovrastante, allora il punto  $x_0$  si chiamerà punto critico vincolato di  $f$  su  $B$ , mentre le componenti di  $\lambda$  si dicono moltiplicatori di Lagrange associati a  $x$ .

Vediamo ora il caso più semplice, con una funzione obiettivo  $f$  ed un vincolo  $g$  a due variabili,  $x$  e  $y$ .

Siano  $f, g$  di classe  $C^1(A)$  dove  $A$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

Sia il punto  $(x_0, y_0)$  un punto di estremo relativo vincolato di  $f$  rispetto al vincolo  $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$  e  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ . Di conseguenza  $(x_0, y_0)$  sarà un punto stazionario vincolato, cioè esiste un numero  $\lambda_0$  tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Più in generale, per ogni punto di estremo relativo vincolato  $(x_0, y_0)$  in cui  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$  esiste un numero reale  $\lambda_0$  tale che  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Introducendo la funzione lagrangiana del problema, si può scrivere il sistema in maniera più semplificata

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Scrivendo la forma compatta a sistema:

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

L'ipotesi che la matrice Hessiana abbia rango uguale a  $p$  si prende il nome di qualificazione dei vincoli non degenera (QVND).

Il metodo descritto prima utilizza il teorema di Lagrange per i problemi di ottimizzazione vincolata nel caso di vincoli di uguaglianza. Andiamo ora ad analizzare il caso in cui il vincolo sia sottoposto in forma di disuguaglianza.

Siano rispettivamente la funzione obiettivo ed il vincolo  $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g}: A_I \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  definiamo l'insieme  $B \subseteq A \cap A_I$  come  $B = \{x \in A_I \cap A : \mathbf{g}(x) = 0\}$ . Sia  $x_0$  un punto estremo locale per  $f$  sull'insieme  $B$ , supponendo che:

- $f, g$  siano  $C^1$  in  $x_0$ ;
- tutte le componenti  $\mathbf{g}_i$  tali che  $\mathbf{g}_i(x_0) = 0$  siano  $C^1$  in  $x_0$ ;
- sia  $\bar{\mathbf{g}}$  la funzione formata da tutte e sole le componenti di  $\mathbf{g}$  che si annullano in  $x_0$  e sia  $m_I \leq m$  il numero di tali componenti. Assumiamo inoltre che il rango della matrice Hessiana di  $\bar{\mathbf{g}}$  nel punto  $x_0$  sia uguale ad  $m_I$ .

Verificate queste condizioni esisterà un vettore  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  tale che  $x_0$  e  $\lambda_0$  risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(x) = 0 \\ \lambda_j g_j(x) = 0 \quad \forall j \\ g_j(x) \leq 0 \quad \forall j \end{cases}$$

Quindi, per la ricerca dei punti critici, si utilizzano le condizioni di primo ordine. Queste condizioni, come abbiamo già detto in precedenza non ci permettono di classificare i punti trovati, quindi sono condizioni necessarie ma non sufficienti. Per comprendere la natura di un punto critico possiamo ricorrere ad alcuni metodi come ad esempio le condizioni di secondo ordine. Le condizioni del secondo ordine ipotizzano  $f$  una funzione di classe  $C^1(A)$  in un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $x_0 \in A$  un punto critico di  $f$ , tale che  $\nabla f(x_0) = 0$ , se la matrice Hessiana di  $\nabla f$  nel punto  $x_0$ :

- è definita positiva, allora  $x_0$  è un punto di minimo locale;
- è definita negativa, allora  $x_0$  è un punto di massimo locale;
- è indefinita allora  $x_0$  non è né un punto di minimo né un punto di massimo locale.

Le condizioni del secondo ordine però non sempre bastano per classificare i punti critici. Ci sono altri metodi per lo studio degli estremi vincolati, ora ne vedremo tre:

- 1) Definizione;
- 2) Restrizione;
- 3) Concavità/convessità.

1) *Definizione:*

Per l'utilizzo della definizione si studiano opportune disuguaglianze. E' un metodo semplice da applicare nel caso si utilizzi il teorema di Weierstrass. Inoltre per applicare questo metodo sarebbe opportuno conoscere gli insiemi di livello della funzione obiettivo.

2) *Restrizione:*

Per l'applicazione del metodo della restrizione si avranno due strade percorribili:

- Restrizioni a rette o curve per poter dimostrare che i punti critici non sono punti estremali globali;
- Restrizioni alla frontiera usando le caratteristiche specifiche del problema,

3) *Concavità/convessità:*

La concavità/convessità è spesso utilizzata nelle applicazioni economiche. Per rendere efficiente questo metodo avremo bisogno di determinare sia quando l'insieme vincolo  $B$  è convesso, sia quando la funzione obiettivo  $f$  è concava/convessa.

Per avere l'insieme  $B$  convesso devo avere  $\mathbf{g} : A_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$\mathbf{h} : A_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  con  $A_1$  e  $A_2$  convessi definiamo l'insieme  $B \subseteq A_1 \cap A_2$  come

$$B = \{x \in A_1 \cap A_2 : \mathbf{g}(x) \leq 0, \mathbf{h}(x) = 0\}.$$

Se  $\mathbf{g}_i$  è convessa  $\forall i=1, 2, \dots, m$  e  $\mathbf{h}_j$  è affine  $\forall j=1, 2, \dots, p$  allora  $B$  sarà convesso.

Per dimostrare ciò, si usa una proprietà delle funzioni convesse:

- Se una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  è convessa allora  $\forall c \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \leq c\}$  detto sottolivello di  $f$  è convesso.
- Se una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  è concavo allora  $\forall c \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \geq c\}$  detto sopralivello di  $f$  è concavo.

## ***2.3 DIVERSI STUDI PASSATI PER LA PREVISIONE DELLE CARATTERISTICHE DELLE CRIPTOVALUTE***

In questo capitolo verranno presentati tre articoli in cui si trovano alcune metodologie utilizzati da alcuni autori per fare delle analisi, più o meno accurate, sul forecasting delle criptovalute.

Il primo articolo si incentra nella previsione della volatilità attraverso modelli di correlazione condizionata MGARCH (multivariate GARCH). Il documento nell'introduzione fa una presentazione generale delle criptovalute, in particolare dei bitcoin, concentrandosi in particolar modo nella loro volatilità. Aurelio Fernandez Bariviera verifica la presenza di memoria a lungo termine nelle serie temporali dei rendimenti dei Bitcoin, e su questa base giustifica l'applicazione di modelli di tipo GARCH. Un altro autore di nome Anne Haubo Dyhrberg, usa il metodo del GARCH come punto di partenza per analizzare la volatilità del Bitcoin in relazione all'oro ed al dollaro. Il GARCH multivariato, o MGARCH, permette al modello di testare la sensibilità di Bitcoin rispetto alle variabili dell'ambiente economico e finanziario, migliorandone la robustezza in termini generali. I modelli di correlazione condizionata (CC) sono stati utilizzati da Chan et al. nella variante Costante (CCC), mentre nella variante Dinamica (DCC) è stata applicata da un autore di nome Kyriazis. Come ultima variante abbiamo infine il Varying (VCC) MGARCH che però non è stata ancora testata nelle criptovalute. I modelli CC-MGARCH quindi sono stati sviluppati per permettere di misurare il comportamento della volatilità dei Bitcoin, con una correlazione condizionale costante o dinamica. Nell'articolo viene evidenziato di come l'approccio dinamico sia più adatto di quello costante nel spiegare la varianza.

Nella seconda parte dell'articolo continua l'analisi della volatilità, con una descrizione dettagliata del GARCH(q,m) di Bollerslev, preso come punto di riferimento per le evoluzioni future del modello. In una delle prime applicazioni con successo, Glaser et al. utilizzano il GARCH(1,1) standard per determinare attraverso il volume e ed il prezzo di Bitcoin che è l'obiettivo degli investitori quando effettuano operazioni di cambio tra la loro moneta nazionale e la moneta virtuale. Ardia et al. mostrano che i modelli Markov-switching GARCH, ossia il MS-GARCH, migliorano i risultati del Bitcoin Value-at-Risk. Sebbene però, il modello GARCH(1,1) sia presentato come un punto di riferimento adeguato, lo sviluppo di modelli MGARCH può offrire capacità superiori permettendo l'integrazione della relazione tra la volatilità di varie serie temporali dei Bitcoin. Il terzo capitolo dell'articolo inizia con una raccolta dati su cui fare l'analisi. I dati sono i prezzi giornalieri di Bitcoin estratti dal database Datastream. Il campione utilizzato è collocato nella fascia temporale che va da dicembre 2016 fino alla fine del 2018.

Per costruire il modello GARCH, sono state selezionate le seguenti variabili esogene le quali possono avere una certa relazione causale con il trend del Bitcoin:

- Come riferimento dei mercati finanziari, sono stati selezionati gli **indizi azionari** dello Standard and Poor 500 ed il NIKKEI 225.
- Gli autori Garcia-Jorcano e Benito hanno analizzato la dipendenza di questi indici con i Bitcoin, soffermandosi sui metodi di copertura di questi ultimi. Con degli studi recenti, **le materie prime** come l'oro o i futures sul petrolio greggio (WTI) sono stati introdotti nel modello per le loro qualità comuni come un possibile bene rifugio.
- Dal momento che il Bitcoin è stato inoltre presentato come valuta, come variabile è stata aggiunto **il tasso di cambio** di riferimento USD/EUR.
- A causa dell'utilità di Bitcoin come mezzo di pagamento alternativo, **l'evoluzione del mercato azionario delle multinazionali dei servizi finanziari** Visa e Mastercard è stata inclusa nel modello.
- Variabili relative alle aziende tecnologiche incluse nella catena della blockchain (come KBR o Nvidia).

La tabella sottostante mostra le statistiche descrittive delle variabili selezionate.

*Tabella 2.1: Statistiche variabili*

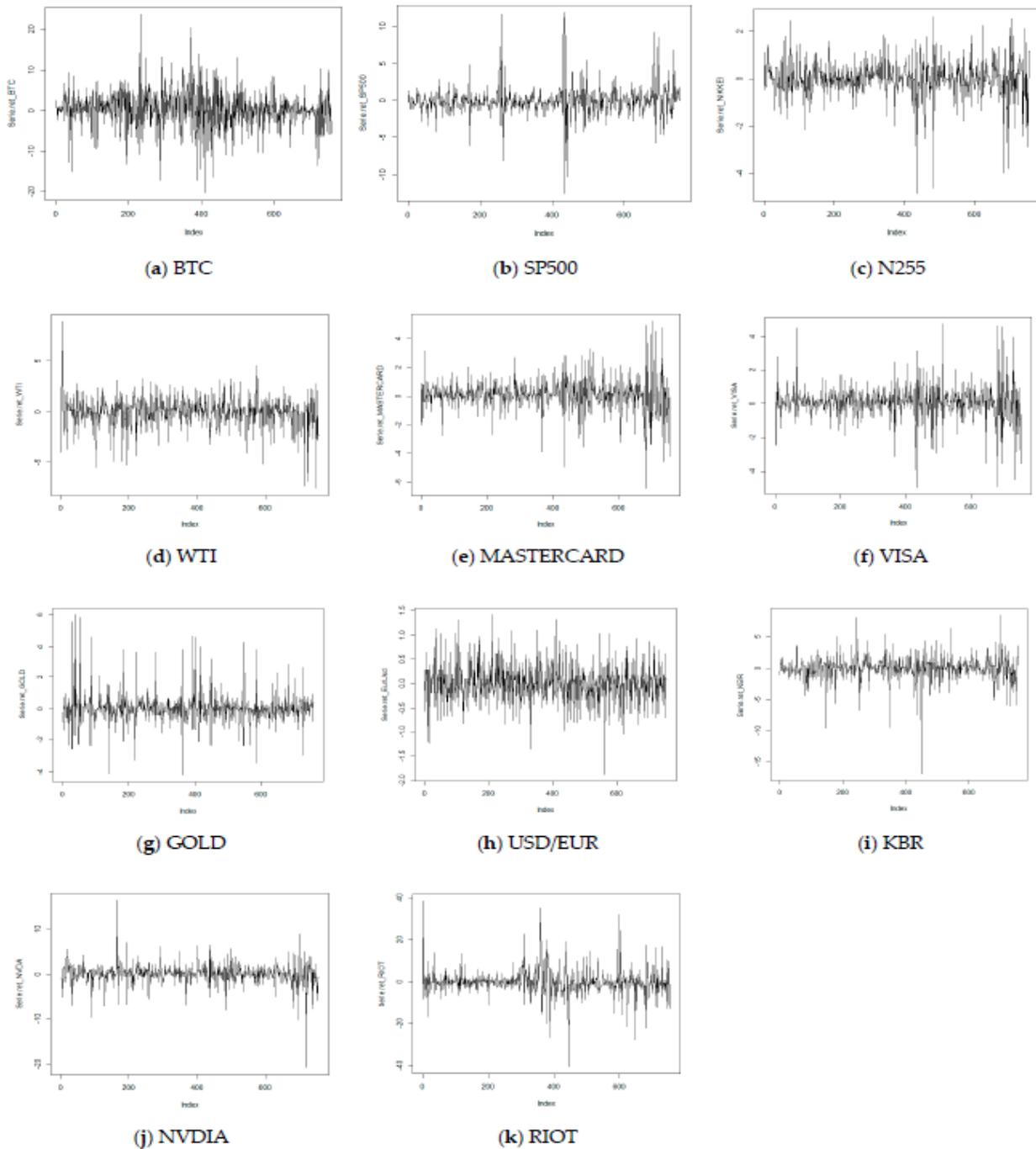
Variable	N	Mean	Std. Dev	Min	Max
BTC	757	55,660.54	3787.380	750.600	19,1870.00
SP500	757	11.623	3.615	7.800	22.120
RIOT	757	6.554	5.889	1.350	38.600
N225	757	21,179.261	1556.405	18,240.500	24,270.620
WTI	757	57.727	8.748	42.530	76.410
GOLD	757	1308.948	550.06	1134.550	1425.900
USD/EUR	757	1.151	0.55	10.39	1.251
KBR	757	17.479	20.52	13.630	21.910
VISA	757	113.281	20.901	75.430	150.790
MAST	757	156.609	36.897	10.180	223.770
NVDA	757	186.919	57.649	87.640	289.360

Nella prima colonna abbiamo le variabili descritte in precedenza. Nelle colonne restanti invece abbiamo:

- N: numero di campione osservato;
- Mean: media giornaliera dei volumi scambiati;
- Std. Dev: deviazione standard giornaliera dei volumi scambiati;
- Min: prezzo minimo nel periodo considerato;
- Max: prezzo massimo nel periodo considerato.

Con i seguenti grafici, si possono notare le volatilità di ogni variabile considerata.

