

Dipartimento di Economia e Finanza
Corso di laurea in “Banche e Intermediari Finanziari”

PREVISIONE DELLA VOLATILITÀ CON DATI AD ULTRA-FREQUENZA:
“HETEROGENEOUS AUTOREGRESSIVE MODEL OF REALIZED VOLATILITY”

RELATORE

Chiar.mo Prof. Federico Carlini

CANDIDATO

Lorenzo Bottiglione

Matr. 738641

CORRELATORE

Chiar.mo Prof. Alberto Cybo Ottone

Anno Accademico 2021-2022

A model must be wrong, in some respects,

else it would be the thing itself.

The trick is to see where is right.

(Henry Bent)

Indice

<i>Introduzione</i>	5
1. Realized Measures	9
1.1. Assenza di arbitraggio e semimartingale	9
1.2. Impostazione high-frequency	11
1.2.1. Market microstructure noises	15
1.2.2. Jumps	21
2. Modelli di previsione della volatilità	26
2.1. HAR-rv	27
2.1.1. Setup del modello	29
2.2. GARCH	32
2.2.1. Setup del modello	34
2.3. FIGARCH	38
2.3.1. Setup del modello	39
3. Analisi empirica	43
3.1. Dati	44
3.2. Stime dei parametri	49
3.3. Previsioni	54

4. Simulazione: delta hedging su una “european short call option”	59
4.1. Prezzo dell’azione	59
4.2. Prezzo dell’opzione call europea e delta hedging	62
Considerazioni conclusive	66
Bibliografia	67
Riassunto	70

Introduzione

Negli ultimi due decenni, lo sviluppo tecnologico ha favorito il costante incremento della potenza computazionale dei computers, consentendoci di accedere con facilità sempre maggiore ai dati ad ultra-frequenza. Mentre nel corso degli anni '80 e '90 i modelli di tipo *GARCH* sono stati impiegati per la stima della volatilità tramite utilizzo di dati giornalieri, con il nuovo millennio si è assistito allo sviluppo di nuovi metodi che usano dati infragiornalieri: siamo nel campo della *High Frequency Econometrics* e gli stimatori utilizzati prendono il nome di *realized measures*.

I dati finanziari presentano una serie di ormai noti *stylized facts*,¹ che mettono a dura prova i modelli econometrici standard: uno di questi è senz'altro la persistenza nell'autocorrelazione dei rendimenti al quadrato (o del loro valore assoluto), per lunghi periodi di tempo (mesi). Troviamo poi le cosiddette “*fat tails*” nella distribuzione dei rendimenti a diverse scadenze ed è perciò evidente il fenomeno della “leptocurtosi”,² con la funzione di densità dei rendimenti che assume una specifica forma a seconda dell'orizzonte temporale e presenta una molto lenta convergenza alla distribuzione gaussiana all'aumentare dell'orizzonte temporale di riferimento. Possiamo inoltre citare i fenomeni del *volatility clustering* e del *leverage effect*. I modelli *GARCH* standard e i modelli di volatilità stocastica *short-memory* non sono in grado di replicare tali caratteristiche, o perlomeno non tutte: i dati osservati presentano ampie fluttuazioni nella dimensione delle variazioni di prezzo a diversi orizzonti temporali, mentre i sopracitati modelli appaiono come un semplice *white noise* una volta aggregati su periodi di tempo più lunghi. La diretta conseguenza di ciò è stato un crescente interesse per i processi *long-memory*: la caratteristica principale di un processo “a lunga memoria” è che la sua funzione di autocorrelazione decade più lentamente di quella di un processo *short memory*, ma più velocemente di quella

¹ Si veda Mandelbrot (1956).

² La tendenza ad osservare code più “spesse” rispetto alla distribuzione normale è definita con il termine leptocurtosi. Le distribuzioni leptocurtiche hanno la peculiarità di assegnare una maggiore probabilità ad eventi molto lontani dal valor medio della distribuzione, nelle code appunto: per questo motivo si parla anche di distribuzione “con code spesse” (“*fat tailed*” *distribution*). La presenza di leptocurtosi è inoltre compatibile con l'ipotesi di varianza dipendente dal tempo.

di un processo “integrato” (come vedremo a breve). La persistenza della volatilità mostra quanto velocemente i mercati finanziari “dimenticano” i grandi shock di volatilità.³ La *long-memory volatility* viene solitamente ottenuta tramite l’utilizzo di operatori di differenza frazionaria come nei modelli *FIGARCH* o *ARFIMA*. L’integrazione frazionaria consente di ottenere la *long-memory*, ma si tratta comunque di un *escamotage* matematico che manca di una chiara spiegazione economica. Inoltre, questi tipi di modelli non sono in grado di riprodurre il comportamento *multi-scaling*⁴ trovato nei dati empirici: Corsi (2009)⁵ suggerisce un approccio alternativo che vede le caratteristiche di memoria lunga e multi-scala, osservate nei dati, come un comportamento solo apparente, generato da un processo che non è realmente *long-memory* o *multi-scaling*: se il livello di aggregazione non è, infatti, abbastanza grande rispetto alla componente del modello a frequenza più bassa, i modelli *short-memory* e *mono-scaling* possono essere scambiati per modelli *long-memory* e *multi-scaling*. Dal momento che non è affatto semplice distinguere questi modelli da quelli a componenti semplici con poche scale di tempo e dato che questi ultimi sono molto più facili da stimare e interpretare, si è qui deciso di porre particolare attenzione all’alternativa proposta da Corsi, utilizzando un “*simple component model*” per la *conditional volatility*: si tratta di un modello che Corsi definisce “a cascata”, con diverse componenti di volatilità. Come si vedrà nel corso della trattazione, tale modello è in grado di riprodurre la persistenza nella volatilità osservata nei dati empirici, così come altri fatti stilizzati elencati sopra, rimanendo però parsimonioso e semplice da stimare, soprattutto se messo a confronto con un modello *fractionally integrated* come il *FIGARCH*. Esso porta ad un semplice modello di tipo “autoregressivo” (*AR*) per la *realized volatility* (*rv*), con la caratteristica di considerare componenti di volatilità su molteplici orizzonti temporali: Corsi lo definisce pertanto *Heterogeneous Autoregressive model of realized volatility* (*HAR-rv*).

³ La ricerca sui processi a lunga memoria è nata dall’esame dei dati nelle scienze fisiche: Hurst (1951) ha trovato persistenza nei dati *streamflow*, osservando che i processi a memoria lunga possono generare un modello ciclico non periodico.

⁴ Tale proprietà sottolinea la presenza di diverse componenti di volatilità su svariati orizzonti temporali (diverse scale di tempo): esempi possono essere le componenti giornaliere, settimanali, mensili, ecc.

⁵ Si veda Corsi, F., “*A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility*”, 2009.

Nell'ambito della finanza quantitativa, poi, la volatilità ricopre da sempre un ruolo di rilievo: essa può avere, infatti, ampie implicazioni economiche e finanziarie. I gestori patrimoniali, i traders, le banche e i responsabili di politica economica prestano particolare attenzione alla volatilità dei mercati finanziari e alle sue ripercussioni sull'economia reale. È fondamentale stimare la volatilità dei rendimenti per prendere decisioni di investimento o per effettuare transazioni in particolari titoli o settori del mercato: essa è pertanto ampiamente utilizzata come misura del rischio. Allo stesso modo, le autorità responsabili di politica monetaria guardano alla volatilità del mercato prima di attuare politiche, che creerebbero instabilità nei mercati finanziari e nell'economia in generale, come l'inasprimento o l'allentamento della politica monetaria. Dato il ruolo centrale che essa ricopre, si è tentato continuamente di raffinarne la stima e di implementare modelli con una sempre maggiore capacità previsionale: nel corso della trattazione ho per questo passato in rassegna alcuni modelli, più o meno elaborati, che possono essere utilizzati nel *forecast* della volatilità, evidenziandone limiti e pregi e soffermandomi nella fattispecie sui vantaggi dell'utilizzo di dati *high frequency* (*HF*) nella loro implementazione, come accade proprio con il "*cascade model*" di Corsi (*HAR-rv*).

Nel primo capitolo vengono presentate in maniera generale le *realized measures*. Sono riportate brevemente le loro principali applicazioni, per introdurre, infine, il nostro modello di riferimento per il prezzo efficiente, la nostra variabile target e i suoi relativi stimatori. Sono poi presentati in maniera sommaria le varianti del modello che tengono esplicitamente in considerazione i *market microstructure noises* e gli eventuali "*jumps*".

Il secondo capitolo passa invece in rassegna i tre processi utilizzati per modellare la volatilità, i quali verranno poi impiegati (nel Capitolo 3) ai fini del *volatility forecasting*: si tratta, nell'ordine, dei modelli *HAR-rv* (il nostro modello di riferimento, il quale fa uso di dati *HF*), *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*. Per ognuno di essi, ad una generale descrizione, fa seguito un approfondimento dettagliato, che ha l'obiettivo di presentare il modello da un punto di vista matematico, evidenziandone la struttura e le eventuali derivazioni da modelli preesistenti.

Il terzo capitolo rappresenta la parte *core* di questo elaborato: con l'ausilio del software *MatLab*, i tre modelli vengono applicati a dati empirici raccolti tra aprile 2016 e febbraio 2022. Una volta che il campione di dati è

stato segregato in un “*training*” *sample* e in un “*test*” *sample*, ad una stima “*in sample*” (sul *training sample*) finalizzata al calcolo dei parametri, segue un *multi-step ahead forecast* “*out of sample*”: il *test sample* ha lo scopo di valutarne l’accuratezza. La valutazione delle previsioni avviene tramite la comparazione i valori predetti con quelli realmente osservati: viene fatto ricorso, a tal fine, alle statistiche del *Root Mean Square Error (MSE)* e del *Mean Absolute Error (MAE)*. Ciò viene eseguito su tre diversi indici del mercato azionario: FTSE-Mib, DAX 40 e STOXX50. L’obiettivo è quello di mostrare empiricamente la superiorità, ai fini della previsione della volatilità, dei modelli che fanno uso di dati ad ultra-frequenza (nella fattispecie del modello *HAR-rv*), nonché della loro capacità di riprodurre i fatti stilizzati che possono essere osservati nei dati empirici.

Nel quarto capitolo ho voluto poi riportare la simulazione di una possibile applicazione dei modelli di stima della volatilità: viene illustrata una semplice strategia di *delta hedging* su una posizione corta in una opzione *call* europea (scritta su un’azione che non paga dividendi). Il pricing è stato effettuato con il modello Black-Scholes-Merton e la volatilità utilizzata è la *realized volatility* stimata tramite il modello *HAR-rv*.

Capitolo 1

1. *Realized Measures*

Come anticipato nell'introduzione, entreremo nel campo della *High Frequency Econometrics* e il nostro principale stimatore sarà una *realized measure*. Le *realized measures* sono valide stime non parametriche ad alta frequenza della variazione del prezzo di un'attività durante i periodi in cui l'attività viene scambiata su un indice. Esse sono applicabili in numerosi campi: *option pricing*, inserendo le stime della volatilità nel modello Black-Scholes-Merton o nella formula di un modello stocastico di volatilità (l'*Heston model* ad esempio); *risk management*, usando le stime della volatilità per il calcolo del *Value at Risk* o della *Expected Shortfall*; *portfolio allocation*, usando le stime della covarianza nel problema di ottimizzazione di portafoglio di Markowitz; *jump testing*, per verificare che non ci siano “*jumps*” nei financial data (i cosiddetti “*flash crashes*”); e in generale nel *volatility forecasting*, tema centrale di questo elaborato.

1.1. *Assenza di arbitraggio e semimartingale*

Iniziamo illustrando uno dei più importanti risultati della Matematica Finanziaria: l'applicazione del principio di “assenza di arbitraggio”, tanto semplice quanto potente. Tale principio equivale ad affermare l'esistenza di una “misura equivalente di martingala” per il processo stocastico rappresentato dai prezzi delle financial securities. Nei mercati incompleti, dove non è possibile effettuare un perfetto *hedging*, l'insieme di misure equivalenti di martingala non è un *singleton*, ma è possibile individuare un intervallo di possibili prezzi, tutti compatibili con la condizione di non arbitraggio.

Come asserito da Delbaen & Schachermayer (1994)⁶, sia $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un modello a tempo continuo per un asset finanziario senza costi di transazione: se vi è assenza di arbitraggio sul mercato, allora $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ deve essere

⁶ Si veda Delbaen, F. & Schachermayer, W., “*A general version of the fundamental theorem of asset pricing*”, 1994.

una “semimartingala”. Senza entrare nel dettaglio della definizione di semimartingala, qui verrà trattata una loro specifica sottoclasse, nota con il nome di “processi di Îto”. Essi sono così definiti:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad [1.1]$$

dove:

- μ_t è detto *drift* ed è stocastico;
- σ_t rappresenta la volatilità, anch’essa stocastica;
- W_t è un “processo di Wiener” (o “moto Browniano standard”), un particolare tipo di “processo Markoviano”⁷ con media nulla e varianza unitaria. È la versione continua di una *random walk*: inizia in 0 e per ogni t , $W_t \sim N(0, t)$. È facile dimostrare che se $s < t \leq u < v$, gli incrementi $W_t - W_s$ e $W_v - W_u$ sono indipendenti (omogeneità nello spazio), a media nulla, stazionari (omogeneità nel tempo), normali o gaussiani. W_t è quindi un processo di Markov e una “martingala”.⁸ Ad esempio, l’indipendenza degli incrementi si ricava dalla normalità più la loro non correlazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_t - W_s)(W_v - W_u)] &= \mathbb{E}[W_t W_v] - \mathbb{E}[W_t W_u] - \mathbb{E}[W_s W_v] + \mathbb{E}[W_s W_u] \\ &= \min(t, v) - \min(t, u) - \min(s, v) + \min(s, u) \\ &= t - t - s + s = 0. \end{aligned} \quad [1.2]$$

Un processo di Îto non è altro che un processo di Wiener “generalizzato”, dove il tasso di deriva (*drift rate*) e il tasso di varianza sono funzioni della variabile sottostante e del tempo.

⁷ Si definisce “processo stocastico Markoviano” (o di Markov) una sequenza continua di stati in cui la probabilità di transizione, che determina il passaggio da uno stato all’altro in un tempo unitario, dipende probabilisticamente solo dallo stato del sistema immediatamente precedente (proprietà di Markov) e non da *come* si è giunti a questo stato.

⁸ Una martingala è un processo stocastico X_t , indicizzato ad un parametro crescente t (spesso interpretabile come tempo) con la seguente proprietà: per ogni $r \leq s \leq t$, l’attesa di X_t condizionata ai valori di X_r , è uguale ad X_s . In simboli:

$$\mathbb{E}[X_t | X_1, X_2, \dots, X_r] = X_s, \quad \forall r \leq s \leq t.$$

A secondo membro dell'equazione [1.1], il primo termine è costante; il secondo termine prende il nome di “integrale di Riemann” ed è un processo finito di variazione; il terzo termine è infine (come specificato poc'anzi) una martingala. Si tratta di un processo continuo, al quale verranno in seguito aggiunti dei “jumps”.

Come è solito procedere, anche qui si è deciso di lavorare con il logaritmo naturale dei prezzi (da qui in avanti semplicemente “log-prezzo”): se $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$ rappresenta il prezzo di un asset, $X_t = \log P_t$ rappresenta il log-prezzo. È possibile affermare che gli incrementi di X_t rappresentano i rendimenti: formalmente assumiamo che il log-prezzo X_t sia un processo di Itô in $[0, T]$.

1.2. Impostazione high-frequency

È importante capire quale sia effettivamente l'oggetto della nostra analisi: siamo interessati, nella fattispecie, a stimare la volatilità V usando dati discreti su X nell'intervallo $[0, T]$. Un noto esempio per V è la cosiddetta *Integrated Volatility* (σ_t):

$$\sigma_t = IV_t^{1/2} \quad [1.3]$$

dove IV_t indica la *Integrated Variance*, definita come

$$IV_t = \int_0^1 \sigma_t^2 dt. \quad [1.4]$$

Alcuni autori, invece, sono soliti indicare $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ come *Integrated Volatility*: qui ho preferito seguire la notazione di Corsi (2009)⁹ e, pertanto, per *Integrated Volatility* si intenderà la radice quadrata della *Integrated*

⁹ Cfr. Nota 5.

Variance (IV_t). È però importante sapere che esistono numerosi altri stimatori dai quali partire per stimare V , quali la *Integrated Covariance* (IC), la *Integrated Quarticity* (IQ) e la *Jump Variation* (JV).¹⁰

Vediamo adesso alcuni stimatori che possono essere utilizzati nel caso (poco realistico) in cui i dati ad alta frequenza non siano contaminati da *market noises*:

- *Realized Variance*

$$RV_n = \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right)^2. \quad [1.5]$$

La sua radice quadrata prende il nome di *Realized Volatility* (rv_n): tale stimatore riveste un ruolo di particolare rilievo nella trattazione, come risulterà evidente nel terzo capitolo.

- *Bipower Variation*

$$BV_n = c \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right| \left| X_{\frac{i+1}{n}} - X_{\frac{i}{n}} \right| \quad [1.6]$$

dove $c = \frac{\pi}{2}$ è il fattore normalizzante.

- *Truncated Realized Variance*

$$TRV_n = \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right| \leq u_n \right\}} \quad [1.7]$$

dove il troncamento avviene a $u_n = n^{-\omega}$, con $\omega \in (0, \frac{1}{2})$. u_n è un livello *threshold* che consente di escludere rendimenti maggiori di una certa entità (lontani nelle code): tali rendimenti è probabile che siano *jumps*.

¹⁰ L'obiettivo sarà quindi stimare IV (e quindi V) usando osservazioni discrete $X_{t_i^n}$, $0 \leq i \leq n$: per semplicità considereremo il caso in cui le osservazioni sono equidistanti ($t_i^n = \frac{i}{n}$, cioè $n+1$ dati ed n log-rendimenti). Si noti che, mentre nel cosiddetto *High Frequency Asymptotic Regime* abbiamo $n \rightarrow \infty$, i dati a nostra disposizione sono invece relativi ad un orizzonte temporale finito.

È opportuno ricordare che il nostro modello è rappresentato da un processo di Îto e che la nostra variabile target è la *Integrated Variance*. Il nostro stimatore di riferimento è invece la *Realized Variance*. Ci sono infatti due importanti risultati che è bene citare in relazione alla scelta della *RV* come strumento privilegiato:

(i) *Consistency*

Sotto condizioni sufficientemente generali circa $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ e $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq 1}$, si ha che

$$RV_n \xrightarrow{\mathbb{P}} IV.$$

La *Realized Variance* è perciò uno stimatore “consistente” della *Integrated Variance*.¹¹ Ciò è facilmente dimostrabile in un modello semplice, con $\mu = 0$ e $\sigma_t = \sigma$, utilizzando la “Legge dei Grandi Numeri” (LGN).¹²

Si ha quindi che $X_t = X_0 + \sigma W_t$ e

$$\begin{aligned} RV_n &= \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_0 + \sigma W_{\frac{i}{n}} - X_0 - \sigma W_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sigma \left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma^2 \left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i. \end{aligned} \tag{1.8}$$

¹¹ Essendo poi la radice quadrata un funzione continua $g(\cdot)$, per il *Continuous Mapping Theorem* è vero anche che $rv_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma$.

¹² Siano $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ variabili aleatorie *iid* con media pari a z ($z < \infty$). Allora,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{\mathbb{P}} z.$$

dove $Z_i = \sigma^2 n \left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \right)^2$. Poiché $W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \sim N\left(0; \frac{1}{n}\right)$, abbiamo che $\sqrt{n} \left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \right) \sim N(0; 1)$ e quindi $Z_i \sim \sigma^2 N(0; 1)^2$, che sono *iid*. Otteniamo dunque che $z = \mathbb{E}[Z_i] = \sigma^2 \mathbf{1} = \sigma^2$. Poiché $z = \sigma^2$ equivale a $IV_t = \int_0^1 \sigma_t^2 dt$ in questo modello, la dimostrazione è terminata.

(ii) *Central Limit Theorem*

Sotto condizioni sufficientemente generali circa $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ e $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq 1}$, si ha che

$$\sqrt{n}(RV_n - IV) \xrightarrow{d} N(0, 2IQ).$$

dove

$$IQ = \int_0^1 \sigma_t^4 dt. \quad [1.9]$$

Ciò è facilmente dimostrabile in un modello semplice, con $\mu = 0$ e $\sigma_t = \sigma$, utilizzando il “Teorema del Limite Centrale” (TLC).¹³ Come visto per la precedente dimostrazione, possiamo riscrivere l’Equazione [1.8]: $RV_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$. Dato che $Z_i \sim \sigma^2 N(0; 1)^2$, $\mathbb{E}[Z_i] = \sigma^2$ e $\mathbb{E}[Z_i^2] = 3\sigma^4$. La varianza di Z_i risulta pertanto pari a:

$$\text{Var}(Z_i) = \mathbb{E}[Z_i^2] - \mathbb{E}[Z_i]^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4. \quad [1.10]$$

Si noti che $2\sigma^4 = 2IQ = 2 \int_0^1 \sigma_t^4 dt$ in questo modello: ciò conclude la dimostrazione.

Non è però semplice implementare la *RV* con dati empirici, proprio a causa dell’ultra frequenza alla quale tali dati possono essere ormai resi disponibili: a volte si possono ottenere a frequenze di secondi, a volte a

¹³ Siano $(Z_n)_{n=1}^\infty$ variabili aleatorie *iid* con media pari a z ($z < \infty$) e varianza pari a σ^2 ($\sigma^2 < \infty$). Allora,

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - z \right) \xrightarrow{d} N(0; \Sigma^2).$$

frequenze di millisecondi. Ma la *RV* diverge se vengono usati tutti i dati (cioè a frequenze elevatissime). I dati ad ultra-frequenza sono infatti contaminati dai *market microstructure noises* (un esempio può essere il *bid-ask spread*) ed è perciò necessario ricorrere a degli stratagemmi che ci permettono di aggirare tale problema. Una prima soluzione è quella di utilizzare la tecnica dello *sparse sampling*, che consiste nello scartare molti dati e usarne solo alcuni, ogni x minuti: la scelta maggiormente diffusa è quella di porre $x = 5$ minuti.¹⁴ L'altra soluzione consiste invece nel modellare esplicitamente il noise tramite alcuni *noise robust estimators*, i quali fanno uso di tutti i dati a disposizione.

