Dipartimento di Economia e Finanza

Indirizzo Banche ed Intermediari Finanziari

Betting Strategies: il Sistema Martingala e il Criterio di Kelly

Relatore:

Prof. Hlafo Alfie Mimun

Correlatrice:

Prof. Sara Biagini

Candidata:

Martina Ragazzoni

737161

Anno Accademico 2021/2022

A voi, a cui devo tutto.

Indice

Introduzione

Sin dalla sua nascita il gioco d'azzardo ha suscitato l'interesse di numerosi economisti e matematici che ancora oggi conducono studi in materia. La principale problematica riconducibile al gioco d'azzardo risiede nello stabilire quale opportunità di scommessa generi rendimenti positivi per l'investitore. Una volta individuata la strategia di scommessa più vantaggiosa, l'investitore deve definire l'ammontare di capitale che intende investire su ogni opportunità di scommessa in modo da massimizzare la proprià funzione d'utilità. La determinazione di questo ammontare è da tempo centro di grande interesse della teoria della probabilità, scontrandosi con famosi paradossi quali ad esempio il Paradosso di San Pietroburgo formulato da Daniel Bernoulli (vedi [5]). Il paradosso mostra un esempio di gioco che risulta vantaggioso per il giocatore, qualsiasi sia il capitale speso per giocare.

Negli anni successivi John Larry Kelly Jr. approfondì lo studio sulle funzioni di utilità condotto da Bernoulli. In particolare egli investigò la questione riguardante il quantitativo di denaro da puntare in base alla tipologia della scommessa, dando origine al cosiddetto *Criterio di Kelly* (vedi [4]). Tale metodo ha come obiettivo la massimizzazione di un'opportuna funzione d'utilità che esprime il tasso di crescita del capitale dopo un certo numero di scommesse ripetute. Tutto nacque da una sorprendente intuizione che Kelly ebbe durante un quiz televisivo: egli dimostrò come da informazioni privilegiate inserite nella teoria dell'informazione si potesse ottenere il massimo rendimento da una scommessa. Kelly applicò la sua idea al sistema di scommesse sportive (vedi [5], [9], [14]) e, riscuotendo notevole approvazione, pubblicò il suo primo articolo in merito (vedi[4]). In questo lavoro Kelly presentò la teoria legata al "noise", rumore di fondo, dimostrando un sorprendente collegamento tra la teoria dell'informazione e il gioco d'azzardo. Per tale ragione, questa teoria fu estesa al blackjack e alla roulette (vedi [3], [12], [13]).

Negli anni a seguire, la teoria di Kelly venne implementata ed applicata anche all'ambito degli stock market (vedi [6],[11]). Possiamo difatti riconoscere il suo utilizzo anche dai più noti investitori a livello mondiale Warren Buffet, Bill Gross e Jim Simons.

La famosa *formula di Kelly* fornisce il valore di una frazione ottimale di capitale che un investitore deve scommettere per massimizzare il suo profitto in una scommessa vantaggiosa e si ottiene massimizzando la ricchezza nel lungo termine. Questo metodo di scommessa è noto anche in letteratura come *sistema di Kelly* o *optimal proportional play* (vedi [2]) ed è oggi parte della teoria dell'investimento tradizionale. La richiesta di una scommessa vantaggiosa per l'applicazione del metodo è conseguenza del carattere della funzione d'utilità, ovvero il tasso di crescita del capitale nei vari round. Infatti tale funzione risulta essere strettamente concava, e dunque avente un massimo globale, solamente se tale ipotesi risulta verificata. La suddetta condizione può essere alleggerita nel caso in cui si effettuino scomesse simultanee, richiedendo solamente che almeno una di esse sia favorevole.

Nel caso in cui ci si trovi davanti ad una singola scommessa sfavorevole, come ad esempio i giochi del casinò, il metodo di Kelly, come già detto, non si dimostra più efficace e dunque risulta più utile procedere con altri metodi. In questo contesto si inserisce il sistema martingala (vedi [1]) il quale prevede che l'investitore ripeta più volte la stessa scommessa finchè fermandosi al primo round in cui si vince e scommettendo ad ogni round perdente il doppio di quanto puntato nel turno precedente. Il metodo, in caso di capitale infinito, con probabilità uno permette di recuperare tutti i soldi spesi nei vari turni e di ottenere un guadagno pari alla scommessa fatta al primo round. Nel contesto reale tuttavia non si dispone di capitale infinito e dunque il metodo risulta in un certo senso utile se si riesce a garantire con buona probabilità di riuscire ad avere un capitale sufficiente per sostenere i vari round necessari per avere la prima vittoria. Essendo il contesto sfavorevole, è abbastanza intuitivo capire che l'investitore dovrà attendere un numero di round crescente nella probabilità di perdita della singola scommessa per ottenere la prima vittoria. Per tale ragione questo metodo è impiegato frequentemente nel contesto della scommessa rosso/nero nella roulette (vedi [7],[10],[12]). Infatti tale gioco risulta leggermente sfavorevole avendo probabilità di perdita quasi pari a 0.5 e dunque il numero di round da attendere per avere la prima vittoria risulta essere piuttosto piccolo con buona probabilità.

L'elaborato presentato propone un'analisi probabilistica dei due sistemi di scommesse appena discussi. In particolare esso si compone di tre parti.
Il primo capitolo fornisce una visione generale delle *martingale*, *submartingale* e *supermartingale* (vedi [2]), processi caratterizzati da un comportamento in media monotòno. Essi risultano utili per la descrizione del capitale nel gioco d'azzardo in quanto forniscono una previsione sul comportamento medio del gioco in round futuri conoscendo i risultati registrati nei round precedenti. Saranno analizzate con vigore le proprietà delle martingale, con annesso uno dei più noti teoremi nella teroia del gioco d'azzardo, il *Teorema dell'Arresto Opzionale*, anche noto come *Principio della conservazione della parità di un gioco.*
Il fulcro della trattazione si concentra nel secondo capitolo dove in un primo momento sono analizzati i sistemi di scommesse in generale ed il loro legame con le martingale, supermartingale e submartingale, successivamente vengono approfonditi i due specifici sistemi di gioco discussi in precedenza: il sistema martingala

e il sistema di Kelly. Dopo aver motivato ed evidenziato le assunzioni alla base di tali metodi di gioco, sono riportate alcune simulazioni realizzate mediante la piattaforma MATLAB nelle quali si evidenziano i risultati teorici ottenuti.
L'ultima parte della trattazione è dedicata ad un'applicazione del sistema di Kelly in ambito finanziario, nello specifico al mercato azionario. Sono prese in analisi due stock options soggette ad oscillazioni di valore, e tramite l'individuazione della frazione ottimale di capitale introdotta da Kelly, si determina la porzione di capitale delle stock options da investire che massimizza il profitto del portafoglio nell'arco temporale di tre mesi. Si ricerca dunque la frazione ottimale di capitale da investire sui due stock che ottimizza il capitale nel lungo periodo. Nell'ultima sezione del terzo capitolo è realizzata una simulazione volta ad esaminare empiricamente la strategia di mercato utilizzata.
Riassumendo, l'obiettivo della tesi è quello di rendere più consapevole il lettore di come comportarsi nel gioco d'azzardo o in altri contesti di scommessa, sfruttando al meglio le possibilità del gioco.

Capitolo 1

Le Martingale a tempo discreto ed i tempi d'arresto

Lo studio dei processi aleatori nasce come necessità di descrivere l'evoluzione di fenomeni governati da meccanismi che possono essere modellizzati come fenomeni casuali con distribuzioni opportune. Ne vediamo parecchi esempi in finanza, ad esempio l'evoluzione del valore di un'opzione determinata da come si muove il mercato (movimenti che vengono modellizzati tramite le statistiche passate). Altri processi aleatori si possono trovare in vari campi come ad esempio la fisica, la biologia e la sociologia. Risulta dunque interessante studiare le caratteristiche di questi modelli in modo da predire il comportamento futuro dei fenomeni sotto studio.
In questo capitolo ci soffermeremo sull'analisi di una particolare classe di processi stocastici, ovvero le martingale, le supermartingale e le submartingale. Questi processi godono di molte proprietà utili per la predizione del comportamento medio dei fenomeni. In particolare analizzeremo il contesto in cui i fenomeni potranno essere analizzati per round (dunque pensiamo un *tempo* discreto) ed il processo assume una quantità numerabile di valori (dunque anche l'insieme dei valori assunti,

chiamato spesso *spazio*, viene pensato discreto).

1.1 Martingale, supermartingale e submartingale a tempo discreto

Un processo stocastico è una successione di variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità ed indicizzate da un parametro. Possiamo pensare ad esempio al valore di un'opzione: X_n è il valore del titolo nell'n-esimo giorno e dunque la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ rappresenta l'evoluzione del titolo nel tempo.

Un particolare tipo di processo stocastico è la *martingala* la cui principale caratteristica è quella di essere in media un processo costante. Più precisamente, se denotiamo con $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ la martingala in questione e pensiamo ad n come un indice temporale, sappiamo dire che la miglior previsione che possiamo fare per il valor medio di M_{n+1} conoscendo tutto ciò che è successo fino al tempo n è esattamente M_n.
Consideriamo il seguente esempio per comprendere il significato di ciò che abbiamo sostenuto finora, prima di passare alle definizioni formali.

Supponiamo di lanciare più volte una moneta non truccata e di vincere 1 euro per ogni lancio in cui esce testa, mentre perdiamo 1 euro per ogni croce ottenuta. Il nostro obiettivo è determinare la vincita totale realizzata in n lanci. Nello specifico, formuliamo il problema come segue: denotiamo con X_i la vincita nell'i-esimo lancio, ovvero

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'i-esimo lancio è testa,} \\ -1, & \text{se l'-esimo lancio è croce.} \end{cases}$$

ed associamo a S_n la vincita in n lanci,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dunque, siamo interessati a studiare S_n per $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Supponendo di aver effettuato i primi n lanci (e di conoscere accuratamente il valore di $X_1,\dots,X_n$) sorge spontaneo chiedersi quale possa esssere la previsione della media di S_{n+1}. Quindi, procediamo a calcolare

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n]\,.$$

Per determinare tale quantità notiamo che

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \\ &= \mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n]\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Essendo i lanci della moneta indipendenti si ha che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una successione di variabili indipendenti e di conseguenza

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \tag{1.2}$$

dove abbiamo assunto di avere una moneta non truccata con $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Riscontriamo, inoltre, che nel momento in cui condizioniamo a $X_1, \dots, X_n$, il valore di S_n è noto, in quanto siamo a conoscenza della grandezza $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Detto ciò

$$\mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] = S_n. \tag{1.3}$$

Inserendo le identità in (1.2) e in (1.3) nell'identità (1.1), otteniamo

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[S_n|X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = S_n + 0 = S_n,$$

e abbiamo che

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] = S_n, \tag{1.4}$$

ovvero all'$(n+1)$-esimo lancio, sapendo cosa è successo nei primi n lanci, la previsione della vincita che otterremo in media, corrisponderà esattamente alla vincita totale conseguita nei primi n lanci. Tale identità è posta alla base del concetto di martingala ed insieme ad altre ipotesi che illustreremo a breve, permette di affermare che la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è propriamente una martingala. Al contrario, la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ delinea l'informazione a nostra disposizione che utilizziamo per studiare la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Ad ogni lancio, l'informazione che acquisiamo aumenta, inglobando sempre più variabili della successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Tale successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, che chiameremo *filtrazione*, risulta necessaria per stabilire le proprietà (1.3) e (1.4) e a tale proposito diremo che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.
Notiamo che la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è definita come un processo stocastico che rappresenta la vincita nei vari lanci ed è inoltre indicizzata dal parametro n, che corrisponde all'indice del lancio di moneta effettuato. Pensiamo, quindi, ad n come ad un indice temporale. In questo esempio il parametro assume un insieme numerabile di valori e, definendolo come parametro temporale, parleremo di processo stocastico a tempo discreto.