*Figura 2.1: Volatilità delle variabili*



Fonte: *Modeling of the Bitcoin Volatility through Key Financial Environment Variables: An Application of Conditional Correlation MGARCH Models*

Il capitolo continua poi applicando in maniera analitica l'MGARCH sia nel caso del modello costante (CCC-MGARCH) che nel caso del modello dinamico (DCC-MGARCH). I risultati ottenuti hanno mostrato correlazioni bivariate tra i rendimenti dei prezzi di ogni variabile. Vediamo ora la tabella dei risultati

Tabella 2.2: Correlazioni tra i prezzi delle variabili

Correlation	CCC-MGARCH			DCC-MGARCH			VCC-MGARCH		
	Coef.	Std. Error	z	Coef.	Std. Error	z	Coef.	Std. Error	z
BTC-RIOT	0.715586	0.354285	20.2 **	0.61279	0.408964	1.50 *	0.772695	0.386975	20.0 **
BTC-VISA	0.789188	0.362937	2.17 **	0.702872	0.413236	1.70 **	0.809611	0.390046	20.8 **
BTC-MAST	0.63838	0.363874	1.75 *	0.602087	0.412589	1.46	0.65487	0.389324	1.68 *
BTC-NVDA	0.95818	0.364196	2.63 **	0.817696	0.413916	1.98 **	0.1004301	0.389384	2.58 **
BTC-KBR	0.812567	0.364059	2.23 **	0.707863	0.404163	1.75 *	0.814958	0.384864	2.12 **
BTC-SP500	-0.370483	0.365215	-10.1	-0.315056	0.382983	-0.82	-0.405142	0.406624	-1.00
BTC-N225	-0.136106	0.366807	-0.37	-0.105618	0.402157	-0.26	-0.080927	0.391535	-0.21
BTC-GOLD	-0.038485	0.365867	-0.11	-0.165848	0.441296	-0.38	-0.084389	0.410253	-0.21
BTC-WTI	0.298558	0.365755	0.82	0.414276	0.434215	0.95	0.330555	0.416259	0.79
BTC-USD/EUR	-0.1387	0.365587	-0.38	-0.17052	0.432998	-0.39	-0.113251	0.399557	-0.28

Fonte: *Modeling of the Bitcoin Volatility through Key Financial Environment Variables: An Application of Conditional Correlation MGARCH Models*

Come si evince dai dati sovrastanti, in particolare i coefficienti di correlazione tra bitcoin e i diversi asset, si osserva che le società tecnologiche (RIOT, KBR, NVDA) e i metodi di pagamento elettronico (VISA) sono quelli che sembrano essere più legati alle criptovalute. Inoltre, notiamo anche che materie prime (ORO e PETROLIO) presentano una correlazione condizionata poco significativa. Per quanto riguarda invece gli indici dei mercati azionari, essi non sono significativi in nessuno dei modelli MGARCH. Stessa cosa vale per il tasso di cambio. In conclusione, con questo articolo gli autori hanno cercato di spiegare la relazione tra la volatilità di Bitcoin e quelle di diverse variabili finanziarie. Per lo sviluppo dei modelli, lo studio si è concentrato su l'approccio MGARCH a correlazione condizionata (CC-MGARCH). I modelli sviluppati hanno quindi la capacità di prevedere la volatilità di Bitcoin, anche se la regolazione di ognuna variabile finanziaria testata offre risultati estremamente diversi, e soprattutto con significati diversi. L'articolo alla fine fa una riflessione in cui, data la diversità di risultati, lo studio della modellazione di Bitcoin rimane aperto.

Analizziamo ora il secondo articolo. L'intenzione degli autori è quella di voler affiancare un approccio matematico, all'analisi generale del Bitcoin. L'introduzione, come nell'articolo precedente, mostra una panoramica generale tra origini e funzionalità del Bitcoin. Viene messo in evidenza inoltre come la matematica sia una caratteristica della sicurezza del Bitcoin. In altre parole, il protocollo Bitcoin viene considerato come un algoritmo matematico su una rete che gestisce i dati delle transazioni e costruisce il consenso della maggioranza tra i partecipanti. Quindi, nell'ipotesi in cui la maggioranza dei partecipanti siano onesti, allora si otterrebbe un consenso automatico "onesto". La caratteristica principale del Bitcoin è la decentralizzazione, come abbiamo detto nel primo capitolo, e ciò significa che nessuna organizzazione o autorità centrale è responsabile di eventuali anomalie. I nodi della rete sono partecipanti volontari i quali godono di eguali diritti e doveri. La rete è aperta di conseguenza chiunque vi può partecipare. Il codice utilizzato per i Bitcoin è stato riutilizzato e modificato per la creazione di altre criptovalute basate sugli stessi principi, con magari diverse funzionalità. L'unica concezione di sicurezza collegabile alle criptovalute è l'alta crittografia. L'articolo nei capitoli successivi si sofferma sull'applicazione della matematica in determinati strumenti crittografici. Come detto nel primo capitolo, ci sono molti disincentivi ad aggirare e violare le regole nel network delle criptovalute. Nell'elaborato preso in considerazione la rete dei Bitcoin viene considerata come un complesso sistema dinamico, tutt'altro che stabile. L'associazione deriva dal fatto che Nakamoto considera nel suo articolo fondatore la stima della probabilità di una "doppia spesa" (per la sicurezza, assente data l'assenza di un'autorità, e per il mining dei Bitcoin). Nei capitoli successivi l'articolo dimostra matematicamente la stabilità del mining. Consideriamo un minatore come un valore  $p$  tale che  $0 < p < 1$  del totale dell'hashrate (la potenza di elaborazione della rete Bitcoin). È importante inoltre conoscere la probabilità di successo durante l'estrazione di un blocco. Il numero medio di blocchi per unità di tempo che si riesce ad estrarre è proporzionale al suo hashrate  $p$ . L'intera rete impiega in media  $\tau_0 = 10 \text{ min}$  per convalidare un blocco, quindi il minatore impiega in media  $t_0 = \frac{\tau_0}{p}$ . Consideriamo la variabile casuale del tempo  $T$  di estrazione tra un blocco e l'altro. Se il minatore inizia ad estrarre a  $t = 0$  e denotiamo  $T_1$  il tempo necessario per estrarre il primo blocco,  $T_2$  per il secondo, ...,  $T_n$  per i blocchi successivi, il tempo per estrarre  $n$  blocchi è  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ . La variabile casuale  $S_n$  segue la  $n$ -convoluzione della distribuzione esponenziale e, questo ci dà la distribuzione Gamma con parametri  $(n, \alpha)$  con  $\alpha = 1/t_0$

$$f_{S_n}(t) = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t}$$

Con la distribuzione cumulata

$$F_{S_n}(t) = \int_0^t f_{S_n}(u) du = 1 - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

Con ciò si conclude che se  $N(t)$  è il processo che conta il numero di blocchi convalidati al tempo  $t > 0$ ,  $N(t) = \max\{n \geq 0; S_n < t\}$ , quindi avremo

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = F_{S_n}(t) - F_{S_{n-1}}(t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}$$

ed  $N(t)$  segue una legge di Poisson con valore medio  $\alpha t$ . Questo risultato ci fa concludere che Bitcoin ed altre criptovalute basate sulla tecnologia Proof-of-work seguono una distribuzione di Poisson.

L'articolo prosegue nell'analizzare matematicamente la stabilità del protocollo. In situazioni normali il mining si regola ogni due settimane. Ipotizziamo che la difficoltà e la velocità con cui si scopre un blocco sia costante, ed il processo di conteggio  $N(t)$  sia un processo di Poisson con intensità  $\alpha = \frac{p}{\tau_0}$ . La durata del ciclo

$\tau$  è un tempo di arresto, ed il ricavo per ciclo è uguale a  $\mathbf{R} = N(\tau)$ . Il suo valore medio è poi ottenuto usando il tempo di arresto per la martingala  $N(t) - \alpha t$ . Il problema è che il protocollo Bitcoin non ha velocità costante nell'estrazione dei blocchi, quindi ha bisogno di un algoritmo di regolazione della difficoltà, in particolare durante la fase di sviluppo.

Ora, considerando  $\mathbf{N}$  ed  $\mathbf{N}'$  due processi di Poisson indipendenti con i rispettivi parametri  $\alpha$  e  $\alpha'$  con  $\alpha' < \alpha$  e  $\mathbf{N}(0) = \mathbf{N}'(0) = 0$ . Il tempo di arresto

$\sigma = \inf\{t > 0; \mathbf{N}(t) = \mathbf{N}'(t) + 1\}$  è quasi certamente finito ed i rispettivi valori attesi:

$$E[\sigma] = \frac{1}{\alpha - \alpha'}, \quad E[N'(\sigma)] = \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad E[N(\sigma)] = \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'}.$$

Per concludere, bisogna calcolare le intensità  $\alpha$  e  $\alpha'$ . All'inizio avremo  $\alpha = \alpha_0 = \frac{p}{\tau_0}$  e  $\alpha' = \alpha'_0 = \frac{q}{\tau_0}$  dove  $q$  è la porzione di hashrate del minatore "disonesto".

Ma l'esistenza di quest'ultimo crea disturbo al network e rallenta la produzione di blocchi. Invece di avere un blocco per ogni periodo  $\tau_0$ , la progressione della blockchain è di  $E[N(\tau)VN'(\tau)]$  blocchi durante  $E[\tau]$ . Una validazione dei blocchi del 2016, ha innescato una difficoltà di adattamento importante. La nuova difficoltà è ottenuta dalla vecchia difficoltà moltiplicata per un fattore  $\delta < 1$ .  $\delta$  è data da:

$$\delta = \frac{E[N(\tau)VN'(\tau)]\tau_0}{E[\tau]}$$

Successivamente a questo adattamento, i nuovi parametri per il mining sono diventati  $\alpha = \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{\tau_0}$  e  $\alpha' = \alpha'_1 = \frac{\alpha'_0}{\tau_0}$ . Il tempo di arresto  $\tau$  ed il parametro  $\delta$  possono essere computate attraverso la relazione  $|N(t) - N'(t)| = 1$ .

Una procedura alternativa consiste nel modellare la rete da una catena di Markov dove gli stati differenti corrispondono a diverso grado di progresso del minatore "egoista". Ogni transizione corrisponde ad un aumento delle entrate  $\pi$  e  $\pi'$  rispettivamente per il minatore "onesto" e per il minatore "egoista". Con un'applicazione basata sulla legge dei grandi numeri dimostriamo che l'hashrate appartenente alla strategia di lungo termine, definita come la proporzione di blocchi estratti dal miner egoista rispetto al numero totale di blocchi, avremo la seguente formula:

$$q' = \frac{E[\pi']}{E[\pi] + E[\pi']}$$

Il valore atteso è considerato rispetto alla probabilità stazionaria che esista dato che la catena di Markov è transitiva e ricorrente. Infatti, la catena di Markov, è essenzialmente un random walk, ossia con un trend praticamente imprevedibile, su  $\mathbb{N}$ .

Tornando ora al concetto di "doppia spesa", ora vedremo il calcolo della probabilità di successo di quest'ultima. La formula che richiama a questo concetto è:

$$P_A(z) = \frac{P(z) - \lambda^A}{1 - \lambda^A}$$

In cui  $z$  è il numero di conferme richieste dal destinatario della transazione dei Bitcoin,  $A$  sono i blocchi ufficiali della blockchain tale che  $A \geq z$ , ed infine  $\lambda$  è dato da  $q/p$ .

Nelle conclusioni dell'articolo viene affermato che l'analisi del Bitcoin fornisce un esempio adeguato a livello accademico per le applicazioni matematiche e per il suo potenziale impatto nella società odierna.

Il terzo ed ultimo articolo verrà trattato nel capitolo successivo, dato che, i modelli descritti dagli autori, verranno applicati, con qualche aggiustamento, per la comprensione, iniziale, del trend dei Bitcoin, successivamente per le altre criptovalute.

## CAPITOLO 3: ANALISI DI UN MODELLO MATEMATICO PER LA DINAMICA DEL PREZZO

In questo capitolo verrà analizzato un ulteriore articolo su cui verrà basata la nostra sperimentazione. Dopo di che, utilizzando matlab, verrà applicato un modello descritto nell'articolo per lo studio del Bitcoin, inizialmente, e di altre criptovalute successivamente.

### 3.1 MODELLO ANALIZZATO PER LA FASE SPERIMENTALE

L'articolo preso in considerazione mira ad associare il trend delle caratteristiche principali del bitcoin ad un sistema dinamico, in particolare ad un sistema a cinque equazioni differenziali. Nell'introduzione viene descritta la tecnologia del blockchain insieme al processo di mining. Una particolare attenzione viene dedicata ai rischi della detenzione di criptovalute, rischi già descritti nel capitolo uno. Proprio riguardo a questi rischi, l'articolo effettua uno studio approfondito per la comprensione del trend delle variabili principali delle criptovalute, facendo particolare attenzione alla volatilità. Il primo capitolo si incentra nella modellazione dei prezzi e nella stabilità. Viene preso in considerazione l'equazione su cui si basa il modello di pricing delle opzioni di Black-Scholes

$$\frac{1}{P}dP = \mu dt + \sigma dW \quad (1)$$

per la variazione del prezzo relativo  $\frac{1}{P}dP$  in termini di rendimento atteso  $\mu$ ; la deviazione standard del rendimento  $\sigma$ ; e l'incremento indipendente del moto Browniano  $dW$ . È risaputo che questa equazione non deriva da considerazioni microeconomiche convincenti, né tanto meno da dati empirici. Gran parte della valutazione del rischio si basa su questo modello con una serie crescente di aggiustamenti. Ovviamente riscontreremo dei limiti, come ad esempio prendendo in considerazione la deviazione standard delle variazioni giornaliere nell'indice Standard and Poor's, la quale è tipicamente dello 0.75%, ci fa concludere che un calo del 4.5% è un evento sei volte maggiore della deviazione standard tipica. Nella teoria, la probabilità che ciò accada è una su un miliardo, mentre dati empirici ci mostrano che accade  $n$  volte su mille. Di conseguenza identificare il rischio su una grande scala temporale basandosi sulla varianza a piccola scala temporale potrebbe sottostimare il rischio. Inoltre la modellazione del pricing delle attività è generalmente basata sull'assunzione di base di arbitraggio infinito. Ciò non è corretto dato che ci possono essere alcuni investitori che sono inclini ad errori cognitivi o bias nella valutazione del valore. La questione principale ora sta nell'applicare la teoria classica del pricing alle criptovalute. La criptovalute, come espresso nell'articolo, costituiscono l'estremità opposta del mercato rispetto ad esempio ai buoni del tesoro, con cui

un'arbitraggista si copre acquistandolo o vendendolo allo scoperto sulla base della fiducia di un contratto chiaro predeterminato.