1.2.1. *Market microstructure noises*

I dati vengono generati all'ordine dei decimi di secondo, rendendo in tal modo possibile il campionamento ad ultra-frequenze. Un'ovvia soluzione è quella di stimare la varianza dei rendimenti azionari (o *Integrated Variance* nel nostro caso, data la frequenza dei dati), utilizzando la somma dei log-rendimenti al quadrato, che non è altro che al *Realized Variance* definita sopra. Tuttavia, tale approccio presenta un problema non trascurabile: quando si cerca di stimare la *IV* utilizzando tutti i dati disponibili, i dati sono contaminati. In letteratura ciò è noto come *market microstructure noise*, che non è altro che una deviazione dal valore fondamentale di una *security*. È il processo di trading che causa *market microstructure noises*: un esempio di contaminazione di questo tipo è infatti il *bid-ask spread*. Si possono citare ulteriori fonti di tali *noises*, come l'arrotondamento di dati ed errori, il metodo di costruzione dei prezzi osservati, ecc.: la diretta conseguenza di tali *noises* è pertanto il “fallimento” (a meno di particolari stratagemmi) della *Realized Variance* come stimatore.

Nella precedente sezione abbiamo visto come al nostro stimatore di riferimento *RV* può essere applicata la tecnica dello *sparse sampling*, con l'obiettivo di rimuovere le contaminazioni (procedura che io stesso ho

¹⁴ La *RV* è stata qui utilizzata con la tecnica dello *sparse sampling* ogni cinque minuti.

deciso di seguire in questo elaborato, come sarà più chiaro nel secondo capitolo dedicato proprio ai modelli per la previsione della volatilità). In questa sezione vedremo appunto, brevemente, perché la *Realized Variance* diverge in presenza di *HF data* e quali sono quegli stimatori robusti che possono essere utilizzati in alternativa e/o congiuntamente alla tecnica dello *sparse sampling* al fine di ottenere la convergenza in probabilità alla *Integrated Variance*.

Indicando con Y_t il log-prezzo “osservato” al tempo t e con X_t sempre il nostro processo di $\hat{I}to$, rappresentativo del log-prezzo “efficiente”, la domanda che dobbiamo porci è la seguente: “*I log-prezzi osservati sono davvero dei processi di $\hat{I}to$?*”. Da un punto di vista pratico tale domanda può essere riscritta nel seguente modo: “*È possibile avere $Y_t = X_t$ per elevate frequenze di t ?*”.

Riscriviamo la formulazione della *Realized Variance* per i log-prezzi osservati: per ogni $m > 0$, sia $f(m)$ il valore medio della *Realized Variance*:

$$RV_n(Y) = \sum_{i=1}^n \left(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \quad [1.11]$$

con Y campionato ogni m -secondi.

Se $Y = X$ a frequenze elevate, allora per $n \rightarrow \infty$ (o $m \rightarrow 0$) si dovrebbe avere che

$$RV_n(Y) \rightarrow IV.$$

L’evidenza empirica, però, contraddice tipicamente tale convergenza. Ciò può essere anche visualizzato graficamente tramite il *volatility signature plot*, il quale mostra $f(m)$ come funzione di m . A titolo meramente esemplificativo, sono qui riportati i risultati di uno studio di Hansen & Lunde (2006):¹⁵

¹⁵ Si veda Hansen, P. R. & Lunde, A., “*Realized Variance and Market Microstructure Noise*”, 2006.

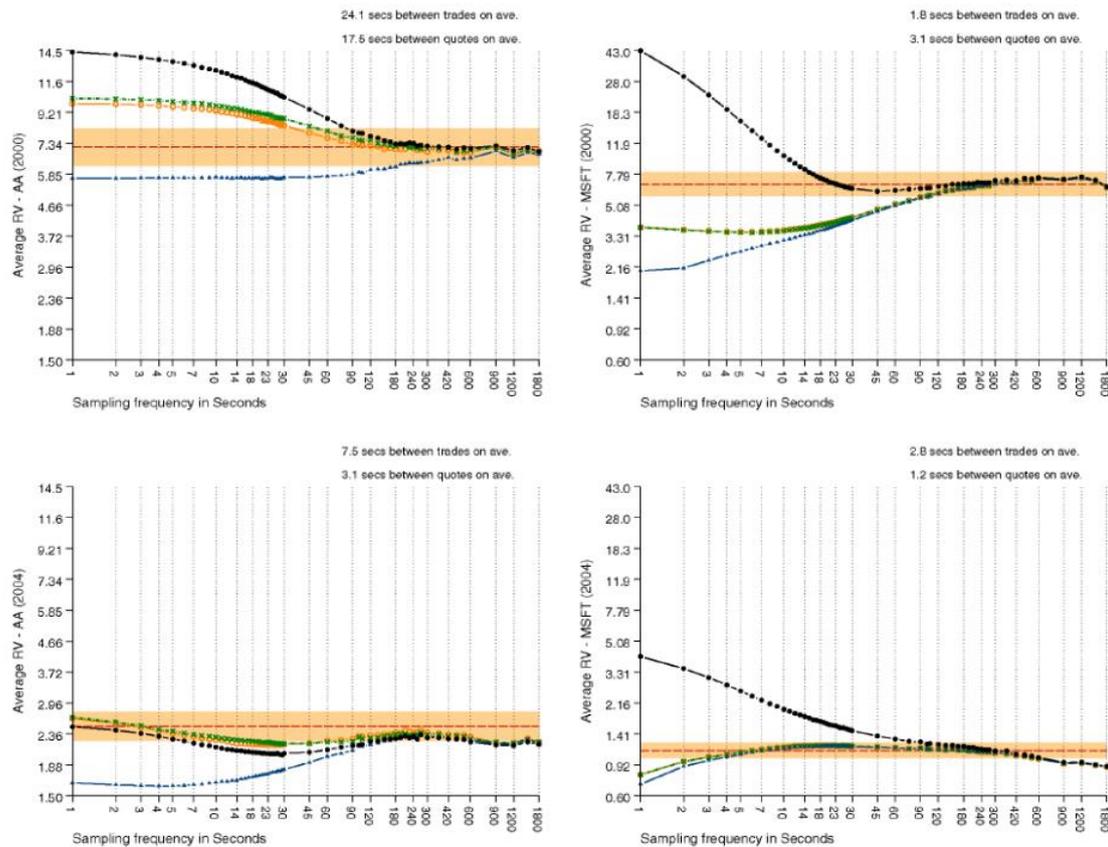


Figura 1.1: i quattro grafici corrispondono ai dati di Apple (AA) e Microsoft (MSFT) del 2000 e del 2004. Sull'asse delle ascisse troviamo la frequenza di campionamento, m , la quale varia tra 1-sec e 1800-sec (30-min), mentre sull'asse delle ordinate troviamo il valor medio della RV , $f(m)$, calcolato usando nell'ordine: (i) prezzo denaro; (ii) prezzo lettera; (iii) prezzo medio; (iv) costo di transazione.

Ciò che emerge dai grafici è che le *realized variances* sono stabili a frequenze di campionamento moderate o basse, mentre sono altamente instabili ad ultra-frequenze (ad esempio $m = 1$ -sec): nello specifico, i *volatility signature plots* basati sui costi di transazione crescono al crescere della frequenza di campionamento, mentre quelli basati sui prezzi medi decrescono al crescere della frequenza di campionamento.

Sarebbe pertanto opportuno modificare il modello di riferimento in relazione alla presenza di tali *noises*. Il processo dei prezzi osservati diventa:

$$Y_t = X_t + U_t, \quad \forall t \geq 0 \quad [1.12]$$

dove X_t è sempre un processo di Itô rappresentativo del log-prezzo efficiente, mentre U_t rappresenta il *market microstructure noise*. Avendo a disposizione solo osservazioni discrete, ancora una volta è necessario stimare IV usando $X_{t_i^n}$ con $0 \leq i \leq n$. Per semplicità considereremo nuovamente il caso in cui le osservazioni sono equidistanti ($t_i^n = \frac{i}{n}$):¹⁶

$$Y_{\frac{i}{n}} = X_{\frac{i}{n}} + U_{\frac{i}{n}}. \quad [1.13]$$

Le ipotesi con cui è opportuno lavorare e che semplificano l'analisi sono le seguenti:

- $\mathbb{E}[U_0] = 0$;
- $\mathbb{E}[U_0^2] = \omega^2$;
- $X \perp U$.¹⁷

Una volta formulato il nostro nuovo modello, è possibile spiegare formalmente la divergenza della RV con dati ad ultra-frequenza. Ipotizziamo di poter applicare la RV sui log-prezzi osservati. I log-rendimenti sono la somma di due termini:

$$Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}} = \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right) + \left(U_{\frac{i}{n}} - U_{\frac{i-1}{n}} \right). \quad [1.14]$$

Il primo termine è il solito rendimento calcolato sul log-prezzo efficiente; il secondo, invece, contiene gli incrementi del *noise*: è proprio il secondo termine che causa il problema della non convergenza in probabilità, come si evince dal calcolo della RV :

¹⁶ Cfr. Nota 10.

¹⁷ Hansen & Lunde (2006) hanno però dimostrato come tali ipotesi siano nella pratica irrealistiche. Il *market microstructure noise*, infatti: risulta correlato con il prezzo efficiente (X); è dipendente dal tempo; ha proprietà che sono cambiate significativamente nel corso degli anni.

$$RV_n = \sum_{i=1}^n \left(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \quad [1.15]$$

Riscrivendo il termine in parentesi secondo l'Equazione [1.14] otteniamo:

$$RV_n = \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right) \left(U_{\frac{i}{n}} - U_{\frac{i-1}{n}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(U_{\frac{i}{n}} - U_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \quad [1.16]$$

Possiamo dunque definire la *Realized Variance* come somma di tre termini:

$$RV_n = A_n + B_n + C_n. \quad [1.17]$$

RV_n diverge perché C_n diverge, date le assunzioni sul *noise*. Dato $\left(U_{\frac{i}{n}} \right)_{i \geq 0}$ iid con media 0 e varianza ω^2 , per

ogni i si ha che:

$$\mathbb{E} \left[\left(U_{\frac{i}{n}} - U_{\frac{i-1}{n}} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[U_{\frac{i}{n}}^2 \right] - 2\mathbb{E} \left[U_{\frac{i}{n}} U_{\frac{i-1}{n}} \right] + \mathbb{E} \left[U_{\frac{i-1}{n}}^2 \right] = 2\omega^2. \quad [1.18]$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\mathbb{E}[C_n] = 2\omega^2 \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$: C_n diverge in valore atteso; $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} IV = \int_0^1 \sigma_t^2 dt$; $\mathbb{E}[B_n] = 0$, data l'indipendenza tra X e U . Inserendo un disturbo U nel nostro modello, si può notare che RV_n diverge.

Vediamo a tal proposito un *noise robust estimator* molto usato nella pratica, il “*pre-averaging estimator*”: questo stimatore risulta conveniente da usare a livello teorico e garantisce inoltre ottime performance a livello empirico. L'idea alla base del *pre-averaging estimator* è quella di minimizzare l'effetto del *noise* ripartendolo su un certo blocco di dati. Consideriamo nuovamente i log-prezzi osservati, come definiti nell'Equazione [1.13] (caso in cui le osservazioni sono equidistanti): il nostro stimatore dovrà infatti essere basato sui dati osservati. Si noti che $X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}$ ha ordine $1/\sqrt{n}$, mentre $U_{\frac{i}{n}} - U_{\frac{i-1}{n}}$ ha ordine 1: il *pre-averaging estimator*

mira proprio a minimizzare questo *noise* di ordine 1 formando una media ponderata di $k_n \approx \theta\sqrt{n}$ dati per un certo $\theta > 0$.¹⁸ Per ogni $i \in \{0, n - k_n + 1\}$ il *pre-averaged return* al tempo i/n è

$$\bar{Y}_{\frac{i}{n}} = \sum_{j=1}^{k_n-1} g\left(\frac{j}{k_n}\right) \left(Y_{\frac{i+j}{n}} - Y_{\frac{i+j-1}{n}}\right). \quad [1.19]$$

Qui g è una “funzione peso” definita nell’intervallo $[0,1]$ a valori in \mathbb{R} , tale che $g(0) = g(1) = 0$:¹⁹ $g\left(\frac{j}{k_n}\right)$ assume perciò valore massimo in $j = k_n/2$.

Possiamo ora introdurre il nostro stimatore: considereremo in questa sede il “*non-overlapping pre-averaging estimator*”, meno efficiente di quello usuale (che fa uso di *pre-averaged returns* su blocchi sovrapposti) ma più semplice. Non è infatti necessario appesantire eccessivamente la notazione: i risultati che si vogliono qui evidenziare non cambiano. Supponiamo che k_n divida n : pertanto avremo $d_n = n/k_n$ blocchi non sovrapposti usando n rendimenti. Useremo nella fattispecie $\bar{Y}_{\frac{0k_n}{n}}, \bar{Y}_{\frac{1k_n}{n}}, \dots, \bar{Y}_{\frac{ik_n}{n}}, \dots, \bar{Y}_{\frac{(d_n-1)k_n}{n}}$.

Poiché abbiamo “ripartito” i rendimenti (e quindi il *noise*), possiamo riprodurre la *realized volatility* e stimare la *IV* con

$$\sum_{i=0}^{d_n-1} \left(\bar{Y}_{\frac{ik_n}{n}}\right)^2.$$

Tale stimatore risulta essere “quasi” corretto: deve essere modificato per tenere in considerazione *bias* e *scaling*. Otterremo dunque che $\tilde{P}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} IV$, dove il *non-overlapping pre-averaging estimator* è dato da:

$$\tilde{P}_n = \frac{1}{\psi_2^n} \sum_{i=0}^{d_n-1} \left(\bar{Y}_{\frac{ik_n}{n}}\right)^2 - \frac{\psi_1^n}{2k_n^2\psi_2^n} \sum_{i=1}^n \left(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}}\right)^2 \quad [1.20]$$

¹⁸ θ è un *tuning parameter* e i suoi valori tipici sono $1/3$ e 1 .

¹⁹ Un esempio è dato dalla funzione tale che $g(x) = \min(x, 1 - x)$.

con

$$\psi_1^n = k_n \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(g\left(\frac{j+1}{k_n}\right) - g\left(\frac{j}{k_n}\right) \right)^2 \quad [1.21]$$

e

$$\psi_2^n = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n-1} g^2\left(\frac{j}{k_n}\right).^{20} \quad [1.22]$$

Dalle precedenti equazioni emerge che: si utilizza ψ_2^n per correggere i problemi di scala; viene sottratto un certo termine per rimuovere il *bias*. Sia ψ_1^n che ψ_2^n sono funzioni peso con ordine pari a 1. La scelta tipica per la *weight function* è $g(x) = \min(x, 1 - x)$, che conduce a valori per ψ_1^n e ψ_2^n pari a circa a 1 e 1/12, rispettivamente.

Come detto in precedenza, gli stimatori robusti possono essere utilizzati in alternativa e/o congiuntamente alla tecnica dello *sparse sampling* al fine di ottenere la convergenza in probabilità alla *Integrated Variance*.

1.2.2. Jumps

Nei precedenti paragrafi sono state presentate in prima battuta le *realized measures* semplici, per poi introdurre il problema dei *microstructure noises* e, di conseguenza, le *relative noise robust realized measures*. In questo paragrafo, invece, ci occuperemo di un secondo problema: la presenza di eventuali *jumps*. Questi ultimi hanno una rilevanza non indifferente, a causa delle possibili e molteplici ripercussioni sulle applicazioni delle *realized measures*, passate in rassegna in apertura di capitolo: la loro presenza (nei prezzi e/o nei modelli) può

²⁰ Per approfondimenti relativi alla derivazione delle Equazioni [1.21] e [1.22] si veda Veliyev, B., “*Advanced Financial Econometrics: Microstructure Noise and Realized Measures*”, 2019.

infatti avere diverse implicazioni relativamente al *pricing* delle opzioni o in un'ottica di *risk management*. I *jumps* non sono altro che una variazione repentina del valore della variabile in esame, in aumento o in diminuzione. Come vedremo a breve, essi non sono in genere equispaziati tra loro: le dimensioni variano molto e possono raggiungere livelli molto superiori (o inferiori) alla media della serie storica.²¹ Un'altra loro caratteristica è la brevissima durata: una volta che gli shock economici che l'hanno causata si sono dissolti e sono stati sostituiti da un nuovo stato di equilibrio, i prezzi tornano ai loro precedenti valori, grazie a un processo di "ritorno verso la media" (*mean reversion*). La presenza di eventuali *jumps* può produrre due effetti tra loro speculari: gli investitori possono, da un lato, subire ingenti perdite in un arco temporale molto limitato; dall'altro, attuare attività di speculazione: le variazioni improvvise nei prezzi delle *securities* sono infatti spesso riconducibili all'azione degli *High Frequency Traders*, che fanno uso di particolari tecniche con l'obiettivo di muovere le quotazioni a loro favore.²²

Vediamo innanzitutto come è possibile modificare il nostro modello di riferimento per i log-prezzi efficienti (X_t), per tenere esplicitamente in considerazione tali *jumps*. Si ha:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} c_i \quad [1.23]$$

dove:

- N_t rappresenta (conta) il numero complessivo di *jumps* fino al tempo t . N_t è un "processo di Poisson"²³ con $\lambda > 0$ poiché soddisfa (1) - (3) della definizione di "processo di Levy" ((1) N ha incrementi indipendenti; (2) N ha incrementi stazionari; (3) N è continuo in probabilità) e inoltre:

²¹ Guardando ai dati infragiornalieri, eventuali *jumps* possono essere facilmente individuati; diventano meno visibili se l'orizzonte temporale in esame si allunga.

²² Un esempio può essere quello delle tecniche di "*spoofing*", che prevedono l'immissione e la successiva cancellazione di ordini per indurre gli operatori a pensare che sia iniziata una certa fase di tendenza.

²³ Un processo di Poisson ha jumps di ampiezza 1, intervallati da variabili aleatorie esponenziali indipendenti $Z_n = T_{n+1} - T_n$, con $n > 0$ e parametro λ . Il processo di Poisson è molto diffuso come *counting process*.

$$P(X_t = k) = \frac{\lambda t^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0, t \geq 0; \quad [1.24]$$

- c_i rappresenta l'ampiezza del *jump* i -esimo; ²⁴
- μ_t e σ_t rappresentano, come in precedenza, il *drift* e la volatilità, rispettivamente.

Pertanto, X_t è il nostro processo di $\hat{\text{Ito}}$ con una componente extra rappresentativa dei *jumps*. Possiamo scrivere che $X_t \in BSMJ$ (*Brownian Semi-Martingale plus Jumps*).²⁵

Introduciamo adesso un nuovo stimatore ed una nuova variabile.

- *Jump variation*:

$$JV = \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2; \quad [1.25]$$

- *Quadratic variation*:

$$QV = \int_0^1 \sigma_t^2 dt + \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2. \quad [1.26]$$

Il teorema relativo alla *consistency* visto in precedenza (par.1.2.), nel caso in cui $X_t \in BSMJ$ viene modificato e possono essere citati a tal proposito due diversi risultati:

- $RV_n \xrightarrow{\mathbb{P}} QV = IV + JV;$

²⁴ Partendo da un processo di Poisson, possiamo definire un *Compound Poisson Process* come

$$C_t = \sum_{i=1}^{N_t} c_i$$

dove:

- c_i sono identicamente distribuiti (ampiezza dei jumps);
- N_t è il processo di Poisson che definisce il numero di jumps.

²⁵ Si veda Veliyev, B., “*Advanced Financial Econometrics: Jumps and Realized Measures*”, 2019.

- $BV_n \xrightarrow{\mathbb{P}} IV$.

Ciò che qui è importante sottolineare è che, in presenza di *jumps*, la *Realized Variance* (RV_n) non converge alla nostra variabile target (*Integrated Variance*): in tal caso, solo la *Bipower Variation* (BV_n) è uno stimatore consistente di IV . Da quanto detto, segue che la *Jump Variation* può essere stimata tramite la seguente differenza:

$$RV_n - BV_n \xrightarrow{\mathbb{P}} JV.$$

È anche possibile stimare la *Proportion of Jumps* (PJ) relativa ad uno specifico asset. Infatti:

$$1 - \frac{BV_n}{RV_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{JV}{QV} = PJ. \quad [1.27]$$

Per definizione PJ cade all'interno dell'intervallo $[0,1]$. Tuttavia, lo stimatore $1 - BV_n/RV_n$ può uscire fuori da tale intervallo. Per evitare questo (ottenendo valori privi di significato matematico) è possibile ridefinire lo stimatore PJ :

$$\max\left(0, 1 - \frac{BV_n}{RV_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{JV}{QV} = PJ. \quad [1.27b]$$

Esistono ovviamente dei test, basati sul TLC, che hanno l'obiettivo di verificare la presenza di *jumps* nelle serie finanziarie: esempi sono i *jump tests* proposti da Barndorff-Nielsen e Shephard (2006) e da Aït-Sahalia e Jacod (2009).²⁶ Il *jump test* ci dice se un *jump* esiste o no, data una certa serie di dati: tuttavia, esso non ci dà informazioni circa l'esatto collocamento del *jump*. Lee & Mykland (2008)²⁷ risolvono questo problema: usando dati decontaminati da eventuali noise, considerano la seguente statistica per ogni $i \in \{0,1, \dots, n\}$:

²⁶ Si veda Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N., "Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation", 2005 e Aït-Sahalia, Y. & Jacod, J., "Testing for Jumps in a Discretely Observed Process", 2009.

²⁷ Si veda Lee, S. & Mykland, P., "Jumps in Financial Markets: A New Nonparametric Test and Jump Dynamics", 2008.

$$L_i = \frac{X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}}{\hat{\sigma}_i} \quad [1.28]$$

dove

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{j=i-m+2}^{i-1} \left| X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{j-1}{n}} \right| \left| X_{\frac{j+1}{n}} - X_{\frac{j}{n}} \right| \quad [1.29]$$

con $m \asymp n^\alpha$ per $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Quando $|L_i|$ è maggiore di un certo valore c , si può concludere che c'è un *jump* all'istante i/n .

Nel prossimo capitolo verranno presentati tre diversi modelli, i quali saranno utilizzati nel Capitolo 3 nell'attività di *volatility forecasting*: assumeremo, ai fini della nostra analisi empirica, che il log-prezzo X segua un semplice processo di Itô, senza *jumps* e *market microstructure noises*.