Cerchiamo ora di rendere il tutto più rigoroso andando a fissare il concetto di filtrazione e, successivamente, di martingala.

Definizione 1.1. *Una filtrazione (in questo caso, discreta) è definita come una successione di variabili aleatorie* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Come anticipato, possiamo pensare la filtrazione come a quell'informazione che viene acquisita progressivamente. Ora, procediamo alla definizione del concetto di martingala.

Definizione 1.2. *Sia* $\{M_n\}_{\in\mathbb{N}_{>0}}$ *un processo stocastico e sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una filtrazione. Si supponga la validità delle seguenti proprietà :*

(i) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *stabilito;*

(ii) il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*, ovvero* M_n *è noto qualora si conosce il valore di* $X_1, \dots, X_n$*;*

(iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, X_1, \dots, X_n] = M_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Possiamo dire che il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una* ***martingala*** *rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Ciò che differenzia le martingala è la proprietà (iii). Difatti, nei casi in cui la proprietà (iii) è meno stringente parleremo di processi detti, submartingale o supermartingale.

Nell'esempio svolto in precedenza, notiamo come la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ha il ruolo della successione $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Dunque, consideriamo nuovamente il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ e verifichiamo se esso soddisfa le tre proprietà sopra elencate. Ricordiamo che $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, e passiamo a dimostrare che $\mathbb{E}[|S_n|] < \infty$. Notiamo che

$$|S_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|,$$

e applicando la disuguglianza triangolare (si veda la Proposizione A.1) si ha

$$|S_n| \le \left|\sum_{i=1}^{n} X_1\right| \le \sum_{i=1}^{n} |X_i|,$$

da cui per $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fissato

$$\mathbb{E}[|S_n|] \le \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_1|] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n < \infty\,.$$

Si è così mostrata la validità della proprietà (i) nella Definizione 1.2. Proseguiamo a verificare la proprietà (ii). Poiché $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, ciò implica che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, in quanto la conoscenza del valore assunto da $X_1,\ldots,X_n$, ci fornisce informazioni sul valore univoco di S_n. Perciò , anche la proprietà (ii) risulta comprovata. Rimane da dimostrare l'ultima proprietà (iii), ovvero

$$\mathbb{E}[S_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n] = S_n\,,$$

che è stata già verificata in precedenza, quando abbiamo asserito l'equazione (1.4). Di conseguenza, possiamo concludere che il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Come accennato in precedenza, può accadere che il processo sotto analisi verifichi una condizione meno stringente nella proprietà (iii) riguardo la Definizione 1.2. In particolare, se invece di tale identità risultasse verificata la disuguaglianza

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] \leq M_n\,, \tag{1.5}$$

il processo prenderebbe il nome di *supermartingala* rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Se invece la disuguaglianza fosse presentata nel segno opposto, ovvero

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] \geq M_n\,, \tag{1.6}$$

parleremo di *submartingala* rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Il seguente risultato è una diretta conseguenza della proprietà (iii) che caratterizza le martingale ed asserisce che una martingala è un processo che resta in media costante nel tempo.

Proposizione 1.1.1. *Sia $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Allora*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_{n-1}] = \ldots = \mathbb{E}[M_1]\,.$$

Una martingala ha valore atteso costante nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) nella Definizione 1.2 si ha che

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n] = M_n \,.$$

Applichiamo il valore atteso ad entrambi i membri ottenendo

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n]] = \mathbb{E}[M_n] \,. \tag{1.7}$$

Ricordiamo che, per la Legge delle aspettazioni iterate (vedi Proposizione A.2) si ha

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]] = \mathbb{E}[M_{n+1}] \,.$$

Di conseguenza (1.7) diventa

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n],$$

da cui segue la tesi. □

L'analoga proprietà può essere stabilita anche in caso di supermartingale e submartingale.

Proposizione 1.1.2. *Sia* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Allora*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_{n-1}] \leq \ldots \leq \mathbb{E}[M_1].$$

Come è possibile vedere, una supermartingala ha il valore atteso che decresce nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) della Definizione 1.2 sappiamo che

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|Y_1, \ldots, Y_n] \leq M_n.$$

Applichiamo il valore atteso ad entrambi i membri ottendendo

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]] \leq \mathbb{E}[M_n]. \tag{1.8}$$

Proseguiamo utilizzando la Legge delle aspettazioni iterate (vedi Proposizione A.2) e si ha

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]] = \mathbb{E}[M_{n+1}]$$

che di conseguenza (1.8) diventa

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n],$$

da ciò segue la tesi. □

Proposizione 1.1.3. *Analogamente, data* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *si ha*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_{n-1}] \geq \ldots \geq \mathbb{E}[M_1].$$

Dunque, una submartingala ha valore atteso che cresce nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) della Definizione 1.2 abbiamo che

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] \geq M_n.$$

Applichiamo il valore atteso ad entrambi i membri ottenendo

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]] \geq \mathbb{E}[M_n]. \tag{1.9}$$

Utilizziamo poi la legge delle aspettazioni iterate

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1, \ldots, X_n]] = \mathbb{E}[M_{n+1}],$$

e pertanto (1.9) diventa

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n],$$

da cui si ottiene la tesi. □

Da questo momento in poi procediamo a sviluppare alcuni casi esemplificativi per rendere le nozioni precedentemente enunciate più intuitive.

Esempio 1.1. *Consideriamo come evento, il lancio ripetuto di una moneta truccata , dove ad ogni lancio la probabilità di ottenere testa è pari a p. Si suppone di guadagnare $a > 0$ euro per ogni testa uscita e di perdere $b > 0$ euro per ogni croce ottenuta.*

Si utilizzi X_i per denotare la vincita ottenuta nell'i-esimo lancio, e si ha

$$X_i = \begin{cases} a, & \textit{se esce testa all'i-esimo lancio,} \\ -b, & \textit{se esce croce all'i-esimo lancio,} \end{cases}$$

in altri termini

$$\mathbb{P}(X_i = a) = p\,, \qquad \mathbb{P}(X_i = -b) = 1 - p\,.$$

Assumiamo che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ siano i.i.d.[1]*. Definiamo*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

come la vincita totale ottenuta nei primi n round.

Seguitiamo a studiare il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ed osserviamo che:

(1) dalla disuguaglianza triangolare (vedi Proposizione A.1) si ha $|X_1+...+X_n| \leq |X_1| + \ldots + |X_n|$, da cui

$$\mathbb{E}[|S_n|] = \mathbb{E}[|X_1 + \ldots + X_n|] \leq \mathbb{E}[|X_1| + \ldots + |X_n|] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|]\,.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}[|X_1|] = |a| \cdot p + |-b| \cdot (1-p) \underset{b>0}{=} ap + b(1-p).$$

Con $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fissato, si ha

$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|] = \sum_{i=1}^{n} (ap + b(1-p)) \cdot n < \infty,$$

l'ultima disuguaglianza è data dai valori assunti da a e b che risultano essere numeri stabiliti, mentre n è pensato fissato. Da ciò si prova la proprietà (i) della Definizione 1.2.

[1] Indipendenti ed identicamente distribuite.

(2) *Se conosciamo il valore di* $X_1, \ldots, X_n$, *sappiamo anche il valore di* S_n *con* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Possiamo dire che* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Da ciò è verificata la proprietà (ii) della Definizione 1.2.*

(3) *Essendo*

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n] = \\ &= \mathbb{E}[S_n\,|\,X_1,\ldots,X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n] = \\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}],\end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formulazione da cui

$$\mathbb{E}[S_n\,|\,X_1,\ldots,X_n] = S_n,$$

e dunque abbiamo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Procedendo,*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}],$$

poichè le variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *sono indipendenti. Inoltre*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = ap - b(1-p)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = \\ &= S_n + ap - b(1-p) = S_n + p(a+b) - b\,.\end{aligned}$$

Tale caratteristica corrisponde alla proprietà (iii) della Definizione 1.2, a (1.5) *e* (1.6) *a seconda del segno assegnato al termine* $p(a+b)-b$.

Osserviamo che:

- *se* $p(a+b)-b=0$*, ovvero* $p=\frac{b}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *.*

- *se* $p(a+b)-b\leq 0$*, si ha* $p\leq\frac{b}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *.*

- *se* $p(a+b)-b\geq 0$*, quindi* $p=\frac{b}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *.*

Dopo ogni lancio il gioco risulta svantaggioso per lo scommettitore se $p<\frac{b}{a+b}$*, in quanto si ha un valore atteso di vincita negativo (ovvero* $\mathbb{E}[X_i]<0$*). Al contrario, se* $p>\frac{b}{a+b}$*, lo scommettitore ottiene un risultato vantaggioso in quanto il un valore atteso di vincita è positivo (ossia* $\mathbb{E}[X_i]>0$*). Nel caso in cui* $p=\frac{b}{a+b}$*, si è dinanzi ad un gioco equo con un valore atteso di vincita nullo (ovvero* $\mathbb{E}[X_i]=0$*). Da ciò capiamo come le supermartingale siano processi associati a giochi svantaggiosi per lo scommettitore (e dunque favorevoli per il banco), mentre le submartingale sono processi associati a giochi vantaggiosi per lo scommettitore (e dunque sfavorevoli per il banco).*

Si procede con un nuovo caso esemplificativo.

Esempio 1.2. *Abbiamo* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. con*

$$X_i=\begin{cases} a, & \text{con probabilità } p\,, \\ -b, & \text{con probabilità } 1-p\,, \end{cases}$$

con a,b>0. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è definito un processo stocastico come*

$$S_n=\prod_{i=1}^{n}X_i.$$

Ora studiamo il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *verificando la validità delle proprietà della martingala per tale processo. Denotiamo che*

(1) $\mathbb{E}[|S_n|] = E\left[|\prod_{i=1}^n X_i|\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n |X_i|\right]$. *Le variabili* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *sono indipendenti, di conseguenza anche* $\{|X_n|\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *lo sono, dato ciò* $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n |X_i|] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|]$.

Si noti che

$$\mathbb{E}[|X_i|] = |a| \cdot p + |-b| \cdot (1-p) \underset{b>0}{=} ap + b(1-p)\,,$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ *fissato si ha*

$$\mathbb{E}[|S_n|] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|] = \prod_{i=1}^n (ap + b(1-p)) = (ap + b(1-p))^n < \infty\,,$$

poichè $a, b \in \mathbb{R}$ *sono numeri stabiliti, mentre* n *lo pensiamo fissato. Si dimostra così la proprietà (i) nella definizione di martingala/supermartingala/submartingala.*

(2) Se siamo a conoscenza del valore di $X_1, \dots, X_n$*, abbiamo informazioni anche sul valore di* S_n *essendo* $S_n = \prod_{i=1}^n X_i$*. Dunque* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*. Con questa caratteristica si prova la proprietà (ii) nella definizione di martingala/supermartingala/submartingala.*

(3) Essendo

$$S_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i = X_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} X_1 = X_{n+1} \cdot S_n,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} \cdot S_n|X_1, \dots, X_n] = \\ &= S_n \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n],\end{aligned} \tag{1.10}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato ciò dimostrato al punto (2), ovvero che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *(*S_n *è noto quando si conoscono* $X_1, \dots, X_n$*). Poichè* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *sono indipendenti, si ha*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = ap - b(1-p) = p(a+b) - b,$$

e dalla (1.10) *si ottiene*

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = S_n \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n, \dots, X_n] = S_n \cdot (p(a+b) - b).$$

Questa caratteristica verifica la proprietà (iii) delle martingale, supermartingale o submartingale a seconda del valore assuntp del termine che segue $p(a+b) - b$.

