Dipartimento di

Impresa e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

Mutuo ed anatocismo: la controversia giuridica sul piano d'ammortamento alla francese. Con implementazioni finali in Python

Relatore:

Prof. Gennaro Olivieri

Candidato:

Michele Bigonzetti

Matr. 243471

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione **3**

Capitolo Primo: Caratteristiche del mutuo ed i piani d'ammortamento **4**

1.1 Il Mutuo e le sue caratteristiche 4

1.2 Il T.A.N. ed il T.A.E.G. nel mutuo 8

1.3 I piani d'ammortamento 15

1.2.1 Ammortamento di tipo "Zero Coupon Bond" 20

1.2.2 Mutuo Puro (Bullet Bond) 23

1.2.3 Ammortamento Italiano 27

1.2.4 Ammortamento Francese 39

1.2.5 Ammortamento Americano 32

1.4 Duration nei piani d'ammortamento 34

Capitolo Secondo: Anatocismo e controversia giuridica **41**

2.1 Differenze tra i due regimi di capitalizzazione (Capitalizzazione Semplice e Capitalizzazione Composta) 41

2.2 L'anatocismo nella disciplina giuridica 54

2.3 La controversia legale e le sbagliate interpretazioni dell'ammortamento alla francese 59

2.3.1 Le sentenze contraddittorie e le dichiarazioni finanziariamente infondate 60

2.3.2 Dimostrazioni analitiche ed evidenze teoriche 63

Capitolo Terzo: Applicazioni pratiche su linguaggio di programmazione Python **74**

3.1 Python come strumento di calcolo di un piano d'ammortamento (primo algoritmo grezzo) 75

3.2 L'importanza delle librerie e lo sviluppo dell'algoritmo finale 82

Conclusioni **96**

Bibliografia **99**

Sitografia **99**

Introduzione

Il presente elaborato ha come obiettivo quello di trattare la fattispecie del mutuo e, più nello specifico, il piano d'ammortamento detto "alla francese". Dopo una prima trattazione civilistica del mutuo, insieme alle sue caratteristiche strutturali, l'attenzione si sposta sugli aspetti distintivi dei piani d'ammortamento. Dal momento che tra le differenti modalità di costruzione di un piano rientra quella considerata la più nota ed utilizzata, c.d. "ammortamento alla francese", l'attenzione si sposterà su quest'ultima. La centralità ricoperta da questo argomento pone le basi su una disputa giuridica che si protrae oramai da quindici anni, che ha visto contrapporsi più giudici, con sentenze che ancora oggi non trovano una comune direzione: l'oggetto della disputa verte intorno alla presenza o meno di interessi anatocistici nel piano d'ammortamento alla francese.

L'elaborato non ha come obiettivo quello di risolvere la disputa (peraltro ancora oggetto di controversie giuridiche) quanto, piuttosto, quello di approfondire i criteri e le criticità per una corretta chiave di lettura matematico finanziaria.

Il punto di partenza sarà l'analisi approfondita dei due sistemi di capitalizzazione più adottati - la "capitalizzazione semplice" e la "capitalizzazione composta". Successivamente, dopo aver riportato ed analizzato alcune sentenze espresse nell'ambito finanziario trattato, si procederà con brevi dimostrazioni matematico-finanziarie ad affrontare le ambiguità scaturite da queste ultime.

L'elaborato dimostrativo è stato sviluppato attraverso un algoritmo Python, da me sviluppato, che esegue alcuni dei calcoli affrontati nel corso del testo. Verrà mostrata la potenzialità di tale linguaggio di programmazione anche attraverso l'introduzione delle librerie (NumPy, SciPy ecc.) che rendono possibile una versione dell'algoritmo più efficiente e funzionale.

Nella parte finale espliciterò le conclusioni e le considerazioni a cui sono giunto con il seguente lavoro, la mia personale (e umile) opinione riguardo la diatriba giuridico finanziaria sopra citata.

Capitolo Primo

Caratteristiche del mutuo ed i piani d'ammortamento

In questo primo capitolo si vuole introdurre la fattispecie del mutuo analizzata da un punto di vista inizialmente giuridico e successivamente economico-finanziario attraverso la definizione dei due tassi d'interesse (TAN e TAEG) caratteristici delle operazioni bancarie. In secondo luogo, verrà presentata la fattispecie del piano d'ammortamento insieme alle sue caratteristiche ed alle sue differenti rappresentazioni. Il capitolo si concluderà con la definizione di *Duration* e dei significati che essa porta con sé.

1.1 Il Mutuo e le sue caratteristiche

"Il mutuo è il contratto col quale una parte consegna all'altra una determinata quantità di danaro o di altre cose fungibili, e l'altra si obbliga a restituire altrettante cose della stessa specie e qualità"[1]. Le due parti del contratto di mutuo vengono definite mutuante (creditore che concede la somma di denaro o altre cose fungibili) e mutuatario (debitore che assume l'onere di restituire il denaro o altre cose fungibili). Il contratto di mutuo è un contratto reale e non è sottoposto ad alcun tipo di onere formale, ne deriva che il mutuo può essere stipulato anche in forma verbale[2].

Poiché la presunzione di onerosità nel mutuo è semplice, ambe le parti possono dimostrare la non onerosità del finanziamento erogato; dunque, salvo diversa pattuizione, il mutuatario è tenuto a corrispondere gli interessi al mutuante.

La corresponsione degli interessi, che è presente nella quasi totalità dei casi, determina la nascita della seconda obbligazione (la prima riguarda la restituzione della somma prestata o delle cose fungibili) in capo al mutuatario. La corresponsione degli interessi è caratterizzata dall'esigibilità[3] di questi mentre, invece, l'obbligazione primaria (principale) non prevede esigibilità immediata (sono salvi accordi tra le parti).

Dal momento che l'erogazione degli interessi rappresenta il costo del godimento del denaro e delle cose mutuate, ne risulta che gli interessi corrisposti nel contratto di mutuo vengono definiti

[1] Codice Civile- art. 1813
[2] La forma verbale non è sufficiente nel caso di mutui stipulati da parte di intermediari finanziari.
[3] Il credito è esigibile quando non è sottoposto a condizione sospensiva o termine e, pertanto, il creditore può pretenderne il pagamento: cfr. Bianca Cesare Massimo, Diritto civile, IV, L'obbligazione, Milano, 1990, p. 184.

compensativi. Per interessi compensativi si intendono quegli interessi che maturano su un capitale inesigibile (art. 1499 c.c.) quale il capitale mutuato oppure, ad esempio, nel conto corrente. In merito a questa categoria di interessi, si vuole aggiungere una precisazione giuridica: il fatto che venga posta in essere un'esigibilità anticipata degli interessi (cioè l'onere in capo al debitore di dover corrispondere interessi al creditore su base periodale) rispetto al capitale mutuato è perfettamente legale e prevista nel nostro ordinamento.

In alternativa agli interessi compensativi si può parlare di interessi *corrispettivi* ovvero quegli interessi riferiti ad un capitale liquido[4] ed esigibile (non è il caso del mutuo). È fondamentale la distinzione tra quest'ultima categoria di interessi e quella che viene definita come *moratoria*, nella quale rientrano quegli interessi che vengono corrisposti a fronte del ritardo del debitore nel saldare i propri obblighi pecuniari e conseguente richiesta del debitore[5].

Come sarà possibile approfondire in seguito, gli interessi vengono calcolati in funzione percentuale del debito residuo ed in relazione al tempo con riferimento al quale gli interessi sono dovuti. La trattazione civilistica del tasso d'interesse prevede che il tasso corrisposto nel contratto di mutuo si presupponga legale nel caso in cui dovesse venire a mancare una disposizione convenzionale del medesimo tasso[6]. La definizione di un tasso convenzionale (fissato per accordo tra debitore e creditore) la cui onerosità supera quella del tasso legale deve avvenire in forma scritta *ad substantiam*, in assenza della quale (ad es. definizione del tasso per via verbale) il tasso deve essere uguale a quello legale.

Di seguito viene riportata una tabella con la rappresentazione del tasso legale nel corso degli anni: il calcolo del tasso è affidato al Ministero del Tesoro (oggi, Ministero dell'economia e delle finanze) che con proprio decreto pubblicato nella Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana può modificarne annualmente la misura.

Periodo	Interesse applicabile
DAL 21.4.1942 AL 15.12.1990	5%
DAL 16.12.1990 AL 31.12.1996	10%
DAL 1.1.1997 AL 31.12.1998	5%
DAL 1.1.1999 AL 31.12.2000	2,5%
DAL 1.1.2001 AL 31.12.2001	3,5%

[4] Per liquidità del credito si intende "la determinazione del suo ammontare in una quantità definita, o la sua determinabilità mediante meri calcoli aritmetici in base ad elementi o criteri prestabiliti dal titolo o dalla legge". Bianca Cesare Massimo, Diritto civile, IV, L'obbligazione, Milano, 1990, p. 183.
[5] Codice Civile- art. 1224
[6] Codice Civile- art. 1284

DAL 1.1.2002 AL 31.12.2003	3%
DAL 1.1.2004 AL 31.12.2007	2,5%
DAL 1.1.2008 AL 31.12.2009	3%
DAL 1.1.2010 AL 31.12.2010	1%
DAL 1.1.2011 AL 31.12.2011	1,5%
DAL 1.1.2012 AL 31.12.2013	2,5%
DAL 1.1.2014 AL 31.12.2014	1%
DAL 1.1.2015 AL 31.12.2015	0,5%
DAL 1.1.2016 AL 31.12.2016	0,2%
DAL 1.1.2017 AL 31.12.2017	0,1%
DAL 1.1.2018 AL 31.12.2018	0,3%
DAL 1.1.2019 AL 31.12.2019	0,8%
DAL 1.1.2020 AL 31.12.2020	0,05%
DAL 1.1.2021 AL 31.12.2021	0,01%
DAL 1.1.2022	1,25%
Il saggio di interesse legale viene fissato con apposito decreto del Ministro del tesoro (oggi, Ministro dell'economia e delle finanze)	

La *ratio* che si trova alla base della definizione degli interessi legali tiene conto sia del rendimento medio annuo lordo dei titoli di Stato di durata non superiore a dodici mesi sia del tasso d'inflazione registrato nell'anno.

Nella stipulazione convenzionale di un tasso d'interesse, la legge vieta – sia per gli interessi corrispettivi sia per quelli moratori – la fissazione di un tasso d'interesse che possa essere considerato usurario. La definizione di questo "limite" avviene tenendo conto del tasso effettivo globale medio (T.E.G.M.) calcolato dalla Banca d'Italia su base trimestrale. Nello specifico, l'interesse usurario è calcolato aumentando il TEGM di un quarto, cui si aggiunge un margine di ulteriori quattro punti percentuali. La differenza tra il limite e il tasso medio non può essere superiore a otto punti percentuali[7]. Se sono convenuti interessi usurari, la clausola è nulla e non sono dovuti interessi[8].

Sotto il profilo economico il mutuo rientra nella categoria dei contratti di credito. Come si è potuto sottolineare in precedenza, nel contratto di mutuo rientra un insieme variegato di fattispecie; il mutuo

[7] Comunicato del Dipartimento del Tesoro del 18 maggio 2011. Il decreto-legge del 13 maggio 2011, n. 70, pubblicato sulla G.U. del 13 maggio 2011, n.110, ha disposto la modifica del metodo di calcolo del tasso soglia di cui all'articolo 2, comma 4, della legge 108/1996. Precedentemente il tasso soglia veniva calcolato aggiungendo il cinquanta per cento al T.E.G.M.

[8] Codice Civile- art. 1815

che ha per oggetto una somma di denaro è quello che viene più diffusamente utilizzato e che, inoltre, è di più grande interesse in questo elaborato.

Il mutuante può essere sia uno dei soggetti che rientrano nella tassonomia dell'art. 106 T.U.B.[9] sia un soggetto esterno che, tenuti conto i limiti dell'art. 132 T.U.B., che disciplina l'abuso di attività finanziaria, non eserciti l'attività di prestito in maniera abituale. Nel caso in cui un soggetto privato dovesse esercitare l'attività di credito in maniera continuativa, sorgono le problematiche connesse all'attività di usura, di cui la nullità degli interessi maturati e l'attivazione di sanzioni sia di carattere civile sia di carattere penale.

Le differenti tipologie di mutuo sono condizionate nella maggior parte dei casi[10] dalla distinta *finalità,* dalla *durata,* dalla tipologia di *tasso d'interesse* ed infine dalla *modalità di rimborso.*

Una più ampia distinzione fa capo alla differenza tra *mutuo ipotecario* e *mutuo fondiario*: la prima categoria è più ampia mentre la seconda fa capo a quell'insieme di prestazioni pecuniarie che hanno come fine quello di permettere di acquistare o costruire la prima casa. In ogni caso, di norma, l'accensione di uno di questi mutui comporta l'apertura di un'ipoteca (garanzia reale) sul bene collegato alla finalità creditizia.

Il mutuo può avere come *finalità*:

- L'acquisto di un immobile
- La ristrutturazione di un immobile
- Il consolidamento debiti, che comporta l'unificazione sotto un'unica rata di più mutui distinti.
- La surroga, un tipo di contratto che permette di trasferire il proprio mutuo da una banca ad un'altra con lo scopo di avere accesso ad un mutuo con condizioni più vantaggiose.
- La liquidità, un tipo di mutuo che viene realizzato quando il mutuatario non dispone di ipoteca pendente sulla propria abitazione. Il mutuo con fine liquidità permette di ricevere una somma di denaro iscrivendo come garanzia l'ipoteca sulla medesima casa.

La *durata* del contratto di mutuo varia da un minimo di 5 anni sino ad un massimo di 40. Nella maggior parte delle situazioni il minimo è di 10 anni ed il massimo è di 30, di rado vengono concessi mutui a 40 anni.

Le tipologie di *tasso d'interesse* vengono raggruppate in cinque categorie:

[9] Testo Unico Bancario, Albo degli intermediari finanziari.
[10] Non è prevista una forma standard per la redazione di un contratto di mutuo se non secondo i requisiti di legge in termini di documentazione e di informativa.

- Fisso, legato all'indice Eurirs[11] più uno spread: resta invariato per tutta la durata del contratto;
- Variabile, legato all'indice Euribor[12] o al tasso di riferimento della Banca Centrale Europea (Tasso BCE): varia in relazione alle politiche monetarie e agli scenari economici; svolge un ruolo fondamentale nel proteggersi dalle variazioni inflazionistiche.
- Misto: può essere modificato alle scadenze e alle condizioni stabilite dal contratto.
- Capped rate (detto anche cap): a tasso variabile, con un limite massimo predeterminato.
- Bilanciato: costituito da una parte a tasso fisso e una a tasso variabile, a seconda del peso che si vuole dare al tasso fisso e a quello variabile.

La *modalità di rimborso* stabilisce i distinti piani d'ammortamento che il mutuo può assumere. Nel paragrafo 1.3 verranno trattati i differenti tipi di piano d'ammortamento con le annesse peculiarità e caratteristiche in termini finanziari ed analitici.

1.2 Il T.A.N. ed il T.A.E.G. nel mutuo

Due figure che ricoprono particolare importanza nella stipulazione di un contratto di mutuo bancario sono il TAN ed il TAEG, ovvero i due tassi d'interesse, inseriti nel contratto di stipula, che indicano il costo del debito.

Entrambi i tassi sono sottoposti ad un regime di informativa[13] che la Banca d'Italia, in conformità alle deliberazioni del CICR[14], emana per assicurare la tutela del risparmio. I due tassi, come accennato in precedenza, sono di rilevante importanza soprattutto se considerati collettivamente. Per anticipare le distinzioni tra TAN e TAEG si può affermare che il primo rappresenta il tasso d'interesse puro del finanziamento mentre il secondo rappresenta il costo totale del finanziamento. È per questo motivo che l'ammontare di entrambi i tassi (insieme all'indicazione del fatto che si tratti di tasso variabile e tasso fisso) deve essere indicato in ogni messaggio pubblicitario così come in ogni contratto di stipula del mutuo.

[11] Euro Interest Rate Swap.
[12] Tasso di scambio medio tra le principali banche nell'Eurozona.
[13] Art. 123 T.U.B.
[14] Comitato interministeriale per il credito ed il risparmio; organismo presieduto dal Ministro dell'Economia e delle Finanze al quale il T.U.B. attribuisce compiti di vigilanza in materia di credito e tutela del risparmio.

Per comprendere a pieno la distinzione tra questi due tassi d'interesse si analizzerà l'aspetto matematico-finanziario che sta alla loro base. Si esporranno in primo luogo le caratteristiche del TAN ed in secondo luogo le caratteristiche de TAEG.

L'acronimo T.A.N. sta ad indicare il Tasso Annuo Nominale, esso rappresenta il costo annuo del debito in termini di interessi maturati secondo il regime della capitalizzazione semplice. Nello specifico il calcolo del TAN può essere riassunto nella seguente formula:

(1.1) Tasso annuo nominale.

$$T.A.N. = m * i_{\frac{1}{m}}$$

dove *m*[15] indica la periodicità delle rate in un anno ed $i_{\frac{1}{m}}$ rappresenta il tasso equivalente a tale periodicità.

Come si può notare, il TAN è il risultato del semplice prodotto tra il numero di volte in cui vanno effettuati i versamenti e l'ammontare del tasso periodale. Questa modalità di calcolo è strutturalmente equivalente a quella del regime di capitalizzazione semplice in cui non si tiene conto della capitalizzazione degli interessi e dove il tasso annuo nominale *j(m)* convertibile *m* volte l'anno andrebbe a coincidere con il TAN.

Le problematiche legate a questo tasso sono sin da subito evidenti e possono essere ricondotte a due aspetti di maggiore rilievo: l'assenza della presa in considerazione dei pagamenti infrannuali[16] e l'assenza della presa in considerazione dei costi accessori all'apertura del mutuo[17].

Il *primo* aspetto è diretta conseguenza delle caratteristiche attribuibili al regime di capitalizzazione semplice dove gli interessi vengono calcolati attraverso la somma algebrica delle rate da attualizzare unitariamente al termine dell'anno (per maggiori informazioni circa questo argomento si rinvia al paragrafo 2.1 dove verrà trattata in maniera approfondita la distinzione tra i due regimi di capitalizzazione trattati nell'elaborato, capitalizzazione semplice e capitalizzazione composta).

Il *secondo* aspetto coglie invece una problematica meno tecnica ma più pratica, in quanto non è di rara evenienza la possibilità di osservare contratti di mutuo in cui viene pubblicizzata la presenza di un TAN pari allo 0%. Come è facile comprendere, nella quasi totalità dei casi, non si tratta di un

[15] *m* rappresenta il numero di volte che in un anno vengono pagate le rate. Se *m* è uguale ad 1, le rate si ripetono annualmente mentre se ad esempio m è uguale a 2 le rate saranno semestrali.
[16] Un TAN, ad esempio, del 10% può riferirsi a pagamenti *annuali* degli interessi come a pagamenti *mensili* o *trimestrali.* Queste distinzioni non possono essere colte nell'ambito del TAN.
[17] All'infuori degli interessi.

“pasto gratis”, in quanto, oltre alle spese per gli interessi, vi sono altre spese che vengono sostenute dal mutuatario sia alla stipula del contratto sia ad ogni scadenza del pagamento delle rate.

Il TAN di per sé non può rappresentare in alcun modo un indice sintetico di costo per il mutuo ma può essere utilizzato come strumento per comprendere quale sia il costo nominale degli interessi. Per far fronte alle carenze strutturali del TAN, si prendono in considerazione il TAE ed il TAEG. Se si vuole generalizzare, si può affermare che il TAE risolve la prima delle due problematiche evidenziate in precedenza mentre il TAEG completa il semplice TAE risolvendo anche la seconda problematica.

Il T.A.E. è l’acronimo di Tasso Annuo Effettivo e, a differenza del TAN, esso segue il regime della capitalizzazione composta. Il calcolo del TAE è il seguente:

(1.2) Tasso Annuo Effettivo

$$T.A.E. = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1$$

dove m indica la periodicità delle rate in un anno ed $i_{\frac{1}{m}}$ rappresenta il tasso equivalente a tale periodicità.

Il TAE supera quindi la problematica delle rate infrannuali e definisce l’effettivo costo del debito in termini di interessi; il merito, come accennato in precedenza, va riconosciuto al regime di capitalizzazione composta che, per sua definizione, tiene conto della capitalizzazione degli interessi. Di seguito viene esposto un semplice esempio:

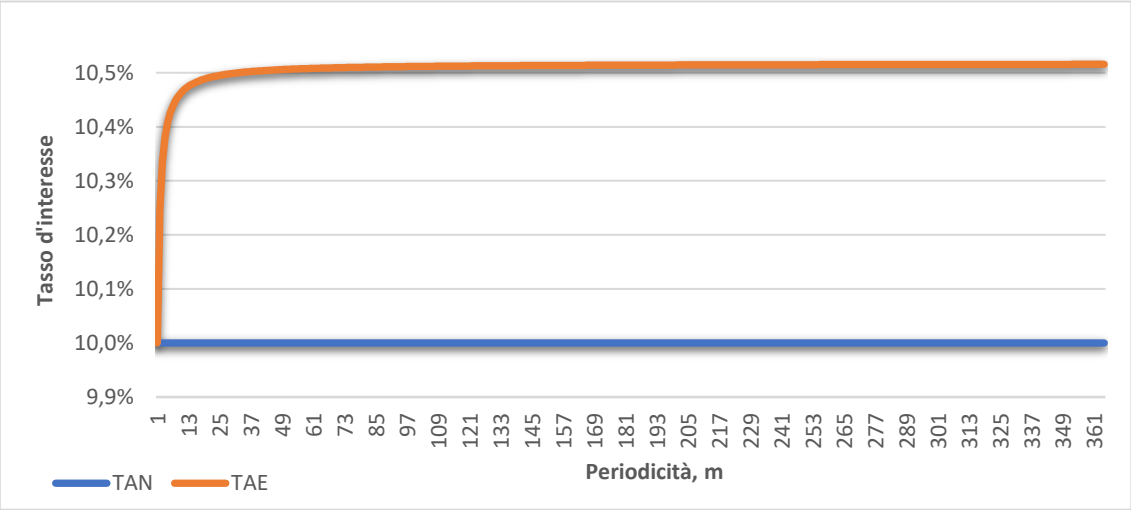
Esempio 1

Si contrae un mutuo bancario che prevede il pagamento di rate posticipate alla fine di ogni semestre; Tasso semestrale $i_{\frac{1}{m}} = 5\%$*; Calcolare il T.A.N. ed il T.A.E. dell’operazione:*

- $T.A.N. = m * i_{\frac{1}{m}} = 2 * 5\% = 10\%$

-$T.A.E. = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 = (1 + 5\%)^2 - 1 = 10{,}25\%$

Il TAE tiene conto del reinvestimento degli interessi e dunque risulterà in un tasso maggiore rispetto al TAN. I due casi limite sono il caso in cui *m* è uguale ad 1 (cioè rate annue) ed *m* uguale a 365[18] (cioè rate giornaliere). La differenza tra i due tassi è ancora più evidente se viene rappresentata in un grafico:



All'aumentare di *m*, mantenendo il tasso obiettivo pari al 10%, sarà solo il TAE a variare[19]. Un TAN del 10% può indicare il pagamento di una sola rata annua (pari al 10% del capitale prestato) come *m* rate annue (pari al 10% del capitale prestato diviso per *m*). Il TAE coglie questa distinzione e cresce al crescere della periodicità dei pagamenti, valorizzando la distinzione finanziario-monetaria tra la corresponsione di una sola rata annua ed *m* rate infrannuali. Si può anche notare che la crescita marginale del TAE è negativa in quanto ogni aumento unitario di *m* riduce l'incremento marginale del TAE. Per definire il concetto in maniera più chiara è stato utile usufruire del linguaggio di programmazione Python (di cui parlerò più approfonditamente nel capitolo terzo). Di seguito si riporta un breve algoritmo per il calcolo della variazione marginale del TAE ed annessa rappresentazione grafica;

[18] Oppure, alternativamente, 360 a seconda di come si vuole considerare l'anno. Convenzionalmente, se formato da 365 giorni l'anno viene definito civile mentre, invece, se formato da 360 giorni viene definito commerciale.

[19] Come è possibile osservare nella immagine, il TAE cresce sino a raggiungere un limite. Infatti, è possibile calcolare il limite della funzione di calcolo del TAE:

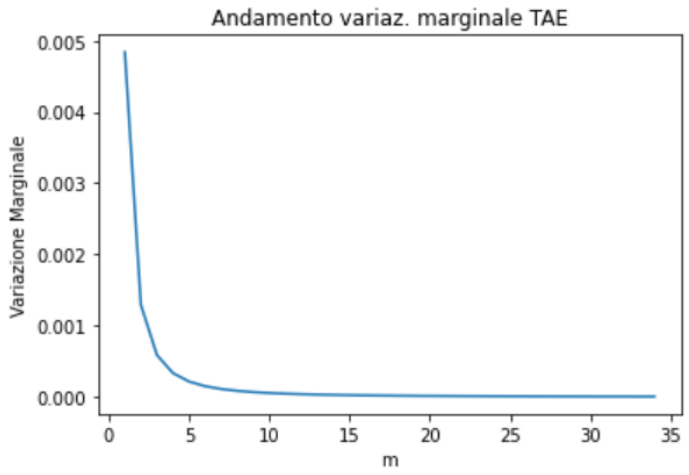
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1=e^{i}-1=e^{TAN}-1$$

Il valore individuato evidenzia una formula nota nel campo della finanza: il tasso effettivo d'interesse a capitalizzazione continua.

```python
from sympy import *
def marginal(r):
    import matplotlib.pyplot as plt
    funzione=str(input('Inserire che cosa identifica la formula: '))
    x,y=symbols('x y')
    l=eval(input('Inserire equazione da derivare: '))
    l_prime=l.diff(x)
    funct_prime=lambdify((x,y),l_prime)
    t,k=[i for i in range(1,35)],[funct_prime(i,r) for i in range(1,35)]
    plt.plot(t, k, label='Derivata di primo grado')
    plt.xlabel('m')
    plt.ylabel('Variazione Marginale')
    plt.title('Andamento variaz. marginale '+ funzione)
    decisione=input('-derivata prima- o -entrambe-? ')
    if decisione == 'entrambe':
        l_second=l_prime.diff(x)
        l_second=lambdify((x,y),l_second)
        f,j=[s for s in range(1,35)],[l_second(s,r) for s in range(1,35)]
        plt.plot(f, j, label='Derivata di secondo grado')
        plt.legend()
        plt.show()
```

```python
marginal(0.1)
```

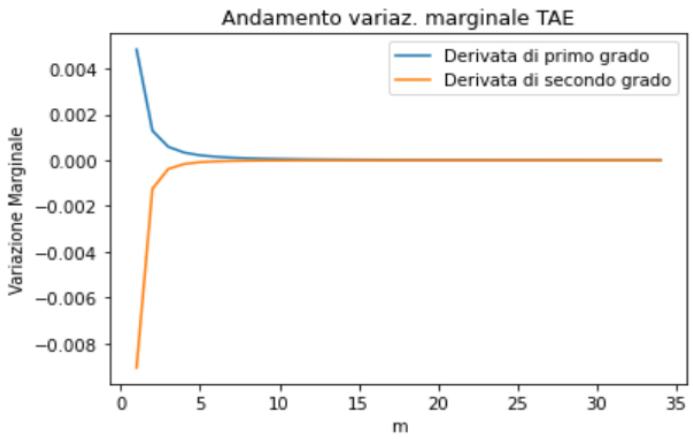
```
Inserire che cosa identifica la formula:TAE
Inserire equazione da derivare: (1+y/x)**x-1
-derivata prima- o -entrambe-? derivata prima
```



Questo breve algoritmo si fonda sulla derivata prima della funzione (1.2), che rappresenta, per ogni variazione unitaria di *m*, la variazione marginale del tasso (ovvero quanto varia il tasso per ogni variazione unitaria di *m*). La funzione "marginal" prende in input il tasso d'interesse obiettivo (in questo caso uguale al 10%) e costruisce i valori della derivata prima associati ad ogni *m* (con $\Delta m=1$). L'andamento è decrescente e ciò vuole dire che la crescita del tasso per ogni aumento unitario di *m* sarà sempre più ridotta.

La derivata seconda[20] conferma questo andamento, di seguito viene riportata la rappresentazione grafica della derivata seconda confrontata con la derivata prima:

```
marginal(0.1)

Inserire che cosa identifica la formula: TAE
Inserire equazione da derivare: (1+y/x)**x-1
-derivata prima- o -entrambe-? entrambe
```



Dopo aver effettuato questa piccola deviazione di carattere matematico si può ritornare sulla distinzione tra TAN e TAE. È evidente che questi due tassi si equivalgono unicamente nel caso in cui *m* è uguale ad uno mentre in tutti gli altri casi il TAE risulta essere maggiore del TAN.

Mentre è stato possibile superare la prima delle due problematiche attraverso il TAE, la seconda non riceve le necessarie attenzioni e continua ad essere irrisolta. Il TAE non tiene ancora in considerazione i costi accessori al mutuo e, dunque, deve essere sostituito da un tasso che soddisfi le richieste avanzate. È per questo motivo che si vuole introdurre il concetto di T.A.E.G. e di T.E.G. secondo le indicazioni fornite dalla Banca d'Italia[21]. La formula per il calcolo del T.E.G. (Tasso Effettivo Globale) pubblicata dalla Banca d'Italia viene riportata di seguito:

(1.3) Tasso Effettivo Globale

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(1+T.E.G.)^{t_k}} = \sum_{k'}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+T.E.G.)^{t_{k'}}}$$

Nel lato di sinistra si trovano i *prestiti* attualizzati (A_k) mentre nel lato di destra si trovano le *rate di rimborso* attualizzate ($A'_{k'}$). Per "rata di rimborso" si intende ogni pagamento a carico del cliente

[20] Per riassumere: se la derivata prima è decrescente, la derivata seconda è crescente e negativa.
[21] Da ora in poi verranno inseriti dati ed elementi contenuti nel Documento istruzioni per la rilevazione dei tassi effettivi globali medi ai sensi della legge sull'usura redatto dalla Banca d'Italia (2020).

relativo al rimborso del capitale, degli interessi e degli oneri inclusi. Per "prestito" si intende ciascuna erogazione eseguita dal creditore per effetto di uno stesso contratto.

Nel contratto di mutuo si è soliti assistere ad un'unica erogazione da parte del creditore, mentre invece sono numerose le rate di rimborso[22]. La formula fornita dalla Banca d'Italia può essere interpretata come un progetto di finanziamento dove il TEG o il TAEG ricoprono la funzione di Tasso Interno di Rendimento[23]. Di conseguenza alle voci di entrata del cash flow verranno sottratte le voci di uscita in modo tale che si ottenga un unico cash flow. Di seguito si riporta un esempio del calcolo del TEG (TAEG):

Esempio 2

All'Esempio 1 (vedi sopra) si aggiungono nuove informazioni:

- Si contrae un mutuo dal valore di 100.000,00 su un arco temporale di 3 anni (6 semestri)

- Alla data di stipula del contratto si devono sostenere 2.000,00 di spese di istruttoria e di revisione del contratto.

- Ad ogni pagamento della rata del mutuo si devono sostenere 300,00 di spese per l'incasso delle rate.

		CASH FLOW USCITE		CASH FLOW TOTALE	
Tempo(anni)	**Cash Flow Entrata**	**Con Oneri aggiuntivi**	**Senza oneri aggiuntivi**	**Con Oneri aggiuntivi**	**Senza oneri aggiuntivi**
0	100.000,00	- 2.000,00	-	98.000,00	100.000,00
0,5	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75
1	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75
1,5	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75
2	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75
2,5	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75
3	-	- 20.001,75	- 19.701,75	- 20.001,75	- 19.701,75

Tasso d'interesse semestrale $i_{1/2}$	**5,00%**

	Con Oneri aggiuntivi	**Senza oneri aggiuntivi**
TAN	10,00%	10,00%
TAE	10,25%	10,25%
TEG/TAEG	12,60%	10,25%
	TAN ≠ TAE ≠ TEG	**TAE = TEG/TAEG**

Ai fini del calcolo del TEG rientreranno tutte quelle voci di costo da associare alla stipula del contratto e, dunque, si terrà conto del costo complessivo del denaro, evitando al debitore "false trappole" come

[22] Progetto di finanziamento in senso stretto.

[23] T.I.R. ovvero quel tasso che permette di far eguagliare a zero il Valore Attuale Netto (VAN). Il VAN rappresenta il valore attuale dei flussi di cassa che un progetto genera, attualizzati al costo del capitale. Se il VAN dell'operazione è uguale a zero ciò significa che il valore attuale del capitale investito è uguale al valore attuale del capitale generato (o ricavato).

quella del tasso zero. Nell'esempio sopra riportato è fondamentale la differenza tra TEG/TAEG e TAN; la differenza tra i due tassi è rilevante e, seppur contenuta in questo caso, in situazioni differenti può raggiungere livelli ragguardevoli.