Capitolo 2

2. *Modelli di previsione della volatilità*

Abbiamo già parlato di quanto la volatilità sia fondamentale nell'ambito della finanza quantitativa: il ruolo di prim'ordine che essa ricopre deriva dalle sue potenziali vaste implicazioni economiche e finanziarie. Tutti i partecipanti al mercato, siano essi traders o gestori patrimoniali, banche o governi, prestano grande attenzione alla volatilità dei mercati finanziari e alle sue ripercussioni sull'economia in generale. Risulta pertanto fondamentale prevedere (o perlomeno tentare di farlo) la volatilità dei rendimenti, per poter prendere decisioni di investimento o effettuare transazioni in particolari settori, in modo quanto più cauto e conscio possibile. Le autorità responsabili della politica monetaria guardano alla volatilità del mercato prima di attuare politiche, poiché essa è considerata un fondamentale indicatore di rischio: il pericolo sarebbe, altrimenti, quello di creare instabilità nei mercati e nell'economia reale.

Una volta appurato il suo ruolo centrale, nel corso del tempo si è tentato continuamente di implementare modelli con una capacità previsionale sempre maggiore, che ne garantissero una stima precisa e, per quanto possibile, affidabile. In questo capitolo vedremo alcuni modelli che possono essere utilizzati per la previsione della volatilità. Verranno nella fattispecie illustrati tre modelli: *HAR-rv*, *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*. Il focus sarà in particolare sul primo, il quale fa uso di dati ad ultra-frequenza. L'obiettivo di questo lavoro è infatti quello di evidenziare i vantaggi legati all'utilizzo di dati *high-frequency* per il *forecast* della volatilità e la capacità di tali modelli di riprodurre le caratteristiche principali dei rendimenti, i cosiddetti *stylized facts*:²⁸ nel terzo capitolo verranno infatti valutate e confrontate tra loro le capacità previsionali dei tre modelli presentati.

Come anticipato poc'anzi, assumiamo qui che i log-prezzi X soddisfino un *processo di Itô*. Definiti i "log-rendimenti" come:

²⁸ Cfr. Nota 1.

$$r_t = \log P_t - \log P_{t-1}, \quad [2.1]$$

possiamo modellarli utilizzando un modello del tipo

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad [2.2]$$

dove

$$\varepsilon_t \sim F(0, \sigma_\varepsilon).^{29} \quad [2.3]$$

È pertanto necessario introdurre modelli capaci di catturare le dinamiche non lineari dei rendimenti: μ_t può quindi essere scelta costante (μ_0) o modellata con un modello di media condizionata (quale è un $ARMA(p, q)$).

Per semplicità qui la poniamo costante e il nostro modello diventa dunque

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_0 = \sigma_t z_t,^{30} \quad [2.4]$$

dove:

- la volatilità $\sigma_t > 0$;
- il processo delle innovazioni z_t è *iid* con $\mathbb{E}[z_t] = 0$ e $\mathbb{E}[z_t^2] = 1$;
- $Cov(z_t \sigma_t) = 0$ e $Cov(z_t \varepsilon_{t-k}) = 0$, ovvero innovazioni incorrelate con il passato.

È ora necessario attribuire la giusta dinamica alla volatilità.

2.1. HAR-rv

Iniziamo illustrando le caratteristiche del modello *HAR-rv*, ideato da Corsi. È stato dallo stesso definito “a cascata”: si tratta infatti di un modello additivo, formato da diverse componenti di volatilità definite su periodi

²⁹ F indica una qualsiasi distribuzione con quella media e varianza.

³⁰ Essendo un modello non lineare, il processo d'innovazione z_t viene moltiplicato e non sommato.

di tempo via via più ampi. Non è altro, quindi, che un particolare modello “autoregressivo” (AR) per la *realized volatility* (*rv*), con la caratteristica di considerare le diverse componenti di volatilità su diversi orizzonti temporali e per questo definito *Heterogeneous Autoregressive model of realized volatility* (*HAR-rv*). Nei mercati finanziari, l'eterogeneità può sorgere per vari motivi: differenze nelle dotazioni iniziali degli agenti e nei profili di rischio, vincoli istituzionali, differenze nel trattamento delle informazioni, negli orizzonti temporali, nella posizione geografica e così via. Il modello di Corsi si concentra sull'eterogeneità che nasce dalla differenza negli orizzonti temporali. Generalmente, all'interno dei mercati troviamo operatori con caratteristiche molto diverse per quanto riguarda le frequenza di negoziazione: ad esempio, gli *intraday traders* e i *market makers* si contrappongono agli investitori istituzionali e ai fondi pensione, che effettuano negoziazioni con frequenza minore ma per importi maggiori. L'idea principale è che gli operatori, reagiscono e causano diversi tipi di componenti di volatilità a seconda dell'orizzonte temporale di riferimento. Per semplicità, è possibile identificare tre componenti principali della volatilità: i trader a breve termine con frequenza di trading giornaliera, gli investitori a medio termine che in genere ribilanciano le loro posizioni settimanalmente e gli agenti a lungo termine con un orizzonte di riferimento di un mese. Complessivamente, ciò che si osserva è un susseguirsi di componenti di volatilità, che vanno dalle frequenze più basse a quelle più alte:³¹ da un lato, i traders a breve termine reagiscono ai cambiamenti nella volatilità a lungo termine rivedendo il loro comportamento e causando quindi dei *clusters* di volatilità a breve termine. Dall'altro, la volatilità a breve termine non sortisce alcun effetto sulle strategie di trading degli operatori con un orizzonte temporale più lungo.³²

³¹ È stato empiricamente osservato un comportamento asimmetrico della volatilità: la volatilità su intervalli di tempo più lunghi ha un'influenza più forte sulla volatilità su intervalli di tempo più brevi rispetto al viceversa. Lynch and Zumbach (2003) visualizzano chiaramente la propagazione asimmetrica tracciando la correlazione tra la *volatility first difference* e la *realized volatility*.

³² Per gli operatori a breve termine il livello di volatilità a lungo termine conta perché influenza la dimensione futura prevista per i/le profitti/perdite.

2.1.1. Setup del modello

Come visto nel primo capitolo, siamo interessati a stimare la volatilità V usando dati discreti su X nell'intervallo $[0, T]$. Faremo qui riferimento alla cosiddetta *Integrated Volatility* come proxy di V . Essa, però, non può essere osservata: è cioè un processo *latente* e ciò, chiaramente, andrà a complicare il suo *forecasting*. Pertanto, come già anticipato, faremo uso di un suo particolare stimatore, noto come *realized volatility*: essa è infatti molto persistente e presenta una *long-memory*.

Considereremo il processo latente ed il suo stimatore su tre intervalli di tempo: le volatilità multi-periodali sono ricavate dalle *realized volatilities* giornaliere tramite media semplice.

Definiamo tali componenti:

- *realized volatility settimanale*

$$rv_t^{(w)} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 rv_{t-i}; \quad [2.5]$$

- *realized volatility mensile*

$$rv_t^{(m)} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} rv_{t-i}. \quad [2.6]$$

Definendo il processo latente sui diversi orizzonti temporali, si nota una struttura simile ad un processo $AR(1)$:³⁴ ad ogni livello, la *Integrated Volatility* risulta essere funzione della *realized volatility* relativa allo

³³ La componente settimanale (w) è calcolata su 5 giorni; quella mensile (m) su 22 giorni. Si noti che a causa della “disuguaglianza di Jensen”, le volatilità aggregate su intervalli di tempo più lunghi, come qui definite, non possono essere interpretate esattamente come le *realized volatilities* relative al medesimo orizzonte temporale: la differenza è comunque immateriale nelle applicazioni empiriche e questa definizione garantisce una più semplice interpretazione del modello *Har-rv*.

³⁴ Poiché al membro di destra non compare σ_t , ma piuttosto la corrispondente rv , il processo non è, in senso stretto, un $AR(1)$.

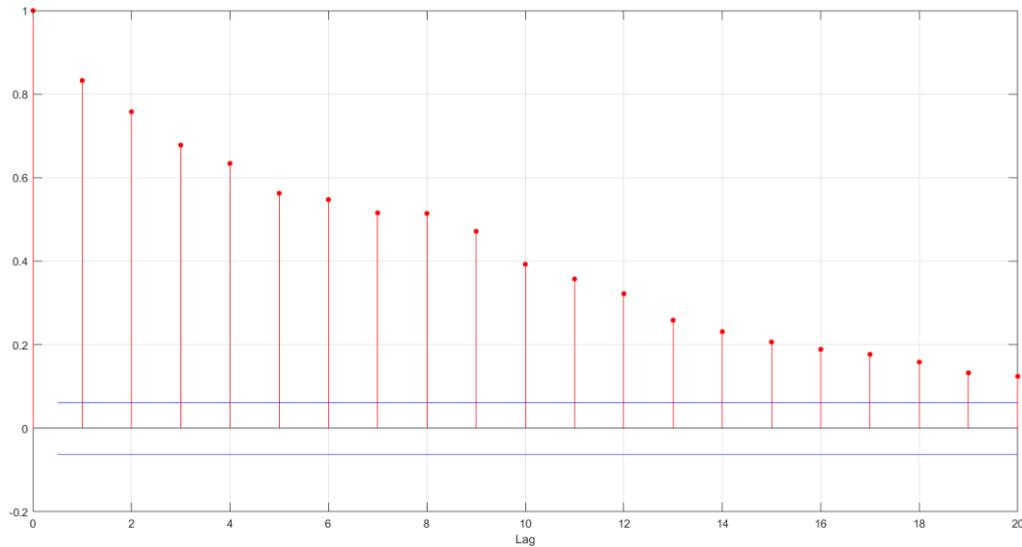


Figura 2.1: *sample Autocorrelation Function (ACF)* delle *realized volatilities* calcolate su 1040 giorni per il FTSE-Mib (nel periodo 2016-2020), considerando i primi venti *lags*. Si notano le caratteristiche di persistenza e *long-memory*.

stesso arco temporale e dell'aspettativa dei valori del periodo successivo delle volatilità parziali a più lungo termine³⁵:

$$\tilde{\sigma}_{t+1m}^{(m)} = c^{(m)} + \phi^{(m)}rv_t^{(m)} + \tilde{\omega}_{t+1m}^{(m)}; \quad [2.7]$$

$$\tilde{\sigma}_{t+1w}^{(w)} = c^{(w)} + \phi^{(w)}rv_t^{(w)} + \gamma^{(w)}\mathbb{E}_t[\tilde{\sigma}_{t+1m}^{(m)}] + \tilde{\omega}_{t+1w}^{(w)}; \quad [2.8]$$

$$\tilde{\sigma}_{t+1d}^{(d)} = c^{(d)} + \phi^{(d)}rv_t^{(d)} + \gamma^{(d)}\mathbb{E}_t[\tilde{\sigma}_{t+1w}^{(w)}] + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}. \quad [2.9]$$

dove $rv_t^{(m)}$, $rv_t^{(w)}$ e $rv_t^{(d)}$ sono rispettivamente le *realized volatilities* mensili, settimanali e giornaliere osservate (*ex-post*), mentre i processi di innovazione $\tilde{\omega}_{t+1m}^{(m)}$, $\tilde{\omega}_{t+1w}^{(w)}$ e $\tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)}$ sono serialmente incorrelati con media nulla: la loro distribuzione ha inoltre una coda sinistra opportunamente troncata, al fine di garantire la positività delle componenti di volatilità.

³⁵ Ciò è dovuto alla propagazione asimmetrica della volatilità.

Il processo dei rendimenti *high-frequency* è determinato dalla componente di volatilità a frequenza più elevata: nel nostro caso essa corrisponde alla volatilità giornaliera, con $\tilde{\sigma}_t^{(d)} = \sigma_t^{(d)}$, la *Integrated Volatility* giornaliera. Sostituendo ricorsivamente le volatilità parziali nell'ultima equazione, il modello può essere presentato nel seguente modo:

$$\sigma_{t+1d}^{(d)} = c^{(d)} + \beta^{(d)}rv_t^{(d)} + \beta^{(w)}rv_t^{(w)} + \beta^{(m)}rv_t^{(m)} + \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} \quad [2.10]$$

Corsi fa inoltre notare che *ex-post* è possibile scrivere

$$\sigma_{t+1d}^{(d)} = rv_{t+1d}^{(d)} + \omega_{t+1d}^{(d)} \quad [2.11]$$

dove $\omega_{t+1d}^{(d)}$ incorpora sia la misura di volatilità giornaliera che gli errori di stima: si evince perciò il collegamento esistente tra la stima *ex-post* di volatilità data da $rv_{t+1d}^{(d)}$ e la misura simultanea della (latente) volatilità giornaliera data invece da $\sigma_{t+1d}^{(d)}$. Sostituendo tale relazione nell'equazione precedente si ottiene il modello "a cascata" di Corsi

$$rv_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)}rv_t^{(d)} + \beta^{(w)}rv_t^{(w)} + \beta^{(m)}rv_t^{(m)} + \omega_{t+1d} \quad [2.12]$$

dove $\omega_{t+1d} = \tilde{\omega}_{t+1d}^{(d)} - \omega_{t+1d}^{(d)}$. Si nota qui la struttura tipica di un modello autoregressivo semplice per le *rv* considerate su tre diversi orizzonti temporali.³⁶

Grazie alla sua elementarità, il modello proposto può essere facilmente esteso in varie direzioni. Esso è per semplicità presentato in termini di *Realized Volatility*, ma modelli analoghi potrebbero essere costruiti per la varianza o per la sua trasformazione logaritmica. Sarebbe possibile, inoltre, inserire altre componenti: ad esempio, potrebbero essere incluse nuove variabili significative come regressori aggiuntivi oppure diverse misure di *jumps*: Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) propongono di scomporre la varianza totale in una

³⁶ Corsi chiama questo modello *HAR(3)-rv*: generalizzando, denotando con h e k , rispettivamente, la frequenza più bassa e la frequenza più alta, il modello può essere visto come un $AR\left(\frac{h}{k}\right)$.

“*continuous part*” (*CHAR*), scritta in termini di *BV*,³⁷e in una “*jump part*” (*HAR-J*): mentre quest’ultima è generalmente imprevedibile, la parte continua è molto persistente, come è stato mostrato in Figura 2.1.

2.2. *GARCH*

Presentiamo ora invece un secondo modello, senz’altro uno dei più noti in letteratura: il *GARCH(1,1)*. Nel corso degli anni ‘80 e ‘90, prima dell’avvento della *High Frequency Econometrics*, i modelli di tipo *GARCH* sono stati impiegati per la stima della volatilità tramite utilizzo di dati giornalieri e ancora oggi trovano largo impiego, soprattutto nel campo del *risk management*.

Come già illustrato precedentemente, appare chiaro come la volatilità non sia costante nel tempo, né possa considerarsi come una costante a cui semplicemente sommare un errore di previsione dovuto al campionamento: la volatilità subisce infatti variazioni significative nel corso del tempo. Tale fenomeno è noto in letteratura con il termine *volatility clustering* e fa riferimento al fatto che, sovente, si possono osservare dei “raggruppamenti” di volatilità per i fattori di mercato, che possono persistere per un periodo di tempo prolungato. Questo fenomeno è stato per la prima volta osservato da Mandelbrot, nel 1963: “*large changes tend to be followed by large changes - of either sign - and small changes tend to be followed by small changes*”. Esso viene esplicitamente affrontato dai modelli *GARCH* (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*), che sono appunto una “generalizzazione” dei modelli *ARCH*. *ARCH* è l’acronimo di *Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*: il modello *ARCH* è quindi un modello “Autoregressivo a Eteroschedasticità Condizionata”. È stato presentato per la prima volta nel 1982 da Robert Franklin Engle³⁸,

³⁷ In presenza di *jumps*, la *Realized Variance* (RV_n) non converge alla nostra variabile target (*Integrated Variance*): in tal caso, solo la *Bipower Variation* è uno stimatore consistente di *IV*.

³⁸ Si veda Engle, R. F., “*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*”, 1982.

il quale vincerà il premio Nobel per l'economia nel 2003 insieme a Clive Granger, proprio per lo sviluppo di “metodi di analisi delle serie storiche economiche con volatilità variabile nel tempo”.

“Eteroschedasticità” significa varianza che muta nel tempo, e si contrappone all'ipotesi di varianza costante. È una caratteristica presente in alcune variabili casuali, in particolare nelle serie storiche di natura finanziaria, nelle quali alcuni gruppi o sottoinsiemi di variabili casuali mostrano una varianza diversa dalle altre.

“Condizionale” indica che le previsioni ottenute sono basate sulle informazioni disponibili nel periodo precedente: includendo gli *shocks* passati, la volatilità condizionale permette di catturare la persistenza degli stessi, inglobando in tal modo gli effetti della volatilità passata sull'incertezza degli eventi futuri. Quando l'eteroschedasticità è serialmente correlata, ovvero condizionata a periodi di elevata o modesta varianza, la serie storica viene definita “ad eteroschedasticità condizionata”.

“Autoregressivo” fa invece riferimento alla modalità con la quale tale *Conditional Heteroskedasticity* viene modellata: si ha in questo caso una regressione della variabile “su sé stessa”.

“Generalizzato” si riferisce infine, come specificato poc'anzi, ad un particolare modello sviluppato da Tim Bollerslev³⁹ nel 1986, che rappresentava una generalizzazione del modello *ARCH* di Engle. Rispetto a quest'ultimo, il modello generalizzato di Bollerslev ha raggiunto una maggiore fama grazie alla sua capacità di adattarsi in maniera appropriata a variabili finanziarie di diverso tipo. I modelli *GARCH* sono pertanto modelli che ci permettono di prevedere la varianza futura tramite una regressione sui valori passati della varianza stessa: la stima che si ottiene cambia quindi nel tempo (*time-varying volatility*).

³⁹ Si veda Bollerslev, T., “*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*”, 1986.

2.2.1. Setup del modello

Consideriamo, per cominciare, la versione originale di Engle. Nel modello *ARCH*, la varianza è rappresentata come semplice funzione degli errori di previsione compiuti nei precedenti periodi

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad [2.13]$$

dove $\omega > 0$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$. La varianza è dunque stimata come una *moving average* di p errori previsionali passati elevati al quadrato: il modello è detto *ARCH(p)*. Come arrivare alla parametrizzazione di un generico modello *ARCH(p)*? Iniziamo partendo da una stima del tasso di varianza giornaliero, σ_t^2 :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (\varepsilon_{t-i} - \bar{\varepsilon})^2 \quad [2.14]$$

dove q indica il numero di osservazioni. Si possono apportare alcune modifiche che comportano minime variazioni nelle stime della varianza:

- si pone $\bar{\varepsilon} = 0$;
- si sostituisce $p-1$ con p .

L'equazione diventa

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \varepsilon_{t-i}^2. \quad [2.15]$$

Tale equazione assegna però uguale peso a tutte le ε_t^2 : sarebbe invece ragionevole assegnare maggiore rilevanza ai dati più recenti. Pertanto:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad [2.16]$$

con $\alpha_i < \alpha_j$ per ogni $i > j$ ($\alpha_i > 0$) e $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$. Si arriva dunque alla parametrizzazione di un generico modello $ARCH(p)$:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \quad [2.17]$$

Uno *shock* improvviso della variabile considerata determina un errore di previsione, che a sua volta comporta un rialzo della previsione della volatilità relativa ai p periodi futuri. Il limite maggiore di questo modello è che le applicazioni empiriche richiedono spesso un numero di *lags* particolarmente elevato, rendendo l' $ARCH$ molto poco duttile. La sua generalizzazione, nota come $GARCH$, mira quindi a rendere tale processo flessibile e in grado di conseguire lo stesso risultato in termini di precisione, facendo però uso di un numero limitato di ritardi: il modello $GARCH$ è impiegato proprio per evitare di avere un $ARCH$ troppo lungo, che richiederebbe la stima di un numero eccessivamente elevato di parametri. Esso garantisce dunque una maggiore efficienza migliorando inoltre la stima della volatilità condizionale. La sua formulazione analitica è la seguente:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad [2.18]$$

con $\omega \geq 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p \geq 0$ e $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i = 1$. La differenza rispetto al modello di Engle è che qui la varianza viene modellata utilizzando un'altra tipologia di ritardi oltre a quelli relativi agli errori di previsione: i *lags* relativi ai passati valori della varianza stessa. Mentre i primi hanno l'obiettivo di cogliere gli effetti di breve termine legati all'evoluzione della variabile considerata, i secondi catturano quelli di lungo periodo: in maniera simile a quanto accade per i modelli *Exponentially-Weighted Moving Average (EWMA)*, nei modelli $GARCH(p,q)$ la varianza condizionale viene a dipendere dai propri valori storici.⁴¹

⁴⁰ È possibile chiaramente aggiungere una costante ($\omega > 0$) al modello.

⁴¹ Una rappresentazione equivalente di tipo $ARMA$ del processo $GARCH(p,q)$ è data, invece, da

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}^2 + v_t$$

Come anticipato prima, le applicazioni del modello *GARCH* sono generalmente basati sulla versione *GARCH(1,1)*, la più nota in letteratura: essa considera un unico errore di previsione e il valore della varianza nel periodo precedente. Analiticamente:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad [2.19]$$

dove α_1 misura l'intensità dell'impatto dello *shock* precedente e β_1 misura l'intensità dell'effetto della varianza ritardata, ed è detto "tasso di persistenza". È opportuno qui specificare che, a differenza dei modelli *ARCH* (e pertanto anche del modello *HAR* precedentemente illustrato) stimati tramite il metodo dei "minimi quadrati ordinari" (*Ordinary Least Squares, OLS*), i parametri del *GARCH* sono stimati tramite il metodo della "verosimiglianza" (*likelihood*), o in maniera equivalente della "log-verosimiglianza" (*log-likelihood*). Scelta la distribuzione Normale per il processo delle innovazioni, dunque $z_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$, avremo:

$$l_t(\theta) = \log(L(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots; \theta)) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \quad [2.20]$$

dove $\theta' \equiv (\omega, \alpha_1, \beta_1)$.

È possibile riscrivere il modello in forma "estesa":

- $r_t = \mu_0 + \varepsilon_t$ (equazione della *conditional mean*)
- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ (equazione della *conditional variance*)
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ (distribuzione degli errori)

Poiché

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1 \quad [2.21]$$

dove $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 = (z_t^2 - 1)\sigma_t^2$ può essere interpretato come il processo di innovazione per la *conditional variance*, essendo una martingala a media nulla.

la stima della *conditional variance* diventa una media ponderata tra lo *shock* relativo al periodo precedente e la varianza attesa per il periodo precedente. Emerge pertanto la convinzione, tipica dei modelli *GARCH*, che la varianza non solo è tempo-variante, ma è anche caratterizzata da una componente imprevedibile.