Possiamo trarre le seguenti conclusioni, notando che

- *se* $p(a+b) - b = 1$*, ovvero* $p = \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$.
- *se* $p(a+b) - b \leq 1$*, ovvero* $p \leq \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$.
- *se* $p(a+b) - b \geq 0$*, ovvero* $p = \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$.

Le martingale, supermartingale e submartingale si avvalgono di molte proprietà che permettono di fornire informazioni rilevanti sul processo sotto analisi. Nel prossimo capitolo approfondiremo le proprietà fondamentali, ovvero il teorema dell'arresto opzionale e il teorema di convergenza.

1.2 Tempi d'arresto e Teorema dell'arresto opzionale

Prendiamo in analisi l'Esempio 1.1 e definiamo τ come la prima volta in cui esce testa, ovvero il primo round i in cui $X_i = a$. Classifichiamo τ come una variabile aleatoria in quanto risulta dipendere dall'esito dei lanci della moneta. Dunque, tale variabile τ può esser scritta come

$$\tau = \inf\{i \in \mathbb{N}_{>0} \,|\, X_i = a\}, \tag{1.11}$$

da cui si ottiene un'equivalenza tra eventi

$$\{\tau = k\} = \{X_1 \neq a, X_2 \neq a, \ldots, X_{k-1} \neq a, X_k = a\}\,. \tag{1.12}$$

Si è in presenza del caso $\tau = k$ se e solo se nei primi $k-1$ lanci non si è ottenuto croce, mentre al k-esimo lancio si è verificato l'evento testa. Inoltre, per capire se si realizza il caso $\tau = k$, dobbiamo analizzare l'informazione disponibile fino al tempo k. Quest'ultima caratteristica definisce il cosiddetto tempo d'arresto.

Definizione 1.3. *Diremo che una variabile aleatoria (discreta) τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione data $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ se per stabilire il verificarsi dell'evento $\{\tau = k\}$ è necessario sapere esclusivamente il valore di $X_1, \ldots, X_n$.*

Dunque è necessario che:

- τ sia una variabile aleatoria che assume valori in $\mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$;
- esista una sequenza di funzioni a valori reali deterministiche $\{g_n\}_n \geq 0$ tale che per ogni $n \geq 0$
$$\mathbf{1}_{\{\tau=k\}} = g_k(X_1, \ldots, X_k)\,.$$

Il tempo τ definito in (1.11) è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ data l'equivalenza degli eventi (1.12). Diversamente, se consideriamo il tempo aleatorio σ come l'ultimo lancio in cui esce testa, avremo la seguente equivalenza tra eventi

$$\{\sigma = k\} = \{X_k = a, X_{k+1} \neq a, X_{k+2} \neq a, \ldots\},$$

in quanto $\sigma = k$ se e solo se al k-esimo lancio otteniamo testa e nei successivi lanci non si realizza questo evento (esce sempre croce). Osserviamo che per stabilire l'occorrenza dell'evento $\{\sigma = k\}$ è necessario conoscere l'informazione futura al tempo k, ovvero il valore di $X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots$, quindi σ non è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Con la seguente proposizione introduciamo una particolare forma di tempo d'arresto e successivamnete mostreremo anche che tali tempi d'arresto hanno valore atteso finito.

Proposizione 1.2.1. *Supponiamo di avere una filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ composta da variabili aleatorie i.i.d. e sia α un valore assunto dalle variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Inoltre, $0 < p = \mathbb{P}(X_n = \alpha)$ (e dunque $\mathbb{P}(X_n \neq \alpha = 1 - p))$. Definiamo*

$$\tau = \inf \{k \in \mathbb{N} > 0 \,|\, X_n = \alpha\},$$

$$\sigma = \inf \{k \in \mathbb{N} > 0 \,|\, X_k \neq \alpha\}.$$

Abbiamo che τ e σ sono tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ e presentano rispettivamente una distribuzione geometrica di parametri p e $1 - p$. Di conseguenza $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{p} < \infty$ e $\mathbb{E}[\sigma] = \frac{1}{1-p} < \infty$.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti equivalenze di eventi

$$\{\tau = n\} = \{X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, \ldots, X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha\},$$

$$\{\sigma = n\} = \{X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, \ldots, X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha\}.$$

Allora

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, \ldots, X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha),$$

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha, X_2 = \alpha, \ldots, X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha).$$

Essendo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ i.i.d., allora

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, \ldots, X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = \alpha),$$

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha, X_2 = \alpha, \ldots, X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha).$$

Si ha che per $\mathbb{P}(X_1 = \alpha) = p$, dunque $\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha) = 1 - p$, otteniamo

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = \alpha) = (1-p)^{n-1}p,$$

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha) = p^{n-1}(1-p),$$

da cui si verifica la tesi. $\square$

Osservazione 1. *Le variabili τ e σ non sono limitate, ovvero non è possibile affermare che con probabilità 1 le variabili τ e σ siano minori di una certa costante prefissata. Precisiamo che una variabile geometrica ha immagine $\mathbb{N}_{>0}$ che non corrisponde ad un insieme limitato. Riscontriamo, però, che sia τ che σ hanno valore atteso finito, ovvero in media sono finiti. Da ciò possiamo concludere che τ e σ non sono variabili limitate, ma sono in media finite. Dunque, essendo variabili aleatorie geometriche, si può affermare che con probabilità pari a 1, entrambe le variabili τ e σ sono definite finite. Perciò*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = \\ &= p \sum_{n-1=0}^{\infty} (1-p)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1,\end{aligned}$$

dove alla penultima uguaglianza si ha che se $|a| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Un analogo ragionamento è valido per σ (basta scambiare p con $1-p$). Dunque, se $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\sigma < \infty) = 1$, si è provato che τ e σ sono finiti con probabilità 1.

La Proposizione 1.1.1 mostra la relazione tra la martingala ad un tempo fissato n con lo stesso processo ma considerando il tempo 0. Sorge naturale domandarsi se questa relazione valga anche se il tempo n è aleatorio; difatti, se esso è un tempo d'arresto (rispetto alla stessa filtrazione a cui si riferisce il processo), la risposta è affermativa sotto alcune ipotesi e consiste nel *Teorema dell'arresto opzionale*.

Proposizione 1.2.2. *(Teorema dell'arresto opzionale per Martingale). Si consideri* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala e* τ *un tempo d'arresto entrambi rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Il Teorema appena citato ha validità se si assume che una delle seguenti ipotesi sia soddisfatta:*

(a) $\exists\, C > 0$ *tale che* $\mathbb{P}(\tau < C) = 1$ *(ovvero* τ *è limitato con probabilità 1);*

(b) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *ed* $\exists\, C > 0$ *tale che* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *vale* $\mathbb{P}(|M_n| < C) = 1$ *(ciò significa che* τ *è finito e* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è uniformemente limitato con probabilità 1). L'utilizzo della parola "uniformemente" fa riferimento alla costante* C *che non dipende da* n*;*

(c) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ *ed* $\exists\, C > 0$ *tale che* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *vale* $\mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \leq C) = 1$ *(si ha che* τ *è in media finito e* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ha incrementi uniformemente limitati con probabilità 1);*

(d) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *e* $M_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *(*τ *è finito con probabilità 1 ed* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è un processo definito non negativo).*

Allora $\mathbb{E}[M_\tau] < \infty$ *e*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

La precedente Proposizione 1.2.2 può essere estesa anche al caso di supermartingale e submartingale modificando semplicemente la tesi, ovvero $\mathbb{E}[M_\tau] \leq \mathbb{E}[M_0]$ nel caso di supermartingala, mentre $\mathbb{E}[M_\tau] \geq \mathbb{E}[M_0]$ nel caso di submartingala. Parleremo, dunque, di Teorema dell'Arresto Opzionale per Supermartingale e per Submartingale.

Esempio 1.3. *Consideriamo l'Esempio* (1.1) *e il tempo d'arresto* τ *definito in* (1.11)*. Ora proveremo se è possibile applicare il Teorema dell'Arresto Opzionale per comprendere la relazione tra* $\mathbb{E}[S_\tau]$ *e* $\mathbb{E}[S_1]$*. Procediamo a verificare che una* *delle ipotesi (a),(b),(c) o (d) sia verificata dal processo* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *e dal tempo d'arresto* τ. *Ricordiamo che* τ *è un tempo d'arresto della forma descritta nella Proposizione 1.2.1 e dunque è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* $\mathbb{P}(X_i = a) = p > 0$. *Dall'Osservazione 1 risulta che* τ *è una variabile finita, ma non limitata. Dunque,* $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *e non esiste una costante* $C > 0$ *tale che* $\mathbb{P}(\tau < C) = 1$. *Ciò ci riferisce la non verificabilità dell'ipotesi (a) del Teorema dell'Arresto Opzionale. Procediamo a provare l'ipotesi (b). Come anzidetto,* $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. *Rimane da verificare l'esistenza di una costante* $C > 0$ *(non dipendente da n) tale che* $\mathbb{P}(|S_n| < C) = 1$. *Si ha che* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, *quindi i valori che* S_n *può assumere oscillano tra il suo massimo (quando in tutti i lanci esce testa) ed il suo minimo (quando in tutti i lanci esce croce). Quindi*

$$-b \cdot n \leq S_n \leq a \cdot n,$$

da cui

$$|S_n| =\leq \max\{|-bn|, |an|\} = \max\{bn, an\} = \max\{b, a\} \cdot n,$$

Per tale motivo dovremmo definire $C = max\{b, a\} \cdot n$, *che dipende da* n. *In particolare, non è possibile trovare una costante* C *più piccola indipendente da* n, *in quanto, se escisse sempre testa o sempre croce, ci troveremmo esattamente con* $|S_n| = an$ *o* $|S_n| = bn$, *rispettivamente. La costante* C *ottimale che possiamo scegliere è* $C = \max\{b, a\} \cdot n$, *che però dipende da* n. *Di conseguenza, l'ipotesi (b) del Teorema dell'arresto opzionale non può essere validata. Proseguiamo ad analizzare l'ipotesi (c). Dalla Proposizione* (1.2.1) *abbiamo che* $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. *Resta dunque da verificare se esiste una* $C > 0$ *(indipendente da n) tale che* $\mathbb{P}(|S_{n+1} - S_n| \leq C) = 1$. *Notiamo che*

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+1} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = X_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = X_{n+1},$$

da cui

$$|S_{n+1} - S_n| = |X_{n+1}| \leq \max\{|a|, |-b|\} = \max\{a, b\}.$$

Nel momento in cui scegliamo $C = \max\{a, b\}$*, abbiamo che* $|S_{n+1} - S_n| \leq C$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *e dunque* $\mathbb{P}(|S_{n+1} - S_n| \leq C = 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*. Di notevole rilevanza è osservare che questa volta* $C = max\{a, b\} > 0$ *è indipendente da* n*. Questa ultima ipotesi (c) del Teorema dell'arresto opzionale è verificata e concludiamo che*

