LUISS

Dipartimento
di Economia e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

Immunizzazione finanziaria e stocastica

Prof. Marilena Sibillo
RELATORE

Gabriele Bellucci Matr. 227881
CANDIDATO

Anno Accademico 2020/2021

Indice:

Introduzione

1. Indici di temporali, di rendimento e di rischio
1.1. Tasso Interno di Rendimento
1.2. Duration
1.2.1. Duration come momento ottimo di smobilizzo
1.3. Volatility
1.4. Convexity
1.5. Critiche alla duration
1.5.1 Altri modelli di duration

2. Immunizzazione finanziaria
2.1. Teorema di Redington per una singola uscita
2.2. Teorema di Fisher-Weil
2.3. Teorema di Redington per uscite multiple
2.4. Caso pratico

3. Immunizzazione stocastica
3.1. Moto browniano standard
3.2. Moto browniano geometrico
3.3. Processo di Ornstein Uhlenbeck
3.4. Mean-reverting square-root
3.5. Duration stocastica
3.6. Introduzione al teorema dell'immunizzazione stocastica
3.6.1. Teorema dell'immunizzazione stocastica
3.6.2. Modello di Vasicek
3.6.3. Modello CIR

Conclusione

Introduzione

Gli investitori hanno l'obiettivo di ottenere il maggiore guadagno sopportando il minore rischio possibile, tuttavia non sempre hanno una visione chiara del rischio connesso alla sottoscrizione o all'acquisto di un titolo. Un fattore importante che incide su un titolo è il tasso di interesse che può avere effetti positivi o negativi per l'investitore a seconda del suo andamento.

Nel primo capitolo del seguente elaborato verrà, prioritariamente, definito il Tasso Interno di Rendimento (TIR), il quale è un indicatore della redditività di un titolo. Successivamente verrà analizzata la *duration* che non è soltanto un indicatore temporale ma rappresenta anche un indicatore del rischio di un titolo a variazioni del tasso interesse. La definizione di *duration* fu data la prima volta da Macaulay nel 1938. In particolare, vedremo come la *duration* possa essere intesa come momento ottimo di smobilizzo di un titolo. Dalla *duration* derivano due altri indicatori che gli investitori possono utilizzare per avere una visione più ampia in merito alle caratteristiche di un titolo: la *volatility* e, poi, la *convexity*. La *volatility*, come vedremo, verrà trovata studiando la derivata prima del denominatore della *duration*, ossia il prezzo di un titolo. Tale indicatore rappresenta l'elasticità del prezzo di un titolo rispetto al tasso di interesse, quindi maggiore è il valore che assume la *volatility* maggiore è la fluttuazione del prezzo del titolo a variazioni del tasso. La *convexity* verrà analizzata studiando la derivata seconda del prezzo di un titolo e ha delle caratteristiche particolari per cui, a parità di altre condizioni, l'investitore sarà portato a scegliere un titolo con *convexity* maggiore. In tale capitolo, verranno proposti degli esercizi che hanno la funzione di spiegare nella pratica ciò che viene enunciato. L'ultimo paragrafo del primo capitolo concerne le principali critiche che furono mosse da diversi economisti alla *duration* di Macaulay e verranno enunciate *duration*, con caratteristiche sottostanti diverse rispetto a quella di Macaulay.

Il secondo capitolo riguarda l'immunizzazione finanziaria, ossia la costruzione di portafogli attraverso delle tecniche che rendono quest'ultimi immunizzati da variazioni del tasso di interesse. Nel seguente capitolo verranno analizzate i teoremi di Redington a copertura di un'uscita e di uscite multiple e il teorema di Fisher e Weil, enunciando le condizioni necessari e sufficienti per l'immunizzazione di un portafoglio ed evidenziando le principali differenze fra questi teoremi. In tale capitolo verrà presentato anche un caso pratico, applicando il teorema di Fisher e Weil e costruendo un portafoglio di titolo composto nell'attivo da BTP emessi dallo Stato italiano e nel passivo da uno zero coupon bond. Successivamente, tale portafoglio sarà sottoposto a variazioni del tasso di interesse, sia nell'attivo che nel passivo, per testare le condizioni proposte nel teorema.

Nel terzo capitolo viene proposta l'immunizzazione stocastica che integra all'immunizzazione classica le aspettative degli individui sull'evoluzione dei tassi di interesse. Prioritariamente, verranno presentati i processi stocastici che hanno l'obiettivo quello di simulare l'andamento che assume il tasso nel corso del tempo. I principali processi stocastici che verranno trattati sono: il moto browniano standard, il moto

browniano geometrico, il processo di Ornstein e Uhlenbeck e il processo *mean-reverting square-root*. Tali processi sono alla base dei principali modelli di immunizzazione stocastica. Nei paragrafi successivi, verrà enunciato il teorema dell'immunizzazione stocastica a copertura di un'uscita, il modello di Vasicek e il modello di Cox, Ingersoll e Ross che, come vedremo, servono per l'immunizzazione stocastica di un portafoglio titoli.

1. Indici temporali, di rendimento e di rischio

Nel seguente capitolo verranno studiati diversi indicatori di rischio connessi ai titoli, considerano che tali indicatori sono imprescindibili per potere confrontare e prendere decisioni in merito all'attuazione di progetti finanziari, spesso alternativi fra di loro. L'analisi di questi indici finanziari è una fase ineluttabile per la scelta di un progetto finanziario. Andremo ad esaminare diversi indici temporali e di rischio tra cui la media di tutte le durate, la durata media aritmetica, la *duration*, la *duration* modificata o *volatility* e la *convexity*.

Questi indici hanno caratteristiche diverse e, come vedremo, anche attraverso esercizi, hanno diversi significati ed implicazioni. Successivamente verrà fatta un'analisi critica nei confronti di questi indicatori, proponendo il concetto di rischio di un titolo sottostante.

Questi indici temporali sono strettamente collegati al tasso di rendimento e, in particolare, al Tasso Interno di Rendimento (TIR) o *Internal Rate of Return* (IRR) il quale è uno dei principali indici di rendimento e serve come criterio di scelta per l'attuazione, o meno, di un progetto finanziario.

Per quanto concerne gli indicatori di rischio, si vedrà come la *duration* e la *convexity*, oltre ad essere degli indici temporali, possono rappresentare concretamente i rischi connessi ad un titolo. Avendo queste peculiari caratteristiche questi due indici vengono utilizzati come criteri di scelta per i progetti d'investimento. Successivamente, verranno riportate differenti interpretazioni di *duration*, enunciate da vari economisti.

Verranno proposti degli esercizi per comprendere praticamente ciò che verrà enunciato ed elaborato, dando un taglio non solo teorico ma anche applicato all'elaborato.

1.1. Tasso interno di rendimento

Introduciamo il Tasso Interno di Rendimento in quanto è un indicatore che rappresenta in maniera sintetica la redditività del titolo, redditività che include non solo l'interesse maturato ma anche il *capital gain* (o *loss*) e il reinvestimento delle cedole. Inoltre, tale tasso viene utilizzato nella formula della *duration*, che verrà analizzata successivamente, come il tasso di attualizzazione dei *cash flows*.

Il TIR è il Tasso Interno di Rendimento di un progetto d'investimento. Più precisamente, il TIR è il tasso di attualizzazione tale per cui la sommatoria dei valori attuali dei flussi di cassa sia uguale a zero (Crenca et al., 2018).

$$\sum_{t=0}^{n} a_t v^t = 0 \qquad (1)$$

dove

a_t è il flusso di cassa positivo o negativo al tempo t_k;

v^t è il fattore di attualizzazione ed è = *1/(1+i)^t*.

Secondo il criterio del TIR, l'investitore deve accettare tutti quei progetti che hanno un tasso interno di rendimento superiore al costo opportunità del capitale, il quale è il tasso di rendimento atteso dagli investitori per investimenti che hanno un grado di rischio simile. L'investitore sceglierà, fra più investimenti, il progetto d'investimento che presenta un TIR superiore.

Il TIR è un criterio adimensionale o relativo, per cui:

$$TIR(C) = TIR(\alpha * C) \qquad (2)$$

dove

$\alpha > 0$ ed è una costante moltiplicativa;

C rappresenta i cash flow dell'investimento.

Uno dei problemi che riguarda il Tasso Interno di Rendimento è che coloro che utilizzato tale tasso, non si preoccupano di fare proiezioni sui tassi di interesse ma lo utilizzano in quanto è un tasso ''deresponsabilizzante'' (Castagnoli, 2010). La vera problematica del T.I.R. non sta nel fatto che è possibile avere tanti T.I.R. quanti sono i cambi di segno delle operazioni dell'investimento o finanziamento e neppure il fatto che è possibile non avere alcun Tasso Interno di Rendimento, ma sta nel fatto di non fare ulteriori revisioni sull'andamento del tasso di interesse. In aggiunta a ciò, se i tassi a breve termine sono diversi dai tassi a lungo termine, bisogna capire quale tasso debba essere confrontato con il T.I.R.. Ulteriore problematica del T.I.R. è che esso può assumere valori inverosimili, anche arrivando a toccare il miliardo percentuale, modificando leggermente le condizioni dell'operazione di investimento o finanziamento.

1.2. Duration

Per potere prendere decisioni razionali sull'adozione di un progetto d'investimento, è necessario esaminare degli indici sintetici, come gli indici temporali. Per confrontare due diversi titoli, è fondamentale che tali titoli vengano detenuti fino alla loro scadenza, e che le scadenze coincidano tra loro. Se uno di questi titoli presenta delle cedole, ovverosia un interesse periodico che viene maturato da un'obbligazione, bisogna prendere in considerazione il tasso in cui queste cedole vengono reinvestite. In questo caso si è esposti al rischio di reinvestimento (o *reinvestment risk)*, cioè non riuscire a reinvestire i flussi di cassa positivi generati dal titolo (le cedole) allo stesso tasso che offre il titolo stesso. Maggiore è la durata di un titolo con cedole, maggiore sarà il rischio di reinvestimento. Perciò diventa fondamentale capire la reale durata del titolo, prendendo in considerazione anche il rischio di reinvestimento. Tale rischio non assume rilevanza per i titoli a capitalizzazione integrale, che sono titoli obbligazionari che non generano cedole ed il loro valore è determinato dalla differenza tra il prezzo di emissione e il valore di rimborso. Vengono definiti obbligazioni *zero coupon* e vengono emessi sotto la pari, ovverosia il prezzo di emissione è minore del valore nominale. Questa differenza rappresenta il rendimento per l'investitore. Un esempio di titolo a capitalizzazione integrale sono i Buoni Ordinari del Tesoro (BOT), i quali hanno durata di 3, 6 o 12 mesi. Visto che questi titoli hanno la caratteristica di non generare flussi di cassa e la durata dell'investimento coinciderà con la durata del titolo.

Un progetto d'investimento è caratterizzato da un'uscita di cassa iniziale e, successivamente, si otterrà una serie di *cash flow* di egual segno, ovviamente se il titolo non è un titolo a capitalizzazione integrale.

Un primo indicatore temporale che si può utilizzare per analizzare un progetto d'investimento è la "media di tutte le durate":

$$\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n} \tag{3}$$

dove

n rappresenta la scadenza dell'investimento e si suppone che le scadenze siano intere.

Tale indicatore è poco significativo in quanto non prende in considerazione due aspetti cruciali:

1) L'importi delle cedole;
2) Il tasso con cui queste cedole vengono reinvestite.

Un indicatore che tiene in considerazione il diverso importo, e quindi peso, delle cedole è la media di tutte le durate ponderata con gli importi R_k dovuti alla scadenza k, con k = 1,2, …, n. Tale indice è la "durata media aritmetica":

$$\frac{1R_1+2R_2+3R_3+\cdots+(n-1)R_{n-1}+nR_n}{R_1+R_2+R_3+\cdots+R_{n-1}+R_n} \quad (4)$$

Questo indice temporale non è adatto per analizzare correttamente un progetto d'investimento, in quanto è vero che tiene conto degli importi dei flussi di cassa intermedi, ma non prende in considerazione con quale tasso questi flussi possono essere reinvestiti, elemento fondamentale che va ad incidere in maniera significativa anche sul prezzo del titolo.

Questi due indici sono superati da un terzo indice di durata che rappresenta al meglio la versione sintetica della durata associabile ad un investimento e prende in considerazione sia la diversità degli importi disponibili alle varie scadenze sia il tasso al quale questi importi possono essere reinvestiti. Questo indice, chiamato duration di un titolo o di un portafoglio titoli, pondera le scadenze medie per il valore attuale calcolato con il TIR del progetto d'investimento.

Questo indice prende il nome di "*duration*" di Macaulay [1] (Macaulay, 1938):

$$D(i) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)R_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{n} R_k\, v(t,t_k)} \quad (5)$$

dove

$v(t, t_k)$ rappresenta il fattore di attualizzazione o di anticipazione in t di una unità di capitale dovuta in t_k

D(i) rappresenta la *duration* calcolata in presenza di una struttura a termine dei tassi.

Da come si evince il denominatore della *duration* consiste nella sommatoria del valore attuale dei flussi di cassa, cioè rappresenta il prezzo dello strumento finanziario. La *duration*, in prima analisi, è un indicatore temporale sintetico, poiché definisce la durata dell'operazione finanziaria.

1.2.1. Duration come momento ottimo di smobilizzo

Per interpretare la *duration* come momento ottimo di smobilizzo è necessario esprimere la formula della *duration* di Macaulay in funzione del tasso di interesse istantaneo δ

$$D(\delta) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)\, R_k\, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k\, e^{-\delta t_k}} \quad (6)$$

Analizziamo che cosa succede se un investitore smobilizza il titolo prima della sua scadenza, in un istante intermedio *k*. Per esaminare il valore di tutti i flussi di entrata nell'istante *k*, valore che

[1] Frederick Robertson Macaulay è stato un economista canadese nato a Montreal nel 1882 e morto a New York nel 1970. È noto per avere definito per primo il concetto di "*duration*". Macaulay si occupò anche di vendite allo scoperto alla Borsa di New York.

indicheremo con Vt_k, è necessario capitalizzare i flussi di cassa prima dell'istante t_k e attualizzare tali flussi successivi all'istante t_k. Supponiamo, a titolo esemplificativo, che $1 \leq t_k \leq 2$. Si può scrivere che:

$$V_{t_k}(\delta) = R_1 e^{\delta(t_k-1)} + R_2\, e^{-\delta(2-t_k)} + \cdots + R_n e^{-\delta(n-t_k)} \qquad (7)$$

Il primo termine della formula rappresenta il valore di reinvestimento o di reimpiego, cioè il montante dei flussi già incassati, quindi esprime il capitale disponibile al tempo t_k dato dal reinvestimento dei flussi di cassa già riscossi (in questo caso solo il primo) mentre i termini successivi rappresentano il valore di realizzo, cioè il valore attuale dei flussi da incassare (Crenca et al., 2018). Quindi, gli importi prima dell'istante generico t_k devono essere capitalizzati fino all'istante t_k e gli importi successivi all'istante generico t_k devono essere attualizzati all'istante t_k.

Si può dire che il valore del flusso al tempo t_k è uguale alla somma del valore di reinvestimento e con il valore di realizzo.

La formula (7) denota come il valore di reimpiego, in ipotesi di tassi d'interesse crescenti, aumenta in virtù del fatto di potere reinvestire i flussi di cassa che si ottengono fino a tale epoca ad un tasso superiore a quello iniziale. Dall'altro canto al crescere del tasso di interesse, cresce il valore capitalizzato e decresce il valore attualizzato. Per cui, il valore di reimpiego aumenta con shift positivi dei tassi mentre diminuisce il valore di realizzo. In caso di shift negativi dei tassi, il valore di reimpiego diminuisce mentre il valore di realizzo aumenta.

Se dividiamo la formula (7) per il fattore $e\,\hat{}(-\delta t_k)$ si ottiene:

$$V_{t_k}(\delta) = \frac{R_1 e^{\delta(t_k-1)} + R_2\, e^{-\delta(2-t_k)} + \cdots + R_n e^{-\delta(n-t_k)}}{e^{-\delta t_k}} \qquad (8)$$

Semplificando si ottiene:

$$V_{t_k}(\delta) = A\, e^{\delta t_k} \qquad (9)$$

in cui

A è il valore attuale dei flussi al tempo 0.

Supponiamo uno *shift* positivo o negativo del tasso istantaneo d'interesse, δ, e supponiamo, altresì, che tale *shift* avvenga in un momento successivo al tempo 0. Il nuovo tasso d'interesse istantaneo sarà:

$$\delta^* = \delta + y \qquad (10)$$

dove

y rappresenta lo *shift* additivo

L'obiettivo è quello di analizzare se esiste un'epoca o un momento in cui $V(t_k)$ cioè il valore di tutti i flussi di entrata al momento t_k, sia almeno pari o maggiore alla somma che l'investitore avrebbe

ottenuto, smobilizzando il flusso finanziario, se il tasso istantaneo d'interesse non avesse subito shift additivi. Per fare ciò è necessario definire il valore dei flussi di entrata al tempo t_k prendendo in considerazione lo shift del tasso d'interesse istantaneo, quindi $V_{t_k}(\delta^*)$, analizzando la funzione attraverso la derivata prima e seconda rispetto alla variazione del tasso d'interesse istantaneo e, successivamente, ponendo la derivata prima uguale a 0 per determinare il punto di minimo della funzione.

L'obiettivo dell'investitore è quello di ottenere un valore $V_{t_k}(\delta^*)$, ad un tasso d'interesse che subisce uno shift, maggiore o uguale al valore che l'investitore avrebbe ottenuto senza shift del tasso. Quest'ultimo valore lo indichiamo con $V_{t_k}(\delta)$, dove δ è il tasso d'interesse istantaneo iniziale al tempo 0.

Il valore $V_{t_k}(\delta^*)$ è:

$$V_{t_k}(\delta^*) = R_1\, e^{-\delta^*(1-t_k)} + R_2\, e^{-\delta^*(2-t_k)} + \cdots + R_n\, e^{-\delta^*(n-t_k)} \geq V_{t_k}(\delta) \quad (11)$$

L'obiettivo dell'investitore sarà quello di avere il valore $V_{t_k}(\delta^*)$, al tasso post-shift, che sia maggiore o uguale al valore del portafoglio senza shift del tasso, valore indicato con $V_{t_k}(\delta)$, dove δ è il tasso iniziale, quello esistente al tempo 0.

dalla formula (11) si evince che:

$$V_{t_k}(\delta^*) \geq A\, e^{\delta t_k} \quad (12)$$

per cui:

$$V_{t_k}(\delta^*) = R_1\, e^{-\delta^*(1-t_k)} + R_2\, e^{-\delta^*(2-t_k)} + \ldots + R_n\, e^{-\delta^*(n-t_k)} \quad (13)$$

moltiplicando e dividendo per il fattore $e^{(-\delta^* t_k)}$:

$$V_{t_k}(\delta^*) = \frac{1}{e^{-\delta^* t_k}}\left[R_1 e^{-\delta^*(1-t_k)} + R_2 e^{-\delta^*(2-t_k)} + \ldots + R_n e^{-\delta^*(n-t_k)}\right] \quad (14)$$

Da come si evince dalla formula (14), il valore di reimpiego e il valore di realizzo sono influenzati dal momento t_k e dall'andamento del tasso d'interesse. Se la formula (14) è verificata, l'investitore raggiungerà il suo obiettivo, ossia quello di ottenere un valore $V_{t_k}(\delta^*)$ che sia maggiore o uguale al valore che avrebbe ottenuto se non ci fosse stata la variazione del tasso, $V_{t_k}(\delta)$.

La discordanza tra il valore di reimpiego e il valore di realizzo è data dal fatto che il valore di reimpiego, fissando l'epoca di valutazione, decresce al crescere del tasso d'interesse e, fissando il tasso, decresce o almeno non cresce al crescere dell'epoca di valutazione, mentre il valore di realizzo, fissando l'epoca di valutazione, cresce al decrescere del tasso d'interesse e, fissando il tasso d'interesse, cresce o almeno non decresce al decrescere dell'epoca di valutazione. L'investitore

cercherà un punto nel quale i due effetti si controbilanceranno perfettamente. In tale punto, l'investitore otterrà almeno il rendimento che aveva previsto al momento della sottoscrizione dello strumento finanziario, indipendentemente dall'andamento del tasso di interesse ciò a condizione che la variazione del tasso avvenga prima della prima scadenza.