Nel secondo capitolo gli autori cercano di effettuare un modeling delle criptovalute attraverso equazioni asset flow. Iniziamo col distinguere le varie variabili con cui verranno fatte le analisi. Si ha  $P(t)$  con cui si indica il prezzo di scambio,  $N(t)$  il numero di unità,  $M(t)$  la quantità di denaro disponibile, ed il prezzo di liquidità  $L(t) = M(t)/N(t)$ . Con  $B$  indichiamo invece la ricchezza frazionata delle criptovalute, cioè  $B = NP/(NP+M)$ , mentre l'offerta e la domanda sono date rispettivamente da  $S = (1-k)B$ ,  $D = k(1-B)$ , dove  $k$  rappresenta il tasso di transizione dal denaro agli asset. Utilizzando la formula standard per il pricing, scriveremo:

$$\tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \quad (2)$$

Considerando l'uguaglianza  $B(1-B)^{-1} = \frac{NP}{M} = \frac{P}{L}$ , quindi l'equazione (2) diventerà:

$$\tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{k}{1-k} \frac{L}{P} - 1 \quad (3)$$

La variabile  $k$  è assunta essere una linearizzazione di una funzione di tipo than e coinvolge le motivazioni dei trader che si esprimono attraverso la variabile

$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$  dove  $\mathfrak{Z}_1$  e  $\mathfrak{Z}_2$  sono rispettivamente la componente del trend e la componente del valore. Questa formula è stata studiata per esempio per i fondi chiusi che spesso vengono scambiati scontati o con un premio relativo al loro valore patrimoniale netto. Riscrivendo ora  $k/(1-k)$  in termini di  $\mathfrak{Z}_1$  e  $\mathfrak{Z}_2$  avremo la seguente equazione lineare:

$$\frac{k}{1-k} = 1 + 2\mathfrak{Z}_1 + 2\mathfrak{Z}_2 \quad (4)$$

e l'equazione del pricing diventerà

$$\tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (1 + 2\mathfrak{Z}_1 + 2\mathfrak{Z}_2) \frac{L}{P} - 1 \quad (5)$$

Gli autori definiscono ora  $\mathfrak{Z}_1$  attraverso due parametri:

- $c_1$ : parametro che esprime l'orizzonte temporale del trend
- $q_1$ : l'ampiezza di  $\mathfrak{Z}_1$

Scriviamo quindi  $\mathfrak{Z}_1$  come:

$$\mathfrak{Z}_1(t) = \frac{q_1}{c_1} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-r}{c_1}} \frac{1}{P(\tau)} \tau_0 \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (6)$$

Si noti che  $L$  e  $\mathfrak{Z}_1$  sono funzioni lineari l'una dell'altra, ma è opportuno ritenere che  $L$  è più facilmente generalizzabile per incorporare un  $L_0$  dipendente dal tempo. La valutazione è un po' più complessa per le criptovalute. L'unico concetto del valore si riferisce ai prezzi di scambio più recenti. Considerando che il primo acquisto con Bitcoin fu una pizza per circa 10.000 Bitcoin, la valutazione del valore di quel periodo era assai differente rispetto a quello del 2018. Stipulando le definizioni:

$$P_a(t) = \frac{1}{c_3} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-r}{c_3}} P(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$\mathfrak{Z}_2(t) = \frac{q_2}{c_2} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-r}{c_2}} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P(\tau)} d\tau \quad (8)$$

cioè  $\mathfrak{Z}_2$  rappresenta la motivazione nel comprare basata sullo sconto del valore percepito della criptovaluta stessa. In ultimo, la liquidità non sarà costante ma, ma sarà data dalla somma tra il capitale iniziale  $L_0$  e gli ammontari addizionali degli speculatori correlati col trend recente:

$$L(t) = L_0 + \frac{L_0}{c} q \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-r}{c}} \frac{\tau_0}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (9)$$

Ora viene assunto che  $L_0$  sia costante, ma si potrebbe facilmente adattare il modello per includere cambiamenti nel tempo in  $L_0$  dovuti, per esempio ad una maggiore accettazione tra gli investitori delle criptovalute. Differenziando le equazioni analizzate finora, possiamo combinarle ed ottenere un sistema di cinque equazioni:

$$c_3 P'_a = P - P_a$$

$$c_2 \mathfrak{Z}'_2 = q_2 \frac{P_a(t) - P(t)}{P_a(t)} - \mathfrak{Z}_2$$

$$\tau_0 P' = (1 + 2\mathfrak{Z}_1 + 2\mathfrak{Z}_2)L - P \quad (11)$$

$$cL' = 1 - L + q\{(1 + 2\mathfrak{Z}_1 + 2\mathfrak{Z}_2)L - P\}$$

$$c_1 \mathfrak{Z}'_1 = q_1 \left( (1 + 2\mathfrak{Z}_1 + 2\mathfrak{Z}_2) \frac{L}{P} - 1 \right) - \mathfrak{Z}_1$$

Gli autori trovano un unico punto di equilibrio nel punto

$$(P, P_a, L, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = (1.1.1.0.0).$$

In pratica, l'unica situazione di stabilità si verifica quando il prezzo, la concezione del valore, ed il prezzo della liquidità coincidono tutti con il valore base della liquidità  $L_0$ . La scala temporale per l'aggiustamento del prezzo sarà breve dato che i mercati si adattano rapidamente alle variazioni della domanda e dell'offerta. Decisamente più lunga sarà la scala temporale per osservare la tendenza e reagire alla sottovalutazione o alla sopravvalutazione, ed alla valutazione attraverso le medie ponderate dei prezzi. Ci si potrebbe aspettare poi che la valutazione sia in una scala temporale ancora più lunga. Considerando quindi tre scale temporale si pone che  $\tau_0 \ll c, c_1, c_2 \ll c_3$ , in cui si potrebbero considerare  $c = c_1 = c_2 = 1$  e scegliere arbitrariamente i valori di  $\tau_0$  e  $c_3$  rispettando la disuguaglianza posta. Dettate determinate condizioni possiamo scrivere il sistema nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \tau_0 P' \\ c_3 P'_a \\ L' \\ \mathfrak{Z}'_1 \\ \mathfrak{Z}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & q-1 & 2q & 2q \\ -q_1 & 0 & q_1 & 2q_1-1 & 2q_1 \\ -q_2 & q_2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ P_a \\ L \\ \mathfrak{Z}_1 \\ \mathfrak{Z}_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Così facendo, avremo un sistema determinato da tre parametri:

- $q$ : l'attenzione al trend;
- $q_1$ : la misura dell'influenza dei tempi di ritardo;
- $q_2$ : l'influenza dei valori fondamentali considerando i parametri  $\tau_0$  e  $c_3$ .

Per la questione della stabilità, l'articolo afferma che può essere analizzata calcolando gli autovalori nello spazio dei parametri rilevanti, cioè

$(q, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3_+$ , insieme a  $\tau_0$  e  $c_3$ . In particolare, la questione principale è che se la parte reale di almeno un autovalore è positiva, si avrà un'instabilità, altrimenti, nel caso in cui tutti gli autovalori fossero negativi, si otterrà una stabilità. Possiamo notare che nel sistema compare un autovalore  $\lambda = -1$  con molteplicità algebrica uguale a 2, mentre gli altri tre autovalori sono negativi. Detto ciò, se le condizioni di Routh-Hurwitz sono soddisfatte si otterranno le seguenti disequazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{c_3} + Q &> 0 \\ \left(\frac{Q}{c_3} + \frac{1}{\tau_0} + 2\frac{q_2}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_0 c_3}\right) \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{c_3} + Q\right) &> \frac{1}{\tau_0 c_3} \end{aligned} \quad (13)$$

in cui gli autori hanno posto la condizione  $Q = 1 - q - 2q_1$ . Con questa condizione le disequazioni sovrastanti possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_3} + \frac{1}{\tau_0} &> q + 2q_1 =: K \\ \frac{1}{c_3} + \frac{1}{\tau_0} &> \frac{K}{c_3} - 2\frac{q_2}{\tau_0} \end{aligned} \quad (14)$$

Inoltre, nel caso in cui  $q_2 = 0$ , si otterrebbe una semplificazione delle condizioni:

$$\frac{1}{c_3} + \frac{1}{\tau_0} > K \quad (15)$$

Quindi in conclusione, per la stabilità si avrà un modello più semplice con l'esclusione della componente psicologica degli investitori.

Nel paragrafo successivo, verranno applicate determinate teorie per riuscire ad avere una previsione del trend quanto più dettagliata delle caratteristiche principali del Bitcoin.

### 3.2 CONFRONTO DEL MODELLO CON I DATI REALI

Per lo studio del confronto tra il modello deterministico ed i dati reali, bisogna si effettua la minimizzazione della funzione dei parametri data dalla sommatoria dei quadrati delle differenze tra il prezzo osservato nei dati storici ed il prezzo prodotto dal modello analizzato nel paragrafo precedente. Analiticamente parlando, per ottenere la stima dei parametri, si parte considerando il sistema (11) come:

$$Y'(t) = F(X(t); p) \quad Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

in cui  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definisce la dinamica del sistema,  $p$  è l'insieme dei parametri da stimare. Si procede tenendo conto delle osservazioni  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ , ossia i prezzi osservati, e di  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , ossia delle scadenze dei prezzi. Si calcola la soluzione nei tempi di osservazione dal modello dinamico, risolvendo numericamente con la funzione appropriata per risolvere il sistema di equazioni differenziali. Dopo di che, si andrà a minimizzare la funzione col seguente metodo:

$$\min_{p \in P} \sum_{h=1}^k |X_h - \hat{X}(\tau_{ih}; p)|^2$$

dove  $P$  è l'insieme dei valori ammissibili per ottenere il minimo, e  $\hat{X}(\tau_{ih}; p)$  rappresentano i prezzi prodotti dal sistema dinamico quando i parametri valgono  $p$ . Per avere una stima più precisa, si può pensare inoltre di applicare delle ponderazioni alla funzione di minimizzazione considerando dei valori più "importanti" di altri. Nel caso specifico, le ponderazioni sono state assegnate a seconda del volume di bitcoin scambiati in un giorno, quindi più il volume è alto più la ponderazione diventa rilevante.

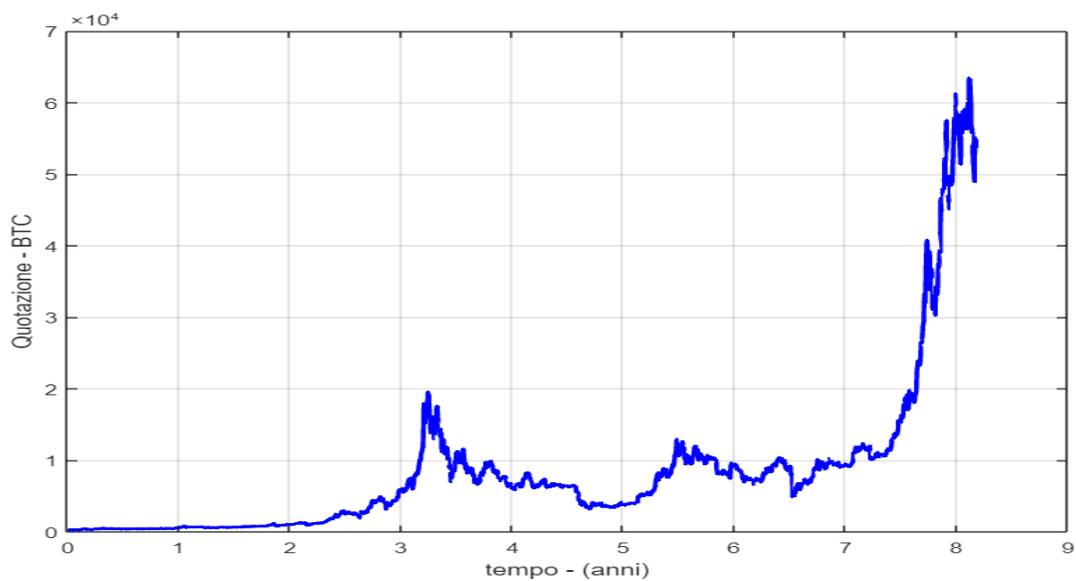
Per fare ciò è stato effettuato utilizzando un software di programmazione: MatLab. MatLab è un programma utilizzato per il calcolo numerico e l'analisi statistica. Esso consente di manipolare matrici e, in particolar modo per questo elaborato, visualizzare funzioni e dati. Per la stesura del codice, consultare l'appendice A alla fine dell'elaborato. L'analisi è iniziata partendo dal sistema dinamico (11). Per l'implementazione del programma, si sono utilizzati i seguenti input:

- $p$ : il vettore con gli otto parametri, ponendo l'attenzione su  $q, q_1, q_2$  i quali dovranno essere stimati per avere una previsione quanto meno realistica;
- $y$ : il vettore con le cinque variabili cui trend verrà osservato al variare nel tempo (con particolare attenzione su sul prezzo  $P$ );
- $t_f$ : l'orizzonte temporale che si vorrà considerare;

- $y_0$ : le condizioni iniziali del sistema dinamico;
- $W$ : le ponderazioni (volume osservato);
- $P_{oss}$ : il vettore contenente i prezzi osservati dai dati storici del Bitcoin, che vanno dal 30 settembre 2015 alla data del 30 aprile 2021;
- $t_{oss}$ : i giorni dei dati storici osservati;

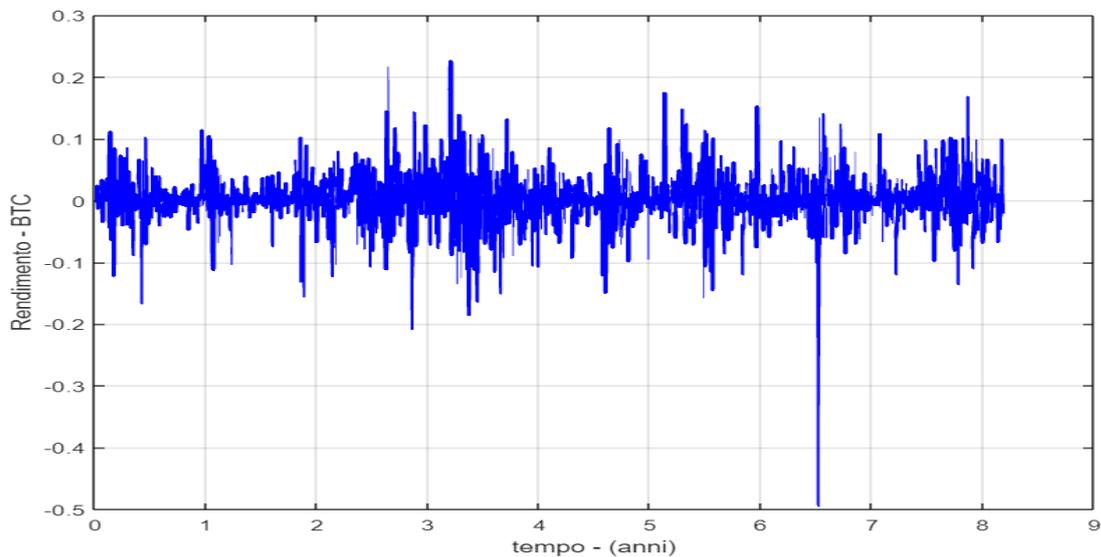
Considerando la frequenza giornaliera dell'osservazione dei dati, si può ottenere il seguente grafico dell'andamento dei prezzi:

*Figura 3.1: trend prezzo Bitcoin*



Ed il seguente grafico dei rendimenti giornalieri

*Figura 3.2: trend dei rendimenti del Bitcoin*



Una volta determinati gli input si è tenuto conto delle condizioni di diversi parametri in particolare:

- $\tau_0 \ll c, c_1, c_2 \ll c_3$ ;
- $c = c_1 = c_2 = 1$ ;
- $q_2 = 0$  così da poter ricorrere alla semplificazione del sistema.

di cui si fissano  $\tau_0 = 0,01$  e  $c_3 = 10$  così da poter rispettare rigorosamente la prima condizione. Possiamo quindi notare che si dovrà effettuare la stima di due parametri, ovvero di  $q$  (l'attenzione al trend) e di  $q_1$  (la misura dell'influenza dei tempi di ritardo). Per quanto riguarda l'output invece si avranno le due variabili  $p_{opt}$  e  $E_{opt}$ . La prima conterrà i valori ottimali per  $q$  e  $q_1$  dato un determinato intervallo della funzione di minimizzazione, mentre la seconda mostrerà un valore tale per cui si potrà definire quanto siano affidabili i valori di  $p_{opt}$  trovati. Per trovare i valori ottimali si è cambiato l'intervallo di volta in volta finché non si è trovato un valore accettabile (cioè più piccolo possibile) in  $E_{opt}$ .

Ora verranno mostrate le prove effettuate con i vari risultati conseguiti. Come prima prova è stato scelto l'orizzonte temporale giornaliero per i primi mille dati, ovvero quelli che vanno dal 30 settembre 2015 al 22 giugno 2018.

Tabella 3.1: Volatilità delle variabili

PROVA n	$E_{opt}$	$q$	$q_1$
1	7,21E+03	6,5669	9,6188
2	7,23E+03	12	11,7376
3	7,07E+03	15	14,2679
4	6,88E+03	18,4089	19,7013
5	6,31E+03	20,0132	25
6	5,45E+03	20,6104	29,8251
7	3,87E+02	25,1995	34,9991
<b>8</b>	<b>3,66E+02</b>	26,9499	31,8076
9	4,83E+02	3,9391	44,9998
10	7,40E+03	0,6318	1,5386

Come possiamo notare sono state effettuate dieci prove differenti, una per ogni differente intervallo della funzione di minimizzazione. Il valore minimo di  $E_{opt}$  è stato trovato nella prova numero 8 (scritta in rosso) di valore 366,0188 con i valori ottimali di  $q$  e  $q_1$  rispettivamente 26,9499 e 31,8076.