- *se* $p = \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*), si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b = 0;$$

- *se* $p \leq \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*), si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] \leq \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b;$$

- *se* $p \geq \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*), si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] \geq \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b.$$

Nel caso in cui $p \leq \frac{b}{a+b}$*, non avremmo* $\mathbb{E}[S_\tau] > (a+b)p - b = \mathbb{E}[X_1]$*. Ultimiamo questa sezione sul Teorema dell'arresto opzionale affermando che l'ipotesi (d) del suddetto Teorema non è verificata dal processo in quanto* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *non è un processo non negativo,ma può accadere che* $S_n < 0$ *per qualche* n *(ad esempio se otteniamo sempre croce).*

Nella teoria del gioco d'azzardo si parla del Teorema dell'arresto opzionale, anche sotto il nome di Principio di conservazione dell'equità di un gioco. Difatti, dato un gioco, si può considerare un tempo d'arresto come una strategia d'uscita dal gioco. Il Principio di conservazione dell'equità asserisce che, se il gioco soddisfa una delle ipotesi (a), (b), (c) o (d), non esiste alcuna strategia d'uscita che trasformi un gioco svantaggioso (supermartingala) in un gioco vantaggioso (submartingala). Come visto nell'esempio precedente, se abbiamo una supermartingala, si avrà $\mathbb{E}[S_\tau] \leq \mathbb{E}[X_1]$ e dunque risulta impossibile avere $\mathbb{E}[S_\tau] > \mathbb{E}[X_1]$. Parleremo di seguito dei sistemi di scommesse e vedremo come il sistema martingala violi le ipotesi del Principio di conservazione dell'equità (ovvero del Teorema dell'arresto opzionale) ed infatti è un esempio di come un gioco svantaggioso possa avere una strategia d'uscita vantaggiosa (a patto di non soddisfare le ipotesi del Teorema dell'arresto opzionale).

Testiamo nuovamente il Terorema dell'arresto opzionale applicandolo ad un esempio.

Esempio 1.4. *Sia $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con X_i variabili i.i.d. che si pensi derivino dall'esito del lancio di una moneta equa. In particolare assumiamo che*

$$X_i = \begin{cases} 2, & \textit{se esce testa,} \\ -2, & \textit{se esce croce.} \end{cases}$$

Si definisce

$$\tau = \inf \{i \in \mathbb{N} > 0 \,|\, X_i = -2\},$$

ovvero, il primo tempo in cui si ottiene $X_i = -2$. Notiamo che τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in quanto per $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\{\tau = k\} = \{X_1 = 2, X_2 = 2, \ldots, X_{k-1} = 2, X_k = -2\}.$$

Infatti per determinare se accade l'evento $\{\tau = k\}$ basta conoscere $X_1, \ldots, X_k$. Ora verifichiamo se possiamo adottare il Teorema dell'arresto opzionale, ricordandoci che almeno una delle quattro ipotesi deve risultare vera.

(a) *Ci chiediamo se* $\exists C > 0$ *tale che* $\mathbb{P}(\tau < C) = 1$. τ *è una variabile geometrica che assume valori da 0 a* ∞ *e non esiste un valore specifico più grande di* τ *per cui si possa affermare che la variabile è minore di tale valore, per lo meno non si può dire con probabilità 1. Dunque l'ipotesi è falsa.*

(b) *Essendo* $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *vera, si va alla ricerca di una costante* C *tale che* $\mathbb{P}(|M_n| < C) = 1$. *Notiamo che* $|M_n| = |X_1 + \ldots + X_n| \leq 2n$ *in quanto ogni* X_i *può assumere valore 2 o -2 e dunque* $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2 \cdot n$. *In particolare nel caso* $X_1 = \ldots = X_n = 2$ *abbiamo che* $|M_n| = 2n$. *Ciò implica che* $2n$ *è la più piccola stima dall'alto per* $|M_n|$. *Poiché è impossibile trovare una costante* $C > 0$, *indipendente da* n, *tale che* $2n \leq C$, *allora non esiste una costante* $C > 0$ *t.c.* $\mathbb{P}(|M_n| < C) = 1$. *L'ipotesi b è quindi, falsa;*

(c) *Proviamo che* $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ *e* $\exists C > 0$ *tale che* $\mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \leq C) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Notiamo che*

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{0.5} = 2 < \infty$$

Inoltre

$$|M_{n+1} - M_n| = \left| \sum_{i=1}^{n+1} X_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} X_1 \right| = \left| X_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \right| = \left| X_{n+1} \right| \leq 2\,,$$

in quanto X_i *può assumere al massimo il valore 2 in modulo. Se si sceglie quindi* $C = 2$, *si ha*

$$\mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \leq C) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Dunque l'ipotesi c è vera.

Non è necessario verificare anche l'ultima ipotesi poiché abbiamo provato la veridicità della terza ipotesi e possiamo affermare di poter applicare il Teorema dell'arresto opzionale per martingale e dunque

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_1] = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = 0\,.$$

Quindi il guadagno che avremo in media al primo round in cui perdiamo è pari a zero.

Capitolo 2

Sistemi di scommesse (betting system)

Questo nuovo capitolo lo dedicheremo in un primo momento all'analisi generale dei sistemi di scommesse per poi approfondire due casi specifici: il sistema martingala e il sistema di Kelly. Il sistema martingala è utilizzato in situazioni svantaggiose, al contrario, il sistema di Kelly è preferito nei giochi favorevoli. Andremo dunque a mettere in luce i vantaggi e gli svantaggi dei due sistemi di gioco, sviluppando l'idea e le scelte che spingono un investitore.

2.1 I sistemi di scommesse

Supponiamo di ripetere una scommessa più volte. Con le variabili $X_1, X_2, \ldots$ denotiamo le vincite ottenute nelle varie ripetizioni per unità di denaro scommessa. Le variabili menzionate sono indipendenti in quanto ogni ripetizione non influenza le altre e sono identicamente distribuite poiché il funzionamento del gioco rimane invariato nei vari round.

Ipotizziamo che

$$X_i = \begin{cases} a\,, & \text{vincita di } a \text{ euro con probabilità } p, \\ -b\,, & \text{perdita di } b \text{ euro con probabilità } q, \\ 0, & \text{pareggio con probabilità } r. \end{cases}$$

con $a, b > 0$ e

$$\mathbb{P}(X_i = a) = p\,, \qquad \mathbb{P}(X_i = -b) = q\,, \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = r\,.$$

Assumiamo che $p, q > 0$, $r \geq 0$ e $p + q + r = 1$. Ad ogni round lo scommettitore varia le sue scommesse in relazione al trend dei round precedenti. Chiamando dunque X_n il guadagno nell'n-esima ripetizione della scommessa e B_n la quantità di denaro scommessa al round n, si avrà

$$B_n = f_n(X_1, \ldots, X_{n-1}),$$

dove f_n è una funzione deterministica che rappresenta il criterio di decisione dello scommettitore. Infatti, come già sottolineato, essendo B_n la quantità di denaro scommessa all'n-esimo round, essa dipende solo dagli esiti delle prime $n-1$ scommesse, ovvero $X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Proposizione 2.1.1. *Si ha*

$$\mathbb{E}[|B_n|] < k_n\,,$$

dove k_n è una costante che dipende da n.

Dimostrazione. Notiamo che, essendo B_n una quantità di denaro scommessa, si ha $B_n \geq 0$. Dunque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_n|] = \mathbb{E}[B_n] = &= \mathbb{E}[f_n(X_1, \ldots, X_{n-1})] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{u_i \in \{a, 0, -b\}} f_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(X_1 = u_1, \ldots X_{n-1} = u_{n-1}), \end{aligned}$$

Assumendo di riuscire a dire che esiste una costante k_n tale che

$$f_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \leq k_n \,, \tag{2.1}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|B_n|] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{u_i \in \{a,0,-b\}} f_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(X_1 = u_1, \dots X_{n-1} = u_{n-1}) \\
&\leq k_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{u_i \in \{a,0,-b\}} \mathbb{P}(X_1 = u_1, \dots X_{n-1} = u_{n-1}) = k_n \cdot 1 = k_n \,,
\end{aligned}$$

che prova la tesi.
Resta dunque da provare (2.1). A tal proposito notiamo che, per $i = 1, \dots, n-1$, u_i può assumere solamente tre valori: $-b, 0, a$. Dunque il vettore $(u_1, \dots, u_n)$ assume 3^{n-1} possibili forme. Di conseguenza il massimo di $f(u_1, \dots, u_n)$ è il massimo di 3^{n-1} valori. Questo valore è necessariamente finito, essendo il massimo di un insieme finito di numeri, e lo denotiamo con k_n. La dipendenza da n è necessaria in quanto al variare di n cambia il numero di variabili della f e dunque il numero di valori da considerare per massimizzare f_n. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Definiamo adesso M_n come la quantità di denaro posseduta dallo scommettitore al tempo n e assumiamo dunque che $M_0 > 0$ sia una costante positiva che rappresenta il capitale iniziale. Cerchiamo di comprendere come sono fatti M_1 ed M_2, per dedurre poi la forma di M_n. Abbiamo che

$$M_1 = \begin{cases} M_0 + aB_1, & \text{se si vince la prima scommessa,} \\ M_0 - bB_1, & \text{se si perde la prima scommessa,} \\ M_0, & \text{se si pareggia alla prima scommessa.} \end{cases}$$

Come è possibile notare nel primo caso, il capitale M_1 è ricavato dalla somma della quantità di denaro aB_1 vinta nel primo round e il capitale al tempo precedente M_0. Nel caso di pareggio invece, lo scommettitore possiederà al round 1 la stessa quantità che aveva al round 0.

Per quanto riguarda M_2 la struttura resta simile, ovvero

$$M_2 = \begin{cases} M_1 + aB_2, & \text{se si vince la seconda scommessa,} \\ M_1 - bB_2, & \text{se si perde la seconda scommessa,} \\ M_1, & \text{se si pareggia alla seconda scommessa.} \end{cases}$$

La quantità di denaro guadagnata M_2 prende in considerazione l'importo ottenuto al tempo 1, ovvero M_1, e la somma di denaro scommessa B_2. Così si procede per tutti gli n tempi a cui siamo interessati. Dunque la forma generica del guadagno totale ottenuto nell'n-esimo round è pari a

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i \,. \tag{2.2}$$

Proposizione 2.1.2. *Data la filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*, il processo* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una*

- *martingala se* $\mathbb{E}[X_i] = 0$*;*
- *supermartingala se* $\mathbb{E}[X_i] \leq 0$*;*
- *submartingala se* $\mathbb{E}[X_i] \geq 0$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima proprietà nella Definizione 1.2, ovvero che $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$.

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}\left[\left|M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[|M_0| + \sum_{i=1}^{n} |B_i| \cdot |X_i|\right] \,,$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare (Proposizione A.1). Notiamo che $|X_i|$ può assumere il valore $|a| = a > 0$ in caso di vincita, $|-b| = b > 0$ in caso di perdita e 0 in caso di pareggio. Dunque $|X_i| \leq \max\{a, b\}$. Inoltre, essendo $M_0 > 0$ una costante, si ha $\mathbb{E}[|M_0|] = M_0$. Quindi ricaviamo che

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}\left[\left|M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i\right|\right] \leq |M_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \max\{a, b\} \,.$$

Usando la Proposizione (2.1.1) si conclude allora che per n fissato

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq |M_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \max\{a,b\} \leq |M_0| + \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \max\{a,b\} < \infty\,,$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che n è pensato fissato e dunque $\sum_{i=1}^{n} k_i < \infty$. Pertanto la prima proprietà della martingala è verificata.