Pur basandosi su un unico ritardo, il *GARCH(1,1)* possiede in realtà una “memoria infinita”. Data l’equazione di σ_t^2 , sostituendo σ_{t-1}^2 si ottiene:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2). \quad [2.22]$$

In maniera analoga, σ_{t-2}^2 può a sua volta essere sostituito ottenendo:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t-3}^2)). \quad [2.23]$$

Procedendo in maniera ricorsiva per sostituire il termine σ_{t-i}^2 , si ottiene:

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2. \quad [2.24]$$

Un *GARCH(1,1)* è, pertanto, equivalente ad un *ARCH*(∞): il peso assegnato ai ritardi ε_{t-i}^2 è pari a $\alpha_1 \beta_1^{i-1}$, per ogni $i = 1, 2, \dots$. Esso decresce in “progressione geometrica” (esponenzialmente) al tasso β_1 , il quale può essere visto come *time decay rate*. È simile al λ della *Exponentially-Weighted Moving Average (EWMA)*, definendo l’importanza relativa degli errori di previsione al fine di determinare la stima di σ_t^2 .

Riassumendo, il modello *GARCH(1,1)* presenta alcuni pregi notevoli:

- evidenzia l’esistenza di una “correlazione seriale”, esplicitandola tramite un modello autoregressivo;
- assegna importanza alle informazioni incorporate negli errori previsionali;
- consente di cogliere la “leptocurtosi” (distribuzione “*fat-tailed*”) presente nei dati empirici.

D’altro canto, è bene citarne anche i limiti:

- esso conserva innanzitutto l’ipotesi di normalità, seppur relativa ai soli errori previsionali;

- in secondo luogo, considera l’impatto dello *shock* di mercato sulla previsione della *conditional variance* come indipendente dal suo segno: gli errori sono infatti elevati al quadrato. Non viene pertanto colto il fenomeno noto come *leverage effect*, per cui la volatilità tenderebbe ad aumentare in seguito ad un crollo del mercato, mentre rimarrebbe quasi invariata in seguito ad un rialzo dei corsi azionari.

Con l’obiettivo di superare alcuni dei limiti riscontrati nel modello *GARCH*, sono state negli anni proposte alcune ulteriori rivisitazioni: le più note sono senz’altro l’*Exponential GARCH (EGARCH)*, l’*Asymmetric GARCH (AGARCH)* e l’*Integrated GARCH (IGARCH)*, le uniche concretamente utilizzate ai fini di *risk management*. Le prime due affrontano direttamente il sopracitato *leverage effect*: l’*AGARCH*, inoltre, utilizza una *t-distribution* per gli errori di previsione, superando l’ipotesi semplificatrice (e poco realistica) di normalità e offrendo, pertanto, una maggiore flessibilità in termini di curtosi. La terza alternativa può infine essere ricavata dal semplice modello *GARCH*, imponendo come restrizione che la somma dei coefficienti α_1 e β_1 sia pari all’unità. Mentre l’*EGARCH* e l’*AGARCH* non saranno oggetto di approfondimento in questo elaborato, l’*IGARCH* verrà invece presentato brevemente in quanto rappresenta il punto di partenza per lo sviluppo dell’ultimo modello usato ai fini del *volatility forecasting* nel prossimo capitolo, il *FIGARCH*.

2.3. FIGARCH

Imponendo, come detto, $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, l’equazione del *GARCH(1,1)* diventa

$$\sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \quad [2.25]$$

facendo emergere un *trade-off* tra la persistenza della varianza (β_1) e l’esito dei recenti *shock* ($1 - \beta_1$).

Se il polinomio *AR* della rappresentazione *GARCH* ha una radice unitaria, abbiamo quindi un modello *GARCH* “Integrato” (*IGARCH*). Introdotto per la prima volta da Engle e Bollerslev (1986), una caratteristica fondamentale di questo modello è che l’impatto degli *shocks* al quadrato passati è persistente e il prezzo dei titoli può mostrare un’estrema dipendenza dalle condizioni iniziali. Diversi studi segnalano la presenza di

apparente lunga memoria nelle autocorrelazioni dei rendimenti al quadrato o assoluti di varie attività finanziarie. Spinti da queste osservazioni, Baillie et al. (1996)⁴² introdussero il processo *Fractionally Integrated GARCH*, noto come *FIGARCH*.

Abbiamo in precedenza sottolineato come la persistenza osservata nell'autocorrelazione dei rendimenti al quadrato sia tra i più noti fatti stilizzati delle serie finanziarie: la *long-memory* del modello *FIGARCH* gli permette, dunque, di essere un candidato migliore rispetto ad altri modelli *Conditional Heteroskedastic* per modellare la volatilità. L'obiettivo principale nell'introduzione del modello *FIGARCH* era quello di sviluppare una classe di processi per la varianza condizionale, in grado di chiarire ed esporre le dipendenze temporali osservate nella volatilità che caratterizza i mercati finanziari: andando più nel dettaglio, il modello *FIGARCH* consente solo un lento (iperbolico) tasso di decadimento per le innovazioni al quadrato (o del loro valore assoluto) ritardate nella funzione di varianza condizionale. Il vantaggio di questo modello è che esso può "accogliere" la dipendenza temporale della varianza e una distribuzione incondizionata leptocurtica per i rendimenti, con un comportamento *long-memory* per le varianze condizionali.

2.3.1. Setup del modello

Abbiamo visto come Engle e Bollerslev abbiano proposto una particolare classe di modelli *GARCH*, noti come *IGARCH*, per i quali la *unconditional variance* non esiste: questo accade quando $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i = 1$ in un modello *GARCH(p,q)*. In maniera simile a quanto accade per i modelli *ARIMA*, una caratteristica chiave dei modelli *IGARCH* è che l'impatto degli *shocks* passati al quadrato è persistente.⁴³ È però vero che, nella maggior parte delle situazioni empiriche, il processo di volatilità è risultato essere *mean reverting*: il modello

⁴² Si veda Baillie R. T., Bollerslev T. & Mikkelsen H. O., "Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", 1996.

⁴³ È interessante notare che il modello *IGARCH* può essere fortemente stazionario anche se non è debolmente stazionario.

IGARCH sembra perciò essere troppo restrittivo proprio a causa della persistenza infinita degli *shocks* di volatilità. Riscriviamo il processo *IGARCH* nel modo seguente:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad [2.26]$$

I processi di tipo *FIGARCH* possono essere ottenuti sostituendo il *first difference operator* $(1 - L)$ nella precedente equazione con *fractionally differencing operator* $(1 - L)^d$, dove $0 < d < 1$. Un modello *FIGARCH*(p, d, q) avrà perciò la forma seguente:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t. \quad [2.27]$$

È possibile riscrivere il processo *FIGARCH*(p, d, q) come

$$\phi(L)(1 - L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad [2.28]$$

dove $0 < d < 1$ e tutte le radici di $\phi(L)$ e $1 - \beta(L)$ cadono al di fuori del cerchio di raggio unitario. i termini
Scrivendo $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ e riarrangiando i termini dell'Equazione [2.28], è possibile ottenere una rappresentazione alternativa:

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)](1 - L)^d\varepsilon_t^2. \quad [2.29]$$

La *conditional variance* sarà dunque uguale a:

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\}\varepsilon_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \quad [2.30]$$

dove $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$. Si è quindi ottenuta una rappresentazione del tipo *ARCH*(∞): affinché il processo *FIGARCH*(p, d, q) per ε_t^2 sia ben definito, è necessario che la *conditional variance* nel processo *ARCH*(∞) sia non negativa; perciò, $\lambda_i \geq 0$, per ogni $i = 1, 2, \dots$. Alcune condizioni sufficienti sono disponibili in letteratura.⁴⁴

⁴⁴ S veda Tayefi, M. & Ramanathan, T. V., "An Overview of FIGARCH and Related", 2012.

Per il $FIGARCH(1,d,1)$, i pesi sono costruiti usando:

- $\delta_1 = d$
- $\lambda_1 = d - \beta + \phi$

e le equazioni ricorsive

- $\delta_j = \frac{(j-1-d)}{j} \delta_{j-1}$
- $\lambda_j = \beta \lambda_{j-1} + \delta_j - \phi \delta_{j-1}$.

Consideriamo ora il problema del *forecasting*. L'*one-step ahead forecast* di σ_t^2 è dato da:

$$\sigma_t^2(1) = \omega + \lambda_1 \varepsilon_t^2 + \lambda_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots \quad [2.31]$$

In modo analogo, il *two-step ahead forecast* è dato da:

$$\sigma_t^2(2) = \omega + \lambda_1 \sigma_t^2(1) + \lambda_2 \varepsilon_t^2 + \dots \quad [2.32]$$

In generale, un *l-step ahead forecast* è del tipo:

$$\sigma_t^2(l) = \omega + \lambda_1 \sigma_t^2(l-1) + \dots + \lambda_{l-1} \sigma_t^2(1) + \lambda_l \varepsilon_t^2 + \lambda_{l+1} \varepsilon_{t-1}^2 + \dots \quad [2.33]$$

Per motivi pratici, ci fermiamo ad un M sufficientemente grande. Ciò porta alla seguente equazione:

$$\sigma_t^2(l) = \omega + \sum_{i=1}^{l-1} \lambda_i \sigma_t^2(l-i) + \sum_{j=0}^M \lambda_{l+j} \varepsilon_{t-j}^2. \quad [2.34]$$

I parametri vanno sostituiti con le rispettive stime.

Come abbiamo già visto per il $GARCH(1,1)$, anche per la stima dei parametri del $FIGARCH(1,d,1)$ si farà uso del metodo della massima verosimiglianza, assumendo che il processo delle innovazioni z_t sia normale.⁴⁵ Lo

⁴⁵ In molte applicazioni pratiche in cui si fa uso di dati finanziari *HF*, il processo di innovazione presenta una distribuzione “*fat tailed*” (leptocurtica) e non normale. Proprio perché l’evidenza empirica mostra come l’ipotesi di normalità sia spesso messa in discussione, uno stimatore di “quasi-massima verosimiglianza” (*Quasi-Maximum Likelihood Estimator, QMLE*) risulterebbe preferibile.

stimatore di *maximum likelihood* per il *FIGARCH*(l, d, l) basato sul campione $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T\}$ può essere scritto come:

$$l_t(\theta) = \log(L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T; \theta)) \cong -\frac{1}{2}T \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\log(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right] \quad [2.35]$$

dove $\theta' \equiv (\omega, d, \beta, \phi)$.

Presentati i nostri modelli, possiamo procedere con l'analisi empirica, entrando nel vivo della trattazione: come vedremo, tali modelli saranno utilizzati nel prossimo capitolo per la previsione delle volatilità e le loro performance confrontate.

Capitolo 3

3. *Analisi empirica*

Come già anticipato, con il terzo capitolo entriamo nella parte *core* di questo elaborato: facendo uso del software *MatLab*, i tre modelli vengono applicati a dati empirici raccolti tra aprile 2016 e febbraio 2022.⁴⁶ Il campione di dati è stato poi suddiviso in due sotto campioni, il “*training*” *sample* ed il “*test*” *sample*: il primo, contenente circa il 70% dei dati, è stato utilizzato al fine di stimare i parametri dei tre modelli (stima “*in sample*”), di cui avvalersi nel *forecast ex-post* che avverrà “*out of sample*”; il secondo, invece, una volta effettuate le previsioni, è stato impiegato per valutarne l’accuratezza. La valutazione delle *forecasts* viene eseguita comparando i valori previsti con quelli osservati: si è fatto ricorso, a tal fine, alle statistiche del *Root Mean Squadre Error (RMSE)* e del *Mean Absolute Error (MAE)*. Tale esercizio è stato eseguito su tre diversi indici del mercato azionario, vale a dire il FTSE-Mib, il DAX 40 e lo STOXX50: l’obiettivo è quello di mostrare empiricamente la superiorità, ai fini della previsione della volatilità, dei modelli che fanno uso di dati ad ultra-frequenza, nella fattispecie del modello *HAR-rv*, che abbiamo qui assunto come modello di riferimento.

Inoltre, si era in precedenza accennato al fatto che, nonostante l’estrema semplicità dal punto di vista strutturale, il modello di Corsi fosse in grado di riprodurre le dinamiche delle volatilità e dei rendimenti, con i relativi fatti stilizzati che li caratterizzano. Pertanto, prima di procedere con la nostra analisi empirica, vediamo più nel dettaglio i nostri *financial data*, mettendo in evidenza i sopracitati *stylized facts*.

⁴⁶ Si è fatto ricorso alla “*Realized Library*” dell’ “*Oxford-Man Institute of Quantitative Finance*”: per quanto riguarda i dati relativi alle stime giornaliere della *realized volatility*, si sono presi in considerazione quelli ai quali era stata applicata la tecnica dello *sparse sampling* con una frequenza di campionamento pari a cinque minuti.

3.1. *Dati*

Dei vari fatti stilizzati che mettono a dura prova i modelli econometrici, abbiamo nell'introduzione riportato i principali. Vediamoli adesso più da vicino.

Tra essi si annoverano:

- la non stazionarietà dei prezzi;
- la stazionarietà dei rendimenti (*random walk*);
- le distribuzioni “*fat-tailed*” per i rendimenti (leptocurtosi): la curtosi è dunque maggiore di 3 (o, in alternativa, l'eccesso di curtosi è positivo). Viene rigettata l'ipotesi di distribuzione normale per i rendimenti;
- il *volatility clustering*: rendimenti grandi (in valore assoluto) tendono ad essere seguiti da altrettanto grandi rendimenti (sempre in valore assoluto);
- l'assenza di autocorrelazione nei rendimenti (*white noise*);
- l'autocorrelazione nei rendimenti al quadrato;
- il *leverage effect*: gli *shocks* sono negativamente correlati con i cambiamenti nella volatilità. Le “*bad news*” hanno pertanto un maggiore impatto sulla volatilità rispetto alle “*good news*” (i rendimenti negativi incrementano la volatilità più di quelli positivi).

Presentiamo adesso la nostra serie storica: i dati vanno dal 01-apr-2016 al 17-feb-2022.⁴⁷

La Figura 3.1 conferma la non stazionarietà dei prezzi. Osservando poi il logaritmo dei prezzi, si nota come forti fluttuazioni avvengano anche lontano dal *trend* (Figura 3.2). La serie storica dei prezzi è perciò uno *unit-root process*.

⁴⁷ Nelle serie storiche sono ovviamente considerati solo i giorni di mercato aperto.

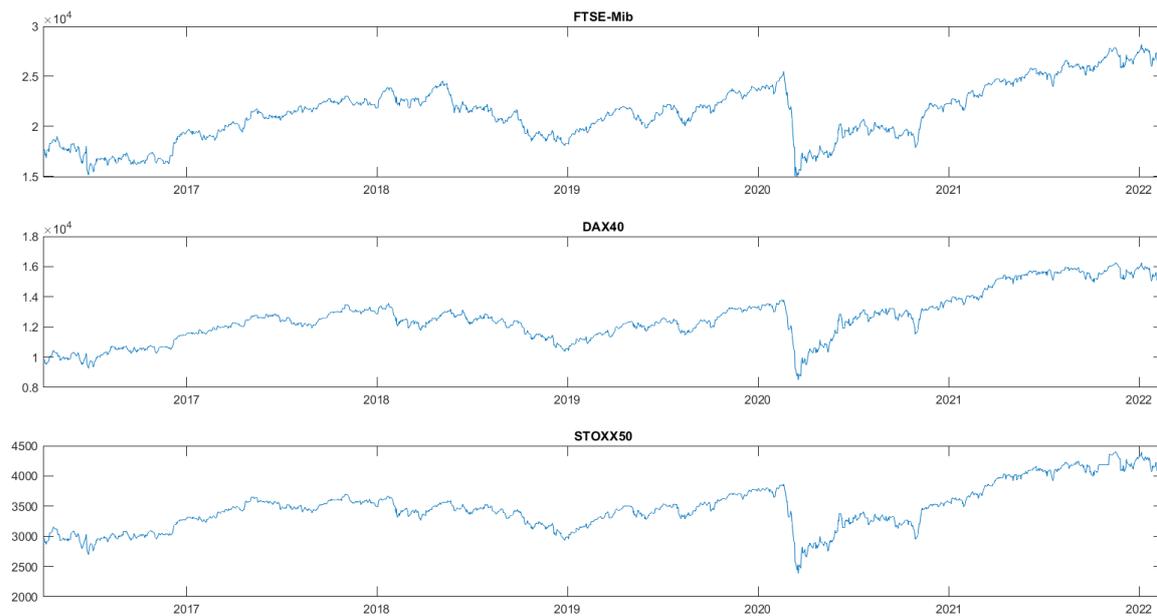


Figura 3.1: serie storica dei prezzi, dal 01-apr-2016 al 17-feb-2022.

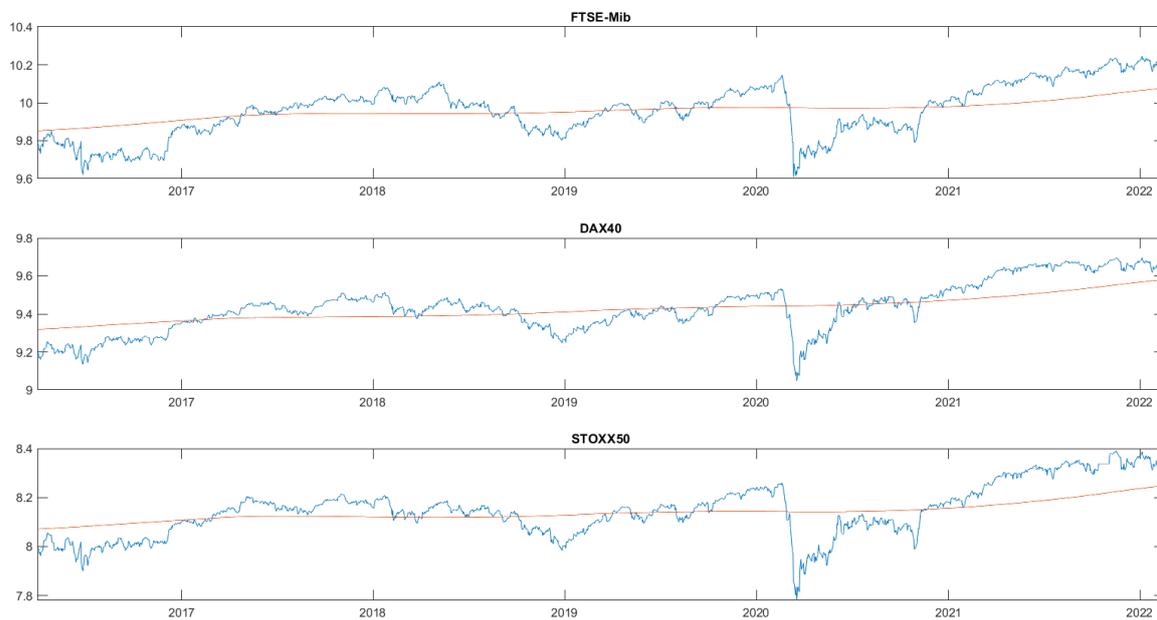


Figura 3.2: serie storica dei log-prezzi, dal 01-apr-2016 al 17-feb-2022. Risulta evidente un *trend* crescente.

Andando poi a calcolare i log-rendimenti è possibile provare la non stazionarietà degli stessi, come suggerito dalla teoria economica.

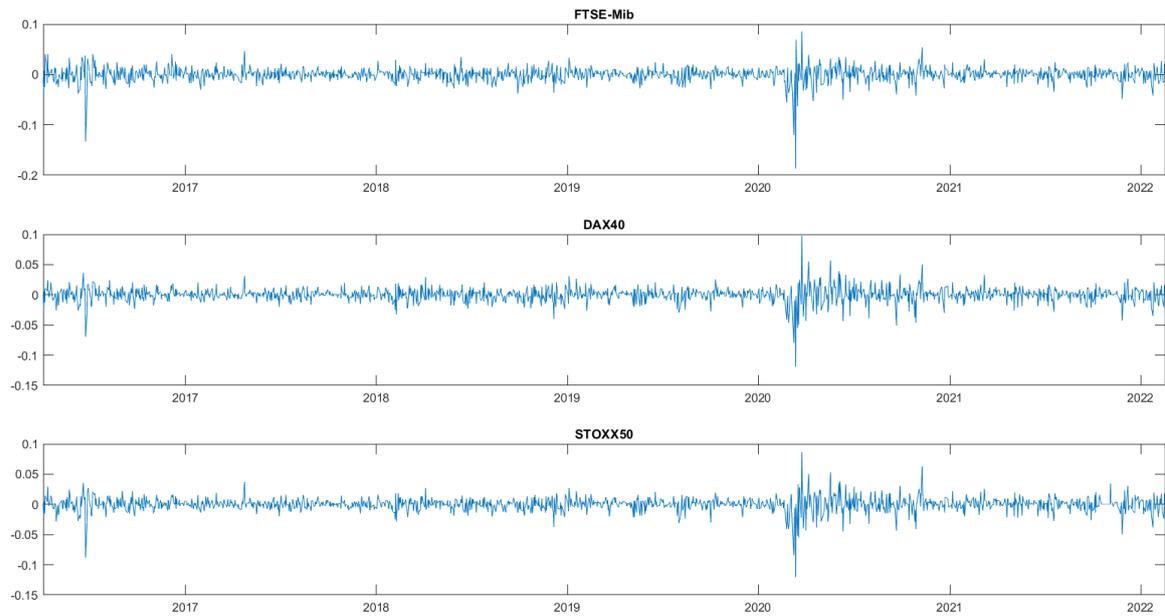


Figura 3.3: serie storica del log-rendimenti, calcolati come differenza tra i log-prezzi, dal 02-apr-2016 al 17-feb-2022.

L'analisi di stazionarietà è stata svolta tramite l'utilizzo del *Dickey-Fuller test*: si è scelto di modellare la serie dei log-rendimenti come un processo con costante e senza trend temporale (*random walk e drift*), come già anticipato nel capitolo precedente:

$$\Delta y_t = \mu_0 + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [3.1]$$

con $\beta = \rho - 1$ (si considera qui il modello differenziato $y_t - y_{t-1}$). Il test d'ipotesi può, pertanto, essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta < 0 \end{cases}$$

dove l'ipotesi nulla H_0 indica stazionarietà. La serie storica risulta stazionaria con un *p-value* pari a 0.0001: semplicemente guardando la Figura 3.3, si nota infatti come la media sia centrata in 0. Risulta anche evidente il fenomeno del *volatility clustering*, dove i *clusters* di volatilità corrispondono alle fasi di rialzo o ribasso del titolo.