Il TAEG, come viene specificato nelle note dalla Banca d'Italia, si fonda sullo stesso calcolo ma svolge un fine diverso da quello del TEG; nello specifico il TAEG ha un fine di trasparenza mentre il TEG è calcolato per fini antiusura. Da qui, la distinzione tra TEG e TAEG ruota intorno agli oneri da inserire o meno all'interno di $A'_{k'}$. La formula per il calcolo del T.A.E.G. sarà la medesima:

(1.4) Tasso Annuo Effettivo Globale

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(1+T.A.E.G.)^{t_k}} = \sum_{k'}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+T.A.E.G.)^{t_{k'}}}$$

1.3 I piani d'ammortamento

Per piano d'ammortamento o piano di rimborso si intende quello schema attraverso il quale viene rappresentata la modalità di rimborso del capitale preso a prestito. All'interno del piano d'ammortamento vengono identificate quattro voci principali:

- La *Rata*, R_i.
- Il *Debito Residuo*, $C^{(i)}$, che rappresenta il debito che rimane da saldare.
- La *Quota Capitale*, Q_i, che rappresenta la parte della rata che va a sottrarsi al debito residuo.
- La *Quota Interessi*, I_i, che rappresenta il prodotto tra il tasso d'interesse *i* ed il debito residuo.

Il rimborso di un prestito può essere analizzato da due punti di vista:

1. Quello del debitore: richiede il prestito e lo rimborsa rispettando le condizioni fissate nel contratto, compresa la remunerazione del capitale mutuato;
2. Quello del creditore: concede il prestito e ottiene il suo rimborso, compresa la remunerazione del capitale mutuato[24].

Si può specificare che tra le voci appena elencate solo la quota interessi svolge un ruolo determinante nel calcolo del conto economico, mentre, al contrario, le altre voci del piano d'ammortamento

[24] C. Crenca, P. Fersini, G. Melisi, G. Olivieri, M. Pelle , *Elementi di matematica finanziaria*. Milano: Pearson, 2018

modificano l'ammontare del debito o credito (a seconda di quale sia la prospettiva adottata) nello stato patrimoniale.

Prima di analizzare i diversi piani d'ammortamento nello specifico, risulta necessario introdurre alcuni concetti e formule che valgono in tutti i piani d'ammortamento. In primo luogo, urge definire quale sia la modalità di calcolo di un piano d'ammortamento e quali siano le relazioni che intercorrono tra le varie voci ai fini del calcolo del piano. Nello specifico, in ogni piano d'ammortamento valgono le seguenti uguaglianze:

- $R_i = Q_i + I_i$
- $I_i = C^{(i-1)} \cdot i$
- $C^{(i)} = C^{(i-1)} - Q_i$

Inoltre, in ogni piano di ammortamento devono valere le due seguenti condizioni[25]:

- La *condizione di chiusura contabile*, secondo la quale la somma delle quote capitali calcolate nel piano deve essere pari debito originariamente contratto A:
  (1.5) Condizione di chiusura contabile (o elementare)
  $$\sum_{t=1}^{n} Q_i = A$$

- La *condizione di chiusura finanziaria (o equità)*, che si distingue in iniziale o finale a seconda di quale sia il periodo scelto per l'uguaglianza:
  (1.6.1) Condizione di chiusura finanziaria (o *equità) iniziale*
  $$\sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t} = A$$

  (1.6.2) Condizione di chiusura finanziaria (o *equità) finale*
  $$\sum_{t=1}^{n} R_t \cdot (1+i)^{n-t} = A \cdot (1+i)^n$$

Queste due condizioni devono essere soddisfatte in qualsiasi tipologia di piano d'ammortamento, sono salvi casi particolari quali i mutui indicizzati.

[25] Per semplicità, le condizioni vengono presentate assumendo un piano di rimborso a capitalizzazione composta; la capitalizzazione semplice verrà trattata nel secondo capitolo insieme alle problematiche ad essa annesse.

Il significato finanziario alla base della condizione di chiusura contabile è che il debito viene estinto solo dopo aver corrisposto tutte le quote capitale (ovvero la parte della rata che effettivamente riduce la parte del debito residuo).

La condizione di equità finanziaria, invece, assicura che l'operazione sia equa (finanziariamente) all'epoca iniziale o finale (si rimanda al capitolo 2.1 per maggiori informazioni).

L'ultima condizione, che deve sempre valere all'interno di un piano d'ammortamento, concerne il calcolo del debito residuo in una generica epoca *t*, $C^{(t)}$. Il debito residuo può essere calcolato in quattro maniere differenti:

- *Prospettiva:* il debito residuo viene determinato considerando gli impegni futuri del debitore nei confronti del creditore successivamente all'epoca *t* di valutazione;

    - *Considerando le Quote capitale*:
      (1.7) Debito residuo prospettivo con Quote capitale

$$\sum_{s=t+1}^{n} Q_s = C^{(t)}$$

    - *Considerando le Rate:*
      (1.8) Debito residuo prospettivo con Rate

$$\sum_{s=t+1}^{n} \frac{R_s}{(1+i)^{s-t}} = C^{(t)}$$

- *Retrospettiva:* il debito residuo viene determinato considerando la differenza tra il capitale preso a prestito e quanto è stato già versato dal debitore fino all'epoca *t* di valutazione sia in funzione delle quote capitale che delle rate;

    - *Considerando le Quote capitale*:
      (1.9) Debito residuo retrospettivo con Quote capitale

$$A - \sum_{s=1}^{t} Q_s = C^{(t)}$$

    - *Considerando le Rate:*
      (1.10) Debito residuo retrospettivo con Rate

$$A \cdot (1+i)^t - \sum_{s=1}^{t} R_s \cdot (1+i)^{t-s} = C^{(t)}$$

Queste quattro formule possono essere riassunte in una matrice due per due, come viene rappresentato nella tabella di seguito:

	Retrospettivo (da 1 a t)	Prospettivo (da t a n)
Quote capitale (considero Q. capitale)	$A - \sum_{s=1}^{t} Q_s = C^{(t)}$	$\sum_{s=t+1}^{n} Q_s = C^{(t)}$
Rate (considero le rate)	$A \cdot (1+i)^t - \sum_{s=1}^{t} R_s \cdot (1+i)^{t-s} = C^{(t)}$	$\sum_{s=t+1}^{n} \frac{R_s}{(1+i)^{s-t}} = C^{(t)}$

Tabella 1: Calcolo debito residuo

L'importanza che ricoprono il debito residuo e le quattro modalità di calcolo si inserisce all'interno di un tema molto importante nel campo economico-aziendale, ovvero la determinazione del valore di un prestito. Nello specifico si intende la cessione del credito[26] ed il calcolo del *fair value*[27] nella quale la valutazione del debito residuo è fondamentale.

La valutazione del credito è concettualmente differente dalla determinazione del debito residuo ma può coincidere con esso qualora il *tasso di obbligazione/remunerazione i* (cioè il tasso determinato dalle parti al sorgere del contratto ed utilizzato nel piano d'ammortamento) coincida con il *tasso di valutazione* i_1 (cioè il tasso al quale si vuole valutare il credito da trasferire). Solitamente questo tipo di operazioni viene effettuato dalle banche qualora ci sia interesse nel trasferire il prestito a terze parti[28] oppure, ad esempio, nel caso di aziende che praticano *factoring*[29]. Il calcolo per effettuare una valutazione del credito può avvenire indistintamente attraverso le quattro formule (1.7-1.10) sostituendo *i* con i_1. Si riporta l'esempio prospettico in funzione delle rate:

[26] Disciplinata dall'art. 1260 del Codice civile

[27] Quantificazione degli attivi o passivi di bilancio in base al valore di mercato. Disciplina applicata alle banche attraverso i sistemi contabili internazionali IAS/IFRS.

[28] Emblematica la cessione del credito dalla banca alle SPV (Special Purpose Vehicle), passaggio fondamentale nell'ambito del processo di cartolarizzazione. Tecnicamente, la cartolarizzazione del debito è un processo attraverso il quale una o più attività finanziarie indivise ed illiquide, in grado di generare dei flussi di cassa (quali ad esempio i crediti di una banca), vengono "trasformate" in attività divise e vendibili, ossia in titoli obbligazionari denominati *Asset Backed Securities* (ABS). CONSOB

[29] Il factoring è un tipo di contratto che consente alle aziende di cedere a terzi i propri crediti, ottenendo immediatamente o alla scadenza, il loro valore nominale al netto dei costi di compravendita e gestione. La società finanziaria acquirente viene detta *factor*. La cessione dei crediti può avvenire in due modi differenti:
Pro solvendo che lascia al cliente il rischio dell'eventuale insolvenza dei debiti ceduti.
Pro soluto con cui il *factor* si assume il rischio di insolvenza dei debiti ceduti. Borsa Italiana

(1.11) *Calcolo del valore di un prestito*

$$V_t^{i_1} = \sum_{s=t+1}^{n} \frac{R_s}{(1+i_1)^{s-t}}$$

Quando il prestito, al momento della cessione, viene valutato come più rischioso rispetto alla sua origine, il tasso i_1 risulterà più elevato e, di conseguenza, determinerà un valore del prestito più basso rispetto al valore del debito residuo calcolato con i. Se considerato più sicuro, avverrà il contrario. Il valore di un prestito è altrettanto importante quando si è di fronte a variazioni nei tassi di mercato; nell'ultimo paragrafo di questo capitolo sarà affrontato tale argomento (paragrafo 1.3.4).

Le banche, talvolta, ricorrono alla suddivisione del debito residuo tra Nuda Proprietà ed Usufrutto. La distinzione avviene poiché può esservi interesse da parte della banca nel vendere separatamente le due parti.

Per Nuda proprietà si intende la somma dei valori attuali all'epoca t delle quote capitale ancora da versare, calcolate al tasso i_1[30]:

(1.12) Formula per il calcolo della Nuda proprietà

$$K_t^{i_1} = \sum_{s=t+1}^{n} \frac{Q_s}{(1+i_1)^{s-t}}$$

Per Usufrutto si intende la somma dei valori attuali all'epoca t delle quote interesse ancora da versare calcolate al tasso i_1[31]:

(1.13) Formula per il calcolo dell'Usufrutto

$$U_t^{i_1} = \sum_{s=t+1}^{n} \frac{I_s}{(1+i_1)^{s-t}}$$

L'insieme di condizioni appena espresse deve valere in qualsiasi piano d'ammortamento.

Nei successivi paragrafi verranno introdotti i principali piani d'ammortamento che possono essere costituiti nell'ambito di un contratto finanziario. Saranno tre le principali modalità di rimborso del capitale preso a prestito A:

[30] Quando la banca decide di vendere non il prestito nella sua interezza quanto, piuttosto, solo le quote capitale rimanenti.

[31] Quando la banca decide di vendere non il prestito nella sua interezza quanto, piuttosto, solo le quote interesse rimanenti.

- *Rimborso globale* (unico) alla scadenza sia del capitale iniziale A, sia degli interessi maturati $A \cdot r(t)$ (dove r(t) identifica il montante che può essere calcolato nei regimi di capitalizzazione differenti): *Zero Coupon Bond (ZCB)*.
- *Rimborso periodico* degli interessi e, alla data di scadenza, dell'intero importo A (con l'aggiunta dell'ultima quota interesse): *Mutuo Puro (BTP)*.
- *Rimborso graduale* attraverso rate costituite sia dagli interessi sia dalle quote capitale: *ammortamento uniforme (italiano), ammortamento progressivo (francese), ammortamento americano ("sinking fund" o "a due tassi")*.

1.3.1 Ammortamento di tipo "Zero Coupon Bond"

Nell'ambito dell'ammortamento di tipo "Zero Coupon Bond" rientrano i titoli a reddito fisso; essi rappresentano titoli emessi da un soggetto (emittente) per finanziarsi (ad esempio Stato, Enti Locali, banche, imprese). La nascita di questi contratti di credito (obbligazioni) impone alla parte emittente (debitore) di corrispondere al creditore alternativamente:

- Interessi periodici sul capitale preso a prestito con l'aggiunta finale del valore nominale del debito contratto: *Titoli con cedole*.
- La sola restituzione in epoca finale del capitale preso a prestito con l'aggiunta di interessi: *Titoli senza cedole*.

Uno Zero Coupon Bond (Titolo senza cedole) è un'operazione finanziaria d'investimento caratterizzata solo da due movimenti di cassa: il prezzo d'acquisto ed il prezzo di vendita. In Italia rientrano in questa categoria di debito i BOT[32] ed i CTZ[33]. La capitalizzazione degli interessi avviene solitamente in capitalizzazione semplice ma, per fini comparativi con altri titoli, si ricorre alla capitalizzazione composta.

[32] Buoni ordinari del tesoro, I BOT sono titoli a breve termine con scadenza non superiore ad un anno (solitamente hanno durata di 3,6 o 12 mesi). I BOT sono titoli che rimborsano alla pari, il cui interesse è rappresentato dalla differenza tra il prezzo di rimborso e quello di sottoscrizione. Da aprile 2009, i Bot sono collocati tramite aste competitive in cui le offerte degli operatori sono espresse in termini di rendimento anziché di prezzo. L'asta è riservata agli intermediari istituzionali autorizzati ai sensi del decreto legislativo 24 febbraio 1998, n. 58. Dipartimento del Tesoro

[33] Certificati del tesoro zero coupon, I CTZ sono titoli con durata all'emissione di 24 mesi, soggetti a riaperture che possono ridurne la durata originaria. La remunerazione è interamente determinata dallo scarto di emissione, pari alla differenza tra il valore nominale ed il prezzo corrisposto. L'asta è riservata agli intermediari istituzionali autorizzati ai sensi del decreto legislativo 24 febbraio 1998, n. 58. Dipartimento del Tesoro

Questo genere di titoli è soggetto generalmente ad imposizione fiscale, tramite aliquota fiscale[34], sul capital gain (cioè la differenza tra valore di rimborso e prezzo di emissione). La presenza di un'imposizione fiscale determina una distinzione tra il rendimento semplice lordo del titolo (che non tiene conto delle tasse) ed il rendimento netto del titolo stesso (tiene conto delle tasse). Il risultato è che il tasso di rendimento lordo sarà sicuramente maggiore del tasso di rendimento netto. Se definiamo il valore di rimborso come R_n (la rata finale nel piano d'ammortamento), il prezzo di emissione come A e l'aliquota fiscale come τ, l'imposta che graverà sul BOT o CTZ sarà pari a:

(1.14) *Imposta sul Capital Gain*

$$Imposta = (R_n - A) \cdot \tau$$

La struttura degli ZCB è molto semplice: l'assenza di rate per tutto il periodo di maturazione del titolo permette di poter riassumere le caratteristiche fondamentali di quest'ultimo semplicemente indicando il tasso d'interesse, la durata ed il prezzo di emissione (oppure in alternativa il valore di rimborso o nominale). La formula per il calcolo del prezzo di emissione A attraverso il tasso d'interesse i, il valore di rimborso R_n e la durata n è la seguente (solitamente R_n è un valore standard poiché rappresenta il valore nominale come ad esempio nei BOT, in base al tasso i sarà A a variare[35]) :

- In capitalizzazione composta:
  (1.15) Prezzo di emissione di uno ZCB in capitalizzazione composta

$$A = \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

- In capitalizzazione semplice:
  (1.16) Prezzo di emissione di uno ZCB in capitalizzazione semplice

$$A = \frac{R_n}{(1 + i \cdot n)}$$

Il capitale preso a prestito sarà uguale al montante finale attualizzato per *n* anni. Seppur l'assenza di rate nel periodo di maturazione degli interessi non abbia alcuna implicazione di carattere informativo (in quanto l'assenza di rate semplifica notevolmente le informazioni necessarie) ciò non significa che la redazione del piano d'ammortamento di uno ZCB non abbia alcuna valenza di carattere pratico.

[34] Attualmente pari al 12,5%.
[35] In alternativa, se si conoscono A ed R_n l'incognita sarà i.

È pacifico affermare che, infatti, le implicazioni contabili di un piano d'ammortamento ZCB siano fondamentali in quanto l'assenza del pagamento della rata periodale, in cui fruttano gli interessi, determina una quota capitale negativa. La conseguenza è che il debito residuo, a differenza degli altri piani d'ammortamento, tenderà a crescere poiché vede maturare gli interessi che in ultimo luogo verranno corrisposti nella rata finale.

Come spiegato in precedenza, solitamente i ZCB, poiché caratterizzati da una breve durata, vengono calcolati attraverso la capitalizzazione semplice, mentre, in questa sede, verrà redatto il piano d'ammortamento di uno ZCB in capitalizzazione composta[36].

Tempo	Rata (R_t)	Quota Interesse (I_t)	Quota Capitale (Q_t)	Debito Residuo ($C^{(t)}$)
0				A
1	0	$A \cdot i$	$-A \cdot i$	$A \cdot (1+i)^1$
2	0	$A \cdot (1+i)^1 \cdot i$	$-A \cdot (1+i)^1 \cdot i$	$A \cdot (1+i)^2$
…				
t	0	$A \cdot (1+i)^{t-1} \cdot i$	$-A \cdot (1+i)^{t-1} \cdot i$	$A \cdot (1+i)^t$
…				
n-1	0	$A \cdot (1+i)^{n-2} \cdot i$	$-A \cdot (1+i)^{n-2} \cdot i$	$A \cdot (1+i)^{n-1}$
n	$A \cdot (1+i)^n$	$A \cdot (1+i)^{n-1} \cdot i$	$A \cdot (1+i)^{n-1}$	0

Tabella 2: Piano d'ammortamento di uno ZCB

Bisogna verificare che il piano d'ammortamento appena presentato rispetti le due (tre, considerando la distinzione tra chiusura finale ed iniziale) condizioni di chiusura presentate nelle formule 1.5-1.6.

(1.17) Condizione di chiusura contabile di uno ZCB

$$A \cdot (1+i)^{n-1} + \sum_{t=1}^{n-1} Q_t = A$$

(1.18) Condizione di chiusura finanziaria iniziale di uno ZCB

$$A = \frac{A \cdot \cancel{(1+i)^n}}{\cancel{(1+i)^n}} \rightarrow A = A$$

[36] In aggiunta, nella maggior parte dei casi in cui si fa uso della struttura tipica dello ZCB il termine noto è la rata finale di rimborso; dopo aver individuato la rata finale di rimborso (nel caso dei BOT rappresenta il valore nominale) essa viene attualizzata (scontata) sino a rappresentare A ("titoli a sconto").

(1.19) Condizione di chiusura finanziaria iniziale di uno ZCB

$$R_n \cdot (1+i)^{n-n} = A \cdot (1+i)^n \rightarrow R_n = A \cdot (1+i)^n$$

Lo ZCB verrà utilizzato nel prossimo capitolo, poiché risulta essere di grande utilità per applicare il *principio di composizione dei contratti finanziari* in base al quale il singolo debito A, contratto al tempo zero, può essere sostituito da *n* debiti la cui somma del valore attuale equivale ad A. Lo ZCB, poiché gode di unica rata finale (e nessun'altra rata), è molto comodo poiché può facilmente sostituirsi alle rate fisse del piano d'ammortamento francese.

1.3.2 Mutuo Puro (Bullet Bond)

Rientrano in questa categoria i *Titoli con cedole (Coupon Bond)*, ovvero quel contratto di prestito tra l'emittente del titolo (debitore nel contratto) e l'acquirente (il creditore) in cui l'emittente è tenuto a corrispondere somme di denaro (cedole) ad intervalli regolari. Le cedole possono essere determinate contrattualmente come:

a) Cedole fisse costanti (BTP[37]).
b) Cedole che scendono o salgono di valore al passare del tempo (obbligazioni *step-down o step-up*).
c) Cedole indicizzate sui tassi d'interesse a breve termine (ad esempio tassi Euribor a 3 o 6 mesi).

Per la redazione del piano d'ammortamento si riferirà alle cedole costanti.

In ogni contratto obbligazionario vengono identificate:

- *j(m):* il tasso nominale o cedolare d'interesse (convertibile n volte l'anno);
- *A:* prezzo d'acquisto del titolo;
- *N:* il valore nominale del titolo;
- *i:* il tasso di rendimento annuo composto;
- *n:* il numero di anni su cui si sviluppa l'operazione;

[37] Buoni Poliennali del Tesoro, I Btp, Buoni del Tesoro Poliennali, sono titoli a medio-lungo termine, con una cedola fissa pagata semestralmente. I Btp vengono emessi con scadenze da 18 mesi a 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30 e 50 anni 58 e sono offerti tramite un'asta marginale con determinazione discrezionale del prezzo di aggiudicazione e della quantità emessa. L'asta è riservata agli intermediari istituzionali autorizzati ai sensi del decreto legislativo 24 febbraio 1998, n. 58. Dipartimento del Tesoro

A seconda che il prezzo d'acquisto del titolo differisca o meno dal valore nominale si avranno tre fattispecie riassunte nella seguente tabella:

$A > N$	Il titolo è emesso sopra la pari	$i < j(m)$
$A = N$	Il titolo è emesso alla pari	$i = j(m)$
$A < N$	Il titolo è emesso sotto la pari	$i > j(m)$

Tabella 3: Classificazione prezzo di emissione di un titolo obbligazionario

Ai fini del calcolo delle cedole da corrispondere, si utilizzano unicamente il tasso cedolare *j(m)* ed il valore nominale *N* del titolo.

(1.20) Cedola periodale di un Mutuo Puro

$$cedola = \frac{j(m)}{m} \cdot N$$

Poiché per fini dimostrativi risulta più agevole ipotizzare una emissione alla pari, la redazione del piano d'ammortamento verrà effettuata imponendo $A = N$;

Tempo	Rata (R_t)	Quota Interesse (I_t)	Quota Capitale (Q_t)	Debito Residuo ($C^{(t)}$)
0				A
1	$\frac{j(m)}{m} \cdot N = \frac{j(m)}{m} \cdot A$	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	0	A
2	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	0	A
…				
t	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	0	A
…				
n-1	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	0	A
n	$\frac{j(m)}{m} \cdot A + A$	$\frac{j(m)}{m} \cdot A$	A	0

Tabella 4: Piano d'ammortamento di un Mutuo Puro

La *condizione di chiusura contabile* può essere osservata con evidente semplicità in quanto è presente un'unica quota capitale che coincide con il debito inizialmente contratto.

La condizione di chiusura finanziaria iniziale viene dimostrata come segue:

(1.21.1) Condizione di chiusura finanziaria iniziale nel Mutuo Puro

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{A \cdot j(m)}{(1+i)^t} = A \cdot j(m) \cdot a_{n|i}{}^{(m)} \rightarrow \sum_{t=1}^{n} \frac{A \cdot j(m)}{(1+i)^t} + \frac{A}{(1+i)^n} = A$$

$$\rightarrow \frac{1-v^n}{\cancel{j(m)}} \cdot A \cdot \cancel{j(m)} + A \cdot v^n = A$$

Si semplifica;

$$(1-v^n) \cdot A + A \cdot v^n = A \rightarrow A - \cancel{A \cdot v^n} + \cancel{A \cdot v^n} = A$$

La condizione di chiusura finanziaria finale segue lo stesso procedimento:

(1.21.2) Condizione di chiusura finanziaria finale nel Mutuo Puro

$$dato \sum_{t=1}^{n} A \cdot j(m) \cdot (1+i)^t = A \cdot j(m) \cdot s_{n|i}{}^{(m)} \rightarrow \sum_{t=1}^{n} (A \cdot j(m)) \cdot (1+i)^t + A = A \cdot (1+i)^n$$

$$\rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{j(m)} \cdot A \cdot j(m) + A = A \cdot (1+i)^n$$

Si semplifica;

$$(r^n - 1) \cdot A + A = A \cdot r^n \rightarrow A \cdot r^n - \cancel{A} + \cancel{A} = A \cdot r^n$$

Infine, si vuole chiarire la distinzione tra *j(m)* ed *i* quando N ed A differiscono tra di loro; il calcolo di *i* equivarrà al tasso interno di rendimento (TIR) della seguente equazione:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{N \cdot j(m)}{(1+i)^t} + \frac{N}{(1+i)^n} = A$$

Il caso in cui $A = N$ è stato trattato in precedenza ed esso determina l'uguaglianza tra *j(m)* ed *i*. Di seguito viene riportato un esempio pratico in cui, mantenendo costante il tasso cedolare ed il valore nominale, il tasso interno di rendimento (definito nel gergo tecnico dei bond, Yield to maturity o ancora, nella versione italiana, TRES[40]) varia divenendo maggiore del tasso cedolare nel caso in cui

[38] $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{j(m)} = a_{n|i}{}^{(m)}$; $(1+i)^{-n} = v^n$

[39] $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{j(m)} = a_{n|i}{}^{(m)}$

[40] Tasso di Rendimento Effettivo a Scadenza.

il prezzo d'acquisto dovesse essere inferiore al valore nominale e, viceversa, divenendo inferiore al tasso cedolare nel caso in cui il prezzo d'acquisto dovesse essere maggiore del tasso nominale.

Esempio 3

Tasso cedolare, j(m)	5%
Valore Nominale	100.000,00
Prezzo d'acquisto	90.000,00

Tempo	**Cash Flow**
0	90.000,00
1	- 5.000,00
2	- 5.000,00
3	- 5.000,00
4	- 5.000,00
5	- 5.000,00
6	- 5.000,00
7	- 5.000,00
8	- 5.000,00
9	- 5.000,00
10	- 105.000,00

TIR	6,38%

Tasso cedolare, j(m)	5%
Valore Nominale	100.000,00
Prezzo d'acquisto	100.000,00

Tempo	**Cash Flow**
0	100.000,00
1	- 5.000,00
2	- 5.000,00
3	- 5.000,00
4	- 5.000,00
5	- 5.000,00
6	- 5.000,00
7	- 5.000,00
8	- 5.000,00
9	- 5.000,00
10	- 105.000,00

TIR	5,00%

Tasso cedolare, j(m)	5%
Valore Nominale	100.000,00
Prezzo d'acquisto	120.000,00

Tempo	**Cash Flow**
0	120.000,00
1	- 5.000,00
2	- 5.000,00
3	- 5.000,00
4	- 5.000,00
5	- 5.000,00
6	- 5.000,00
7	- 5.000,00
8	- 5.000,00
9	- 5.000,00
10	- 105.000,00

TIR	2,69%

Anche il mutuo puro è particolarmente adatto al *principio di composizione dei contratti finanziari*. Esso è di grande utilità in questo ambito in quanto, contando su un'unica quota capitale, può sostituirsi alle singole quote capitale di un altro piano d'ammortamento; è molto comodo per comporre i piani d'ammortamento caratterizzati da quote capitale fisse (ammortamento italiano).

1.3.3 Ammortamento Italiano

L'ammortamento italiano (uniforme) prevede la costruzione del piano d'ammortamento definendo preventivamente le quote capitale. Esso, insieme al piano d'ammortamento alla francese, è di più ampio utilizzo nell'ambito dei mutui bancari. La caratteristica distintiva di questa tipologia di schema di calcolo risiede nel fatto che le quote capitale sono tutte uguali tra di loro;

(1.22) Quote capitale nell'Ammortamento Italiano

$$Q_t = \frac{A}{n}$$

Tale equazione viene, infatti, imposta dalla *condizione di chiusura elementare* che definisce il valore preso a prestito, A, come la somma delle n quote capitale. Dal momento che la quota capitale deve essere costante, l'unico modo per far sì che Q_t non vari e venga rispettata la condizione di chiusura contabile, è dividere il debito inizialmente contratto in *n* parti uguali.

Il fatto che l'ammortamento italiano sia composto da *n* quote capitale costanti facilita di molto l'applicazione del principio di composizione dei contratti finanziari. Infatti, il piano d'ammortamento italiano può essere costituito dalla somma di *n* mutui puri dove ad ogni *t-esima* quota capitale si sostituisce un mutuo puro con durata *t.* Si rimanda alla rappresentazione grafica del secondo capitolo.

La normale costruzione del piano d'ammortamento partirà dalla definizione delle quote capitale e, successivamente, verranno costruite le altre componenti del piano.

Tempo	Rata (R_t)	Quota Interesse (I_t)	Quota Capitale (Q_t)	Debito Residuo ($C^{(t)}$)
0				$n \cdot \frac{A}{n} = A$
1	$n \cdot \frac{A}{n} \cdot i + \frac{A}{n} = \frac{A}{n} \cdot (1 + n \cdot i)$	$n \cdot \frac{A}{n} \cdot i$	$\frac{A}{n}$	$(n-1) \cdot \frac{A}{n}$
2	$\frac{A}{n} \cdot [1 + (n-1) \cdot i]$	$(n-1) \cdot \frac{A}{n} \cdot i$	$\frac{A}{n}$	$(n-2) \cdot \frac{A}{n}$
…				
t	$\frac{A}{n} \cdot \{1 + [n-(t-1)] \cdot i\}$	$[n-(t-1)] \cdot \frac{A}{n} \cdot i$	$\frac{A}{n}$	$(n-t) \cdot \frac{A}{n}$
…				
n-1	$\frac{A}{n} \cdot (1 + 2 \cdot i)$	$2 \cdot \frac{A}{n} \cdot i$	$\frac{A}{n}$	$\frac{A}{n}$

n	$\frac{A}{n} \cdot (1+i)$	$\frac{A}{n} \cdot i$	$\frac{A}{n}$	0

Tabella 5: Piano d'ammortamento italiano

La condizione di chiusura contabile, come già affermato, è strutturalmente verificata. La condizione di chiusura finanziaria (finale ed iniziale) comporta una lunga dimostrazione la cui definizione, essendo onerosa in termini di spazio, può essere superata.

L'aspetto più interessante del piano d'ammortamento italiano riguarda la composizione della rata:

(1.23) Composizione della rata nell'Ammortamento Italiano

$$Rata_t = \frac{A}{n} \cdot \{1 + [n - (t-1)] \cdot i\} = [n - (t-1)] \cdot \frac{A}{n} \cdot i + \frac{A}{n}$$

Essa è composta dalla somma tra la quota capitale (costante) e la quota interessi (decrescente) che, invece, dipende direttamente dal numero di quote capitale pagate in precedenza. La rata immediatamente successiva a quella dell'epoca *t* sarà:

$$Rata_{t+1} = \frac{A}{n} \cdot [1 + (n-t) \cdot i]$$

Tale rata sarà inferiore poiché il debito residuo decresce. Se si effettua la differenza tra la Rata in *t+1* e quella in *t* si noterà che:

(1.24) Differenza tra due rate consecutive nell'Ammortamento Italiano

$$Rata_{t+1} - Rata_t = \frac{A}{n} \cdot [1 + (n-t) \cdot i] - \frac{A}{n} \cdot \{1 + [n - (t-1)] \cdot i\}$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{A}{n}} + \cancel{\frac{A}{n} \cdot n \cdot i} - \cancel{\frac{A}{n} \cdot t \cdot i} - \cancel{\frac{A}{n}} - \cancel{\frac{A}{n} \cdot n \cdot i} + \cancel{\frac{A}{n} \cdot t \cdot i} - \frac{A}{n} \cdot i = -\boldsymbol{\frac{A}{n} \cdot i}$$

La differenza tra una rata e quella precedente è costante e pari a $-\frac{A}{n} \cdot i$,e, di conseguenza, si dirà che le rate in un piano d'ammortamento italiano decrescono in progressione aritmetica di ragione $-\frac{A}{n} \cdot i$. La conclusione può essere estrapolata ugualmente con la logica poiché, annualmente, il debito residuo decresce della quota capitale $\frac{A}{n}$ e, di conseguenza, ogni anno la rata si riduce del prodotto tra il tasso *i* e la quota capitale $\frac{A}{n}$, $-\frac{A}{n} \cdot i$.

1.3.4 Ammortamento Francese

Il piano d'ammortamento francese, tra tutti i piani d'ammortamento, è quello più utilizzato nell'ambito bancario nel momento in cui si sceglie di contrarre un mutuo. Le questioni che spesso stanno alla base di questa preferenza non derivano da una ragione di convenienza[41] quanto, piuttosto, da motivazioni psicologiche del debitore. Ciò è dovuto dal fatto che l'ammortamento francese si distingue dagli altri per il fatto che è caratterizzato dalla presenza di rate costanti in tutto l'arco temporale della sua esistenza. Questa caratteristica è talvolta determinante nella psicologia umana poiché fornisce un'idea di stabilità e continuità nel versamento delle rate.