Per potere trovare questo punto, è necessario fare la derivata prima di $V_{t_k}(\delta^*)$, in modo tale da studiare la sensibilità della funzione a dei cambiamenti al tasso istantaneo di interesse (δ).

Calcoleremo la derivata prima della funzione δ^* ponendo $\delta^*=\delta$, come segue:

$$V'_{t_k}(\delta) = \frac{1}{e^{-\delta t_k}}\{R_1 e^{-\delta(1-t_k)}[-(1-t_k)] + R_2 e^{-\delta(2-t_k)}[-(2-t_k)] + \cdots + R_n e^{-\delta(n-t_k)}[-(n-t_k)]\} \quad (15)$$

Per andare a studiare la convessità della funzione, l'obiettivo è quello di vedere se la funzione in δ assume un punto di minimo e ciò accade se la derivata seconda in δ è maggiore di 0.

La derivata seconda della funzione è:

$$V''_{t_k}(\delta) = \frac{1}{e^{-\delta t_k}}\{R_1 e^{-\delta(1-t_k)}[-(1-t_k)]^2 + R_2 e^{-\delta(2-t_k)}[-(2-t_k)]^2 + \cdots + R_n e^{-\delta(n-t_k)}[-(n-t_k)]^2\} \quad (16)$$

Dall'analisi matematica sappiamo che se la derivata seconda è maggiore di 0 la funzione volge la concavità verso l'alto ed il punto in cui la derivata prima si annulla è un punto di minimo. Ciò implica che il valore dei flussi al tempo t_k per variazioni del tasso istantaneo di interesse è maggiore del valore dei flussi al tempo t_k senza variazioni del tasso istantaneo d'interesse. Riprendendo la formula (10), essenziale nell'analisi della funzione è il punto di minimo che viene trovato ponendo la variazione del tasso istantaneo di interesse (y) uguale a 0 e rispettando la condizione per cui il valore dei flussi all'istante t_k e al tasso δ^*, $V_{t_k}(\delta^*)$ risulti maggiore o uguale del valore dei flussi all'istante t_k, $V_{t_k}(\delta)$. Per ottenere il punto di minimo della funzione è necessario porre la derivata prima della funzione uguale a 0 e vedere che valore deve assume t_k, tale valore sarà desunto dalle formule successive. Quindi, se y=0 allora $\delta^*=\delta$.

$$V'_{t_k}(\delta) = -[A_1(1-t_k) + A_2(2-t_k) + \ldots + A_n(n-t_k)] = 0 \quad (17)$$

Risolvendo per t_k:

$$t_k = \frac{A_1 1 + A_2 2 + \ldots + A_n n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} \quad (18)$$

Ricordando che A rappresenta il valore attuale dei flussi, allora tale formula corrisponde alla *duration* del flusso calcolata in t=0. Infatti:

$$D(\delta) = t_k = \frac{R_1 e^{-\delta 1} 1 + R_2 e^{-\delta 2} 2 + \ldots + R_n e^{-\delta n} n}{R_1\, e^{-\delta 1} + R_2\, e^{-\delta 2} + \ldots + R_n\, e^{-\delta n}} \tag{19}$$

Utilizzando la sommatoria si nota che la formula (19) corrisponde esattamente alla formula (6) che rappresentava la *duration* al tasso istantaneo di interesse:

$$D(\delta) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k\, R_k\, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k\, e^{-\delta t_k}}$$

Deriva la funzione peculiare della *duration* come momento ottimo di smobilizzo, cioè un'epoca tale in cui l'investitore, disinvestendo nell'istante coincidente con la *duration*, sicuramente otterrà un rendimento almeno pari al rendimento predefinito nel periodo in cui lo strumento finanziario fu acquistato (Crenca, et al., 2018).

Nel considerare la *duration* come momento ottimo di smobilizzo, l'analisi parte dal concetto che la variazione del tasso di interesse avvenga dall'epoca 0 e che questo shift rimanga costante per tutto l'arco temporale e tale variazione incide su tutti i flussi di cassa intermedi.

Questa proprietà della *duration* è fondamentale per un investitore in quanto può predeterminare esattamente l'attimo in cui, indipendentemente da variazioni del tasso, può riottenere almeno la stessa cifra che ha investito al tempo 0.

Per comprendere i concetti analizzati nel precedente paragrafo concernente la *duration*, proponiamo un esempio in cui si valuta come la *duration* cambia al cambiare degli strumenti finanziari a cui si riferisce (BTP e ZCB) e come si comporta quando il tasso di interesse effettivo aumenta o diminuisce.

Prenderemo in considerazione tre titoli che presentano delle caratteristiche diverse, in termini di struttura. Il primo titolo è un BTP con scadenza 4 anni, con valore nominale pari a 10000€, tasso cedolare 7% e conseguentemente cedola pari a 700€ ogni anno. Alla scadenza, l'investitore otterrà il valore di rimborso e la cedola. Il secondo titolo paga solo due rate al tempo 2 e al tempo 4 di importo 6111,22€. Tale titolo è stato proposto per ottenere lo stesso TIR del BTP e per capire come muoversi quando ciò accade ed è quindi stato creato ad hoc. Il terzo titolo è uno zero coupon bond che presuppone un investimento iniziale in t=0 di 10000€; in tale titolo non ci sono cedole e l'interesse maturata sull'intera somma investita è dato dalla differenza tra valore di acquisto e valore di rimborso, in tale caso pari a 3107,96€. Successivamente, valuteremo il comportamento della *duration* a variazioni del tasso di interesse. Nella figura 1 riportiamo i tre titoli appena descritti, con il relativo TIR calcolato attraverso la funzione tir.cost e la *duration* di ciascun titolo.

Fig. 1 ''Esercizio Duration''

VN =	10000				
j(1)=	7%				
Cedola=	700				
t	t+1	BTP A	Titolo B	ZCB C	v(0,t)
0	1	- 10.000,00 €	- 10.000,00 €	- 10.000,00 €	
1	2	700,00 €	- €	- €	**0,934579439**
2	3	700,00 €	6.111,22 €	- €	**0,873438728**
3	4	700,00 €	- €	- €	**0,816297877**
4	5	10.700,00 €	6.111,22 €	13.107,96 €	**0,762895212**
	TIR=	**7,00%**	**7,00%**	**7,00%**	
	Duration=	**3,62**	**2,93**	**4,00**	

(Elaborazione personale, il TIR è stato trovato con la funzione tir.cost)

Dall'analisi emerge come i tre titoli presentano, come ci aspettavamo, lo stesso Tasso Interno di Rendimento (TIR) pari al 7%. Quindi, prendendo in considerazione soltanto il metodo del TIR è impossibile per l'investitore scegliere su quale titolo investire il capitale iniziale di 10000 euro. L'investitore per potere decidere su quale titolo investire può analizzare la *duration* di ogni titolo. In questo caso, l'investitore sceglierà di investire in uno di questi tre titoli prendendo in considerazione le aspettative future sulle variazioni del tasso di interesse. Se l'investitore ha aspettative di futuri rialzi del tasso di interesse, che sarà in tal caso superiore al 7%, allora sceglierà il titolo ''BTP B'' in modo da poter smobilitare prima l'investimento e sfruttare tassi di interesse più elevati ottenendo così un montante superiore. Se, invece, l'investitore ha aspettative ribassiste sul futuro tasso di interesse, andrà a scegliere il titolo ''ZCB C'' in questo modo coprirà le eventuali perdite derivanti dal reinvestire le cedole ad un tasso più basso. L'investitore fa queste scelte in base alle sue aspettative sui tassi di interesse, infatti se pensa che i tassi aumentano nel futuro l'investitore sceglierà il titolo ''BTP B'' in quanto presenta una *duration* minore rispetto agli altri titoli: ciò, quindi permette all'investitore di smobilizzare l'investimento prima e di reinvestire a tassi più elevati. Se l'investitore ha aspettative di ribasso dei tassi di interesse allora sceglierà il titolo ''ZCB C'' che presenta una *duration* maggiore, coprendosi da potenziali perdite causate dal reinvestimento dei fluissi ad un tasso minore.

Successivamente, riprenderemo questo caso includendo nell'analisi anche la *volatility* e la *convexity* e supponendo variazioni positive e negative del tasso di interesse.

1.3. Volatility

Per potere analizzare la *duration* come volatilità è necessario riprendere le formule delle *duration* calcolate al tasso effettivo d'interesse e al tasso istantaneo d'interesse, che scriviamo qui di seguito:

$$D(i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \; R_k \, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k \, (1+i)^{-t_k}}$$

$$D(\delta) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \, R_k \, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k \, e^{-\delta t_k}}$$

I denominatori di queste due funzioni rappresentano il prezzo del titolo in funzione del tasso di interesse effettivo e del tasso istantaneo di interesse. Per analizzare la *volatility*, dobbiamo studiare questi due denominatori valutando la derivata prima che, come detto, permette di capire la sensibilità della funzione, in questo caso del prezzo, a variazioni del tasso di interesse. La derivata prima assurge a ruolo fondamentale per comprendere le fluttuazioni del prezzo del titolo a cambiamenti del tasso di interesse.

Inizialmente, prenderemo in considerazione il denominatore della *duration* al tasso effettivo d'interesse derivandolo e, infine, utilizzando la serie di Taylor per valutarne l'effetto dello shift del tasso sul prezzo del titolo. Riscriviamo il prezzo del titolo in funzione del tasso effettivo di interesse, ipotizzando una struttura dei tassi piatta:

$$P = V(i) = \sum_{k=1}^{n} R_k \, (1+i)^{-t_k} \tag{20}$$

La derivata prima è

$$\frac{dV(i)}{di} = -\sum_{k=1}^{n} t_k \, R_k \, (1+i)^{-(t_k+1)} = -\frac{1}{1+i} \sum_{k=1}^{n} t_k \, R_k \, (1+i)^{-t_k} \tag{21}$$

Dividendo entrambi i membri per V(i), otterremo la variazione relativa del prezzo del titolo a shift del tasso effettivo di interesse, facendo i seguenti passaggi.

$$\frac{\Delta V(i)}{V(i)} = \frac{\Delta V(i + \Delta i) - V(i)}{V(i)} \cong \frac{dV(i)}{V(i)} = \frac{\frac{dV(i)}{di}}{V(i)} \Delta i = -\frac{1}{1+i} \; \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \, R_k (1+i)^{-t_k}}{V(i)} \; \Delta i \tag{22}$$

Nel membro di destra della (22) riconosciamo la *duration*, per cui è possibile scrivere la seguente espressione:

$$\frac{\Delta V(i)}{V(i)} \cong -\frac{1}{1+i} D(i) \Delta i \tag{23}$$

L'espressione:

$$-\frac{1}{1+i}D(i)$$

è indicata come della volatilità del titolo ed è data dalla *duration* corretta per il fattore – (1/1+i); può essere indicata anche come *duration modificata*. Il segno negativo dinanzi la funzione si spiega in quanto c'è una relazione inversa tra variazioni del tasso di interesse e variazioni del prezzo del titolo, per cui se il tasso di interesse diminuisce il prezzo dello strumento finanziario sale e viceversa.

Possiamo procedere ad analizzare che cosa accade nel caso della capitalizzazione continua, cioè prendendo in considerazione il tasso istantaneo di interesse. Come fatto precedentemente, analizziamo la derivata del prezzo del titolo in funzione del tasso istantaneo di interesse:

$$\frac{dV(\delta)}{d\delta} = -\sum_{k=1}^{n} t_k\, R_k\, e^{-\delta * t_k} \tag{24}$$

Tale funzione esprime la sensibilità del prezzo del titolo a fluttuazioni del tasso istantaneo di interesse. Dividiamo entrambi i membri per *V(δ)* e ripetendo le stesse considerazioni svolte nel caso del tasso effettivo d'interesse i, si ottiene:

$$\frac{\Delta V(\delta)}{V(\delta)} \cong \frac{-\sum_{k=1}^{n} t_k\, R_k\, e^{-\delta t_k}}{V(\delta)}\Delta\delta = -D(\delta)\Delta\delta \tag{25}$$

In questo caso, invece, la volatilità del titolo coincide con la *duration* con segno cambiato.

Quindi, come in precedenza osservato, maggiore è la *duration*, maggiore è l'effetto sul prezzo delle fluttuazioni del tasso di interesse. I risultati ottenuti nelle formule (25) e (23) possono essere ricavati anche utilizzando la serie di Taylor:

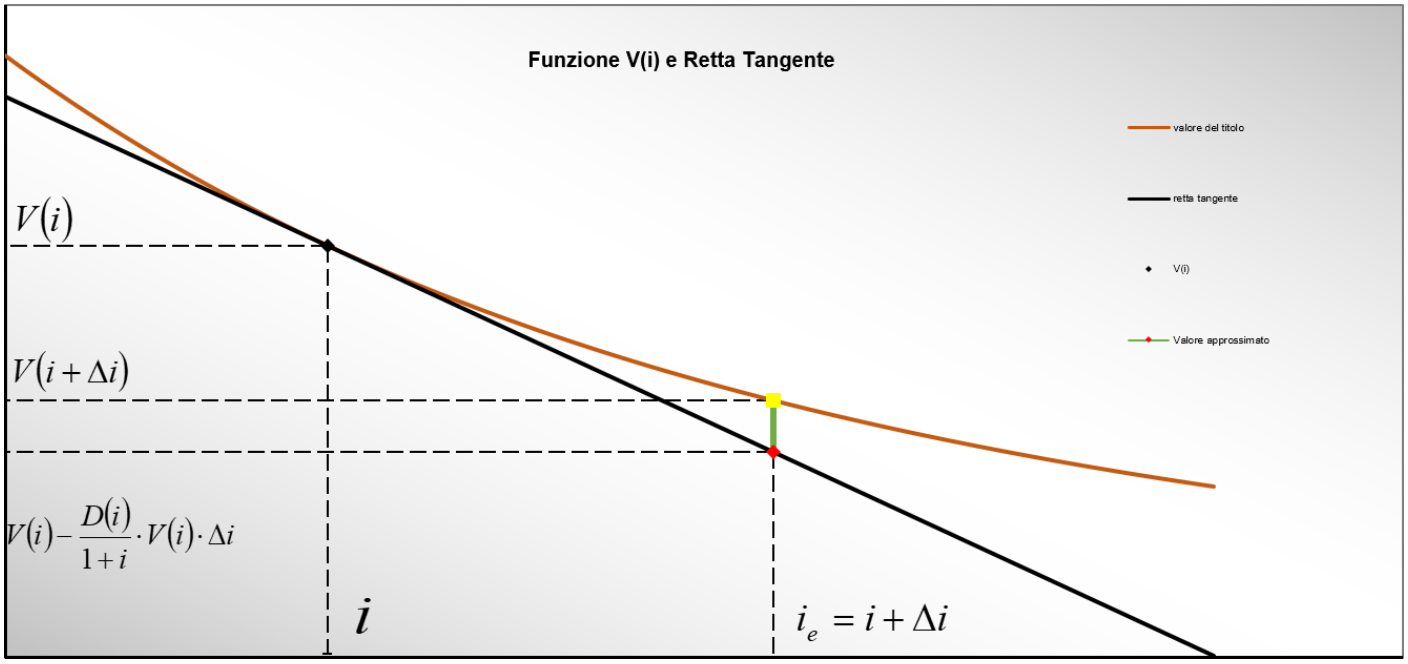
$$V(\delta + \Delta\delta) \cong \mathrm{V}(\delta) + \frac{dV(\delta)}{V(\delta)}\Delta\delta = \mathrm{V}(\delta) - D(\delta)\, V(\delta)\, \Delta\delta \tag{26}$$

Portando la variazione percentuale del prezzo del titolo al primo membro e dividendo per *V(δ)*, otteniamo:

$$\frac{V(\delta + \Delta\delta) - V(\delta)}{V(\delta)} \cong -\mathrm{D}(\delta)\, \Delta\delta \tag{27}$$

e si evince che la variazione relativa del prezzo del titolo è direttamente è proporzionale alla *duration D(δ)* e alla variazione del tasso di istantaneo di interesse (Δδ), questo risultato ottenuto nella formula (27) è lo stesso che è stato ottenuto nella formula (25).

Fig. 2 ‘’ Profilo prezzo-rendimento e approssimazioni’’



(Crenca et al., 2018)

La figura 2 evidenzia come la funzione prezzo (colore amaranto nel grafico) domina la retta tangente alla curva (colore nero), tranne nel punto di tangenza con la curva stessa. L’errore di approssimazione che si effettua prendendo in analisi soltanto la duration è pari, graficamente, alla differenza nell’asse delle ordinate tra la retta tangente (colore nero) e la curva stessa (colore amaranto), tale differenza è riscontrabile graficamente dal tratto verde. Maggiore è la variazione del tasso di interesse, maggiore è l’errore di approssimazione che si commette utilizzando la duration, e cioè posizionandosi sulla retta, per stimare le variazioni del prezzo del titolo. Un altro elemento che deriva dal grafico è la conferma della relazione inversa tra tasso di interesse e prezzo del titolo, cioè all’aumentare dell’uno diminuisce l’altro e viceversa. Un ulteriore elemento che si evince dal grafico è che la variazione del prezzo del titolo a shift del tasso di interesse effettivo è uguale sia in caso di shift positivi che negativi. Tuttavia, ciò che abitualmente succede nei mercati finanziari è che i titoli diversi potrebbero avere una variazione del prezzo significativamente diversa a cambiamenti del tasso.

Per potere analizzare questo ulteriore fattore di sensibilità, bisogna non solo considerare la duration, ma anche la convessità della curva. Come detto l’errore di approssimazione sarà tanto più ampio quanto maggiore sarà lo *shift* del tasso di interesse, tale errore di approssimazione è pari alla differenza tra la variazione del prezzo effettiva che ha subito il titolo e la variazione del prezzo stimata sulla retta.

Nel successivo paragrafo prenderemo in considerazione questo elemento di convessità che permette di ridurre l’errore di approssimazione ed è anche un ulteriore indicatore di rischio per l’investitore nel momento dell’analisi tra diversi strumenti finanziari.

1.4. Convexity

Nell'analisi della *volatility* abbiamo limitato l'attenzione al secondo termine della serie di Taylor ciò porta a stimare il cambiamento del prezzo sulla retta tangente e non sulla funzione prezzo *V(i)* che, come abbiamo visto, volge la concavità verso l'alto. Per migliorare ulteriormente l'approssimazione possiamo estendere la serie di Taylor ad ulteriore termine rispetto allo sviluppo nella formula (26).

Per esaminare la convessità della curva dei tassi di interesse è necessario trovare la derivata seconda del prezzo del titolo, cioè il denominatore della duration, in funzione sempre del tasso interno di rendimento. Consideriamo il caso della capitalizzazione continua.

Otteniamo:

$$\frac{dV^2(\delta)}{d\delta^2} = \sum_{k=1}^{n} {t_k}^2 \, R_k \, e^{-\delta * t_k} \tag{28}$$

Come fatto precedentemente con la *volatility*, dividiamo per il fattore *V(δ)* e otteniamo:

$$\frac{\frac{dV^2(\delta)}{d\delta^2}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} {t_k}^2 \; R_k \; e^{-\delta t_k}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} {t_k}^2 \, R_k \; e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k \; e^{-\delta t_k}} = D^2(\delta) = convexity \tag{29}$$

Dall'equazione (29) si vede come la convexity nel caso continuo coincida esattamente con la *duration* di secondo ordine, analogamente a quanto visto nel precedente paragrafo (la duration, a meno del segno, coincide con la volatility). Come abbiamo visto, la *duration* si calcola attraverso la derivata prima della funzione prezzo, che rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente rispetto la funzione; analogamente, la *convexity* rappresenta graficamente la curvatura della funzione valore.

Possiamo, come fatto in precedenza per la *volatility*, utilizzare la *convexity* per migliorare l'approssimazione già ottenuta con le formule (26) e (27) per calcolare la variazione relativa del prezzo del titolo, estendendo al terzo termine la serie di Taylor.