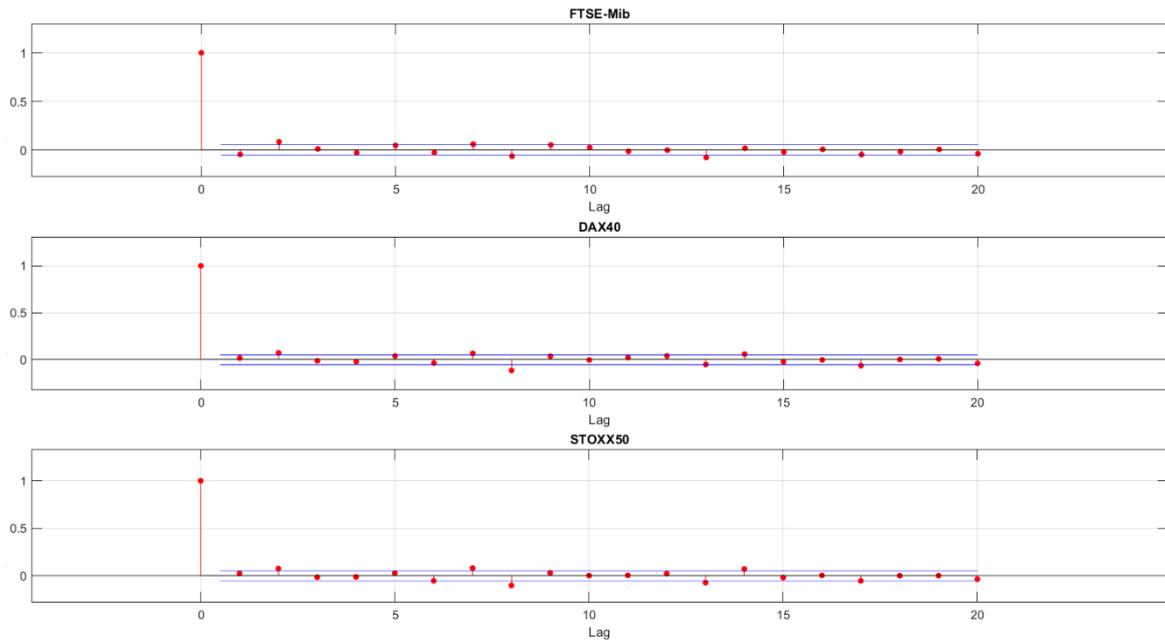


Figura 3.4: *sample Autocorrelation Function (ACF)* dei log-rendimenti per i primi venti *lags*.

Una domanda che sarebbe opportuno porsi (e che probabilmente molte persone si pongono) è: “*Ci sono informazioni che possiamo trarre dai rendimenti passati al fine di stimarne i valori futuri?*”. Guardando ai semplici rendimenti, la risposta è chiaramente “*No*”, altrimenti sarebbe molto più facile e sicuro investire. Ciò può essere dimostrato formalmente tramite la *Autocorrelation Function (ACF)*, calcolata sui log-rendimenti. Guardando la *ACF* nella Figura 3.4 è evidente la mancanza di correlazione seriale: i punti rossi cadono tutti all’interno dell’intervallo di confidenza, evidenziando la mancanza di significatività per i primi venti *lags*.

Guardiamo adesso agli *squared returns*: essi rappresentano banalmente la varianza, poiché la media dei rendimenti è zero. In questo caso è osservabile una correlazione seriale: i dati passati forniscono informazioni utili per stimare i valori futuri.

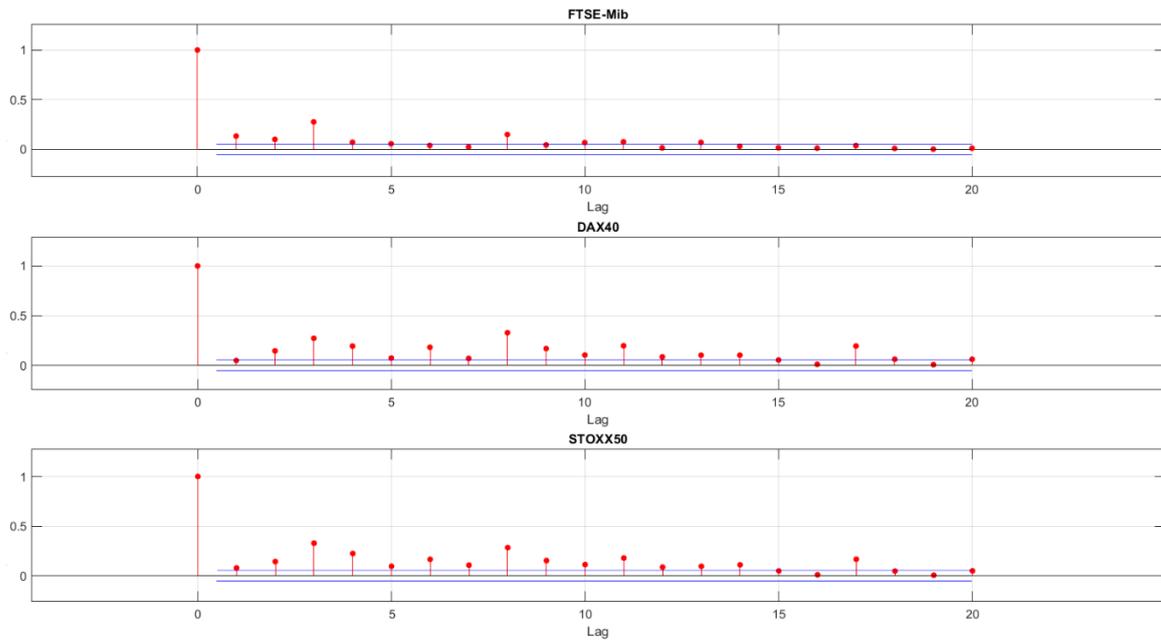


Figura 3.5: *sample Autocorrelation Function (ACF)* dei log-rendimenti al quadrato per i primi venti *lags*.

A differenza della Figura 3.4, guardando la *ACF* nella Figura 3.5 è evidente la correlazione seriale: i punti rossi cadono all'esterno dell'intervallo di confidenza per la quasi totalità dei *lags* (fatta eccezione per il FTSE-Mib). L'autocorrelazione tende a zero molto lentamente. Si può dunque escludere la dipendenza lineare dei rendimenti nel tempo. Rimane invece possibile affermare che esista una dipendenza temporale di grado più elevato di quella lineare: infatti, grazie alla leptocurtosi, l'incorrelazione non implica indipendenza. La leptocurtosi risulta evidente guardando i *QQ plot* in Figura 3.6.

Interpretazione finanziaria: rispetto alla distribuzione normale si verificano più frequentemente rendimenti molto elevati o molto bassi, il che comporta il sopracitato *volatility clustering*.

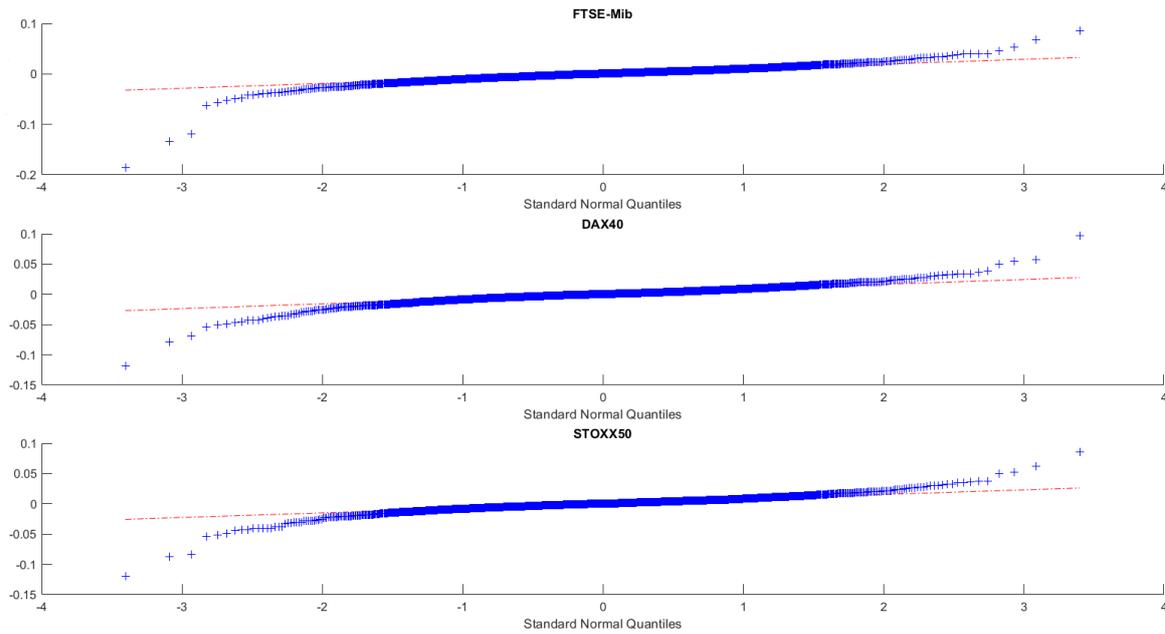


Figura 3.6: *QQ-plot* del campione di dati vs. distribuzione normale standard.

Dopo aver esaminato a fondo le nostre serie finanziarie, possiamo procedere con la loro analisi empirica:

3.2. *Stime dei parametri*

In questa sezione ci occuperemo, nella fattispecie, della stima dei parametri dei tre modelli presentati nel capitolo precedente. Tale stima avverrà sul campione ristretto che abbiamo definito *training sample*: i risultati così ottenuti verranno poi utilizzati nella prossima sezione al fine di effettuare delle previsioni circa la volatilità nei periodi successivi.

I modelli e le relative stime dei parametri sono presentati singolarmente: è stata però inserita una rappresentazione grafica finale relativa alla *performance in sample* per ciascuno di essi, con l'obiettivo di favorire una migliore comparazione. Iniziamo presentando il nostro modello di riferimento, l'*HAR-rv*.

$$rv_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)}rv_t^{(d)} + \beta^{(w)}rv_t^{(w)} + \beta^{(m)}rv_t^{(m)} + \omega_{t+1d}^{(d)}$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
c	-0.45142 (-2.6871)	-0.37451 (-2.2686)	-0.48135 (-2.8476)
$\beta^{(d)}$	0.56766 (25.066)	0.57022 (25.698)	0.55072 (24.822)
$\beta^{(w)}$	0.23482 (10.681)	0.24573 (10.403)	0.24770 (10.890)
$\beta^{(m)}$	0.036681 (1.5036)	0.062598 (1.9501)	0.021521 (1.1244)

Tabella 3.1: coefficienti stimati *in sample* tramite regressione *OLS* per il modello *HAR-rv*. In parentesi è riportato il *t*-statistico (*t-Stat*), calcolato sulla base dello *standard error (SE)*.

È bene ricordare, innanzitutto, che per tutte le tre serie storiche sono state utilizzate le stime giornaliere per la *realized volatility*, determinate tramite il ricorso alla tecnica dello *sparse sampling* con una frequenza di campionamento pari a cinque minuti.⁴⁸ Le stime giornaliere sono poi state aggregate a livello settimanale e mensile secondo le equazioni [2.5] e [2.6], in modo da avere delle misure di *realized volatility* comparabili su diversi orizzonti temporali.

Seguendo la letteratura recente sulla *realized volatility*, è possibile considerare tutti i termini dell'equazione [2.12] come osservati e stimare facilmente i suoi coefficienti $\beta^{(\cdot)}$, facendo ricorso ad una semplice regressione *OLS*: gli stimatori della regressione *OLS* sono consistenti e distribuiti normalmente. La Tabella 3.1 riporta i risultati della stima *in sample*: dai valori del *t*-statistico risulta evidente che le tre misure di *realized volatility*

⁴⁸ Cfr. Nota 46.

aggregate sui tre diversi orizzonti temporali sono altamente significative: l'unica eccezione è rappresentata dai termini costanti, non significativi.

Diverso è invece il caso del modello $GARCH(1,1)$. Come già anticipato nel Capitolo 2, a differenza del modello “a cascata” di Corsi, i parametri del $GARCH(1,1)$ non vengono stimati tramite una semplice regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati ordinari: si fa ricorso al metodo della *maximum likelihood*, o, come nel nostro caso, alla *maximum log-likelihood*. La massimizzazione della verosimiglianza avviene tramite una procedura iterativa, che può essere implementata tramite *routine* numeriche: nel mio caso ho utilizzato, come accennato in apertura di capitolo, il software *MatLab* e le relative *built-in functions*. In generale, per implementare la procedura iterativa al fine di massimizzare la verosimiglianza, si seguono i seguenti *steps*:

- (i) si crea un vettore contenente i valori iniziali (casuali) dei parametri da stimare: ciò serve ad avviare il processo di massimizzazione. Chiamiamo *theta* (θ) questo vettore;
- (ii) si fissano i limiti (*constraints*) per i valori da assegnare ai parametri. Nel caso del $GARCH(1,1)$ si impongono le seguenti disuguaglianze:
 - $\omega \geq 0$;
 - $\alpha_1 \geq 0$;
 - $\beta_1 \geq 0$;
- (iii) si assegnano dei valori iniziali a σ_0^2 e a ε_0^2 ;
- (iv) ε_t^2 viene calcolato per tutte le osservazioni e σ_t^2 viene valutata ricorsivamente usando i valori di ε_t^2 dello *step* precedente: la *log-likelihood* viene quindi valutata per un certo valore del vettore θ .

Si iterano, quindi, i precedenti quattro *steps* finché non viene massimizzata la log-verosimiglianza.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
ω	6.9859x10 ⁻⁶ (3.5733)	4.9105x10 ⁻⁶ (2.1896)	4.93100x10 ⁻⁶ (2.5876)
α_1	0.10016 (3.9458)	0.83080 (4.1832)	0.15981 (4.7522)
β_1	0.85554 (26.452)	0.15088 (23.728)	0.80035 (21.789)

Tabella 3.2: coefficienti stimati *in sample* tramite metodo della massima log-verosimiglianza per il modello $GARCH(1,1)$ In parentesi è riportato il *t*-statistico (*t-Stat*), calcolato sulla base dello *standard error* (*SE*).

In Tabella 3.2 sono presentati i valori dei parametri del $GARCH(1,1)$, risultanti dalla procedura di massimizzazione della funzione di massima log-verosimiglianza.

Passiamo infine all'ultimo dei tre modelli: il $FIGARCH(1,d,1)$. Ancora una volta, come visto già per il $GARCH(1,1)$, la stima dei parametri del modello avviene tramite il metodo della *maximum (log-)likelihood*, che risulta il più efficiente, sotto assunzione di normalità nella distribuzione del processo delle innovazioni z_t . L'implementazione della procedura iterativa finalizzata alla massimizzazione della verosimiglianza funziona in modo analogo a quanto visto per il precedente modello: cambiano chiaramente i parametri da stimare e di conseguenza i relativi *constraints*. Nel caso del $FIGARCH(1,d,1)$ le seguenti disuguaglianze sono imposte:

- $\omega > 0$;
- $0 \leq d \leq 1$;
- $0 \leq \phi \leq \frac{1-d}{2}$;
- $0 \leq \beta \leq d + \phi$.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + 1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d \varepsilon_t^2$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
ω	2.1343×10^{-5}	1.0212×10^{-5}	1.2330×10^{-5}
ϕ	0.15831	0.036756	2.4736×10^{-5}
d	0.68337	0.49250	0.61733
β	0.60972	0.46036	0.49134

Tabella 3.3: coefficienti stimati *in sample* tramite metodo della massima log- verosimiglianza per il modello *FIGARCH(1,d,1)*.

In Tabella 3.3 sono presentati i valori dei parametri del *FIGARCH(1,d,1)*, risultanti dalla procedura di massimizzazione della funzione di massima log-verosimiglianza.

Come anticipato sopra, riportiamo una rappresentazione grafica riepilogativa (Figura 3.7), relativa alla *performance in sample* per ciascuno dei tre modelli fin qui illustrati: l'obiettivo è quello di favorire una migliore comparazione del *fit* di ciascun modello sulle serie storiche analizzate. Dalla Figura 3.7 traspare anche visivamente un buon *fit* dei modelli sui dati relativi alle tre serie storiche: ciò risulta particolarmente vero per il nostro modello di riferimento. Il modello *HAR-rv* presenta infatti anche un R^2 dal valore particolarmente elevato: 0.601 per la serie storica del FTSE-Mib, 0.6019 per il DAX40 e 0.603 per lo STOXX50.

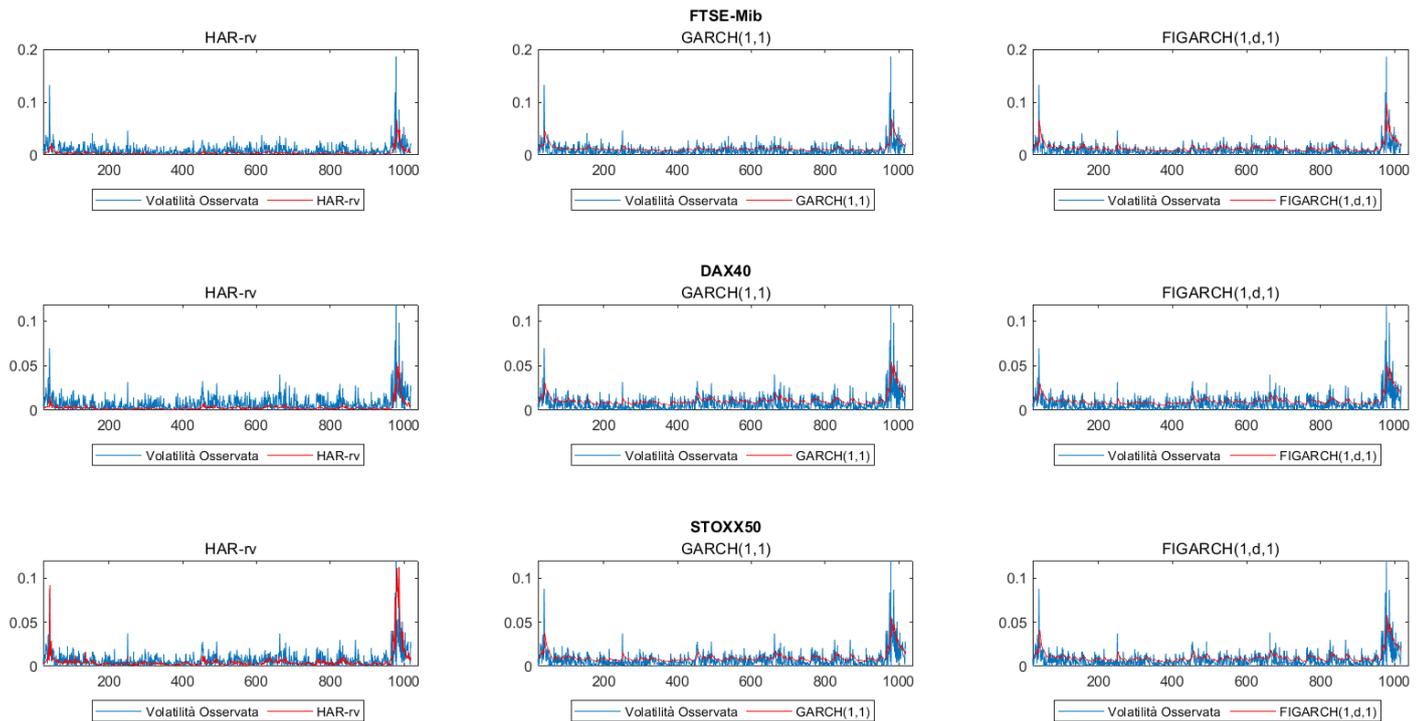


Figura 3.7: confronto della performance *in sample* dei modelli $HAR-rv$, $GARCH(1,1)$ e $FIGARCH(1,d,1)$, per il FTSE-Mib (in alto), il DAX40 (in mezzo) e lo STOXX50 (in basso). La linea blu rappresenta la volatilità storica osservata, calcolata come radice quadrata dei log-rendimenti al quadrato; la linea rossa rappresenta invece il modello stimato.

Procediamo adesso con il *forecast out of sample*: sulla base dei risultati illustrati in questa sezione, verranno evidenziate le capacità previsionali di ciascun modello, comparando le stime ottenute con i valori effettivamente osservati per il *test sample*.

3.3. Previsioni

Come già illustrato in apertura di capitolo, le *multi-step ahead forecast* sono ottenute utilizzando i parametri precedentemente stimati sul *training sample*: si tratta, pertanto, di *forecasts ex-post*. Il modello viene infatti stimato su un campione ristretto, il *training sample*, mentre le previsioni avvengono *out of sample* su un campione segregato, il *test sample*: ciò permette di verificare l'accuratezza delle previsioni tramite il confronto dei valori stimati dai modelli con i dati realmente osservati, relativi al periodo non utilizzato per la stima dei

parametri. Le previsioni vengono nella fattispecie confrontate con una misura di volatilità storica comune ai tre modelli, che ci consente quindi di calcolare le statistiche del *Root Mean Square Error (RMSE)* e del *Mean Absolute Error (MAE)*, finalizzate alla valutazione della performance di ciascuno di essi. Come misura della volatilità si è deciso di utilizzare la *realized volatility* osservata sul campione, che, come visto precedentemente, è basata sul quadrato dei rendimenti (o nel nostro caso dei log-rendimenti): i rendimenti al quadrato rappresentano infatti uno stimatore non distorto della varianza. Per il calcolo della volatilità si è inoltre fatto ricorso ad una finestra mobile (*rolling window*) di $m = 23$ giorni lavorativi: la volatilità al tempo t può perciò essere calcolata utilizzando le m osservazioni che vanno dal tempo $t - m$ al tempo $t - 1$, come mostrato nella seguente equazione:

$$h_t = \frac{1}{m-1} \sqrt{\sum_{i=t-m}^{t-1} r_i^2} \quad [3.2]$$

Al periodo seguente $t + 1$, la volatilità verrà calcolata sulla base dei dati da $t - m + 1$ a t , spostando in avanti di un periodo la finestra temporale del campione: tale approccio è detto “metodo delle medie mobili”. La media mobile non è altro che una media relativa ad un numero fisso di dati che “slittano” nel tempo: lo scorrere del tempo fa sì che il dato più lontano venga sostituito da quello più recente, lasciando immutata la dimensione campionaria. La scelta di una finestra temporale pari a $m = 23$ giorni cerca di ovviare al *trade-off* tra contenuto informativo e reattività alle condizioni più recenti: *ceteris paribus*, la scelta di un numero (m) più elevato, conduce infatti ad una stima della volatilità più stabile e con un maggiore contenuto informativo.