Proseguiamo con la seconda proprietà della Definizione 1.2, ovvero verifichiamo se $\{M_n\}_n$ è adattato alla filtrazione $\{X_n\}_n$. Osserviamo che se conosciamo $X_1, \ldots, X_n$ conosciamo anche M_n. Difatti, essendo $M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i$ e $B_i = f_i(X_1, \ldots, X_{i-1})$, sapendo i valori di $X_1, \ldots, X_n$, risulta noto B_i per $i = 1, \ldots, n$ e dunque anche M_n.

Verifichiamo infine la terza proprietà della Definizione 1.2. Notiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] &= \mathbb{E}\left[M_0 + \sum_{i=1}^{n+1} B_i X_i | X_1,\ldots,X_n\right] = \\
&= M_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}[B_i X_i | X_1,\ldots,X_n] = \\
&= M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i + B_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n]\,,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che B_i dipende solo da $X_1, \ldots, X_{i-1}$ (essendo una funzione degli esiti dei round precedenti). Essendo le variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ indipendenti ed identicamente distribuite, si ha

$$\mathbb{E}[X_i \,|\, X_1,\ldots,X_n] = \mathbb{E}[X_1]\,,$$

e quindi concludiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] &= M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i + B_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n] = \\
&= M_n + \mathbb{E}[X_1]B_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo $B_{n+1} \geq 0$, si ha

- se $\mathbb{E}[X_1] = 0$, allora $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$;
- se $\mathbb{E}[X_1] \leq 0$, allora $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$;
- se $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$, allora $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

2.2 Il sistema martingala

Il sistema martingala ha origine nel diciottesimo secolo e consiste in una strategia di scommessa che consente di ottenere un guadagno con un rischio relativamente basso se si dispone di un capitale elevato. Più precisamente si ripete più volte la stessa scommessa e ci si ferma la prima volta che si vince. Inoltre all'n-esimo round si scommette il doppio di ciò che è stato puntato nell'$(n-1)$-esimo round. Questa strategia, in presenza di un capitale infinito, permette di vincere alla fine la quantità di soldi persa nei vari round e la prima quantità scommessa. Dunque, se M_0 è il capitale posseduto al tempo 0 e $B_1 > 0$ è la quantità di denaro scommessa al primo round, alla fine della procedura lo scommettitore avrà un capitale pari a $M_0 + B_1$, al di là della natura favorevole o sfavorevole della singola scommessa.
Come vedremo nella prossima sezione, nel caso di scomesse favorevoli vengono usati altri metodi per ottimizzare il capitale nel lungo tempo e per tale motivo è più ragionevole considerare il sistema martingala in situazioni sfavorevoli. Ovviamente più la scommessa è sfavorevole, maggiore sarà il numero di round da aspettare in media per avere la prima vincita. Per tale ragione questo metodo è spesso applicato nel contesto della roulette in cui si scomette su rosso o nero. Infatti in questo

caso la probabilità di vincita è leggermente inferiore a 0.5 e dunque il gioco risulta leggermente svantaggioso.

Iniziamo a formalizzare ciò affermato finora definendo la variabile X_i come la vincita ottenuta all'i-esimo round per unità di scommessa, ovvero

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilità } p, \\ -1, & \text{con probabilità } q, \end{cases}$$

dove $p, q > 0$ sono rispettivamente le probabilità di vincita e perdita dell'i-esimo round. Denotiamo al solito con B_i la quantità di denaro scommessa all'i-esimo round.

Al primo round lo scommettitore punta una quantità fissata di denaro $B_1 > 0$. Se la prima scommessa viene vinta, allora ci si ferma e dunque si avrà $B_i = 0$ per $i = 2, 3, \ldots$. Se invece tale scomessa viene persa, allora al secondo round si punterà il doppio di B_1 e dunque $B_2 = 2B_1$. In sintesi

$$B_2 = \begin{cases} 2 \cdot B_1, & \text{in caso di perdita al primo round,} \\ 0, & \text{in caso di vincita al primo round.} \end{cases}$$

Tale scrittura può essere sintetizzata nella forma

$$B_2 = 2B_1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_1=-1\}}\,. \tag{2.3}$$

Analogamente $B_3 = 2B_2$ se al secondo round la scommessa è stata persa, mentre $B_3 = 0$ nel caso contrario. Dunque

$$B_3 = 2B_2 \cdot \mathbb{1}_{\{X_2=-1\}}\,. \tag{2.4}$$

Sostituendo (2.3) in (2.4) si ha

$$\begin{aligned} B_3 &= 2(2B_1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_1=-1,\, X_2=-1\}}) \\ &= 2^2 B_1 \cdot \mathbf{1}_{\{X_1=-1,\, X_2=-1\}}\,. \end{aligned}$$

Iterando questo ragionamento fino all'n-esimo round si ha

$$B_n = 2^{n-1} B_1 \cdot \mathbf{1}_{\{X_1=-1,\ldots,X_{n-1}=-1\}} \,. \tag{2.5}$$

Si noti che l'evento $\{X_1 = -1, \ldots, X_{n-1} = -1\}$ corrisponde a chiedere che le prime $n-1$ scommesse siano perse e, di conseguenza, che la prima scommessa vinta si verifichi dopo le prime $n-1$ (ovvero dall'n-esima in poi).

Definiamo ora N come l'indice del round in cui lo scommettitore realizzerà la prima vittoria, ovvero N è il più piccolo valore $n \geq 1$ tale per cui si ha che $X_n = 1$. In simboli

$$N = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = 1\} \,.$$

Ad esempio, l'occorrenza dell'evento $\{N = 5\}$ è equivalente a dire che vinceremo per la prima volta al quinto round. In generale, l'evento $\{N = k\}$ si verifica se vinciamo al round k, ma fino al round $k-1$ abbiamo realizzato perdite. Dunque

$$\{N = k\} = \{X_1 = -1, X_2 = -1, \ldots, X_{k-1} = -1, X_k = 1\} \,.$$

Per stabilire se l'evento $\{N = k\}$ accade, basta dunque conoscere $X_1, \ldots, X_k$. Concludiamo quindi che N è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, argomento già trattato nel capitolo (1.2). La definizione del tempo d'arresto N ci tornerà utile per l'analisi del capitale ottenuto dopo le varie scommesse.

Procediamo con l'analisi del sistema martingala introducendo il capitale posseduto nei vari round. Denotando con M_n il capitale posseduto all'n-esimo round, identifichiamo M_0 come il capitale iniziale ed assumiamo che esso sia una quantità positiva deterministica. Dopo la prima scommessa (dunque al primo round) si avrà

$$M_1 = \begin{cases} M_0 - B_1, & \text{se } X_1 = -1, \\ M_0 + B_1, & \text{se } X_1 = 1. \end{cases}$$

Possiamo riscrivere M_1 utilizzando il tempo d'arresto N nel seguente modo

$$M_1 = \begin{cases} M_0 - B_1, & \text{se } N > 1, \\ M_0 + B_1, & \text{se } N = 1. \end{cases}$$

Supponiamo ora di aver perso al primo round e di essere quindi costretti ad effettuare la seconda giocata. In questo caso il capitale al secondo round sarà dato da

$$M_2 = \begin{cases} M_0 - B_1 - B_2, & \text{se } X_1 = -1 \text{ e } X_2 = -1, \\ M_0 - B_1 + B_2, & \text{se } X_1 = -1 \text{ e } X_2 = 1, \end{cases}$$

che può essere riscritto tramite la variabile N come

$$M_2 = \begin{cases} M_0 - B_1 - B_2, & \text{se } N > 2, \\ M_0 - B_1 + B_2, & \text{se } N = 2. \end{cases}$$

Supponendo ora di aver perso nei primi due round, il capitale al terzo round sarà della forma

$$M_3 = \begin{cases} M_0 - B_1 - B_2 - B_3, & \text{se } X_1 = -1, X_2 = -1 \text{ e } X_3 = -1, \\ M_0 - B_1 - B_2 + B_3, & \text{se } X_1 = -1, X_2 = -1 \text{ e } X_3 = 1, \end{cases}$$

che in termini del tempo d'arresto N può essere riscritto come

$$M_3 = \begin{cases} M_0 - B_1 - B_2 - B_3, & \text{se } N > 3, \\ M_0 - B_1 - B_2 + B_3, & \text{se } N = 3. \end{cases}$$

In generale all'n-esimo round si ha

$$M_n = \begin{cases} M_0 - B_1 - \ldots, B_{n-1} - B_n, & \text{se } N > n, \\ M_0 - B_1 - \ldots, B_{n-1} + B_n, & \text{se } N = n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Possiamo rappresentare M_n in forma più compatta tramite le X_i. Infatti X_i assume il valore -1 in caso di perdita oppure +1 in caso di vincita. Dunque la quantità di denaro vinta nell'i-esimo round può essere scritta come

$$X_i B_i = \begin{cases} -B_i, & \text{se si perde all'}i\text{-esimo round,} \\ +B_i, & \text{se si vince all'}i\text{-esimo round.} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$M_n = M_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots + B_{n-1} X_{n-1} + B_n X_n \,,$$

che corrisponde alla formulazione generale del sistema di scommesse (2.2), ovvero

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i \,. \tag{2.7}$$

Dalla Proposizione 2.1.2 abbiamo dunque:

- $\{M_n\}_n$ è martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_n$ se $p = q$;
- $\{M_n\}_n$ è supermartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_n$ se $p \leq q$;
- $\{M_n\}_n$ è submartingalarispetto alla filtrazione $\{X_n\}_n$ se $p \geq q$.

Come detto all'inizio della sezione e come capiremo in seguito, è sensato usare il sistema martingala per scommesse svantaggiose, ovvero quando $p < q = 1 - p$ (dunque $p < \frac{1}{2}$). Ciò implica che $\{M_n\}_n$ è una supermartingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_n$.

Siamo ora interessati a capire quanto vale M_N, ovvero quant'è il capitale dello scommettitore nel momento in cui smette di scommettere. Dalle relazioni (2.5) e (2.6) si ha

$$M_n = \begin{cases} M_0 - B_1 - 2B_1 - 2^2 B_1 - \ldots - 2^{n-2} B_1 + 2^{n-1} B_1, & \text{se } N = n \\ M_0 - B_1 - 2B_1 - 2^2 B_1 - \ldots - 2^{n-2} B_1 - 2^{n-1} B_1, & \text{se } N > n, \end{cases}$$

e raccogliendo B_1 si ottiene

$$M_n = \begin{cases} M_0 - B_1(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) + 2^{n-1} B_1 \,, & \text{se } N = n \\ M_0 - B_1(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) \,, & \text{se } N > n. \end{cases}$$

Utilizzando la formula

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}, \tag{2.8}$$

con $\alpha = 2$, si ha

$$M_n = \begin{cases} M_0 - B_1(2^{n-1} - 1) + 2^{n-1}B_1, & \text{se } N = n, \\ M_0 - B_1(2^n - 1), & \text{se } N > n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dunque concludiamo che

$$M_n = \begin{cases} M_0 + B_1, & \text{se } N = n, \\ M_0 + B_1 - 2^n B_1, & \text{se } N > n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dunque al tempo N, ovvero al momento in cui si finisce di scommettere, il giocatore avrà guadagnato B_1 e avrà recuperato tutto il capitale scommesso nei vari round. Tuttavia, durante i vari round, lo scommettitore accusa la perdita di una quantità di denaro che aumenta esponenzialmente in n. Per tale ragione, per avere una vincita certa è necessario un capitale infinto, ipotesi ovviamente irrealizabile. Nella realtà ciò che è sensato fare è stimare la probabilità di avere la prima vincita entro m round, dove $m = m(B_1, M_0)$ è il numero di round che siamo in grado di sostenere scommettendo inizialmente una quantità B_1 e partendo con capitale M_0. Possiamo ottenere il valore di $m = m(B_1, M_0)$ andando ad imporre $M_m \geq 0$ in (2.10), ovvero

$$M_0 + B_1 - 2^m B_1 \geq 0\,,$$

da cui

$$m \leq \log_2\left(\frac{M_0 + B_1}{B_1}\right)\,.$$

Ricordando che m è un numero intero, deduciamo che

$$m = m(B_1, M_1) \leq \left\lceil \log_2\left(\frac{M_0 + B_1}{B_1}\right) \right\rceil, \tag{2.11}$$

dove, dato un numero $x \in \mathbb{R}$, con $\lceil x \rceil$ denotiamo il primo intero superiore o uguale a x.