Otteniamo:

$$V(\delta + \Delta\delta) \cong \mathrm{V}\,(\delta) + \frac{dV(\delta)}{d\delta}\,\Delta\delta + \frac{d^2V(\delta)}{d^2\delta}\,\frac{\Delta\delta^2}{2!} = V(\delta) - D(\delta)\,V(\delta)\,\Delta\delta + D^2(\delta)\,\mathrm{V}(\delta)\,\frac{\Delta\delta^2}{2!} \tag{30}$$

L'approssimazione diventa più accurata in quanto viene aggiunto un nuovo termine alla serie di Taylor.

La variazione percentuale del prezzo in funzione di variazioni del tasso di interesse diventa:

$$\frac{V(\delta+\Delta\delta)-V(\delta)}{V(\delta)} \cong -\mathrm{D}(\delta)\,\Delta\delta + D^2(\delta)\,\frac{\Delta\delta^2}{2!} \tag{31}$$

Il secondo termine al secondo membro dell'equazione (31) migliora l'approssimazione della variazione del prezzo. Aumentando la variazione in caso di diminuzione del tasso e diminuendo l'effetto in caso di rialzo del tasso di interesse, la *convexity* ha la funzione di aumentare il valore del titolo in caso di ribasso del tasso e di attenuare la caduta del prezzo del titolo in caso di un rialzo del tasso di interesse, migliorando in entrambi i casi l'approssimazione.

Per questa sua caratteristica, a parità di altre condizioni, un investitore che dovrà scegliere fra due titoli sceglierà quello che presenta una *convexity* maggiore sfruttando la capacità del titolo di ampliare gli effetti positivi di un ribasso del tasso di riferimento sul prezzo dello strumento finanziario o di ridurre le perdite in caso di un rialzo dei tassi che ha un effetto negativo sul prezzo del titolo.

Riprendiamo lo stesso procedimento appena seguito prendendo in considerazione il tasso di interesse effettivo, otteniamo:

$$\frac{d^2V(i)}{di^2} = \sum_{k=1}^{n} t_k\,(t_k+1)\,R_k\,(1+i)^{-(t_k+2)} = \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{k=1}^{n}(t_k+{t_k}^2)\,R_k\,(1+i)^{-t_k} \tag{32}$$

Dividendo entrambi i membri per *V(i)*, otteniamo:

$$\frac{\frac{d^2V(i)}{di^2}}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k+{t_k}^2)\,R_k\,(1+i)^{-t_k}}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k+{t_k}^2)\,R_k\,(1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n}R_k\,(1+i)^{-k}} = \frac{1}{(1+i)^2}\left[D(i)+D^2(i)\right] = convexity \tag{33}$$

L'equazione (33) mostra come, differentemente da quanto verificato per la capitalizzazione continua, nella capitalizzazione discreta la *convexity* non coincida esattamente con la *duration* di secondo ordine.

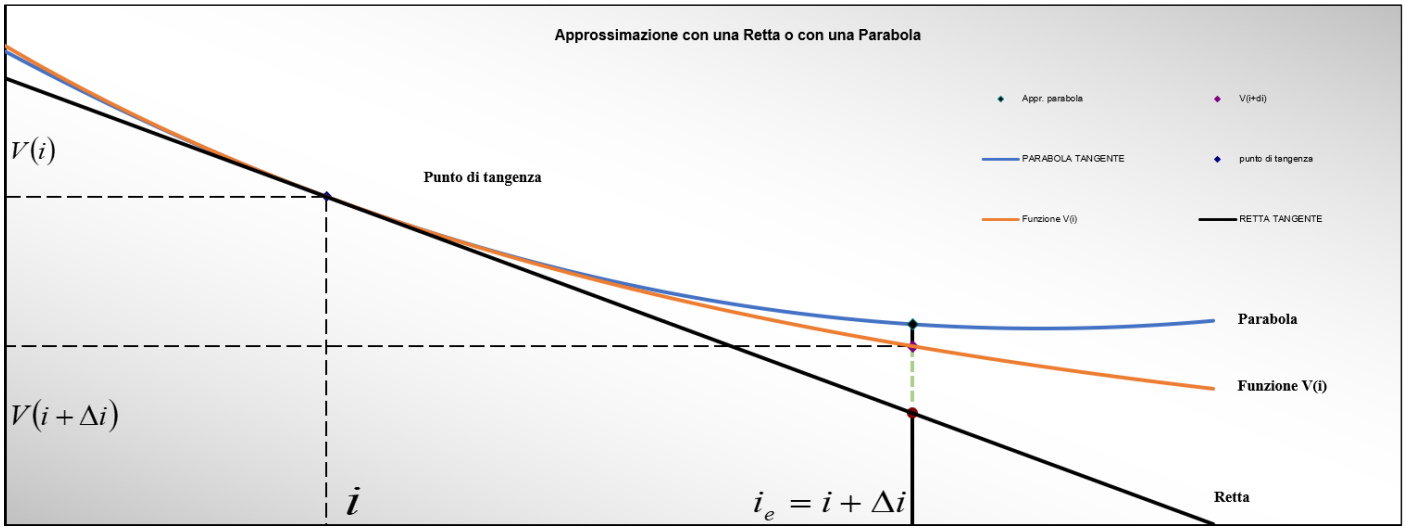
Prendendo in considerazione la serie di Taylor ricaviamo:

$$V(i+\Delta i) \cong V(i) + \frac{dV(i)}{di}\,\Delta i + \frac{d^2V(i)}{di^2}\,\frac{\Delta i^2}{2!} = V(i) - \frac{D(i)}{(1+i)}\,V(i)\,\Delta i + \frac{D(i)+D^2(i)}{(1+i)^2}\,V(i)\,\frac{\Delta i^2}{2!} \tag{34}$$

Sapendo che *-D(i)/(1+i)* coincide esattamente con la *volatility* e che il fattore *D(i)+D^2(i)/(1+i)^2* combacia con la *convexity*, otteniamo immediatamente che la variazione percentuale del prezzo può essere scritta anche come segue:

$$\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{V(i)} \cong Volatility\,\Delta i + Convexity\,\frac{\Delta i^2}{2!} \tag{35}$$

Fig. 3 ‘’ Profilo prezzo-rendimento e approssimazioni’’



(Crenca et al., 2018)

Dalla figura 3 si evince che introducendo un nuovo termine nella serie di Taylor, l’approssimazione diventa più accurata, ciò permette di utilizzare proficuamente la *convexity* soprattutto in caso di variazioni ampie del tasso di interesse. La figura 3 presenta l’aspetto grafico di quanto affermato, per cui, analizzando la variazione direttamente sulla parabola l’errore di approssimazione è meno marcato. Dall’altra parte per variazioni infinitesimali del tasso di interesse, potrebbe già essere sufficiente fermarsi al primo termine della serie di Taylor in quanto dà un’adeguata rappresentazione dell’approssimazione del prezzo del titolo.

La *convexity*, a parità di altre condizioni, viene utilizzata da un investitore come criterio di scelta tra investimenti alternativi. Tuttavia, è da notare che nella realtà non viene utilizzata come approssimazione della variazione del prezzo dello strumento finanziario in funzione di shift del tasso di interesse, risultando più veloce il calcolo del prezzo ex post direttamente dalla funzione.

A questo punto per spiegare in maniera più concreta quanto detto finora, verrà preso in considerazione l’esercizio esemplificativo riportato nel paragrafo 1.2., aggiungendo all’analisi i concetti di *volatility* e *convexity* e vedendo come questi indicatori di rischio vengono utilizzate come criteri di scelta in caso di progetti alternativi.

Fig. 4 ''Esercizio Duration, Volatility e Convexity''

VN =	10000				
j(1)=	7%				
Cedola=	700				
t	t+1	BTP A	Titolo B	ZCB C	v(0,t)
0	1	- 10.000,00 €	- 10.000,00 €	- 10.000,00 €	
1	2	700,00 €	- €	- €	**0,934579439**
2	3	700,00 €	6.111,22 €	- €	**0,873438728**
3	4	700,00 €	- €	- €	**0,816297877**
4	5	10.700,00 €	6.111,22 €	13.107,96 €	**0,762895212**
	TIR=	**7,00%**	**7,00%**	**7,00%**	
	Duration=	**3,62**	**2,93**	**4,00**	
	Volatility=	**3,39**	**2,74**	**3,74**	
	Convexity=	**15,29**	**10,94**	**17,47**	

(Elaborazione personale effettuata tramite excel)

Nello svolgimento di tale esercizio si riprendono gli stessi titoli, le cui caratteristiche sono state enunciate nel precedente paragrafo. Come abbiamo visto, il primo fattore che l'investitore potrebbe prendere in considerazione, per scegliere il titolo da comprare, è il tasso interno di rendimento (TIR). Tuttavia, questi tre titoli sono stati scelti in modo che essi presentano lo stesso TIR calcolato con la funzione tir.cost di Excel. Basandoci solo su questo indicatore dovremmo giudicare indifferente la scelta di uno o l'altro dei tre diversi progetti alternativi. In aggiunta a ciò, il TIR presenta delle problematiche già affrontate precedentemente che rendono tale indicatore non totalmente affidabile. Un secondo fattore che l'investitore potrebbe prendere in analisi è la *duration* che presenta dei valori diversi tra i titoli in quanto sono diverse le loro strutture.

La *duration* di uno *zero-coupon bond*, come detto, è uguale al momento in cui l'obbligazione scade (nel nostro caso è pari a 4) mentre il BTP ha una *duration* pari a 3,62 e il titolo B ha una *duration* pari a 2,93. In questo caso, prendendo come solo oggetto di analisi la *duration*, l'investitore baserà la sua scelta d'investimento soprattutto in relazione alle sue aspettative sui tassi di interesse. Infatti, se l'investitore pensa che i tassi aumenteranno sceglierà il titolo con una *duration* più bassa (titolo B) in modo da potere uscire prima dall'investimento, e reinvestire la somma ottenuta ad un tasso di interesse maggiore ciò permette all'investitore di ottenere un saldo finale superiore. Se, invece, l'investitore ha aspettative di ribasso del tasso di interesse, sceglierà il titolo che presenta una duration più alta in modo da non investire ad un tasso più basso rispetto a quello del titolo, nel caso di specie pari al 7%. Questa analisi viene supportata dalla *volatility* e dalla *convexity*, che vengono ottenute applicando le formule precedentemente discusse.

Per testare le deduzioni effettuate prendiamo in considerazione quale titolo scegliere in base ad un aumento o diminuzione del tasso, e quindi sulle aspettative dell'investitore, prendiamo in

considerazione shift additivi o sottrattivi del tasso interno di rendimento di 0.5 punti percentuali e il loro effetto sul saldo finale dei singoli titoli.

Fig. 5 '' effetto della variazione del tasso effettivo sul saldo finale dei titoli''

Se	Δi=	0,50%		
t	Saldo A	Saldo B	Saldo C	i(t-1,t)
0				
1	700,00 €	- €	- €	7,00%
2	1.452,50 €	6.111,22 €	- €	7,50%
3	12.268,70 €	6.600,12 €	13.107,96 €	8,00%
4	13.161,54 €	**13.272,35 €**	13.107,96 €	8,50%
Se	Δi=	-0,50%		
t	Saldo A	Saldo B	Saldo C	i(t-1,t)
0				
1	700,00 €	- €	- €	7,00%
2	1.445,50 €	6.111,22 €	- €	6,50%
3	2.232,23 €	6.477,89 €	- €	6,00%
4	13.055,00 €	12.945,40 €	**13.107,96 €**	5,50%

(elaborazione personale effettuata tramite excel)

L'esercizio verifica che un investitore dovrebbe preferire un titolo che presenta una *duration* e una *volatility* minore in caso di aumento del tasso di interesse, in quanto reinvestendo il titolo prima rispetto agli altri titoli ad un tasso più elevato otterrà un saldo finale maggiore. Ciò è evidente in quanto il titolo B che presenta una *duration* minore rispetto agli altri titoli, ottiene anche un saldo finale maggiore pari a 13272,35 euro. Nel caso in cui ci fosse una diminuzione del tasso di interesse dello stesso ammontare, l'investitore dovrebbe scegliere il titolo che presenta una *duration*, e quindi una *volatility* e *convexity*, maggiore in modo da proteggersi dal ribasso del tasso smobilitando l'investimento in un periodo superiore, sfruttando così un tasso di interesse maggiore. Tale analisi è suffragata dal fatto che lo ZCB C, in caso di ribasso del tasso, presenta un saldo finale maggiore rispetto agli altri titoli, precisamente pari a 13107,89 euro.

1.5. Critiche alla duration

La *duration* di Macaulay è stata fortemente criticata da diversi economisti tra cui John Cox, Jonathan Ingersoll e Staphen Ross (Cox et al., 1979) che hanno analizzato sia le condizioni entro cui la duration proposta da Macaulay nel 1938 può essere un efficace ed efficiente indicatore di rischio di un titolo, sia contestato alcune condizioni intrinseche nella *duration* di Macaulay, proponendo un diverso indicatore di rischio più complesso e comprensivo di ulteriori elementi non adeguatamente presi in considerazioni da Macaulay.

Una prima critica mossa dai tre economisti è il fatto di calcolare la volatilità di un titolo attraverso la sua elasticità, quindi attraverso la derivata, in quanto i risultati che vengono ottenuti non possono essere utilizzati per fare un confronto trasversale fra i diversi titoli in termini di rischiosità. Dalla formula della *duration* di Macaulay e dall'analisi proposta successivamente, è emerso come un titolo con un'elevata *duration* è influenzato in maniera più intensa a variazioni del tasso di interesse rispetto ad un titolo con una *duration* minore.

Questa analisi non è necessariamente vera in quanto un titolo con una durata più bassa può essere maggiormente influenzato da variazioni del tasso di interesse rispetto ad un titolo con una durata più alta, ciò viene confermato prendendo in considerazione una variazione del tasso a pronti che lascia inalterati i tassi a termine dimostrando come una variazione dei tassi ha effetti in eguale misura su tutti i titoli indipendentemente dalla durata dello strumento finanziario.

Successivamente, Ingersoll, Skelton e Weil (Ingersoll et al., 1978) dimostrarono come la formula della *duration* di Macaulay è un buon indicatore di rischio soltanto quando il tasso di interesse e il rendimento a scadenza di tutti i titoli cambiano dello stesso ammontare. Ciò dimostra una relazione statica di misura del rischio di un titolo, infatti la *duration* di Macaulay è un accurato indicatore di rischio di un titolo solo quando ci sono shift paralleli nell'intera curva dei rendimenti e quest'ultima non deve subire mutamenti a causa della variazione del tasso. Questa ipotesi si scontra con il fatto che nella realtà la variazione del tasso di interesse può incidere in maniera non parallela sulla curva dei rendimenti, modificando la sua struttura. In questo caso, la *duration* così come definita da Macaulay non è più un attendibile indicatore del rischio di un'obbligazione. La *duration* di Macaulay è un affidabile indicatore di rischio solo quando il livello del tasso di interesse è indipendente rispetto alle altre variabili, tale indipendenza non è sempre riscontrabile nei mercati.

È importante ricordare il significato di *duration* di Macaulay come momento ottimo di smobilizzo dei flussi che è vincolato al fatto che lo spostamento di tutta la struttura dei tassi debba comunque avvenire entro la scadenza del primo flusso. Se la variazione dei tassi avviene in periodi successivi al primo, è

necessario attuare la ricalibrazione del portafoglio, cioè la tecnica di manutenzione del portafoglio che consente di ricalibrare i flussi in modo da lasciare inalterata anche la *duration*.

Partendo da queste critiche sulla reale funzionalità della *duration* di Macaulay, il prossimo paragrafo prenderà in considerazione diverse idee di *duration* proposte da illustri matematici finanziari ampliando l'analisi ad ulteriori fattori.

1.5.1. Altri modelli di duration

Successivamente alla introduzione della *duration* di Macaulay del 1938, molti economisti hanno proposto e formulato un diverso tipo di *duration* ampliando l'analisi ad altri fattori. Temporalmente le prime proposte di *duration* diverse da quella di Macaulay furono enunciate da Bierwag nel 1977 e Cooper nel 1977.

La *duration* di Bierwag è data dalla seguente relazione (Bierwag, 1977):

$$D(1) = \frac{1}{P(m)} \int_0^m C(t)\ t\ R(t) \exp\left[-R(t)\ t\right] dt \tag{36}$$

dove

P(m) è il prezzo del titolo obbligazionario con maturity m calcolato all'emissione del titolo stesso;

C(t) R(t) dt è il flusso di cassa riferito all'intervallo infinitesimo t, t + dt;

R(t) è il tasso istantaneo a pronti.

La *duration* proposta da Bierwag presuppone una curva dei tassi molto più ripida rispetto a quella di Macaulay. Biergaw prende in considerazione movimenti additivi e moltiplicativi della curva dei rendimenti, cioè presuppone possibili cambiamenti sia nella pendenza sia nel livello della curva stessa (Bierwag, 1977). Inoltre, in Bierwag si considerano fattori additivi e moltiplicativi della *duration* anche nell'immunizzazione di un portafoglio titoli, teorizzando un sistema per immunizzare il portafoglio titoli attraverso variazioni del tasso di interesse passando da un modello statico ad un modello dinamico attraverso l'uso della *duration* (Bierwag, 1977). L'autore, nel discutere dell'uso della *duration* per immunizzare un portafoglio titoli, parte dalle tre assunzioni classiche:

1) La non esistenza dei costi di transazione;
2) Movimenti casuali della struttura a termine;
3) L'investitore si aspetta che l'andamento dei tassi di interesse segua con certezza quello della struttura a termine.

Se la struttura subisce uno shift dopo la prima scadenza, la *duration* del portafoglio titoli cambia a meno di aggiustamenti da parte dell'investitore, tali aggiustamenti consistono nell'acquistare e vendere titoli in modo da ottenere la *duration* de portafoglio uguale al suo *holding period*, in modo che tale portafoglio sarà immunizzato in quell'istante.

L'analisi che muove Cooper è innanzitutto concentrata sugli *shift* della curva dei tassi di interesse, criticando in questo punto la *duration* di Macaulay che prendeva in considerazione soltanto movimenti paralleli della curva dei tassi di interesse, supponendo che la stessa rimanga inalterata anche dinanzi a continue variazioni del tasso di interesse (Cooper, 1977). Cooper suppone che la *duration* sia un affidabile indicatore di rischio di un titolo e di un portafoglio titoli solo quando le variazioni parallele dei tassi di interesse non vengano alterate da altri fattori esterni. Nell'analisi dà una notevole importanza agli eventi passati come fattori che riescono a replicare, in maniera alquanto affidabile, gli eventi futuri e propone diversi tipi di *duration* per calcolare la volatilità di un portafoglio titoli.

Le *duration* di Cooper sono espresse dalle seguenti relazioni (Cooper, 1977):

$$D(2) = \frac{1}{P(m)} \int_0^m C(t)\, t^2\, R(t)\ \exp[-R(t)\, t]\, dt \tag{37}$$

$$D(3) = \frac{1}{P(m)} \int_0^m C(t)\, t\ \ln(t)\ R(t)\ \exp[-R(t)\, t]\, dt \tag{38}$$

$$D(4) = \frac{1}{P(m)} \int_0^m C(t)\, t^2\ \exp[-R(t)\, t]\, dt \tag{39}$$

Cooper parte dal constatare che la struttura a termine dei tassi di interesse non si sposta solo per movimenti paralleli e quindi la *duration* potrebbe non rappresentare in maniera adeguata il rischio della variabilità del valore dell'attivo del portafoglio titoli a causa di variazioni del tasso di interesse (Cooper, 1977). Secondo Cooper, la *duration* di Macaulay è un buon indicatore solo per spostamenti paralleli della funzione R(t). La *duration* sarà un affidabile indicatore di volatilità del portafoglio titoli quando i cambiamenti paralleli della funzione R(t) non sono dominati da altri cambiamenti di diverso tipo. Propone allora le *duration* in (2), (3) e (4), per testare il miglioramento della sua metodologia, parte da un'analisi storica, nella quale testa quale tra queste *duration* sia stata la migliore in passato a classificare i portafogli titoli in relazione alle effettive variazioni del loro valore, presupponendo che il futuro non sarà diverso dal passato. In altre parole, l'autore assume che l'indicatore che ha dato un migliore risultato nel passato lo darà anche nel futuro, in quanto la volatilità sui mercati nei periodi presi in considerazione (dal 1971 al 1973) nella sperimentazione è stata pressappoco la stessa.