⁴⁹ Tale formulazione può essere ricavata partendo dalla semplice definizione della volatilità, espressa come radice quadrata della varianza. Si ha che:

$$h_t = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=t-m}^{m-1} (r_i - \bar{r}_t)^2}.$$

Se l'intervallo tra due osservazioni adiacenti è sufficientemente piccolo da ipotizzare un rendimento medio nullo, allora la stima della volatilità storica è data dall'equazione [3.2].

	RMSE	MAE
FTSE-Mib		
HAR-rv	0.0086329	0.0058616
GARCH(1,1)	0.010862	0.0091776
FIGARCH(1,d,1)	0.009562	0.0084920
DAX40		
HAR-rv	0.0087480	0.0056919
GARCH(1,1)	0.010438	0.0083773
FIGARCH(1,d,1)	0.010692	0.0083463
STOXX50		
HAR-rv	0.0087052	0.0058045
GARCH(1,1)	0.0092751	0.0070194
FIGARCH(1,d,1)	0.0090751	0.0063012

Tabella 3.4: confronto della performance *out of sample* delle *multi-step ahead forecasts* dei modelli *HAR-rv*, *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*, per il FTSE-Mib (in alto), il DAX40 (in mezzo) e lo STOXX50 (in basso). Le misure di performance utilizzate sono il *Root Mean Square Error (RMSE)* ed il *Mean Absolute Error (MAE)*. Le *multi-step ahead forecasts* sono valutate confrontando la volatilità storica osservata e la volatilità prevista nell'orizzonte multi-periodale.

Allo stesso tempo, però, la stima della volatilità risponderrebbe in modo lento a eventuali variazioni improvvise del fattore di mercato, in quanto alle condizioni più recenti verrebbe attribuito solo un peso marginale. Per questo, generalmente, molte istituzioni (nell'ottica, ad esempio, dei modelli *V.a.R.*) scelgono intervalli temporali relativamente brevi, che non superano i cinquanta giorni.

Le *multi-step ahead forecasts* sono perciò valutate confrontando la volatilità storica osservata e la volatilità prevista nell'orizzonte multi-periodale, sulla base dei tre diversi modelli. *Out of sample*, risulta evidente come il modello *HAR-rv* superi in termini di performance il *GARCH(1,1)* ed il *FIGARCH(1,d,1)*.

I risultati sono riportati in Tabella 3.4. La superiorità del modello *HAR-rv*, che fa uso di dati ad ultra-frequenza, emerge per tutti i tre indici del mercato azionario considerati. Ciò risulta vero tanto per il *RMSE* quanto per il

MAE. I modelli *GARCH* standard sono infatti modelli *short memory*: hanno quindi una memoria troppo breve rispetto all'orizzonte previsionale e quindi convergono troppo rapidamente verso la loro *unconditional mean* per orizzonti previsionali più lunghi. La *long-memory volatility* può essere ottenuta tramite l'utilizzo di operatori di differenza frazionaria, come avviene per il modello *FIGARCH*: tuttavia, questi tipi di modelli (al pari di quelli *short-memory*), non sono in grado di riprodurre il comportamento *multi-scaling* che caratterizza i dati empirici. Tale affermazione è confermata dalla Figura 3.8.

Il modello *HAR-rv*, invece, ha una struttura simile ad un *AR*, ma con la caratteristica di considerare componenti di volatilità su diversi orizzonti temporali, *multi-scaling* appunto. Esso, inoltre, come già accennato nell'introduzione di questo elaborato, risulta in grado di riprodurre la persistenza nella volatilità osservata nelle serie storiche finanziarie, così come gli altri fatti stilizzati passati in rassegna all'inizio di questo capitolo, rimanendo però parsimonioso e semplice da stimare, soprattutto se lo si confronta con un modello *fractionally integrated* come il *FIGARCH* (o l'*ARFIMA*, che qui non abbiamo trattato).

Per valutare la capacità del modello *HAR-rv* di replicare i principali fatti stilizzati dei dati empirici, possiamo simulare la serie storica dei rendimenti per il *test sample* utilizzando le previsioni di volatilità ottenute: una volta simulati tali rendimenti, è semplice constatare se essi siano caratterizzati o meno dai sopracitati *stylized facts*. Consideriamo ancora una volta un processo del tipo $\sigma_t z_t$ per i rendimenti (*demeaning process*), dove il processo delle innovazioni z_t è *iid* con $\mathbb{E}[z_t] = 0$ e $\mathbb{E}[z_t^2] = 1$. Dalla Figura 3.9 appare evidente la capacità del modello di replicare quanto empiricamente osservato per i *financial data*. I log-rendimenti sono “*strictly stationary*” con media pari a zero, come conferma anche il *Dickey-Fuller test*: modellando i log-rendimenti come una *random walk* più un *drift*, il test garantisce la stazionarietà della serie con un *p-value* pari a 0.0001. L'analisi dei log-rendimenti conferma anche la presenza di *clusters* di volatilità. Dal *QQ-plot* si può invece evincere la presenza di “*fat tails*” nella distribuzione dei rendimenti: la serie presenta una curtosi pari a 5.1633, superiore dunque al valore normale (3). Dai due correlogrammi, infine, emerge l'assenza di autocorrelazione nei rendimenti e la sua presenza per il loro quadrato.

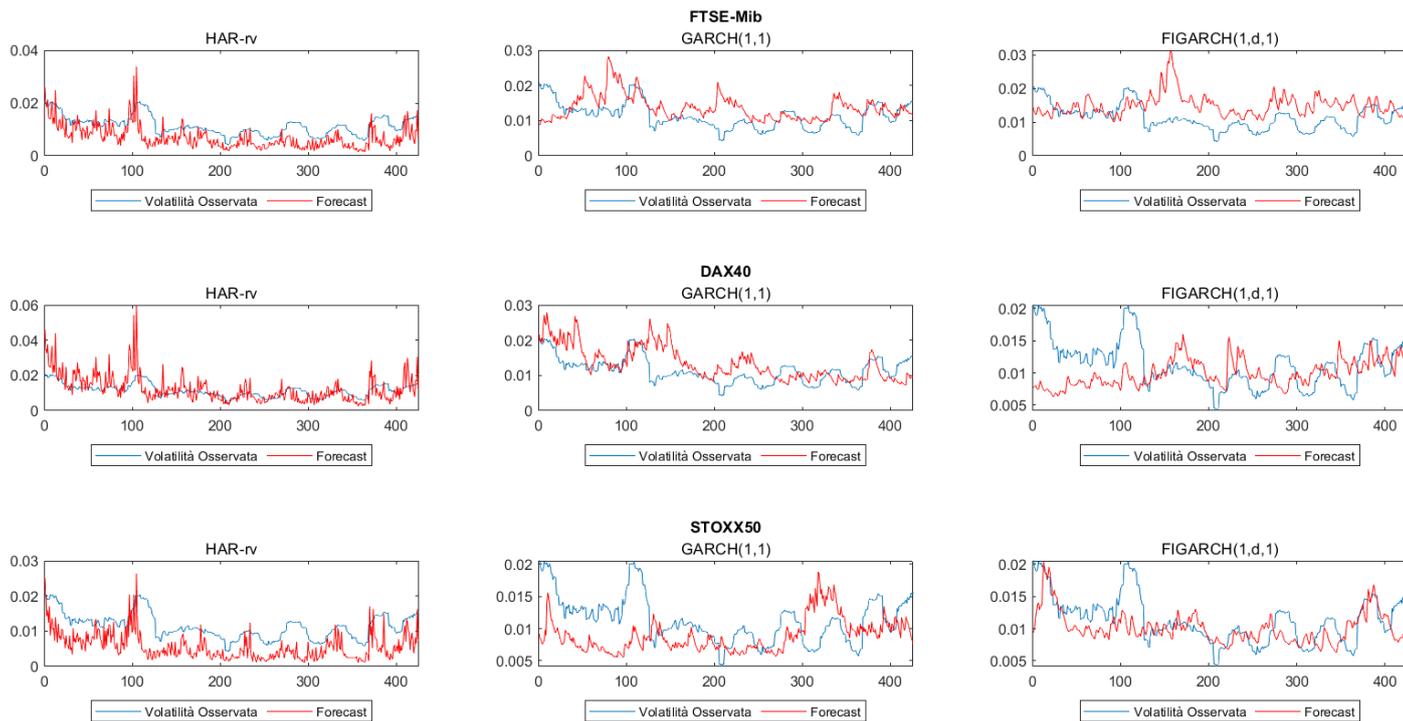


Figura 3.8: confronto della performance *out of sample* delle *multi-step ahead forecasts* dei modelli *HAR-rv*, *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*, per il FTSE-Mib (in alto), il DAX40 (in mezzo) e lo STOXX50 (in basso). Le *multi-step ahead forecasts* sono valutate confrontando la volatilità storica osservata e la volatilità prevista nell'orizzonte multi-periodale.

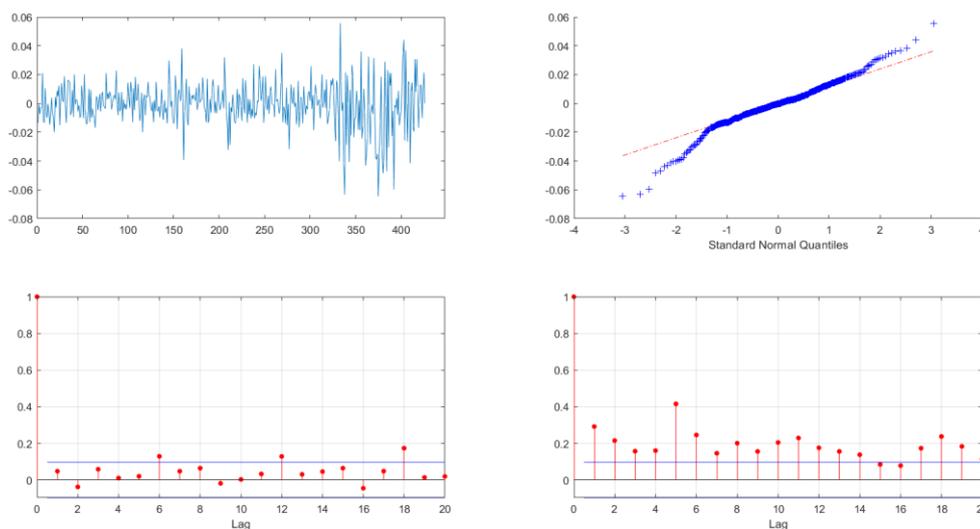


Figura 3.9: analisi dei rendimenti simulati sul DAX40 per il *test sample*. In alto a sinistra: log-rendimenti. In alto a destra: *QQ-plot* del campione di dati vs. distribuzione normale standard. In basso a sinistra: *sample Autocorrelation Function (ACF)* dei log-rendimenti per i primi 20 lags. In basso a destra: *sample Autocorrelation Function (ACF)* dei log-rendimenti al quadrato per i primi 20 lags.

Capitolo 4

4. Simulazione: delta hedging su una “european short call option”

Illustriamo in questo capitolo una semplice strategia di *delta hedging* su una posizione corta in una opzione *call* europea (scritta su un’azione che non paga dividendi), utilizzando per il pricing il modello Black-Scholes-Merton e come misura di volatilità la *realized volatility* stimata tramite il modello *HAR-rv*.

Considerando un orizzonte temporale di venti settimane ($T = 0.3846$ anni), dal 16 giugno 2020 al 10 novembre 2020, sono stati innanzitutto simulati i possibili *patterns* (cento diversi) per un’azione di una generica società quotata sull’MTA, ipotizzando un prezzo iniziale pari a $S_0 = €100$ e utilizzando la volatilità settimanale stimata per il FTSE-Mib sull’intervallo di tempo considerato: ogni *stock path* è stato simulato modellizzando (in tempo discreto) un moto geometrico Browniano. Successivamente, considerando un’opzione *call* con prezzo di esercizio $k = €100$ scritta su 100’000 azioni, un tasso *risk-free* $r_f = 0.005$ e un rendimento per azione $\mu = 0.01$, è stata presa casualmente una simulazione tra quelle il cui prezzo finale terminava “*in the money*”: sulla base di questa, è stato quindi calcolato il prezzo della relativa opzione *call* europea e infine del *delta*, in modo da implementare una strategia di *delta hedging*. Ancora una volta si è fatto uso del software *MatLab*.

4.1. Prezzo dell’azione

Come descritto nel primo capitolo, è possibile utilizzare un processo stocastico in tempo continuo per descrivere la dinamica del prezzo delle azioni: ho fatto pertanto uso di un particolare processo di Wiener generalizzato, noto come processo di $\hat{\text{Ito}}$.⁵⁰

⁵⁰ Cfr. Equazione [1.1].

Un processo di Wiener generalizzato per una variabile x può essere così definito:

$$dx = A dt + B dz \quad [4.1]$$

con A e B costanti.

Il primo termine a secondo membro indica che x ha una variazione attesa per unità di tempo pari a A , definito “tasso di deriva” o “*drift rate*”. Non considerando il secondo termine si ha quindi:

$$dx = A dt \quad [4.2]$$

$$\frac{dx}{dt} = A \quad [4.3]$$

e integrando rispetto al tempo:

$$x = x_0 + A dt. \quad [4.4]$$

Il secondo termine è quello che aggiunge un *noise* al sentiero temporale seguito da x : la quantità di variabilità è pari a B volte un processo di Wiener (z), dove:

$$z = \varepsilon \sqrt{t}. \quad [4.5]$$

Pertanto, $dx \sim N(A dt; B^2 dt)$, dove A è il tasso di deriva e B^2 il “tasso di varianza”:

$$\frac{\text{var}(dx)}{dt} = B^2. \quad [4.6]$$

È ora possibile definire il processo di $\hat{I}to$: come visto nel primo capitolo per un generico asset finanziario, si tratta di un processo di Wiener generalizzato dove A e B sono funzioni della variabile sottostante e del tempo. Un tasso di deriva costante non è infatti appropriato per il prezzo delle azioni e risulta pertanto necessario formulare una nuova ipotesi: ciò che è costante è il tasso di rendimento dell’azione. Definiamo:

- S : prezzo dell’azione;

- μ : rendimento dell'azione.⁵¹

In un intervallo di tempo infinitesimo, assumendo nullo il tasso di varianza, si ha:

$$dS = \mu S dt \quad [4.7]$$

e

$$\frac{dS/S}{dt} = \mu. \quad [4.8]$$

Il prezzo S cresce quindi ad un tasso di rendimento μ costante:

$$S_T = S_0 e^{\mu T}. \quad [4.9]$$

Ovviamente il prezzo dell'azione è soggetto a una certa volatilità: arriviamo dunque alla formulazione del “moto geometrico Browniano”, usato per descrivere la dinamica del prezzo delle azioni:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad [4.10]$$

dove il tasso di variazione istantaneo del prezzo si distribuisce in modo normale

$$\frac{dS}{S} \sim N(\mu S dt; \sigma^2 dt). \quad [52]$$

Un'approssimazione in tempo discreto del moto geometrico Browniano è stata utilizzata per effettuare cento simulazioni del *pattern* dei prezzi dell'azione, ipotizzando un rendimento per azione $\mu = 0.01$ e una volatilità σ *time-varying* rappresentata dalla volatilità settimanale stimata per l'indice FTSE-Mib. Il prezzo iniziale S_0 è ipotizzato pari a €100.

⁵¹ $S\mu$ è pertanto la *deriva*.

⁵² Modello Black-Scholes-Merton.

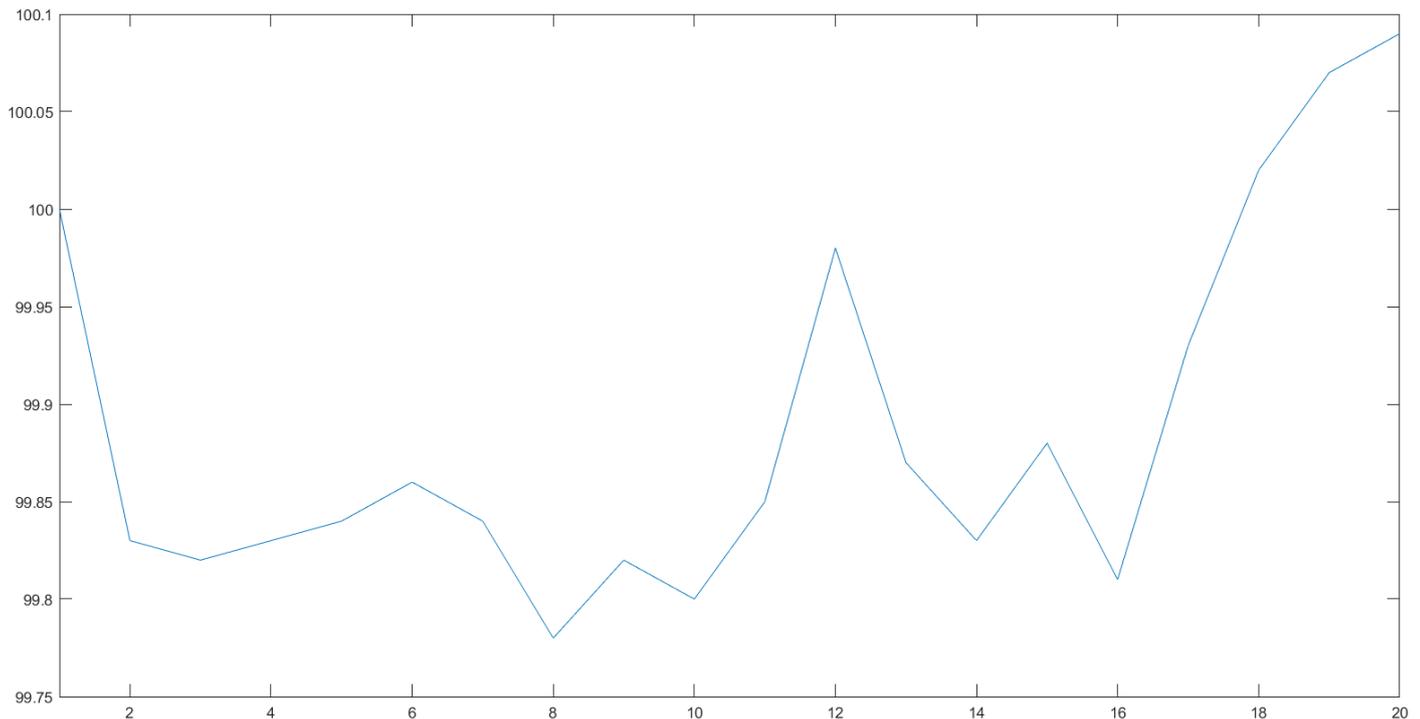


Figura 4.1: *pattern* dei prezzi dell’azione simulato per un intervallo di tempo pari a venti settimane (dal 16 giugno 2020 al 10 novembre 2020), ipotizzando un prezzo iniziale $S_0 = \text{€}100$ e un rendimento costante $\mu = 0.01$. La volatilità utilizzata è la *realized volatility* settimanale stimata sul FTSE-Mib per il periodo in esame facendo uso del modello *HAR-rv*.

4.2. Prezzo dell’opzione call europea e delta hedging

Tutti i *traders* utilizzano delle strategie di copertura, alcune più sofisticate di altre. Tra queste, molte richiedono la stima delle “lettere greche” o semplicemente “greche”: esse hanno il compito di quantificare i diversi aspetti del rischio presente in una posizione su opzioni.

Per poter calcolare le greche è necessario utilizzare un modello di valutazione: nel caso delle opzioni europee, che ho qui scelto di rappresentare, i *traders* utilizzano in genere il modello Black-Scholes-Merton. Per le opzioni americane la scelta ricade invece sul modello Cox-Ross-Rubinstein, noto come modello degli “alberi binomiali”. Nel calcolo delle greche, la stima della volatilità è pari alla *implied volatility*, cioè la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni: se ciò è verificato, il valore dell’opzione è una funzione esatta del prezzo dell’azione, della volatilità, del tasso di interesse e del *dividend yield*. Delle greche prendiamo qui in

considerazione il solo *delta*: esso è definito come la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \quad [4.11]$$

dove c indica il prezzo della *call*⁵³ e S il prezzo dell'azione sottostante.

Quando si utilizza il *delta hedging*, il portafoglio necessita di un rebalancing periodico: in questo caso lo schema di copertura richiede un aggiustamento frequente e pertanto si parla di schemi di copertura “dinamici”. Il delta è connesso direttamente con l'analisi di Black-Scholes-Merton: essi hanno dimostrato che è possibile formare un portafoglio privo di rischio composto solo da un'opzione e dall'azione sottostante, del tipo:

$$\begin{aligned} & -1: \textit{opzione} \\ & +\Delta: \textit{azioni} \end{aligned}$$

Black, Scholes e Merton hanno pertanto prezzato le opzioni formando un portafoglio *delta neutral*, sostenendo che il suo tasso di rendimento istantaneo deve coincidere con il *risk-free rate*.

Nella nostra simulazione, consideriamo un'istituzione finanziaria che ha, in data 16 giugno 2020, venduto una *call* europea, con prezzo di esercizio $k = \text{€}100$ e scadenza a venti settimane ($T = 0.3846$ anni), scritta su 100'000 azioni di un titolo che non paga dividendi e quotato sull'MTA. Il prezzo iniziale è $S_0 = \text{€}100$, il tasso *risk-free* è $r_f = 0.005$, la volatilità è quella stimata per il FTSE-Mib nel periodo di riferimento e il rendimento atteso per azione è $\mu = 0.01$.