Per stimare la probabilità di vincere la prima scommessa entro i primi m round è necessario studiare la distribuzione di N. In particolare proviamo il seguente risultato.

Proposizione 2.2.1. *La variabile aleatoria N ha distribuzione geometrica di parametro $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. Di conseguenza per $k \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha*

$$\mathbb{P}(N \leq k) = 1 - (1-p)^k,$$

e di conseguenza $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.

Dimostrazione. Essendo N il primo round in cui si vince la scommessa ed essendo gli esiti delle varie scommesse indipendenti tra loro, abbiamo che N ha distribuzione geometrica con parametro la probabilità di vincita della singola scommessa, ovvero p. Inoltre, fissato $k \in \mathbb{N}_{>0}$, l'evento $\{N > k\}$ si verifica se e solo se per i primi k round la scommessa viene persa. Dunque $\mathbb{P}(N > k) = (1-p)^k$, da cui

$$\mathbb{P}(N \leq k) = 1 - (1-p)^k\,.$$

Rimane da mostrare che N è una variabile aleatoria finita con probabilità 1. Notiamo che

$$\mathbb{P}(N < \infty) = \mathbb{P}(\cup_{k\in\mathbb{N}}\{N = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)\,,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che, al variare di $k \in \mathbb{N}_{>0}$, gli eventi $\{N = k\}$ sono a due a due disgiunti. Poiché $\mathbb{P}(N = k) = (1-p)^{k-1}p$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \\ &= p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = \\ &\underset{1-p<1}{=} p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'uguaglianza (2.8) con $\alpha = 1 - p < 1$ ed $n \to +\infty$. □

Il primo vantaggio del sistema martingala fa riferimento ad un concetto alla base della teoria della probabilità , secondo cui, dato un evento E, come desiderabile, (ad esempio il lancio di una moneta che prevede quindi l'esito testa o croce), che si suppone venga ripetuto in n round, la probabilità che esso non si verifichi mai è nulla. Dunque, la probabilità che non esca l'evento $E = \{escetesta\}$, dopo un numero di round infiniti è nulla, pari a zero. Per tale motivo, non si vede necessario un numero di round particolarmente elevato per ottenere la vincita e quindi un'alta probabilità che quest'ultima si realizzi ad un numero di round non troppo distante. Ciò è spiegato dalla natura di N, variabile geometrica, che presenta code esponenziali con probabilità di decadenza appunto esponenziale (come spiegato nella precedente dimostrazione). Un altro vantaggio del sistema martingala risiede nell'effettiva capacità del trade vincente di ripagare di tutte le perdite precedenti. Il meccanismo progressivo, che coincide con il raddoppio costante, permette di giungere all'evento positivo con una esposizione in modo tale da concretizzare un guadagno imponente, superiore alla somma delle perdite prodotte fino a quel momento. Questi due vantaggi spingono gli investitori ad affidarsi a tale sistema di gioco. Al contrario, lo svantaggio più grande risiede nel fatto che il sistema martingala si appoggia ad un conto finito, un capitale circoscritto. Può capitare che l'evento positivo, quello che ripaga da ogni perdita, si verifichi troppo tardi e nel frattempo il trader abbia dato fondo alle sue risorse dovendo possedere un ingente capitale che talvolta non possiede. Ogni volta che si registra una perdita, la quota richiesta per accedere al round successivo viene raddoppiata, questo può portare ad esiti potenzialmente dannosi. Proprio per questa ragione, il sistema martingala viene comunemente classificato come gioco sfavorevole.

Avendo analizzato rigorosamente il sistema martingala risulta abbastanza evidente che esso sia un risultato in contrasto con il Teorema dell'arresto opzionale (Proposizione 1.2.2). Infatti se tale Teorema fosse valido per la supermartingala

$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e per il tempo d'arresto N, dovremmo avere $\mathbb{E}[M_N] \leq \mathbb{E}[M_0] = M_0$, in chiara opposizione con (2.10) che prevede $M_N = M_0 + B_1$. Per capire che non vi è alcuna contraddizione in questo contrasto, mostriamo che il sistema martingala non soddisfa le ipotesi del Teorema dell'arresto opzionale. Osserviamo che

(a) non esiste $C > 0$ t.c. $\mathbb{P}(N \leq C) = 1$. Infatti dalla Proposizione 2.2.1

$$\mathbb{P}(N \leq C) = 1 - (1-p)^C < 1$$

per ogni $C > 0$.

(b) Dalla Proposizione 2.2.1 abbiamo che $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. Tuttavia non esiste $C > 0$ t.c. $\mathbb{P}(|M_n| < C) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti da (2.10) abbiamo che per $n < N$

$$M_n = M_0 - (2^n - 1)B_1$$

e dunque $|M_n|$ ha una crescita esponenziale. Ciò implica la non esistenza di una costante $C > 0$, indipendente da n, tale che $\mathbb{P}(|M_n| \leq C) = 1$.

(c) Dalla Proposizione 2.2.1 abbiamo che $\mathbb{E}[N] < \infty$. Tuttavia, per $n < N$, da (2.10)

$$|M_{n+1} - M_n| = |2^{n+1} - 2^n| = 2^n$$

e dunque non esiste una costante $C > 0$, indipendente da n, tale che $\mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| < C) = 1$.

(d) Dalla Proposizione 2.2.1 abbiamo che $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ è vera. Tuttavia, per $n < N$, da (2.10) abbiamo che non necessariamente si ha $M_n \geq 0$.

Abbiamo dunque provato che nessuna delle quattro ipotesi del Teorema dell'arresto opzionale risulta verificata dal sistema martingala e per tale ragione esso sfugge alla tesi del teorema (ovvero $\mathbb{E}[M_N] \leq \mathbb{E}[M_0] = M_0$), andando invece a verificare (2.10), ovvero $M_N = M_0 + B_1$.

Di seguito riportiamo alcune simulazioni realizzate con MATLAB del sistema martingala nel contesto della scommessa sull'esito rosso (o equivalentemente nero) nella roulette europea (ovvero la probabilità di vittoria è pari a $\frac{18}{37} < \frac{1}{2}$).

```
%Fissiamo la probabilita' di vincita (p<0.5):
p=18/37;

%Fissiamo il capitale iniziale M0:
M0=100;

%Fissiamo il denaro scommesso al primo round B1:
B1=10;

%Fissiamo il max numero di round giocabili con M0 e B1:
m=ceil(log2((M0+B1)/B1));

%Inizializziamo la dinamica:
M=zeros(1,m+1);
M(1)=M0;
B=zeros(1,m);
B(1)=B1;

%Inizializziamo i contatori:
count=0;
i=1;

%Scriviamo la dinamica:
while count==0 && i<=m
```

```
    i=i+1;
    if rand(1)>p
        B(i)=2*B(i-1);
        M(i)=M(i-1)-B(i-1);
    else
        count=1;
        B(i)=2*B(i-1);
        M(i)=M(i-1)+B(i-1);
    end
end

%Disegniamo il grafico del capitale:
figure(1)
plot(M(1:i))
axis([1 i 0 M0+B1+4])
```

In base all'andamento dei vari round, il grafico del capitale nei vari round assumerà diversi aspetti che possiamo riassumere con i grafici in Figura 2.1 e Figura 2.2. Nello specifico, sull'asse delle ascisse è riportato il numero di round giocati (il round 1 corrisponde al round 0 nella teoria discussa sopra), mentre sull'asse delle ordinate troviamo il capitale. In Figura 2.1 perdiamo per 3 round di fila per poi vincere al successivo, mentre in Figura 2.2 perdiamo per tutti i round finendo l'intero capitale. Nelle simulazioni si è assunto di avere un capitale iniziale pari a 100 e di scommettere inizialmente 10. Da (2.10) osserviamo che, in caso di vincita, otteniamo un capitale finale pari a $100 + 10 = 110$, mentre in caso di perdita andiamo in rovina.

È importante sottolineare come in questo caso il numero di round giocabili con capitale iniziale `M0=100` e con prima scommessa `B1=10` sia pari a `m=4`. Essendo la

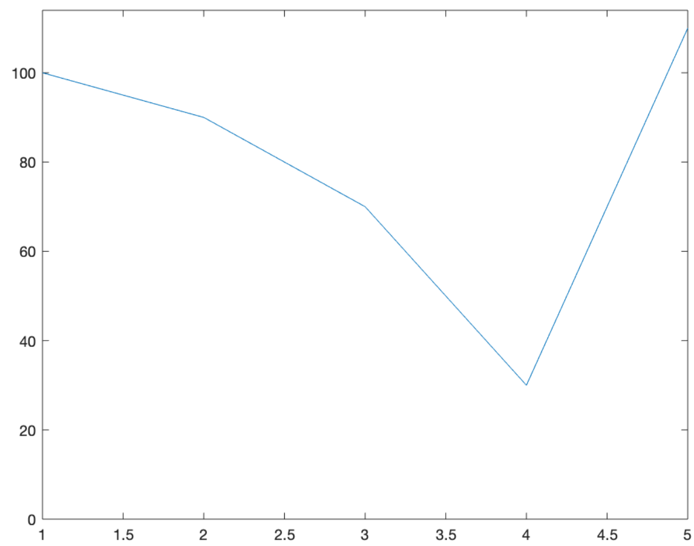
100
80
60
40
20
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Fig. 2.1

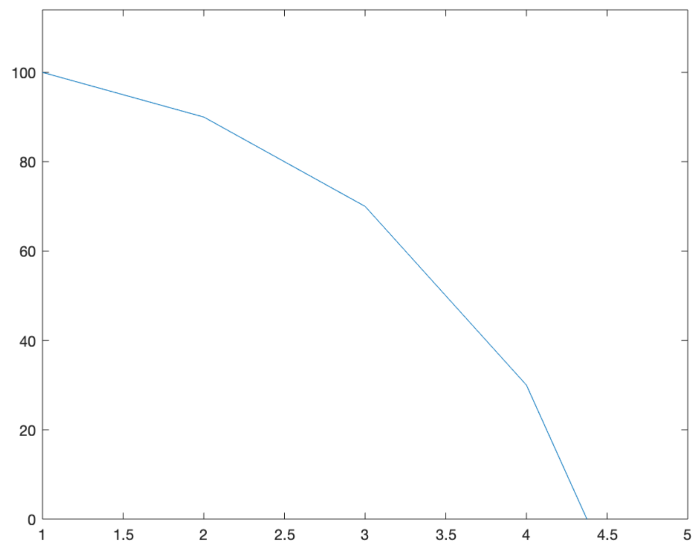
100
80
60
40
20
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Fig. 2.2

probabilità di vincita pari a `p=18/37`, la probabilità di non riuscire a vincere per la prima volta entro i 4 round è $(1-p)^4$, ovvero circa del 7%. Dunque, anche in presenza di scenari di rovina, sarà molto più frequente assistere a situazioni in cui il sistema martingala funzionerà.