Cooper per testare l'affidabilità dei suoi indicatori parte con il simulare la creazione di 100 portafogli di titoli e, successivamente, utilizza il coefficiente di correlazioni per ranghi di Spearman tra l'*holding*

period dei portafogli e le singole *duration* proposte, prendendo in considerazione il periodo 1971-1973 (Cooper, 1977). Dall'analisi emerge che la D(2) è stato l'indicatore di rischio maggiormente affidabile rispetto agli altri indicatori proposti dall'autore.

Nonostante ciò, le analisi empiriche effettuate *ex post* non permettono l'individuazione di una formula di *duration* che prende in considerazione tutti i fattori che incidono realmente sulla struttura della curva dei rendimenti e del tasso di interesse, perciò la *duration* di Macaulay, è facile intuizione ed applicazione pratica, tra le varie D utilizzate è l'indicatore di rischio maggiormente utilizzato.

Un'ultima analisi di *duration* che viene proposta è la *duration* stocastica che venne sviluppata da Cox, Ingersoll e Ross (Cox et al., 1979), i quali partirono dalla considerazione che la *duration* stocastica di uno zero coupon bond coincideva esattamente con la *duration* di Macaulay di uno zero coupon bond, ossia con la sua vita a scadenza e svilupparono il concetto di tasso *spot* in relazione ad un processo auto regressivo, ossia:

$$dr = \beta\,(\mu - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz \tag{40}$$

in cui

$\beta*(\mu-r)$ è attribuibile a Keynes, che suppose che il tasso di interesse nel lungo periodo sarebbe tornato ad un livello medio definito μ, detta media di lungo termine del processo, ad una velocità pari a β, considerando che r è la posizione iniziale del processo al tempo 0. In particolare, β, μ e σ devono essere strettamente maggiori di 0 e r maggiore o uguale a 0.

Il secondo addendo prende in considerazione l'evidenza empirica consolidata nel tempo per cui i mercati finanziari sono caratterizzati da fluttuazioni maggiori quando il tasso di interesse raggiunge livelli elevati e fluttuazioni minori quando il tasso di interesse raggiunge livelli bassi. Quindi, il fattore $\sigma\sqrt{r}$ è un fattore di errore che tiene in considerazione tale evidenza empirica. Inoltre, quando r tende a zero sarà tutto l'addendo stocastico a tendere a zero, fino ad annullarsi per r=0. Ciò implica che il processo stocastico definito dalla (41) escluderà che il tasso assuma valori negativi. Infatti, se r=0 sarà solo l'addendo deterministico a guidare il processo del tasso verso la media di lungo termine μ positiva.

Z è un moto Browniano.

La formula (40) che rappresenta un'equazione differenziale stocastica (in seguito EDS) verrà ripresa successivamente quando verranno trattati i processi stocastici, in particolare riferimento al processo *''mean-reverting square root''*. La *duration* stocastica verrà enunciata in maniera approfondita nel terzo capitolo al fine di esporre la teoria generale dell'immunizzazione stocastica.

2. Immunizzazione finanziaria

L'immunizzazione finanziaria è un metodo matematico finanziario introdotto da Redington nel 1952, che viene utilizzato dalle istituzioni finanziarie per controllare l'esposizione delle poste dell'attivo e del passivo alle variazioni del tasso di interesse, al fine di gestire il rischio che, a causa delle variazioni del tasso, le attività non siano sufficienti a coprire le passività. Questo metodo viene spesso utilizzato dalle istituzioni per controllare il rischio di *mismatching*, ovverosia dei disallineamenti tra attività e passività. All'interno di questo metodo assurge ad un ruolo essenziale la *duration* che, come detto precedentemente, è un indicatore temporale che individua l'istante in cui il rischio di realizzo e di reimpiego si bilanciano perfettamente. Nella composizione di un portafoglio titoli, sia in Redington nel 1952 che in Fisher e Weil nel 1972, la *duration* è un punto fondamentale senza la quale è impossibile costruire un portafoglio titoli immunizzato dal rischio del tasso di interesse. Redington prese in considerazione soltanto variazioni additive di ampiezza aleatoria della curva dei rendimenti, da un momento successivo all'istante di valutazione *t*. Tali variazioni vanno a modificare il valore dei flussi delle poste dell'attivo e del passivo. Fisher e Weil ripresero il concetto di Redington relativo alle variazioni additive, suggerendo anche variazioni di tipo moltiplicativo. Tuttavia, l'immunizzazione classica proposta da Redington e successivamente da Fisher e Weil, non prende in considerazioni le aspettative degli individui sull'evoluzione dei tassi di interesse. L'immunizzazione finanziaria classica cerca di trovare delle condizioni in un punto di equilibrio finanziario, all'istante di valutazione t, per cui i flussi attivi e passivi di un portafoglio titoli mantengano, nonostante variazioni della struttura dei tassi di interesse, un equilibrio. Verranno postulate delle condizioni in merito al valore attuale dei flussi di cassa attivi e passivi del portafoglio titoli.

2.1. Teorema di Redington per un'uscita singola

Uno dei primi attuari a formulare un teorema che concerne l'immunizzazione finanziaria fu Frank Mitchell Redington nel 1952 con ''Review of the Principal Life-Office Valuation''. L'obiettivo dell'attuario inglese era quello di verificare le regole, i concetti e le ipotesi della ''life-office''.

L'obiettivo del lavoro di Redington è quello di trovare un ''matching'' tra le attività e le passività in modo che il portafoglio titoli non subisca perdite date dalla variazione del tasso di interesse. In particolare, si dovrebbe trovare un punto di equilibrio tra la durata delle attività e la durata delle passività, in modo da non avere perdita date da fluttuazioni dei tassi. (Redington, 1952). Redington fu anche uno dei primi attuari ad utilizzare la locuzione ''immunizzazione'', come un metodo per rendere immune l'attivo da variazioni del tasso di interesse e va preso in considerazione come una forma di *''matching''* tra attività e passività. Redington parte dall'assunto che detenendo titoli, in un determinato periodo di tempo, è possibile ottenere un tasso di interesse uniforme indipendentemente dalla scadenza e che gli investimenti siano effettuati in titoli a reddito fisso che possono o non possono essere rimborsati ad una data futura fissata.

L'analisi di Redington, parte prioritariamente spiegando i simboli L_t e A_t, con L_t il valore netto atteso delle attività esistenti all'istante t, mentre A_t è il guadagno atteso dalle attività esistenti all'istante t. In particolare, gli interessi prodotti dagli investimenti verranno considerati solo nelle attività e non nelle passività, rendendo di fatto quest'ultime un elemento fisso ed indipendente dagli investimenti. Perciò, è intuibile pensare che se le attività e le passività debbano essere sensibili in egual modo alle fluttuazioni del tasso di interesse istantaneo, allora le attività e le passività devono avere la stessa *duration*.

Per trovare l'equilibrio finanziario di un portafoglio titoli, prendiamo in considerazione i flussi di cassa dell'attivo (x), dove gli importi sono $x_1, x_2, \dots, x_n$ e il flusso del passivo (y), in cui gli importi sono $y_1, y_2, \dots, y_n$. I flussi (x) e (y) avranno scadenza $t = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$. Il concetto alla base dell'immunizzazione finanziaria è la ricerca, in un istante di valutazione t, di un equilibrio finanziario tale da permettere la solvibilità nonostante variazioni additive immediatamente successive all'istante t. L'istante t^+ è l'istante successivo, all'istante di valutazione, in cui avrà effetto la variazione del tasso di interesse ed è:

$$t^+ = \lim_{\Delta t \to 0} (t + \Delta t) \tag{41}$$

dove

$\Delta t > 0$.

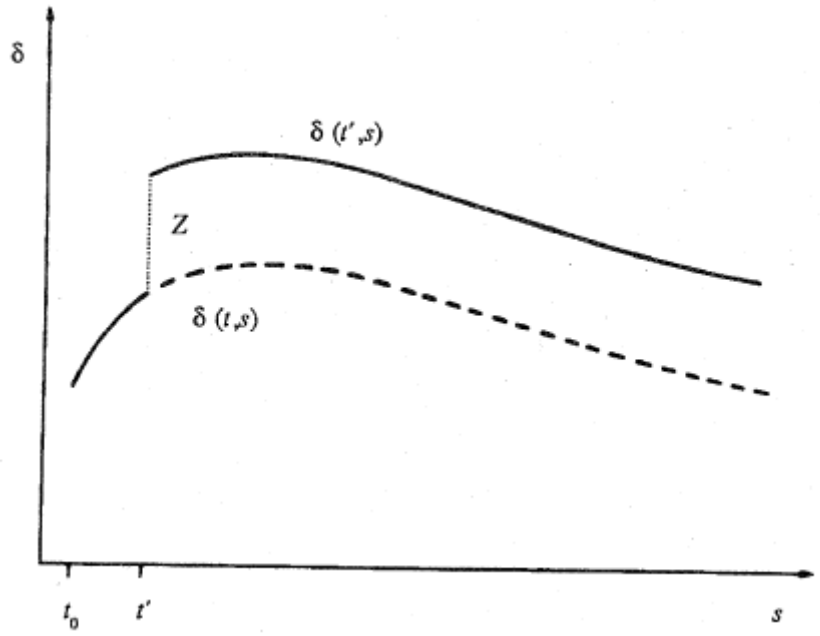
per cui, il tasso istantaneo di interesse dall'istante t^+ è:

$$\delta(t^+, s) = \delta(\mathrm{t}, \mathrm{s}) + \mathrm{Z} \tag{42}$$

dove,

Z rappresenta l'ampiezza aleatoria della variazione del tasso istantaneo di interesse dall'istante t^+ .

Figura 6 ''variazione tasso istantaneo di interesse''



(De Felice et al., 1991)

La figura 6 evidenzia un esempio di evoluzione del tasso istantaneo di interesse in un intervallo temporale che parte da t_0 data dallo shift di ampiezza pari a Z. La linea tratteggiata rappresenta la funzione del tasso istantaneo di interesse pre-shift; si evince come l'andamento della funzione post-shift abbia lo stesso andamento della funzione pre-shift ma traslato verso l'alto dell'ampiezza pari a Z.

Redington prende in considerazioni shift additivi del tasso istantaneo di interesse che non dipendono dalla maturity dei titoli, anche se nei mercati la curva dei rendimenti cambia a seconda di diversi fattori, tra cui proprio la maturity dei titoli. Più realistica è l'ipotesi variazioni qualsiasi del tasso istantaneo di interesse.

Le condizioni di equilibrio finanziario possono essere così sintetizzate (De Felice et al., 1991):

- Prima della variazione del tasso istantaneo di interesse, i flussi dell'attivo (x) e del passivo (y) sono immunizzati in senso classico se hanno lo stesso valore attuale, quindi:

$$W(t, x) = W(t, y) \tag{43}$$

- Prendendo in considerazione la variazione del tasso nell'istante t^+, i flussi attivo (x) e del passivo (y) sono immunizzati in senso classico se il valore del flusso degli attivi (x) è non-minore del valore del flusso dei passivi (y) sempre dopo la variazione del tasso, cioè:

  $$W(t^+, x) \geq W(t^+, y) \tag{44}$$

  oppure, se è non-negativo il valore netto del portafoglio titoli:

  $$W(t^+) = W(t^+, x) - W(t^+, y) \geq 0 \tag{45}$$

Prima di enunciare il teorema di Redington per la copertura di uscite multiple, è essenziale proporre l'analisi effettuata da Fisher e Weil (Fisher et al., 1971).

2.2. Teorema di Fisher e Weil

Fisher e Weil assumono che non esista nessun titolo senza rischio, nell'elaborato verrà preso in considerazione solo il rischio di fluttuazione del tasso di interesse e non altri rischi come il cambiamento del potere d'acquisto o il rischio di insolvenza (Fisher et al., 1971).

Gli autori hanno l'obiettivo di suggerire strategie decisionali come quale tipo di obbligazione è meglio comprare a seconda della scadenza, a seconda della cedola, o della possibilità di rimborso prima della sua scadenza oppure in base al suo rendimento. L'assunto che verrà fatto, in accordo con Macaulay, è che verranno prese in considerazioni solo le obbligazioni di alta qualità in quanto sono quelle che rispecchiano più fedelmente le variazioni del tasso di interesse di lungo periodo. L'obiettivo dell'investitore, secondo gli autori, è quello di comporre un portafoglio titoli immune da variazioni del tasso di interesse, non prendendo in analisi fattori quali il rischio di *default* oppure la struttura dell'obbligazione.

Il teorema di Fisher e Weil è un'evoluzione del teorema di Redington, che parte dall'assunto troppo semplicistico che il tasso istantaneo di interesse subisca una variazione di ampiezza Z dal tempo t^+ costante.

Secondo Fisher e Weil, un portafoglio titoli obbligazionario è immunizzato quando il valore del portafoglio titoli alla fine dell'*holding period*, indipendentemente dalle variazioni del tasso di interesse in tale periodo, è maggiore di quanto lo sarebbe stato se il tasso di interesse non avesse subito variazioni per tutto l'*holding period* (Fisher et al., 1971). Punto essenziale degli autori è il ruolo della *duration*.

Un portafoglio di titoli obbligazionari con flussi non negativi è immunizzato al tempo t_0 se la *duration* in t_0 dei flussi è pari alla differenza tra l'*holding period* (H) e il tempo t_0, quindi $H - t_0$. È possibile portare l'analisi di Fisher e Weil allo schema di Redington prendendo in considerazione quindi i valori attuali dei flussi dell'attivo e del passivo. In pratica, è possibile ricondurre l'analisi di un portafoglio titoli immune da variazioni del tasso istantaneo di interesse di ampiezza Z ad un'analisi di un portafoglio attivo a copertura di una singola uscita all'ultimo istante di investimento (De Felice, et al., 1991).

Quindi, prendendo in considerazione l'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$ osservata al tempo t, e relativa a tutto l'arco temporale di ampiezza s, supponendo che l'importo esigibile $L > 0$ al tempo $H > t$, sia x il flusso dell'attivo con valori non negativi alle scadenza $t_1, t_2, \dots, t_n$. Allora, al tempo di valutazione t, il valore attuale del flusso dell'attivo del portafoglio sarà uguale al valore attuale degli importi esigibili:

$$W(t,x) = W(t,L) \tag{46}$$

La precedente espressione è il vincolo di bilancio.

Supponendo una variazione additiva del tasso istantaneo di interesse di ampiezza aleatoria Z, data dalla formula (42), possiamo scrivere:

$$\delta(t^+,s) = \delta(\mathrm{t},\mathrm{s}) + \mathrm{Z}$$

Allora, il valore attuale del flusso dell'attivo (x) dopo la variazione del tasso dovrà essere non-minore del valore attuale dell'importo esigibile (L) dopo la stessa variazione:

$$\mathrm{W}(t^+,x) \geq \mathrm{W}(t^+,\mathrm{L}) \tag{47}$$

Questa è la cosiddetta condizione di immunizzazione.

La condizione necessaria e sufficiente è quindi che la *duration* del flusso dell'attivo (x) al tempo t dev'essere uguale alla *maturity* dell'importo esigibile (L):

$$\mathrm{D}(\mathrm{t},x) = \mathrm{H} - \mathrm{t} \tag{48}$$

Questa è la cosiddetta condizione di *duration*.

Dimostrazione (De Felice et al., 1991):

Partendo dall'assunto che il rapporto tra il valore attuale dei flussi dell'attivo (x) e il valore attuale degli importi esigibili dev'essere pari in ogni momento a 1 per rispettare il vincolo di bilancio, cioè:

$$\mathrm{Q}(t,x,L) = \frac{\mathrm{W(t,x)}}{W(t,L)} = 1 \tag{49}$$

la dimostrazione riguarda il fatto che la condizione necessaria e sufficiente proposta dalla formula (47) deve rendere il rapporto tra i valori attuali post-shift maggiore o uguale ad 1.

Per arrivare a definire il rapporto tra i valori attuali dei flussi x ed L dopo la variazione di ampiezza aleatoria Z, è necessario definire nel continuo il rapporto tra questi valori attuali, per cui:

$$\mathrm{Q}(t,x,L) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \; e^{-\int_t^{t_k} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}}}{L\, e^{-\int_t^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}}} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k \; e^{\int_{t_k}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}} \tag{50}$$

Prendendo in considerazione la variazione del tasso istantaneo di interesse:

$$Q(t^{+}, x, L, Z) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k \; e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t^{+},s)\mathrm{ds}} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k \; e^{\int_{t_k}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}} \; e^{Z(H-t_k)} \tag{51}$$

Se l'ampiezza dello shift del tasso è pari a 0 (Z=0) allora, Q = 1.

Adesso analizziamo la derivata prima e seconda rispetto al moto browniano standard Z della formula (51):

$$Q'(Z) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k)\, x_k \, e^{\int_{t_k}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}} \; e^{Z(H-t_k)} \tag{52}$$

$$Q''(Z) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k)^2 \; x_k \, e^{\int_{t_k}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}} \; e^{Z(H-t_k)} \tag{53}$$

Si evince come la derivata seconda sia sempre strettamente maggiore di 0, per cui il rapporto tra i valori attuali dopo la variazione di ampiezza aleatoria Z è una funzione convessa che in Z=0, assume il valore di 1.

Come detto precedentemente, l'obiettivo è quello di dimostrare che il rapporto tra il flusso dell'attivo (x) e il passivo (L), calcolato post-shift al tempo t^{+}, sia maggiore o uguale a 1. Per dimostrare ciò, bisogna porre la derivata prima rispetto Z, data dalla formula (52), calcolata ponendo Z=0, per cui:

$$Q'(0) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k)\, x_k \, e^{\int_{t_k}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}} = 0 \tag{54}$$

La formula (54) è uguale alla condizione necessaria e sufficiente data dalla formula (48).

Infatti:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(H-t)\, x_k \, e^{-\int_{t}^{t_k} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}}}{L\, e^{-\int_{t}^{H} \delta(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)\, x_k \, v(t,t_k)}{L\, v(t,H)} \tag{55}$$

tenendo conto del vincolo di bilancio:

$$D(\mathrm{t,x}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)\, x_k \, v(t,t_k)}{L\, v(t,H)} = H - t \tag{56}$$

La dimostrazione mette in evidenza il ruolo cruciale della *duration* nel teorema di Fisher e Weil, non solo come indicatore temporale di epoca ottima di smobilizzo ma anche come informazione che consente di costruire un portafoglio con flussi dell'attivo (x) immunizzato da variazioni additive di ampiezza Z del tasso istantaneo di interesse, in modo da ottenere con certezza un rendimento minimo, prendendo in considerazione il valore delle passività come una variabile obiettivo.

In conclusione, costruendo un portafoglio di titoli obbligazionari con una *duration* pari al valore temporale dato dalla differenza tra l'*holding period* e l'istante di valutazione, l'investitore si assicura ex-ante, nonostante le variazioni del tasso istantaneo di interesse, un rendimento minimo. Risulta evidente il motivo per cui, in Fisher e Weil possiamo parlare di '*'duration matching''*, mentre in Redington si parla di *''perfect matching''*. Tuttavia, il vincolo di bilancio e la condizione di *duration*, precedentemente discusse, permetto l'immunizzazione di un portafoglio di titoli per una singola uscita. Redington prese in considerazione anche il caso di uscite multiple, ciò sarà l'oggetto d'analisi del prossimo paragrafo.

2.3. Teorema di Redington per uscite multiple

Il teorema di Redington per uscite multiple è considerato un avanzamento del teorema di Fisher e Weil, che prende in considerazione, come visto nel paragrafo precedente, il vincolo di bilancio e la condizione di *duration*, proposte nelle formule (46) e (48) come condizioni necessarie e sufficienti affinchè un portafoglio titoli sia immunizzato da eventuali shift del tasso istantaneo di interesse. L'analisi che muove Redington, nel caso di uscite multiple, aggiunge all'esame di Fisher e Weil un'ulteriore condizione.