⁵³ Nel modello Black-Scholes-Merton il prezzo di una *call* è pari a:

$$c = S_0 N(d_1) - k e^{-rT} N(d_2)$$

dove $N(x)$ indica la *CDF* di una variabile aleatoria normale con media nulla e varianza unitaria, con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Azioni acquistate	Costo delle azioni acquistate (migliaia di euro)	Costo cumulato, interessi inclusi (migliaia di euro)	Costo per interessi (migliaia di euro)
0	100.00	0.596	59600	5960.00	5960.00	1.15
1	99.83	0.512	(8400)	(838.57)	5122.57	0.99
2	99.82	0.488	(2400)	(239.57)	4883.99	0.94
3	99.83	0.494	600	59.90	4944.83	0.95
4	99.84	0.488	(600)	(59.91)	4885.87	0.94
5	99.83	0.481	(700)	(69.88)	4816.93	0.93
6	99.82	0.371	(11000)	(1098.02)	3719.84	0.72
7	99.78	0.365	(600)	(59.87)	3660.69	0.70
8	99.82	0.378	2300	229.57	3890.96	0.75
9	99.80	0.324	(5400)	(538.92)	3352.79	0.64
10	99.85	0.370	4600	459.31	3812.74	0.73
11	99.98	0.612	24200	2419.52	6232.99	1.20
12	99.87	0.421	(19100)	(1907.52)	4326.67	0.83
13	99.83	0.232	(18900)	(1886.79)	2440.71	0.47
14	99.88	0.341	10900	1088.69	3529.87	0.68
15	99.81	0.129	(21200)	(2115.97)	1414.58	0.27
16	99.93	0.391	26200	2615.55	4030.40	0.78
17	100.02	0.784	39300	3930.79	7961.97	1.53
18	100.07	0.911	12700	1270.89	9234.39	1.78
19	100.09	0.889	(2200)	(220.20)	9105.97	1.73
20	100.11	1.000	11100	1111.22	10218.92	1.97

Tabella 4.1: simulazione di *delta hedging* (la *call* termina *Out of The Money*). Alla fine della ventesima settimana la posizione è interamente coperta in quanto è evidente che l'opzione verrà esercitata : il delta tende perciò a 1. L'istituzione finanziaria riceve €10'000'000 in cambio delle azioni, cosicché il costo della vendita e della copertura della *call* risulta pari a €218'920.

Nella Tabella 4.1 è riportata la simulazione della strategia di *delta hedging*.

Il *delta hedging* permette di creare una *short call* sintetica, la quale neutralizza la posizione corta che l'istituzione finanziaria ha assunto con la vendita dell'opzione. La strategia comporta, in sintesi, la vendita del titolo non appena il prezzo scende e l'acquisto non appena sale (“compra alto, vendi basso”). Il motivo per il quale il costo della copertura varia è che il *rebalancing* avviene solo una volta a settimana: all'aumentare della frequenza del ribilanciamento, l'incertezza circa il costo della copertura si ridurrebbe. La simulazione è

ovviamente idealizzata in quanto basata sull'ipotesi che i costi di transazione siano nulli e che la volatilità coincida con quella stimata dal modello, diversa da quella implicita nel costo delle opzioni.

Considerazioni conclusive

L'obiettivo preposto in questo elaborato era quello di individuare un modello per le previsioni della volatilità che fosse in grado di coglierne il comportamento *long-memory*: il modello *HAR-rv*, facendo uso di dati ad ultra-frequenza, sembra essere il candidato ideale, nonostante non appartenga formalmente alla categoria dei processi *long-memory* (come il *FIGARCH*, ad esempio). Si tratta di un modello autoregressivo per la *realized volatility*, il cui tratto distintivo è quello di considerare le diverse componenti di volatilità su periodi di tempo via via più ampi: l'*Heterogeneous Autoregressive model* si concentra dunque sull'eterogeneità che nasce dalla differenza negli orizzonti temporali, attribuibile alla diversa frequenza di negoziazione con la quale i *traders* operano sui mercati finanziari. Si è evidenziato come, a dispetto della semplicità della sua struttura e della stima dei suoi parametri, tale modello garantisca buone *performances* in termini previsionali: basandoci sui risultati (in termini di *RMSE* e *MAE*) delle *out of sample forecasts* per le tre serie storiche della *realized volatility* per il FTSE-Mib, il DAX40 e lo STOXX50, possiamo infatti affermare che il “*cascade model*” di Corsi superi, in termini di prestazioni, sia un modello standard come il *GARCH(1,1)* che i modelli *long-memory* quali il *FIGARCH(1,d,1)*. Abbiamo inoltre sottolineato come tale modello fosse in grado di riprodurre non solo le dinamiche delle volatilità, ma anche dei rendimenti, con i relativi fatti stilizzati che li caratterizzano. È bene infine notare (come accennato nel Capitolo 2) che proprio grazie all'estrema semplicità della sua struttura, tale modello può essere agevolmente ampliato: nuove variabili significative potrebbero essere ad esempio incluse come regressori aggiuntivi; o in alternativa alcune misure di *jumps*: Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) suggeriscono a tal proposito di scomporre la varianza totale in una “*continuous part*” (*CHAR*), scritta in termini di *Bipower Variation*, e in una “*jump part*” (*HAR-J*). Inoltre, per via della sua struttura autoregressiva, lo stesso Corsi fornisce lo spunto per estendere il suo modello al caso multivariato, sviluppando un *Vector-HAR model*.

Bibliografia

- Aït-Sahalia, Y. & Jacod, J., 2009. Testing for Jumps in a Discretely Observed Process. *The Annals of Statistics*, Febbraio, 37(1), pp. 184-222.
- Aït-Sahalia, Y. & Jacod, J., 2014. *High-Frequency Financial Econometrics*. 1 a cura di Princeton(New Jersey): Princeton University Press.
- Baillie, R. T., Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O., 1996. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Settembre, 74(1), pp. 3-30.
- Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N., 2005. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. *Journal of Financial Econometrics*, Agosto, 4(1), pp. 1-30.
- Bobeică, G. & Bojeșteanu, E., 2008. Long Memory in Volatility. An Investigation on the Central and Eastern European Exchange Rates. *European Research Studies*, 11(4), pp. 7-18.
- Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Aprile, 31(3), pp. 307-327.
- Bollerslev, T., Patton, A. J. & Rogier, Q., 2016. Exploiting the errors: A simple approach for improved volatility forecasting. *Journal of Econometrics*, Maggio, 192(1), pp. 1-18.
- Christensen, K., Oomen, R. C. & Podolskij, M., 2014. Fact or friction: Jumps at ultra high frequency. *Journal of Financial Economics*, Dicembre, 114(3), pp. 576-599.
- Corsi, F., 2009. A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, Febbraio, 7(2), pp. 174-196.
- Delbaen, F. & Schachermayer, W., 1994. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, Settembre, 300(3), pp. 463-520.

- Engle, R. F., 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Luglio, 50(4), pp. 987-1007.
- Frittelli, M., 2007. No Arbitrage and Preferences. In: *Economia matematica e econometria : problemi e prospettive*. Milano: LED, pp. 181-201.
- Hansen, P. R. & Lunde, A., 2006. Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Journal of Business & Economic Statistics*, Aprile, 24(2), pp. 127-161.
- Hautsch, N., 2012. *Econometrics of Financial High-Frequency Data*. II a cura di Berlino: Springer.
- Lee, S. & Mykland, P., 2008. Jumps in Financial Markets: A New Nonparametric Test and Jump Dynamics. *The Review of Financial Studies*, Novembre, 21(6), p. 2535–2563.
- Lynch, P. & Zumbach, G., 2003. Market heterogeneities and the causal structure of volatility. 3(4), pp. 320-331.
- Resti, A. & Sironi, A., 2021. *Rischio e valore nelle banche. Misura, regolamentazione, gestione*. 2 a cura di s.l.:Egea.
- Romero Moreno, A., 2016. *Microstructure Noise: The Use of Two Scales Realized Volatility for the Noisy High-Frequency Data and its Implications for Market Efficiency and Financial Forecasting*. [Online] Available at: <https://digitalcommons.usu.edu/gradreports>
- Santos, M., 2022. *MATLAB Central File Exchange*. [Online] Available at: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/54952-delta-hedging>
- Tayefi, M. & Ramanathan, T. V., 2012. An Overview of FIGARCH and Related. *Austrian Journal of Statistics*, 41(3), pp. 175-196.
- Veliyev, B., 2019. *Advanced Financial Econometrics: Drift Burst Hypothesis*. Aarhus: Aarhus University.

Veliyev, B., 2019. *Advanced Financial Econometrics: Jumps and Realized Measures*. Aarhus: Aarhus University.

Veliyev, B., 2019. *Advanced Financial Econometrics: Volatility Forecasting with Realized Measures*. Aarhus: Aarhus University.

Veliyev, B., 2019. *Advanced Financial Econometrics: Introduction to Realized Measures*. Aarhus: Aarhus University.

Veliyev, B., 2019. *Advanced Financial Econometrics: Microstructure Noise and Realized Measures*. Aarhus: Aarhus University.

Riassunto

Gli ultimi vent'anni sono stati caratterizzati da un forte sviluppo della tecnologia e della potenza di calcolo delle macchine: ciò ci ha permesso di accedere con maggiore facilità ai dati *high frequency*. Mentre fino alla fine del secolo scorso sono stati impiegati i modelli di tipo *GARCH* per la stima della volatilità tramite utilizzo di dati giornalieri, con il nuovo millennio si sono sviluppati nuovi metodi che usano dati infragiornalieri. I modelli econometrici standard sono messi a dura prova da quelli che possiamo definire “fatti stilizzati” delle serie finanziarie (autocorrelazione dei rendimenti al quadrato o del loro valore assoluto, distribuzione leptocurtica dei rendimenti, fenomeni del *volatility clustering* e del *leverage effect*, ecc.): poiché i modelli *GARCH* standard e i modelli di volatilità stocastica *short-memory* non sono in grado di replicare tali caratteristiche, o perlomeno non tutte, c'è stato un crescente interesse per i processi *long-memory*. La *long-memory volatility* viene solitamente ottenuta tramite l'utilizzo di operatori di differenza frazionaria come nei modelli *FIGARCH* o *ARFIMA*: tuttavia, seppure l'integrazione frazionaria consenta di ottenere la *long-memory*, si tratta comunque di un espediente puramente matematico al quale manca una chiara spiegazione economica. Inoltre, questi tipi di modelli non sono in grado di riprodurre il comportamento *multi-scaling* trovato nei dati empirici. Il modello su cui ho voluto incentrare la trattazione, l'*Heterogeneous Autoregressive model of realized volatility (HAR-rv)* di Corsi, cerca di ovviare a tali problemi: si tratta di un “*simple component model*” per la *conditional volatility*: Corsi definisce tale modello “a cascata”, in quanto presenta diverse componenti di volatilità. Ciò che si cerca di evidenziare nel testo, è la capacità di tale modello di riprodurre la persistenza nella volatilità osservata nei dati empirici, così come altri fatti stilizzati elencati sopra: a differenza degli altri modelli presentati, però, il modello *HAR-rv* risulta parsimonioso e semplice da stimare. Si tratta infatti di un modello di tipo “autoregressivo” (*AR*) per la *realized volatility (rv)*, con la caratteristica di considerare componenti di volatilità su diversi orizzonti temporali (*multi-scaling*): pertanto, la stima dei parametri avviene tramite l'utilizzo del metodo dei “minimi quadrati”, diverso (e più agevole) dal metodo della “massima verosimiglianza” applicato invece per il *GARCH(1,1)* e per il *FIGARCH(1,d,1)*. Nel corso della trattazione ho passato in rassegna questi tre modelli, in quanto utilizzabili nel *forecast* della volatilità:

nell'ambito della finanza quantitativa, infatti, la volatilità ricopre da sempre un ruolo di rilievo ed è perciò fondamentale poterla stimare per prendere ad esempio decisioni di investimento o per effettuare transazioni in particolari titoli o settori del mercato, utilizzandola come misura del rischio. Anche le autorità responsabili di politica monetaria guardano alla volatilità del mercato prima di attuare politiche. Ho quindi evidenziato, di ogni modello, limiti e pregi, soffermandomi nella fattispecie sui vantaggi dell'utilizzo di dati *high frequency* nella loro implementazione, come accade proprio con il “*cascade model*” di Corsi (*HAR-rv*).

L'elaborato è suddiviso in quattro capitoli: vediamoli più nel dettaglio.

Nel primo capitolo, vengono innanzitutto presentate in maniera generale le *realized measures*: si tratta di valide stime non parametriche ad alta frequenza della variazione del prezzo di un'attività durante i periodi in cui l'attività viene scambiata su un indice, applicabili in numerosi campi: *option pricing*, *risk management*, *portfolio allocation*, *jump testing*, e in generale nel *volatility forecasting*, tema centrale di questo elaborato. Si introduce, quindi, il nostro modello di riferimento per il prezzo efficiente, la nostra variabile target e i suoi relativi stimatori, per poi infine presentare sommariamente le varianti del modello che tengono esplicitamente in considerazione i *market microstructure noises* e gli eventuali *jumps*. Come asserito da Delbaen & Schachermayer (1994), sia $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un modello a tempo continuo per un asset finanziario senza costi di transazione: se vi è assenza di arbitraggio sul mercato, allora $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ deve essere una “semimartingala”. Senza entrare nel dettaglio della definizione di semimartingale, viene nel testo trattata una loro specifica sottoclasse, nota con il nome di “processi di $\hat{I}to$ ”: essi rappresentano dunque il nostro modello di riferimento per il prezzo efficiente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Si è deciso di lavorare in particolare con il logaritmo naturale dei prezzi: se $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$ rappresenta il prezzo di un asset, $X_t = \log P_t$ rappresenta il log-prezzo. È possibile affermare che gli incrementi di X_t rappresentano i rendimenti: formalmente si assume che il log-prezzo X_t sia un processo di $\hat{I}to$ in $[0, T]$. È però importante capire quale sia effettivamente l'oggetto della nostra analisi: siamo interessati, nella fattispecie, a stimare la

volatilità V usando dati discreti su X nell'intervallo $[0, T]$. Un noto esempio per V è la cosiddetta *Integrated Volatility* (σ_t):

$$\sigma_t = IV_t^{1/2}$$

dove IV_t indica la *Integrated Variance*, definita come:

$$IV_t = \int_0^1 \sigma_t^2 dt.$$

Tra i possibili stimatori che possono essere utilizzati nel caso (poco realistico) in cui i dati ad alta frequenza non siano contaminati da *market noises* si è qui deciso di fare riferimento a uno in particolare, la *Realized Variance*, così definita:

$$RV_n = \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right)^2.$$

Nello specifico, si è fatto uso della sua radice quadrata, cioè della cosiddetta *Realized Volatility* (rv_n): tale stimatore riveste un ruolo di particolare rilievo nella trattazione, come risulterà evidente nel terzo capitolo. L'obiettivo sarà quindi stimare IV (e quindi V) usando osservazioni discrete $X_{t_i^n}$, $0 \leq i \leq n$: per semplicità considereremo il caso in cui le osservazioni sono equidistanti ($t_i^n = \frac{i}{n}$, cioè $n + 1$ dati ed n log-rendimenti). Ci sono due importanti risultati che è bene citare in relazione alla scelta della RV come strumento privilegiato:

- la *Realized Variance* è uno stimatore consistente della *Integrated Variance* ($RV_n \xrightarrow{\mathbb{P}} IV$). Ciò è facilmente dimostrabile in un modello semplice, con $\mu = 0$ e $\sigma_t = \sigma$, utilizzando la “Legge dei Grandi Numeri” (LGN);
- è valido il *Central Limit Theorem*: sotto condizioni sufficientemente generali circa $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ e $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq 1}$, si ha infatti che

$$\sqrt{n}(RV_n - IV) \xrightarrow{d} N(0, 2IQ).$$

dove $IQ = \int_0^1 \sigma_t^4 dt$.

Ricapitolando: il nostro modello è quindi rappresentato da un processo di $\hat{I}to$ mentre la nostra variabile target è la *Integrated Variance*. Il nostro stimatore di riferimento è invece la *Realized Variance*. Non è però semplice implementare la *RV* con dati empirici, proprio a causa dell'ultra frequenza alla quale tali dati sono disponibili: a volte si possono ottenere a frequenze di secondi, a volte a frequenze di millisecondi. Ma la *RV* diverge se vengono usati tutti i dati (cioè a frequenze elevatissime). I dati ad ultra-frequenza sono infatti contaminati dai *market microstructure noises* (un esempio può essere il *bid-ask spread*) ed è perciò necessario ricorrere a degli *escamotage* che ci permettono di ovviare al problema. Una prima soluzione è quella di utilizzare la tecnica dello *sparse sampling*, utilizzata nell'analisi empirica riportata nel Capitolo 3, che consiste nello scartare molti dati e usarne solo alcuni, ogni x minuti: la scelta maggiormente diffusa è stata quella di porre $x = 5$ minuti. L'altra soluzione consiste invece nel modellare esplicitamente il noise tramite alcuni *noise robust estimators*, i quali fanno uso di tutti i dati a disposizione: nella trattazione viene presentato in particolare uno stimatore noto come "*pre-averaging estimator*", molto usato nella pratica. Il *pre-averaging estimator* risulta conveniente da usare a livello teorico e garantisce inoltre ottime performance a livello empirico. L'idea alla base di questo stimatore è quella di minimizzare l'effetto del *noise* ripartendolo su un certo blocco di dati. In relazione alla presenza di tali *noises* è opportuno modificare il modello di riferimento: il processo dei prezzi osservati diventa pertanto:

$$Y_t = X_t + U_t, \quad \forall t \geq 0$$

dove X_t è sempre un processo di $\hat{I}to$ rappresentativo del log-prezzo efficiente, mentre U_t rappresenta il *market microstructure noise*.

Come detto, è poi stato tenuto in considerazione il caso in cui siano presenti dei *jumps* i quali hanno una rilevanza non indifferente a causa delle possibili e molteplici ripercussioni sulle applicazioni delle *realized measures*: la loro presenza (nei prezzi e/o nei modelli) può infatti avere diverse implicazioni relativamente al *pricing* delle opzioni o in un'ottica di *risk management*. I *jumps* non sono altro che una variazione repentina

del valore della variabile in esame, in aumento o in diminuzione. Essi non sono in genere equispaziati tra loro: le dimensioni variano molto e possono raggiungere livelli molto superiori (o inferiori) alla media della serie storica. Un'altra loro caratteristica è la brevissima durata: una volta che gli shock economici che l'hanno causata si sono dissolti e sono stati sostituiti da un nuovo stato di equilibrio, i prezzi tornano ai loro precedenti valori, grazie a un processo di “ritorno verso la media” (*mean reversion*). È possibile modificare il nostro modello di riferimento per i log-prezzi efficienti (X_t), per tenere esplicitamente in considerazione tali *jumps*. Si ha:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} c_i$$

dove N_t rappresenta (conta) il numero complessivo di *jumps* fino al tempo t ed è un “processo di Poisson” con $\lambda > 0$, c_i rappresenta l'ampiezza del *jump* i -esimo e μ_t e σ_t rappresentano, come in precedenza, il *drift* e la *volatility*, rispettivamente. Pertanto, X_t è il nostro processo di Itô con una componente extra rappresentativa dei *jumps*. Possiamo scrivere che $X_t \in BSMJ$ (*Brownian Semi-Martingale plus Jumps*). Alla fine del primo capitolo vengono poi presentati alcuni *jump tests*, che verificano la presenza di *jumps* nelle serie finanziarie ed il test per calcolare l'esatta collocazione dei *jumps*, presentato da Lee & Mykland.

Il secondo capitolo passa invece in rassegna i tre processi utilizzati per modellare la volatilità, i quali verranno poi impiegati (nel Capitolo 3) ai fini del *volatility forecasting*: si tratta, nell'ordine, dei modelli *HAR-rv*, *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*. Per ognuno di essi, ad una generale descrizione, fa seguito un approfondimento dettagliato, che ha l'obiettivo di presentare il modello da un punto di vista matematico, evidenziandone la struttura e le eventuali derivazioni da modelli preesistenti.

- **HAR-rv**

Si tratta di un modello additivo, formato da diverse componenti di volatilità definite su periodi di tempo via via più ampi. Non è altro, quindi, che un particolare modello “autoregressivo” (*AR*) per la *realized volatility* (*rv*), con la caratteristica di considerare le diverse componenti di volatilità su diversi orizzonti temporali e per

questo definito *Heterogeneous Autoregressive model of realized volatility (HAR-rv)*. Il modello di Corsi si concentra sull'eterogeneità che nasce dalla differenza negli orizzonti temporali. Generalmente, all'interno dei mercati troviamo operatori con caratteristiche molto diverse per quanto riguarda le frequenze di negoziazione: l'idea principale è che gli operatori, reagiscono e causano diversi tipi di componenti di volatilità a seconda dell'orizzonte temporale di riferimento. Per semplicità, è possibile identificare tre componenti principali della volatilità: i trader a breve termine con frequenza di trading giornaliera, gli investitori a medio termine che in genere ribilanciano le loro posizioni settimanalmente e gli agenti a lungo termine con un orizzonte di riferimento di un mese. Complessivamente, ciò che si osserva è un susseguirsi di componenti di volatilità, che vanno dalle frequenze più basse a quelle più alte: da un lato, i traders a breve termine reagiscono ai cambiamenti nella volatilità a lungo termine rivedendo il loro comportamento e causando quindi dei *clusters* di volatilità a breve termine; dall'altro, la volatilità a breve termine non sortisce alcun effetto sulle strategie di trading degli operatori con un orizzonte temporale più lungo: per gli operatori a breve termine il livello di volatilità a lungo termine conta perché influenza la dimensione futura prevista per i/le profitti/perdite. Il modello “a cascata” di Corsi è così definito:

$$rv_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)}rv_t^{(d)} + \beta^{(w)}rv_t^{(w)} + \beta^{(m)}rv_t^{(m)} + \omega_{t+1d}$$

dove $rv_t^{(w)}$ rappresenta la *realized Volatility* settimanale e $rv_t^{(m)}$ quella mensile e sono così definite:

- $rv_t^{(w)} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 rv_{t-i}$;
- $rv_t^{(m)} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} rv_{t-i}$.

A causa della “disuguaglianza di Jensen”, le volatilità aggregate su intervalli di tempo più lunghi, come qui definite, non possono essere interpretate esattamente come le *realized volatilities* relative al medesimo orizzonte temporale: la differenza è comunque immateriale nelle applicazioni empiriche e questa definizione garantisce una più semplice interpretazione del modello *Har-rv*.

Si nota dunque la struttura tipica di un modello autoregressivo semplice per le *realized volatilities* considerate su tre diversi orizzonti temporali.

Grazie alla sua semplicità, il modello proposto può essere facilmente esteso in varie direzioni. Esso è per semplicità presentato in termini di *Realized Volatility*, ma modelli analoghi potrebbero essere costruiti per la varianza o per la sua trasformazione logaritmica. Sarebbe possibile, inoltre, inserire altre componenti: ad esempio, potrebbero essere incluse nuove variabili significative come regressori aggiuntivi oppure diverse misure di *jumps*: Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) propongono di scomporre la varianza totale in una “*continuous part*” (*CHAR*), scritta in termini di *BV*, e in una “*jump part*” (*HAR-J*): mentre quest’ultima è generalmente imprevedibile, la parte continua è molto persistente.