(1.25) Calcolo della rata nell'Ammortamento Francese

$$A = R \cdot a_{n|i} \rightarrow \boldsymbol{Rata} = \frac{A}{a_{n|i}} = \frac{A \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

La condizione di equità finanziaria è, in questo caso, strutturalmente implicita al calcolo della rata :

(1.26) Condizione di chiusura finanziaria iniziale nell'Ammortamento Francese

$$dato \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} = a_{n|i} \rightarrow A = R \cdot a_{n|i} \rightarrow \sum_{t=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-t} = A$$

La condizione di chiusura finanziaria finale viene dimostrata con grande semplicità poiché equivale a quella iniziale ma con l'aggiunta di $(1+i)^n$. La presenza di uno stesso fattore moltiplicativo in entrambi i lati dell'uguaglianza determina la sua eliminazione lasciando invariata la condizione di chiusura iniziale.

(1.27) Condizione di chiusura finanziaria finale nell'Ammortamento Francese

$$dato \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{(n-t)} = s_{n|i} \rightarrow s_{n|i} = a_{n|i} \cdot (1+i)^n \rightarrow A \cdot \cancel{(1+i)^n} = R \cdot a_{n|i} \cdot \cancel{(1+i)^n}$$

$$\rightarrow A = R \cdot a_{n|i}$$

[41] Il confronto avviene per lo più con il piano d'ammortamento italiano; in termini di servizio del debito, inteso come la somma di tutte le rate da corrispondere (quindi l'esborso totale a cui il debitore deve andar incontro) l'ammortamento francese è in realtà più oneroso di quello italiano. Questo avviene perché l'ammortamento italiano salda quote capitale più elevate sin da subito e, dunque, è meno esposto alla maturazione degli interessi sul debito residuo (più il pagamento degli interessi è postergato più sarà alta la quota di interessi da corrispondere).

In ogni piano d'ammortamento la rata finale è il risultato di: $R_n = Q_n + Q_n \cdot i$, nel caso di rate costanti $R = Q_n \cdot (1+i)$. L'ultima quota capitale sarà pari a: $Q_n = \frac{R}{(1+i)} = R \cdot v$.

Poiché in generale $R_i = Q_i + I_i,\ I_i = C^{(i-1)} \cdot i$ e nello specifico $R_t = R_{t+1}$:

$$Q_t + I_t = Q_{t+1} + I_{t+1} \rightarrow Q_t + C^{(t-1)} \cdot i \ = Q_{t+1} + C^{(t)} \cdot i$$

Si utilizza la 1.7:

$$Q_t + (Q_t + Q_{t+1} + \cdots + Q_n) \cdot i \ = Q_{t+1} + (Q_{t+1} + Q_{t+2} + \cdots + Q_n) \cdot i$$

che semplificata diventa:

(1.28) Differenza tra due quote capitale consecutive nell'Ammortamento Francese

$$Q_t + Q_t \cdot i + \cancel{(Q_{t+1} + \cdots + Q_n) \cdot i} = Q_{t+1} + \cancel{(Q_{t+1} + Q_{t+2} + \cdots + Q_n) \cdot i}$$

$$Q_t + Q_t \cdot i = Q_{t+1} \rightarrow \boldsymbol{\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = (1+i)}$$

Il significato matematico di questa uguaglianza è evidente: le quote capitale all'interno di un piano d'ammortamento francese sono crescenti in progressione geometrica di ragione $(1+i)$. Essendo l'ultima quota capitale pari a $R \cdot v$, le quote precedenti diminuiranno in ragione di $(1+i)$ sino a identificare la generica quota capitale, Q_t:

(1.29) Valore di una generica quota capitale nell'Ammortamento Francese

$$Q_t = R \cdot v^{n-(t-1)}$$

Disponendo delle quote capitale e delle rate, rimangono da valutare il debito residuo e le quote interesse. Per verificare la condizione di chiusura contabile si rappresenta il piano d'ammortamento parziale con le rate e le quote capitale:

Tempo	Rata	Quota Capitale
0		
1	R	$R \cdot v^n$
2	R	$R \cdot v^{n-1}$
…		
t	R	$R \cdot v^{n-(t-1)}$
…		
n-1	R	$R \cdot v^2$

n	R	$R \cdot v$

Tabella 6: Rappresentazione parziale piano d'ammortamento francese

Poiché la sommatoria delle quote capitale ha sempre in comune la rata, essa può esser messa a fattor comune. La sommatoria dei valori attuali unitari v^t è sempre uguale a $a_{n|i}$. A questo punto la condizione di chiusura contabile è di facile definizione:

(1.30) Condizione di chiusura contabile nell'Ammortamento Francese

$$\sum_{t=1}^{n} Q_t = R \cdot \sum_{t=1}^{n} v^t = R \cdot a_{n|i} = A$$

Il debito residuo può essere riscritto secondo la relazione appena esposta. Se si tiene conto che al passare di ogni periodo R rimane costante ma la sommatoria $\sum_{t=1}^{n} v^t$ si riduce della porzione di v contenuto nella quota capitale[42], il piano d'ammortamento sarà il seguente:

Tempo	Rata (R_t)	Quota Interesse (I_t)	Quota Capitale (Q_t)	Debito Residuo ($C^{(t)}$)
0				$R \cdot a_{n\|i} = R \cdot \frac{1-v^n}{i}$
1	R	$R \cdot \frac{1-v^n}{\cancel{i}} \cdot \cancel{i} = R \cdot (1-v^n)$	$R \cdot v^n$	$R \cdot a_{n-1\|i}$
2	R	$R \cdot (1-v^{n-1})$	$R \cdot v^{n-1}$	$R \cdot a_{n-2\|i}$
…				
t	R	$R \cdot (1-v^{n-(t-1)})$	$R \cdot v^{n-(t-1)}$	$R \cdot a_{n-t\|i}$
…				
n-1	R	$R \cdot (1-v^2)$	$R \cdot v^2$	$R \cdot a_{1\|i} = R \cdot v$
n	R	$R \cdot (1-v)$	$R \cdot v$	0

Tabella 7: Piano d'ammortamento francese

Come nell'ammortamento italiano, anche nell'ammortamento francese si può applicare il *principio di composizione dei contratti finanziari*, tuttavia, nel caso dell'ammortamento francese risulta più comodo utilizzare *n* ZCB poiché sono di facile sostituzione alle *n* rate che compongono il piano d'ammortamento francese[43].

[42] Ad esempio, al pagamento della prima rata si sottrae dal debito residuo $R \cdot v^n$ e, di conseguenza, dalla sommatoria $\sum_{t=1}^{n} v^t$ si sottrae v^n. $a_{n|i}$ diventerà $a_{n-1|i}$ poiché $\sum_{t=1}^{n} v^t$ è diventata $\sum_{t=1}^{n-1} v^t$.

[43] La scelta tra Mutuo Puro e ZCB è arbitraria, entrambi, secondo il principio menzionato, possono sostituirsi al piano d'ammortamento; la scelta tra i due è dettata solo da fattori di convenienza e praticità.

1.3.4 Ammortamento Americano

Il piano di rimborso americano[44] è il risultato della combinazione di due piani distinti:

- Il *Mutuo Puro*: piano utilizzato per prendere a prestito la somma di denaro
- Il *Piano di Costituzione*: piano utilizzato per mitigare la rata finale del mutuo puro

Per evitare di rimborsare per intero la quota capitale A, a scadenza (vedi tabella 4), l'individuo debitore cercherà di costituire un piano d'accumulo in cui versare delle rate periodali (costanti o meno). La maturazione di quest'ultime avverrà in capitalizzazione composta (reinvestimento degli interessi) permettendo, così, al debitore di far maturare il fondo sino all'epoca n di una somma pari alla quota capitale A del mutuo puro. Con il versamento nel piano d'accumulo di n rate costanti, con importo che si vuole costituire a scadenza pari ad A, il valore di ciascuna rata, $R^{(c)}$, sarà:

(1.31) Calcolo della rata costante in un Piano di Costituzione

$$dato\ S = A \rightarrow A = R^{(c)} \cdot s_{n|i_{acc}} \rightarrow R^{(c)} = \frac{A}{s_{n|i_{acc}}}$$

Il piano di costituzione, seguendo una logica opposta a quella della restituzione del debito, varierà nelle sue caratteristiche. Il cambiamento più importante riguarda la costituzione della quota capitale che, a differenza dei piani d'ammortamento visti in precedenza, è il risultato della somma tra la rata e la quota interesse e non più la differenza tra queste due. Di seguito viene riportato lo schema di un piano di costituzione generico (rate costanti) con tasso di accumulo i_{acc}:

Tempo	Rata ($R^{(c)}$)	Quota Interesse (I_t)	Quota Capitale (Q_t)	Fondo accumulato ($F^{(t)}$)
0				
1	$R^{(c)}$	0	$R^{(c)}$	$R^{(c)} \cdot s_{1\|i_{acc}}$[45]
2	$R^{(c)}$	$F^{(1)} \cdot i_{acc}$	$R^{(c)} + I_2$	$R^{(c)} \cdot s_{2\|i_{acc}}$
...				
t	$R^{(c)}$	$F^{(t-1)} \cdot i_{acc}$	$R^{(c)} + I_t$	$R^{(c)} \cdot s_{t\|i_{acc}}$
...				
n-1	$R^{(c)}$	$F^{(n-2)} \cdot i_{acc}$	$R^{(c)} + I_{n-1}$	$R^{(c)} \cdot s_{n-1\|i_{acc}}$
n	$R^{(c)}$	$F^{(n-1)} \cdot i_{acc}$	$R^{(c)} + I_n$	$R^{(c)} \cdot s_{n\|i_{acc}} = A$

Tabella 8: Piano di costituzione a rate costanti

[44] Anche definito "sinking fund" o "a due tassi"

[45] Il fondo accumulato non è solo il risultato del fondo accumulato nell'epoca precedente più la quota capitale presente, $F^{(t-1)} + Q_t$, ma può essere rappresentato dalla formula riportata di sopra.

Per ciascuna epoca di rimborso, l'esborso complessivo che il debitore dovrà sostenere è:

(1.32) Rata di un piano d'Ammortamento Americano

$$R^{(tot)} = (A \cdot i)^{46} + \frac{A}{s_{n|i_{acc}}}{}^{47}$$

La costituzione del piano d'ammortamento americano sarà il risultato della combinazione dei due piani appena elencati (non è di maggiore rilevanza la rappresentazione grafica del piano), tuttavia, è di fondamentale importanza definire quali sono le relazioni tra i due tassi, i_{acc} ed i , e come varia la rata totale, $R^{(tot)}$, se i due tassi differiscono tra di loro:

(1.33) Relazione tra i due tassi dell'Ammortamento Americano

$$R^{(tot)} = A \cdot i + \frac{A}{s_{n|i_{acc}}} = A \cdot \left(i + \frac{1}{s_{n|i_{acc}}} + i_{acc} - i_{acc} \right) = A \cdot \left[\left(\frac{1}{s_{n|i_{acc}}} + i_{acc} \right)^{48} + i - i_{acc} \right]$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A \cdot \frac{1}{a_{n|i_{acc}}} + A \cdot (i - i_{acc})}$$

È evidente che quando i due tassi sono uguali, la rata totale, $R^{(tot)}$, equivale alla rata di un piano d'ammortamento alla francese (1.25). Negli altri casi si possono identificare due fattispecie:

1. $\boldsymbol{i > i_{acc}}$: la rata totale è maggiore della rata che si avrebbe se si avesse optato per un piano d'ammortamento francese.
2. $\boldsymbol{i < i_{acc}}$: la rata totale è minore della rata che si avrebbe se si avesse optato per un piano d'ammortamento francese.

È ovvio che nella maggior parte dei casi si verifica la prima delle due, in quanto le banche danno a prestito ad un tasso più alto di quello che corrispondono quando prendono a prestito[49].

---

[46] Cedola periodale nel mutuo puro

[47] Rata del piano di costituzione, 1.31.

[48] $A \cdot \left(\frac{1}{s_{n|i}} + i \right) = A \cdot i + \frac{A}{s_{n|i}} = A \cdot i + \frac{A \cdot i}{(1+i)^n - 1} = A \cdot i \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+i)^n - 1} \right] = A \cdot i \cdot \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$

$A \cdot \left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \right] \cdot (1+i)^n = A \cdot \frac{1}{\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}} = \frac{A}{a_{n|i}}$

[49] Spread bancario. Esso rappresenta la percentuale che una banca richiede in più rispetto ai tassi interbancari vigenti quali l'Euribor, l'Eurirs oppure in termini internazionali con il LIBOR (anche se di recente ha perso di reputazione a causa di una serie di scandali).

1.3.4 Duration nei piani d'ammortamento

La duration è un indice di durata che ricopre un ruolo fondamentale nella finanza, è uno strumento di notevole efficacia che svolge molteplici funzioni ed assume molteplici significati. Generalmente viene utilizzata per confrontare più titoli con stessa durata sotto il profilo del "rientro" del capitale investito: uno ZCB che rimborsa la quota capitale e gli interessi solo a scadenza, ha un'epoca di rientro che è sempre pari alla durata del titolo (ha la duration più alta possibile), mentre, invece, un mutuo puro che paga cedole annuali rientrerà dell'investimento sempre tardi, ma sicuramente prima dello ZCB.

Si presenta la formula per il calcolo della Duration, $D(i)$, di un titolo:

(1.34) Calcolo della Duration di un titolo

$$D(i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot R_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t \cdot (1+i)^{-t}}$$

Il denominatore non è altro che il prezzo del titolo o, nel caso dei piani d'ammortamento, la somma presa a prestito, A. Di fondamentale importanza è l'epoca media di rimborso per la valutazione di un prestito. Se si prende in considerazione la formula 1.11, è facile comprendere che la valutazione di un prestito è fortemente dipendente dalla variazione dei tassi; dunque, se variano di molto i tassi ed il prestito è caratterizzato da una elevata epoca di rientro, il valore del titolo varierà di molto proprio perché non è stata ancora rimborsata la quota maggiore di capitale[50] (gli interessi maturano su una parte maggiore di capitale).

Dopo aver fatto questa premessa si può affermare che la duration assume primariamente tre significati:

1. Epoca di rientro del capitale investito
2. Indice di volatilità
3. Epoca ottima di smobilizzo

Il primo dei tre significati è quello più semplice da intuire. Essendo la duration (o durata media finanziaria) intesa come la scadenza media dei flussi di cassa attesi ponderata per il contributo del

[50] Si è portati a domandare sul perché, allora, ZCB e mutuo puro sono diversi sotto il profilo della duration. Semplicemente perché nel mutuo puro gli interessi vengono corrisposti periodicamente e non maturano tutti alla fine. Negli ZCB, non corrispondendo alcuna rata, gli interessi vengono corrisposti per intero al termine.

valore attuale di ciascun flusso alla formazione del prezzo[51], essa identifica la durata finanziaria di un titolo, ovvero il tempo di vita medio di un flusso di pagamenti sui titoli di debito.

La Duration è intesa come indice di volatilità per il motivo espresso in precedenza, poiché titoli con duration più alta sono più vulnerabili alle variazioni dei tassi d'interesse: ad un'alta duration corrisponde un'elevata volatilità (elevata Duration espone ad un elevato rischio di tasso d'interesse). Questo può essere anche dimostrato attraverso la definizione della variazione del prezzo collegata alla variazione dei tassi d'interesse. Di seguito viene riportata la formula per il calcolo della variazione del prezzo al variare del tasso d'interesse, i, in relazione alla Duration $D(i)$:

(1.35) Variazione del prezzo in relazione alla Duration

$$\Delta P = -\frac{D(i)}{(1+i)} \cdot \Delta i$$ [52]

La presente formula, seppur non totalmente puntuale nel definire la variazione percentuale del prezzo[53], permette di comprendere il ruolo centrale della duration: maggiore è la duration, maggiore sarà la variazione del prezzo; minore è la duration, minore sarà la variazione del prezzo. Attraverso la Convexity del titolo si corregge in parte l'imprecisione della formula 1.35. Si riporta la formula per il calcolo della Convexity:

(1.36) Calcolo della Convexity di un titolo

$$C_x(i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot (t+1) \cdot R_t \cdot (1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} R_t \cdot (1+i)^{-t}} \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$$

e la conseguente formula per il calcolo della variazione del prezzo:

(1.37) Variazione del prezzo in relazione alla Duration e Convexity

$$\Delta P = -\frac{D(i)}{(1+i)} \cdot \Delta i + Convexity \cdot \frac{\Delta i^2}{2!}$$

[51] Borsa Italiana.

[52] Ai fini del presente elaborato non è importante definire i passaggi matematici per giungere a questa formula; è importante sapere che $-\frac{D(i)}{(1+i)}$ rappresenta la Volatility del titolo ovvero la variazione relativa della funzione prezzo rispetto alla variazione del tasso ($\frac{D(i)}{(1+i)}$ viene definita come Duration Modificata). Utilizzando il tasso d'interesse effettivo i non vi è uguaglianza diretta tra volatilità e duration mentre invece nel caso di tasso istantaneo d'interesse δ la uguaglianza è diretta: $Volatility = -D(\delta)$.

[53] Nello specifico tende a sottostimare la variazione percentuale. È attraverso la Convexity del titolo che si corregge questa imprecisione (bisogna ricordare che sono tutte stime e la vera variazione del prezzo deve essere calcolata per intero e non attraverso formule).

È fondamentale puntualizzare che questa equivalenza è valida unicamente per variazioni del tasso di rendimento di titoli simili di nuova emissione, ciò risulta dal fatto che può essere utilizzata preventivamente per verificare il grado di rischio del titolo, ma non fornirà la corretta valutazione del prezzo per variazioni successive del tasso d'interesse. Per valutare quest'ultime, come verrà mostrato successivamente, bisognerà ricorrere al calcolo specifico attraverso l'attualizzazione delle rate future ad un tasso differente, ossia la formula 1.11.

Il terzo significato è quello di più complessa comprensione, ma, poiché la dimostrazione di questa caratteristica non è centrale ai fini di questo elaborato, ci si limiterà unicamente ad esporla. Identificando il *Valore di reinvestimento o di reimpiego* come il montante delle somme incassate, ed il *Valore di realizzo* come il valore attuale delle somme ancora da incassare, la duration assume il significato di epoca ottima di smobilizzo, poiché è l'epoca in cui, a prescindere dalle condizioni effettive del mercato, se si disinveste incassando il cosiddetto *valore di smobilizzo* (dato dalla somma tra il valore di realizzo ed il valore di reinvestimento), si ottiene con certezza un rendimento pari o superiore a quello prefissato al momento dell'acquisto del titolo. Il rischio di realizzo ed il rischio di reinvestimento, inversamente correlati, si bilanciano perfettamente all'epoca $h = D(i)$[54].

Dopo aver definito le caratteristiche della Duration si vuole procedere con l'esposizione di un esempio applicato al caso dei piani d'ammortamento. Di seguito verranno rappresentate le distinzioni in termini di duration e variazione dei prezzi tra i vari piani, la correlazione tra Duration e variazione dei prezzi e, infine, si procederà all'applicazione delle formule dalla 1.34 alla 1.37. Si conclude con una rappresentazione grafica dei concetti appena espressi.

Esempio 4

Caratteristiche generali	
Tasso contrattuale annuo	10,0%
Capitale da rimborsare	100.000,00
Numero di anni	10
Tasso corrente	8,0%
Rate	Annue
Variazione tassi	- 0,02
TAN	10,0%
TAE	10,0%
TAEG	10,0%

Caratteristiche del mutuo puro	
Emissione	Alla Pari
Tasso cedolare annuo j(1)	10%
Tasso cedolare = Yield To Maturity	

[54] C. Crenca, P. Fersini, G. Melisi, G. Olivieri, M. Pelle , *Elementi di matematica finanziaria*. Milano: Pearson, 2018

AMMORTAMENTO FRANCESE							
					A tasso contrattuale	A tasso corrente	
Tempo	**Rata**	**Quota interesse**	**Quota capitale**	**Debito Residuo**	Rate attualizzate	Rate Attualizzate	Variazione %
0				100.000,00	100.000,00	109.203,48 €	9,20%
1	16.274,54	10.000,00	6.274,54	93.725,46	93.725,46	101.665,22	8,47%
2	16.274,54	9.372,55	6.901,99	86.823,47	86.823,47	93.523,90	7,72%
3	16.274,54	8.682,35	7.592,19	79.231,27	79.231,27	84.731,28	6,94%
4	16.274,54	7.923,13	8.351,41	70.879,86	70.879,86	75.235,24	6,14%
5	16.274,54	7.087,99	9.186,55	61.693,31	61.693,31	64.979,52	5,33%
6	16.274,54	6.169,33	10.105,21	51.588,10	51.588,10	53.903,34	4,49%
7	16.274,54	5.158,81	11.115,73	40.472,37	40.472,37	41.941,07	3,63%
8	16.274,54	4.047,24	12.227,30	28.245,07	28.245,07	29.021,81	2,75%
9	16.274,54	2.824,51	13.450,03	14.795,04	14.795,04	15.069,02	1,85%
10	16.274,54	1.479,50	14.795,04	-	-	-	-

Duration	4,73
Volatility	- 4,30
Convexity	28,88

Variazione prezzo in t = 0, Duration =	108.591,75
Variazione prezzo in t = 0, Convexity =	109.169,27

AMMORTAMENTO ITALIANO							
					A tasso contrattuale	A tasso corrente	
Tempo	**Rata**	**Quota interesse**	**Quota capitale**	**Debito Residuo**	Rate attualizzate	Rate Attualizzate	Variazione %
0				100.000,00	100.000,00	108.224,80	8,22%
1	20.000,00	10.000,00	10.000,00	90.000,00	90.000,00	96.882,78	7,65%
2	19.000,00	9.000,00	10.000,00	80.000,00	80.000,00	85.633,40	7,04%
3	18.000,00	8.000,00	10.000,00	70.000,00	70.000,00	74.484,07	6,41%
4	17.000,00	7.000,00	10.000,00	60.000,00	60.000,00	63.442,80	5,74%
5	16.000,00	6.000,00	10.000,00	50.000,00	50.000,00	52.518,22	5,04%
6	15.000,00	5.000,00	10.000,00	40.000,00	40.000,00	41.719,68	4,30%
7	14.000,00	4.000,00	10.000,00	30.000,00	30.000,00	31.057,26	3,52%
8	13.000,00	3.000,00	10.000,00	20.000,00	20.000,00	20.541,84	2,71%
9	12.000,00	2.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.185,19	1,85%
10	11.000,00	1.000,00	10.000,00	-	-	-	-

Duration	4,24
Volatility	- 3,86
Convexity	24,32

Variazione prezzo in t = 0, Duration =	107.710,87
Variazione prezzo in t = 0, Convexity =	108.197,19

ZCB							
					A tasso contrattuale	A tasso corrente	
Tempo	**Rata**	**Quota interesse**	**Quota capitale**	**Debito Residuo**	Rate attualizzate	Rate Attualizzate	Variazione %
0				100.000,00	100.000,00	120.140,46	20,14%
1	-	10.000,00	- 10.000,00	110.000,00	110.000,00	129.751,70	17,96%
2	-	11.000,00	- 11.000,00	121.000,00	121.000,00	140.131,83	15,81%
3	-	12.100,00	- 12.100,00	133.100,00	133.100,00	151.342,38	13,71%
4	-	13.310,00	- 13.310,00	146.410,00	146.410,00	163.449,77	11,64%
5	-	14.641,00	- 14.641,00	161.051,00	161.051,00	176.525,75	9,61%
6	-	16.105,10	- 16.105,10	177.156,10	177.156,10	190.647,81	7,62%
7	-	17.715,61	- 17.715,61	194.871,71	194.871,71	205.899,64	5,66%
8	-	19.487,17	- 19.487,17	214.358,88	214.358,88	222.371,61	3,74%
9	-	21.435,89	- 21.435,89	235.794,77	235.794,77	240.161,34	1,85%
10	259.374,25	23.579,48	235.794,77	-	-	-	-

Duration	10,00
Volatility	- 9,09
Convexity	90,91

Variazione prezzo in t = 0, Duration =	118.181,82
Variazione prezzo in t = 0, Convexity =	120.000,00

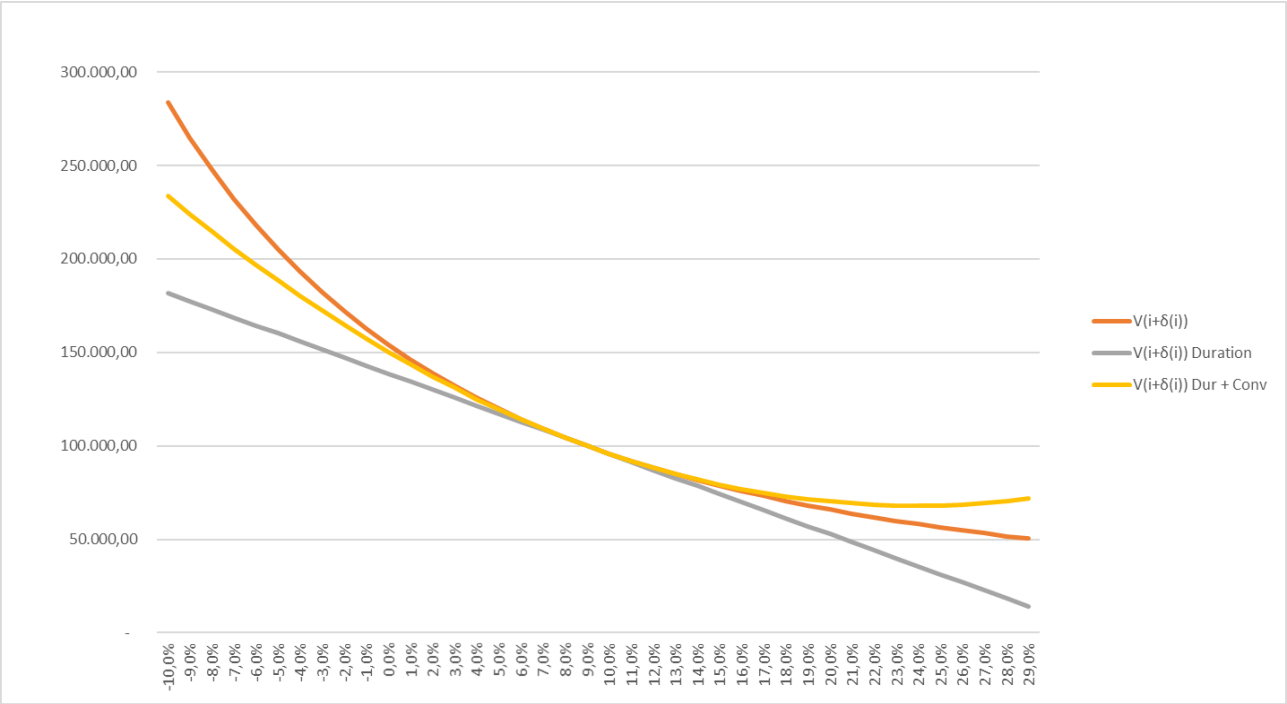
MUTUO PURO							
					A tasso contrattuale	A tasso corrente	
Tempo	**Rata**	**Quota interesse**	**Quota capitale**	**Debito Residuo**	Rate attualizzate	Rate Attualizzate	Variazione %
0	-			100.000,00	100.000,00	113.420,16	13,42%
1	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	112.493,78	12,49%
2	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	111.493,28	11,49%
3	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	110.412,74	10,41%
4	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	109.245,76	9,25%
5	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	107.985,42	7,99%
6	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	106.624,25	6,62%
7	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	105.154,19	5,15%
8	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	103.566,53	3,57%
9	10.000,00	10.000,00	-	100.000,00	100.000,00	101.851,85	1,85%
10	110.000,00	10.000,00	100.000,00	-	-	-	-

Duration	6,76
Volatility	- 6,14

Variazione prezzo in t = 0, Duration =	112.289,13
Variazione prezzo in t = 0, Convexity =	113.344,99

Ad una riduzione del tasso d'interesse corrisponde un aumento generale dei prezzi in qualsiasi epoca di valutazione; si tratta del cosiddetto *effetto prezzo* secondo il quale, in qualsiasi legge di capitalizzazione, una variazione negativa dei tassi determina una valutazione a rialzo del prezzo, mentre, invece, una variazione positiva ne comporta una riduzione.

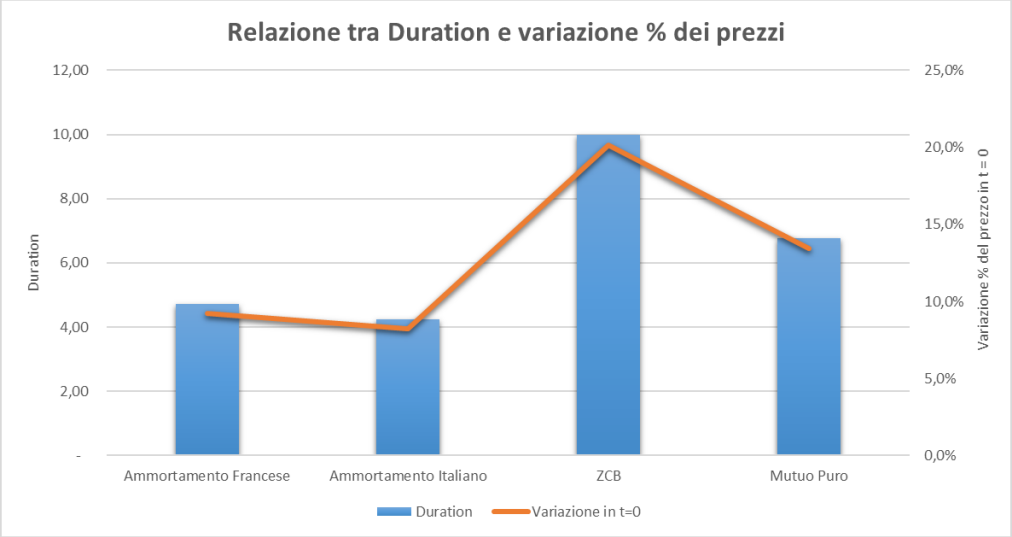
Come si può notare osservando i prezzi a seguito di una diminuzione del tasso d'interesse, la Convexity corregge di molto il valore fornito dalla sola Duration, e questo avviene perché con la sola Duration si ha un'approssimazione lineare del prezzo mentre invece con la Convexity si ha un'approssimazione parabolica. Bisogna puntualizzare che con basse variazioni dei tassi, la distinzione tra la 1.35 e la 1.37 viene a diminuire, in quanto la 1.35 rappresenta la derivata prima (corretta per $1 + i$) del prezzo rispetto al tasso di rendimento. Ciò significa che la 1.35 è tangente alla funzione del prezzo rispetto al tasso di rendimento $V(i + \delta(i))$, nel punto in cui il tasso i è uguale al tasso effettivo d'interesse contrattuale. Lo stesso vale per la 1.37, dove quest'ultima non comprende solo la 1.35 ma aggiunge la Duration di secondo ordine (che rappresenta la derivata seconda del prezzo rispetto al tasso di rendimento) moltiplicata per $\frac{\Delta i^2}{2!}$. Di seguito si riporta la rappresentazione grafica della funzione del valore dell'ammortamento francese (esempio 4) in t_0 rispetto al tasso di rendimento $V(i + \delta(i))$, calcolata sia in maniera effettiva (come VAN delle rate ancora da versare al variare del tasso i) sia attraverso la formula 1.35 sia attraverso la formula 1.37:



Il valore effettivo del debito in t_0 è sempre maggiore di quello calcolato con la 1.35, mentre la 1.37 sovrastima il prezzo per variazioni positive dei tassi e ne sottostima il valore per variazioni negative.

Tuttavia, l'elemento più importante che si può ricavare dall'*esempio 4* è che vi è una correlazione positiva (prossima all'unità) tra la duration e la variazione dei prezzi. Prendendo in considerazione i valori della Duration dell'*esempio 4* e le variazioni dei prezzi corrispettive ad ogni piano d'ammortamento, si può rappresentare in maniera efficace la loro correlazione attraverso l'analisi della regressione ed in maniera meno formale attraverso un grafico a due assi verticali:

Piano d' Ammortamento	Duration	Variazione in t=0
Ammortamento Francese	4,73	9,2%
Ammortamento Italiano	4,24	8,2%
ZCB	10,00	20,1%
Mutuo Puro	6,76	13,4%



Statistica della regressione	
R multiplo	0,999998032
R al quadrato	0,999996065
R al quadrato correttc	0,999994097
Errore standard	0,006358741
Osservazioni	4

La correlazione è molto elevata e prossima all'unità (R multiplo rappresenta il coefficiente di correlazione), mentre R^2 prossimo all'unita, allo stesso modo, spiega come i valori non si discostino dalla regressione lineare. Questa conclusione può essere osservata anche nel grafico, dove il punto di massimo della Duration ed il punto di massimo della variazione percentuale del prezzo coincidono con lo stesso piano d'ammortamento (ZCB). L'ammortamento francese e l'ammortamento italiano, come era facile intuire, sono i due piani che, a seguito della variazione dei tassi, subiscono minori conseguenze. L'ammortamento italiano è meno esposto al rischio di tasso d'interesse rispetto a quello francese per il fatto che nell'ammortamento italiano le prime rate sono maggiori rispetto a quelle

dell'ammortamento francese e, in termini di attualizzazione, pesano maggiormente poiché vengono scontate per un arco temporale inferiore[55].