Come abbiamo visto precedentemente, anche lo stesso Redington aveva anche analizzato l'immunizzazione di un portafoglio obbligazionario nel caso di un'uscita singola, tuttavia questo caso, come lui stesso ammise, è un caso semplificato rispetto al caso generale della copertura, non di una sola uscita, ma di un flusso di uscite.

Questo teorema, tuttavia ha una problematica rilevante, quella di prendere in considerazione solo shift additivi infinitesimi della struttura dei rendimenti e non shift qualsiasi. Quindi, tale teorema, non è riconducibile ad una generalizzazione del teorema di Fisher-Weil che, invece, prende in riferimento shift di ampiezza finita. (De Felice, et al., 1991).

Sapendo che $\delta(t,s)$ è il tasso istantaneo di interesse nell'istante t, relativo all'arco temporale t, t+s, s e il flusso dell'attivo del portafoglio (x) e del passivo (y) sono flussi non-negativi ai tempi $t_1, t_2, \dots, t_n$ allora:

$$W(t,x) = W(t,y)$$

Questa espressione corrisponde al vincolo di bilancio.

Supponendo uno shift di ampiezza aleatoria infinitesima sulla curva dei rendimenti al tempo t^+, allora il valore del flusso dell'attivo (x) del portafoglio dopo la variazione dovrà essere non-minore del valore del flusso del passivo del portafoglio (y):

$$\mathrm{W}(t^+,x) \geq \mathrm{W}(t^+,\mathrm{y})$$

oppure, il che è lo stesso, se è non-negativo il valore netto del portafoglio titoli:

$$W(t^+) = W(t^+,x) - W(t^+,y) \geq 0 \qquad (57)$$

Fino a questo punto, l'analisi di Redington per la copertura del portafoglio da uscite multiple corrisponde a quella fatta precedentemente per la singola copertura. Adesso verranno aggiunte due condizioni:

- la *duration* del flusso dell'attivo (x) deve essere uguale alla *duration* del flusso del passivo (y), allora:

$$\mathrm{D}(t,x) \geq \mathrm{D}(\mathrm{t},\mathrm{y}) \tag{58}$$

condizione di *duration*.

- la *convexity*, o momento di second'ordine, del flusso dell'attivo (x) del portafoglio e non minore della *convexity* del flusso del passivo (y) del portafoglio:

$$\mathrm{D}^2(t,x) \geq \mathrm{D}^2(\mathrm{t},\mathrm{y}) \tag{59}$$

condizione di *convexity* che rappresenta la dispersione temporale netta dei flussi x e y.

Un portafoglio titoli è immunizzato relativamente ad un flusso di uscite quando sussistono le tre condizioni sopra elencate, cioè il vincolo di bilancio, la condizione di *duration* e la condizione di *convexity*. Tuttavia, prendendo in considerazione shift additivi infinitesimi del tasso istantaneo di interesse, tale teorema non è una generalizzazione del teorema di Fisher e Weil.

La dimostrazione del teorema di Redington in caso di uscite multiple è di seguito rappresentata (De Felice et al., 1991).

Dato W(t) il valore netto dei flussi dell'attivo (x) e del passivo (y) al tasso istantaneo di interesse $\delta(t,s)$, allora:

$$W(\mathrm{t}) = \mathrm{W}(\mathrm{t},\mathrm{x}) - \mathrm{W}(\mathrm{t},\mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{s}(x_k - y_k)\, e^{-\int_t^{t_k} \delta(\mathrm{t},\mathrm{s})ds} \tag{60}$$

Prendendo in considerazione la variazione aleatoria additiva di ampiezza Z al tempo t^+, allora:

$$W(\mathrm{t}^+,\mathrm{Z}) = \sum_{k=1}^{s}(x_k - y_k)\, e^{-\int_t^{t_k} \delta(\mathrm{t}^+,\mathrm{s})ds} = \sum_{k=1}^{s}(x_k - y_k)\, e^{-\int_t^{t_k} \delta(\mathrm{t},\mathrm{s})ds}\, e^{-Z(t_k - t)} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)\, v(t,t_k)\, e^{-Z(t_k - t)} \tag{61}$$

Facendo la derivata prima e seconda in funzione della variazione di ampiezza aleatoria Z:

$$W'(\mathrm{Z}) = -\sum_{k=1}^{n}(t_k - t)\,(x_k - y_k)\, v(t,t_k)\, e^{-Z(t_k - t)} \tag{62}$$

$$W''(\mathrm{Z}) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t)^2\,(x_k - y_k)\, v(t,t_k)\, e^{-Z(t_k - t)} \tag{63}$$

Per dimostrare il teorema è necessario verificare l'ipotesi sulla *convexity*. Quindi, la *convexity* del flusso dell'attivo (x) del portafoglio è non-minore della *convexity* del flusso del passivo (y) del portafoglio, bisogna prendere in considerazione la serie di Taylor fino al terzo termine, quindi:

$$W(\mathrm{Z}) = W(0) + \mathrm{ZW}'(0) + \frac{1}{2!} Z^2 \mathrm{W}''(0) \tag{64}$$

Il valore netto del portafoglio calcolato all'istante 0 è uguale a 0, ciò viene dato dal vincolo di bilancio che impone questa condizione. Il secondo termine dell'espressione, cioè la derivata prima del valore netto del portafoglio calcolato all'istante 0, anch'esso è uguale a 0, in quanto il vincolo di bilancio insieme alla condizione di *duration* impongono questa condizione. Quindi, otterremo l'immunizzazione locale se tale termine risulta strettamente maggiore di 0:

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - t)^2 \, x_k \, v(t, t_k) \geq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t)^2 \, y_k \, v(t, t_k) \tag{65}$$

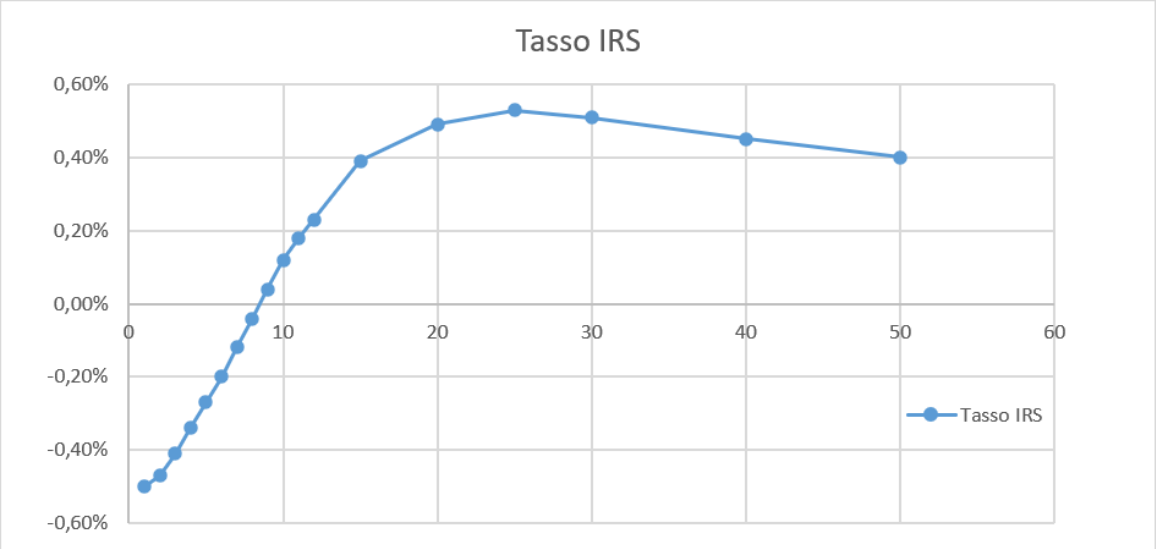
Questa formula, dato il vincolo di bilancio, coincide con la condizione di *convexity* data dalla formula (59).

2.4. Caso pratico

In questo paragrafo si proporrà un'applicazione del teorema di Fisher-Weil attraverso la costruzione di un portafoglio titoli, composto dal lato del passivo da uno zero coupon bond (ZCB) e dal lato dell'attivo da Buoni Poliennali del Tesoro (BTP). Questo portafoglio titoli verrà immunizzato sotto le condizioni proposte nel teorema di Fisher-Weil, andando a verificare il valore netto del portafoglio dopo variazioni del tasso di interesse che incideranno sia sul lato dell'attivo che sul lato del passivo.

Supponiamo di prendere a prestito una determinata somma da reinvestire in BTP in modo da costruire l'attivo del portafoglio; ciò verrà fatto attraverso la sottoscrizione di uno zero coupon bond (ZCB) dal valore di 50 000€ con durata di 10 anni al tasso EUROIRS.

Fig. 7 ''Tasso EUROIRS (IRS)''



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel, dati estrapolati da Bloomberg)

La Figura 7 mostra l'andamento alla data 09/06/2021 del tasso EUROIRS (linea blu) fino all'orizzonte temporale di 50 anni. Si evince che il tasso IRS10A è pari all'0,14%.

Sappiamo che uno ZCB ha una *duration* pari alla sua data di scadenza, quindi nel nostro caso la *duration* sarà pari a 10 anni. Essendo un'operazione di finanziamento che va a costituire il passivo del portafoglio, il valore alla scadenza sarà il valore che dovremo rimborsare. Tale valore è pari a:

$$Valore\ alla\ scadenza = Valore\ nominale\ *\ (1 + IRS10A)^t \tag{66}$$

Visto che il valore nominale è pari a 50 000€, il tasso IRS10A è pari all'0,14% e l'orizzonte temporale è di 10 anni, allora il valore alla scadenza sarà pari circa a 50 704€.

Con i 50 000€ presi in prestito attraverso la sottoscrizione dello ZCB, vengono acquistati tre Buoni Poliennali del Tesoro.

I BTP hanno le seguenti caratteristiche (www.borsaitaliana.it):

ISIN: IT0005436693

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Emittente: Repubblica italiana

Prezzo di aggiudicazione: 99,96 €

Interesse annuo lordo: 0,6%

Emissione: 23/02/2021

Godimento: 01/02/2021

Cedola: 01/08/2021

Scadenza: 01/08/2031

Modalità di negoziazione: Corso secco

ISIN: IT0005402117

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Prezzo di aggiudicazione: 99,51 €

Emittente: Repubblica italiana

Interesse annuo lordo: 1,45%

Emissione: 18/02/2020

Godimento: 18/02/2020

Cedola: 18/08/2020

Scadenza: 01/08/2036

Modalità di negoziazione: Corso secco

ISIN: IT0005445306

Categoria: Buono del Tesoro Poliennale

Emittente: Repubblica italiana

Prezzo di aggiudicazione: 98,96 €

Interesse annuo lordo: 0,5%

Emissione: 17/05/2021

Godimento: 17/05/2021

Cedola: 15/07/2021

Scadenza: 15/07/2028

Modalità di negoziazione: Corso secco

Essendo tutti e tre i BTP, che compongono l'attivo del portafoglio, negoziati al corso secco è essenziale trovare il prezzo tel quel, in quanto attraverso tali prezzi è possibile trovare il Tasso Interno di Rendimento. Il prezzo tel quel è la sommatoria dei flussi di cassa attualizzati al tasso di interesse oppure la somma tra il corso secco e il rateo di interessi.

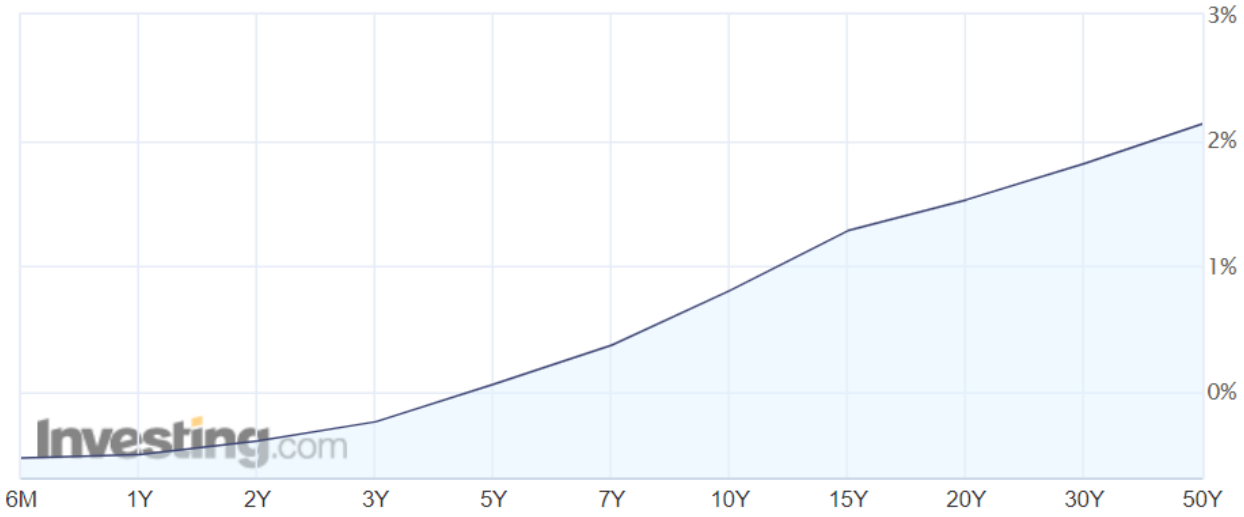
Tab. 1

BTP	Corso secco	Rateo	Prezzo tel quel	TIR
IT0005436693	98,36	0,08	98,44	0,7621%
IT0005402117	103,73	0,27	104,00	1,174%
IT0005445306	100,64	0,05	100,69	0,400%

(Elaborazione personale effettuata su Excel)

La tabella 1 riporta il rateo di ogni singolo BTP e il suo relativo prezzo tel quel. Una volta trovato il prezzo tel quel e sapendo i flussi di cassa generati dai BTP, è possibile trovare il Tasso Interno di Rendimento di ogni singolo BTP. Il TIR viene trovato utilizzando la funzione tir.cost presente su Excel. Trovato il Tasso Interno di Rendimento di ogni titolo e possibile costruire la curva dei rendimenti dei BTP.

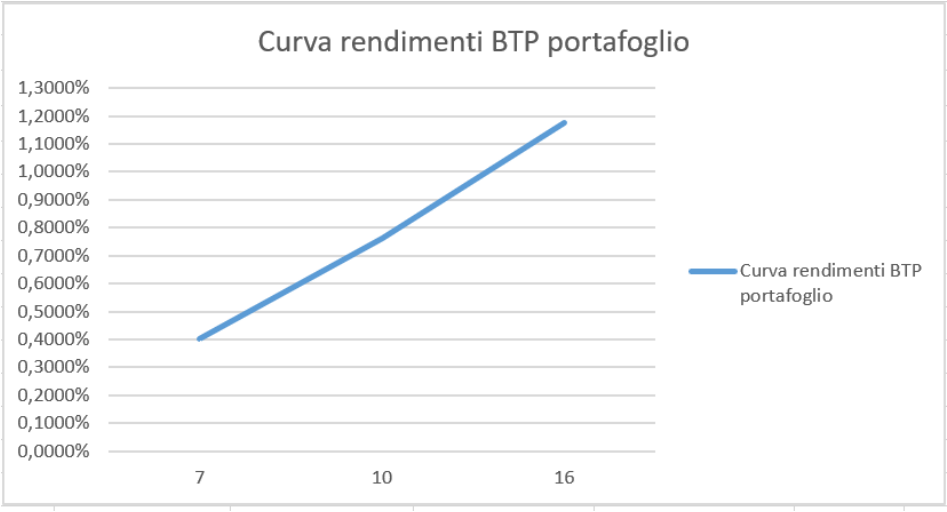
Fig. 8 ''Curva dei rendimenti obbligazioni Italia''



(Fonte: investing.com)

La figura 8 mostra la curva dei rendimenti (yield-curve) dei titoli obbligazionari italiani con una scadenza massima di 50 anni. In tale curva sono interpolati i rendimenti di qualsiasi obbligazione italiana attualmente presente sul mercato obbligazionario, incluso anche la curva dei rendimenti dei BTP.

Fig. 9



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 9 mostra l'andamento della curva dei rendimenti dei tre BTP inseriti nell'attivo del portafoglio, tale curva rappresenta solo un'approssimazione della curva dei rendimenti obbligazionari emessi dallo Stato italiano (Figura 8).

Il secondo fattore di cui abbiamo bisogno per costruire un portafoglio obbligazionario immunizzato, in senso classico, da variazioni del tasso di interesse è la *duration*. La *duration* serve sia per la

costruzione di un portafoglio immunizzato in quanto rappresenta una condizione necessaria (‘’condizione di *duration’’*) ma ci permette anche di valutare la variazione del prezzo del titolo a fluttuazione del tasso di interesse.

Tab. 2

BTP	Corso secco	Rateo	Prezzo tel quel	TIR	Duration
IT0005436693	98,36	0,08	98,44	0,7621%	9,14
IT0005402117	103,73	0,27	104,00	1,174%	13,99
IT0005445306	100,64	0,05	100,69	0,400%	6,93

(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La tabella 2 aggiunge rispetto la tabella 1 le *duration* dei singoli BTP che compongono l’attivo del portafoglio.

Una volta calcolata la *duration* di ogni singolo titolo è possibile costruire un portafoglio immunizzato secondo il teorema di Fisher-Weil, le cui condizioni sono state precedentemente discusse e che sono:

1) Valore attuale attivo = valore attuale passivo
2) *Duration* attivo = *duration* passivo

Perciò dobbiamo verificare queste due condizioni, cioè che il valore del portafoglio attivo sia maggiore o uguale a quello del portafoglio passivo e che la *duration* dell’attivo sia pari alla *duration* del passivo ossia pari a 10 anni, in quanto, come detto precedentemente, il passivo del portafoglio è costituito solo da uno ZCB con scadenza a 10 anni. Per potere verificare queste due condizioni è necessario prima trovare le quantità di ogni singolo titolo che compongono l’attivo del portafoglio.

Essendo tre i titoli che compongono l’attivo del portafoglio è necessario utilizzare la programmazione lineare per trovare le quantità che dovrebbero comporre il portafoglio. Tali quantità verranno trovate utilizzando il programma ‘’optimtool’’ di MATLAB.

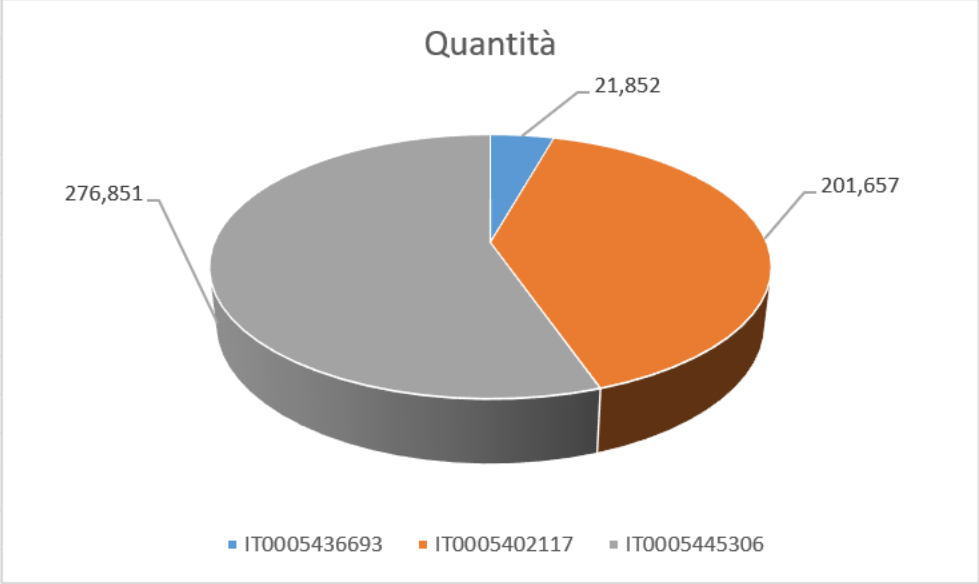
Tab. 3 ''valore dell'attivo del portafoglio nell'istante di valutazione 0, pre-shift del tasso''

BTP	Prezzo Tel Quel	Quantità	Attivo Portafoglio
IT0005436693	104,0024	21,852	2.272,66 €
IT0005402117	98,4445	201,657	19.852,01 €
IT0005445306	100,6870	276,851	27.875,33 €
			50.000 €

(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La tabella 3 mostra le quantità di ciascun titolo che devono essere acquistate per rendere l'attivo del portafoglio obbligazionario immunizzato da variazioni del tasso di interesse. Le relative quantità, trovate attraverso il programma MATLAB, devono essere moltiplicate per il prezzo tel quel per trovare il peso di ciascun titolo all'interno dell'attivo del portafoglio. Si denota come il totale dell'attivo del portafoglio (50 000€) è uguale al totale del passivo del portafoglio, composto dallo ZCB (50 000€). Date le quantità è possibile ponderare i singoli titoli dell'attivo del portafoglio per i relativi prezzi e *duration* al fine di trovare la *duration* del portafoglio dell'attivo pari a 10, la medesima del passivo, data dallo ZCB.