Successivamente il test è stato effettuato per i restanti 1046 dati, ossia quelli che vanno dal 23 giugno 2018 al 30 aprile 2021. I valori ottimali di  $q$  e  $q_1$  questa volta sono stati rispettivamente 34,7374 e 0,3212 con un  $E_{opt}$  di 7118,1. Lo stesso test è stato effettuato per trovare i valori ottimali con frequenza settimanale anziché giornaliera, considerando che in un anno ci siano 52 settimane.  $q$  e  $q_1$  trovati sono stati:

- 30 settembre 2015 - 22 giugno 2018: 24,881 e 25 con  $E_{opt} = 5215,6$
- 23 giugno 2018 - 30 aprile 2021: 2,7834 e 0,3947 con  $E_{opt} = 7149,8$

Altre 10 prove sono state effettuate considerando il totale del campione, quindi tutti e 2046 dati. Come fatto precedentemente, sono stati analizzati sia gli scenari giornalieri che quelli settimanali. I valori di  $q$  e  $q_1$  ottenuti sono stati:

- 30 settembre 2015 - 22 giugno 2018: 21,6004 e 39,461 con  $E_{opt} = 363,03$
- 23 giugno 2018 - 30 aprile 2021: 24,881 e 25 con  $E_{opt} = 5215,6$ .

In questo studio notiamo un  $E_{opt}$  troppo elevato per poter usare  $q$  e  $q_1$  ricavati per fare un forecasting adeguato. Di conseguenza è stato analizzato un modello con cui poter estrapolare dei risultati ancora più accurati, come ad esempio il processo stocastico, dato che fino ad ora è stato usato un modello deterministico.

### 3.3 IL PROCESSO STOCASTICO

Il calcolo stocastico viene utilizzato per adattare determinati modelli matematici con il fine di valutare titoli finanziari rischiosi come azioni e opzioni. Considerando  $(\Omega, A, P)$  come uno spazio di probabilità e sia  $\Lambda$  un insieme non vuoto, i cui elementi sono gli istanti i quali vengono presi in considerazione per lo studio del fenomeno evolutivo, con  $\Lambda = [0, +\infty]$  o  $[0, T]$  o un sottoinsieme numerabile di  $\mathbb{R}$  o anche  $\mathbb{N}$ , un processo stocastico è un'applicazione

$$X(t, \cdot): \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n \text{)}$$

tale che per ogni  $t$  fissato appartenente ad  $\Lambda$ , la funzione

$$X(t, \cdot): \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{R}^n \text{)}$$

è una variabile casuale determinata sulla probabilità  $(\Omega, A, P)$ .

Per effettuare dei forecasting in un certo istante  $t$  in un processo stocastico, bisogna avere un quantitativo adeguato di informazioni  $I_t$  al tempo  $t$ , così da poter migliorare l'attendibilità dei valori attesi futuri del processo. Considerando i modelli finanziari si suppone che i prezzi delle azioni siano conosciuti dagli investitori, e che questi ultimi abbiano informazioni correnti e non future. Quindi, quando si studiano processi stocastici, si suppone di avere a disposizione uno schema di informazioni che varia nel trascorrere nel tempo, cioè una famiglia di schemi informativi i quali dipendono da  $t$ . Col trascorrere del tempo, le informazioni a disposizione per fare forecasting su un processo stocastico aumentano, assumendo che le informazioni passate non vengano perdute. Quindi all'aumentare di  $t_i$  aumenterà di conseguenza anche  $I_i$ .

Un ruolo fondamentale nella teoria dei mercati finanziari inoltre lo assume la teoria di Martingale. La teoria di Martingale lo possiamo associare al processo stocastico appena descritto dato che quest'ultimo si comporta come una martingala se le sue traiettorie non mostrano un particolare andamento. Si dice invece che ha il comportamento di una submartingala se mediamente il trend è crescente, o supermartingala se il trend è decrescente.

Analiticamente parlando, un processo stocastico  $X_t$  si definisce martingala rispetto ad una famiglia di strutture informative  $I_t$  se

- 1) è adattato ad  $I_t$ ;
- 2)  $E(|X_t|) < +\infty \quad \forall t \geq 0$ ;
- 3)  $E(X_t | I_t) = X_t$  quasi sicuramente  $\forall t, T$  con  $0 \leq t < T$ .

La martingala ha la particolarità che i valori attesi condizionati per gli incrementi futuri siano uguali a zero cioè:

$$E(X_{t+\delta} - X_t | I_t) = 0$$

Questo perché gli incrementi futuri non sono considerati prevedibili di conseguenza per le martingale non ci possono essere aspettative di tendenze per il futuro.

Ci sono altri processi che hanno ruolo fondamentale nella descrizione dell'andamento dei prezzi dei titoli nella finanza, come ad esempio di processi di Winer. I processi di Winer non considerano però gli eventi rari, come ad esempio un crollo finanziari. Il processo prende nome dal matematico Nobert Winer, il quale ha fornito anche una rappresentazione del moto Browniano. Nella definizione standard del processo di Winer, il processo stocastico  $W_t$  con  $t \geq 0$ , con la famiglia di strutture informative  $I_t$  tale che:

- $W_0 = 0$  quasi certamente;
- $W_t$  è una martingala rispetto a  $I_t$ ;
- $E(W_t^2) < +\infty$ , cioè  $W_t \in L^2(\Omega) \forall t \geq 0$ ;
- $E((W_t - W_s)^2 | I_s) = t - s \quad \forall s \leq t$ ;
- Le traiettorie di  $W_t$  sono continue in  $t$ .

Il processo di Winer ha le seguenti proprietà:

- 1)  $W_t$  è un processo con incrementi futuri imprevedibili (dato che è una martingala);
- 2)  $E(W_t) = 0$ , cioè il processo  $W_t$  ha un valore atteso nullo;
- 3)  $\sigma^2_{W_t} = t$ , ovvero il processo di Winer ha varianza uguale a  $t \forall t \geq 0$ ;

Come detto in precedenza, Winer non considera eventi “anormali” nel forecasting dei prodotti finanziari, quindi per aumentarne l’attendibilità, consideriamo ora il moto browniano.

Questo moto prende nome da Robert Brown, un botanico che scoprì che le particelle di polline immerse in un fluido seguivano un andamento irregolare. Il moto Browniano di base è un processo stocastico  $B_t$  con  $\forall t \geq 0$ . Analizzando anche in questo caso le sue proprietà fondamentali:

- 1)  $B_0 = 0$  quasi certamente;
- 2)  $B_t$  è continuo rispetto a  $t$ ;
- 3)  $B_t$  è un processo con incrementi dipendenti, cioè se  $0 < t_0 < \dots < t_i$ , allora  $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  sono tra loro indipendenti.
- 4) Con  $0 \leq s < t$  gli incrementi  $B_t - B_s$  sono distribuiti in maniera gaussiana con media uguale a 0 e varianza pari a  $t - s$ ;

Un moto Browniano è direttamente correlato a quei processi stocastici che seguono un andamento chiamato *random walk* (o passeggiata casuale simmetrica).

Una passeggiata casuale simmetrica è un processo stocastico definito come

$X: [0, +\infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $X$  è nullo quasi certamente all’istante  $t = 0$ ;
- Ipotizzando di avere il primo istante in  $t = 0$  e gli istanti successivi equamente distanziati tra loro con  $\Delta t$ , al termine di ogni intervallo  $\Delta t$  la variabile casuale  $X$  può subire un aumento o una riduzione di  $h > 0$  con probabilità uguale a  $\frac{1}{2}$ ;
- Considerando  $X_t$  il valore della variabile di  $X$  al tempo  $t$  e ponendo  $\Delta X_i = X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t}$  con  $i = 1, 2, \dots$ , gli incrementi  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots$  sono indipendenti.

Così facendo si dimostra che un moto Browniano si può approssimare in ogni intervallo di tempo finito con delle *random walk*.

Il moto Browniano ha una relazione con il processo di Winer, dato che quest’ultimo è un processo stocastico gaussiano (a tempo continuo) con incrementi indipendenti, utilizzato per modellare il moto Browniano ed altri diversi fenomeni casuali, in particolare, nell’ambito della matematica, della fisica, e, per l’analisi di questo elaborato, della finanza.

### 3.3 LA TEORIA DEL NON-ARBITRAGGIO

Nel paragrafo precedente è stata introdotta nel moto Browniano la passeggiata casuale o random walk. Ora verrà mostrato come quest'ultima viene utilizzata per modellare la distribuzione dei prezzi. Per fare ciò bisogna andare indietro nel tempo di circa sessant'anni, dove Maurice Kendall stava effettuando una ricerca nei prezzi delle azioni e delle materie prime un trend che si ripetesse nel tempo, in un certo intervallo temporale. Nel momento in cui si rese conto di non trovarne uno adatto, elaborò una teoria che si basa sul trend casuale dei prezzi, o, per l'appunto, random walk. Dal punto di vista formale, una random walk, è un modello stocastico usato per descrivere il processo con cui si generano i prezzi di una serie storica, dove:

$$y_t = f(t) + u_t$$

In cui  $f(t)$  è la componente deterministica, mentre  $u_t$  è la componente stocastica. Kendall assunse l'ipotesi che i prezzi azionari seguissero un percorso di natura casuale affermando che le variazioni tra questi ultimi sono indipendenti tra loro, quindi con autocorrelazione nulla. Quindi la random walk, rappresenta la teoria più importante dell'analisi fondamentale e tecnica, perché disconosce ogni forma di andamento, cicli e stagionalità, ossia una previsione esatta del trend, affidando il tutto nelle mani del caso. Di conseguenza si può affermare che non è mai possibile battere sistematicamente il mercato. La questione è anche logica, perché se così non fosse, gli investitori non avrebbero difficoltà nel realizzare facili profitti. Nonostante ciò, molti investitori tentano di utilizzare tecniche di arbitraggio, ossia tentano di compiere operazioni finanziarie a basso costo producendo un profitto privo di rischio. Questa tecnica consiste nel comprare o vendere un determinato strumento finanziario e contemporaneamente effettuare un'operazione di segno opposto in un mercato differente. Effettuare operazioni di arbitraggio è differente dal fare speculazione, dato che con l'arbitraggio si cerca la remunerazione sfruttando la temporanea differenza di prezzo in mercati diversi, mentre con la speculazione la remunerazione la si cerca sulle differenze di prezzo dello stesso strumento in tempi diversi. Di conseguenza si può affermare che la speculazione lucra sulla variabile "tempo", mentre l'arbitraggio cerca di sfruttare il fattore "spazio". Un semplice esempio di arbitraggio potrebbe essere quello di avere la possibilità di accedere ad un prestito di somma  $q$  ad un determinato tasso di interesse  $i_0$  per poi rivendere la stessa quantità di denaro ad un nuovo tasso di interesse  $i_1$  tale che  $i_1 > i_0$ .

Nell'economia reale però bisogna tener conto di altre componenti fondamentali:

- I doppi costi di transazione, ossia quelli che vanno dal primo soggetto all'arbitraggista, e successivamente quelli corrisposti dall'arbitraggista all'acquirente finale;
- Gli oneri fiscali;
- La possibilità che il prezzo torni all'equilibrio mentre si sta effettuando una delle due operazioni, generando quindi una perdita per l'arbitraggista.

In un mercato efficiente, nel momento in cui i prezzi si allontanano dall'equilibrio, un arbitraggista ce li riconduce. In pratica vende i titoli sopravvalutati, facendo in modo che i prezzi scendano, ed acquista i titoli sottovalutati in modo che questi salgano. In questa maniera l'arbitraggista registra i propri profitti.

Analizziamo ora il principio di non arbitraggio, secondo il cui, se due titoli in un istante futuro  $T$  hanno uguale valore, allora in ogni momento precedente a  $T$  dovranno avere lo stesso valore. Matematicamente non si può rappresentare questo principio, ma si fa un'assunzione, ossia che il mercato sia geneticamente efficiente, scartando l'ipotesi di poter fare soldi gratis.

Considerando  $v_{t1}$  e  $v_{t2}$  il prezzo all'istante  $t$  di due titoli rischiosi, secondo il principio enunciato precedentemente, con  $v_{T1} = v_{T2}$  allora anche  $v_{t1} = v_{t2} \forall t \leq T$ .

Un'ulteriore dimostrazione del principio di non arbitraggio può avvenire considerando le probabilità neutrali verso il rischio. Queste probabilità indicano l'aggiustamento delle probabilità soggettive rivolte ad un certo evento o stato. Essendo neutrali al rischio esse sono entrambe pari ad uno.

Concludendo, si può affermare che nonostante esistano tecniche per ridurre il rischio di perdita, non si può mai affermare che la probabilità di ottenere un profitto effettuando un'operazione finanziaria sia pari ad uno, o viceversa che ci sia una perdita prevista al 100%, altrimenti qualsiasi investitore con capacità di analisi adeguate ricaverebbe profitti senza problemi.

In questo elaborato lo scopo non è quello di azzerare il rischio, ma quello di adattare un trend quanto meno affidabile all'andamento del prezzo del bitcoin. Nel prossimo paragrafo estenderemo il modello analizzato ad inizio capitolo aggiungendo la componente stocastica.

### 3.4 ESTENSIONE DEL MODELLO ANALIZZATO

Nella sperimentazione fatta precedentemente, si è usata la struttura generale, ossia quella formata dalle cinque equazioni. Prima di andare ad estendere il modello con la componente stocastica, verranno effettuate delle opportune semplificazioni. Si può considerare un caso non banale ipotizzando il valore della componente psicologica  $\mathfrak{Z}_2$  ed il valore fondamentale  $P_a$  uguali a zero ottenendo le seguenti tre equazioni:

$$\tau_0 \frac{dP}{dt} = (1 + 2\mathfrak{Z}_1)L - P \quad (16)$$

$$c \frac{dL}{dt} = 1 - L + q(1 + 2\mathfrak{Z}_1)L - qP \quad (17)$$

$$c_1 \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} = q_1(1 + 2\mathfrak{Z}_1) \frac{L}{P} - q_1 - \mathfrak{Z}_1 \quad (18)$$

Ora bisogna fare una considerazione, ovvero dimostrare la positività del prezzo  $P$  altrimenti il modello non avrebbe molto senso con un prezzo minore di zero.

#### **Teorema.**

*Per ogni scelta dei parametri ( $c, c_1, \tau_0, q_1$ ) positivi, e per ogni dato iniziale ( $\mathfrak{Z}_1, L, P$ ) con  $P_0$  positivo, la soluzione delle equazioni (16), (17) e (18) soddisfa che  $P(t)$  è maggiore di zero per ogni  $t$ .*

#### **Dimostrazione.**

Il prezzo si potrebbe esprimere come un'equazione differenziale ordinaria che avrà come soluzione:

$$P = P_0 e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\tau_0}(s-t_0)} (1 + 2\mathfrak{Z}_1)L ds \quad (19)$$

di cui la componente  $(1 + 2\mathfrak{Z}_1)L$  si può ipotizzare come una quantità nota, che da ora in poi verrà indicata con la lettera  $H$ . Da qui però, ancora non si evince che  $P$  è positivo. Prendendo l'equazione (18), possiamo riscriverla come:

$$c_1 \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} = q_1 \frac{H}{P} - q_1 - \mathfrak{Z}_1 \quad (20)$$

Esplicitando poi  $H$  si otterrà l'equazione:

$$H = \frac{c_1}{q_1} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} P + P + \mathfrak{Z}_1 \frac{P}{q_1} \quad (21)$$

Ora andando a considerare l'equazione (16), e sostituendo  $(1+2\mathfrak{Z}_1)L$  con l' $H$  trovata nella (21):

$$\tau_0 \frac{dP}{dt} = \frac{c_1}{q_1} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} P + P + \mathfrak{Z}_1 \frac{P}{q_1} - P \quad (22)$$

Possiamo semplificare raccogliendo  $P$ :

$$\tau_0 \frac{dP}{dt} = P \left( \frac{c_1}{q_1} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{q_1} \right) \quad (23)$$

Arrivati a questo punto possiamo considerare la quantità dentro la parentesi come una funzione del tempo, e chiamarla ad esempio  $K(t)$ , quindi:

$$\tau_0 \frac{dP}{dt} = PK(t) \quad (24)$$

e possiamo affermare che  $P$  risolve un'equazione differenziale lineare ordinaria, con soluzione:

$$P(t) = P_0 e^{\int_{t_0}^t \frac{K(s)}{\tau_0} ds} \quad (25)$$

In conclusione, qualunque abbia la funzione  $K(s)$ ,  $P(t)$  sarà positivo.