Ancora, seppur non dimostrato nell'esempio 4, la duration è inversamente correlata al tasso d'interesse. Ciò significa che, a parità di condizioni, tassi d'interesse più elevati riducono la duration di un titolo e, al contrario, tassi d'interesse inferiori aumentano la duration di un titolo. La motivazione è riconducibile al fatto che, quando ad esempio il tasso d'interesse è più alto, le rate future sono scontate in misura maggiore e diventano meno importanti in termini di valore attuale rispetto alla somma totale dei valori attuali delle rate (cioè la scadenza ponderata al valore attuale della annessa rata ricoprirà un'importanza inferiore nella media totale).

Con questa analisi finale viene concluso il capitolo primo e si procede ad analizzare la presenza dell'anatocismo nei piani d'ammortamento.

[55] È evidente che, se la duration è ponderata per il valore attuale dei cash flow, le prime rate subiscono uno sconto inferiore e, di conseguenza, avendo un valore attuale più elevato, avranno un peso maggiore nella media ponderata per le scadenze.

Capitolo Secondo

Anatocismo e controversia giuridica

Senza discostarsi dai contenuti del capitolo primo, il presente capitolo si occupa della distinzione tra i due regimi di capitalizzazione che vengono più frequentemente utilizzati: la capitalizzazione semplice e la capitalizzazione composta. Nel corso del capitolo primo, per praticità e per i motivi che in questo capitolo verranno espressi, si è fatto ricorso all'utilizzo unico della capitalizzazione composta. Da questa, deriva il fenomeno che verrà definito come "anatocistico", che ha creato non pochi problemi nella giurisprudenza moderna. Per chiarire quella che viene identificata come controversia giuridica sull'anatocismo si prenderanno in considerazione sia il quadro normativo attuale italiano sia differenti sentenze. Si concluderà il capitolo definendo le basi matematico-finanziarie che "risolvono" alcuni aspetti della controversia giuridica; queste ultime permetteranno di ridimensionare alcune sentenze (finanziariamente sbagliate e) di difficile matrice teorica.

2.1 Differenze tra i due regimi di capitalizzazione (Capitalizzazione Semplice e Capitalizzazione Composta)

La Capitalizzazione Semplice (da qui in poi CS) e la Capitalizzazione Composta (da qui in poi CC) rappresentano i due regimi finanziari tradizionalmente adottati per la valutazione di operazioni finanziarie.

"Un regime finanziario di capitalizzazione (e di attualizzazione) è un complesso di principi economico-finanziari e di convenzioni che regolano lo svolgimento di un'operazione finanziaria e permettono di definire le leggi (finanziarie) di capitalizzazione e di sconto con cui effettuare le valutazioni connesse all'operazione stessa"[56].

Come è stato già possibile accennare nell'ambito del calcolo del TAN e del TAE, la distinzione tra CS e CC viene più comunemente ricondotta alla distinzione nel calcolo degli interessi. Nello specifico, si può affermare che, mentre in CS gli interessi maturati vengono solamente contabilizzati, nella CC la maturazione degli interessi viene capitalizzata e, dunque, determina la maturazione di

[56] Cfr. Giuseppe Varoli, *Matematica Finanziaria*. Bologna: Patròn Editore, pagina 16.

nuovi interessi calcolati anche sugli interessi da poco maturati. Il fenomeno che viene descritto nell'ambito della CC (maturazione degli interessi sugli interessi) sarà il fulcro della trattazione successiva potendo, quest'ultimo, costituire la base del "fenomeno anatocistico" degli interessi. La distinzione tra CC e CS appena fornita è il risultato di differenti caratteristiche nei due regimi di capitalizzazione; di seguito verranno definite le differenze analizzate sotto un piano analitico.

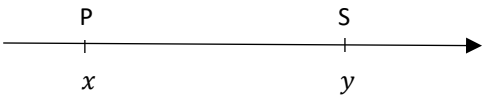
Per proseguire la trattazione dei regimi finanziari è fondamentale definire che cosa rappresenta un'operazione finanziaria. Un'operazione finanziaria è un insieme di due o più prestazioni finanziarie, e relativi tempi di disponibilità, che vengono scambiate in modo finanziariamente equo tra soggetti nell'ambito di un mercato dei capitali. Le prestazioni finanziarie sono individuate da una coppia ordinata di valori (importo; epoca) simbolicamente $(P;\ x)$ e vengono definite simultanee se caratterizzate dalla stessa epoca di riferimento[57]. Quest'ultime sono sommabili in una prestazione unica che avrà come importo la somma algebrica degli importi e come epoca l'epoca comune a tutte le prestazioni:

(2.1) Somma di prestazioni simultanee

$$(P; x) + (Q; x) = (P + Q; x)$$

Nel caso in cui le prestazioni non dovessero essere simultanee, l'operazione di somma necessita di un adeguato spostamento nel tempo (attraverso l'attualizzazione o capitalizzazione) in modo da renderle simultanee: tale spostamento va realizzato tenendo presente il principio di equivalenza finanziaria.

La prima, più grande, distinzione tra CC e CS deriva dalla definizione di <u>principio di equivalenza finanziaria</u>[58]: dati due importi monetari P e S disponibili in tempi futuri diversi, rispettivamente x e y, essi vengono definiti finanziariamente equivalenti al tempo x (epoca d'equivalenza) se il valore di P e S in x è lo stesso, secondo la legge di capitalizzazione o di sconto applicata.



[57] Lavoro in via di pubblicazione di autore/autori ignoto/ignoti. *Ammortamento di prestiti "alla francese" nei regimi finanziari della capitalizzazione composta e della capitalizzazione semplice. Una trattazione comparata dei processi di rimborso nei due regimi finanziari.*

[58] Da tenere distinto dall'epoca di pattuizione del contratto che rappresenta l'epoca giuridica di pattuizione del contratto; essa, infatti, rappresenta: " l'epoca iniziale è quella in cui si fissano i parametri, le caratteristiche e le regole e a tale epoca al contratto si allega, facendone parte integrante, il piano di ammortamento". Antonio Annibali, Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri, *Ammortamento "alla francese" di mutui in capitalizzazione semplice La scelta dell'epoca di equivalenza finanziaria: finale oppure iniziale?*. "Le controversie bancarie" n.34.

(2.2) Condizione di equivalenza finanziaria

$$(P; x) \approx (S; y)$$

Il principio di equivalenza finanziaria, tuttavia, non vale in tutti i modelli di capitalizzazione e nel caso attuale si può differire tra CC e CS. Nella CC si è di fronte ad un regime in cui vige il principio di equivalenza finanziaria assoluta ($\forall u$) (dove per u si intende l'epoca di equivalenza), cioè nel quale l'equivalenza finanziaria è valida indipendentemente dall'epoca scelta:

(2.3) Condizione di equivalenza finanziaria assoluta

$$(P; x) \approx_{\forall u} (S; y)$$

Conseguenza diretta di questa uguaglianza è che, come è stato possibile accennare nel capitolo primo, in un piano d'ammortamento in CC possono essere verificate entrambe le condizioni di chiusura finanziaria rappresentate dalle formule 1.6.1 e 1.6.2. In CS, invece, vige il principio di equivalenza finanziaria relativa (u-equivalenza) in base al quale l'epoca di equivalenza deve essere predeterminata e, dunque, non indifferente:

(2.4) Condizione di equivalenza finanziaria relativa

$$(P; x) \approx_{u} (S; y)$$

Poiché la capitalizzazione composta gode del principio di equivalenza finanziaria assoluta, essa risponderà positivamente anche alla condizione di scindibilità secondo la quale si possono effettuare i calcoli scegliendo a proprio piacimento l'epoca di equivalenza, senza comportare conseguenze dirette sui risultati delle valutazioni. Il fattore di capitalizzazione in CC, valido dall'epoca x all'epoca y, sarà:

(2.5) Condizione di scindibilità delle leggi finanziarie (fattore di capitalizzazione da x a y in CC)

$$(\forall u) \qquad \mathrm{r_{x,y}} = \frac{\mathrm{r_{x,u}}}{\mathrm{r_{y,u}}}$$

È evidente che, se si vuole ottenere nella 2.2 l'importo S dall'importo P, basterà moltiplicare quest'importo per la 2.5:

$$(\forall u) \qquad \mathrm{S} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{r}_{x,y}$$

In CS la situazione si complica a causa dell'assenza di equivalenza assoluta; infatti, per far sì che la 2.2 sia valida, è necessario che venga determinata preventivamente un'epoca di equivalenza u. La

conseguenza si può notare più attentamente nel momento in cui bisogna definire l'importo S nella 2.2:

$$(u) \qquad S = P \cdot r_{x,y|u}$$

L'equivalenza appena rappresentata mostra come l'importo S si ottenga unicamente trasportando l'importo P dall'epoca x all'epoca y transitando per l'epoca u. Il fattore di capitalizzazione in CS valido dall'epoca x all'epoca y sarà uguale a:

$$(u) \qquad r_{x,y|u} = \frac{r_{x,u}}{r_{y,u}}$$

Per poter ottenere il tasso di capitalizzazione da x ad y, bisogna fissare preventivamente un'epoca u, che, dunque, sancisce l'inesistenza della condizione di scindibilità nella CS (seconda differenza tra CS e CC).

La terza differenza tra CC e CS riguarda la traslabilità delle leggi finanziarie, ovvero, quella condizione secondo la quale il valore dei coefficienti di scambio (di capitalizzazione, r, e di attualizzazione, v) non cambia in conseguenza della traslazione (di una qualsiasi ampiezza g) degli intervalli temporali di riferimento. Anche in questo caso, la distinzione tra equivalenza relativa ed equivalenza assoluta comporta in CS la definizione preliminare di un'epoca traslata di equivalenza (z-equivalenza) di ampiezza in questo caso ipotizzata, per facilitare le conclusioni, pari a $g = -x$, senza la quale non può essere definita l'equazione:

$$(z) \qquad S = P \cdot r_{t|z}$$

dove t indica l'ampiezza della traslazione $(y - x)$, z rappresenta l'epoca traslata d'equivalenza ($z = u - x$) e $r_{t|z}$ (è il risultato dell'equazione) deriva da:

$$(z) \qquad r_{x,y|u} = r_{x-x,y-x|u-x} = r_{t|z}$$

Come avvenuto in precedenza, l'importo S è il risultato dello spostamento di P dall'epoca 0 all'epoca t, transitando per l'epoca z.

In CC, grazie alla soddisfazione della condizione di equivalenza assoluta, si può vedere che il risultato è indipendente dall'epoca z:

$$(\forall z) \qquad S = P \cdot r_t$$

dove t indica l'ampiezza della traslazione $(y - x)$ e r_t deriva da:

$$(\forall z) \qquad r_{x,y} = r_{x-x,y-x} = r_t$$

L'importo S si ottiene spostando P dall'epoca 0 all'epoca t (per qualsiasi z).

Poiché entrambe le equivalenze (relative ed assolute) godono della proprietà di traslabilità, esse dipendono unicamente dalla durata dell'operazione e non dal tempo iniziale e/o finale.

L'insieme di queste puntualizzazioni comporta la proprietà tipica della CS: la additività. Essa può essere riassunta nella possibilità di poter ottenere l'interesse periodale $i_{t|z}$ (di durata t) come $\mathrm{i}_{\mathrm{z|i}} - \mathrm{i}_{\mathrm{z-t|i}}$ ovvero come $i \cdot t$. Naturalmente in CC è inconcepibile una tale costruzione proprio perché additività e scindibilità sono incompatibili.

Le distinzioni e le caratteristiche attribuite ai due regimi di capitalizzazione vengono riassunte nella seguente tabella:

Caratteristiche	**Capitalizzazione Composta**	**Capitalizzazione Semplice**
Condizione di equivalenza finanziaria	Assoluta	Relativa
Condizione di scindibilità	SI	NO
Additività	NO	SI
Condizione di traslabilità	SI, per qualsiasi *z*	SI, con *z* definita a priori

Tabella 9: Distinzioni tra Capitalizzazione Composta e Capitalizzazione Semplice

Dopo aver analizzato l'aspetto teorico dei due regimi di capitalizzazione si prendono in analisi le grandezze finanziarie che saranno fondamentali nel seguito del capitolo. Sarà infatti sufficiente in ciascuna delle due capitalizzazioni definire primariamente una delle grandezze e, da questa, costruire tutte le altre. La grandezza di partenza sarà il fattore di capitalizzazione.

In CC il fattore di capitalizzazione, $r_{t|i}$, viene definito come:

(2.5) Fattore di capitalizzazione in Capitalizzazione Composta

$$r_{t|i} = (1+i)^t$$

e, di conseguenza, le altre grandezze finanziarie saranno costruite partendo dalla 2.5;

(2.6) Fattore di attualizzazione in Capitalizzazione Composta

$$v_{t|i} = \frac{1}{r_{t|i}} = (1+i)^{-t}$$

Il rapporto di reciprocità tra fattore di capitalizzazione e fattore di attualizzazione sancisce la proprietà di *coniugio* nella CC. Il tasso periodale d'interesse $i_{t|i}$ equivale a:

$$i_{t|i} = r_{t|i} - 1 = (1+i)^t - 1$$

Da queste grandezze si possono definire il montante ed il valore attuale di una rendita composta da n rate unitarie; la definizione di questi due valori sarà fondamentale nel paragrafo 2.3.2:

(2.7) Montante di una rendita con rate unitarie in Capitalizzazione Composta

$$s_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(2.8) Valore attuale di una rendita con rate unitarie in Capitalizzazione Composta

$$a_{n|i} = \frac{s_{n|i}}{r_{n|i}} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Come è stato già osservato in precedenza, la distinzione tra CC e CS risiede nell'epoca d'equivalenza, che nel caso della CC può essere scelta indistintamente:

"Un'operazione si svolge in regime di capitalizzazione composta quando l'interesse è disponibile alla fine di ogni periodo di capitalizzazione" (rif. Giuseppe Varoli[59]); "La condizione di scindibilità (delle leggi) della capitalizzazione composta consente di ottenere lo stesso piano di ammortamento qualunque sia la condizione di chiusura imposta (ad es.: finale oppure iniziale)" (rif. Maria Caliri[60]).

Per quanto riguarda la scelta dell'epoca d'equivalenza in CS, dove le valutazioni finanziarie sono dipendenti dall'epoca individuata (formula 2.4), si possono identificare due scuole di pensiero principali:

1) Chi ipotizza come epoca ottimale l'inizio dell'operazione finanziaria (*CS.i*)[61]
2) Chi ipotizza come epoca ottimale la fine dell'operazione finanziaria (*CS.f*)

Nel presente elaborato verrà presa in considerazione la Capitalizzazione semplice finale. Per comprendere i motivi alla base di questa scelta si può iniziare rappresentando la differenza nel calcolo della quota interesse nei due casi:

(2.9) Calcolo della quota interessi in Capitalizzazione Semplice finale

$$\boldsymbol{I_t^{cs.f}} = i \cdot \frac{C^{(t-1)}{}_{cs.f}}{1 + i \cdot (n-t)}$$

[59] Cfr. Varoli Giuseppe, *Matematica Finanziar*ia. Bologna: Patròn Editore; pagina 17.
[60] Cfr. Caliri Maria, *Appunti di Matematica Finanziaria*, Torino: Giappichelli Editore; pagina 147.
[61] Carlo Mari, Graziano Aretusi, *Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare*. "Il Risparmio",2018.

(2.10) Calcolo della quota interessi in Capitalizzazione Semplice iniziale

$$\boldsymbol{I_t^{cs.i}} = i \cdot \frac{C^{(t-1)}{}_{cs.i}}{1 + i \cdot (t-1)}$$

La distinzione è evidente:

- Nel caso della $CS.f$ gli interessi vengono attualizzati dall'epoca finale all'epoca di riferimento, t; ciò equivale a far pagare in tale tempo il valore attuale della quota interesse dovuta in epoca finale.
- Nel caso della $CS.i$ gli interessi vengono attualizzati dall'epoca di riferimento al tempo 1.

La distinzione analitica tra le due modalità permette subito di identificare come nel caso della $CS.f$ il significato economico e finanziario dell'attualizzazione sia evidente. Questa evidenza non è riscontrabile nella $CS.i$ dove, per giunta, "l'attualizzazione (dal tempo di scadenza della rata al tempo uno) è tanto più consistente quanto minore è l'ampiezza dell'intervallo di attualizzazione della quota interessi (dal tempo finale al tempo di scadenza della rata)[62]". Questo aspetto è la causa dell'anomalia che si genera al presentarsi di talune possibili condizioni contrattuali (in termini di durata e tasso d'interesse) non proprio improbabili[63].

L'anomalia generata in alcuni casi (la cui presenza è associata alla crescita della durata del contratto ed alla crescita del tasso d'interesse) consiste nella presenza di quote capitale negative nelle prime rate dell'operazione finanziaria, la presenza di quest'ultime rende il piano d'ammortamento "improprio"[64].

La presenza di quote capitale negative rende difficilmente preferibile la stesura del piano d'ammortamento in $CS.i$ in quanto, al crescere del numero di quote capitale negative, il debito residuo aumenta. L'aumento del debito residuo al di sopra della somma inizialmente contratta determina una condizione inusuale nella fattispecie dei contratti di mutuo. Un soggetto che desideri estinguere anticipatamente il mutuo sarebbe obbligato a versare una somma che (anche a seguito del versamento di numerose rate) sarebbe superiore a quella originariamente contratta determinando una situazione, per l'appunto, "impropria".

---

[62] Antonio Annibali, Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri, *Ammortamento "alla francese" di mutui in capitalizzazione semplice. La scelta dell'epoca di equivalenza finanziaria: finale oppure iniziale?*. "Le controversie bancarie" n.34.

[63] Nell'articolo An. Annibali, Al. Annibali, C. Barracchini, F. Olivieri l'esempio proposto è di 30 rate con tasso d'interesse pari ad 10%, si può dire che è una situazione probabile o, perlomeno, plausibile.

[64] "L'estinzione del debito non avrebbe le caratteristiche dell'ammortamento (la rata di un ammortamento deve essere preposta al pagamento degli interessi e al rimborso di parte del prestito)", Caliri Maria, *Appunti di Matematica Finanziaria.* Torino, Giappichelli Editore; pagina 150.

Tale fenomeno può essere osservato attraverso un esempio. Si anticipa la differenza tra $CS.i$ e $CS.f$ nella costruzione della rata:

(2.11) Calcolo della rata costante in Capitalizzazione Semplice finale

$$dato\ C^{(0)} = A;\ \ \boldsymbol{R^{cs.f}} = \frac{A}{a_{n|i}^{cs.f}} = A \cdot \frac{1 + i \cdot n}{n \cdot (1 + \frac{n-1}{2} \cdot i)}$$

(2.12) Calcolo della rata costante in Capitalizzazione Semplice iniziale

$$\boldsymbol{R^{cs.i}} = \frac{A}{\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1 + si}}$$

Esempio 5

Si ipotizza la stipulazione di un contratto di mutuo con le seguenti caratteristiche:

- *Somma mutuata: 500.000,00*
- *Tasso d'interesse: 10%*
- *Durata: 20 anni (rate annuali)*
- *Rata costante secondo la capitalizzazione semplice iniziale*

PIANO D'AMMORTAMENTO IN CS.i				
Tempo	**Rata**	**Q int**	**Q cap**	**debt res**
0				500.000,00
1	56.314,85	75.000,00	- 18.685,15	518.685,15
2	56.314,85	67.654,59	- 11.339,74	530.024,89
3	56.314,85	61.156,72	- 4.841,87	534.866,77
4	56.314,85	55.331,04	983,80	533.882,97
5	56.314,85	50.051,53	6.263,32	527.619,65
6	56.314,85	45.224,54	11.090,30	516.529,34
7	56.314,85	40.778,63	15.536,21	500.993,13
8	56.314,85	36.658,03	19.656,81	481.336,32
9	56.314,85	32.818,39	23.496,46	457.839,86
10	56.314,85	29.223,82	27.091,03	430.748,83
11	56.314,85	25.844,93	30.469,92	400.278,91
12	56.314,85	22.657,30	33.657,55	366.621,37
13	56.314,85	19.640,43	36.674,42	329.946,95
14	56.314,85	16.776,96	39.537,88	290.409,07
15	56.314,85	14.052,05	42.262,79	248.146,27
16	56.314,85	11.452,90	44.861,94	203.284,33
17	56.314,85	8.968,43	47.346,42	155.937,91
18	56.314,85	6.588,93	49.725,92	106.211,99
19	56.314,85	4.305,89	52.008,95	54.203,04
20	56.314,85	2.111,81	54.203,04	-

Come può essere notato, il debito residuo è crescente sino al tempo 3; solo dopo aver versato 7 rate esso diviene inferiore rispetto alla somma mutuata. Un'estinzione anticipata del mutuo, ad esempio,

in $t = 3$, dopo il versamento della terza rata, comporterebbe l'onere in capo al mutuatario di corrispondere una somma pari ad euro 534.866,77. Non solo tale somma è superiore a quanto ricevuto in $t = 0$ ma, per giunta, essa è il risultato del versamento di tre rate alquanto onerose (ognuna dal valore di 56.314,85) la cui cumulata equivale ad euro 168.944,54 (il 33,79% dell'intera somma mutuata).

Tratte queste analisi distintive tra $CS.i$ e $CS.f$, non si può fare altro che notare come la scelta di un'epoca di equivalenza finale sia <u>coerente</u> con il regime di capitalizzazione semplice per sua struttura:

- "Un'operazione si svolge in regime di capitalizzazione semplice quando l'interesse è disponibile solamente alla fine del periodo d'impiego" (rif. Giuseppe Varoli[65])
- "La caratteristica della capitalizzazione semplice è che gli interessi si rendono disponibili solo alla fine del periodo d'impiego e pertanto essa si inquadra nella logica della condizione di chiusura finale" (rif. Maria Caliri[66]).

Dal momento che la $CS.i$ presenta gravi distorsioni all'aumentare della durata dell'operazione finanziaria, essa non potrà essere utilizzata in operazioni di mutuo (l'oggetto di questo scritto) la cui durata è solitamente prolungata e può addirittura raggiungere i 40 anni. L'equivalenza iniziale, dunque, sarà più adatta nel regime della capitalizzazione ad interessi anticipati ($CIA.i$) che: "affronta il problema dell'anticipazione dell'importo della cambiale, con pagamento degli interessi anticipati all'epoca iniziale, ovvero con pagamento ai tempi intermedi di pagamento delle rate, previa loro adeguata capitalizzazione da tale tempo iniziale ai tempi intermedi[67]".

Per le motivazioni appena descritte, tenendo conto del fatto che ci si occuperà unicamente di mutui (o prestiti), la CS verrà d'ora in avanti definita come $CS.f$ in virtù del fatto che essa rappresenta la soluzione più soddisfacente sia da un punto di vista economico, sia finanziario sia pratico.

Le tre grandezze principali verranno presentate di seguito:

(2.13) Fattore di capitalizzazione in Capitalizzazione Semplice (Finale)

$$r_{t|i}^{cs.f} = 1 + i \cdot t$$

[65] Cfr. Varoli Giuseppe, Matematica Finanziaria, Patròn Editore, Bologna; pagina 17.
[66] Cfr. Caliri Maria, Appunti di Matematica Finanziaria, Giappichelli Editore, Torino; pagina 142.
[67] Antonio Annibali, Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri, Ammortamento "alla francese" di mutui in capitalizzazione semplice. La scelta dell'epoca di equivalenza finanziaria: finale oppure iniziale? "Le controversie bancarie" n.34

(2.14) Fattore di attualizzazione in Capitalizzazione Semplice (Finale)

$$v_{t|i}^{cs.f} = \frac{1}{r_{t|i}^{cs.f}} = \frac{1}{1 + i \cdot t}$$

Anche nella $CS.f$ (CS) vale la proprietà del coniugio (reciprocità tra fattori di capitalizzazione e di attualizzazione). Infine, viene definito il tasso periodale d'interesse, $i_{t|i}^{cs.f}$:

$$i_{t|i}^{cs.f} = r_{t|i}^{cs.f} - 1 = i \cdot t$$

(2.15) Montante di una rendita con rate unitarie in Capitalizzazione Semplice finale

$$s_{n|i}^{cs.f} = n \cdot (1 + \frac{n-1}{2} \cdot i)$$

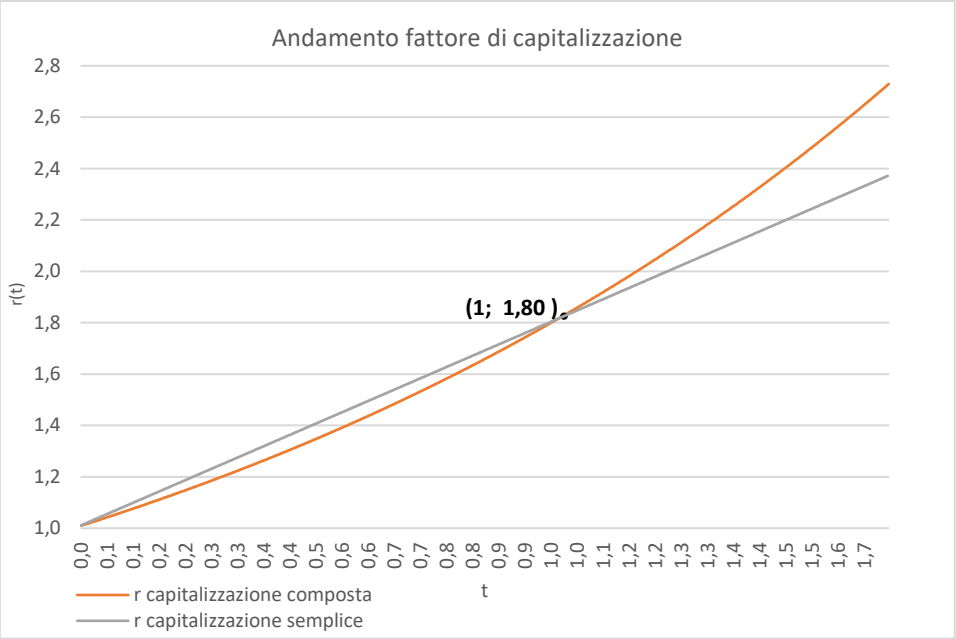
(2.16) Valore attuale di una rendita con rate unitarie in Capitalizzazione Semplice finale

$$a_{n|i}^{cs.f} = \frac{s_{n|i}^{cs.f}}{r_{n|i}^{cs.f}} = \frac{n \cdot (1 + \frac{n-1}{2} \cdot i)}{1 + i \cdot t}$$

L'andamento dei due fattori di capitalizzazione (2.5 e 2.13) permettono di comprendere la distinzione formale tra CC e CS ($CS.f$) in quanto è attraverso di essi che si può notare l'andamento esponenziale della CC e l'andamento lineare della CS. Come si potrà osservare nel grafico di seguito riportato, la 2.5 e la 2.13 si eguagliano solo in due punti:

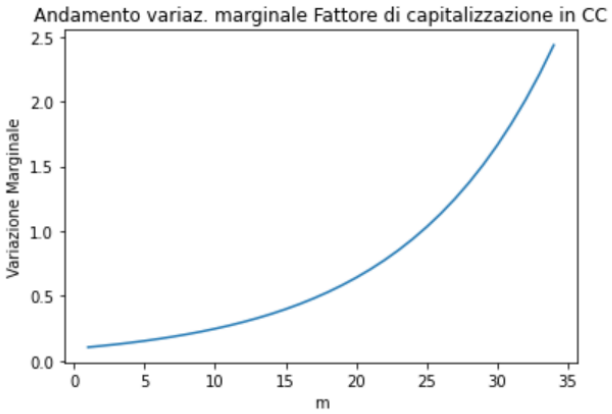
- Per $t = 0$
- Per $t = 1$

Per la rappresentazione grafica si ipotizza un tasso d'interesse (i) pari all'80%; un valore così elevato è giustificato dal fatto che evidenzia l'andamento distinto delle due curve e ne facilita la rappresentazione grafica



L'andamento esponenziale della CC determina un fattore di capitalizzazione con valore inferiore a quello della CS nell'arco temporale che va da 0 ad 1. In tutte le epoche superiori a 1 ($t > 1$) il fattore di capitalizzazione in CC prevale su quello in CS. La crescita esponenziale della 2.5 determina un andamento crescente nella sua curva dell'andamento marginale; infatti, se si utilizza nuovamente la funzione Python, "marginal", del capitolo 1.2, si riscontra un andamento crescente nella rappresentazione grafica:

```
marginal(0.1)

Inserire che cosa identifica la formula: Fattore di capitalizzazione in CC
Inserire equazione da derivare: (1+y)**x
-derivata prima- o -entrambe-? derivata prima
```



Dato che si vogliono evidenziare le distinzioni tra CC e $CS.f$ nella redazione di un piano d'ammortamento, si prenderà in considerazione il piano d'ammortamento alla francese. Le caratteristiche di quest'ultimo sono state già esposte nel paragrafo 1.3.4 ipotizzando la stesura in CC;

in $CS.f$ verranno mantenute le caratteristiche principali (rate costanti) ma saranno differenti i valori assunti dalle rate e, di conseguenza, dagli altri valori. Di seguito vengono rappresentate le formule in $CS.f$ per il calcolo della rata, del debito residuo, della quota interesse e, infine, della quota capitale.

(2.17) Calcolo della rata costante in Capitalizzazione Semplice finale

$$dato\ C^{(0)} = A;\ \ \boldsymbol{R^{cs.f}} = \frac{A}{a_{n|i}^{cs.f}} = A \cdot \frac{1 + i \cdot n}{n \cdot (1 + \frac{n-1}{2} \cdot i)}$$

(2.18) Calcolo del debito residuo in Capitalizzazione Semplice finale

$$\boldsymbol{C^{(t)}}_{\boldsymbol{cs.f}} = R^{cs.f} \cdot a_{n-t|i}^{cs.f} = R^{cs.f} \cdot \frac{(n-t) \cdot (1 + i \cdot \frac{n-t-1}{2})}{1 + i \cdot (n-t)}$$

(2.19) Calcolo della quota interessi in Capitalizzazione Semplice finale

$$\boldsymbol{I_t^{cs.f}} = i \cdot \frac{C^{(t-1)}{}_{cs.f}}{r_{n-t|i}^{cs.f}}$$

Come si può notare, e questo è un punto cruciale, la generica quota interessi in $CS.f$ è il risultato del prodotto tra tre fattori distinti[68]:

1. Debito residuo precedente
2. Tasso d'interesse
3. Fattore d'attualizzazione.

Nella CC, invece, la generica quota interessi è il semplice prodotto tra i primi due fattori (1 e 2) senza l'aggiunta del terzo. Questa osservazione risulterà di notevole aiuto nel proseguo del capitolo.

(2.20) Calcolo della quota capitale in Capitalizzazione Semplice finale

$$Q_t{}^{cs.f} = R^{cs.f} - I_t^{cs.f}$$

Per concludere questo paragrafo si riporta un esempio numerico nel quale, in una stessa operazione finanziaria (mutuo), si costruisce il piano d'ammortamento secondo i due regimi di capitalizzazione appena descritti ($CS.f$ e CC).

[68] Tale costruzione rimane congettura (affermazione logica o neutra, che può essere vera o falsa) sino a quando non si dimostra che la somma delle quote capitale, calcolate come differenza tra rata e quota interesse, soddisfa la condizione di chiusura contabile ovvero eguaglia l'importo originariamente erogato, A. Essendo tale condizione soddisfatta, la congettura diviene teorema (cioè una congettura dimostrata). La dimostrazione è onerosa in termini di spazio ma è senza alcun dubbio verificata.