Fig. 10 ''Quantità dei titoli all'interno del portafoglio dell'attivo''



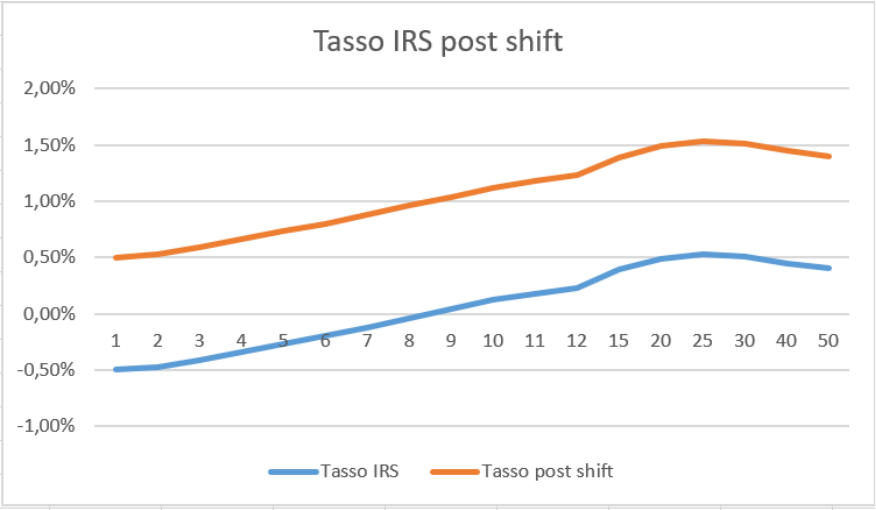
(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 10 mostra la composizione dell'attivo del portafoglio titoli, prevalentemente composto dal BTP IT000544306 e il BTP IT0005402117 che pesano più del 90% all'interno del portafoglio. Una quota minoritaria è lasciata al BTP IT0005436693.

Adesso che sia il passivo che l'attivo del portafoglio titoli è stato composto, supponiamo variazioni additive del tasso di interesse positive e negative, vedendo come impattano sul portafoglio.

Supponiamo una variazione positiva del tasso di interesse dell'1%, ciò comporta un aumento nella struttura del tasso IRS. Tale variazione interviene prima della scadenza del primo flusso, in modo che influenzerà allo stesso modo tutti i flussi del portafoglio.

Fig. 11

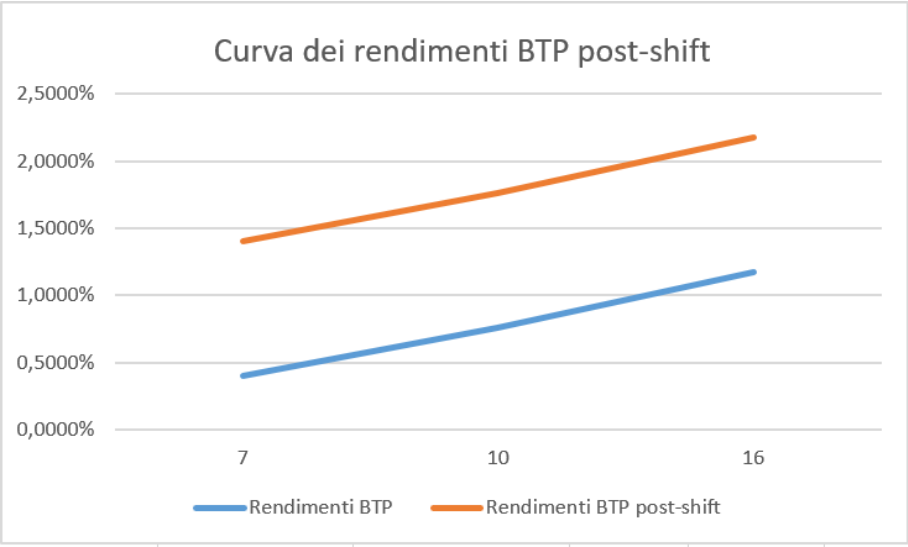


(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 11 mostra la variazione che ha avuto il tasso IRS dopo l'aumento dell'1%, tale cambiamento rimarrà costante per tutta la durata residua del portafoglio. Si evince che il tasso IRS10 A è pari all'1,14%. Quindi, il valore del passivo del portafoglio dopo la variazione del tasso di interesse sarà pari a 45270,23€.

Come avevamo supposto, la variazione del tasso di interesse non inciderà soltanto sul passivo del portafoglio ma anche sull'attivo. Quindi, la curva dei rendimenti, così come il tasso IRS, subirà un incremento verso l'alto pari all'1%.

Fig. 12



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 12 mostra lo shift verso l'alto della curva dei rendimenti dei BTP dopo la variazione del tasso di interesse, anche in questo caso la variazione inciderà per tutto l'arco temporale in egual misura.

Per vedere come cambia l'attivo del portafoglio dopo la variazione è necessario calcolare i nuovi prezzi.

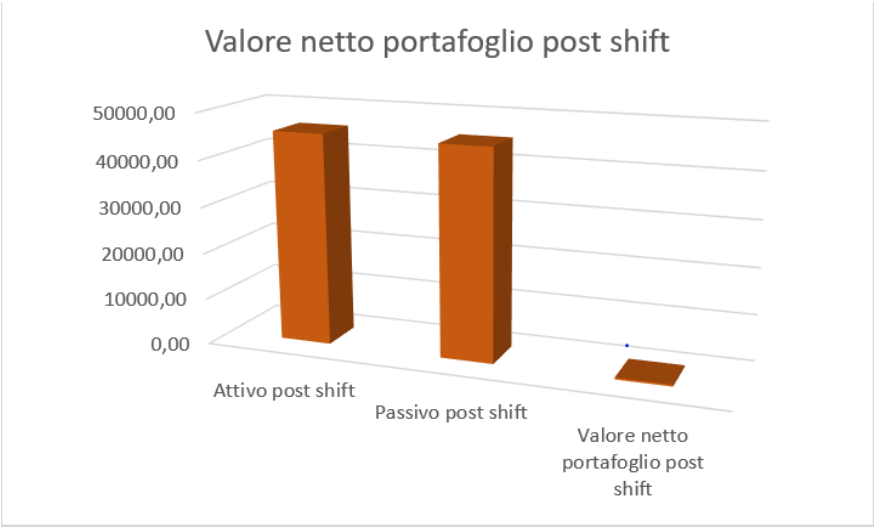
Tab. 4 ''valore dell'attivo del portafoglio nell'istante di valutazione 0, post-shift del tasso''

BTP	Quantità	Prezzo post-shift	portafoglio attivo
IT0005436693	21,852	89,09	1946,81
IT0005402117	201,657	87,66	17677,88
IT0005445306	276,851	93,94	26006,93
			45631,63

(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La tabella 4 mostra il valore dell'attivo del portafoglio dopo la variazione di un punto percentuale del tasso di interesse. Si evince anche la relazione inversa tra tasso di interesse e prezzo, infatti all'aumentare dell'uno diminuisce l'altro. L'attivo del portafoglio passa da 50000€ prima della fluttuazione del tasso di interesse ad un valore di 45631,63€ dopo la variazione.

Fig. 13

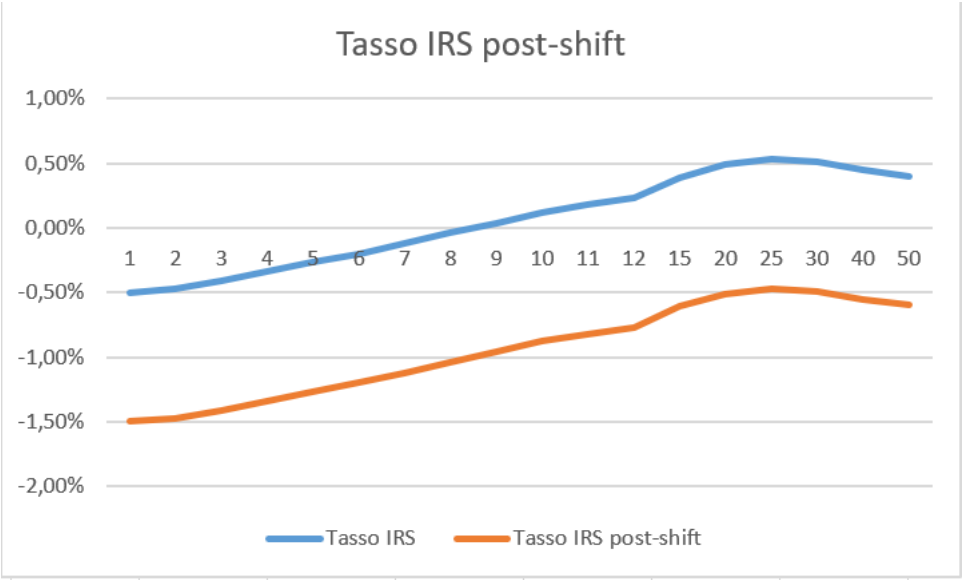


(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 13 evidenza come la differenza tra il valore dell'attivo dopo la variazione e il valore del passivo dopo la variazione sia positiva. Perciò, il portafoglio costruito è immunizzato da questa variazione del tasso di interesse.

Ora supponiamo, invece, una variazione negativa dell'1% del tasso di interesse che incide in egual modo sia sull'attivo che sul passivo. Ciò comporta ovviamente una fluttuazione della struttura dei tassi IRS e della curva dei rendimenti BTP.

Fig. 14

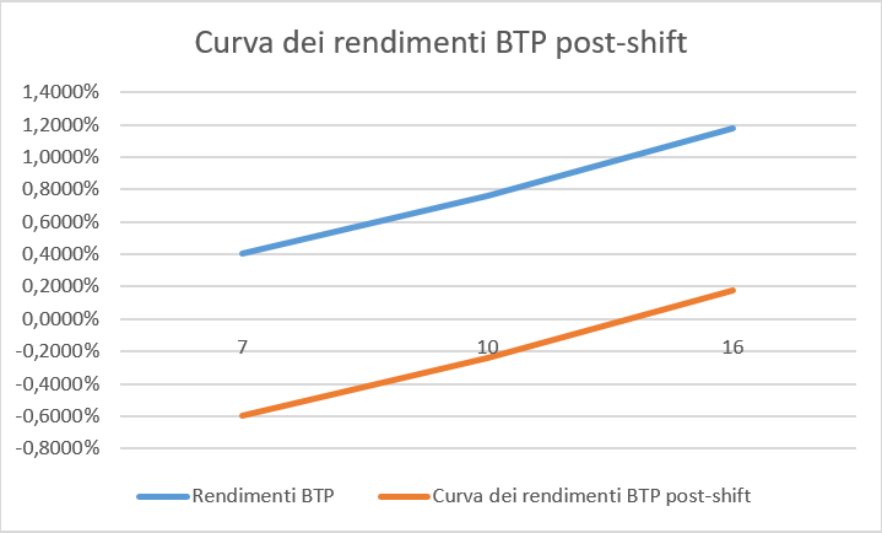


(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 14 mostra la struttura dei tassi IRS dopo la variazione negativa di un punto percentuale, si evince che tale variazione rimane costante per tutto l'arco temporale. Inoltre, la figura evidenzia come il tasso IRS10 A sia pari a -0,88%. Quindi, il nuovo valore del passivo post-shift è pari a 55278,1€.

Per vedere se il portafoglio costruito è immunizzato dal cambiamento del tasso di interesse, calcoliamo il valore dell'attivo dopo la variazione per fare ciò è necessario calcolare i nuovi prezzi che, verosimilmente, dovrebbero essere aumentati a causa della diminuzione del tasso.

Fig. 15



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

Risulta evidente dalla figura 15 come la diminuzione del tasso comporti una riduzione della curva dei rendimenti del BTP, che inciderà sui relativi prezzi.

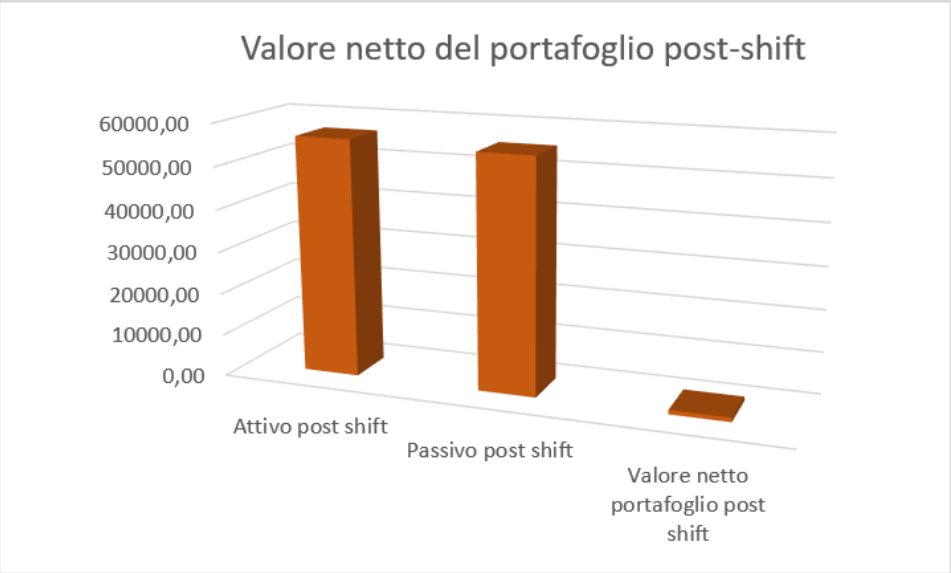
Tab. 5 ''valore dell'attivo del portafoglio nell'istante di valutazione 0, post-shift del tasso''

BTP	Quantità	Prezzo post-shift	portafoglio attivo
IT0005436693	21,852	108,54	2371,85
IT0005402117	201,657	119,85	24169,40
IT0005445306	276,851	107,93	29881,21
			56422,46

(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La tabella 5 mostra come i prezzi dei BTP aumentino al diminuire del tasso di interesse ed evidenzia, in aggiunta, il nuovo valore dell'attivo del portafoglio post-shift del tasso di interesse.

Fig. 16



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

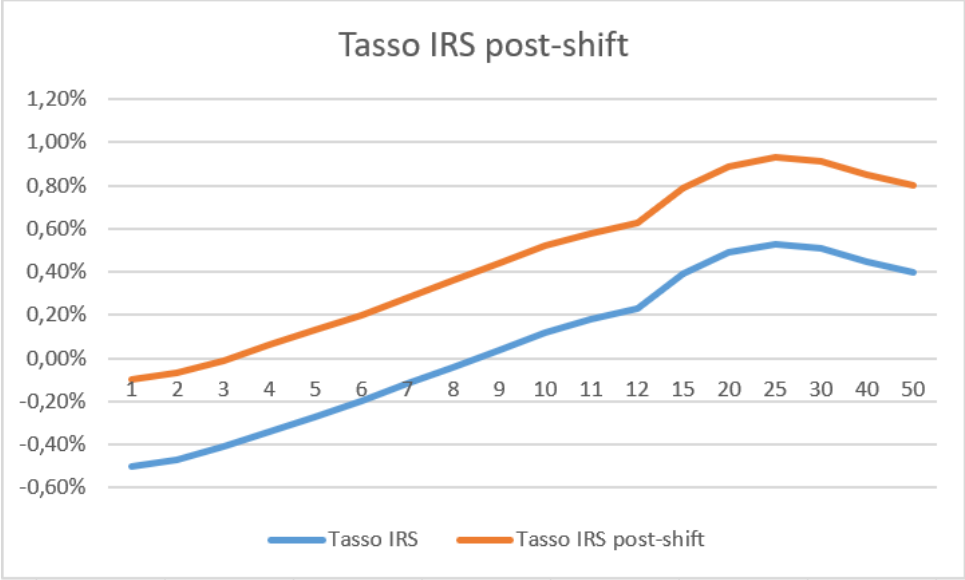
La figura 16 evidenzia come il valore dell'attivo dopo la variazione del tasso di interesse sia superiore al valore del passivo dopo la stessa variazione, perciò il valore netto del portafoglio è non-negativo. Quindi, anche in questo caso abbiamo dimostrato che il nostro portafoglio titoli è immunizzato da variazioni che incidono in ugual misura sull'attivo e sul passivo, nel senso che riesce a coprire l'unica uscita con un guadagno per il soggetto finanziato.

Supponiamo che il tasso di interesse non aumenta o diminuisca in misura uguale sia per l'attivo che il passivo del portafoglio, ma che ci sia una divergenza tra l'aumento o la diminuzione del tasso di interesse che incide sull'attivo e il passivo.

L'esempio che verrà proposto, relativo a variazioni diverse del tasso per l'attivo e per il passivo, non ha lo scopo di verificare il teorema ma di semplice esemplificazione numerica.

Supponiamo un aumento dell'0,4% del tasso IRS e un aumento dell'0,6% della curva dei rendimenti dei BTP, verificando se, nonostante la divergenza della variazione, il portafoglio titoli sia ancora immunizzato.

Fig. 17



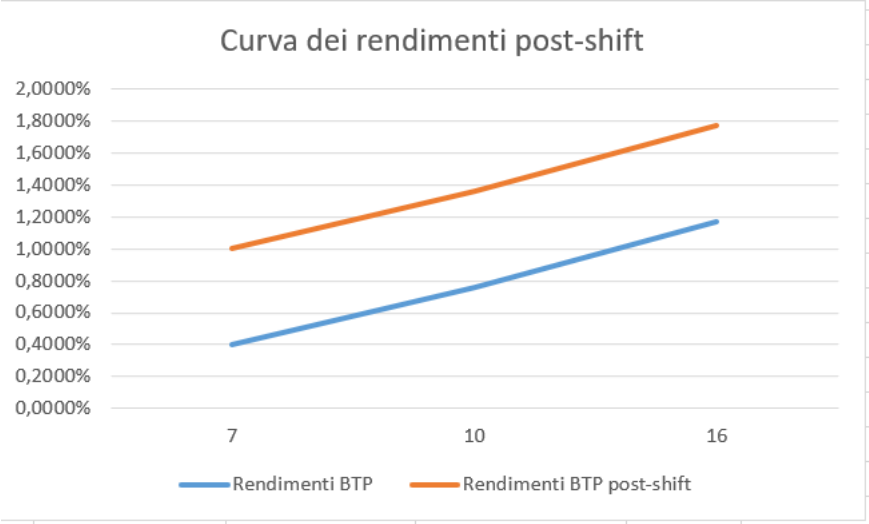
(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 17 evidenza la variazione della curva dei tassi IRS dopo la fluttuazione di 0,4 punti percentuali, anche in questo caso la variazione incide nella stessa misura tutti i tassi e in ogni istante di tempo la curva dei tassi IRS post-shift (curva arancione) sarà sempre maggiore di 0,4% rispetto la curva dei tassi IRS (curva blu).

La conseguenza dell'aumento dei tassi, come abbiamo visto anche precedentemente, è la diminuzione sia del valore del passivo che del valore dell'attivo in quanto si attualizzerà ad un tasso maggiore. Dalla figura 17 si evince che il tasso IRS10 A post-shift è pari a 0,54%. Quindi, il valore del passivo dopo la fluttuazione del tasso sarà pari a 48045,58€.