### **Osservazione.**

Nel modello generale, ovvero quello non semplificato a cinque equazioni (sistema (11)), si possono fare considerazioni analoghe.

Considerando  $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}$ , avremo la seguente equazione:

$$\tau_0 P' = (1 + 2\mathfrak{Z})L - P \quad (26)$$

con:

$$c_1 \mathfrak{Z}'_1 = q_1 (1 + 2\mathfrak{Z}) \frac{L}{P} - q_1 - \mathfrak{Z}_1 \quad (27)$$

si procede alla stessa maniera, ponendo  $H = (1 + 2\mathfrak{Z})L$ , sostituendola nella (27) ed esplicitandola:

$$H = \frac{c_1}{q_1} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} P + P + \mathfrak{Z}_1 \frac{P}{q_1} \quad (28)$$

Ora questa nuova  $H$  verrà sostituita nell'equazione (26) ottenendo:

$$\tau_0 P' = P \left( \frac{c_1}{q_1} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{q_1} \right) \quad (29)$$

Ovvero la stessa identica che avevamo nella versione semplificata, confermando l'assunzione di  $P(t) > 0$  per ogni  $t > 0$ .

Ora, si effettua l'ipotesi nel quale sia assegnato uno spazio di probabilità  $\Omega$ , la  $\sigma$ -algebra degli eventi  $f$ , e la misura della probabilità  $\mathbb{P}$ . Sia anche assegnato un processo di Wiener su questo spazio, e si formula il modello per il prezzo nella sua versione stocastica così come segue:

$$\tau_0 dP(t) = [(1 + 2\mathfrak{Z}_1(t))L(t) - P(t)]dt + \sigma P(t)dW \quad (30)$$

con il secondo addendo  $\sigma P(t)dW$  che rappresenta la componente stocastica. Questa componente è composta da:

- una costante, ovvero il coefficiente di volatilità  $\sigma$ ;
- il prezzo  $P$ , scelto per questioni tecniche, per garantire che, nonostante ci sia una componente aleatoria positiva o negativa dato che le variazioni possono essere sia al rialzo che al ribasso,  $P$  rimanga positivo.

Sulla base dell'equazione differenziale stocastica che definisce il prezzo riformuliamo le componenti di trend di  $\mathfrak{Z}_1$  ed  $L$  rispettivamente nel modo seguente:

$$\mathfrak{Z}_1(t) = \frac{q_1}{c_1} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{c_1}} \frac{1}{P(\tau)} \tau_0 dP(\tau) \quad (31)$$

$$L(t) = L_0 + \frac{L_0}{c} q \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{c}} \frac{\tau_0}{P(\tau)} dP(\tau) \quad (32)$$

senza prendere le derivate di  $P(t)$  dato che si sta proseguendo l'analisi per il modello differenziale stocastico. La soluzione di equazioni differenziali stocastiche sul processo di Wiener danno luogo a traiettorie continue, non differenziabili (basti pensare alle fluttuazioni del prezzo di un qualsiasi strumento finanziario che ha andamenti "spezzettati" in ogni istante considerato), a differenza del modello deterministico.

Data la relazione tra  $\mathfrak{Z}_1$  ed  $L$ , si può scrivere uno in funzione dell'altro, tenendo conto dell'ipotesi già fatta ad inizio capitolo con  $c_I = c$ . Queste costanti servono, in base all'ordine di grandezza che hanno, quanto dei prezzi passati il valore di  $\mathfrak{Z}_1$  ed  $L$  mi danno come valore informativo. Ad esempio per un  $c$  con valore alto, si moltiplicano le variazioni di prezzo  $dP$  per un coefficiente vicino ad 1 dato che si ha  $e^{-\frac{t-\tau}{c}}$  e con  $c$  che tende all'infinito quella quantità tenderà ad 1. Inoltre entra in gioco anche il principio di media mobile esponenziale, ovvero per un  $\tau$  molto lontano dal tempo di oggi  $t$ , l'esponenziale tenderà ad avere un valore molto piccolo, viceversa considerando  $\tau$  come una data vicino ad oggi l'esponenziale avrà un valore più alto.

Quindi si avranno valori con peso più significativo per dati recenti, e valori meno significativi per valori meno recenti. Tornando alla relazione tra  $\mathfrak{Z}_1$  ed  $L$ , si può ricavare la seguente equazione:

$$L(t) = L_0 + \frac{L_0}{c} q \frac{c_1}{q_1} \mathfrak{Z}_1(t) = L_0 + L_0 \frac{q}{q_1} \mathfrak{Z}_1(t) \quad (33)$$

Sostituendo poi  $L(t)$  dentro l'equazione di  $\tau_0 dP(t)$  si otterrà:

$$\tau_0 P(t) = [(1 + 2\mathfrak{Z}_1(t)) \left( L_0 + L_0 \frac{q}{q_1} \mathfrak{Z}_1(t) \right) - P(t)] dt + \sigma P(t) dW \quad (34)$$

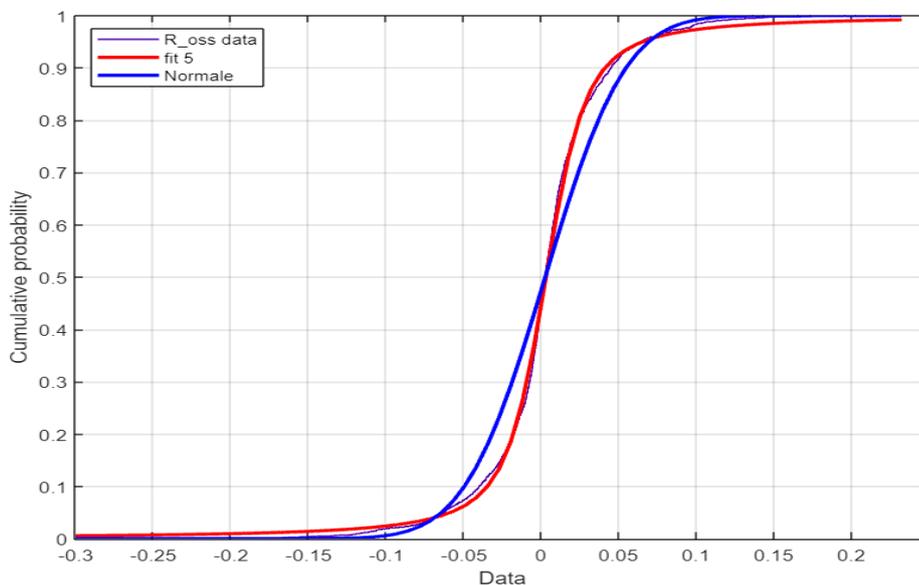
In pratica si ha una componente dipendente dal tempo, ovvero  $\mathfrak{Z}_1(t)$ , la quale considerandola in blocco come moltiplicazione tra le parentesi tonde si ottiene un polinomio di secondo grado in  $\mathfrak{Z}_1$ . Quindi in conclusione si può dire che si è ottenuto un modello unidimensionale per il prezzo.

Grazie a questo modello si possono ottenere:

- 1) una stima dei prezzi del bitcoin;
- 2) trovare una formula quasi chiusa per prezzare le opzioni su bitcoin, dato che è un modello mean reverting (dato dal  $-P(t)$  che fa sì che il prezzo tenda a ritornarne nel lungo periodo nella propria media).

Per effettuare il confronto tra un modello stocastico ed il campione di dati reali si osserva il comportamento dal punto di vista probabilistico con il criterio della massima verosimiglianza. Quindi si cercherà di massimizzare la verosimiglianza tra la distribuzione di probabilità empirica dei rendimenti (e non dei prezzi dato che l'investitore sarà sempre più interessato al rendimento) e quella implicata dal modello teorico. Partiamo dal seguente grafico, in riferimento all'intero periodo:

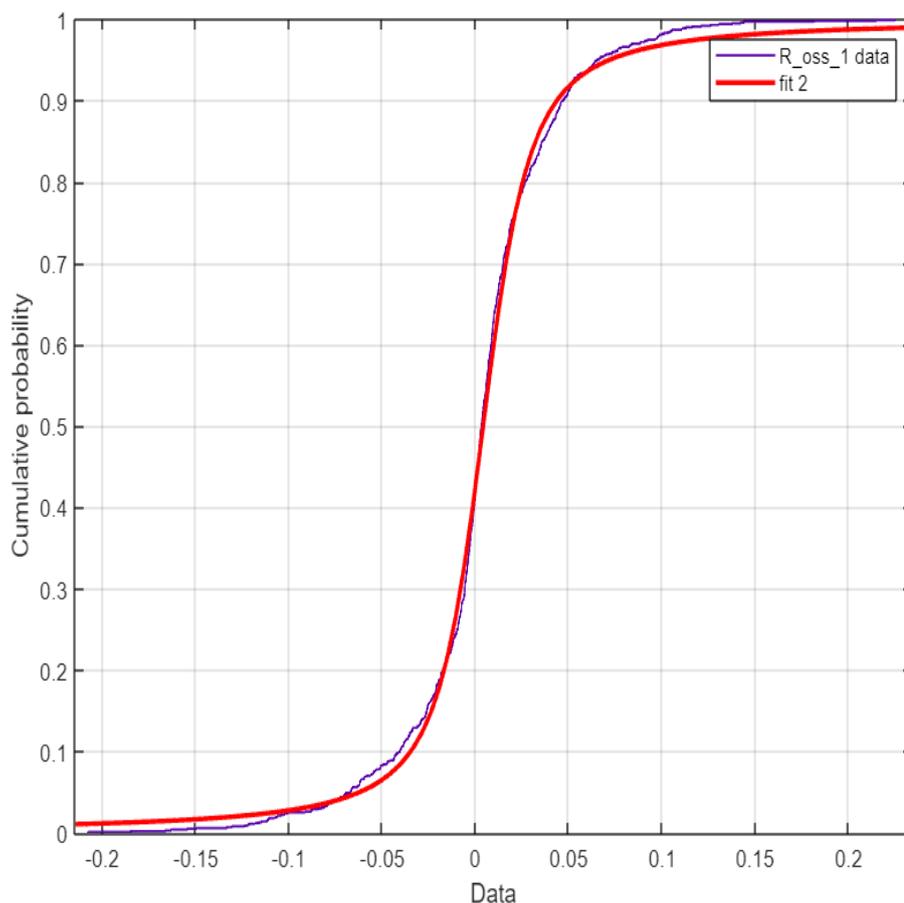
*Figura 3.3: Distribuzione dati intero periodo*



La linea blu rappresenta l'andamento della distribuzione normale, quella più comunemente utilizzata come punto di riferimento per i confronti delle distribuzioni delle probabilità. La linea rossa è quella prodotta dal modello, mentre la linea viola (molto vicino alla rossa) rappresenta la distribuzione di probabilità dei rendimenti osservati. Come si può notare, la linea rossa e la linea viola di discostano significativamente dalla linea blu, quindi si può affermare che i rendimenti non seguono una distribuzione normale. Nonostante ciò però si osserva come la distribuzione dei dati osservati e la distribuzione del modello quasi si sovrappongono, e abbiano un minimo scostamento solo nelle code. Si può dedurre quindi che il modello sia affine rispetto ai dati osservati. Il confronto tra le due distribuzioni è stata poi effettuata per altri 3 periodi, di cui:

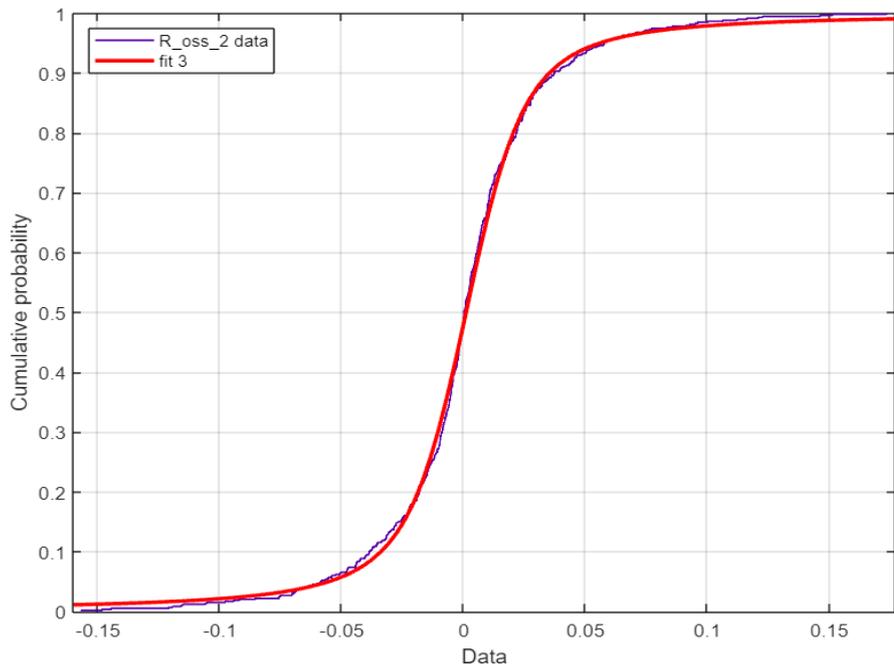
1)

*Figura 3.4: Distribuzione dati periodo 30/09/2015 – 22/06/2018*



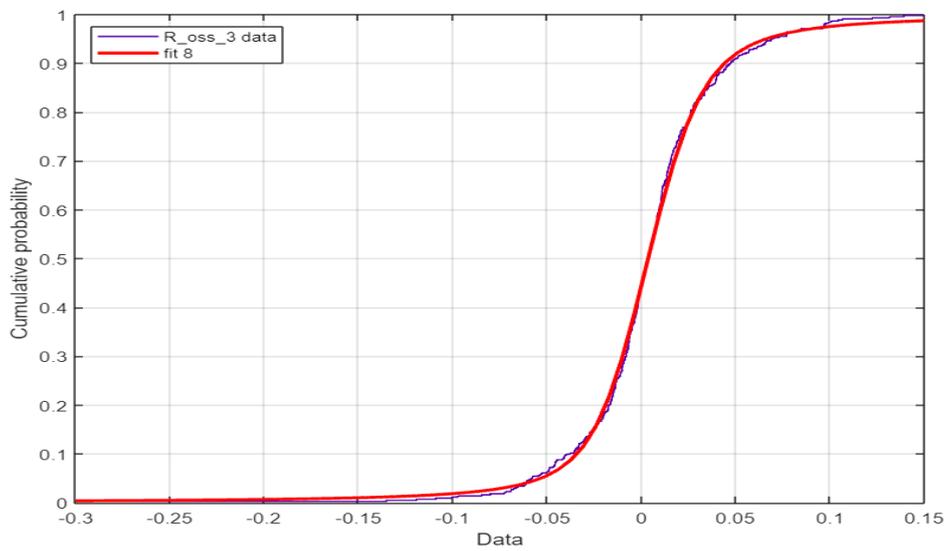
2)

*Figura 3.5: Distribuzione dati periodo 22/06/2018 – 10/02/2020*



3)

*Figura 3.5: Distribuzione dati periodo 10/02/2020 – 30/04/2021*



In tutti e tre i periodi si nota come le probabilità abbiano una distribuzione molto simile tra loro.