Esempio 6

Importo prestato	100.000,00
Durata	10
numero rate	10
Tasso annuo effettivo	10%
Rata in CC	16.274,54
Rata in CS.f	13.793,10

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CC

	Tempo	Rata	Q int	Q cap	debt res
	0				100.000,00
	1	16.274,54	10.000,00	6.274,54	93.725,46
	2	16.274,54	9.372,55	6.901,99	86.823,47
	3	16.274,54	8.682,35	7.592,19	79.231,27
	4	16.274,54	7.923,13	8.351,41	70.879,86
	5	16.274,54	7.087,99	9.186,55	61.693,31
	6	16.274,54	6.169,33	10.105,21	51.588,10
	7	16.274,54	5.158,81	11.115,73	40.472,37
	8	16.274,54	4.047,24	12.227,30	28.245,07
	9	16.274,54	2.824,51	13.450,03	14.795,04
	10	16.274,54	1.479,50	14.795,04	-
Chiusura contabile				100.000,00	
Chiusura finanziaria finale	✓	259.374,25			259.374,25
Chiusura finanziaria iniziale	✓	100.000,00			100.000,00

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CS.f

	Tempo	Rata	Q int	Q cap	debt res
	0				100.000,00
	1	13.793,10	5.263,16	8.529,95	91.470,05
	2	13.793,10	5.081,67	8.711,43	82.758,62
	3	13.793,10	4.868,15	8.924,95	73.833,67
	4	13.793,10	4.614,60	9.178,50	64.655,17
	5	13.793,10	4.310,34	9.482,76	55.172,41
	6	13.793,10	3.940,89	9.852,22	45.320,20
	7	13.793,10	3.486,17	10.306,93	35.013,26
	8	13.793,10	2.917,77	10.875,33	24.137,93
	9	13.793,10	2.194,36	11.598,75	12.539,18
	10	13.793,10	1.253,92	12.539,18	-
Chiusura contabile				100.000,00	
Chiusura finanziaria finale	✓	200.000,00			200.000,00
Chiusura finanziaria iniziale	×	92.244,33			100.000,00

L'utilizzo della $CS.f$ impone la condizione di chiusura finanziaria finale (concettualmente la 1.6.2 ma con la variazione del regime di verifica); come si può osservare dall'esempio, la somma delle rate capitalizzate in n eguaglia il capitale preso a prestito, A, capitalizzato in n (condizione verificata sia in CC sia in $CS.f$). La condizione finanziaria iniziale risulta solo verificata, come era previsto, dalla costruzione in CC.

L'aspetto più rilevante di questo esempio è la divergenza tra i due regimi di capitalizzazione nelle quote interesse; nello specifico, è significativa la prevalenza nelle rate in CC della quota interesse che è sistematicamente superiore a quella della $CS.f$. Come è stato già affermato in altri casi, la maggiore onerosità legata alla CC è riconducibile sia alla presenza di interessi su interessi (interessi composti) che, di conseguenza, ampliano la quota interesse da pagare periodicamente sia al fatto che in CC le quote capitale sono inizialmente inferiori a quelle in $CS.f$.

2.2 L'anatocismo nella disciplina giuridica

La trattazione analitica dei vari piani d'ammortamento in Capitalizzazione Composta ha evidenziato come quest'ultima differisca dalla Capitalizzazione Semplice per il computo della quota interessi.

Nello specifico, in CC il calcolo degli interessi avviene attraverso la produzione di nuovi interessi sugli interessi scaduti. Nella concezione generale e più antica questo fenomeno prende il nome di "anatocismo" [69] (dal greco ἀνά – nel significato di "di nuovo" – e τοκισμός – nel significato di "usura", il significato dal greco antico è "*interesse composto*"[70]).

L'attenzione verso questo fenomeno può essere già compresa osservando l'etimologia greca ed il suo significato; il richiamo all'usura fa comprendere come la capitalizzazione degli interessi sugli interessi precedentemente maturati determini una preoccupazione generale circa il rispetto delle norme antiusura. Bisogna ricordare che tali preoccupazioni sono dovute all'andamento esponenziale degli interessi che si può riscontrare quando i nuovi interessi maturano sui precedenti. Tuttavia, seppur le intenzioni che si trovano alla base della normativa anti-anatocismo e quella antiusura si pongano gli stessi obiettivi (la tutela del debitore), i due fenomeni sono alquanto differenti sotto l'aspetto giuridico. Infatti, mentre l'anatocismo rappresenta un illecito civile (viene spiegato di seguito), l'usura rappresenta un illecito penale.

La disciplina giuridica dell'anatocismo trova le sue basi sia nel Codice Civile sia nella disciplina bancaria (T.U.B). Si partirà con l'analisi della disciplina civile (i tecnicismi di seguito riportati sono estrapolati ed evidenziati da varie analisi effettuate da validi giuristi, ma nel presente lavoro non si entra nel merito delle interpretazioni giuridiche).

L'anatocismo viene disciplinato nel Codice Civile attraverso l'articolo 1283, il quale recita testualmente: "In mancanza di usi contrari, gli interessi scaduti possono produrre interessi solo dal giorno della domanda giudiziale o per effetto di convenzione posteriore alla loro scadenza, e sempre che si tratti di interessi dovuti almeno per sei mesi". Passando dalla concezione comune a quello che si può evincere dall'ordinamento italiano, l'anatocismo vietato dalla legge civile, quindi, si verifica quando creditore e debitore prevedano anticipatamente, oppure posticipatamente, ma con riguardo ad interessi dovuti per meno di sei mesi, che gli interessi generati dal capitale finanziato restino nella disponibilità del debitore e, a loro volta, siano produttivi di interessi[71].

---

[69] Viene trattato anche nel latino sotto il nome di *anatocismus* (interesse composto), non è da sorprendersi, quindi, che nella concezione comune si faccia un diretto collegamento tra capitalizzazione composta ed anatocismo.
[70] Franco Montanari, *GI vocabolario della lingua greca*, Loescher.
[71] Alfonso Quintarelli. *Leibnitz e il mutuo feneratizio con ammortamento "alla francese" a rata fissa*, IL CASO.it, 30 aprile 2020.

Circa la definizione di "interessi che producono interessi" (anatocismo) si vuole differire da "interessi che si trasformano in capitale che produce interessi". Questa seconda definizione implicherebbe la applicazione della disciplina del capitale sugli interessi trasformati e non quella degli interessi. La puntualizzazione tra le due affermazioni precedenti è volta a definire un perimetro di distinzione tra *anatocismo* e *capitalizzazione*. Essendo questa una distinzione che è di natura recente[72], sulla quale non vi è ancora molta chiarezza, ci si limiterà ad esporre le opinioni prevalenti in tale ambito.

"Questa assimilazione (tra anatocismo e capitalizzazione) è stata sottoposta a condivisibile critica, che evidenzia come l'anatocismo dell'art. 1283 si configuri unicamente quando interessi generano interessi, senza alcuna confusione tra questi e il capitale che è all'origine dei primi interessi, cosicché l'anatocismo non è idoneo a modificare la natura giuridica degli interessi, che rimangono sempre interessi, con la conseguenza che ad essi si applicherà sempre e solo la disciplina degli interessi e non quella del capitale…… È stato osservato che l'anatocismo è esclusivamente il fenomeno per cui interessi producono interessi, mentre la capitalizzazione indica l'assimilazione, in senso giuridico, degli interessi al capitale e quindi l'applicazione della disciplina propria del capitale alla somma di denaro che originariamente era interessi. Per dar luogo alla capitalizzazione, quindi, sarà necessario che vi sia (una specifica norma, oppure – n.d.r.) un esercizio dell'autonomia privata che ponga in essere un negozio novativo (novazione oggettiva) trasformando gli interessi in capitale"[73].

Poiché sussiste una previsione normativa (dettata dagli articoli 820 e 821 del c.c.) che delinea la distinzione tra capitale e interessi/frutti civili, gli interessi sorti dal capitale hanno natura autonoma e sono sottoposti a diritti ed obblighi distinti da quelli del capitale che li ha generati. Affinché avvenga la produzione di nuovi interessi da quelli già prodotti possono accadere tre fattispecie differenti:

- Gli interessi corrisposti dal debitore al creditore vengono reimpiegati dal creditore stesso (così da soddisfare il *beneficio di liquidità*[74]) come capitale fruttifero.
- Per accordo comune alle due parti, in caso di mancato pagamento degli interessi, quest'ultimi si trasformano in capitale produttivo di interessi (novazione).
- *Anatocismo*, qualora gli interessi (*primari*) non si trasformano in capitale ma in maniera indipendente generano nuovi interessi (*secondari*).

[72] Come ho potuto specificare precedentemente, l'anatocismo nel greco e nel latino ha il significato di interesse composto. Nel periodo più recente si è voluta, invece, sottolineare una più marcata distinzione tra capitalizzazione composta ed anatocismo o, almeno, è stata avanzata una solo parziale coincidenza tra i due fenomeni. La distinzione tra anatocismo e capitalizzazione composta che riporto di seguito non è detto che rappresenti la verità assoluta (e nemmeno la definizione definitiva) del caso ma viene presentata come opinione prevalente nell'ambito giuridico (non necessariamente approvata da tutti).
[73] Cfr. Alfonso Quintarelli, *Leibnitz e il mutuo feneratizio con ammortamento "alla francese" a rata fissa*, pag. 5, nota 17.
[74] Si rimanda alla conclusione per la definizione e contestualizzazione di tale concetto.

Tenendo in considerazione ciò che è stato detto, nell'opinione giuridica moderna la capitalizzazione composta viene identificata in due fattispecie differenti:

a) Gli interessi relativi a ogni periodo di capitalizzazione (primari) non vengono corrisposti dal finanziato al finanziatore e si prevede che essi producano ulteriori interessi (secondari), così come li produrranno gli interessi generati dai primi interessi non corrisposti, (terziari), etc.
b) Le somme per interessi (primari) relative a ogni periodo di capitalizzazione vengono corrisposte dal finanziato al finanziatore e quest'ultimo è libero di reimpiegarle immediatamente come capitale produttivo di interessi (primari)[75].

Secondo l'opinione di alcuni giuristi, solo la prima delle due tipologie può essere identificata nella fattispecie dell'anatocismo; questo perché nel primo caso, secondo questa interpretazione, l'assenza di corresponsione periodica di interessi genera una sorta di presunzione di maturazione di interessi sui vecchi interessi a fronte del mancato godimento (da parte del creditore) della somma mutuata (in questo caso gli interessi cresceranno in maniera esponenziale). Nella tipologia b, invece, essendo gli interessi corrisposti periodicamente, non si verifica una reale maturazione di interessi sugli interessi passati perché viene a cadere la assunzione precedente. Poiché in questo caso vengono corrisposti interessi in maniera periodica (cioè in ogni periodo di capitalizzazione) l'esigibilità di tali interessi non determina alcun tipo di assunzione e, mantenendo la parità delle due parti, garantisce il beneficio di liquidità.

L'art. 1283 c.c. prevede tre eccezioni al divieto di anatocismo:

- l'anatocismo è ammesso (soltanto) per gli interessi che maturano "dal giorno della domanda giudiziale": se un decreto ingiuntivo riguarda un ammontare comprensivo di una parte di capitale e di una parte di interessi non pagati, l'intera somma viene riconosciuta come un debito indistinto su cui maturano ulteriori interessi;
- l'anatocismo è consentito nel caso di conclusione di una "convenzione posteriore alla scadenza" degli interessi: in tale ipotesi, la somma maturata fino alla convenzione si intende come nuovo capitale prestato e sul totale di tale importo possono maturare nuovi interessi;[76]
- l'anatocismo è ammesso in "mancanza di usi contrari", ciò significa che eventuali prassi possono derogare a questa norma, rendendo di fatto possibile la capitalizzazione sugli interessi.

[75] Alfonso Quintarelli , *Ancora sul mutuo con ammortamento francese a rata costante e sull'anatocismo: le regole del diritto e della matematica finanziaria*. IL CASO.it, 17 settembre 2021.
[76] L.M. Quattrocchio , V. Bellando, R. Monchiero, *la vita travagliata dell'anatocismo bancario e il suo (definitivo) approdo legislativo.*

Complessivamente, dopo aver analizzato in maniera dettagliata la norma, si può dire che essa risponde a due finalità principali:

1. Contrastare fenomeni di natura prettamente usuraia: tale finalità è evidente per le motivazioni sino ad ora elencate. Il fatto che la norma si riferisca agli interessi scaduti indica come principale soggetto da tutelare il debitore moroso che in presenza di anatocismo potrebbe vedere il suo debito crescere esponenzialmente.
2. Consentire al debitore il calcolo dei costi che deriverebbero dall'eventuale inadempimento dell'obbligazione di pagamento di un proprio debito: questa seconda finalità rientra nell'ambito della *trasparenza* del contratto.

La trattazione civilistica viene qui conclusa, si procede con la trattazione bancaria.

La disciplina bancaria, nel corso degli anni, ha modificato più volte il proprio parere circa il fenomeno anatocistico. Sino al 4 agosto 1999 l'anatocismo non veniva nemmeno contemplato all'interno del Testo Unico Bancario e l'art. 120 (T.U.B.), che l'avrebbe integrato nel suo secondo comma, era dotato di un unico comma. È grazie al d.lgs. 4 agosto 1999, n. 342, che viene introdotto il comma 2 dell'articolo 120 (T.U.B.), designando, in deroga esplicita all'art. 1283 c.c., il CICR come responsabile nella regolazione delle "modalità e i criteri per la produzione di interessi sugli interessi maturati nelle operazioni poste in essere nell'esercizio dell'attività bancaria". Il CICR – con la nota Delibera del 9 febbraio 2000 – aveva provveduto ad integrare la disciplina primaria, stabilendo che:

- Nelle operazioni in conto corrente dovesse essere assicurata nei confronti della clientela la stessa periodicità nel conteggio degli interessi sia debitori sia creditori;
- In talune ipotesi fosse ammessa la produzione di interessi da parte di interessi già maturati, in deroga a quanto previsto in linea generale dal Codice Civile (la deroga riguardava conto corrente, finanziamenti con piano di rimborso rateale e operazioni di raccolta).[77]

Nel 27 settembre 2013, l'art. 120 comma 2 del T.U.B. veniva nuovamente modificato e veniva sancito il divieto assoluto di anatocismo bancario affermando che "gli interessi periodicamente capitalizzati non possano produrre interessi ulteriori". Questa modifica sembrava proprio suggerire un passaggio effettivo dal regime di capitalizzazione composta (approvato nella precedente versione dell'articolo 120) a quello di capitalizzazione semplice (senza lasciare spazio ad interpretazioni di vario genere).

La modifica finale, che determina l'attuale disposizione dell'art 120 TUB, giunse con il d.l. 14 febbraio 2016, n. 18. Eliminando il divieto assoluto di anatocismo (che nella versione del 2013 era

[77] Cfr. L.M. Quattrocchio , V. Bellando, R. Monchiero, *la vita travagliata dell'anatocismo bancario e il suo (definitivo) approdo legislativo*, pag. 5

evidente) ne circoscrive l'efficacia alla sola capitalizzazione annuale degli interessi. Sebbene tale "versione" dell'art. 120 sembri definitiva, la moltitudine di sentenze tra loro controverse non sembra confermare tale apparenza. Per completezza si riporta l'evoluzione dell'art. 120 TUB comma 2 nelle tre modifiche appena presentate.

Evoluzione Art. 120 T.U.B. Comma 2		
2000 - 2013	2013 - 2016	2016 ad oggi
Il C.I.C.R. stabilisce modalità e criteri per la produzione di interessi sugli interessi maturati nelle operazioni poste in essere nell'esercizio dell'attività bancaria, prevedendo in ogni caso che nelle operazioni in conto corrente sia assicurata nei confronti della clientela la stessa periodicità nel conteggio degli interessi sia debitori sia creditori	Il C.I.C.R. stabilisce modalità e criteri per la produzione di interessi nelle operazioni poste in essere nell'esercizio dell'attività bancaria, prevedendo in ogni caso che: a) nelle operazioni in conto corrente sia assicurata, nei confronti della clientela, la stessa periodicità nel conteggio degli interessi sia debitori sia creditori; b) gli interessi periodicamente capitalizzati non possano produrre interessi ulteriori che, nelle successive operazioni di capitalizzazione, sono calcolati esclusivamente sulla sorte capitale	Il CICR stabilisce modalità e criteri per la produzione di interessi nelle operazioni poste in essere nell'esercizio dell'attività bancaria, prevedendo in ogni caso che: a) nei rapporti di conto corrente o di conto di pagamento sia assicurata, nei confronti della clientela, la stessa periodicità nel conteggio degli interessi sia debitori sia creditori, comunque non inferiore ad un anno; gli interessi sono conteggiati il 31 dicembre di ciascun anno e, in ogni caso, al termine del rapporto per cui sono dovuti; b) gli interessi debitori maturati, ivi compresi quelli relativi a finanziamenti a valere su carte di credito, non possono produrre interessi ulteriori, salvo quelli di mora, e sono calcolati esclusivamente sulla sorte capitale; per le aperture di credito regolate in conto corrente e in conto di pagamento, per gli sconfinamenti anche in assenza di affidamento ovvero oltre il limite del fido: 1) gli interessi debitori sono conteggiati al 31 dicembre e divengono esigibili il 1º marzo dell'anno successivo a quello in cui sono maturati; nel caso di chiusura definitiva del rapporto, gli interessi sono immediatamente esigibili; 2)il cliente può autorizzare, anche preventivamente, l'addebito degli interessi sul conto al momento in cui questi divengono esigibili; in questo caso la somma addebitata è considerata sorte capitale; l'autorizzazione è revocabile in ogni momento, purché prima che l'addebito abbia avuto luogo.

Tabella 10: Evoluzione dell'art. 120 comma 2 del T.U.B.

2.3 La controversia legale e le sbagliate interpretazioni dell'ammortamento alla francese

Gli argomenti trattati finora hanno permesso di costruire una conoscenza generale circa i vari piani d'ammortamento, la distinzione tra capitalizzazione semplice e capitalizzazione composta e, nel complesso, di una conoscenza giuridica della fattispecie del mutuo e delle problematicità che si possono riscontrare all'interno di esso.

Come è stato già accennato nel paragrafo precedente, un tema ancora caldo nella giurisprudenza (e nel mondo accademico della matematica finanziaria) è rappresentato dalla disciplina giuridica del fenomeno dell'anatocismo. Su quest'ultimo sono state avanzate differenti interpretazioni (vedi ad esempio quella più recente definita nel paragrafo precedente), talvolta in contraddizione tra di loro. Lo scenario giuridico, per questo motivo e per le numerose modifiche dell'art. 120 T.U.B. (vedi Tabella 10), ha alimentato, nel corso degli ultimi quindici anni, una situazione di sostanziale titubanza e precarietà di fronte a questo problema. Nello specifico, la problematica principale riscontrata fa capo alla presenza o meno di interessi anatocistici all'interno del piano d'ammortamento definito convenzionalmente "alla francese" (par 1.2.4).

Nel prossimo paragrafo si farà riferimento alle numerose (non possibili da elencare nel completo) sentenze contraddittorie dei differenti Tribunali sul suolo italiano; la questione, di non facile risoluzione, è stata caratterizzata da sbagliate interpretazioni matematico-finanziarie di vari giuristi. Dopo aver analizzato alcune delle sentenze e avendo evidenziato le problematiche ad esse collegate, nel paragrafo finale di questo capitolo (2.3.2) verrà esposta l'analisi e dimostrazione della presenza di interessi composti all'interno del, così definito in ambito bancario, piano d'ammortamento francese standard[78].

Ciò che bisogna tenere a mente è che, trattandosi di una diatriba ancora in corso, bisogna tenersi lontani dal prendere una posizione definitiva ma, essendo questo uno scritto di matematica finanziaria, risulta necessario dimostrare alcune affermazioni finanziariamente imprecise e prive di fondamento teorico.

[78] "L'espressione "ammortamento francese", o "alla francese", è a volte intesa come sinonimo di "ammortamento a rate costanti". Nell'uso comune, e dunque per quello che possiamo chiamare "ammortamento francese standard", è però anche previsto che ciascuna rata contenga una quota interessi pari a tutti quelli che il debito non ancora rimborsato ha generato a partire dalla scadenza precedente. Chiameremo "prestito standard" uno per il quale valga questa clausola, qualunque sia la tempistica stabilita per il rimborso. Essa è tanto comune da essere data quasi sempre per scontata, ed è contemplata in praticamente tutte le tipologie di prestito in uso. L'ammortamento francese standard si può definire dunque come prestito standard a rate costanti". Fabrizio Cacciafesta, *Sull'articolo "Compatibilità del regime della capitalizzazione composta…"* dell'avv.to De Simone.

2.3.1 Le sentenze contraddittorie e le dichiarazioni finanziariamente infondate

Seppur la questione anatocismo fosse già discussa da prima dell'inizio del nuovo millennio, i tribunali italiani mai si erano espressi contro la redazione di piani d'ammortamento in capitalizzazione composta. A rigor del vero, dovute le indiscusse basi matematiche che ben sanno differire tra capitalizzazione composta e capitalizzazione semplice (l'utilizzo delle due non può essere indistinto in termini di onerosità del prestito), la Banca d'Italia utilizzava, come ancora oggi utilizza, il TAEG come strumento per garantire la trasparenza dell'operazione di prestito (o mutuo). Delle caratteristiche del TAEG è stato già discusso, esso ha indubbia coincidenza con il concetto di tasso interno di rendimento applicato in capitalizzazione composta. Poiché la capitalizzazione composta veniva utilizzata dalla Banca d'Italia ed assumeva, dunque, un uso abituale nelle operazioni bancarie, mai si era questionata la possibile presenza di interessi anatocistici nelle operazioni di mutuo.

La diatriba giuridica ha avuto il suo punto d'inizio nel 2008 con la sentenza "innovativa" n. 113 del Tribunale di Bari nella sezione distaccata di Rutigliano. La presenza di interessi anatocistici veniva determinata in virtù del fatto che il piano d'ammortamento utilizzato era il "Ammortamento alla francese". La preoccupazione circa questa particolare categoria di piano di rimborso era stata sollevata poiché la costruzione di quest'ultimo avveniva in capitalizzazione composta; il collegamento tra anatocismo e quest'ultima (la capitalizzazione composta) determina la nullità della clausola di specificazione del tasso d'interesse. Vengono riportate le motivazioni nel loro complesso:

> *Mentre nella parte letterale del contratto si stabilisce un tasso rispettoso del sistema civilistico italiano della maturazione dei frutti civili, nel piano di ammortamento viene applicato, in maniera del tutto inaspettata, quanto illegittima, il c.d. 'ammortamento alla francese': ossia un metodo che comporta la restituzione degli interessi con una proporzione più elevata in quanto contiene una formula di matematica attuariale, giusta la quale l'interesse applicato è quello composto e già non quello semplice (previsto dal nostro codice civile all'art. 821, comma 3). Il tasso nominale di interesse pattuito letteralmente nel contratto di mutuo non si può assolutamente maggiorare nel piano di ammortamento, né si può mascherare tale artificioso incremento nel piano di ammortamento, poiché il calcolo dell'interesse nel piano di ammortamento deve essere trasparente ed eseguito secondo regole matematiche dell'interesse semplice. La banca, che utilizza nel contratto di mutuo questo particolare tipo di capitalizzazione, viola non solo il dettato dell'art. 1283 c.c. ma anche quello dell'art. 1284 c.c., che in ipotesi di mancata determinazione e specificazione, ovvero di incertezza (tra tasso nominale contrattuale e tasso effettivo del piano di ammortamento allegato al medesimo contratto), impone l'applicazione del tasso legale semplice e non quello ultralegale indeterminato o incerto.*

La possibile imprecisione del giudice nell'affermare che alla base della violazione si ponga la non diretta coincidenza tra TAN e TAEG non aiuta nel validare questa sentenza. Soprattutto se, come più volte sottolineato, il calcolo del TAEG avviene su richiesta della Banca d'Italia, la quale riconosce la possibile disuguaglianza con il tasso nominale, dal momento che può derivare dalla periodicità non annuale delle rate.

Tuttavia, agli occhi di un matematico finanziario, affermare che il piano d'ammortamento francese (standard), non costruito mediante le formule della capitalizzazione semplice finale ($CS.f$), venga costruito, invece, mediante l'utilizzo della capitalizzazione composta (CC) è del tutto lecito. Anzi, si creerebbero problemi se, altrimenti, le rate fossero costruite in CC e venisse dichiarato che il piano complessivo è costruito in CS, ipotizzando la presenza di due regimi di capitalizzazione diversi all'interno di uno stesso piano d'ammortamento (ciò che viene constatato nelle successive sentenze).

La sentenza del Tribunale di Bari venne confermata unicamente dal Tribunale di Larino con la sentenza n. 842 del 2009. Dopo quest'ultima ci fu una lunga serie di sentenze (dal 2012 al 2018) che negavano la presenza di interessi anatocistici all'interno del piano d'ammortamento alla francese. In questo scritto ci si limiterà a citarne solo due, in modo tale da sottolineare quali siano gli errori emersi in termini matematico-finanziari.

Di seguito si riporta una parte della sentenza emessa dal Tribunale di Milano il 5 maggio 2014:

> *In ogni caso la "condizione di chiusura" risponde ad una precisa regola matematica, e il CTU, nel caso di specie, ha riscontrato il rispetto da parte della banca di quella precisa "condizione di chiusura" che nell'ammortamento alla francese viene definita "condizione iniziale"; il CTU ha rilevato che la formula matematica in questo caso "utilizza la legge di sconto composto", **ma unicamente al fine di individuare la quota capitale** da restituire in ciascuna delle rate prestabilite (criterio che in alcun modo si pone a danno del mutuatario, essendo assicurato e agevolmente verificabile – che la somma di tali quote sia pari all'importo mutuato), mentre non va ad incidere sul separato conteggio degli interessi, che nel piano di ammortamento alla francese risponde alle regole dell'interesse semplice.*
>
> *Verificato quindi il conteggio degli interessi come effettuato di fatto dalla banca nella fattispecie in esame, il CTU ha concluso affermando che "le quote di interessi periodali sono state calcolate mediante la legge dell'interesse semplice ...e non vi è stata capitalizzazione degli interessi nella definizione degli elementi del piano di ammortamento del contratto e nella esecuzione dei conseguenti pagamenti"*

Tale sentenza afferma che, nello stesso piano d'ammortamento, si possono utilizzare due sistemi di capitalizzazione differenti:

- La CC per attualizzare le rate e far coincidere la somma delle rate attualizzate alla somma presa/data in prestito (chiusura finanziaria iniziale, formula 1.6.1)

- La CS per calcolare la quota interessi e la restante parte del piano d'ammortamento.

Tali affermazioni sono finanziariamente infondate ed i motivi verranno espressi nel successivo paragrafo.

Seppur queste tre dichiarazioni possano già da sé indirizzare il lettore verso le critiche rivolte a queste sentenze, si vuole presentare un'ultima affermazione, che come le altre tre, non ha una rilevanza matematico finanziaria. Si presta a questo fine una parte della sentenza emanata dal Tribunale di Padova in data 12 gennaio 2016:

> *Alla scadenza della prima rata la quota interessi si calcola applicando all'intero debito il tasso concordato nel contratto, mediante l'utilizzo della formula d'interesse semplice….*
>
> *…È pur vero che per la determinazione della rata periodica nell'ammortamento francese viene utilizzata la formula di capitalizzazione composta, ma, ciò non ha alcun effetto nella determinazione della quota interessi, calcolata sul debito residuo, quindi sul solo capitale; la suddetta formula matematica viene utilizzata esclusivamente per determinare l'equivalenza tra il totale delle quote capitale contenute nelle rate e il prestito; in pratica con la formula è determinato l'unico importo della rata costante che sia in grado di rimborsare quel prestito, con l'applicazione di quel tasso ed in quel lasso di tempo. L'utilizzo della formula di capitalizzazione composta per determinare la rata non è strettamente necessario per costruire il piano d'ammortamento. Predeterminati, infatti, l'importo del prestito e della rata e il tasso applicato, sono calcolati la quota interessi e la durata del prestito, pur sempre mediante applicazione della formula d'interesse semplice.*

In questa altra sentenza, invece, riconoscendo la costruzione delle rate mediante la CC si vuole dimostrare che il resto del piano d'ammortamento segue la CS. La motivazione, banalmente, verte intorno al calcolo delle quote interesse; quest'ultime, calcolate attraverso il semplice prodotto[79]:

$$i \cdot t \cdot Q^{(h-1)}$$

vengono identificate nel regime della CS poiché la formula coincide con la formula del calcolo dell'interesse periodale maturato su una certa somma in CS ($i \cdot t \cdot K$). Anche questa affermazione verrà analizzata nel prossimo paragrafo.

Le sentenze che negano la presenza di anatocismo nell'ammortamento francese standard continuarono sino al 2018 quando il dibattito si riaccese con l'evenienza di nuove interpretazioni a favore della presenza di anatocismo (Tribunale di Napoli n. 1558 del 13/02/2018, Tribunale di Ferrara n. 287 del 20/04/2018, Tribunale di Massa del 13/11/2018).

[79] Dove: $Q^{(h-1)}$è il debito residuo dell'anno precedente, i è il tasso d'interesse pattuito e t è il periodo che intercorre (in termini annui) tra una rata e quella successiva.

Ad oggi, ancora non è stata definita una posizione assodata circa questa fattispecie, ciò di cui si può essere certi è che le sentenze continuano ad essere contraddittorie (Tribunale di Bari 5 ottobre 2021, Tribunale di Pesaro 10 ottobre 2021 rispettivamente negano e riconoscono il fenomeno anatocistico).

Nel successivo paragrafo non verrà fornita una soluzione giuridica a tale questione (questa spetta ai giuristi) ma, tenendo in considerazione alcune delle affermazioni pronunciate nel corso degli ultimi anni, si cercherà di "correggere" ciò che è stato detto in maniera finanziariamente errata.

2.3.2 Dimostrazioni analitiche ed evidenze teoriche

Per continuare le considerazioni concernenti il "problema" dell'interesse anatocistico nel piano d'ammortamento alla francese si può iniziare dalla semplice stesura di quest'ultimo; come sarà facile notare, alcune delle affermazioni precedentemente sottolineate perderebbero di valore solo attraverso la spiegazione algebrica delle formule utilizzate per il calcolo delle differenti quote nel piano.

Poiché nella totalità delle sentenze precedentemente presentate veniva dichiarata la presenza contemporanea di due regimi nello stesso piano d'ammortamento, in questa sede si vuole dimostrare come in realtà questa affermazione sia finanziariamente errata e che, seppur il calcolo della quota interesse appaia come il risultato di una formula in capitalizzazione semplice (CS), essa, in realtà, rappresenta l'eccezione (in regime di CS la quota interesse non viene calcolata con questa formula) nella sola capitalizzazione composta (potrà sembrare assurdo, verrà spiegato meglio).

La dimostrazione può essere effettuata in due maniere differenti:

a) Comparare ed evidenziare le differenze nella struttura di un piano d'ammortamento alla francese costruito mediante la capitalizzazione composta (CC) con quello costruito in capitalizzazione semplice finale ($CS.f$);
b) Analizzare nel completo la Tabella 7 (piano d'ammortamento alla francese standard) ed evidenziare per quale motivo si può affermare che in tutto il piano, non solo nella costruzione delle rate, vige la CC.

Si procederà per ordine.

Se viene considerata la stesura del piano di ammortamento alla francese in $CS.f$ sarà agevole per il lettore notare che il calcolo per la generica quota interesse non è il semplice risultato del prodotto tra il debito residuo precedente ed il tasso d'interesse (come avviene invece in CC) ma è data dal prodotto di tre termini, i due precedentemente citati più il fattore di attualizzazione (la formula già presentata 2.10):

$$(\mathrm{CS.f})\quad \boldsymbol{I_t^{cs.f}} = i \cdot \frac{C^{(t-1)}{}_{cs.f}}{r_{n-t|i}^{cs.f}}$$

Il fatto che, per essere corretta la determinazione della quota interessi in $CS.f$, sia necessaria la attualizzazione del prodotto tra debito residuo precedente ed il tasso d'interesse, non lascia alcuno spazio a varie interpretazioni circa la presenza del regime di CS nel piano di ammortamento in CC, dove la quota interessi è costituita dal semplice prodotto tra debito residuo dell'anno precedente e tasso d'interesse:

$$(CC)\quad \boldsymbol{I_t^{cc}} = i \cdot C^{(t-1)}{}_{cc}$$

Dal momento che il calcolo della quota interesse in $CS.f$ è differente (quantitativamente e strutturalmente) da quello praticato in CC, non si può fare altro che determinare l'inesattezza delle affermazioni precedentemente riportate. Per giunta, se si vuole dichiarare che: " la quota interessi si calcola applicando all'intero debito il tasso concordato nel contratto, mediante l'utilizzo della formula d'interesse semplice" è facile dimostrare che nella realtà non è questo quello che avviene; infatti, scomponendo la (apparentemente) semplice formula $\mathrm{I_t^{cc}} = \mathrm{i} \cdot C_{cc}^{(t-1)}$, in pochi passaggi si ottiene:

$$\mathrm{I_t^{cc}} = \mathrm{i} \cdot C_{cc}^{(t-1)} \rightarrow \mathrm{i} \cdot \mathrm{R}_{cc} \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{n-t+1|i}} \rightarrow$$

$$\mathbf{I_t^{cc} = R_{cc} \cdot (1 - (1 + i)^{-n+t-1})}$$

Ecco che in realtà la quota interessi altro non è che il risultato ottenuto come la maturazione di nuovi interessi sugli interessi precedentemente calcolati ovvero secondo il regime della capitalizzazione composta (e non semplice).