- ***GARCH(1,1)***

Il *GARCH(1,1)* è senz’altro uno dei modelli più noti in letteratura. Prima dell’avvento della *High Frequency Econometrics*, i modelli di tipo *GARCH* sono stati impiegati per la stima della volatilità tramite utilizzo di dati giornalieri e ancora oggi trovano largo impiego, soprattutto nel campo del *risk management*. Come sappiamo, la volatilità subisce variazioni significative nel corso del tempo: tale fenomeno è noto in letteratura con il termine *volatility clustering* e fa riferimento al fatto che, sovente, si possono osservare dei “raggruppamenti” di volatilità per i fattori di mercato, che possono persistere per un periodo di tempo prolungato. Questo fenomeno è stato per la prima volta osservato da Mandelbrot. Esso viene esplicitamente affrontato dai modelli *GARCH* (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*), che sono appunto una “generalizzazione” dei modelli *ARCH*. “Eteroschedasticità” significa varianza che muta nel tempo, e si contrappone all’ipotesi di varianza costante. È una caratteristica presente in alcune variabili casuali, in particolare nelle serie storiche di natura finanziaria, nelle quali alcuni gruppi o sottoinsiemi di variabili casuali mostrano una varianza diversa dalle altre. “Condizionale” indica che le previsioni ottenute sono basate sulle informazioni disponibili nel periodo precedente: includendo gli *shocks* passati, la volatilità condizionale permette di catturare la persistenza degli stessi, inglobando in tal modo gli effetti della volatilità passata sull’incertezza degli eventi futuri. Quando l’eteroschedasticità è serialmente correlata, ovvero condizionata a periodi di elevata o modesta varianza, la serie storica viene definita “ad eteroschedasticità condizionata”. “Autoregressivo” fa invece riferimento alla modalità con la quale tale *Conditional Heteroskedasticity* viene

modellata: si ha in questo caso una regressione della variabile “su sé stessa”. “Generalizzato” si riferisce infine, come specificato poc’anzi, ad un particolare modello sviluppato da Tim Bollerslev nel 1986, che rappresentava una generalizzazione del modello *ARCH* di Engle. Rispetto a quest’ultimo, il modello generalizzato di Bollerslev ha raggiunto una maggiore fama grazie alla sua capacità di adattarsi in maniera appropriata a variabili finanziarie di diverso tipo. I modelli *GARCH* sono pertanto modelli che ci permettono di prevedere la varianza futura tramite una regressione sui valori passati della varianza stessa: la stima che si ottiene cambia quindi nel tempo (*time-varying volatility*).

Come anticipato prima, le applicazioni del modello *GARCH* sono generalmente basati sulla versione *GARCH(1,1)*, la più nota in letteratura: essa considera un unico errore di previsione e il valore della varianza nel periodo precedente. Analiticamente:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

dove α_1 misura l’intensità dell’impatto dello *shock* precedente e β_1 misura l’intensità dell’effetto degli *shocks* passati sulla *conditional variance* (persistenza). È opportuno qui specificare che, a differenza dei modelli *ARCH* (e pertanto anche del modello *HAR* precedentemente illustrato) stimati tramite il metodo dei “minimi quadrati ordinari” (*Ordinary Least Squares, OLS*), i parametri del *GARCH* sono stimati tramite il metodo della “verosimiglianza” (*likelihood*), o in maniera equivalente della “log-verosimiglianza” (*log-likelihood*). Scelta la distribuzione Normale per il processo delle innovazioni, dunque $z_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$, avremo:

$$l_t(\theta) = \log(L(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots; \theta)) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}$$

dove $\theta' \equiv (\omega, \alpha_1, \beta_1)$.

Riassumendo, il modello *GARCH(1,1)* presenta alcuni pregi notevoli: evidenzia l’esistenza di una “correlazione seriale”, esplicitandola tramite un modello autoregressivo; assegna importanza alle informazioni incorporate negli errori previsionali; consente di cogliere la “leptocurtosi” (distribuzione “*fat-tailed*”) presente nei dati empirici. D’altro canto, è bene citarne anche i limiti: esso conserva innanzitutto l’ipotesi di

normalità, seppur relativa ai soli errori previsionali; in secondo luogo, considera l'impatto dello *shock* di mercato sulla previsione della *conditional variance* come indipendente dal suo segno: gli errori sono infatti elevati al quadrato. Non viene pertanto colto il fenomeno noto come *leverage effect*, per cui la volatilità tenderebbe ad aumentare in seguito ad un crollo del mercato, mentre rimarrebbe quasi invariata in seguito ad un rialzo dei corsi azionari.

Con l'obiettivo di superare alcuni dei limiti riscontrati nel modello *GARCH*, sono state negli anni proposte alcune ulteriori rivisitazioni: le più note sono senz'altro l'*Exponential GARCH (EGARCH)*, l'*Asymmetric GARCH (AGARCH)* e l'*Integrated GARCH (IGARCH)*, le uniche concretamente utilizzate ai fini di *risk management*. Mentre l'*EGARCH* e l'*AGARCH* non sono state oggetto di approfondimento in questo elaborato, l'*IGARCH* viene invece presentato brevemente in quanto rappresenta il punto di partenza per lo sviluppo dell'ultimo modello usato ai fini del *volatility forecasting* nel prossimo capitolo, il *FIGARCH*.

- *FIGARCH(1,d,1)*

Se il polinomio *AR* della rappresentazione *GARCH* ha una radice unitaria, si ottiene un modello *GARCH* "Integrato" (*IGARCH*). Introdotto per la prima volta da Engle e Bollerslev (1986), una caratteristica fondamentale di questo modello è che l'impatto degli *shock* al quadrato passati è persistente e il prezzo dei titoli può mostrare un'estrema dipendenza dalle condizioni iniziali. Diversi studi segnalano la presenza di apparente lunga memoria nelle autocorrelazioni dei rendimenti al quadrato o assoluti di varie attività finanziarie. Spinti da queste osservazioni, Baillie et al. (1996) introdussero il processo *Fractionally Integrated GARCH*, noto come *FIGARCH*.

Abbiamo in precedenza sottolineato come la persistenza osservata nell'autocorrelazione dei rendimenti al quadrato sia tra i più noti fatti stilizzati delle serie finanziarie: la *long-memory* del modello *FIGARCH* gli permette, dunque, di essere un candidato migliore rispetto ad altri modelli *Conditional Heteroskedastic* per modellare la volatilità. L'obiettivo principale nell'introduzione del modello *FIGARCH* era quello di sviluppare una classe di processi per la varianza condizionale, in grado di chiarire ed esporre le dipendenze temporali

osservate nella volatilità che caratterizza i mercati finanziari: andando più nel dettaglio, il modello *FIGARCH* consente solo un lento (iperbolico) tasso di decadimento per le innovazioni al quadrato (o del loro valore assoluto) ritardate nella funzione di varianza condizionale. Il vantaggio di questo modello è che esso può “accogliere” la dipendenza temporale della varianza e una distribuzione incondizionata leptocurtica per i rendimenti, con un comportamento *long-memory* per le varianze condizionali. In maniera simile a quanto accade per i modelli *ARIMA*, una caratteristica chiave dei modelli *IGARCH* è che l’impatto degli *shocks* passati al quadrato è persistente. È però vero che, nella maggior parte delle situazioni empiriche, il processo di volatilità è risultato essere *mean reverting*: il modello *IGARCH* sembra perciò essere troppo restrittivo proprio a causa della persistenza infinita degli *shocks* di volatilità. Scriviamo il processo *IGARCH* nel modo seguente:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t$$

I processi di tipo *FIGARCH* possono essere ottenuti sostituendo il *first difference operator* $(1 - L)$ nella precedente equazione con *fractionally differencing operator* $(1 - L)^d$, dove $0 < d < 1$. Un modello *FIGARCH*(p, d, q) avrà perciò la forma seguente:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t.$$

Scrivendo $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ e riarrangiando i termini dell’Equazione è possibile ottenere una rappresentazione della *conditional variance*:

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\}\varepsilon_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2$$

dove $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$. Si è quindi ottenuta una rappresentazione del tipo *ARCH*(∞): affinché il processo *FIGARCH*(p, d, q) per ε_t^2 sia ben definito, è necessario che la *conditional variance* nel processo *ARCH*(∞) sia non negativa; perciò, $\lambda_i \geq 0$, per ogni $i = 1, 2, \dots$

Per il *FIGARCH*($1, d, 1$), i pesi sono costruiti usando:

- $\delta_1 = d$
- $\lambda_1 = d - \beta + \phi$

e le equazioni ricorsive

- $\delta_j = \frac{(j-1-d)}{j} \delta_{j-1}$
- $\lambda_j = \beta \lambda_{j-1} + \delta_j - \phi \delta_{j-1}$.

Come abbiamo già visto per il $GARCH(1,1)$, anche per la stima dei parametri del $FIGARCH(1,d,1)$ si è fatto uso del metodo della massima verosimiglianza, assumendo che il processo delle innovazioni z_t sia normale. Lo stimatore di *maximum likelihood* per il $FIGARCH(1,d,1)$ basato sul campione $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T\}$ può essere scritto come:

$$l_t(\theta) = \log(L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T; \theta)) \cong -\frac{1}{2} T \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\log(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

dove $\theta' \equiv (\omega, d, \beta, \phi)$.

Il terzo capitolo rappresenta la parte *core* di questo elaborato: con l'ausilio del software *MatLab*, i tre modelli vengono applicati a dati empirici raccolti tra aprile 2016 e febbraio 2022. Una volta che il campione di dati è stato segregato in un “*training*” *sample* e in un “*test*” *sample*, ad una stima “*in sample*” (sul *training sample*) finalizzata al calcolo dei parametri, segue un *multi-step ahead forecast* “*out of sample*”: il *test sample* ha lo scopo di valutarne l'accuratezza. La valutazione delle *forecasts* avviene tramite la comparazione i valori predetti con quelli realmente osservati: viene fatto ricorso, a tal fine, alle statistiche del *Root Mean Square Error (MSE)* e del *Mean Absolute Error (MAE)*. Ciò viene eseguito su tre diversi indici del mercato azionario: FTSE-Mib, DAX 40 e STOXX50. L'obiettivo è quello di mostrare empiricamente la superiorità, ai fini della previsione della volatilità, dei modelli che fanno uso di dati ad ultra-frequenza (nella fattispecie del modello *HAR-rv*), nonché della loro capacità di riprodurre i fatti stilizzati che possono essere osservati nei dati empirici. i parametri stimati per ogni modello sono riportati nella seguenti tabelle:

$$rv_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)}rv_t^{(d)} + \beta^{(w)}rv_t^{(w)} + \beta^{(m)}rv_t^{(m)} + \omega_{t+1d}^{(d)}$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
c	-0.45142 (-2.6871)	-0.37451 (-2.2686)	-0.48135 (-2.8476)
$\beta^{(d)}$	0.56766 (25.066)	0.57022 (25.698)	0.55072 (24.822)
$\beta^{(w)}$	0.23482 (10.681)	0.24573 (10.403)	0.24770 (10.890)
$\beta^{(m)}$	0.036681 (1.5036)	0.062598 (1.9501)	0.021521 (1.1244)

Tabella 3.1: coefficienti stimati *in sample* tramite regressione *OLS* per il modello *HAR-rv*. In parentesi è riportato il *t*-statistico (*t-Stat*), calcolato sulla base dello *standard error (SE)*.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
ω	6.9859x10 ⁻⁶ (3.5733)	4.9105x10 ⁻⁶ (2.1896)	4.93100x10 ⁻⁶ (2.5876)
α_1	0.10016 (3.9458)	0.83080 (4.1832)	0.15981 (4.7522)
β_1	0.85554 (26.452)	0.15088 (23.728)	0.80035 (21.789)

Tabella 3.2: coefficienti stimati *in sample* tramite metodo della massima log-verosimiglianza per il modello *GARCH(1,1)* In parentesi è riportato il *t*-statistico (*t-Stat*), calcolato sulla base dello *standard error (SE)*.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + 1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\varepsilon_t^2$$

	FTSE-Mib	DAX40	STOXX50
ω	2.1343×10^{-5}	1.0212×10^{-5}	1.2330×10^{-5}
ϕ	0.15831	0.036756	2.4736×10^{-5}
d	0.68337	0.49250	0.61733
β	0.60972	0.46036	0.49134

Tabella 3.3: coefficienti stimati *in sample* tramite metodo della massima log- verosimiglianza per il modello *FIGARCH(1,d,1)*.

Come già anticipato, le *multi-step ahead forecast* sono ottenute utilizzando i parametri precedentemente stimati sul *training sample* e riportati nelle tabelle sopra. Le previsioni vengono nella fattispecie confrontate con una misura di volatilità storica comune ai tre modelli, che ci consente quindi di calcolare le statistiche del *Root Mean Square Error (RMSE)* e del *Mean Absolute Error (MAE)*, finalizzate alla valutazione della performance di ciascuno di essi. Come misura della volatilità si è deciso di utilizzare la *realized volatility* osservata sul campione, che, come visto precedentemente, è basata sul quadrato dei rendimenti (o nel nostro caso dei log-rendimenti): i rendimenti al quadrato rappresentano infatti uno stimatore non distorto della varianza. Per il calcolo della volatilità si è inoltre fatto ricorso ad una finestra mobile (*rolling window*) di $m = 23$ giorni lavorativi: la volatilità al tempo t può perciò essere calcolata utilizzando le m osservazioni che vanno dal tempo $t - m$ al tempo $t - 1$, come mostrato nella seguente equazione:

$$h_t = \frac{1}{m-1} \sqrt{\sum_{i=t-m}^{t-1} r_i^2}.$$

	RMSE	MAE
FTSE-Mib		
HAR-rv	0.0086329	0.0058616
GARCH(1,1)	0.010862	0.0091776
FIGARCH(1,d,1)	0.009562	0.0084920
DAX40		
HAR-rv	0.0087480	0.0056919
GARCH(1,1)	0.010438	0.0083773
FIGARCH(1,d,1)	0.010692	0.0083463
STOXX50		
HAR-rv	0.0087052	0.0058045
GARCH(1,1)	0.0092751	0.0070194
FIGARCH(1,d,1)	0.0090751	0.0063012

Tabella 3.4: confronto della performance *out of sample* delle *multi-step ahead forecasts* dei modelli *HAR-rv*, *GARCH(1,1)* e *FIGARCH(1,d,1)*, per il FTSE-Mib (in alto), il DAX40 (in mezzo) e lo STOXX50 (in basso). Le misure di performance utilizzate sono il *Root Mean Square Error (RMSE)* ed il *Mean Absolute Error (MAE)*. Le *multi-step ahead forecasts* sono valutate confrontando la volatilità storica osservata e la volatilità prevista nell'orizzonte multi-periodale.

Al periodo seguente $t + 1$, la volatilità verrà calcolata sulla base dei dati da $t - m + 1$ a t , spostando in avanti di un periodo la finestra temporale del campione: tale approccio è detto “metodo delle medie mobili”. La scelta di una finestra temporale pari a $m = 23$ giorni cerca di ovviare al *trade-off* tra contenuto informativo e reattività alle condizioni più recenti: *ceteris paribus*, la scelta di un numero (m) più elevato, conduce infatti ad una stima della volatilità più stabile e con un maggiore contenuto informativo. I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 3.4.

Nel quarto capitolo, infine, ho voluto poi riportare la simulazione di una possibile applicazione dei modelli di stima della volatilità: viene illustrata una semplice strategia di *delta hedging* su una posizione corta in una

opzione *call* europea (scritta su un'azione che non paga dividendi). Il pricing è stato effettuato con il modello Black-Scholes-Merton e la volatilità utilizzata è la *realized volatility* stimata tramite il modello *HAR-rv*. Considerando un orizzonte temporale di venti settimane ($T = 0.3846$ anni), dal 16 giugno 2020 al 10 novembre 2020, sono stati innanzitutto simulati i possibili *patterns* (cento diversi) per un'azione di una generica società quotata sull'MTA, ipotizzando un prezzo iniziale pari a $S_0 = €100$ e utilizzando la volatilità settimanale stimata per il FTSE-Mib sull'intervallo di tempo considerato: ogni *stock path* è stato simulato modellizzando (in tempo discreto) un moto geometrico Browniano. Esso è così definito:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

dove il tasso di variazione istantaneo del prezzo si distribuisce in modo normale

$$\frac{dS}{S} \sim N(\mu S dt; \sigma^2 dt).$$

Successivamente, considerando un'opzione *call* con prezzo di esercizio $k = €100$ scritta su 100'000 azioni, un tasso *risk-free* $r_f = 0.005$ e un rendimento per azione $\mu = 0.01$, è stata presa casualmente una simulazione tra quelle il cui prezzo finale terminava "*in the money*": sulla base di questa, è stato quindi calcolato il prezzo della relativa opzione *call* europea e infine del *delta*, in modo da implementare una strategia di *delta hedging*. Tutti i *traders* utilizzano delle strategie di copertura, alcune più sofisticate di altre. Tra queste, molte richiedono la stima delle "lettere greche" o semplicemente "greche": esse hanno il compito di quantificare i diversi aspetti del rischio presente in una posizione su opzioni.

Per poter calcolare le greche è necessario utilizzare un modello di valutazione: nel caso delle opzioni europee, che ho qui scelto di rappresentare, i *traders* utilizzano in genere il modello Black-Scholes-Merton. Nel calcolo delle greche, la stima della volatilità è pari alla *implied volatility*, cioè la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni: se ciò è verificato, il valore dell'opzione è una funzione esatta del prezzo dell'azione, della volatilità, del tasso di interesse e del *dividend yield*. Delle greche ho qui preso in considerazione il solo *delta*: esso è definito come la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

dove c indica il prezzo della *call* e S il prezzo dell'azione sottostante. Nel modello Black-Scholes-Merton il prezzo di una *call* è pari a:

$$c = S_0 N(d_1) - ke^{-rT} N(d_2)$$

dove $N(x)$ indica la *CDF* di una variabile aleatoria normale con media nulla e varianza unitaria, con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Quando si utilizza il *delta hedging*, il portafoglio necessita di un *rebalancing* periodico: in questo caso lo schema di copertura richiede un aggiustamento frequente e pertanto si parla di schemi di copertura “dinamici”. La strategia di *delta hedging* è riportata nella tabella seguente (Tabella 4.1). Il *delta hedging* permette di creare una *short call* sintetica, la quale neutralizza la posizione corta che l'istituzione finanziaria ha assunto con la vendita dell'opzione. La strategia comporta, in sintesi, la vendita del titolo non appena il prezzo scende e l'acquisto non appena sale (“compra alto, vendi basso”). Il motivo per il quale il costo della copertura varia è che il *rebalancing* avviene solo una volta a settimana: all'aumentare della frequenza del ribilanciamento, l'incertezza circa il costo della copertura si ridurrebbe. La simulazione è ovviamente idealizzata in quanto basata sull'ipotesi che i costi di transazione siano nulli e che la volatilità coincida con quella stimata dal modello, diversa da quella implicita nel costo delle opzioni.

Settimana	Prezzo dell'azione	Delta	Azioni acquistate	Costo delle azioni acquistate (migliaia di euro)	Costo cumulato, interessi inclusi (migliaia di euro)	Costo per interessi (migliaia di euro)
0	100.00	0.596	59600	5960.00	5960.00	1.15
1	99.83	0.512	(8400)	(838.57)	5122.57	0.99
2	99.82	0.488	(2400)	(239.57)	4883.99	0.94
3	99.83	0.494	600	59.90	4944.83	0.95
4	99.84	0.488	(600)	(59.91)	4885.87	0.94
5	99.83	0.481	(700)	(69.88)	4816.93	0.93
6	99.82	0.371	(11000)	(1098.02)	3719.84	0.72
7	99.78	0.365	(600)	(59.87)	3660.69	0.70
8	99.82	0.378	2300	229.57	3890.96	0.75
9	99.80	0.324	(5400)	(538.92)	3352.79	0.64
10	99.85	0.370	4600	459.31	3812.74	0.73
11	99.98	0.612	24200	2419.52	6232.99	1.20
12	99.87	0.421	(19100)	(1907.52)	4326.67	0.83
13	99.83	0.232	(18900)	(1886.79)	2440.71	0.47
14	99.88	0.341	10900	1088.69	3529.87	0.68
15	99.81	0.129	(21200)	(2115.97)	1414.58	0.27
16	99.93	0.391	26200	2615.55	4030.40	0.78
17	100.02	0.784	39300	3930.79	7961.97	1.53
18	100.07	0.911	12700	1270.89	9234.39	1.78
19	100.09	0.889	(2200)	(220.20)	9105.97	1.73
20	100.11	1.000	11100	1111.22	10218.92	1.97

Tabella 4.1: simulazione di *delta hedging* (la *call* termina *Out of The Money*). Alla fine della ventesima settimana la posizione è interamente coperta in quanto è evidente che l'opzione verrà esercitata : il delta tende perciò a 1. L'istituzione finanziaria riceve €10'000'000 in cambio delle azioni, cosicchè il costo della vendita e della copertura della *call* risulta pari a €218'920.

Per concludere, l'obiettivo preposto in questo elaborato era quello di individuare un modello per le previsioni della volatilità che fosse in grado di coglierne il comportamento *long-memory*: il modello *HAR-rv*, facendo uso di dati ad ultra-frequenza, sembra essere il candidato ideale, nonostante non appartenga formalmente alla categoria dei processi *long-memory* (come il *FIGARCH*, ad esempio). Si tratta di un modello autoregressivo per la *realized volatility*, il cui tratto distintivo è quello di considerare le diverse componenti di volatilità su periodi di tempo via via più ampi. Si è evidenziato come, a dispetto della semplicità della sua struttura e della stima dei suoi parametri, tale modello garantisca buone *performances* in termini previsionali: basandoci sui

risultati delle *out of sample forecasts* per le tre serie storiche della *realized volatility* per il FTSE-Mib, il DAX40 e lo STOXX50, possiamo infatti affermare che il “*cascade model*” di Corsi superi, in termini di prestazioni, entrambi gli altri modelli presentati. Abbiamo inoltre sottolineato come tale modello fosse in grado di riprodurre non solo le dinamiche delle volatilità, ma anche dei rendimenti, con i relativi fatti stilizzati che li caratterizzano.

È bene infine notare che proprio grazie all'estrema semplicità della sua struttura, tale modello può essere agevolmente ampliato: nuove variabili significative potrebbero essere ad esempio incluse come regressori aggiuntivi; o in alternativa alcune misure di *jumps*: Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) suggeriscono a tal proposito di scomporre la varianza totale in una “*continuous part*” (*CHAR*), scritta in termini di *Bipower Variation*, e in una “*jump part*” (*HAR-J*). Inoltre, per via della sua struttura autoregressiva, lo stesso Corsi fornisce lo spunto per estendere il suo modello al caso multivariato, sviluppando un *Vector-HAR model*.