Riportando i risultati dal punto di vista quantitativo si avrà la seguente tabella:

*Tabella 3.2: Statistiche del modello*

<b>Periodo</b>	<b>Date esatte</b>	<b>Log-Likelihood</b>	<b>Media</b>	<b>Dev. St.</b>	<b>Coeff. Variazione</b>	<b>Skewness</b>	<b>Kurtosis</b>
Intero	30/09/2015 - 30/04/2021	208,2175	0,270%	4,060%	15,037	-0,9195	17,258
Periodo 1	30/09/2015 - 22/06/2018	-411,038	0,340%	4,140%	12,176	-0,1838	7,3705
Periodo 2	22/06/2018-10/02/2020	-615,3	0,087%	3,620%	41,745	0,0209	7,0569
Periodo 3	10/02/2020-30/04/2021	-723,266	0,380%	4,380%	11,526	-3,0584	40,2917

Il criterio di stima si basa sulla log-verosimiglianza (o log-likelihood). Più è alto il log-likelihood più la stima è corretta. Con i valori ottenuti nella tabella si può affermare che il modello descrive abbastanza bene i dati osservati.

## CAPITOLO 4: VALUTAZIONE DI OPZIONI SUL BITCOIN E CONFRONTO CON I DATI REALI

Nella valutazione di opzioni finanziarie e, più in generale, di strumenti finanziari derivati, si ricorre al principio di non arbitraggio, al concetto di neutralità al rischio e ad un importante strumento matematico rappresentato dalle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs). Consideriamo l'equazione differenziale stocastica che modella l'evoluzione del prezzo del sottostante relativo all'opzione considerata, sotto la cosiddetta misura neutrale al rischio:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (35)$$

in cui  $W_t$  denota un processo di Wiener 1-dimensionale. Indichiamo con  $(X_s^{t,x})_{s \geq t}$  la soluzione dell'equazione (35), con condizione iniziale  $x$  al tempo  $t$ :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s \mu(u, X_u^{t,x})du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x})dW_u \quad (36)$$

$X_s^{t,x}$  corrisponde, nel nostro caso, al prezzo  $P$ . I coefficienti  $\mu$  e  $\sigma$  prendono il nome di coefficiente di *drift* e di *diffusione* di  $X$ , rispettivamente. Sotto opportune condizioni di regolarità dei coefficienti  $\mu$  e  $\sigma$ , si può affermare che esiste un'unica funzione  $u = u(t, x)$  di classe  $C^{1,2}$  per  $0 < t < T$ , ed  $x$  reale che risolve l'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0 \quad (37)$$

e soddisfa la condizione finale  $u(T, x) = h(x)$ . In questo caso  $T > 0$  descrive la scadenza dell'opzione, mentre  $r > 0$  rappresenta il tasso *risk-free*. La funzione  $u = u(t, x)$  descrive il prezzo (di non arbitraggio) dell'opzione con payoff  $h$ . Si può osservare che il processo stocastico  $M_t = e^{-rt}u(t, X_t)$  è una martingala, da cui è possibile ricavare la seguente formula di rappresentazione della funzione di prezzo, mediante il seguente valore atteso

$$u(t, x) = E\{e^{-r(T-t)}h(X_T^{t,x})\} \quad (38)$$

Nel caso di  $h(x) = \max(x-K, 0)$ , si ha il classico caso dell'opzione call. Cioè, se si valuta  $u(X_t, t)$  si ottiene il prezzo di non arbitraggio dell'opzione al tempo  $t < T$ , con  $T$  equivalente alla data di scadenza dell'opzione, quando il sottostante ha valore espresso da  $X_t$ . La funzione  $u$  si può calcolare attraverso la risoluzione dell'equazione (37), mediante opportuni metodi numerici (ad esempio alle differenze finite) oppure applicando tecniche di tipo Monte Carlo per la stima del valore atteso nell'equazione (38).

## 4.1 IL MODELLO DI HESTON

Uno dei modelli di valutazione di opzioni più conosciuti ed utilizzati nella pratica, oltre al classico modello di Black-Scholes, è il modello di Heston. Tale modello fu proposto per la prima volta nel 1993 e si basa sull'introduzione di un processo stocastico che descrive la volatilità del prezzo del titolo sottostante.

In pratica l'analisi si basa su osservazioni del mercato, e si ipotizza che la volatilità del prezzo di un titolo sia dipendente dall'andamento del prezzo stesso. Si può osservare empiricamente che, all'aumentare della volatilità, il prezzo di un titolo azionario tenda a scendere in una fase successiva. Questo effetto si può spiegare in quanto si verifica una situazione di incertezza tra gli investitori del mercato rispetto al futuro. Un secondo aspetto della dinamica del prezzo che il modello di Heston intende descrivere riguarda la disuguaglianza tra la distribuzione di probabilità Gaussiana e quella associata ai rendimenti di un'attività, diversamente da come affermato nel modello di Black-Scholes. Nel modello di Heston mostra il comportamento del prezzo dell'attività sottostante ed il valore della volatilità sono caratterizzati dal seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_t^{(S)} \quad (39)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t^{(v)} \quad (40)$$

dove  $B_t^{(S)}$  e  $B_t^{(v)}$  rappresentano due moti Browniani standard con correlazione istantanea  $\rho$ . I parametri  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $\rho \in (-1,1)$  rispetto al tempo hanno la caratteristica di essere costanti ed omogenei. Inoltre si assumono le condizioni iniziali in  $t = 0$ :

- Il prezzo del sottostante osservabile sul mercato maggiore di zero ( $S_0 > 0$ );
- La volatilità iniziale non direttamente osservabile maggiore di zero ( $v_0 > 0$ ).

Nell'equazione (35) il termine deterministico  $\mu S_t dt$  rappresenta la direzione della crescita del prezzo. Invece, la componente stocastica  $\sqrt{v_t} S_t dB_t^{(S)}$  è simmetrica con media uguale a zero, di conseguenza si ha che il valore atteso del prezzo è:

$$E[dS_t] = \mu S_t dt \quad (41)$$

Il rendimento medio istantaneo è rappresentato dal parametro di *drift*  $\mu$ . L'equazione (36) invece discende dal processo *square-root*, concetto introdotto nel 1985 da Cox, Ingersoll e Ross con l'obiettivo di descrivere l'evoluzione del tasso di interesse. Anche in questo caso si ha la componente deterministica  $k(\theta - v_t)dt$  che tende a portare la volatilità ad oscillare intorno alla media  $\theta$  (principio del *mean-reverting*). Il parametro  $\theta$  viene infatti chiamato *long-term volatility*.

Il valore di  $k$  invece determina la velocità e la frequenza di questa oscillazione. Per quanto riguarda la componente stocastica  $\sigma\sqrt{v_t}dB_t^{(v)}$ , il parametro di riferimento è  $\sigma$ , chiamata la *volatility of volatility*, la quale indica l'intensità del disturbo generato dal moto Browniano  $B_t^{(v)}$ .

Effettuando un confronto con il modello di Black-Sholes, anche il modello di Heston determina una formula di valutazione (in forma quasi-chiusa) per un'opzione call Europea:

$$\begin{aligned}
C(\tau, x, v) &= e^x P_1(\tau, x, v) - e^{-r\tau} K P_1(\tau, x, v) \\
P_j(\tau, x, v) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-i\phi \log(K)} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi \\
f_j(\phi; x, v) &= e^{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x} \\
D_j(\tau, \phi) &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right) \\
C_j(\tau, \phi) &= r i\phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \log \left( \frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right) \right] \\
d_j &= \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j i\phi - \phi^2)} \\
g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}
\end{aligned} \tag{42}$$

dove si avrà

- $u_1 = \frac{1}{2}$
- $u_2 = -\frac{1}{2}$
- $a = k\theta$
- $b_1 = k - \rho\sigma$
- $b_2 = k$

dove  $x = \ln(S)$  e  $\tau = (T-t)$ . Nel paragrafo successivo, ci proponiamo di svolgere un confronto empirico tra il modello di Heston ed il modello studiato in questo elaborato ed illustrato nei capitoli precedenti su dati reali di opzioni scritte sul BitCoin.

## 4.2 ANALISI DI CONFRONTO CON IL MODELLO PROPOSTO NELLA VALUTAZIONE DI OPZIONI

L'approccio generale alla calibrazione di modelli parametrici, come il modello di Heston, consiste nell'applicare la procedura dei minimi quadrati considerando la differenza tra i prezzi reali e i prezzi teorici (dedotti dal modello) di opzioni, sia su base storica (cioè considerando serie temporali) sia considerando le quotazioni di opzioni su un sottostante specifico, disponibili in un dato giorno di contrattazione, per diverse scadenze (*maturities*). In alternativa, lo stesso tipo di approccio è applicabile alla volatilità implicita delle opzioni prese in esame. In questo paragrafo ci proponiamo di presentare un'analisi di confronto su dati reali, tra il modello di Heston ed il modello di valutazione di un'opzione in cui si assume per il sottostante la dinamica di prezzo descritta nell'equazione (30), sotto la misura neutrale al rischio.

In dettaglio, la procedura di calibrazione consiste nella minimizzazione della metrica espressa dall'RMSE (*Root-Mean-Square-Deviation*), dove  $C^{Model}$  è il prezzo della call espresso dal modello considerato, mentre  $C^{Market}$  si riferisce al valore di mercato osservato. Tale metrica è espressa precisamente dalla seguente relazione:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{|C_i^{Model} - C_i^{Market}|^2}{N}} \quad (43)$$

Nella nostra analisi, il pedice  $i$ , variabile da 1 al numero di osservazioni totali  $N$ , si riferisce al fatto che consideriamo il prezzo di un'opzione (osservato in un determinato giorno di contrattazione) con scadenza  $T_i$  e *strike-price*  $K_i$ . Per l'analisi di confronto è stata svolta la minimizzazione dell'RMSE per ogni giorno di negoziazione considerato, sia per il modello di Heston sia per il modello proposto in questa tesi. I risultati sono stati quindi raggruppati sulla base dei valori di volatilità implicita, dedotti secondo il modello di Black and Scholes. I valori relativi all'RMSE, calcolati in base ad un dato livello della volatilità implicita, sono stati poi mediati rispetto ai giorni di negoziazione considerati in quel dato gruppo. I risultati di tale analisi sono riportati nella seguente Tabella (4.1). Nell'implementazione del confronto proposto, per quanto riguarda il modello di Heston, abbiamo utilizzato le formule di valutazione illustrate nel paragrafo 4.1. Per quanto riguarda il modello proposto, abbiamo implementato il metodo di valutazione illustrato in questo paragrafo. Precisamente, per il calcolo della soluzione dell'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico (37), abbiamo utilizzato una funzione specifica disponibile nella suite di calcolo *MatLab R2021a*, denominata *pdepe.m*, in grado di risolvere numericamente equazioni di tipo parabolico con opportune condizioni iniziali ed al contorno.

Riguardo l'analisi empirica condotta, il confronto è stato svolto considerando le quotazioni di opzioni call su Bitcoin, disponibili nel periodo 1 marzo 2021 – 31 marzo 2021 attraverso il portale: <https://www.cmegroup.com/markets/cryptocurrencies/bitcoin/bitcoin.quotes.options.html#>.

<b>Volatilità</b>	<b>Heston</b>	<b>Modello Analizzato</b>
1.5% $\leq\sigma\leq$ 2%	3.9526	2.5608
2% $\leq\sigma\leq$ 2.5%	4.6239	2.1010
2.5% $\leq\sigma\leq$ 3%	4.1979	1.8574
3% $\leq\sigma\leq$ 3.5%	5.5774	3.1035
3.5% $\leq\sigma\leq$ 4%	6.4538	3.7909
4% $\leq\sigma\leq$ 4.5%	7.8986	5.0723

**Tabella 4.1:** Tabella di confronto tra il modello di Heston e il modello analizzato nell'elaborato.

In conclusione, sulla base dei valori di RMSE ottenuti nel metodo di confronto tra il modello studiato in questa tesi ed il classico modello a volatilità stocastica di Heston (1993), ampiamente applicato nell'ambito dell'ingegneria finanziaria, possiamo affermare che il modello esaminato offre dei risultati sufficientemente promettenti. Ci proponiamo di approfondire con ulteriori analisi il modello considerato, svolgendo uno studio sia teorico, sia applicativo e di carattere sperimentale anche su altri tipi di criptovalute presenti sul mercato.

## BIBLIOGRAFIA

- Caginalp C. *A Dynamical Systems Approach to Cryptocurrency Stability*
- Cebrián-Hernández Á., Jiménez-Rodríguez E. *Modeling of the Bitcoin Volatility through Key Financial Environment Variables: An Application of Conditional Correlation MGARCH Models*
- Grunspan C., Pérez-Marco R. *The mathematics of Bitcoin. European Mathematical Society Newsletter, 2020.*
- John C. Hull *Opzioni, futures e altri derivati*

## SITOGRAFIA

- <https://www.larena.it/publiadige/redazionali/nascita-e-definizione-della-criptovaluta-1.8677275>
- <https://www.fiscal-focus.it/prime/crypto-valute-e-blockchain/criptovalute-storia-rischi-e-opportunita,3,104452>
- [https://www.wired.it/economia/finanza/2019/01/03/bitcoin-2009-trasformazione-storia/?refresh\\_ce=](https://www.wired.it/economia/finanza/2019/01/03/bitcoin-2009-trasformazione-storia/?refresh_ce=)
- <https://www.theblockchainacademy.uk/alle-origini-della-blockchain-ovvero-come-e-nata-la-tecnologia-che-sta-cambiando-il-mondo/>
- [https://blog.osservatori.net/it\\_it/blockchain-spiegazione-significato-applicazioni#caratteristiche](https://blog.osservatori.net/it_it/blockchain-spiegazione-significato-applicazioni#caratteristiche)
- <https://www.trend-online.com/blockchain-bitcoin.html>
- <https://bitcoin.org/it/come-funziona>
- <https://www.criptoinvestire.com/come-funziona-la-crittografia-nelle-blockchain.html>
- <https://academy.binance.com/it/articles/peer-to-peer-networks-explained>
- <https://academy.binance.com/it/articles/game-theory-and-cryptocurrencies>
- [https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dei\\_giochi](https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi)

- <https://www.ilpost.it/2015/05/25/teoria-dei-giochi/>
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Moneta>
- <https://www.bancaditalia.it/servizi-cittadino/cultura-finanziaria/informazioni-base/moneta-legale-scritturale/index.html>
- <https://www.criptovaluta.it/minare-criptovalute>
- <https://www.avatrade.it/education/trading-for-beginners/mining>
- <https://www.we-trading.eu/cosa-gli-exchange-perche-importanti-le-criptovalute/>
- <https://blog.conio.com/bitcoin-verso-100000-euro-aa4db289dd79>
- <https://www.hdblog.it/mercato/articoli/n531851/bitcoin-valore-quanto-puo-arrivare/>
- [https://www.repubblica.it/economia/finanza/2021/05/23/news/bitcoin\\_crollo\\_p\\_eredita\\_miliardari-302409398/](https://www.repubblica.it/economia/finanza/2021/05/23/news/bitcoin_crollo_p_eredita_miliardari-302409398/)
- <https://www.reuters.com/article/global-crypto-currency-idITKCN2D21P0>
- <https://www.bluerating.com/mercati/693680/mercati-jpmorgan-la-volatilita-del-bitcoin-assomigliera-a-quella-dello-ro>
- <https://www.luno.com/learn/it/article/why-are-there-only-million-bitcoin>
- <https://cryptonomist.ch/2021/02/03/mario-draghi-bitcoin-pensiero-premier-italiano/>
- [https://www.ilsole24ore.com/art/paypal-apre-criptovalute-bitcoin-sara-accettato-i-pagamenti-ADxnOSx?refresh\\_ce=1](https://www.ilsole24ore.com/art/paypal-apre-criptovalute-bitcoin-sara-accettato-i-pagamenti-ADxnOSx?refresh_ce=1)
- <https://www.teleborsa.it/News/2021/03/30/paypal-lancia-i-pagamenti-con-le-criptovalute-131.htm#.YULFtZ0zZPZ>
- <https://www.gazzetta.it/motori/mobilita-sostenibile/auto-elettriche/24-03-2021/tesla-oggi-possibile-acquistarle-bitcoin-4001754622036.shtml>
- [https://motori.ilmessaggero.it/economia/elon\\_musk\\_rinnega\\_il\\_bitcoin\\_anche\\_per\\_l\\_acquisto\\_di\\_una\\_tesla\\_danneggia\\_l\\_ambiente\\_ma\\_non\\_vende\\_i\\_suoi\\_1\\_5\\_mld\\_acquistati-5959424.html](https://motori.ilmessaggero.it/economia/elon_musk_rinnega_il_bitcoin_anche_per_l_acquisto_di_una_tesla_danneggia_l_ambiente_ma_non_vende_i_suoi_1_5_mld_acquistati-5959424.html)