Lo stesso concetto, ma visto da una prospettiva differente, si ottiene prendendo in considerazione il generico piano d'ammortamento alla francese (standard, Tabella 7) - ovvero caratterizzato da rate costanti e quota interesse calcolata come prodotto tra debito residuo dell'anno precedente, $C^{(t-1)}$, e

tasso d'interesse periodale, i - . Da questo può essere estratta una prima equazione, nota come equazione ricorrente del debito residuo[80]:

(2.21) Equazione ricorrente del debito residuo

$$C^{(t)} = C^{(t-1)}(1+i) - R_t \qquad t \in \{1,2,\dots n\},\ \ tasso\ periodale\ i$$

Dal momento che il debito residuo si aggiorna capitalizzando ed incorporando gli interessi maturati in precedenza, questa relazione dimostra la presenza di interessi composti all'interno del piano d'ammortamento alla francese in CC.

Altro elemento di particolare rilevanza, che spesso è sfuggito (o forse ignorato) all'attenzione di numerosi giuristi, è rappresentato dalla composizione della rata nell'ammortamento francese standard. Poiché quest'ultima viene calcolata attraverso il regime di CC, non si può fare a meno di considerare il fatto che l'intero piano sia stato oramai viziato, o meglio dire, plasmato sulle impronte della CC.

Questo insieme di elementi, già sufficienti per scalzare la più evidente imprecisione implicata in quest'ambito (cioè la compresenza di due regimi di capitalizzazione distinti), dovrebbero già far sorgere nel lettore di tale elaborato la ovvia perplessità di chi per le prime volte si imbatte in questa diatriba. Sebbene sia ormai evidente che il piano d'ammortamento in CC, come è ovvio che sia, venga costruito solo attraverso il regime della capitalizzazione composta, in alcune sedi è stata negata la possibilità di maturazione di interessi sugli interessi passati.

Ora verrà descritto come dal piano di ammortamento in CC, costruito in maniera "classica" (con la basilare separazione tra quota interessi, quota capitale, rata e debito residuo, così come è stato presentato in precedenza) si sia giunti al piano di ammortamento in CC che distingue al suo interno:

(2.22) Piano d'ammortamento in CC con evidenza di interessi composti

- La <u>quota interesse</u> in due componenti, la *quota interesse "a"* calcolata sul debito contratto e la *quota interesse "b"* che rappresenta gli interessi maturati sugli interessi precedenti (interessi composti);
- La <u>quota capitale</u> in due componenti, la *quota capitale "a"* che rappresenta la quota capitale che effettivamente restituisce il debito contratto e la *quota capitale "b"* che invece deve coprire gli interessi composti;

[80] Tale equazione è l'evidente risultato di ciò che anche i più ostinati "negazionisti" del fenomeno anatocistico possono confermare: la crescita geometrica in ragione di $(1+i)$ delle quote capitale nel piano d'ammortamento alla francese.

- Il <u>debito residuo</u> in: *debito residuo complessivo* e *debito residuo "a"* senza aggiunta degli interessi sugli interessi.

Per poter raggiungere questa impostazione si è fatto uso del principio di composizione dei contratti finanziari. Per semplicità, e per velocizzare la dimostrazione, ipotizziamo che questi n debiti equivalgano ad n Zero Coupon Bond (ZCB) ognuno dei quali a scadenza rimborsa R (rata calcolata nel piano di ammortamento alla francese in CC). Se si volesse dimostrare lo stesso effetto, ma attraverso la somma di n debiti ciascuno con rimborso finale del capitale e corresponsione periodica degli interessi (Bullet Bond), basterebbe ripercorrere gli stessi procedimenti descritti in precedenza. In questo caso si assisterebbe ad un processo più lungo in quanto bisognerebbe rappresentare ogni *t-esimo* Bullet Bond come la somma di *t* ZCB ed infine sommare tutti i ZCB costruiti per raggiungere nuovamente il piano di ammortamento alla francese.

Per questioni di spazio verrà presentata la costituzione del piano di ammortamento alla francese in CC attraverso la sommatoria degli *n* ZCB. Di seguito viene rappresentato il piano di ammortamento di uno ZCB attraverso la struttura 2.22:

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. interesse (a)	Q. interesse (b)	Q. capitale	Q. capitale (a)	Q. capitale (b)	Debito residuo	Debito residuo (a)
0								$C^{(0)} = Rv^n$	Rv^n
1	0	$I_1 = Rv^n i$	$Rv^n i$	0	$Q_1 = -Rv^n i$	0	$-Rv^n i$	$C^{(1)} = Rv^n + Rv^n i = Rv^{n-1}$	Rv^n
2	0	$I_2 = Rv^{n-1} i$	$Rv^n i$	$I_1 i$	$Q_2 = -Rv^{n-1} i$	0	$-Rv^{n-1} i$	$C^{(2)} = Rv^{n-2}$	Rv^n
…									
t	0	$I_t = Rv^{n-t+1} i$	$Rv^n i$	$i \sum_{q=1}^{t-1} I_q$	$Q_t = -Rv^{t-s+1} i$	0	$-Rv^{t-s+1} i$	$C^{(2)} = Rv^{n-t}$	Rv^n
…									
n-1	0	$I_{n-1} = Rv^2 i$	$Rv^n i$	$i \sum_{q=1}^{n-2} I_q$	$Q_{n-1} = -Rv^2 i$	0	$-Rv^2 i$	$C^{(2)} = Rv$	Rv^n
n	R	$I_n = Rvi$	$Rv^n i$	$i \sum_{q=1}^{n-1} I_q$	$Q_n = Rv$	Rv^n	$Rv - Rv^n$	$C^{(n)} = 0$	0

Tabella 11: Piano d'ammortamento di uno ZCB con rappresentazione di interessi composti

Se si presta attenzione alla formazione della quota interessi in uno ZCB:

$$I_t = Rv^{n-t+1} i = C^{(t-1)} i = C^{(0)} \cdot (1+i)^{t-1} \cdot i$$

è facile notare che essa rappresenta il prodotto tra il debito residuo $C^{(t-1)}$ ed il tasso d'interesse. Ma lo stesso debito residuo in $t-1$ altro non è che il debito iniziale $C^{(0)}$ capitalizzato in $t-1$ secondo il regime di CC (la presenza di interessi composti viene ricondotta sin dalla semplice redazione di uno ZCB).

Grazie alla struttura degli ZCB è agevole costruire il piano di ammortamento alla francese come somma dei singoli piani di ammortamento degli ZCB:

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. interesse (a) $I^{(a)}$	Q. interesse (b)	Q. capitale Q_t	Q. capitale (a) $Q^{(a)}$	Q. capitale (b)	Debito residuo $C^{(t)}$	Debito residuo (a) $C'^{(t)}$
0								$A = C^{(0)} = R\sum_{s=1}^{n} v^s$	$C'^{(0)} = C^{(0)}$
1	R	$I_1 = Ri\sum_{s=1}^{n} v^s$	$I_1^{(a)} = C'^{(0)}i$	$I_1 - I_1^{(a)} = 0$	$Q_1 = Rv - Ri\sum_{s=2}^{n} v^s$	Rv	$Q_1 - Q_1^{(a)}$	$C^{(1)} = R\sum_{s=1}^{n-1} v^s$	$C'^{(1)} = C'^{(0)} - Q_1^{(a)} = R\sum_{s=2}^{n} v^s$
2	R	$I_2 = Ri\sum_{s=1}^{n-1} v^s$	$I_2^{(a)} = C'^{(1)}i$	$I_2 - I_2^{(a)}$	$Q_2 = Rv - Ri\sum_{s=2}^{n-1} v^s$	Rv^2	$Q_2 - Q_2^{(a)}$	$C^{(2)} = R\sum_{s=1}^{n-2} v^s$	$C'^{(2)} = C'^{(1)} - Q_2^{(a)} = R\sum_{s=3}^{n} v^s$
…									
t	R	$I_t = Ri\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s$	$I_t^{(a)} = C'^{(t-1)}i$	$I_t - I_t^{(a)}$	$Q_t = Rv - Ri\sum_{s=2}^{n-t+1} v^s$	Rv^t	$Q_t - Q_t^{(a)}$	$C^{(t)} = R\sum_{s=1}^{n-t} v^s$	$C'^{(t)} = C'^{(t-1)} - Q_t^{(a)} = R\sum_{s=t+1}^{n} v^s$
…									
n-1	R	$I_{n-1} = Ri\sum_{s=1}^{2} v^s$	$I_{n-1}^{(a)} = C'^{(n-2)}i$	$I_{n-1} - I_{n-1}^{(a)}$	$Q_{n-1} = Rv - Ri\sum_{s=2}^{2} v^s$	Rv^{n-1}	$Q_{n-1} - Q_{n-1}^{(a)}$	$C^{(n-1)} = R\sum_{s=1}^{1} v^s$	$C'^{(n-1)} = C'^{(n-2)} - Q_{n-1}^{(a)} = R\sum_{s=n}^{n} v^s$
n	R	$I_n = Rvi$	$I_n^{(a)} = C'^{(n-1)}i$	$I_n - I_n^{(a)}$	$Q_n = Rv$	Rv^n	$Q_n - Q_n^{(a)}$	$C^{(n)} = 0$	0

Tabella 11: Piano d'ammortamento francese con rappresentazione di interessi composti

Essendo:

- $I_t = Ri\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s = R(1 - v^{n-t+1})$
- $Q_t = Rv - Ri\sum_{s=2}^{n-t+1} v^s = Rv^{n-t+1}$
- $C^{(t)} = R\sum_{s=1}^{n-t} v^s$

Le quote capitale, le quote interesse ed il debito residuo equivalgono alle relazioni sviluppate nel piano di ammortamento francese rappresentato in Tabella 7. Si può, quindi, affermare con certezza che la somma dei piani di ammortamento degli *n* debiti ZCB equivalga al piano di ammortamento

alla francese in CC. Per sottolineare le conseguenze di questa scomposizione si vuole presentare come cambia il piano d'ammortamento nell'*esempio 5* se venisse scomposto secondo la 2.12:

Esempio 7

Importo prestato	*100.000,00*
Durata	*10 anni*
Tasso annuo effettivo	*10%*
Rata in CC	*16.274,54*

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0	-	-	-	-	-	-		100.000,00	100.000,00
1	16.274,54	10.000,00	10.000,00	-	6.274,54	14.795,04	- 8.520,50	93.725,46	85.204,96
2	16.274,54	9.372,55	8.520,50	852,05	6.901,99	13.450,03	- 6.548,04	86.823,47	71.754,93
3	16.274,54	8.682,35	7.175,49	1.506,85	7.592,19	12.227,30	- 4.635,11	79.231,27	59.527,63
4	16.274,54	7.923,13	5.952,76	1.970,36	8.351,41	11.115,73	- 2.764,32	70.879,86	48.411,90
5	16.274,54	7.087,99	4.841,19	2.246,80	9.186,55	10.105,21	- 918,66	61.693,31	38.306,69
6	16.274,54	6.169,33	3.830,67	2.338,66	10.105,21	9.186,55	918,66	51.588,10	29.120,14
7	16.274,54	5.158,81	2.912,01	2.246,80	11.115,73	8.351,41	2.764,32	40.472,37	20.768,73
8	16.274,54	4.047,24	2.076,87	1.970,36	12.227,30	7.592,19	4.635,11	28.245,07	13.176,53
9	16.274,54	2.824,51	1.317,65	1.506,85	13.450,03	6.901,99	6.548,04	14.795,04	6.274,54
10	16.274,54	1.479,50	627,45	852,05	14.795,04	6.274,54	8.520,50	-	-

$\sum_{t=1}^{10} ZCB_t$

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0								14.795,04	14.795,04
1	16.274,54 €	1.479,50	1.479,50	-	14.795,04	14.795,04	-	-	-

ZCB_1 durata 1 anno

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0								13.450,03	13.450,03
1	-	1.345,00	1.345,00	-	- 1.345,00	-	- 1.345,00	14.795,04	13.450,03
2	16.274,54 €	1.479,50	1.345,00	134,50	14.795,04	13.450,03	1.345,00	-	-

ZCB_2 durata 2 anni

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0								12.227,30	12.227,30
1	-	1.222,73	1.222,73	-	- 1.222,73	-	- 1.222,73	13.450,03	12.227,30
2	-	1.345,00	1.222,73	122,27	- 1.345,00	-	- 1.345,00	14.795,04	12.227,30
3	16.274,54 €	1.479,50	1.222,73	256,77	14.795,04	12.227,30	2.567,73	-	-

ZCB_3 durata 3 anni

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0								11.115,73	11.115,73
1	-	1.111,57	1.111,57	-	- 1.111,57	-	- 1.111,57	12.227,30	11.115,73
2	-	1.222,73	1.111,57	111,16	- 1.222,73	-	- 1.222,73	13.450,03	11.115,73
3	-	1.345,00	1.111,57	233,43	- 1.345,00	-	- 1.345,00	14.795,04	11.115,73
4	16.274,54 €	1.479,50	1.111,57	367,93	14.795,04	11.115,73	3.679,31	-	-

ZCB_4 durata 4 anni

… … … …

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0								6.274,54	6.274,54
1	-	627,45	627,45	-	- 627,45	-	- 627,45	6.901,99	6.274,54
2	-	690,20	627,45	62,75	- 690,20	-	- 690,20	7.592,19	6.274,54
3	-	759,22	627,45	131,77	- 759,22	-	- 759,22	8.351,41	6.274,54
4	-	835,14	627,45	207,69	- 835,14	-	- 835,14	9.186,55	6.274,54
5	-	918,66	627,45	291,20	- 918,66	-	- 918,66	10.105,21	6.274,54
6	-	1.010,52	627,45	383,07	- 1.010,52	-	- 1.010,52	11.115,73	6.274,54
7	-	1.111,57	627,45	484,12	- 1.111,57	-	- 1.111,57	12.227,30	6.274,54
8	-	1.222,73	627,45	595,28	- 1.222,73	-	- 1.222,73	13.450,03	6.274,54
9	-	1.345,00	627,45	717,55	- 1.345,00	-	- 1.345,00	14.795,04	6.274,54
10	16.274,54 €	1.479,50	627,45	852,05	14.795,04	6.274,54	8.520,50	-	-

ZCB_{10} durata 10 anni

È evidente come il piano di ammortamento alla francese in CC sia frutto della maturazione degli interessi sugli interessi ($Q.int\ (b)$) e come questi, per costruzione, riducano la quota capitale imputabile a ciascun pagamento.

La dimostrazione appena osservata può assumere risvolti rilevanti nel mondo giuridico qualora la $Quota\ interesse\ (b)$ venisse reputata come la somma di interessi anatocistici. Infatti, se viene considerato nuovamente il principio di composizione dei contratti e vengono fatte salve tutte le considerazioni finora riscontrate, la costruzione del piano d'ammortamento attraverso n ZCB può essere estesa a tutti gli altri piani d'ammortamento comunemente utilizzati nelle operazioni finanziarie. Di fatti, non sarebbe errato affermare che, se il piano d'ammortamento alla francese standard venisse considerato come in violazione dell'articolo 1283 c.c. (c.d. "Anatocismo"), tale violazione potrebbe essere estesa a tutti gli altri piani d'ammortamento comunemente redatti nelle operazioni finanziarie standard[81].

Osservando nuovamente le sentenze precedentemente riportate, talvolta il dibattito si riduceva alla mera preferenza del regime della capitalizzazione semplice su quello in capitalizzazione composta (in virtù di legge per paura degli interessi anatocistici). È importante ricordare che lo scopo di questo elaborato non è sostenere questa tesi ma, piuttosto, scardinare le basi finanziariamente errate delle sentenze precedentemente riportate e fornire un quadro d'insieme che permetta di esprimere una propria opinione circa questa diatriba giuridica. Tuttavia, sebbene non sia di competenza del matematico finanziario definire ed interpretare le leggi giuridiche, non si può fare altro che puntualizzare la maggiore completezza, per caratteristiche ed in termini strutturali, del regime della CC su quello in CS nella stesura di un piano d'ammortamento.

Andando per gradi, sarebbe importante definire quali sono queste caratteristiche e verificare se, effettivamente, sia possibile costruire un piano di ammortamento che permetta di avvicinare

[81] Fabrizio Cacciafesta, *Sull'articolo "Compatibilità del regime della capitalizzazione composta…" dell'avv.to De Simone.*

simultaneamente sia le richieste strutturali (già evidenziate nel capitolo primo, 1.3) sia le richieste legali ("divieto di anatocismo", ipotizzando che la presenza di interessi composti determini un effetto anatocistico).

In sintesi, ciò a cui si vuole ambire è un piano di ammortamento alla francese costruito in CS che mantenga allo stesso tempo tutte le caratteristiche strutturali verificabili in un piano di ammortamento in CC[82]. Come si può intuire, questo obiettivo si rivela impossibile in quanto la CS non gode della proprietà della scindibilità delle leggi finanziarie di cui, invece, la CC è l'unica a goderne nell'ambito delle leggi che dipendono dalla sola durata dell'operazione finanziaria.

Per evidenziare come un piano di ammortamento in CC rispetti tutte le condizioni strutturali si può ricorrere ad un esempio numerico. Si presenta un piano di ammortamento costruito in CC, con tasso d'interesse annuale i = 10%, con importo iniziale A = 100.000,00, sviluppato su 5 periodi (annuali), t = 5:

Esempio 8

Tempo	Rata	Q. Interesse	Q. Capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

Di seguito si elencano le otto condizioni che devono essere soddisfatte affinché il piano di ammortamento a rate posticipate sia valido e coerente[83] (e annessa dimostrazione della validità in CC):

1) la somma delle quote capitali, alla data di stipula del contratto di mutuo è pari al debito inizialmente contratto ("chiusura contabile");

$$\mathbf{16.379,75 + 18.017,72 + 19.819,50 + 21.801,44 + 23.981,59 = 100.000,00} = \boldsymbol{A}$$

2) la somma dei valori attuali delle rate, sempre alla data di stipula del contratto di mutuo, è pari al debito inizialmente contratto ("chiusura finanziaria iniziale");

[82] Questo sarebbe l'immaginario utopico traducibile dalle sentenze finanziariamente errate. Probabilmente, i giudici, in quei casi, pensavano di aver raggiunto una scorciatoia agevole ipotizzando la compresenza di due regimi di capitalizzazione distinti. Una tale evenienza, sicuramente impossibile, avrebbe garantito le richieste giuridiche poiché prevedeva il rispetto di tutte le condizioni di chiusura e, allo stesso tempo, garantiva l'assenza di interessi composti. Come è stato ampiamente dimostrato, questa evenienza è da escludere in ogni caso.

[83] Queste condizioni erano già state presentate nel capitolo primo paragrafo 3 (1.3.).

$$\sum_{s=1}^{n} \mathbf{26.379,75} * \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1,1}}\right)^{s} = \mathbf{100.000,00} = \mathbf{A}$$

3) in ogni momento è possibile calcolare il debito residuo in quattro modi differenti (da formula 1.7 a 1.10):

Ipotizzo t=3	Retrospettivo (da 1 a t)	Prospettivo (da t a n)
Quote capitali (considero $Q.capitale$)	$A - \sum_{s=1}^{t} Q_s = C^{(t)}$ $\mathbf{100.000,00 - 16.379,75 - 18.017,72 - 19.819,50} = \mathbf{45.783,03}$	$\sum_{s=t+1}^{n} Q_s = C^{(t)}$ $\mathbf{21.801,44 + 23.981,59} = \mathbf{45.783,03}$
Rate (considero le rate)	$Ar^t - \sum_{s=1}^{t} R_s r^{t-s} = C^{(t)}$ $\mathbf{100.000,00} * (\mathbf{1,1})^3 - \sum_{s=1}^{3} \mathbf{26.379,75} * (\mathbf{1,1})^{3-s} = \mathbf{45.783,03}$	$\sum_{s=t+1}^{n} R_s v^{s-t} = C^{(t)}$ $\sum_{s=4}^{5} \mathbf{26.379,75} * \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1,1}}\right)^{s-3} = \mathbf{45.783,03}$

4) la quota interessi è data dal debito residuo alla fine del periodo precedente moltiplicato per il tasso di interesse periodale ($I_t = C^{(t-1)} i$);

$$\boldsymbol{I_1} = \mathbf{100.000,00} * \mathbf{10\%} = \mathbf{10.000,00}$$

5) la rata è data dalla somma della quota di interessi e della quota capitale;

$$\boldsymbol{R_1} = \mathbf{10.000,00} + \mathbf{16.379,75} = \mathbf{26.379,75}$$

6) il debito residuo alla fine di un certo periodo, successivo al periodo iniziale, è dato dal debito residuo alla fine del periodo precedente meno la quota capitale del periodo considerato;

$$\boldsymbol{C^1} = \mathbf{100.000,00} - \mathbf{16.379,75} = \mathbf{83.620,25}$$

7) il debito residuo alla fine di un certo periodo, successivo al periodo iniziale, è dato dal debito residuo alla fine del periodo precedente, capitalizzato per un periodo, meno la rata del periodo considerato;

$$\boldsymbol{C^1} = \mathbf{100.000,00} * (\mathbf{1,1}) - \mathbf{26.379,75} = \mathbf{83.620,25}$$

8) sia possibile identificare in modo univoco e noto anche alle terze parti, ai fini contabili, la quota interessi da imputare a conto economico e la quota capitale che interessa lo stato patrimoniale.

Avendo dimostrato come, attraverso l'utilizzo del regime di CC, sia stato possibile rispettare tutte le condizioni, sarebbe lecito effettuare la stessa prova ma attraverso l'utilizzo del regime di CS. La

costituzione di un piano di ammortamento alla francese in CS sviluppato attraverso la formula del calcolo delle rate

$$R^* = \frac{A}{\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+si}}$$

crea una serie di distorsioni che risultano in un debito residuo finale maggiore di zero. Sicuramente questo effetto preclude in maniera assoluta lo sviluppo di un piano di ammortamento. Una (parziale) soluzione è stata identificata nel paragrafo 2.1 attraverso l'utilizzo della $CS.f$; quest'ultima soddisfa, come detto in precedenza, sia la condizione di chiusura contabile sia la condizione di chiusura finale. Tuttavia, tra le condizioni che vengono meno, troviamo subito l'assenza della uguaglianza: $I_t = i \cdot C^{(t-1)}$ (che, come è stato detto in precedenza, è strutturale poiché dovrebbe essere il risultato del prodotto di tre termini e non due), oppure ancora, a causa dell'assenza del principio di scindibilità, l'impossibilità di ricondurre sotto un unico valore il debito residuo in una generica epoca t (Tabella 1). Una soluzione apparentemente definitiva che sembra risolvere il quesito vede l'unione dei due regimi di capitalizzazione attraverso quattro fasi:

a) Determinare il tasso periodale i per rimborsare un debito A in n periodi
b) Calcolare la rata R^* nel regime finanziario della CS al tasso i per n periodi
c) Definire il tasso i_c (che coincide anche con il TAEG dell'operazione finanziaria) come quel tasso che, attualizzando le rate R^*, permette di eguagliare a zero la differenza tra A (debito inizialmente contratto) e la sommatoria delle rate R^* attualizzate (al tasso i_c);
d) Effettuare di conseguenza il piano di ammortamento alla francese, in capitalizzazione composta.

Si procede con un esempio pratico.

Esempio 9

<u>Fornito un tasso di interesse contrattuale pari a 10%;</u> un importo iniziale $A = 100.000{,}00$; in 5 periodi;

- Si calcolano le rate in CS secondo la formula:

$$R^* = \frac{A}{\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+s \cdot i}} = \frac{100.000{,}00}{\sum_{s=1}^{5} \frac{1}{1+s \cdot 10\%}} = \mathbf{25.689{,}72}$$

- Si calcola i_c :

$$100.000{,}00 = \frac{25.689{,}72}{(1+i_c)} + \frac{25.689{,}72}{(1+i_c)^2} + \frac{25.689{,}72}{(1+i_c)^3} + \frac{25.689{,}72}{(1+i_c)^4} + \frac{25.689{,}72}{(1+i_c)^5}$$

risolvendo per i_c; $\quad i_c = \mathbf{8,9707}\%$

- Ora si può costruire il piano di ammortamento con rate R^* calcolate in CS e tasso (TAEG) i_c calcolato in CC:

Tempo	Rata	Q int	Q int (a)	Q int (b)	Q cap	Q cap (a)	Q cap (b)	Debt res	Debt res (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	100.000,00	100.000,00
1	25.689,72	8.970,73	8.970,73	-	16.718,99	23.574,88	- 6.855,89	83.281,01	76.425,12
2	25.689,72	7.470,91	6.855,89	615,02	18.218,81	21.634,14	- 3.415,33	65.062,20	54.790,97
3	25.689,72	5.836,55	4.915,15	921,40	19.853,17	19.853,17	-	45.209,03	34.937,80
4	25.689,72	4.055,58	3.134,18	921,40	21.634,14	18.218,81	3.415,33	23.574,88	16.718,99
5	25.689,72	2.114,84	1.499,82	615,02	23.574,88	16.718,99	6.855,89	-	-

---

Il risultato è rilevante in quanto la $Q.interesse\ (b)$, ovvero gli interessi composti, sono presenti anche in questo caso. Si potrebbero utilizzare anche altre impostazioni per costruire il piano di ammortamento in CS ma in ogni caso, per cause strutturali, è impossibile far coincidere tutte e otto le condizioni precedentemente elencate, e questo è causato proprio dal fatto che solo l'utilizzo della CC permette il contemporaneo soddisfacimento di tutte le condizioni.

Non bisogna farsi ingannare dall'ultimo esempio perché, seppur le rate siano state calcolare in CS, il tasso i_c è calcolato attualizzando R^* in CC. Quindi le rate R^* divengono rate calcolate in CC dove il tasso d'interesse non è più i ma i_c , dove $i_c < i$.

Capitolo Terzo

Applicazioni pratiche su linguaggio di programmazione Python

Nella finanza moderna, uno strumento che ha acquistato sempre più ampia importanza è il linguaggio di programmazione Python. Quest'ultimo, grazie alla sua grande capacità di adattamento e polifunzionalità, rappresenta uno dei mezzi di più ampio uso nel mondo del data science e machine learning.

L'aspetto che rende Python uno strumento di così notevole notorietà è il fatto che, a differenza di altri linguaggi di programmazione, garantisce alte prestazioni combinate ad una altrettanto elevata semplicità nell'uso. Infatti, qualsiasi soggetto, anche in assenza di una formazione informatica, può permettersi di imparare a sviluppare brevi algoritmi.

Già nel corso dell'elaborato è stato possibile mostrare la potenzialità di Python, all'interno di questo capitolo finale si vorrà mostrare come i sistemi di calcolo siano implementabili su questo linguaggio di programmazione e quali possano essere le diverse applicazioni nell'ambito bancario nell'erogazione di prestiti (mutui).

Il seguente capitolo si articolerà come segue:

- In primo luogo, verranno introdotte le potenzialità di Python attraverso la stesura di un primo, grezzo, algoritmo che permette di calcolare il piano d'ammortamento alla francese sia in CC sia in $CS.f$.
- In secondo luogo, verranno introdotte le librerie (NumPy, ScyPy, Pandas, Matplotlib) attraverso le quali si darà luogo ad un nuovo algoritmo, il cui output è lo stesso del precedente, che non solo efficienta la soluzione (in termini di tempo) ma permette di raggiungere una moltitudine di ulteriori applicazioni e funzionalità.

3.1 Python come strumento di calcolo di un piano d'ammortamento (primo algoritmo grezzo)

Lo sviluppo di un algoritmo Python è volto ad ottimizzare il tempo di chi ne fa uso; infatti, lo scopo di un programmatore (che non sono io naturalmente) è di certo quello di sviluppare dei sistemi (algoritmi) che permettano di eliminare dei passaggi, onerosi in termini di tempo, che altrimenti sarebbero ripetuti dall'uomo numerose volte. Un altro obiettivo che si pone un programmatore è quello di prevenire possibili errori umani nel redigere ed effettuare lunghi calcoli. Infine, e questo è un elemento centrale, l'utilizzo di algoritmi permette di sviluppare analisi e sistemi che l'uomo, in autonomia, non riuscirebbe a compiere se non attraverso lunghi e ancora più complessi calcoli.

L'applicazione del linguaggio Python nel mondo della finanza bancaria non è una novità, lo scenario analysis (stress test[84], calcolo del VaR[85], proiezione futura dell'andamento di un portafoglio di titoli o prestiti) ed il calcolo del rischio di un portafoglio di prestiti[86] (o titoli) sono solo due delle innumerevoli possibilità di utilizzo di tale strumento.

Essendo l'oggetto di questo elaborato i piani d'ammortamento alla francese, sembra più che giusto mostrare come in Python sia possibile sviluppare un algoritmo che sintetizzi l'insieme di calcoli che andrebbero altrimenti effettuati manualmente.

L'utilità di un algoritmo apposito per il calcolo di piani d'ammortamento non è del tutto scontata; sicuramente evita la ripetizione di passaggi che in Excel (ad esempio) avverrebbe non di rado; permette di sviluppare numerosi piani d'ammortamento contemporaneamente (variando anche per numero di anni e periodicità delle rate); garantisce lo sviluppo di funzioni che su altre piattaforme possono essere svolte solo manualmente (ad esempio la creazione di grafici di più tipologie); insomma, le applicazioni sono numerose e tutte alquanto utili all'interno di una banca.

Come anticipato nell'introduzione del capitolo, lo sviluppo dell'algoritmo seguirà un andamento di carattere esplorativo; si inizierà attraverso la presentazione della prima bozza di algoritmo che rappresenta una soluzione iniziale (ma non ottimale) al calcolo da svolgere. Quest'ultima si sviluppa intorno ai fondamenti ed alle caratteristiche base di Python e non contiene alcun elemento di carattere più avanzato. L'utilizzo di strumenti avanzati (le librerie, che verranno introdotte nel secondo

[84] Stima delle perdite negli scenari peggiori.
[85] Value at Risk, sistema di previsione di perdite future ipotizzando l'andamento normale dei rendimenti attesi .
[86] Risk Weighted Assets (RWA). Valore fondamentale nell'ambito della finanza prudenziale, soprattutto in ambito bancario dove, a seguito dell'introduzione degli accordi di Basilea, ogni banca deve fare in modo di far corrispondere una certa percentuale di patrimonio di vigilanza (coefficiente di solvibilità) in relazione ad ogni unità di RWA (attualmente tale coefficiente è pari all'8%).

paragrafo) è stato limitato al calcolo del TIR della operazione; tale calcolo non può essere effettuato se non attraverso specifiche librerie a causa della notevole difficoltà di calcolo e alla rappresentazione grafica delle curve di quota interesse e capitale.

Per presentare il primo algoritmo bisogna spiegare in maniera concisa quale sia il funzionamento di Python.

Per creare degli algoritmi, l'utilizzatore può ricorrere a più metodi:

- Sviluppare i calcoli assegnando alle variabili dei valori iniziali senza creare alcun tipo di funzione. Questo tipo di sviluppo è utile quando si è in fase di creazione dell'algoritmo e risulta molto comodo per effettuare un adeguato *debugging*[87].
- Creare una funzione *ad hoc* (cioè esterna a quelle che fornisce Python) per il pezzo di algoritmo che si sta sviluppando: per utilizzare questo strumento si usa la parola chiave "def". Solitamente questa rappresentazione avviene già ad algoritmo concluso quando si vuole "giocare" con le differenti opportunità che fornisce una funzione Python; con il "def" basterà chiamare la funzione creata così che, inserendo i dati in input, svolge in autonomia tutti i calcoli contenuti nell'algoritmo.
- Infine (anche se non identifica un metodo vero e proprio per sviluppare un algoritmo) si può creare un *module* ovvero un file distinto che contiene l'estensione ".py"; esso permette di inserire nella propria directory la funzione sviluppata salvandola semplicemente con un nome (ad esempio potrei creare un nuovo file denominato "ammortamento_francese.py"). Di fatto, rappresenta uno strumento di cui si fa uso solo dopo aver anche sviluppato la funzione con il "*def*". L'utilità di quest'ultima è data dal fatto che basterà importare il file con le varie funzioni create così da non dover ripetere il codice ogni volta. Un modulo si importa nella console Python attraverso la funzione "*import*"; le diverse funzioni potranno essere usate solo dopo aver correttamente importato l'intero modulo (nel prossimo paragrafo verrà mostrato il funzionamento con un esempio pratico).

Per ora ci si limiterà a rappresentare la funzione creata e si rappresenteranno gli algoritmi ricorrendo all'utilizzo del "*def*". Nel prossimo paragrafo si farà utilizzo anche della terza possibilità.