2.3 Il Criterio di Kelly

Si supponga di effettuare ripetute volte il lancio di una stessa moneta che fornisce esito testa con probabilità 0.9. Assumiamo inoltre di vincere 1 euro per ogni euro scommesso in caso l'esito sia testa, mentre perdiamo ciò che scommettiamo in caso esca croce. Se denotiamo con X_i la quantità di denaro vinta all'i-esimo lancio, abbiamo che

$$X_i = \begin{cases} 1\,, & \text{se l'}i\text{-esimo lancio dà esito testa}\,, \\ -1\,, & \text{se l'}i\text{-esimo lancio dà esito croce}\,. \end{cases}$$

e di conseguenza

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot 0.9 - 1 \cdot 0.1 = 0.8 > 0\,,$$

ovvero la scommessa risulta essere favorevole. Uno scommettitore inesperto ed intenzionato a giocare più round, influenzato dalla vantaggiosità del gioco, potrebbe scegliere erroneamente di scommettere ad ogni round tutto ciò che possiede. Tuttavia questa non risulta essere una saggia idea in quanto alla prima perdita (evento di probabilità positiva) si perderebbe tutto e ci si troverebbe forzati a smettere di giocare. Risulta invece una scelta più ragionevole quella di scommettere ad ogni round una frazione f del proprio capitale, in modo da avere sempre un capitale da parte da cui poter attingere in caso di perdita. La domanda chiave che ci si pone è dunque quale sia il valore ottimale di tale frazione f e la risposta è stata fornita da Kelly nel 1956 (vedi [4]), il quale caratterizzà tale valore tramite la massimizzazione del tasso di crescita del capitale accumulato nei vari round.

Consideriamo il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definito in (2.7), dove B_n ed X_n rappresentano, rispettivamente, la quantità di denaro scommessa al round n e la quantità di denaro vinta al round n per ogni unità di denaro scommessa. Assumiamo che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ sia composta da variabili indipendenti ed identicamente distribuite, dove

$$X_n = \begin{cases} a, & \textit{con probabilità } p, \\ 0, & \textit{con probabilità } r, \\ -1, & \textit{con probabilità } q, \end{cases} \tag{2.12}$$

e $p, q > 0$, $r \geq 0$ e $p+q+r = 1$. Supponiamo inoltre che $\mathbb{E}[X_n] = ap-q > 0$ (ovvero la scommessa è favorevole). Essendo in presenza di un gioco vantaggioso, seguendo il ragionamento enunciato precedentemente, sarebbe naturale pensare che al fine di massimizzare il guadagno si deva scommettere l'intero ammontare di capitale, ovvero $B_n = M_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Si suppone, dunque, di scommettere tutto ciò che si ha al tempo n che equivale al guadagno ottenuto al tempo $n-1$. Nel lungo tempo questa strategia risulta fallimentare poiché $\mathbb{P}(M_n = 0)$ tende a 1 quando n tende a ∞. Notiamo infatti che se $B_n = M_{n-1}$, si ha

$$M_n = M_{n-1} + B_n X_n = M_{n-1} + M_{n-1}X_n = M_{n-1}(1 + X_n), \tag{2.13}$$

che per effetto dell'iterazione diventa

$$M_n = M_{n-1}(1 + X_n) = M_{n-2}(1 + X_{n-1})(1 + X_n) = M_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + X_i).$$

Notiamo dunque che, affinché si verifichi l'evento $\{M_n = 0\}$ deve succedere che esista qualche round i tale che $X_i = -1$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 0) &= \mathbb{P}(\exists i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ tale che } X_i = -1) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ si ha } X_i \neq -1) = \\
&\underset{indip.di\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \neq -1) = \\
&\underset{id.distrib.di\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_i \neq -1)^n = 1 - (p+r)^n \to 1, \quad \text{per } n \to \infty
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo limite abbiamo assunto che, $(p + r) = 1 - q < 1$.

Come accennato in precedenza risulta dunque più saggio scommettere ad ogni round una frazione $f \in (0, 1)$ dell'intero capitale, ovvero $B_n = f \cdot M_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$. In questo caso si ha dunque

$$M_n = M_{n-1} + B_n X_n = M_{n-1} + f \cdot M_{n-1} X_n = M_{n-1}(1 + f \cdot X_n),$$

che per iterazione diventa

$$M_n = M_{n-1}(1 + f \cdot X_n) = M_{n-2}(1 + f \cdot X_{n-1})(1 + f \cdot X_n) = M_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + f \cdot X_i).$$

Siamo interessati ora a calcolare la frazione f che massimizza la quantità sopra descritta. Per fare ciò definiamo $r_n(f)$ come il tasso di crescita del capitale del giocatore in n round, ovvero

$$r_n(f) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{M_n}{M_0}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + f \cdot X_i)}{n}. \tag{2.14}$$

Definendo la successione di variabili aleatorie $\{Y_n\}n \in \mathbb{N} > 0$ come $Y_n = \ln(1 + f \cdot X_n)$ per $n \in \mathbb{N}_{>0}$, abbiamo

$$r_n(f) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}.$$

Poiché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. ed $Y_n = \ln(1+f \cdot X_n)$, allora anche $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. e dunque, per la Legge dei Grandi numeri (vedi Proposizione (A.3)), si ha quasi certamente

$$r_n(f) := \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \to \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X_1)], \quad \text{per } n \to \infty. \tag{2.15}$$

Definiamo dunque il tasso di crescita del capitale del giocatore nel lungo periodo come

$$\mu(f) := \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)], \tag{2.16}$$

dove X è una variabile aleatoria distribuita come X_1. Al fine di massimizzare il capitale nel lungo periodo risulta quindi utile massimizzare la funzione $f \in [0,1) \mapsto \mu(f)$. La prossima proposizione stabilisce delle condizioni sotto cui è possibile massimizzare $\mu(f)$.

Proposizione 2.3.1. *Assumiamo che la vincita per unità di denaro scommessa sia una variabile aleatoria X che soddisfa le seguenti ipotesi:*

- *X assume un numero finito di valori;*
- *$\mathbb{P}(X = -1) > 0$;*
- *$\mathbb{E}[X] > 0$.*

Si ha

(i) la funzione $f \in [0,1) \mapsto \mu(f)$ è strettamente concava;

(ii) esiste un unico punto di massimo $f^* \in (0,1)$ per $\mu(f)$;

(iii) esiste un unico punto $f_0 \in (f^*, 1)$ tale che $\mu(f_0) = 0$. Inoltre $\mu(f) > 0$ se $f \in (0, f_0)$ e $\mu(f) < 0$ se $f \in (f_0, 1)$.

Dimostrazione. Notiamo che

$$\mu'(f) = \frac{d}{df}\mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)] = \mathbb{E}\Big[\frac{d}{df}\ln(1 + f \cdot X)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{X}{1 + f \cdot X}\Big],$$

e che

$$\begin{aligned} \mu''(f) &= \frac{d}{df}\mu'(f) = \frac{d}{df}\mathbb{E}\Big[\frac{X}{1 + f \cdot X}\Big] = \\ &= \mathbb{E}\Big[\frac{d}{df}\frac{X}{1 + f \cdot X}\Big] = -\mathbb{E}\Big[\frac{X^2}{(1 + f \cdot X)^2}\Big] < 0 \quad \forall f \in (0,1]\,. \end{aligned}$$

Poiché per ogni $f \in (0,1)$ si ha $\mu''(f) < 0$, abbiamo provato la condizione (i).
Notiamo che $\mu'(0) = \mathbb{E}[X] > 0$. Inoltre essendo $\mathbb{P}(X = -1) > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{f\to 1^-} \mu(f) &= \mathbb{E}[\ln(1+X)] = \sum_k \ln(1+k)\cdot \mathbb{P}(X=k) = \\ &= -\infty \cdot \mathbb{P}(X=-1) + \sum_{k\neq -1} \ln(1+k)\cdot \mathbb{P}(X=k) = -\infty,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{f\to 1^-} \mu'(f) &= \mathbb{E}\Big[\frac{X}{1+X}\Big] = \sum_k \frac{k}{1+k}\cdot \mathbb{P}(X=k) = \\ &= -\infty \cdot \mathbb{P}(X=-1) + \sum_{k\neq -1} \frac{k}{1+k}\cdot \mathbb{P}(X=k) = -\infty.\end{aligned}$$

Le due catene di uguaglianze appena scritte sfruttano il fatto che, poiché X assume un numero finito di valori, allora le due somme $\sum_{k\neq -1} \ln(1+k)\cdot \mathbb{P}(X=k)$ e $\sum_{k\neq -1} \frac{k}{1+k}\cdot \mathbb{P}(X=k)$ sono numeri finiti.
Poiché $\mu'(0) > 0$, $\lim_{f\to 1^-} \mu'(f) < 0$ e $\mu(f)$ è una funzione continua, allora esiste un unico punto f^* tale per cui $\mu'(f^*) = 0$. Avendo dimostrato con l'ipotesi (i) che $\mu'(f)$ è una funzione strettamente concava, possiamo affermare inoltre che f^* è un punto di massimo globale per la funzione $f \in (0,1) \mapsto \mu(f)$. Ciò significa che nel punto f^* la funzione $\mu(f)$ assume il massimo valore, provando dunque l'ipotesi (ii).
Notiamo ora che, poiché $\mu(0) = \mathbb{E}[\ln(1)] = 0$ e $\mu'(f) > 0$, deve esistere un intervallo $(0, \tilde{f})$ in cui $\mu(f) > 0$. Essendo f^* il punto di massimo globale, ciò implica che $\mu(f^*) > 0$. Infine, dato che $\lim_{f\to 1^-} \mu(f) = -\infty$, $\mu(f) > 0$ in $(0, \tilde{f})$ e $\mu(f)$ è una funzione continua, deve esistere $f_0 \in (0,1)$ per cui $\mu(f_0) = 0$. Inoltre, poiché $\mu(f^*) > 0$ si ha $f_0 \in (f^*, 1)$. Il punto f_0 è unico poiché, in caso contrario, si violerebbe la prima ipotesi di stretta concavità. Dunque abbiamo dimostrato l'ipotesi (iii). □

Per leggere in maniera più diretta tale risultato si veda il grafico di $\mu(f)$ in Figura 2.3.

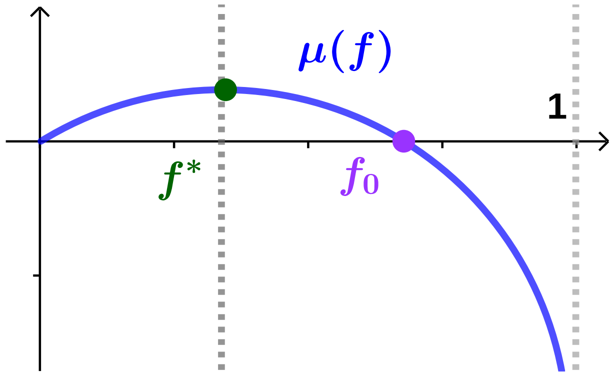

Fig. 2.3: Grafico di $\mu(f)$.