- <https://cryptonomist.ch/2021/06/17/elon-musk-consumo-energia-di-bitcoin-verde/>
- <https://cryptonomist.ch/2021/06/14/tesla-tornera-accettare-pagamenti-bitcoin/>
- <https://www.kibofin.it/bitcoin-che-cosa-ne-pensa-warren-buffett/>
- <https://www.investireoggi.it/economia/michael-burry-de-la-grande-scommessa-avverte-della-madre-di-tutti-i-crash-riguarda-i-bitcoin/>
- <https://investire.biz/articoli/analisi-previsioni-ricerche/economia-politica-diritto/michael-burry-chi-e-carriera-vita-studi-trader-the-big-short-crisi-mutui-subprime>
- <https://www.toptrade.it/rubriche/tendenze/problemi-connessi-alle-criptovalute-e-bitcoin/>
- <https://www.ilsole24ore.com/art/bitcoin-sara-l-oro-digitale-prospettive-e-limiti-ADERWWOB>
- <https://www.cmcmarkets.com/it-it/impara-come-operare-con-criptovalute/quali-sono-i-rischi#:~:text=I%20rischi%20del%20trading%20sulle%20criptovalute%20con%20i%20CFD&text=La%20volatilit%C3%A0%20delle%20criptovalute%2C%20combinata,senza%20passare%20dal%20livello%20intermedio.>
- <https://www.cybersecurity360.it/nuove-minacce/truffe-bitcoin-i-rischi-delle-criptovalute-e-le-soluzioni-di-sicurezza/>
- [https://it.abcdef.wiki/wiki/Mathematical\\_optimization](https://it.abcdef.wiki/wiki/Mathematical_optimization)
- <http://docenti.luiss.it/mathematics-papi/files/2020/09/SistemiDinamici.pdf>
- <http://docenti.luiss.it/gozzi/files/2019/09/LezioniFG2019MetodiPrimaParte.pdf>
- <http://docenti.luiss.it/mathematics-papi/files/2020/09/Note-9-MMEF-20ott2020.pdf>
- <http://docenti.luiss.it/gozzi/files/2019/09/lucidipiuvariabiliMetodiFall2019-1.pdf>
- [http://www.dm.unibo.it/~morbidel/appunti\\_laboratorio\\_2010.pdf](http://www.dm.unibo.it/~morbidel/appunti_laboratorio_2010.pdf)
- [http://docenti.luiss.it/mathematics-papi/files/2020/09/Nota-Integrativa-Max\\_Min-Vincolati.pdf](http://docenti.luiss.it/mathematics-papi/files/2020/09/Nota-Integrativa-Max_Min-Vincolati.pdf)
- [http://tesi.cab.unipd.it/63226/1/Bricolo\\_Mattia.pdf](http://tesi.cab.unipd.it/63226/1/Bricolo_Mattia.pdf)

- <https://www.money.it/cos-e-hash-rate-bitcoin-e-criptovalute-significato>
- <https://it.wikipedia.org/wiki/MATLAB>
- <https://www.cmcmarkets.com/it-it/impara-come-operare-con-criptovalute/cosa-e-ethereum>
- <https://www.plus500.it/Instruments/ETHUSD/What-is-the-difference-between-Ethereum-and-Bitcoin~2>
- <https://www.ig.com/it-ch/ethereum-trading/cosa-e-ethereum-e-come-funziona#:~:text=La%20piattaforma%20ethereum%20%C3%A8%20stata,che%20fanno%20uso%20del%20software.>
- <https://www.fxempire.it/education/article/guida-a-binance-coin-bnb-il-token-exchange-che-sfida-bitcoin-178423>
- <https://www.fxempire.it/education/article/cosa-sono-le-monete-binance-bnb-e-come-puoi-acquistarle-132642>
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Binance>
- [https://www.fxempire.it/education/article/cosa-sono-le-monete-binance-bnb-e-come-puoi-acquistarle-132642#Cos%E2%80%99%C3%A8%20Binance%20\(BNB\)?](https://www.fxempire.it/education/article/cosa-sono-le-monete-binance-bnb-e-come-puoi-acquistarle-132642#Cos%E2%80%99%C3%A8%20Binance%20(BNB)?)
- <https://www.cme group.com/markets/cryptocurrencies/bitcoin/bitcoin.quotes.options.html#>
- [http://www.mat.uniroma3.it/scuola\\_orientamento/alumni/laureati/matteucci/Sintesi.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/alumni/laureati/matteucci/Sintesi.pdf)

## Appendice A

Analizziamo ora i codici utilizzati per l'analisi svolta.

Per poter fare il primo confronto, ossia quello tra il modello deterministico (11) ed i dati storici, si è proceduto nella seguente maniera. L'implementazione dell'ODE è stata effettuata tramite la funzione **ode45**. Quindi, partendo dalla stesura della prima funzione denominata **myfun** in cui definiamo le variabili ed i parametri del sovrastante sistema avremo

```
function dydt = myfun(p,y,t_f)
    P = y(1);
    Pa = y(2);
    L = y(3);
    Z1 = y(4);
    Z2 = y(5);
    t0 = p(1);
    c = p(2);
    c1 = p(3);
    c2 = p(4);
    c3 = p(5);
    q = p(6);
    q1 = p(7);
    q2 = p(8);
    dydt = [(((1+(2*Z1)+(2*Z2))*L)-P)/t0;
            (P-Pa)/c3;
            (1-L+(q*(((1+(2*Z1)+(2*Z2))*L)-P)))/c;
            ((q1*(((1+(2*Z1)+(2*Z2))*L)-1))-Z1)/c1;
            ((q2*((Pa-P)/Pa))-Z2)/c2];
end
```

In cui le variabili in input sono:

- $p$ : il vettore con gli otto parametri, ponendo l'attenzione su  $q, q_1, q_2$  i quali dovranno essere stimati per avere una previsione quanto meno realistica;
- $y$ : il vettore con le cinque variabili cui trend verrà osservato al variare nel tempo (con particolare attenzione su sul prezzo  $P$ );
- $t_f$ : l'orizzonte temporale che si vorrà considerare.

Mentre nell'output si avrà un vettore chiamato  $dydt$ , il quale conterrà tutta la parte destra dell'uguale delle cinque equazioni del sistema dinamico.

Ovviamente per verificare se la stima sia più o meno veritiera si avrà bisogno di un confronto con dei dati reali passati. Per questo motivo è stato preso come riferimento il trend su base giornaliera del Bitcoin dalla data del 30 settembre 2015 alla data del 30 aprile 2021.

Proseguendo nella stesura del codice, è stata programmata una seconda funzione, dove per l'appunto viene utilizzata **ode45** per la risoluzione del sistema dinamico chiamata **solvesistem**:

```
function [P,y,t] = solvesistem(p,y0,t_f)
    myfun2=@(t1,y1)myfun(p,y1,t1);
    [t,y] = ode45(myfun2,[0 t_f], y0);
    P=y(:,1);
end
```

In questo caso, osservando le variabili di input, si avranno come in **myfun** i parametri e l'orizzonte temporale, ma in questo caso invece che le variabili si avrà un vettore *y0* il quale conterrà le cinque condizioni iniziali. In uscita invece questa volta si otterranno tre vettori in cui:

- *P* conterrà i valori dei prezzi;
- *y* (che sarà una matrice a cinque colonne) conterrà i valori totali di ognuna delle cinque variabili (compresa *P*);
- *t* conterrà i tempi considerati ogni qual volta le variabili di stato subiscono variazioni.

Analizziamo ora la funzione. La prima riga si ha la definizione della variabile *myfun2* in cui, richiamando la funzione precedente, inseriamo il sistema dinamico. Nella riga successiva c'è la risoluzione vera e propria dell'ODE. Nelle parentesi della funzione di **ode45** sono stati messi rispettivamente in ordine: *myfun2*, quindi il sistema dinamico; *[0 t\_f]*, quindi l'intervallo di tempo considerato che va da 0 a *t\_f*; *y0* le condizioni iniziali. Come possiamo notare la funzione **ode45** in output restituirà i valori del tempo e delle variabili di stato. Nell'ultima riga prima della chiusura della funzione, è stata definita la variabile *P* che conterrà tutti i valori della prima colonna della matrice *y*, cioè tutti i valori dei prezzi.

Proseguiamo ora con la terza funzione **f**:

```
function fval=f(p,y0,t_f,P_oss,t_oss,W)
    [P,y,t] = solvesistem(p,y0,t_f);
    curve_p=fit(t_oss',P_oss,'smoothingspline');
    curve_w=fit(t_oss',W,'smoothingspline');

    n=length(P);

    s=0;

    for i=1:1:n

        s=s+abs(curve_w(t(i)))*((curve_p(t(i))-P(i))^2);

    end

    s=s/sum(abs(curve_w(t)));

    fval=s;
end
```

La funzione **f** ha come obiettivo quello di estrapolare la norma tra i valori osservati ed i valori ottenuti. In input, oltre ai parametri, si avranno le condizioni iniziali e orizzonte temporale della funzione precedente, altre tre variabili:

- *P\_oss* che sarà il vettore contenente i prezzi osservati dai dati storici del Bitcoin;
- *t\_oss* cioè il vettore contenente i giorni dei dati storici osservati;
- *W* che sarà un vettore contenente dei pesi per ponderare la stima, dato che, sulla base dello storico considerato, non tutti gli istanti avranno pari importanza (questa variabile è a discrezione di chi effettua l'analisi).

Prima di descrivere la variabile di output *fval*, analizziamo il contenuto della funzione **f**. Nella prima riga osserviamo che vengono estrapolate in ordine il vettore con i prezzi, la matrice con le variabili di stato, ed il vettore con i tempi. Quest'operazione viene effettuata richiamando la funzione precedente **solvesistem**.

Dopo di che, nelle successive due righe, viene implementato il comando **fit**. Data una funzione algebrica, il comando **fit** costruisce una curva in determinati punti assegnati in input. Nel caso della variabile *curve\_p* avremo un fit dei prezzi osservati (*P\_oss*) mentre nella variabile *curve\_w* avremo quello delle ponderazioni. Tra gli input del comando **fit** oltre *P\_oss* (o *W*) notiamo anche il vettore dei tempi osservati *t\_oss* (che nella curva corrisponde all'asse delle ascisse) ed il comando *smoothingspline*. Questo comando ci permette di avere un adattamento “smooth” (tradotto “liscio”) della curva. Proseguendo nel codice troviamo la definizione di una variabile *n*, che avrà valore pari alla lunghezza del vettore *P*. Una volta dichiarata la variabile *s*, troviamo l'apertura di un ciclo **for**. Questo ciclo parte con l'indicatore *i*=1, aumenta ad ogni ciclo di una unità, e fa tanti cicli quanto è grande la variabile *n*. All'interno del ciclo troviamo una stringa con cui *s* alla fine del processo avrà il valore della norma tra i prezzi ottenuti ed i prezzi osservati, sottoposti a ponderazione. L'output *fval* della funzione, corrisponde quindi alla norma calcolata in precedenza. La quarta, ed ultima funzione, riguarda l'analisi vera e propria della stima dei parametri.

```
function [p_opt,E_opt]=optim(y0,P_oss,W)
    d=length(P_oss);
    for i=1:d
        t_oss(i)=i/252;
    end
    t_f=t_oss(d);
    F=@(x)f([0.01,1,1,1,10,x(1),x(2),0],y0,t_f,P_oss,t_oss,W)
    x0=[1,1];
    LBp=[0.01,0.01];
    UBp=[10,10];
    q2=0;
    c3=1;
    t0=0.01;

    [p_opt,F_opt]=fmincon(F,x0,[1 2],[1/c3+1/t0],[],[],LBp,UBp);
    E_opt=sqrt(F_opt);
end
```

La funzione prende il nome di **optim**, e come input ha i vettori delle condizioni iniziali ( $y_0$ ), i prezzi osservati ( $P_{oss}$ ) e le ponderazioni menzionate nella funzione precedente ( $W$ ). Per quanto riguarda l'output invece notiamo le due variabili  $p_{opt}$  e  $E_{opt}$ . La prima conterrà i valori ottimali per  $q$  e  $q_1$  dato un determinato intervallo, mentre la seconda mostrerà un valore tale per cui si potrà definire quanto siano affidabili i valori di  $p_{opt}$  trovati nell'intervallo. Per trovare i valori ottimali si è cambiato l'intervallo di volta in volta finché non si è trovato un valore accettabile (cioè più piccolo possibile) in  $E_{opt}$ . Tornando alla funzione **optim** notiamo che di standard si è usato come orizzonte temporale l'analisi giornaliera (1/252). Dopo di che si è fatto in modo di implementare il sistema con dei valori dei parametri che rispettassero le condizioni poste nell'articolo analizzato precedentemente:

$$\tau_0 \ll c, c_1, c_2 \ll c_3$$

e posto il parametro  $q_2 = 0$  così da ottenere la semplificazione delle condizioni mostrata in precedenza. Per quanto riguarda l'intervallo delle analisi sono state utilizzate le variabili  $LBp$  per i valori inferiori e  $UBp$  per i valori superiori. Infine è stata utilizzata la funzione *fmincon* per risolvere il problema di ottimizzazione, implementandola con condizioni iniziali, vincoli ed intervallo. Le prove svolte sono state effettuate utilizzando intervalli di date differenti, e frequenze differenti (giornaliere, considerando di avere a disposizione 252 giorni lavorativi, e settimanali considerando di avere un totale di 52 settimane in un anno).

## RIASSUNTO

Nel primo capitolo dell'elaborato c'è una panoramica generale sul bitcoin e sulla criptovaluta in generale.

Nel ventesimo secolo è stata introdotta questo tipo di moneta la quale non rispetta i canoni principali della moneta legale, cioè:

- 1- Misura del valore
- 2- Mezzo di scambio
- 3- Fondo di valore

La moneta virtuale oltre a non avere le caratteristiche principali della moneta tradizionale, non ha nessun ente che possa fare da garante riguardo il proprio valore e conseguentemente non ha l'obbligo di essere accettata per estinguere un debito. La prima criptovaluta nasce nel 31 ottobre del 2008 grazie ad un inventore ancora non noto che si fa chiamare Satoshi Nakamoto. Lo scopo del bitcoin è quello di creare un sistema di pagamenti tra due controparti senza la necessità di un terzo soggetto economico che abbia il compito di regolare le transazioni (il noto intermediario). Di conseguenza, in un sistema del genere, si avrà l'assenza di autorità di vigilanza, le quali invece sono presenti nelle transazioni di pagamenti ufficiali.