[87] Pratica attraverso la quale si effettua la ricerca di possibili errori nello sviluppo dell'algoritmo. In taluni casi, quando il codice inizia ad essere di notevole lunghezza, conviene separare la funzione e far lavorare le parti singolarmente. In questo modo si restringe il range di errore e si può comprendere meglio quale sia la parte di codice effettivamente difettosa.

Il primo algoritmo sviluppato è il seguente:

```
import pylab as pl

def tir(Importo_prestato,Tipo_capitalizzazione,Numero_rate_annue,i):
    import numpy_financial as npf
    cash_flow=[-Importo_prestato]
    counter=0
    inserire_importo=0
    if Tipo_capitalizzazione=='cap semplice':
        for f in range(1,Numero_rate_annue+1):
            counter+=(1/(1+f*i))
        RATA_CS=Importo_prestato/counter
        cash_flow+=[RATA_CS]*Numero_rate_annue
    else:
        for i in range(Numero_rate_annue):
            inserire_importo=float(input('inserire cash flow annuale (se ultimato inderire -stop-): '))
            cash_flow+=[inserire_importo]
    irr = round(npf.irr(cash_flow),4)
    return irr

def ammortamento_francese_cap_sempl(Importo_prestato,Numero_rate_annue,i,Tipo_capitalizzazione):
    rata_CSf=Importo_prestato*(1+i*Numero_rate_annue)/(Numero_rate_annue*(1+i*(Numero_rate_annue-1)/2))
    Rata=Debt_res=quota_cap=quota_int=somma_quote_cap=anno=0
    global x1,y1,x3,y3
    x1,y1,x3,y3=[[],[],[],[]]
    print("\nAMMORTAMENTO FRANCESE IN",Tipo_capitalizzazione.upper()," \n")
    print("Periodo","|","Rata" ,' '*10 ,"|","Quota interessi",' '*2 ,"|","Quota capitale",' '*2 ,\
          "|","Debito residuo:",' '*2 ,"|")
    for n in range(Numero_rate_annue,-1,-1):
        quota_int=i*Debt_res*(1/(1+i*n))
        Debt_res=rata_CSf*n*(1+i*(n-1)/2)/(1+i*n)
        quota_cap=Rata-quota_int
        somma_quote_cap+=quota_cap
        print('%7.f' % anno,"|",'%15.2f' % Rata,"|", '%18.2f' % quota_int,"|",'%17.2f' % quota_cap,"|", \
              '%18.2f' % Debt_res,"|")
        Rata=Importo_prestato*(1+i*Numero_rate_annue)/(Numero_rate_annue*(1+i*(Numero_rate_annue-1)/2))
        x1.append(anno), y1.append(quota_int), x3.append(anno), y3.append(quota_cap)
        anno+=1
    print("\nCondizione di Chiusura contabile:",format(somma_quote_cap, '.2f'),"  ",round(somma_quote_cap)==Importo_prestato)
    print("_"*44*2)
```

```
def ammortamento_francese_cap_comp(Importo_prestato,Numero_rate_annue,i,Tipo_capitalizzazione):
    d_resa=Importo_prestato
    rata_CC=Importo_prestato*i/(1-(1+i)**-(Numero_rate_annue))
    Rata=quota_cap=Debt_res=quota_int=somma_quote_cap=anno=q_inta=q_intb=q_capa=q_capb=0
    global x2,y2,x4,y4
    x2,y2,x4,y4=[[],[],[],[]]
    print("\nAMMORTAMENTO FRANCESE IN",Tipo_capitalizzazione.upper()," \n")
    print("Periodo","|","Rata" ,' '*6 ,"|","Q. Int",' '*2 ,"|","Q. Int (a)","|","Q. Int (b)","|","Q. Cap",' '*2,\
          "|","Q. Cap (a)","|","Q. Cap (b)","|","D. Res",' '*2 ,"|", "D. Res (a)","|")
    for c in range(Numero_rate_annue,-1,-1):
        quota_int=Debt_res*i
        q_capa=Rata*((1+i)**-anno)
        d_resa-=q_capa
        quota_cap=Rata-quota_int
        q_intb=quota_int-q_inta
        q_capb=quota_cap-q_capa
        Debt_res=rata_CC*(1-(1+i)**-c)/i
        somma_quote_cap+=quota_cap
        print('%7.f' % anno,"|",'%11.2f' % Rata,"|", '%9.2f' % quota_int,"|",'%10.2f' % q_inta,"|",'%10.2f' % q_intb,\
        "|",'%9.2f' % quota_cap,"|",'%10.2f' % q_capa,"|",'%10.2f' % q_capb,"|",'%9.2f' % Debt_res,"|",'%10.2f' % d_resa,"|")
        q_inta=d_resa*i
        Rata=Importo_prestato*i/(1-(1+i)**-Numero_rate_annue)
        x2.append(anno), y2.append(quota_int), x4.append(anno), y4.append(quota_cap)
        anno+=1
    print("\nCondizione di Chiusura contabile:",format(somma_quote_cap, '.2f'),"  ",round(somma_quote_cap)==Importo_prestato)
    print("_"*62*2)
```

Immagine 1: Algoritmi per calcolo del TIR, ammortamento in CS.f e ammortaemnto in CC

Come si può notare, il codice è molto elaborato (naturalmente può sembrare del tutto privo di senso per il lettore che non ha mai avuto a che fare con questo linguaggio di programmazione), tuttavia, se si guarda attentamente non è difficile rendersi conto di come il calcolo delle varie quote sia caratterizzato dalle formule introdotte nei due capitoli precedenti.

Ad esempio, se si osserva la funzione `ammortamento_francese_cap_sempl` , ci si renderà conto facilmente che nel pezzo di codice `Debt_res=rata_CSf*n*(1+i*(n-1)/2)/(1+i*n)` è osservabile la formula 2.18 per il calcolo del debito residuo nella CS.f:

$$\boldsymbol{C}^{(t)}{}_{\boldsymbol{cs.f}} = R^{cs.f} \cdot a_{n-t|i}^{cs.f} = R^{cs.f} \cdot \frac{(n-t) \cdot (1 + i \cdot \frac{n-t-1}{2})}{1 + i \cdot (n-t)}$$

La non totale coincidenza tra le due formule deriva dal fatto che in Python (ma in realtà pure in Excel se si vuole evitare la ripetizione di calcoli) non si opera applicando semplici formule ma si cerca di adattare all'iterazione (ovvero all'utilizzo del ciclo for) le formule di cui si ha conoscenza. Questo significa che `for n in range(Numero_rate_annue,-1,-1):` rappresenta un conto alla rovescia che parte dal numero di rate da corrispondere ed arriva a zero,

```
for i in range(10,-1,-1):
    print(i)

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
```

Quello che avviene nell'algoritmo è, a questo punto, molto più chiaro: l'$(n-t)$ della 2.18 viene sostituito dall'n interno al ciclo *for* che non fa altro che rappresentare la distanza tra il tempo attuale ed il tempo della rata finale. È così che, se si prende in considerazione il tempo $t = 0$ in un'operazione dalla durata $n = 10$, la differenza sarà pari a 10 ovvero il secondo valore nel ciclo for di sopra rappresentato (per $t = 1$ il ciclo si troverà alla quarta iterazione e dunque avrà come output 9 e così via). Il resto delle quote seguirà una logica simile, l'unico valore che non necessitava di iterazione è il calcolo della rata che, essendo in questo caso costante, può essere calcolata con la formula 2.11.

Ciò su cui si vuole porre maggiore attenzione è che, in questo caso, attraverso questo algoritmo, la rappresentazione del piano d'ammortamento è evidente frutto della serie iterata di "*print*" che, dunque, pregiudica il salvataggio delle quote nei vari periodi e si limita a rappresentare unicamente il valore trovato.

Per dare una maggiore percezione di ciò di cui si sta parlando si procede con la stesura dell'algoritmo finale, la cui funzionalità verrà discussa dopo averlo utilizzato in un esempio numerico.

```
def ammortamento_francese():
    '''con rappresentazione grafica delle curve per quote interesse e capitale'''
    Importo_prestato=float(input("Inserire l'importo prestato: "))
    Numero_rate_annue=int(input("Inserire il numero di anni: "))
    cadenza=int(input("Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n): "))
    if cadenza!=1:
        taeg_obiettivo=float(input("Inserisci il TAEG obiettivo: "))
        print('Se sei interessato al TAEG obiettivo, fornisco il tasso periodale i(1/n) corrispettivo: ',\
              ((1+taeg_obiettivo)**(1/cadenza)-1))
    p=float(input("Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: "))
    Tipo_capitalizzazione=input("Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):")
    if Tipo_capitalizzazione=="cap semplice":
        tipo_CS=input('Inserire preferenza su costruzione: se si vuole in Cap Semplice Finale inserisci -finale- ;\
        se preferisci con rate in CS e TAEG cap composta inserisci -classica-: ')
        if tipo_CS=="finale":
            ammortamento_francese_cap_sempl(Importo_prestato, Numero_rate_annue*cadenza, p,Tipo_capitalizzazione)
            plot1 = pl.plot(x1[1:], y1[1:], 'r', label='q.interessi CSf')
            plot3 = pl.plot(x3[1:], y3[1:], 'b', label='q.capitale CSf')
        elif tipo_CS=="classica":
                ammortamento_francese_cap_comp(Importo_prestato, Numero_rate_annue*cadenza,tir(Importo_prestato,\
                        Tipo_capitalizzazione,Numero_rate_annue*cadenza,p),Tipo_capitalizzazione)
                print('\nTAEG operazione è: ',(1+tir(Importo_prestato,Tipo_capitalizzazione,\
                                                    Numero_rate_annue*cadenza,p))**cadenza-1,' \n')
                return
    elif Tipo_capitalizzazione=="cap composta":
        ammortamento_francese_cap_comp(Importo_prestato, Numero_rate_annue*cadenza, p,'capitalizzazione composta')
        plot2 = pl.plot(x2[1:], y2[1:], 'g', label='q.interessi CC')
        plot4 = pl.plot(x4[1:], y4[1:], 'k', label='q.capitale CC')
    elif Tipo_capitalizzazione=="entrambe":
        ammortamento_francese_cap_comp(Importo_prestato, Numero_rate_annue*cadenza,p,'capitalizzazione composta'), \
        ammortamento_francese_cap_sempl(Importo_prestato, Numero_rate_annue*cadenza, p,'capitalizzazione semplice')
        plot1 = pl.plot(x1[1:], y1[1:], 'r', label='q.interessi CSf')
        plot2 = pl.plot(x2[1:], y2[1:], 'g', label='q.interessi CC')
        plot3 = pl.plot(x3[1:], y3[1:], 'b', label='q.capitale CSf')
        plot4 = pl.plot(x4[1:], y4[1:], 'k', label='q.capitale CC')
    pl.title('Grafico q.interesse e q.capitale'), pl.xlabel('Numero rate'), pl.ylabel('Valore in €')
    pl.xlim(1.0, Numero_rate_annue), pl.ylim(0.0, Importo_prestato*p/(1-(1+p)**-(Numero_rate_annue*cadenza)))
    pl.legend(numpoints=3)
    pl.show()
```

Immagine 2: Algoritmo finale dell'ammortamento alla francese

La funzione `ammortamento_francese()` finale è una funzione differente dalle due precedenti; le parentesi tonde senza alcun contenuto stanno a significare che non vi è alcun parametro di default e dunque i valori devono essere per forza inseriti dall'utente su richiesta della funzione stessa senza doversi ricordare l'ordine d'inserimento.

Il lettore che non ha dimestichezza con questo tipo di funzione, si starà domandando come, allora, si possono inserire i parametri che servono a costruire il piano d'ammortamento; la metodologia è più semplice di quello che sembra perché in Python viene in soccorso la funzione "*input*" che permette di far inserire all'utente i parametri dopo aver chiamato la funzione.

L'utilità di questa keyword non si limita al fatto che essa permette di rappresentare un messaggio con le indicazioni che si vogliono dare all'utente (ad esempio "Inserire l'importo prestato") ma in alcuni casi permette di far ripetere (sempre attraverso un ciclo *for*) i parametri da inserire in modo tale da poter creare contenitori (solitamente liste o dizionari) che contengono i valori che l'utente ha fornito di volta in volta. Si riporta un esempio pratico:

```python
for i in range(10):
    x=int(input('Inserire il parametro da usare nella equazione: '))
    eq_1=x**2
    print(eq_1)
```

```
Inserire il parametro da usare nella equazione: 110
12100
Inserire il parametro da usare nella equazione: 10
100
Inserire il parametro da usare nella equazione: 5
25
```

In questo caso ci sarebbe stata l'opportunità di inserire altri 7 valori e di inserirli tutti in una lista. Naturalmente, vi è la possibilità di creare cicli infiniti (*infinite loop*) nei quali solo una parola chiave può terminare l'iterazione. In questi casi non si fa uso del *for loop* ma, piuttosto, del *while loop*.

A questo punto è evidente comprendere ciò che la funzione `ammortamento_francese()` svolge, in quanto essa prende in input tutti i parametri necessari per costruire un piano d'ammortamento e fornisce in output ciò che l'utente desidera. Nell'esempio seguente l'utente sceglie di redigere entrambi i piani d'ammortamento possibili ed opta per un mutuo con capitale prestato pari ad euro 100.000,00, TAEG al 10% e durata pari a 10 anni con rate annue.

```python
ammortamento_francese()
```

```
Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 10
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n): 1
Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: 0.1
Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):entrambe

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

Periodo	Rata	Q. Int	Q. Int (a)	Q. Int (b)	Q. Cap	Q. Cap (a)	Q. Cap (b)	D. Res	D. Res (a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	16274.54	10000.00	10000.00	0.00	6274.54	14795.04	-8520.50	93725.46	85204.96
2	16274.54	9372.55	8520.50	852.05	6901.99	13450.03	-6548.04	86823.47	71754.93
3	16274.54	8682.35	7175.49	1506.85	7592.19	12227.30	-4635.11	79231.27	59527.63
4	16274.54	7923.13	5952.76	1970.36	8351.41	11115.73	-2764.32	70879.86	48411.90
5	16274.54	7087.99	4841.19	2246.80	9186.55	10105.21	-918.66	61693.31	38306.69
6	16274.54	6169.33	3830.67	2338.66	10105.21	9186.55	918.66	51588.10	29120.14
7	16274.54	5158.81	2912.01	2246.80	11115.73	8351.41	2764.32	40472.37	20768.73
8	16274.54	4047.24	2076.87	1970.36	12227.30	7592.19	4635.11	28245.07	13176.53
9	16274.54	2824.51	1317.65	1506.85	13450.03	6901.99	6548.04	14795.04	6274.54
10	16274.54	1479.50	627.45	852.05	14795.04	6274.54	8520.50	0.00	0.00

```
Condizione di Chiusura contabile: 100000.00    True
```

```
AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE
```

Periodo	Rata	Quota interessi	Quota capitale	Debito residuo:
0	0.00	0.00	0.00	100000.00
1	13793.10	5263.16	8529.95	91470.05
2	13793.10	5081.67	8711.43	82758.62
3	13793.10	4868.15	8924.95	73833.67
4	13793.10	4614.60	9178.50	64655.17
5	13793.10	4310.34	9482.76	55172.41
6	13793.10	3940.89	9852.22	45320.20
7	13793.10	3486.17	10306.93	35013.26
8	13793.10	2917.77	10875.33	24137.93
9	13793.10	2194.36	11598.75	12539.18
10	13793.10	1253.92	12539.18	0.00

```
Condizione di Chiusura contabile: 100000.00    True
```

La scelta dell'utente può, tuttavia, estendersi anche al di fuori di una redazione del piano così semplice. Ad esempio, si potrebbe richiedere alla funzione `ammortamento_francese()` di svolgere i calcoli con i parametri dell'esempio 9 fornendo in output il piano d'ammortamento con calcolo delle rate in $CS.i$ e successiva costruzione in CC. Ciò che bisognerà attendersi è un piano con TAEG inferiore a quello inserito contrattualmente.

```
ammortamento_francese()

Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 5
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n): 1
Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: 0.1
Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):cap semplice
Inserire preferenza su costruzione: se si vuole in Cap Semplice Finale inserisci -finale- ;
se preferisci con rate in CS e TAEG cap composta inserisci -classica-: classica

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAP SEMPLICE
```

Periodo	Rata	Q. Int	Q. Int (a)	Q. Int (b)	Q. Cap	Q. Cap (a)	Q. Cap (b)	D. Res	D. Res (a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	25689.72	8970.73	8970.73	0.00	16718.99	23574.88	-6855.89	83281.01	76425.12
2	25689.72	7470.91	6855.89	615.02	18218.81	21634.14	-3415.33	65062.20	54790.97
3	25689.72	5836.55	4915.15	921.40	19853.17	19853.17	0.00	45209.03	34937.80
4	25689.72	4055.58	3134.18	921.40	21634.14	18218.81	3415.33	23574.88	16718.99
5	25689.72	2114.84	1499.82	615.02	23574.88	16718.99	6855.89	0.00	-0.00

```
Condizione di Chiusura contabile: 100000.00    True
```

```
TAEG operazione è:  0.08970727118893551
```

Il risultato è identico a quello fornito nell'esempio 9, e ciò sta ad indicare che, quanto atteso, si è verificato.

La determinazione del TAEG in questo esempio è particolarmente importante, la soluzione di questo piano d'ammortamento ha richiesto l'utilizzo del calcolo del TIR prendendo in considerazione il cash flow seguente:

t	Cash Flow
0	$-Importo_prestato$
1	$Rata_CS.i$
..	$Rata_CS.i$
$Numero_rate_annue * cadenza$	$Rata_CS.i$

Per il calcolo del TIR, come accennato in precedenza, è necessario l'uso della libreria numpy_financial che attraverso la funzione irr ("internal rate of return") prende in input un cash flow e fornisce il tasso interno di rendimento (proprio come in TIR.COST di Excel).

3.2 L'importanza delle librerie e lo sviluppo dell'algoritmo finale

Per ovviare agli evidenti limiti che pone il primo algoritmo sviluppato, si vuole rappresentare un metodo alternativo che permetta di efficientare il processo di calcolo del piano d'ammortamento alla francese. Per raggiungere questo fine sarà necessario introdurre uno strumento particolarmente importante: le librerie (*libraries*).

Una *library* rappresenta una collezione di *modules*. Come accennato in precedenza, ogni *module* contiene un insieme di costanti, classi[88] o funzioni sviluppate da altri programmatori. Il vantaggio che si ottiene deriva dal fatto che lo sviluppo di questi moduli è stato effettuato per mano di informatici che hanno efficientato i procedimenti di calcolo così da riportare funzioni che non possono essere migliorate ulteriormente. Poiché l'utente, se non volesse fare uso delle librerie, dovrebbe sviluppare le funzioni in autonomia, dovrebbe preoccuparsi del costo computazionale sia in termini di spazio sia in termini di tempo. Spesso, se non sempre, non è facile trovare la soluzione più efficiente (in termini di tempo e in termini di spazio) e, dunque, l'utente si ritrova con funzioni sviluppate in maniera non del tutto precisa, probabilmente di qualità peggiore di quelle contenute nelle *libraries*.

Ai fini di questo elaborato l'utilizzo delle librerie è indubbiamente vantaggioso; come si potrà vedere, la differenza tra il primo ed il secondo algoritmo è alquanto sostenuta e non si riduce unicamente alla maggiore efficienza che porta con sé, ma anche alla maggiore funzionalità che esso garantisce.

Prima di mostrare il secondo algoritmo bisogna mostrare come funziona una libreria, come si apre e quali sono le librerie di cui si farà maggior uso in questo elaborato.

Quando viene effettuato il download di Python esso racchiude già un insieme di librerie (*standard libraries*) che, però, non ricoprono la totalità di quelle disponibili. Per usufruire di un'altra libreria, non contenuta già su Python, bisogna effettuare l'installazione che su Windows può avvenire attraverso il "Prompt dei comandi". All'interno di questo basterà inserire la frase "pip install" con il nome della libreria ed essa sarà disponibile per l'uso. Dopo aver effettuato l'installazione della libreria bisognerà importare il modulo scelto, e ciò avviene, come è stato già detto, attraverso la keyword "*import*".

Un esempio può essere fornito con l'utilizzo del modulo *math*:

[88] Creare una nuova classe equivale a creare un nuovo tipo, essa permette di dare origine a nuove istanze (oggetti) che a loro volta possono avere attributi propri.

```
import math
```

```
math.sqrt(100)
```

```
10.0
```

Esso contiene un insieme di funzioni e dati (il valore puntuale di pi greco) a cui si può accedere con semplicità, basta inserire il nome del modulo importato, aggiungere un punto e scrivere la funzione che si vuole usare (come mostrato di sopra). La funzione “sqrt”, ad esempio, permette di calcolare la radice quadrata di qualsiasi valore inserito in input.

Le librerie a cui è stato fatto maggior riferimento sono state:

- NumPy (“*Numerical Python*”), rappresenta la libreria più utilizzata poiché è uno strumento molto efficace nel machine learning (anche perché altre librerie si appoggiano proprio sull’interfaccia Array sviluppata in Numpy). Essa svolge basilari operazioni matematiche e permette di operare con dati organizzati in maniera multidimensionale e matriciale (ad esempio, è molto agevole sviluppare la matrice delle covarianze se si è intenzionati a calcolare la deviazione standard di portafoglio).
- SciPy (“*Scientific Python*”) è stata già utilizzata per calcolare le derivate. Essa, come molte altre, è una estensione di NumPy, ma svolge una funzione differente poiché permette di effettuare calcoli scientificamente molto complessi.
- Matplotlib: questo tipo di libreria conserva al suo interno un vasto insieme di funzioni che servono a rappresentare graficamente variabili e dati. Essa viene utilizzata, soprattutto, nella data analysis.
- Pandas rappresenta lo strumento che senza alcun dubbio è risultato più utile. La sua funzionalità permette di semplificare enormemente i calcoli e di rappresentare in maniera tabellare i dati raccolti. Le operazioni disponibili con la funzione DataFrame permettono di svolgere calcoli tra le varie colonne (indicizzazione, concatenazione, sostituzione dei valori ecc..) in modo tale da restringere in maniera evidente le parti di codice.

L’algoritmo inizialmente presentato attraverso le *immagini 1* e *2* cambia radicalmente se vengono utilizzate le librerie poc’anzi introdotte.

Di seguito viene rappresentata la nuova versione dell’algoritmo.

```python
import pandas as pd
from tabulate import tabulate
import numpy_financial as npf
import matplotlib.pyplot as plt

def ammortamento_francese_cap_sempl(Imp,N_rate,i,Tipo_capitalizzazione):
    rata_CSf=Imp*(1+i*N_rate)/(N_rate*(1+i*(N_rate-1)/2))
    global amm_franc_csf
    amm_franc_csf=pd.DataFrame(columns=['Rata','Quota interesse','Quota capitale','Debito Residuo'])
    amm_franc_csf['Ordine inverso']=[x for x in range(N_rate,-1,-1)]
    amm_franc_csf['Rata']=rata_CSf
    amm_franc_csf['Debito Residuo']=amm_franc_csf.apply(lambda x: x['Rata']*x['Ordine inverso']*+\
                                                        (1+i*(x['Ordine inverso']-1)/2)/(1+i*x['Ordine inverso']),axis=1)
    amm_franc_csf['Quota interesse']=amm_franc_csf.apply(lambda x: x['Debito Residuo']*i*+\
                                                        (1/(1+i*(x['Ordine inverso']-1))),axis=1)
    amm_franc_csf['Quota interesse']=[0]+list(amm_franc_csf['Quota interesse'][0:N_rate])
    amm_franc_csf.loc[0,'Rata']=0
    amm_franc_csf['Quota capitale']=amm_franc_csf['Rata']-amm_franc_csf['Quota interesse']
    global cash_flow
    cash_flow=[-Imp]+list(amm_franc_csf['Rata'][1:])
    print("\nAMMORTAMENTO FRANCESE IN",Tipo_capitalizzazione.upper()," \n")
    print(tabulate(amm_franc_csf.drop('Ordine inverso',axis=1), headers = 'keys', tablefmt = 'fancy_grid',floatfmt=".2f"))
    print("\nChiusura contabile:", format(amm_franc_csf['Quota capitale'].sum(),'.2f'),\
          round(amm_franc_csf['Quota capitale'].sum())==Imp)
    print("\nChiusura finanziaria finale:",format(amm_franc_csf.apply(lambda x: x['Rata']*(1+i*+\
                (x['Ordine inverso'])),axis=1).sum(),'.2f'),"\nImporto capitalizzato in n: ",format(Imp*(1+i*N_rate),'.2f'))
```

Immagine 4: Algoritmo ammortamento francese CS.f definitivo

```python
def ammortamento_francese_cap_comp(Imp,N_rate,i,Tipo_capitalizzazione):
    global amm_franc_cc
    rata_CC=-npf.pmt(i,N_rate,Imp)
    amm_franc_cc=pd.DataFrame(columns=['Rata','Q. int','Q. int(a)',\
                                       'Q. int(b)','Q. cap','Q. cap(a)','Q. cap(b)','D. Res','D. Res(a)'])
    amm_franc_cc['Inverso']=[x for x in range(N_rate,-1,-1)]
    amm_franc_cc['Ordine']=[x for x in range(N_rate+1)]
    amm_franc_cc['Rata']=rata_CC
    amm_franc_cc['D. Res']=amm_franc_cc.apply(lambda x: x['Rata']*((1-(1+i)**-x['Inverso'])/i),axis=1)
    amm_franc_cc['Q. int']=amm_franc_cc.apply(lambda x: x['D. Res']*i,axis=1)
    amm_franc_cc['Q. int']=[0]+list(amm_franc_cc['Q. int'][0:N_rate])
    amm_franc_cc.loc[0,'Rata']=0
    amm_franc_cc['Q. cap(a)']=amm_franc_cc.apply(lambda x: x['Rata']*((1+i)**-x['Ordine']),axis=1)
    amm_franc_cc['D. Res(a)']=[amm_franc_cc['Q. cap(a)'][x+1:N_rate+1].sum() for x in range(N_rate+1)]
    amm_franc_cc['Q. int(a)']=amm_franc_cc.apply(lambda x: x['D. Res(a)']*i,axis=1)
    amm_franc_cc['Q. int(a)']=[0]+list(amm_franc_cc['Q. int(a)'][0:N_rate])
    amm_franc_cc['Q. cap']=amm_franc_cc['Rata']-amm_franc_cc['Q. int']
    amm_franc_cc['Q. cap(b)']=amm_franc_cc['Q. cap']-amm_franc_cc['Q. cap(a)']
    amm_franc_cc['Q. int(b)']=amm_franc_cc['Q. int']-amm_franc_cc['Q. int(a)']
    print("\nAMMORTAMENTO FRANCESE IN",Tipo_capitalizzazione.upper()," \n")
    print(tabulate(amm_franc_cc.drop(['Inverso','Ordine'],axis=1), headers = 'keys', tablefmt = 'fancy_grid',floatfmt=".2f"))
    print("\nChiusura contabile:", format(amm_franc_cc['Q. cap'].sum(),'.2f'),\
          round(amm_franc_cc['Q. cap'].sum())==Imp)
    print("\nChiusura finanziaria finale:", format(amm_franc_cc.apply(lambda x: x['Rata']*+\
        ((1+i)**(x['Inverso'])),axis=1).sum(),'.2f'),"\nImporto capitalizzato in n: ",format(-npf.fv(i,N_rate,0,Imp),'.2f'))
```

Immagine 5: Algoritmo ammortamento francese CC definitivo

```python
def ammortamento_francese():
    '''con rappresentazione grafica delle curve per quote interesse e capitale'''
    Imp=float(input("Inserire l'importo prestato: "))
    N_rate=int(input("Inserire il numero di anni: "))
    cadenza=int(input("Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): "))
    if cadenza!=1:
        taeg_obiettivo=float(input("Inserisci il TAEG obiettivo: "))
        print('Se sei interessato al TAEG obiettivo, fornisco il tasso periodale i(1/n) corrispettivo: ',\
              ((1+taeg_obiettivo)**(1/cadenza)-1))
    i=float(input("Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: "))
    Tipo_capitalizzazione=input("Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):")
    if Tipo_capitalizzazione=="cap semplice":
        print("Viene rappresentato sia il piano d'ammortamento in CS.f sia in CC con la costruzione delle rate in CS.i")
        ammortamento_francese_cap_sempl(Imp,cadenza*N_rate, i,Tipo_capitalizzazione)
        plot1 = plt.plot(amm_franc_csf['Quota interesse'], 'r', label='q.interessi CSf')
        plot3 = plt.plot(amm_franc_csf['Quota capitale'], 'b', label='q.capitale CSf')
        cash_flow=[-Imp]+[Imp/sum([(1/(1+x*0.1)) for x in range(1,N_rate*cadenza+1)])]*N_rate*cadenza
        ammortamento_francese_cap_comp(Imp, N_rate*cadenza,npf.irr(cash_flow),'capitalizzazione composta con rate in CS.i')
        print('\nTAEG operazione è: ',(1+npf.irr(cash_flow))**cadenza-1,' \n')
    elif Tipo_capitalizzazione=="cap composta":
        ammortamento_francese_cap_comp(Imp, N_rate*cadenza,i,'capitalizzazione composta')
        plot2 = plt.plot(amm_franc_cc['Q. int'], 'g', label='q.interessi CC')
        plot4 = plt.plot(amm_franc_cc['Q. cap'], 'k', label='q.capitale CC')
    elif Tipo_capitalizzazione=="entrambe":
        fig= plt.figure(figsize=(5,10))
        ammortamento_francese_cap_comp(Imp, N_rate*cadenza,i,'capitalizzazione composta'), \
        ammortamento_francese_cap_sempl(Imp, N_rate*cadenza, i,'capitalizzazione semplice')
        plt.bar(['Somma q. interesse CC','Somma q. interesse CS.f'],[amm_franc_cc['Q. int'].sum(),\
                                                                     amm_franc_csf['Quota interesse'].sum()])
        plt.show()
        plot1 = plt.plot(amm_franc_csf['Quota interesse'], 'r', label='q.interessi CSf')
        plot2 = plt.plot(amm_franc_cc['Q. int'], 'g', label='q.interessi CC')
        plot3 = plt.plot(amm_franc_csf['Quota capitale'], 'b', label='q.capitale CSf')
        plot4 = plt.plot(amm_franc_cc['Q. cap'], 'k', label='q.capitale CC')
    plt.title('Grafico q.interesse e q.capitale'), plt.xlabel('Numero rate'), plt.ylabel('Valore in €')
    plt.xlim(1.0, N_rate*cadenza), plt.ylim(0.0, Imp*i/(1-(1+i)**-(N_rate*cadenza)))
    plt.legend(numpoints=3)
    plt.show()
```

Immagine 6: Algoritmo definitivo per il calcolo dell'ammortamento francese

Il cambiamento è evidente e, se si conosce la libreria Pandas, non è difficile comprendere come è stato strutturato l'algoritmo. Con questa nuova soluzione sono stati risolti un insieme di problemi che, seppur non fossero così evidenti in precedenza, verranno adesso posti in risalto.

I vantaggi che si ricollegano a questa nuova soluzione possono essere riassunti in due aspetti chiave:

1) Nel primo algoritmo non vi è possibilità di salvare (materialmente) il piano d'ammortamento, esso rappresenta solo un'immagine poiché le varie quote e rate vengono rappresentate (attraverso la *print function*) ma non salvate in alcun tipo di strumento di raccolta (né liste, né tuple, né dizionari). Sarebbe stato possibile salvare i valori, ma questo avrebbe portato ad un'ulteriore prolissicità dell'algoritmo. Dal momento che i dati non sono contenuti in alcun luogo, non sarà possibile svolgere operazioni su questi. Ciò significa che il primo algoritmo si traduce in una semplice immagine e niente di più (un vero e proprio spreco delle potenzialità di Python). Con il nuovo algoritmo si crea un DataFrame (una sorta di tabella) per ogni piano d'ammortamento; su di esso si possono svolgere tutti i tipi di operazione, interagendo tra le varie colonne (il piano d'ammortamento viene sviluppato proprio in questo modo), mantenendo lo stesso salvato in memoria.
2) Il vecchio algoritmo era terribilmente confusionario. Anche se fosse stato possibile salvare in memoria il piano d'ammortamento, lavorare su quest'ultimo sarebbe stato veramente difficile

in quanto la rappresentazione grafica dei dati non avrebbe potuto assumere una dimensione tabellare come accade in Pandas. Il vantaggio di Pandas deriva anche dalla rappresentazione grafica intuitiva.

Per proseguire con la trattazione dei vantaggi che si possono ottenere mediante il nuovo algoritmo, si vuole prima mostrare come appare in output la nuova funzione “ammortamento_francese”.