Per vedere se il portafoglio è ancora immunizzato, bisogna confrontare il valore del passivo post-shift con il valore dell'attivo post-shift. Per fare ciò bisogna rappresentare la nuova curva dei rendimenti dei BTP dopo il cambiamento del tasso (+0,6%), calcolare i nuovi prezzi post-shift e moltiplicarli per le rispettive quantità di titoli detenuti in portafoglio.

Fig. 18



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

Come la figura 18 mostra la curva dei rendimenti aumenta in seguito dell'aumento del tasso, anche in questo caso la variazione del tasso interviene prima della scadenza del primo flusso e influenzerà allo stesso modo tutti i flussi del portafoglio. Data la nuova curva dei rendimenti, è possibile calcolare i nuovi prezzi e il valore dell'attivo del portafoglio dopo il cambiamento dei tassi.

Tab. 6 ''valore dell'attivo del portafoglio nell'istante di valutazione 0, post-shift del tasso''

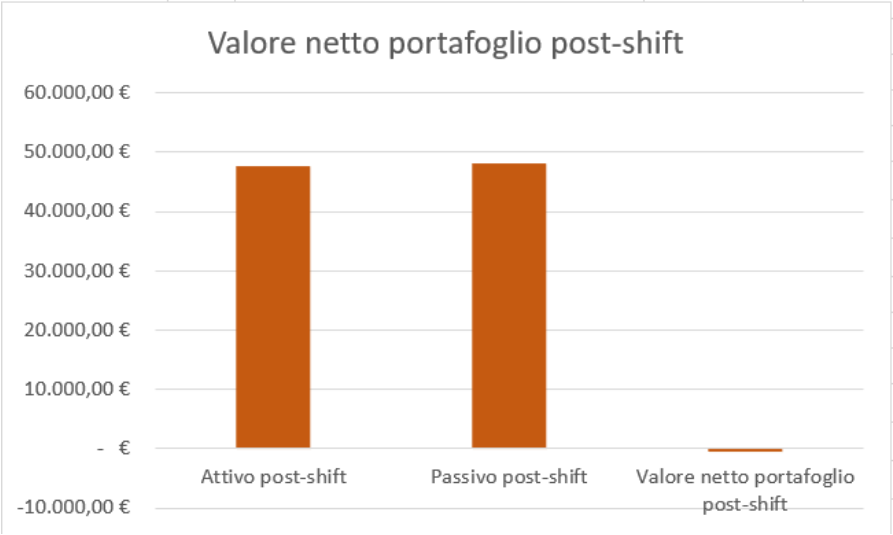
BTP	Quantità	Prezzo post-shift	Attivo Portafoglio
IT0005436693	21,852	92,65	2024,61
IT0005402117	201,657	93,28	18809,68
IT0005445306	276,851	96,56	26733,44
			47567,72

(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La tabella 6 mostra i nuovi prezzi dei titoli dopo aver subito la variazione del tasso di interesse, come atteso all'aumentare del tasso diminuiscono i prezzi dei titoli. Dati i nuovi prezzi, è possibile calcolare il nuovo valore dell'attivo del portafoglio pari a 47567,72€.

Per capire se il portafoglio è immunizzato dobbiamo, come fatto precedentemente, confrontare il valore del passivo post-shift con il valore dell'attivo post-shift e vedere se tale valore è non-negativo.

Fig. 19



(Elaborazione personale effettuata tramite Excel)

La figura 19 evidenzia come il valore netto del portafoglio dopo il cambiamento del tasso di interesse è negativo, cioè il valore del passivo post-shift è maggiore del valore dell'attivo post-shift. In particolare, il portafoglio non è immunizzato in quanto l'investitore subirà una perdita pari a 477,86€.

Quindi, abbiamo dimostrato come prendendo in considerazione variazioni rigide di diverso ammontare nella curva dei tassi passivi e attivi, la teoria dell'immunizzazione finanziaria classica di Fisher-Weil non è dimostrata. Tuttavia, questa teoria è di efficace applicazione e può essere utilizzate se viene presa in considerazione la sua problematica concernente la struttura dei tassi attivi e passivi.

I portafogli dell'attivo e del passivo inizialmente erano equivalenti finanziariamente, tuttavia avendo fatto decrescere di più il tasso sull'attivo, era prevedibile aspettarsi che ciò avrebbe avuto un impatto ''negativo'' maggiore sulla valutazione del portafoglio dell'attivo, a parità di ampiezza di variazione del tasso, e quindi una impossibilità da parte dello stesso portafoglio dell'attivo di potere coprire l'uscita, data dallo ZCB.

3. Immunizzazione stocastica

Nel corso di questo capitolo verranno introdotti dei fattori che non sono stati presi in considerazione nell'immunizzazione finanziaria classica, elementi di tipo aleatorio che non hanno avuto rilievo nell'analisi deterministica. Togliendo la condizione di certezza che contraddistingue il modello classico deterministico, gli investitori non hanno la conoscenza dei valori futuri dei titoli, perciò diventa essenziale definire il tasso spot che rappresenta la variabile aleatoria dell'immunizzazione stocastica e viene analizzata attraverso dei processi stocastici.

Prioritariamente verranno enunciati i processi stocastici che rivestono un ruolo fondamentale nella definizione del tasso spot. In particolare, verranno presi in considerazione il moto browniano standard e geometrico, il processo di Ornstein e Uhlenbeck e il processo *mean-reverting square-root*. Questi processi fanno parte dei processi di diffusione e sono contraddistinti da due proprietà. In primo luogo, sono caratterizzati dalla proprietà di continuità delle traiettorie, cioè il tasso spot in funzione del tempo t non presenta punti di discontinuità. In particolare, significa che il titolo, pur seguendo elementi aleatori, non è influenzato da shock (De Felice et al., 1991). In secondo luogo, tali processi godono della proprietà di markovianità, ossia che la distribuzione delle probabilità dei valori futuri del tasso spot è definita esclusivamente dal valore che essa assume nell'istante t di osservazione e non è influenzata dall'evoluzione del processo prima di t (De Felice et al., 1991).

Secondariamente verrà definito il teorema generale dell'immunizzazione stocastica, enunciando le condizioni necessarie affinchè il teorema sia rispettato. Verrà ripreso il concetto di *duration* stocastica che assurge ad un ruolo fondamentale nella definizione di tale teorema. Successivamente verranno presi in considerazione il modello di Vasicek e il modello Cox, Ingersoll e Ross sviluppati per avere una buona approssimazione dell'andamento del tasso spot e per rispettare le condizioni del teorema generale dell'immunizzazione stocastica.

3.1. Moto browniano standard

Il moto browniano fu sviluppato da un botanico di origini scozzesi Robert Brown (Brown, 1828) durante la trattazione degli spostamenti del polline sulla superficie dell'acqua. Questa teoria di spostamenti casuali che, tuttavia, seguivano un particolare andamento fu ripresa prioritariamente in fisica e successivamente dalla matematica grazie al lavoro di Paul Levy (Levy, 1948) e Norbert Wiener (Wiener, 1923). In particolare, quando parliamo di moto browniano in accezione matematico finanziaria facciamo riferimento al processo di Wiener.

Un moto browniano è un processo stocastico *Y(t)* che all'istante t=0 è quasi certamente nullo, a traiettorie continue, omogeneo e caratterizzato dalla proprietà di incrementi indipendenti e stazionari. A livello di distribuzione di probabilità, tali proprietà hanno implicazioni importanti sul processo che può essere definito come la somma di un numero illimitatamente grande di incrementi indipendenti illimitatamente piccoli (Castellani, 2007). Prendendo in considerazione incrementi elevati, il processo di Wiener deve avere, per il teorema del limite centrale, una distribuzione di probabilità normale standard. In particolare:

$$Y(s) - Y(t) \sim N[\mu(s-t), \sigma^2(s-t)] \tag{67}$$

dove

μ è la media del processo o parametro di deriva (o drift) del processo, pari a:

$$\mu = E[Y(1)] - Y(0) \tag{68}$$

σ^2 è la varianza del processo o parametro di diffusione del processo, data da:

$$\sigma^2 = E[Y(1) - \mu]^2 \tag{69}$$

Il moto browniano standard (Z_t), segue una distribuzione normale standard quando il parametro di deriva è uguale a 0 ($\mu=0$) e il parametro di diffusione del processo è pari a 1 ($\sigma^2=1$). In particolare, possiamo scrivere il moto browniano standard attraverso la trasformazione lineare di una variabile aleatoria come:

$$Y(t) = Y(0) + \mu t + \sigma Z(t) \tag{70}$$

Il moto browniano standard soffre di una proprietà che rende tale moto poco significativo nella determinazione del prezzo di un titolo, in quanto Y(t) ha una probabilità positiva di assumere valori negativi indipendentemente dal valore iniziale assunto nel processo.

Infatti, per determinare il prezzo di un titolo attraverso dei processi stocastici non viene usato il moto browniano standard ma, prevalentemente, il moto browniano geometrico in quanto, come vedremo, tale moto non può assumere valori negativi, in quanto lo spazio degli stati va da 0 a infinito.

3.2. Moto browniano geometrico

Il moto browniano geometrico è caratterizzato da una distribuzione delle probabilità di tipo lognormale. È proprio questa caratteristica che permette al moto browniano geometrico Y(t) di assumere solo valori positivi. Tale proprietà permette di ottenere una buona approssimazione del valore dei prezzi dei titoli, infatti questo moto viene utilizzato nel modello Black-Scholes per la determinazione del prezzo di un titolo. L'enunciazione del modello di Black-Scholes non è oggetto di trattazione di questo elaborato. Inoltre, il moto browniano geometrico, a differenza di quello standard, non è caratterizzato dalla proprietà degli incrementi indipendenti ma l'incremento è condizionato dal valore corrente di *Y(t)* e dal valore nell'istante prima di quello corrente *Y(t-1).*

Il moto browniano geometrico viene definito dal processo stocastico:

$$Y(t) \coloneqq Y(0)e^{\mu t+\sigma Z(t)} \tag{71}$$

Si evince dalla formula (71) che il moto browniano geometrico presenta all'esponente un moto browniano (Z) con il parametro di deriva nullo ($\mu=0$) e il parametro di diffusione unitario ($\sigma=1$).

Come sottolineato precedentemente, lo spazio degli stati va da 0 a più infinito, per cui *Y(t)* può assumere solo valori positivi e per questa sua proprietà viene utilizzato come modello per descrivere l'andamento dei prezzi di un titolo nel tempo.

In particolare, la formula (71) può essere riscritta supponendo che il parametro di diffusione sia pari a 0 (σ=0) perciò:

$$Y(t) \coloneqq Y(0)e^{\mu t} \tag{72}$$

Il parametro di deriva (μ) rappresenta la deriva del logaritmo di Y(t), data dall'equazione:

$$\mu = \frac{dY(t)}{Y(t)dt} = \frac{d}{dt} logY(t) \tag{73}$$

In termini finanziari, μ rappresenta il tasso istantaneo di rendimento del titolo.

Il moto browniano geometrico, quindi, non è altro che un ampliamento della formula (72), la quale rappresenta il modello esponenziale classico deterministico. Il secondo addendo (σZ), che viene aggiunto rispetto al modello deterministico e che porta al modello del moto browniano geometrico, è definito come un fattore di ''rumore'' con media nulla e varianza lineare (Castellani, 2007). In termini finanziari, σ rappresenta la volatilità del prezzo del titolo.

Come detto precedentemente, il moto browniano geometrico non è caratterizzato dalla proprietà degli incrementi indipendenti, in quanto l'incremento che va dall'istante t all'istante $t+\Delta t$ è dato da:

$$\Delta Y(t) \coloneqq Y(t)\left[e^{\mu(t+\Delta t)+\sigma Z(t+\Delta t)} - e^{\mu t+\sigma Z(t)}\right] \tag{74}$$

La formula (74) mostra come l'incremento $\Delta Y(t)$ è condizionato da Y(t) che è il valore corrente che assume il processo stocastico. Tuttavia, questa proprietà è valida per l'intero processo e non per i singoli rapporti che, invece, sono caratterizzati dall'indipendenza degli incrementi. Prendendo in considerazione i logaritmi dei rapporti dei singoli incrementi, abbiamo:

$$log\frac{Y(t_{k+1})}{Y(t_k)} = \mu(t_{k+1} - t_k) + \sigma[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)] = Y(t_{k+1}) - Y(t_k) \tag{75}$$

dove Y(t) è il moto browniano geometrico preso in considerazione nella formula (71).

A differenza del moto browniano standard, trattato nel paragrafo 3.1., il moto browniano geometrico non è caratterizzato dalla proprietà dell'indipendenza degli incrementi, in quanto l'incremento di $Y(t_{k+1})$ dipende dall'andamento del prezzo $Y(t_k)$.

3.3. Processo di Ornstein Uhlenbeck

Ornstein e Uhlenbeck (Ornstein et al., 1930) analizzarono il movimento di una particella attraverso un moto browniano, partendo dal lavoro di Smoluchowki nel 1915 e di Einstein nel 1956, incentrati sul moto browniano. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico, definito nel continuo e caratterizzato dalla proprietà di markovianità. Quindi, la distribuzione delle probabilità dei valori futuri di *r(t)* dipende solo dal valore che il processo assume all'istante *t* e non dalla serie storica. In aggiunta a ciò, tale processo è un processo stazionario cioè la distribuzione delle probabilità rimane la stessa anche se viene spostata nel tempo. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico che partendo dalla *''random walk''*, prende in considerazione un fattore che riconduce nel lungo periodo l'intero processo verso un valore medio. È uno dei processi stocastici di *''mean-reverting''* più semplici in quanto ipotizza che il coefficiente di diffusione risulta costante nel tempo.

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è dato dalla seguente equazione differenziale stocastica (EDS):

$$dY = \alpha(\gamma - Y)dt + \sigma\, dZ_t \tag{76}$$

dove

α è il tasso di ritorno alla media (α>0), ossia esprime la velocità con cui le traiettorie del processo ritornano al livello medio γ e viene anche definito come coefficiente di richiamo. Tanto più alto è tale tasso, meno tempo ci mette il processo a tornare al suo valore medio di lungo termine;

γ è il livello medio del processo;

σ esprime la volatilità delle variazioni delle traiettorie del processo nel tempo (σ>0);

Z_t è un moto browniano o processo di Wiener.

La formula (76) è data da due addendi, il primo è il coefficiente di drift ed è il modello deterministico *''mean-reverting''* mentre il secondo addendo è il coefficiente di diffusione ed è la componente stocastica. La componente stocastica è un fattore di disturbo di intensità costante che sposta continuamente il processo dalla sua traiettoria deterministica, data dal primo addendo (Castellani, 2007).

La caratteristica peculiare del processo di Ornstein-Uhlenbeck è che è caratterizzato da una distribuzione di probabilità normale, così come un moto browniano standard. Tale proprietà, come visto precedentemente, comporta che il processo ha una probabilità positiva di assumere valori negativi. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è stato sviluppato nel 1930, in cui i tassi di interesse solitamente assumevano valori positivi anche nel brevissimo tempo. Per questa ragione, tale processo

non è stato preso adeguatamente in considerazione. Tuttavia, attualmente il concetto di tasso di interesse negativo è entrato prepotentemente nei mercati e, quindi, tale processo sta assumendo una rilevanza maggiore.

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck viene utilizzato nel modello di Vasicek, il quale verrà analizzato successivamente, per rappresentare l'andamento del tasso spot (r_t) e viene anche utilizzato anche per la definizione del prezzo dei derivati.

3.4. Mean-reverting square-root

Il processo stocastico *''mean-reverting square-root''* risolve la problematica dell'assunzione di valori negativi di *Y(t)* presente nel processo di Ornstein-Uhlenbeck, data dalla distribuzione delle probabilità di tipo normale. Per ottenere valori positivi di *Y(t)* è necessario prendere in considerazione il coefficiente di diffusione (σ) non costante, a differenza del processo di Ornstein-Uhlenbeck. Considerando che il coefficiente di diffusione non sarà costante, viene meno anche la distribuzione delle probabilità di tipo normale. In particolare, la funzione del coefficiente di diffusione deve assumere valori decrescenti di *Y(t)* ed annullarsi per *Y(t)=0* (Castellani, 2007). Prendendo in considerazione questo fattore, la quantità stocastica caratterizzante il processo di *''mean-reverting square-root''* tende ad assumere valori molto bassi quando il processo arriva al valore *Y=0*. Quindi, l'unica componente che influenza l'andamento del processo, non è la quantità stocastica ma la quantità deterministica, data dal primo addendo. Quindi, la quantità deterministica comporta che *Y* assumerà valori positivi in quanto sarà richiamato al livello medio di lungo periodo (γ) con una velocità pari al tasso di ritorno alla media (α).

Il processo *''mean-reverting square-root''* è determinato dall'EDS:

$$dY = \alpha(\gamma - Y)dt \ + \sigma\sqrt{Y(t)}\, dZ_t \tag{77}$$

dove

α è il tasso di ritorno alla media ($\alpha > 0$) e indica la velocità con cui *Y* tende al livello medio γ, maggiore è tale tasso minore è il tempo che ci mette *Y* a raggiungere il suo livello medio;

γ è il livello medio del processo ($\gamma \geq 0$);

σ è la volatilità dei rendimenti ($\sigma > 0$);

Z_t è un moto browniano o processo di Wiener.

Il primo addendo della formula (77) è il coefficiente di drift ed è la quantità deterministica già discussa nei precedenti paragrafi. Il secondo addendo invece è la quantità stocastica (coefficiente di diffusione) caratterizzata dalla radice quadrata di *Y(t)*, ciò permette di evitare valori negativi di *Y(t)*, e dalla volatilità dei rendimenti (σ).

Questo processo non è caratterizzato da una distribuzione delle probabilità di tipo normale o lognormale. La radice quadrata presente nella formula (77) fa sì che il processo abbia una distribuzione delle probabilità di tipo chi-quadro non centrale. In particolare, la chi-quadro non centrale ha media:

$$E_t[Y(\infty)] = \gamma \tag{78}$$

e varianza:

$$Var_t[Y(\infty)] = \frac{\sigma^2\gamma}{2\alpha} \tag{79}$$

Il processo *''mean-reverting square-root''* viene utilizzato nel modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) per rappresentare l'andamento del tasso spot *(r_t).* A differenza del processo di Ornstein-Uhlenbeck nel quale il tasso spot pur partendo da un valore positivo può assumere valori negativi dati dalla componente stocastica, il processo *''mean-reverting square-root''* utilizzato nel modello CIR il tasso spot può assumere solo valori positivi.

3.5. Duration stocastica

La duration stocastica è una misura del rischio di un titolo che prende in considerazione il fattore aleatorio che caratterizza il mondo stocastico. Tale misura è stata proposta prioritariamente da Cox, Ingersoll e Ross (Cox et al., 1979), in cui l'assunto base è quello di considerare la *duration* di uno zero coupon bond uguale alla *maturity* degli stessi titoli. Se *y* è il flusso dello zero coupon bond con scadenza *τ*, allora la *duration* stocastica del flusso *x* sarà:

$$\mathrm{D(t;x)} = -\frac{v_r(t,t+\tau)}{v(t,t+\tau)} \tag{80}$$

dove,

$v\ (t,t+\tau)$ è il fattore di sconto dall'istante *t* fino all'istante $t+\tau$;

$v_r\ (t,t+\tau)$ è la derivata del fattore di sconto rispetto il tasso spot.

Prendendo in considerazione un flusso *x* e un flusso *y* che presentano la medesima rischiosità all'istante *t*, allora:

$$\mathrm{D(t;x)} = \mathrm{D(t;y)} \tag{81}$$

Sapendo che il flusso dell'attivo *x* e del passivo *y* devono avere la stessa *duration* e che la *duration* del passivo è data da uno zero coupon bond, allora la *duration* dell'attivo del portafoglio corrisponde a:

$$D(t;x) = \tau \tag{82}$$

Quindi, la *duration* dei flussi *x* e *y* in *t* dovranno assumere lo stesso valore, perciò è definita implicitamente dall'uguaglianza:

$$-\frac{v_r(t;x)}{v(t;x)} = -\frac{v_r(t,t+\mathrm{D})}{v(t,t+\mathrm{D})} \tag{83}$$

L'uguaglianza data dalla (84) comporta che il rischio di un titolo con flusso all'attivo *x* è uguale al rischio di un titolo con flusso al passivo *y*. Visto che il titolo con flusso *y* è uno zero coupon bond con scadenza *D*, allora anche il titolo con flusso *x* dovrà avere scadenza *D*.