La tecnologia utilizzata per creare i bitcoin prende il nome di Blockchain, ovvero catena di blocchi. Il blockchain utilizza un registro pubblico, in cui ogni registro è composto da blocchi, ed in ognuno di essi è collegato al precedente. Procedendo in questa maniera, nei portafogli bitcoin è possibile avere i dati del bilancio e di conseguenza capire se si hanno disponibilità sufficienti per effettuare nuove transazioni. La tecnologia blockchain si basa su tre pilastri fondamentali:

- 1- La crittografia
- 2- Il networking
- 3- La teoria dei giochi

Per quanto riguarda la crittografia ci riferiamo alle varie metodologie utilizzate per occultare informazioni rendendole inaccessibili ad utenti non autorizzati. Nella blockchain in particolare viene utilizzata la cosiddetta crittografia asimmetrica, ovvero una tecnologia che permette l'utilizzo di due tipi di chiave, una privata ed una pubblica. La chiave pubblica viene messa a disposizione del mittente da parte del destinatario, che la utilizzerà per criptare il messaggio. Una volta inviato il messaggio criptato, solo il destinatario avrà la chiave privata per poterlo decifrare.

Il networking invece è il vero e proprio canale di transazione. I bitcoin in particolare utilizzano la tecnologia peer to peer o P2P, cioè un insieme di dispositivi o nodi i quali condividono ed archiviano file collettivamente, con pari poteri ed autorizzazioni.

Consideriamo ora i punti che andremo ad analizzare nel terzo capitolo, ovvero la caratteristica del prezzo e della volatilità del bitcoin. Considerando il valore intrinseco del bitcoin esso è pari a 0, ma il suo valore nominale ha subito variazioni significative nel corso degli anni. Nel momento della sua creazione esso aveva un valore che si aggirava attorno allo 0,0007 dollari. Cinque anni più tardi, ossia nel 2013, un bitcoin equivaleva a circa 750 euro. Grazie a questo aumento repentino qualche store inizia ad accettare bitcoin come mezzo di pagamento. Il secondo picco massimo lo ha avuto alla fine del 2017, quando tocca i 16'000 euro.

Dopo di che nel 2018 ha un brusco calo di più del 50% del valore, per poi avere una brusca impennata, arrivando a quasi 50'000 euro, nell'aprile del 2021. Questo ci aiuta a ragionare sulla pericolosità di questa moneta virtuale, con una volatilità che qualsiasi strumento finanziario non ha mai registrato fino ad ora. Altre monete virtuali famose che hanno avuto all'incirca la stessa volatilità, ma di volume e prezzo decisamente minori sono state Ethereum e BNB.

La pericolosità non è passata inosservata alle figure più importanti nell'ambito finanziario degli ultimi anni, le quali hanno espresso le proprie opinioni. Troviamo una platea la quale è fortemente contraria all'uso del bitcoin, come ad esempio l'ex Presidente della BCE Mario Draghi, oppure il broker che prevede la crisi dei mutui subprime Michael Burry. Invece uno dei più grandi promotori, il quale ha investito circa 50 milioni di dollari in bitcoin, è Elon Musk, il co-fondatore della casa automobilistica Tesla.

L'elaborato prosegue mettendo in luce i rischi e le problematiche esposte negli ultimi anni. Un primo problema è la decentralizzazione, ossia il fatto che non esistano autorità che rallentino o blocchino transazioni con regole o provvedimenti. Ciò fa sì che, in questo ambito regni un principio di anarchia, senza alcuna vigilanza né controllo. Ad esempio, grazie alla mancata tracciabilità della criptovaluta, si potrebbero effettuare acquisti illegali favorendo la criminalità organizzata o addirittura aggirare il regime fiscale stesso. Un altro problema riguarda il fatto che non ci sia un istituto garante dietro, quindi nessuno garantisce che offrendo bitcoin per acquistare un bene od un servizio, il venditore accetti. Diversamente succede con le monete a corso legale come l'euro o il dollaro, i quali hanno come garante la BCE e la FED.

L'ultimo paragrafo del primo capitolo riguarda le opzioni finanziarie, strumento stimato nel terzo capitolo avente come sottostante il bitcoin. L'opzione finanziaria è quello strumento che concede a chi le acquista il diritto di comprare (nel caso della call) o vendere (nel caso della put) un titolo, o un insieme di titoli ad un prezzo prestabilito ad una determinata scadenza. Sono state mostrate le funzionalità attraverso degli appositi grafici, cercando di mettere in luce il momento in cui è conveniente esercitare l'opzione. Dopo di che sono stati mostrati due modelli di pricing delle opzioni: il modello degli alberi binomiali ed il modello black-sholes. Sono stati scelti questi modelli dato che sono stati quelli più trattati durante il percorso accademico.

Nel secondo capitolo sono stati esposti i concetti del sistema dinamico, i concetti dell'ottimizzazione vincolata ed infine è stata fatta un'introduzione di due articoli i quali applicano teorie matematiche per l'analisi del trend della volatilità del Bitcoin.

Nei primi paragrafi troviamo i sistemi dinamici, differenziandoli per equazioni alle differenze (DE) ed equazioni differenziali (ODE). Un sistema dinamico è un sistema che varia nel tempo. Ossia un sistema che utilizza variabili di stato e ne studia l'evoluzione nel tempo. Nelle equazioni alle differenze la legge di evoluzione è una relazione tra il valore della variabile di stato considerata ad un tempo considerato ed i suoi valori ad istanti successivi. Se una DE dipendesse dal tempo, sarebbe chiamata autonoma, altrimenti non autonoma. Un'equazione alle differenze potrà essere accompagnata da una condizione iniziale (valore della variabile noto ad un tempo noto), ed in quel caso si ricorrerebbe ai cosiddetti problemi di Cauchy. Dopo di che, nell'elaborato vengono descritti i vari metodi per la risoluzione del problema di Cauchy sia nel caso autonomo che in quello non autonomo, sia nel caso omogeneo (ossia senza termine noto) sia nel caso non omogeneo, ed infine il caso in cui si dovessero avere più variabili di stato da analizzare. Un altro aspetto fondamentale riguarda le traiettorie ed orbite del sistema dinamico alle differenze. Si inizia ricercando un punto di equilibrio, uno o più valori della variabile di stato i quali risolvono l'equazione alle differenze eguagliata ad una retta. Una volta trovati uno o più punti, bisognerà capirne la natura, sostituendoli alla derivata prima dell'equazione iniziale. Nel caso si ottenga un valore compreso tra meno uno ed uno il punto sarà stabile ed asintoticamente stabile, se sarà minore di meno uno o maggiore di uno il punto sarà instabile.

Una volta descritte le equazioni alle differenze, si apre un paragrafo dedicato alle equazioni differenziali. Nelle equazioni differenziali l'insieme dei tempi è un intervallo di numeri reali possibilmente non limitato, di conseguenza si parlerà di un sistema dinamico a tempi continui.

Nel caso delle ODE la legge di evoluzione è una relazione che lega il valore della variabile di stato al tempo considerato alle sue successive derivate nello stesso istante.

I casi autonomi e non autonomi, omogenei e non omogenei valgono alla stessa maniera descritte nelle equazioni alle differenze. Ed anche qui, nel caso si avesse una condizione iniziale, si richiamerebbe di nuovo il problema di Cauchy. Nell'elaborato vengono poi descritti i vari metodi di risoluzione del problema nei vari casi considerati. Per quanto riguarda i punti di equilibrio in questo caso vanno ricercati ponendo l'equazione differenziale uguale a zero. Una volta trovato il punto/i punti vanno anche qui sostituiti alla derivata prima. Nel caso si ottenga un valore minore di zero, il punto sarà stabile ed asintoticamente stabile, nel caso il valore sia maggiore di zero il punto sarà instabile.

Il capitolo poi continua con la descrizione dei problemi di ottimizzazione, i quali verranno ripresi per l'analisi finale del modello. Il concetto di ottimizzazione in matematica riguarda la selezione di un elemento migliore rispetto ad un criterio, da un insieme di alternative disponibili. Ad esempio un problema di ottimizzazione consiste nel massimizzare o minimizzare una funzione reale selezionando determinate variabili di input all'interno dell'insieme consentito, cioè all'interno del dominio. Nella pratica l'ottimizzazione è la ricerca dei valori migliori disponibili di alcune funzioni obiettivo dato un dominio definito, compresa una varietà di diversi tipi di funzioni obiettivo e diversi tipi di domini. Data una funzione quindi, il metodo dell'ottimizzazione consente di trovare gli eventuali punti estremali locali e globali e i relativi valori estremali. I possibili punti candidati sono gli stessi visti per le funzioni ad una variabile: massimo globale, minimo globale, massimo locale, minimo locale. Nel caso di un dominio di una funzione a più variabili aperto, si avrà un problema di estremi liberi, o al massimo interni. In caso invece il dominio non sia aperto, ad esempio definito da alcuni vincoli di uguaglianza o disequaglianza si avranno problemi di estremi vincolati.

Nel caso degli estremi liberi, sappiamo che gli unici punti interni candidati ad essere punti di minimo o di massimo sono quelli che annullano la derivata della funzione. Nel caso invece degli estremi vincolati, si studia l'ottimizzazione di una funzione, chiamata funzione obiettivo, o di più variabili ristretta all'insieme degli zeri di altre funzioni chiamate funzioni vincolari o semplicemente vincoli.

L'ultimo paragrafo del secondo capitolo vengono presentati i tre articoli in cui si trovano alcune metodologie utilizzati da alcuni autori per fare delle analisi, più o meno accurate, sul forecasting delle criptovalute. Il primo articolo si incentra nella previsione della volatilità attraverso modelli di correlazione condizionata MGARCH (multivariate GARCH) e viene evidenziato di come l'approccio dinamico sia più adatto di quello costante nel spiegare la varianza. Nel secondo articolo invece viene evidenziato l'affiancamento dell'approccio matematico all'analisi generale del bitcoin. In altre parole, il protocollo Bitcoin viene considerato come un algoritmo matematico su una rete che gestisce i dati delle transazioni e costruisce il consenso della maggioranza tra i partecipanti.

Il terzo articolo invece viene presentato nell'ultimo capitolo, dato che descrive i concetti su cui verrà basata l'intera sperimentazione. Esso mira ad associare il trend delle caratteristiche principali del bitcoin ad un sistema dinamico, in particolare ad un sistema a cinque equazioni differenziali. Viene preso in considerazione l'equazione su cui si basa il modello di pricing delle opzioni di Black-Scholes: - per la variazione del prezzo relativo in termini di rendimento atteso; - la deviazione standard del rendimento; - l'incremento indipendente del moto Browniano. La modellazione del pricing delle attività è generalmente basata sull'assunzione di base di arbitraggio infinito. Ciò non è corretto dato che ci possono essere alcuni investitori che sono inclini ad errori cognitivi o bias nella valutazione del valore. La questione principale ora sta nell'applicare la teoria classica del pricing alle criptovalute. Le criptovalute, come espresso nell'articolo, costituiscono l'estremità opposta del mercato rispetto ad esempio ai buoni del tesoro, con cui un'arbitraggista si copre acquistandolo o vendendolo allo scoperto sulla base della fiducia di un contratto chiaro predeterminato.

Proseguendo nell'articolo gli autori cercano di effettuare un modeling delle criptovalute attraverso equazioni asset flow. Vengono distinte le variabili con cui verrà costruito il sistema dinamico a cinque equazioni, in particolare: il prezzo, la concezione del valore del bitcoin, il prezzo della liquidità, la componente di trend e la componente del valore.

Oltre alle variabili, avremo otto parametri che sono: il parametro che esprime l'orizzonte temporale del trend, il coefficiente del prezzo, il coefficiente della concezione del valore, il coefficiente della componente del trend, il coefficiente della componente valore, l'attenzione al trend, la misura dell'influenza dei tempi di ritardo, e l'influenza dei valori fondamentali considerando i coefficienti del prezzo e della concezione del valore. Gli ultimi tre sono i parametri che si andranno a stimare per avere un modello di forecasting adeguato. I primi cinque invece andranno fissati nella maniera in cui indica l'articolo. Per avere una semplificazione del modello si effettuano alcune semplificazioni, una di queste è quella di porre il parametro dell'influenza dei valori fondamentali uguale a zero. Di conseguenza i parametri da stimare saranno due. Nel paragrafo successivo dell'elaborato è stato effettuato il confronto tra il modello deterministico ed i dati reali. Per fare ciò si è dovuto effettuare la minimizzazione della funzione dei parametri data dalla sommatoria dei quadrati delle differenze tra il prezzo osservato nei dati storici ed il prezzo prodotto dal modello analizzato nel paragrafo precedente. Per minimizzazione si intende l'utilizzo del metodo dei minimi quadrati. Il confronto è stato effettuato utilizzando un software di programmazione: MatLab. MatLab è un programma utilizzato per il calcolo numerico e l'analisi statistica. Esso consente di manipolare matrici e, in particolare modo per questo elaborato, visualizzare funzioni e dati. L'analisi è iniziata partendo dal sistema dinamico.

Per l'implementazione del programma, si sono utilizzati i seguenti input: il vettore con gli otto parametri, ponendo l'attenzione su quelli che dovranno essere stimati; il vettore con le cinque variabili cui trend verrà osservato al variare del tempo; l'orizzonte temporale che si vorrà considerare; le condizioni iniziali del sistema dinamico; le ponderazioni (nel nostro caso è stato utilizzato il volume osservato); il vettore contenente i prezzi osservati dai dati storici del Bitcoin, che vanno dal 30 settembre 2015 alla data del 30 aprile 2021; i giorni dei dati storici osservati. Una volta determinati gli input si è tenuto conto delle condizioni di diversi parametri poste dall'articolo.

Fissati i sei parametri, si è proceduto con la funzione di minimizzazione, considerando vari intervalli di quest'ultima. Le prove sono state effettuate per diversi numeri di osservazione, ed orizzonti temporali differenti (giornalieri e settimanali). Nello studio si è notato un valore di indicatore di ottimizzazione troppo elevato per poter utilizzare i parametri stimati ricavati per fare un forecasting adeguato. Di conseguenza, nel prossimo paragrafo è stato analizzato un modello con cui poter estrapolare dei risultati ancora più accurati, come ad esempio il processo stocastico, dato che fino ad ora è stato usato un modello deterministico. Il calcolo stocastico viene utilizzato per adattare determinati modelli matematici con il fine di valutare titoli finanziari rischiosi come azioni e opzioni. Di conseguenza, si è esteso il modello precedente aggiungendo la componente stocastica. Si è evinto come, con l'estensione del modello, la distribuzione di probabilità dei rendimenti calcolati, seguisse similmente la distribuzione di probabilità dei rendimenti osservati. Successivamente, è stato utilizzato un modello di pricing per l'opzione riguardante il bitcoin: il modello di Heston. Esso si basa sulla volatilità stocastica i cui moti Browniani potrebbero avere correlazione con il coefficiente di correlazione istantaneo non nullo. In pratica l'analisi si basa su osservazioni del mercato, e si ipotizza che la volatilità del prezzo di un titolo sia dipendente dall'andamento del prezzo stesso. Nel paragrafo successivo si ha l'applicazione del modello sul sottostante analizzato. La procedura di calibrazione consiste nella minimizzazione dell'RMSE, o errore quadratico medio.

Esso è una misura di errore assoluta. Una volta ottenuti i risultati, si è effettuato un confronto col modello standard ed il nostro approccio in tre distribuzioni: la Gamma, la gaussiana inversa e la gaussiana inversa generalizzata.

Utilizzando tale metodo di confronto, si utilizzano le formule di valutazione dei paragrafi precedenti sia per il modello di Heston sia per il nostro modello. Il confronto è stato poi svolto considerando le quotazioni di opzioni call su Bitcoin, disponibili nel periodo 1 marzo 2021 – 31 marzo 2021. In conclusione, sulla base dei valori di RMSE ottenuti nel metodo di confronto tra il modello studiato in questa tesi e il classico modello a volatilità stocastica di Heston (1993), ampiamente applicato nell'ambito dell'ingegneria finanziaria, possiamo affermare che il modello esaminato offre dei risultati sufficientemente promettenti. Ci proponiamo dunque di approfondire con ulteriori analisi il modello considerato, svolgendo uno studio sia teorico sia applicativo e di carattere sperimentale anche su altri tipi di criptovalute presenti sul mercato.