```
ammortamento_francese()
```

```
Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 10
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 1
Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: 0.1
Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):entrambe
```

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

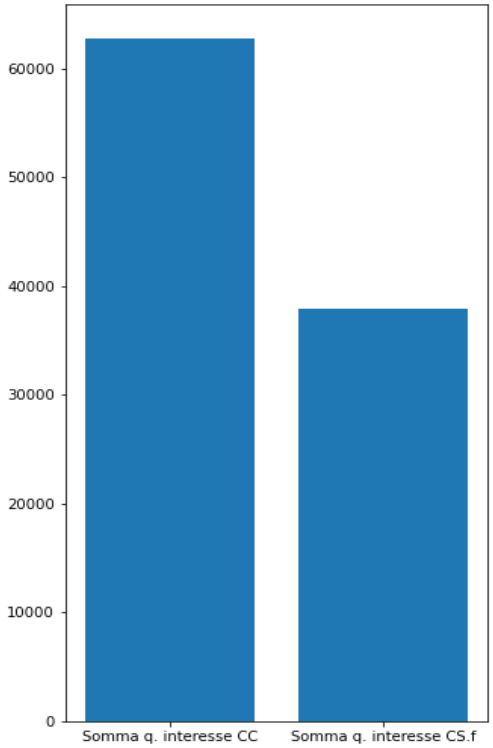
	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	16274.54	10000.00	10000.00	0.00	6274.54	14795.04	-8520.50	93725.46	85204.96
2	16274.54	9372.55	8520.50	852.05	6901.99	13450.03	-6548.04	86823.47	71754.93
3	16274.54	8682.35	7175.49	1506.85	7592.19	12227.30	-4635.11	79231.27	59527.63
4	16274.54	7923.13	5952.76	1970.36	8351.41	11115.73	-2764.32	70879.86	48411.90
5	16274.54	7087.99	4841.19	2246.80	9186.55	10105.21	-918.66	61693.31	38306.69
6	16274.54	6169.33	3830.67	2338.66	10105.21	9186.55	918.66	51588.10	29120.14
7	16274.54	5158.81	2912.01	2246.80	11115.73	8351.41	2764.32	40472.37	20768.73
8	16274.54	4047.24	2076.87	1970.36	12227.30	7592.19	4635.11	28245.07	13176.53
9	16274.54	2824.51	1317.65	1506.85	13450.03	6901.99	6548.04	14795.04	6274.54
10	16274.54	1479.50	627.45	852.05	14795.04	6274.54	8520.50	0.00	0.00

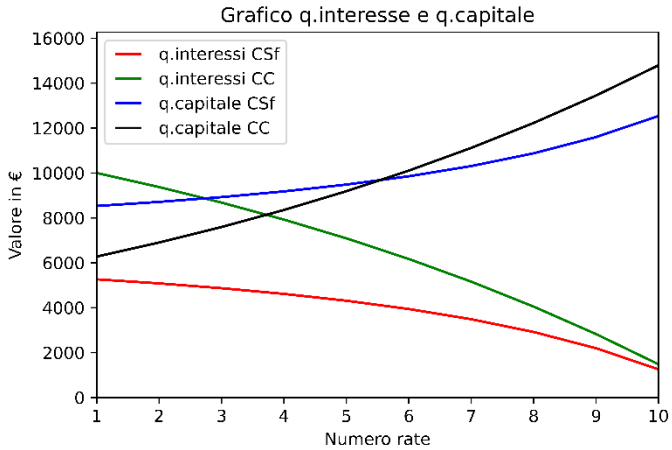
```
Chiusura contabile: 100000.00 True

Chiusura finanziaria finale: 259374.25
Importo capitalizzato in n:  259374.25
```

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

	Rata	Quota interesse	Quota capitale	Debito Residuo
0	0.00	0.00	0.00	100000.00
1	13793.10	5263.16	8529.95	91470.05
2	13793.10	5081.67	8711.43	82758.62
3	13793.10	4868.15	8924.95	73833.67
4	13793.10	4614.60	9178.50	64655.17
5	13793.10	4310.34	9482.76	55172.41
6	13793.10	3940.89	9852.22	45320.20
7	13793.10	3486.17	10306.93	35013.26
8	13793.10	2917.77	10875.33	24137.93
9	13793.10	2194.36	11598.75	12539.18
10	13793.10	1253.92	12539.18	0.00

```
Chiusura contabile: 100000.00 True

Chiusura finanziaria finale: 200000.00
Importo capitalizzato in n:  200000.00
```





Come si può notare, i valori rilevati sono uguali all'algoritmo precedente; tuttavia, già ad un primo impatto, la rappresentazione grafica del piano è di qualità evidentemente maggiore. La rappresentazione del DataFrame come se fosse una vera e propria tabella, è favorita dall'utilizzo della

libreria “*tabulate”*; essa ha una funzione più estetica che pratica che migliora la presentazione del risultato all’utente.

Altro elemento distintivo è fornito dal duplice calcolo (e convalidazione) della condizione di chiusura finanziaria finale. Tale valore, che non può essere riscontrato nel primo dei due algoritmi, è stato calcolato solo grazie alla funzionalità di Pandas e del DataFrame. Infatti, avendo ancora a disposizione il piano d’ammortamento, è possibile calcolare ogni volta le rate capitalizzate in n. Nel primo algoritmo, un calcolo simile avrebbe richiesto la costituzione di una nuova lista che includesse, iterazione per iterazione, il valore capitalizzato delle rate.

Un’ultima caratteristica distintiva tra i due output sta nella rappresentazione grafica. Mentre il grafico della quota interesse e capitale era disponibile anche nel primo algoritmo (per mia scelta non è stato rappresentato in precedenza), il grafico a barre può essere costruito solo attraverso il secondo dei due algoritmi. È questo il caso, quindi, in cui le potenzialità di Pandas permettono di svolgere operazioni che in altri casi richiederebbero un impegno maggiore da parte dell’utente. Nel caso presente, la rappresentazione grafica della sommatoria delle quote interesse nei due piani d’ammortamento (a fini comparativi per paragonare la onerosità del prestito) viene effettuata attraverso la funzione “*sum*” che si può applicare ad intere colonne del DataFrame. Nei due DataFrame (“amm_franc_csf” e “amm_franc_cc”) è presente una colonna destinata unicamente alla quota interesse e sarà sufficiente applicare la funzione “*sum*” a queste ultime per ottenere la somma di tutte le quote.

Poiché viene utilizzata la keyword “*global*” su entrambi i DataFrame, “amm_franc_csf” e “amm_franc_cc”, questi ultimi esisteranno anche all’infuori della funzione. Ciò significa che sarà possibile utilizzare il DataFrame anche dopo la rappresentazione dell’output. Dunque, dopo aver effettuato il calcolo visto nell’esempio precedente, non ci sarà alcun problema ad effettuare la seguente operazione:

```
amm_franc_cc['Q. cap(a)']

0         0.000000
1     14795.035898
2     13450.032635
3     12227.302395
4     11115.729450
5     10105.208591
6      9186.553265
7      8351.412059
8      7592.192781
9      6901.993437
10     6274.539488
Name: Q. cap(a), dtype: float64
```

I dati sono ancora presenti.

Questa funzionalità si rivelerà utile alla fine di questo paragrafo quando, volendo svolgere delle operazioni su una moltitudine di piani d'ammortamento, sarà possibile operare su quest'ultimi anche all'infuori della funzione "ammortamento_francese()".

Prima di passare alla fase finale di questo paragrafo si vuole rappresentare l'ultima delle possibilità che offre l'algoritmo sviluppato. L'esempio applicativo finale vede la costituzione del piano d'ammortamento di rate infrannuali dalla durata di 5 anni con rate quadrimestrali (per un totale, dunque, di 15 rate).

```
ammortamento_francese()
```

```
Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 5
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 3
Inserisci il TAEG obiettivo: 0.1
Se sei interessato al TAEG obiettivo, fornisco il tasso periodale i(1/n) corrispettivo:  0.03228011545636722
Inserire il tasso periodale i(1/n), se n=1 TAN=TAEG: 0.03228011545636722
Inserire il tipo di capitalizzazione (-cap semplice- o -cap composta- o -entrambe-):entrambe
```

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	8515.41	3228.01	3228.01	0.00	5287.40	8249.13	-2961.73	94712.60	91750.87
2	8515.41	3057.33	2961.73	95.60	5458.08	7991.17	-2533.09	89254.52	83759.70
3	8515.41	2881.15	2703.77	177.37	5634.27	7741.28	-2107.02	83620.25	76018.41
4	8515.41	2699.27	2453.88	245.39	5816.14	7499.21	-1683.07	77804.11	68519.20
5	8515.41	2511.53	2211.81	299.72	6003.89	7264.70	-1260.82	71800.22	61254.50
6	8515.41	2317.72	1977.30	340.42	6197.69	7037.53	-839.84	65602.53	54216.97
7	8515.41	2117.66	1750.13	367.53	6397.76	6817.46	-419.71	59204.77	47399.50
8	8515.41	1911.14	1530.06	381.08	6604.28	6604.28	0.00	52600.50	40795.23
9	8515.41	1697.95	1316.87	381.08	6817.46	6397.76	419.71	45783.03	34397.47
10	8515.41	1477.88	1110.35	367.53	7037.53	6197.69	839.84	38745.50	28199.78
11	8515.41	1250.71	910.29	340.42	7264.70	6003.89	1260.82	31480.80	22195.89
12	8515.41	1016.20	716.49	299.72	7499.21	5816.14	1683.07	23981.59	16379.75
13	8515.41	774.13	528.74	245.39	7741.28	5634.27	2107.02	16240.30	10745.48
14	8515.41	524.24	346.87	177.37	7991.17	5458.08	2533.09	8249.13	5287.40
15	8515.41	266.28	170.68	95.60	8249.13	5287.40	2961.73	0.00	0.00

```
Chiusura contabile: 100000.00 True

Chiusura finanziaria finale: 161051.00
Importo capitalizzato in n:  161051.00
```

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

	Rata	Quota interesse	Quota capitale	Debito Residuo
0	0.00	0.00	0.00	100000.00
1	8070.96	2223.27	5847.69	94152.31
2	8070.96	2140.86	5930.10	88222.21
3	8070.96	2052.69	6018.27	82203.94
4	8070.96	1958.22	6112.73	76091.21
5	8070.96	1856.84	6214.12	69877.09
6	8070.96	1747.85	6323.11	63553.98
7	8070.96	1630.47	6440.48	57113.50
8	8070.96	1503.82	6567.13	50546.37
9	8070.96	1366.90	6704.06	43842.31
10	8070.96	1218.56	6852.40	36989.91
11	8070.96	1057.49	7013.46	29976.45
12	8070.96	882.21	7188.75	22787.70
13	8070.96	690.98	7379.98	15407.72
14	8070.96	481.81	7589.15	7818.57
15	8070.96	252.38	7818.57	0.00

```
Chiusura contabile: 100000.00 True

Chiusura finanziaria finale: 148420.17
Importo capitalizzato in n:  148420.17
```

Avendo mostrato anche l'ultimo esempio, si può concludere il paragrafo con un algoritmo che permette di costruire più piani d'ammortamento (anche con durate distinte) dai quali vengono estrapolate le quote interesse in modo tale da costruire una sorta di *cash flow* futuro, previsto all'interno di una banca. Il fine nella creazione di questo algoritmo sta nel fatto che esso mostra la potenzialità della libreria Pandas; attraverso quest'ultima sarà possibile costruire cash flows degli introiti in interessi calcolati perfino in base alle mensilità. Per comprendere ancora meglio di cosa si tratta basta esaminare il seguente algoritmo:

```
import pandas as pd
import ammortamento_francese as a_f
def prospetto_entrate_interessi_CC(Tasso):
    Infrannuali=eval(input("Saranno presenti piani d'amm. con rate infrannuali? (j(n) con n!=1) -True- o -False- "))
    prospetto_finale=pd.DataFrame(columns=["Q. int"])
    if Infrannuali==True:
        max_anni=int(input('Inserire la durata del contratto più duraturo (in anni): '))
        prospetto_finale["Q. int"]=[0]*12*max_anni
    Importo=1
    while Importo!=float(0):
        Importo=float(input("Inserire l'importo prestato: "))
        N_rate_annue=int(input("Inserire il numero di anni: "))
        if Infrannuali==False and Importo!=float(0):
             a_f.ammortamento_francese_cap_comp(Importo,N_rate_annue,Tasso,'Capitalizzazione Composta')
             prospetto_finale=prospetto_finale.add(amm_franc_cc, fill_value=0)
        elif Infrannuali==True and Importo!=float(0):
             cadenza=int(input("Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): "))
             a_f.ammortamento_francese_cap_comp(Importo,N_rate_annue*cadenza,Tasso,'Capitalizzazione Composta')
             amm_franc_cc.index = range(0,(12//cadenza)*len(amm_franc_cc), 12//cadenza)
             prospetto_finale=prospetto_finale.add(amm_franc_cc, fill_value=0)
    print('Se è stata richiesta una rappresentazione infrannuale i risultati saranno rappresentati su base mensile,\
                                                                                                    altrimenti, annuale')
    return prospetto_finale
```

Immagine 7: Algoritmo per la concatenazione di più piani d'ammortamento

In questo caso il codice funziona solo per la CC e non è di grande difficoltà modificarlo per applicare i calcoli anche alla $CS.f$ (basta introdurre delle altre if clause oppure creare un altro algoritmo che sostituisce solo la funzione da usare). Come introdotto all'inizio del capitolo, dopo aver costruito l'algoritmo finale per il calcolo dell'ammortamento alla francese, è stato possibile salvare le funzioni su file distinto, così da costituire un nuovo *module*. Infatti, è possibile utilizzare tutte le funzioni del *bundle* creato semplicemente importando il file "ammortamento_francese" (che contiene le funzioni tratte dalle immagini 4, 5 e 6) nella maniera seguente `import ammortamento_francese as a_f` .

Dopo aver inserito la keyword `prospetto_entrate_interessi_CC(0.1)` , in questo caso si ipotizza un tasso d'interesse pari al 10%, l'utente deve specificare se tra i piani d'ammortamento che vuole calcolare ci saranno piani con rate infrannuali (in tal caso la rappresentazione finale sarà caratterizzata da un cash flow mensile) o meno (il cash flow sarà puramente annuale). La peculiarità della funzione sta proprio nel fatto che, se sono presenti rate infrannuali, si potrà osservare quali saranno gli introiti effettivi nel corso dell'anno (su base mensile). Allo stesso modo, se caratterizzato da sole rate annue, si potranno osservare le entrate calcolate su base annua.

Per comprendere la piena potenzialità di questo algoritmo vengono rappresentati due esempi: il primo ipotizzerà le sole rate annue ed il secondo terrà in considerazione anche le rate infrannuali.

Primo esempio:

```
x=prospetto_entrate_interessi_CC(0.1)
print(x['Q. int'])
print('La somma delle quote interesse è uguale a: ',x['Q. int'].sum())
```

```
Saranno presenti piani d'amm. con rate infrannuali? (j(n) con n!=1) -True- o -False- False
Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 3

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	40211.48	10000.00	10000.00	0.00	30211.48	36555.89	-6344.41	69788.52	63444.11
2	40211.48	6978.85	6344.41	634.44	33232.63	33232.63	0.00	36555.89	30211.48
3	40211.48	3655.59	3021.15	634.44	36555.89	30211.48	6344.41	0.00	0.00

```
Chiusura contabile: 100000.00 True

Chiusura finanziaria finale: 133100.00
Importo capitalizzato in n:  133100.00
```

Ogni volta che viene inserito l'importo ed il numero di anni viene rappresentato il piano d'ammortamento, così da poter verificare successivamente se tutti i valori combaciano.

Si procede con il secondo importo.

```
Inserire l'importo prestato: 200000
Inserire il numero di anni: 8

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	200000.00	200000.00
1	37488.80	20000.00	20000.00	0.00	17488.80	34080.73	-16591.93	182511.20	165919.27
2	37488.80	18251.12	16591.93	1659.19	19237.68	30982.48	-11744.80	163273.51	134936.79
3	37488.80	16327.35	13493.68	2833.67	21161.45	28165.89	-7004.44	142112.06	106770.89
4	37488.80	14211.21	10677.09	3534.12	23277.60	25605.36	-2327.76	118834.46	81165.54
5	37488.80	11883.45	8116.55	3766.89	25605.36	23277.60	2327.76	93229.11	57887.94
6	37488.80	9322.91	5788.79	3534.12	28165.89	21161.45	7004.44	65063.21	36726.49
7	37488.80	6506.32	3672.65	2833.67	30982.48	19237.68	11744.80	34080.73	17488.80
8	37488.80	3408.07	1748.88	1659.19	34080.73	17488.80	16591.93	0.00	0.00

E, infine, l'ultimo importo:

```
Inserire l'importo prestato: 400000
Inserire il numero di anni: 10

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	400000.00	400000.00
1	65098.16	40000.00	40000.00	0.00	25098.16	59180.14	-34081.99	374901.84	340819.86
2	65098.16	37490.18	34081.99	3408.20	27607.97	53800.13	-26192.16	347293.87	287019.73
3	65098.16	34729.39	28701.97	6027.41	30368.77	48909.21	-18540.44	316925.10	238110.52
4	65098.16	31692.51	23811.05	7881.46	33405.65	44462.92	-11057.27	283519.45	193647.60
5	65098.16	28351.94	19364.76	8987.19	36746.21	40420.83	-3674.62	246773.24	153226.76
6	65098.16	24677.32	15322.68	9354.65	40420.83	36746.21	3674.62	206352.40	116480.55
7	65098.16	20635.24	11648.06	8987.19	44462.92	33405.65	11057.27	161889.48	83074.90
8	65098.16	16188.95	8307.49	7881.46	48909.21	30368.77	18540.44	112980.27	52706.13
9	65098.16	11298.03	5270.61	6027.41	53800.13	27607.97	26192.16	59180.14	25098.16
10	65098.16	5918.01	2509.82	3408.20	59180.14	25098.16	34081.99	0.00	0.00

Per interrompere il *while loop* bisogna inserire nell'importo il valore 0:

```
Inserire l'importo prestato: 0
Inserire il numero di anni: 0
Se è stata richiesta una rappresentazione infrannuale i risultati saranno rappresentati su base mensile,
altrimenti, annuale
```

```
0           0
1       70000
2     62720.2
3     54712.3
4     45903.7
5     40235.4
6     34000.2
7     27141.6
8       19597
9       11298
10    5918.01
Name: Q. int, dtype: object
La somma delle quote interesse è uguale a:  371526.44873736124
```

I piani d'ammortamento consentono di accertarsi se, effettivamente, il cash flow ricavato rappresenta la sommatoria delle varie quote interesse. Siccome le entrate effettive di una banca non sono rappresentate dalle sole quote interesse (la cui distinzione, tuttavia, è utile per fini contabili e gestionali) ma dalle rate, anche quest'ultime verranno di seguito rappresentate sotto forma di cash flow.

```
print(x['Rata'])
print('La somma delle rate è uguale a: ',x['Rata'].sum())
```

```
0          0.000000
1     142798.441831
2     142798.441831
3     142798.441831
4     102586.961468
5     102586.961468
6     102586.961468
7     102586.961468
8     102586.961468
9      65098.157953
10     65098.157953
Name: Rata, dtype: float64
La somma delle rate è uguale a:  1071526.4487373605
```

Naturalmente, se fosse nell'interesse dell'utente modificare per ogni piano d'ammortamento il tasso d'interesse, questo sarebbe facilmente praticabile inserendo un'altra *input keyword* nel ciclo *while* in modo tale da sostituire di volta in volta il tasso d'interesse.

Si conclude il paragrafo inserendo il secondo esempio (rate infrannuali).

```
x=prospetto_entrate_interessi_CC(0.1)
print(x['Q. int'])
print('La somma delle quote interesse è uguale a: ',x['Q. int'].sum())
```

```
Saranno presenti piani d'amm. con rate infrannuali? (j(n) con n!=1) -True- o -False- True
Inserire la durata del contratto più duraturo (in anni): 3
Inserire l'importo prestato: 100000
Inserire il numero di anni: 1
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 12

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100000.00	100000.00
1	14676.33	10000.00	10000.00	0.00	4676.33	13342.12	-8665.79	95323.67	86657.88
2	14676.33	9532.37	8665.79	866.58	5143.96	12129.20	-6985.23	90179.70	74528.68
3	14676.33	9017.97	7452.87	1565.10	5658.36	11026.55	-5368.18	84521.34	63502.14
4	14676.33	8452.13	6350.21	2101.92	6224.20	10024.13	-3799.93	78297.15	53478.00
5	14676.33	7829.71	5347.80	2481.91	6846.62	9112.85	-2266.23	71450.53	44365.16

Quanto sopra rappresenta un piano d'ammortamento dalla durata di un anno con rate mensili (totale 12 rate). Per questioni di spazio non verranno rappresentate per intero i piani d'ammortamento (anche per previ periodi il numero di rate inizia ad essere molto elevato).

```
Inserire l'importo prestato: 200000
Inserire il numero di anni: 2
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 2

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	200000.00	200000.00
1	63094.16	20000.00	20000.00	0.00	43094.16	57358.33	-14264.17	156905.84	142641.67
2	63094.16	15690.58	14264.17	1426.42	47403.58	52143.93	-4740.36	109502.26	90497.74
3	63094.16	10950.23	9049.77	1900.45	52143.93	47403.58	4740.36	57358.33	43094.16
4	63094.16	5735.83	4309.42	1426.42	57358.33	43094.16	14264.17	0.00	0.00

Il secondo piano è a rate semestrali per due anni.

```
Inserire l'importo prestato: 134000
Inserire il numero di anni: 3
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 3

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	134000.00	134000.00
1	23267.83	13400.00	13400.00	0.00	9867.83	21152.57	-11284.74	124132.17	112847.43
2	23267.83	12413.22	11284.74	1128.47	10854.62	19229.61	-8375.00	113277.55	93617.81
3	23267.83	11327.76	9361.78	1965.97	11940.08	17481.47	-5541.39	101337.48	76136.35
4	23267.83	10133.75	7613.63	2520.11	13134.08	15802.24	-2758.16	88203.39	60244.10

Il terzo piano è a rate quadrimestrali per tre anni. Il cash flow sarà il seguente:

```
Inserire l'importo prestato: 0
Inserire il numero di anni: 0
Se è stata richiesta una rappresentazione infrannuale i risultati saranno rappresentati su base mensile,
altrimenti, annuale
0          0.000000
1      10000.000000
2       9532.366849
3       9017.970383
4      21852.134270
5       7829.714546
6      27145.052850
7       6391.924984
8      17976.701108
9       4652.199613
10      3649.786424
11      2547.131915
12     28352.551112
13         0.000000
14         0.000000
15         0.000000
16     10133.747530
17         0.000000
18     10950.226244
19         0.000000
20      8820.339059
21         0.000000
22         0.000000
23         0.000000
24     13111.422536
25         0.000000
26         0.000000
27         0.000000
28      5786.365492
29         0.000000
30         0.000000
31         0.000000
32      4038.218818
33         0.000000
34         0.000000
35         0.000000
36      2115.257476
Name: Q. int, dtype: float64
La somma delle quote interesse è uguale a:  203903.1112088813
```

Come previsto, il numero di rate viene rappresentato su un orizzonte temporale di 36 mensilità; infatti, se si nota bene, le prime dodici mensilità sono tutte caratterizzate da quote interesse grazie al primo dei tre ammortamenti che si sviluppava proprio su 12 mensilità. Dopo il primo anno cominciano a presentarsi mensilità caratterizzate da nessuna quota interesse sino all'ultimo anno in cui le uniche quote interesse rappresentate sono quelle del terzo ammortamento pagate ogni quattro mesi (vengono evidenziate in giallo).

```
Inserire il numero di anni: 3
Inserire periodicità delle rate (in termini numerici, j(n) inserire n, se annuale, n=1): 3

AMMORTAMENTO FRANCESE IN CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
```

	Rata	Q. int	Q. int(a)	Q. int(b)	Q. cap	Q. cap(a)	Q. cap(b)	D. Res	D. Res(a)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	134000.00	134000.00
7	23267.83	5786.37	3266.25	2520.11	17481.47	11940.08	5541.39	40382.19	20722.45
8	23267.83	4038.22	2072.24	1965.97	19229.61	10854.62	8375.00	21152.57	9867.83
9	23267.83	2115.26	986.78	1128.47	21152.57	9867.83	11284.74	0.00	0.00

Se ci si stesse domandando circa la possibilità di calcolare anche la duration di ogni operazione, in Pandas questo è facilmente eseguibile attraverso una sola riga di codice, sia per la singola operazione:

```
duration=(amm_franc_cc['Ordine']*(amm_franc_cc['Rata']*((1+i)**-amm_franc_cc['Ordine']))).sum()/Imp
```

sia per l'intero cash flow calcolato nel *prospetto_entrate_interessi()*:

```
x=prospetto_entrate_interessi_CC(0.1)
duration_portafoglio=(x.index.to_series()*(x['Rata']*((1+0.1)**-x.index.to_series()))).sum()/x['Rata'].sum()
```

Nel prossimo capitolo saranno evidenziate le conclusioni, con questo esempio il capitolo terzo volge al termine, ci si appresta alla conclusione finale.

Conclusioni

Come premessa alle conclusioni devo sottolineare l'intento a far trasparire, nel corso della trattazione degli argomenti, il massimo dell'imparzialità. L'evidenza matematico-finanziaria, affrontata nel capitolo secondo, offre il mezzo per sviluppare una opinione personale circa la controversia sull'anatocismo.

Nello specifico, e ciò può essere affermato con certezza, è stato dimostrato che non può esistere un piano d'ammortamento che contenga duplici sistemi di capitalizzazione, dunque, ogni piano di ammortamento opera in un singolo regime. La natura di tale regime va sempre identificata nella composizione delle rate, ed è, infatti, attraverso quest'ultime che si può comprendere quale sia la natura del calcolo che è stata applicata. Nel corso dell'elaborato si è giunti alla conclusione, matematicamente appurata, che nel così detto "ammortamento francese standard" la costruzione del piano di rimborso delle rate non avviene in capitalizzazione semplice bensì in capitalizzazione composta. Questa affermazione è stata confermata sotto più aspetti, molti dei quali fondano le proprie radici su dimostrazioni matematiche piuttosto che congetture logiche.

Tale ovvietà è stata rivisitata, in tempi più recenti, anche da sostenitori della negazione del fenomeno anatocistico, più propensi a basare le loro tesi su aspetti giuridici piuttosto che matematici. In effetti esistono, stando alla pubblicazione di recenti scritti giuridici,[89] una serie di fraintendimenti tra il mondo matematico-finanziario e giuridico, qui solo marginalmente trattati.

Dal momento che la presenza di capitalizzazione composta nei piani d'ammortamento standard è oramai assodata, gli attriti che continuano ad esistere riguardano l'interpretazione dell'articolo 1283 c.c. in relazione a suddetto regime. Se è pacifico affermare che l'ammortamento francese standard opera in regime di capitalizzazione composta, sarà ugualmente pacifico constatare che per costruzione (Tabella 11) sono presenti interessi maturati sugli interessi passati. Tuttavia, e qui si crea la divergenza interpretativa, bisogna stabilire se, effettivamente, tali interessi rientrano nella fattispecie dell'anatocismo.

Secondo gli articoli 820 e 821 del c.c. "gli interessi dei capitali si acquistano giorno per giorno" ovvero si sommano aritmeticamente giorno per giorno, assimilando tale definizione al regime di capitalizzazione semplice (somma aritmetica degli interessi maturati senza alcuna capitalizzazione degli interessi). Poiché nel regime di capitalizzazione composta gli interessi maturati non vengono

[89] Alfonso Quintarelli , Ancora sul mutuo con ammortamento francese a rata costante e sull'anatocismo: le regole del diritto e della matematica finanziaria, IL CASO.it.
Alfonso Quintarelli, Leibnitz e il mutuo feneratizio con ammortamento "alla francese" , IL CASO.it.

sommati algebricamente bensì capitalizzati, si potrebbe subito ipotizzare la non complementarità tra piani d'ammortamento in capitalizzazione composta e legge. Se in questa ottica viene considerato anche l'art. 1283 c.c. che vieta la produzione di nuovi interessi su quelli già scaduti, sembra quasi ovvio il richiamo al regime di capitalizzazione composta.

È proprio su quest'ultimo aspetto che non si riesce a trovare una soluzione comune. Alcuni giuristi escludono la diretta coincidenza tra anatocismo e capitalizzazione composta in virtù del beneficio di liquidità che, essendo disciplinato dalla legge, permette di validare l'utilizzo della capitalizzazione composta. In quanto, per mantenere la parità economica delle parti, il debitore deve corrispondere gli interessi maturati sino al periodo di capitalizzazione (esigibilità degli interessi prima del capitale) in modo tale da permettere al creditore di reinvestire tali interessi in un'ottica di parità di liquidità. Il beneficio di liquidità verrebbe a mancare nel momento in cui gli interessi da corrispondere nel periodo di capitalizzazione non venissero erogati determinando la maturazione di interessi su tali interessi scaduti (operando sempre secondo il regime di capitalizzazione composta), e questa eventualità determinerebbe, a detta di alcuni giuristi, la fattispecie dell'anatocismo.

Non è chiaro se, questa constatazione, giuridicamente fondata sul beneficio di liquidità, tiene conto della ugualmente evidenziabile presenza di interessi composti nel piano d'ammortamento francese ("$Q.interesse\ (b)$" della Tabella 11) e se tali interessi, che sono strutturalmente presenti in un piano d'ammortamento francese standard, possono essere trascurati in virtù del beneficio di liquidità (ovvero, non ricadono nella fattispecie dell'anatocismo).

E, ancora: se si prende in considerazione un piano d'ammortamento di ZCB con interessi maturati secondo la capitalizzazione composta e periodo di capitalizzazione (ad esempio) annuale, non si dovrebbe parlare in questo caso di anatocismo in quanto gli interessi, di anno in anno, producono ulteriori interessi (ovvero, cade il beneficio di liquidità)?

Bisogna, a tal proposito, ricordare che, secondo il principio di composizione dei contratti, i piani d'ammortamento trattati nel paragrafo 1.3 potrebbero essere costruiti come somma di ZCB. Dunque, nel qual caso in cui dovesse essere determinata la presenza di anatocismo negli ZCB, tale presenza verrebbe estesa anche agli altri piani d'ammortamento determinando l'invalidità anche di quest'ultimi.

A queste domande bisognerebbe dare una risposta che, tuttavia, io non sono in grado di dare. Posso solo permettermi di affermare che, personalmente, trovo fin troppe somiglianze tra anatocismo e capitalizzazione composta e che, dunque, la definizione del Codice Civile possa essere facilmente fraintendibile. Allo stesso tempo, se dovessi scegliere tra la costituzione di un piano d'ammortamento

in capitalizzazione semplice o capitalizzazione composta, opterei per la capitalizzazione composta in quanto, quest'ultima, permette di far rispettare tutte le prerogative necessarie per la redazione di un piano d'ammortamento e, allo stesso tempo, garantisce la parità economica di entrambe le parti.

Con questa riflessione finale l'elaborato volge al termine.

Bibliografia

Annibali Antonio, Annibali Alessandro, Barracchini Carla, Olivieri Francesco. *Ammortamento "alla francese" di mutui in capitalizzazione semplice. La scelta dell'epoca di equivalenza finanziaria: finale oppure iniziale?*. "Le controversie bancarie" n.34;

Cacciafesta, Fabrizio. *Sull'articolo "Compatibilità del regime della capitalizzazione composta…" dell'avv.to De Simone*;

Crenca Chiara, Fersini Paola, Melisi Giuseppe, Olivieri Gennaro, Pelle Mariaelisa. *Elementi di matematica finanziaria*. Milano: Pearson, 2018;

Downey, Allen B. *Think Python*. Sebastopol, California: O'Reilly, 2015;

Fersini Paola, Olivieri Gennaro. *Sull'"anatocismo" nell'ammortamento francese*. Banche e Banchieri, 2015;

Hilpisch, Yves *Python for Finance*. Sebastopol, California: O'Reilly, 2018;

Lavoro in via di pubblicazione di autore/autori ignoto/ignoti. *Ammortamento di prestiti "alla francese" nei regimi finanziari della capitalizzazione composta e della capitalizzazione semplice. Una trattazione comparata dei processi di rimborso nei due regimi finanziari.*

Quintarelli, Alfonso. *Leibnitz e il mutuo feneratizio con ammortamento "alla francese" a rata fissa*, IL CASO.it, 30 aprile 2020;

Quintarelli, Alfonso. *Ancora sul mutuo con ammortamento alla francese a rata costante e sull'anatocismo: le regole del diritto e della matematica finanziaria*. IL CASO.it, 17 settembre 2021;

Torrente Andrea, Schlensinger Piero. *Manuale di diritto privato*. Milano: Giuffrè Fabris Lefebvre, 2019;

Sitografia

https://www.bancaditalia.it/

https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario.html

https://www.consob.it/