La *duration* stocastica è una grandezza fondamentale che assume un ruolo centrale nel teorema dell'immunizzazione stocastica, che verrà enunciato nel successivo paragrafo.

3.6. Introduzione al teorema dell'immunizzazione stocastica

In questo paragrafo verrà ampliata l'analisi fatta nel capitolo 2 riguardante l'immunizzazione finanziaria classica, aggiungendo a questa teoria l'elemento nuovo consistente nella considerazione delle aspettative degli investitori sull'evoluzione del tasso spot. Sostanzialmente, l'immunizzazione stocastica consiste nel determinare, l'andamento del *r(t)* al fine di costruire un portafoglio titoli che vada a minimizzare le perdite. Nei precedenti paragrafi, abbiamo illustrato alcuni dei più popolari dei processi stocastici che, in modi diversi tra di loro, permettono di descrivere l'andamento futuro del tasso spot. La problematica principale riguardante l'immunizzazione finanziaria classica riguarda l'ipotesi di shift additivi del tasso di interesse: nell'immunizzazione stocastica invece si tiene conto dell'aleatorietà dell'andamento del tasso rendendo quest'ultima teoria più conforme alla realtà dei mercati finanziari.

Prima di enunciare la teoria dell'immunizzazione stocastica, bisogna prendere in considerazione le ipotesi sul mercato che caratterizzano tale teoria. Le ipotesi sul mercato sono (De Felice et al., 1991):

1) Mercato non-frizionale, in cui non ci sono costi di transazione e fiscali, infinità divisibilità dei titoli, nessun vincolo riguardante la contrattazione dei titoli e vendite allo scoperto;
2) Mercato competitivo, in cui gli investitori prendendo il prezzo come esogenamente determinato e non hanno la possibilità di influire sul prezzo attraverso la contrattazione dei titoli e cercano di massimizzare il profitto;
3) Mercato sempre aperto, in cui gli operatori possono in ogni momento fare scambi tra di loro;
4) Assenza di operazioni di arbitraggio, ciò permette al mercato di raggiungere una posizione di equilibrio;
5) La presenza sul mercato di un tasso locale d'interesse o tasso *risk-free* (definito spot rate), dato dall'EDS:

   $$dr_t = f(r_t, t)dt + g(r_t, t)dZ_t \tag{84}$$

   dove

   f è il coefficiente di *drift* e corrisponde alla quantità deterministica;

   g è il coefficiente di diffusione e corrisponde alla quantità stocastica;

   Z_t è un moto browniano standard.

Il mondo stocastico è caratterizzato da queste cinque ipotesi sul mercato, in particolare il coefficiente di diffusione e il moto browniano standard sono gli elementi che contraddistinguono il mondo stocastico rispetto a quello deterministico.

3.6.1. Teorema dell'immunizzazione stocastica

Una volta analizzata la *duration* stocastica, è possibile enunciare il teorema generale dell'immunizzazione stocastica ad un'uscita, in quanto la *duration* stocastica è una delle grandezze fondamentali del teorema. In primo luogo, verrà enunciato il teorema partendo da una condizione che è comune con l'immunizzazione finanziaria classica. Prendendo in considerazione un portafoglio composto da un titolo che genera un flusso non-negativo *x* e un titolo che genera un flusso non-negativo *y*, i due flussi nell'istante di valutazione *t* devono avere il medesimo valore. Quindi:

$$dW(t;x) = dW(t;y) \tag{85}$$

Questa condizione dell'immunizzazione stocastica rappresenta il vincolo di bilancio ed è la stessa condizione che è stata riscontrata nell'immunizzazione finanziaria classica. Il portafoglio è immunizzato se nell'istante di valutazione *t*, i due flussi *x* e *y* hanno un valore netto nullo e se nell'istante che va da *t* a *t* + *dt*, i due flussi *x* e *y* originano la medesima variazione di valore.

Oltre al vincolo di bilancio, è necessaria un'ulteriore condizione affinché sia soddisfatto il teorema generale dell'immunizzazione stocastica. La seconda condizione necessaria per immunizzare un portafoglio titoli è che il flusso x e il flusso y devono avere la medesima rischiosità, quindi:

$$\mathrm{D}(r_t, \mathrm{t}; \mathrm{x}) = \mathrm{D}(r_t, \mathrm{t}; \mathrm{y}) \tag{86}$$

L'equazione (86) rappresenta la condizione di *duration*.

Quindi, il teorema fondamentale dell'immunizzazione stocastica è rispettato se è rispettata la condizione del vincolo di bilancio e la condizione di *duration*. In particolare, se sono rispettate queste due condizioni, il portafoglio è immunizzato nell'istante di valutazione *t*, tuttavia dall'istante immediatamente successivo a quello di valutazione è necessario individuare l'andamento del tasso spot per potere ricalibrare continuamente il portafoglio titoli.

Supponiamo di costruire un portafoglio titoli immunizzato coprendo una passività di importo L e scadenza H, con quote di due zero coupon bond che compongono l'attivo del portafoglio α_1 e α_2 con scadenza t_1 e t_2 (De Felice et al., 1991). Il vincolo di bilancio sarà:

$$\alpha_1 v(t, t_1) + \alpha_2 v(t, t_2) = Lv(t, H) \tag{87}$$

dove

t_1 e t_2 rappresentano istanti di valutazioni successivi all'istante t, in particolare $t < t_1 < H < t_2$;

H è l'*holding period.*

Prendendo in considerazione la condizione di *duration*:

$$D(t,t_1)\alpha_1 v(t,t_1) + D(t,t_2)\alpha_2 v(t,t_2) = D(t,H)Lv(t,H) \tag{88}$$

Per trovare le quote degli zero coupon bond che compongono l'attivo del portafoglio p necessario mettere a sistema le equazioni (87) e (88), esplicitando α_1 e α_2:

$$\alpha_1 = \frac{Lv(t,H)[D(t,t_2)-D(t,H)]}{v(t,t_1)[D(t,t_2)-D(t,t_1)]} \tag{89}$$

$$\alpha_2 = \frac{Lv(t,H)[D(t,H)-D(t,t_1)]}{v(t,t_2)[D(t,t_2)-D(t,t_1)]} \tag{90}$$

Le formule (89) e (90) esprimono le quote degli zero coupon bond dell'attivo del portafoglio a copertura di un'uscita di quantità L con scadenza H. Sapendo che il tasso spot cambia in maniera continua, è necessario ricalibrare il portafoglio continuamente. Queste formule verranno riprese successivamente per la costruzione di un portafoglio immunizzato.

3.6.2. Modello di Vasicek

Il modello di Vasicek è un modello matematico-finanziario che serve per determinare l'andamento del tasso spot (r_t) che dipende da un fattore deterministico e uno stocastico ed è sostanzialmente il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Tale modello viene utilizzato anche per determinare il prezzo di un derivato, partendo dall'ipotesi di assenza di arbitraggio. L'assunto di base di tale modello è che il tasso spot non raggiunge livelli estremi, tuttavia c'è una probabilità che possa raggiungere valori negativi. Altre ipotesi sottostanti il modello sono (Vasicek, 1977):

- Il tasso spot segue il processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck;
- Prezzo di uno ZCB con maturità al tempo T dipende dal r(s), con $t<s<T$;
- Il mercato è efficiente, quindi non ci sono costi di transazione, tutti gli investitori hanno a disposizione tutte le informazioni e gli agenti sono razionali.

Il processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck è stato trattato nel paragrafo 3.3. e tuttavia, è utile riprendere alcuni concetti di tale processo in quanto il modello di Vasicek basa l'evoluzione del tasso spot r_t proprio su questo processo. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico continuo, caratterizzato dalla proprietà di markovianità e la distribuzione delle probabilità è di tipo normale, quindi il tasso spot ha una probabilità positiva di avere un valore negativo. Se il tasso di ritorno alla media è maggiore di 0 ($\alpha>0$) il processo può essere definito *''elastic random walk''*.

L'andamento del tasso spot nel modello Vasicek è dato da un processo stocastico di questo tipo:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma\, dZ_t$$

Il processo di diffusione è il processo di Ornstein-Uhlenbeck.

Il modello di Vasicek oltre ad essere un modello caratterizzato dal mean-reverse, è un modello univariato in quanto la struttura dei tassi dipende solo dal tasso spot. Inoltre, è un modello in cui c'è assenza di eteroschedasticità in quanto la volatilità non è in funzione del tasso spot.

Date le assunzioni precedentemente fatte, il prezzo di un titolo $P(t,t+\tau)$, con $t \leq t+\tau$, è in funzione di r_t:

$$P(t, t+\tau) = P(t, t+\tau, r_t) \tag{91}$$

$P(t,t+\tau, r_t)$ è il prezzo del titolo con scadenza $t+\tau$ al tasso spot r_t.

Il processo stocastico del tasso spot non permette di determinare il prezzo del titolo, per fare ciò è necessario determinare l'equazione di valutazione del modello. L'equazione di valutazione viene trovata risolvendo l'EDS, precedentemente enunciata, e partendo da tale equazione possiamo ricavare i fattori di sconto che caratterizzano il modello di Vasicek.

L'equazione di valutazione è (Castellani, 2007):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(\gamma - r) * \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} - rY = 0 \tag{92}$$

Dall'equazione (92) è possibile ricavare il prezzo di uno zero coupon bond $v(t,t+\tau)$:

$$v(t, t+\tau) = \mathrm{A}(\tau) * e^{-r(t)B(\tau)} \tag{93}$$

dove,

$A(\tau)$ e $B(\tau)$ sono funzioni deterministiche. In particolare:

$$A(\tau) = e^{\left[\frac{(B(\tau)-\tau)(\alpha^2\gamma - \frac{\sigma^2}{2})}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2 B^2(\tau)}{4\alpha}\right]} \tag{94}$$

$$B(\tau) = \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \tag{95}$$

3.6.3. Modello di Cox-Ingersoll-Ross

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross (in seguito CIR), così come il modello di Vasicek, è un modello unifattoriale che viene utilizzato per determinare l'andamento del tasso spot. Il modello CIR è un'estensione del modello di Vasicek e ne supera due questioni: la prima riguardante la possibilità che, seppur per brevi istanti, il tasso spot possa assumere, con probabilità positiva, valori negativi, e la seconda problematica del modello di Vasicek consiste nel fatto che la volatilità come è costante ed indipendente dal tasso spot (omoschedasticità). Questi problemi vengono superati con il modello CIR in quanto, come vedremo, in tale modello il tasso spot r_t non può assumere valori negativi (al massimo può arrivare zero) e la volatilità, o il rischio di mercato, è in funzione di r_t. Così come il modello di Vasicek è caratterizzato da un processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck, il modello CIR è caratterizzato da un processo stocastico *mean-reverting square-root*, analizzato nel precedente paragrafo, caratterizzato da una distribuzione di probabilità di tipo chi-quadro non centrata.

L'andamento del tasso spot nel modello CIR può essere espressa come (Cox et al., 1985):

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt \ + \sigma\sqrt{r_t}\, dZ_t$$

Il primo addendo è deterministico ed è il coefficiente di drift, in cui α è il tasso di ritorno al livello medio e γ è il livello medio del processo. Il secondo addendo dell'equazione è stocastico ed è rappresentato dal coefficiente di diffusione, in cui σ è la volatilità o il rischio di mercato che è in funzione del tasso spot. La particolarità è la presenza della radice quadrata nel tasso spot che non permette al tasso di raggiungere valori negativi. Inoltre, il coefficiente di diffusione assume valori maggiori quando il tasso spot aumenta, ciò in concerto con l'evidenza empirica che si riscontra sui mercati finanziari nei quali nei periodi di maggiori volatilità (σ), i tassi sono più elevati (Castellani, 2007). A differenza del modello di Vasicek, il modello CIR è caratterizzato da eteroschedasticità poiché la volatilità è condizionata dal valore assunto dal tasso spot.

Il prezzo di mercato del rischio, dato dalla funzione q è:

$$q(r_t, t) = \ -\pi \frac{\sqrt{r_t}}{\sigma} \tag{96}$$

La funzione q ha la stessa forma del coefficiente di diffusione e il prodotto tra queste due funzioni (q e g) è una funzione lineare rispetto al tasso spot. In quanto:

$$\hat{f} := \ f \ - \ qg \ = \alpha(\gamma - r_t) \ + \pi r_t \tag{97}$$

Si evince come tale funzione sia lineare rispetto il tasso spot.

Possiamo enunciare l'equazione di valutazione del modello CIR, data da (Castellani, 2007):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [\alpha(\gamma - r) + \pi r] * \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} - rY = 0 \tag{98}$$

Dall'equazione di valutazione è possibile trovare il fattore di sconto di un titolo con scadenza all'istante *t+τ:*

$$v(t, t + \tau) = \mathrm{A}(\tau) * e^{-r(t)B(\tau)}$$

dove,

A(τ) e B(τ) sono le seguenti funzioni deterministiche:

$$A(\tau) = [\frac{2de^{(\alpha-\pi+d)\frac{\tau}{2}}}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1)+2d}]^v \tag{99}$$

$$B(\tau) = [\frac{2(e^{d\tau}-1)}{(\alpha-\pi+d)(e^{d\tau}-1)+2d}] \tag{100}$$

in cui:

$$d := \sqrt{(\alpha - \pi)^2 + 2\sigma^2} \tag{101}$$

$$v := 2\frac{\alpha\gamma}{\sigma^2} \tag{102}$$

Attraverso queste formule vengono calcolati i fattori di rischio e di sconto che servono a trovare il prezzo di uno ZCB. Prendendo in considerazione le condizioni enunciate per l'immunizzazione stocastica e utilizzando le formule (89) e (90) riguardanti le quote degli ZCB che devono comporre il portafoglio è possibile comporre un portafoglio obbligazionario che sia immunizzato nell'istante di valutazione t. Tuttavia, visto che il tasso spot varia in maniera continua, è necessario ricalibrare il portafoglio titoli a seconda dell'andamento del tasso, andamento simulato o con il modello di Vasicek o con il modello CIR.

Conclusione

In questo trattato abbiamo visto le caratteristiche della *duration*, e le sue relative problematiche, proponendo, inoltre diverse visioni di rischio da alcuni economisti. La *duration* è stata analizzata in relazione alle tecniche di immunizzazione finanziaria e stocastica. In particolare, sono stati enunciati i teoremi di Redington a copertura di un'unica uscita e a copertura di uscite multiple e il teorema di Fisher e Weil.

Le tecniche di immunizzazione finanziaria, così come in quelle stocastiche, sono influenzate da assunzioni forti, fatte ex ante dagli stessi autori. Infatti, tra le ipotesi, è stato preso in considerazione l'assenza dei costi di transazione e dei costi fiscali che, invece, influenzano notevolmente la creazione di un portafoglio immunizzato.

Sono state enunciate le principali condizioni che caratterizzano tali teoremi ed è stato proposto, con particolare riferimento al teorema di Fisher e Weil, un caso pratico di immunizzazione finanziaria. Nel particolare, abbiano simulato la creazione di un portafoglio di titoli composto nell'attivo da tre BTP emessi sul mercato italiano e nel passivo da uno ZCB creato ad hoc. Il portafoglio è stato sottoposto alle condizioni enunciate nel teorema di Fisher e Weil ed, essendo composto da più di due titoli nell'attivo, è stato necessario utilizzare il programma ''optimtool'' di MATLAB per trovare, nell'istante 0, le quantità di ogni titolo al fine di costruire un portafoglio immunizzato da variazioni del tasso di interesse.

Tale portafoglio è stato sottoposto a variazioni rigide della stessa ampiezza del tasso di interesse sia nell'attivo che nel passivo, ottenendo come risultati valori netti positivi che evidenziano come, secondo il teorema di Fisher e Weil, sia possibile ottenere un guadagno da variazioni inattese del tasso di interesse. Dopo ogni variazione del tasso è necessario ricalibrare il portafoglio di titoli, ciò comporta costi di transizione che possono fare diminuire il valore netto del portafoglio. Tuttavia, abbandonando l'ipotesi di variazioni dello stesso ammontare nell'attivo e del passivo, si è verificato come il valore netto del portafoglio sia negativo.

Da ciò deriva come il teorema di Fisher e Weil può essere di enorme aiuto per un investitore per l'identificazione di un portafoglio che, nonostante variazioni inattese sui tassi, possa generare un valore netto positivo. D'altra parte, bisogna tenere ben a mente le problematiche per non incorrere in potenziali inconvenienti. Bisogna tenere presente che, nel caso pratico presentato nel seguente elaborato, è stato preso in considerazione un portafoglio composto, in totale, da quattro titoli. Di norma, le istituzioni finanziarie hanno dei portafogli di titoli molto più grandi e con titoli che presentano caratteristiche differenti fra loro, rendendo, di fatto, l'immunizzazione del portafoglio di più difficile attuazione.

All’analisi effettuata sull’immunizzazione finanziaria è stata aggiunta l’analisi stocastica, partendo dallo studiare le aspettative degli investitori sull’evoluzione del tasso spot, ciò è l’elemento distintivo dell’immunizzazione stocastica. In particolare, attraverso la trattazione dei processi stocastici, è possibile determinare l’andamento del tasso spot che è influenzato da diversi fattori. Per ottenere un’evoluzione del tasso spot attinente alla realtà, è necessario che le considerazioni fatte sugli elementi caratterizzanti il tasso siano precise. Come visto, l’andamento del tasso spot non è univoco per tutti i modelli. Infatti, nel modello CIR il tasso spot non può assumere valori negativi in qualsiasi istante di valutazione mentre nel modello di Vasicek tale eventualità è possibile, in quanto tale modello è caratterizzato dal processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck. Il singolo investitore può utilizzare uno di questi modelli per calcolare i singoli fattori di sconto e di rischio e, simulando l’andamento del tasso spot, costruire un portafoglio immunizzato dalle variazioni del tasso. Dato che il tasso spot cambia continuamente è necessario una ricalibratura continua del portafoglio, ciò può portare a dei problemi, che non sono stati considerati, come quello relativo ai costi di transizione.

Bibliografia:

Bierwag, G.O. (1977) Duration, and Term Structure of Interest Rates. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 12, No. 5, 725-742.

Brown, R. (1828) A brief account of microscopical observations on the particles contained in the pollen of plants and the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, Edinburgh New Philosophical Journal

Castagnoli, E., Peccati, L. (2010) Matematica in azienda, Egea, Vol. 1.

Castellani G., M. D. (2007). Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati, il Mulino.

Cooper, I. A., (1977) Interest-Rate Changes, and Duration. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 12, No. 5, 501-723.

Cox J., Ingersoll J., and Ross S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1979) Duration and the Measurement of Basis Risk. The Journal of Business, Vol. 52, No. 1, 51-61.

Crenca, C., Fersini, P., Melisi, G., Olivieri, G., & Pelle, M. (2018) Elementi di matematica finanziaria. Pearson.

De Felice M., Moriconi F. (1991) La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie, Bologna, Il Mulino.

Fisher L., Weil R. W. (1971) Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bond holders from Naïve and Optimal Strategies, Chicago, The Journal of Business, The University of Chicago Press.

Ingersoll, J.E., Skelton, J.J. & Weil, R.L. (1978) Duration Forty Years Later. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, No. 4, 627-650.

Levy, P. (1948) Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars.

Macaulay, F.R. (1938) Some Theorical Problems Suggested bi the Movements of Interest Rates, Bond Yelds, and Stock Prices in the United States since 1856, Columbia University Press.

Redington F., (1952) Review of the Principles of Life Office Valuations, Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 78.

Vasicek, O.A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure, Journal of Financial Economics, vol. 5, n. 2.

Wiener, N. (1923) Differential-Space, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 2.

Sitografia:

www.borsaitaliana.it

www.investing.com