Il sistema di scommesse in cui ad ogni round scommettiamo la frazione f^* del capitale è detto *sistema di Kelly.*

Si noti che la variabile X definita in (2.12) soddisfa le ipotesi della Proposizione 2.3.1 e dunque il tasso di crescita $\mu(f)$ ammette un punto di massimo globale $f^* \in (0, 1)$.

Ora proponiamo un caso esemplificativo che ci permetterà di comprendere meglio il sistena di Kelly.

Esempio 2.1. *Consideriamo una scommessa che ripeteremo più volte e denotiamo con X il guadagno ottenuto da ogni singola scommessa,*

$$X_i = \begin{cases} 8, & \text{con probabilità } 1/4, \\ -1, & \text{con probabilità } 3/4. \end{cases}$$

Notiamo che le ipotesi della Proposizione 2.3.1 sono verificate. Infatti

(i) $\mathbb{P}(X = -1) > 0$*;*

(ii) $\mathbb{E}[X] = 8 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} > 0$*;*

(iii) X assume un numero finito di valori.

Calcoliamo la frazione di capitale che dovremmo scommettere per ottimizzare il profitto nel lungo periodo. Applichiamo la notazione

$$\mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)] = \ln(1 + 8f) \cdot \frac{1}{4} + \ln(1 - f) \cdot \frac{3}{4}.$$

Dalla Proposizione (2.12) *sappiamo che esiste un unico punto di massimo di* $\mu(f)$ *e lo troviamo tramite la sua derivata.*

$$\mu'(f) = \frac{8}{1+8f} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{1-f} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{1+8f} - \frac{3}{4(1-f)} = \frac{5-32f}{4(1+8f)(1-f)},$$

da cui si ottiene

$$\mu'(f) = 0 \Rightarrow 5 - 32f = 0 \Rightarrow f = \frac{5}{32}.$$

Possiamo concludere quindi che il punto che massimizza $\mu(f)$ *è* $f^* = \frac{5}{32}$. *Ciò significa che ad ogni round scommetteremo* $\frac{5}{32}$ *del nostro capitale per ottimizzare il profitto nel lungo periodo.*

Nel caso in cui X sia definita come in (2.12), è possibile dare un'espressione esplicita di f^*, come descritto nella seguente proposizione.

Proposizione 2.3.2. *Supponiamo che* X *sia distribuita come in* (2.12) *con* $p, q > 0$, $r \geq 0$ *e* $p + q + r = 1$. *Assumiamo anche che* $\mathbb{E}[X] = ap - q > 0$. *Allora il punto di massimo di* $\mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)]$ *è dato da*

$$f^* = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)} = \frac{\mathbb{E}[X|X \neq 0]}{a}.$$

Nel caso in cui $\mathbb{P}(X = 0) = r = 0$, *allora* $q = 1 - p$ *e si ottiene*

$$f^* = \frac{(a+1) \cdot p - 1}{a} = \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

La Proposizione ci offre una spiegazione di come è f^* *nel caso in cui* X *assume una certa forma.*

Dimostrazione. Ricerchiamo il punto critico di $\mu(f) = \mathbb{E}[\log(1 + f \cdot X)]$. Si ha che

$$\begin{aligned}\mu(f) = \mathbb{E}[\log(1 + f \cdot X)] &= \log(1 + f \cdot a) \cdot p + \log(1 + f \cdot 0) \cdot r + \log(1 - f) \cdot q = \\ &= \log(1 + f \cdot a) \cdot p + \log(1 - f) \cdot q.\end{aligned}$$

Segue

$$\mu'(f) = \frac{ap}{1 + f \cdot a} - \frac{q}{1 - f}.$$

Ponendo $\mu'(f) = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}\mu'(f) = \frac{ap}{1 + f \cdot a} - \frac{q}{1 - f} = 0 &\Rightarrow \frac{ap \cdot (1 - f) - q \cdot (1 + f \cdot a)}{(1 + f \cdot a)(1 - f)} = 0 \\ &\Rightarrow ap - apf - q - qfa = 0 \Rightarrow f = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)}.\end{aligned}$$

Dunque abbiamo calcolato $f^* = \frac{ap-q}{a\cdot(p+q)}$. In aggiunta osserviamo che

$$\mathbb{E}[X] = ap - q, \qquad p + q = 1 - r = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \neq 0),$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + \mathbb{E}[X|X = 0]\mathbb{P}(X = 0) = \\ &= \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + \mathbb{E}[0|X = 0]\mathbb{P}(X = 0) = \\ &= \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + 0 = \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0).\end{aligned} \tag{2.17}$$

In conclusione scriviamo la formula di f^* sostituendo (2.17)

$$f^* = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)} = \frac{\mathbb{E}[X]}{a \cdot \mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0)}{a \cdot \mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{E}[X|X \neq 0]}{a}.$$

□

Con la prossima proposizione ci soffermeremo a descrivere l'andamento del capitale M_n per n grande quando si scommette una frazione f del capitale. Utilizzeremo la notazione $M_n(f)$ per sottolineare la dipendenza dalla frazione f di capitale scommessa ad ogni round, mentre continuiamo a denotare con f^* la frazione ottimale discussa finora.

Proposizione 2.3.3. *Siano X e f^* definiti come nella Proposizione 2.3.1. Allora per $f \in [0, 1)$ valgono le seguenti affermazioni*

(i) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{M_n(f)}{M_0}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\mu(f)}$ *quasi certamente;*

(ii) se $\mu(f) < 0$*, allora* $\lim_{n\to\infty} M_n(f) = 0$ *quasi certamente;*

(iii) se $\mu(f) > 0$*, allora* $\lim_{n\to\infty} M_n(f) = +\infty$ *quasi certamente;*

(iv) se $f \neq f^*$*, allora* $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(f^*)}{M_n(f)} = +\infty$ *quasi certamente;*

(v) se $\sigma(f) := \sqrt{Var(\ln(1 + f \cdot X))} > 0$*, allora* $\frac{\sqrt{n}}{\sigma(f)}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{M_n(f)}{M_0}\right) - \mu(f)\right)$ *converge in distribuzione ad una variabile con distribuzione normale standad.*

Dimostrazione. Forniamo solamente un'idea della dimostrazione. Dalle formule sopra enunciate (2.14),(2.15) e (2.16) per n grande abbiamo

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{M_n(f)}{M_0}\right) \sim \mu(f), \tag{2.18}$$

da cui otteniamo

$$M_n(f) \sim M_0 \cdot e^{n\mu(f)}. \tag{2.19}$$

La tesi (i) è dunque conseguenza di (2.18).

Proseguendo, se $\mu(f) < 0$, in (2.19) otteniamo che $e^{n\mu(f)}$ tende a 0 per $n \to \infty$, mentre se $\mu(f) > 0$, in (2.19) abbiamo che $e^{n\mu(f)}$ tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. Dunque abbiamo ottenuto (ii) e (iii).

Prendendo in considerazione $M_n(f)$ e $M_n(f^*)$, abbiamo che

$$\frac{M_n(f^*)}{M_n(f)} = \frac{M_0 \cdot e^{n\mu(f^*)}}{M_0 \cdot e^{n\mu(f)}} = e^{n(\mu(f^*)-\mu(f))}.$$

Sappiamo che $\mu(f^*)$ è il massimo della funzione $\mu(f)$, perciò $\mu(f^*) - \mu(f) > 0$ e si ha che $e^{n(\mu(f^*)-\mu(f))}$ tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. L'ipotesi (iv) è quindi verificata.

Per l'ultima ipotesi (v) basta applicare invece il Teorema del Limite Centrale (vedi Proposizione A.4). □

Esempio 2.2. *Riprendendiamo l'Esempio* (2.1) *in cui avevamo calcolato* $f^* = \frac{5}{32}$. *Dalla Proposizione* (2.12) *esiste un unico punto* $f_0 \in (f^*, 1)$ *tale che* $\mu(f_0) = 0$ *ed inoltre* $\mu(f_0) > 0$ *se* $f < f_0$. *Supponiamo di scommettere ad ogni round una frazione di capitale* $f = 1/8$. *Siamo interessati a calcolare*

(a) il limite quasi certo di $M_n(f)$ *per* $n \to \infty$;

(b) il limite quasi certo di $\frac{M_n(f)}{M_n(f^*)}$ *per* $n \to \infty$.

Per rispondere ad (a) notiamo che $f = \frac{1}{8} < \frac{5}{32} = f^* < f_0$. *Sappiamo di conseguenza che* $\mu(f) > 0$ *in quanto* $f < f_0$ *e dunque, dalla Proposizione* (2.3.3), *si ha che quasi certamente*

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = +\infty\,.$$

Sempre prendendo in considerazione la Proposizione (2.3.3) *si risolve (b). Infatti poiché* $\lim n \to \infty \frac{M_n(f^*)}{M_n(f)} = +\infty$ *quasi certamente, si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(f)}{M_n(f^*)} = 0$$

quasi certamente.

Al fine di comprendere meglio la Proposizione 2.3.3 sono proposte di seguito le simulazioni del sistema di Kelly che mostrano il grafico del guadagno $M_n(f)$ al variare del round n (vedi la Figura 2.4 e la Figura 2.5 . I tracciati riportano sull'asse delle ascisse l'indice n e sul corrispondente asse delle ordinate $M_n(f)$. Le varie curve sono ottenute cambiando il valore di f. Nella Figura 2.4 in particolare abbiamo che

- la curva rossa identifica $M_n(f^*)$;
- la curva verde identifica $M_n(f)$ con $f < f^*$;
- la curva blu identifica $M_n(f)$ con $f \in (f^*, f_0)$.

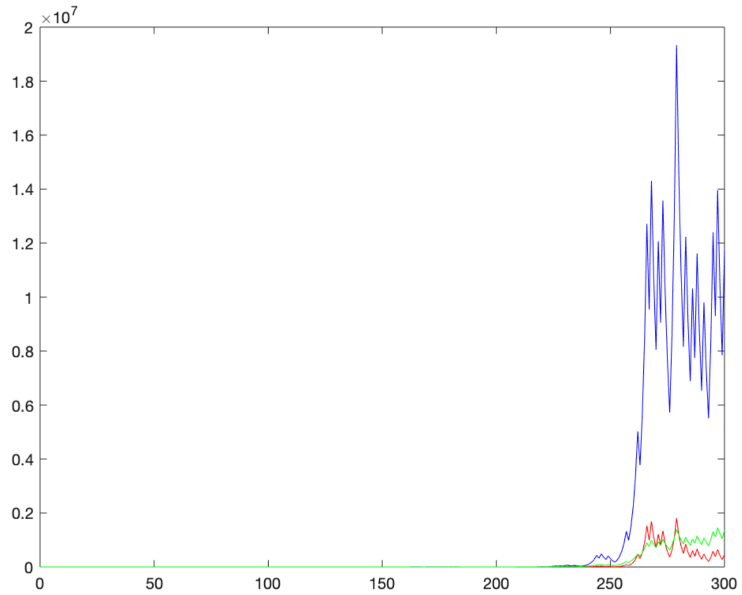
×10^7
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250
300

Fig. 2.4

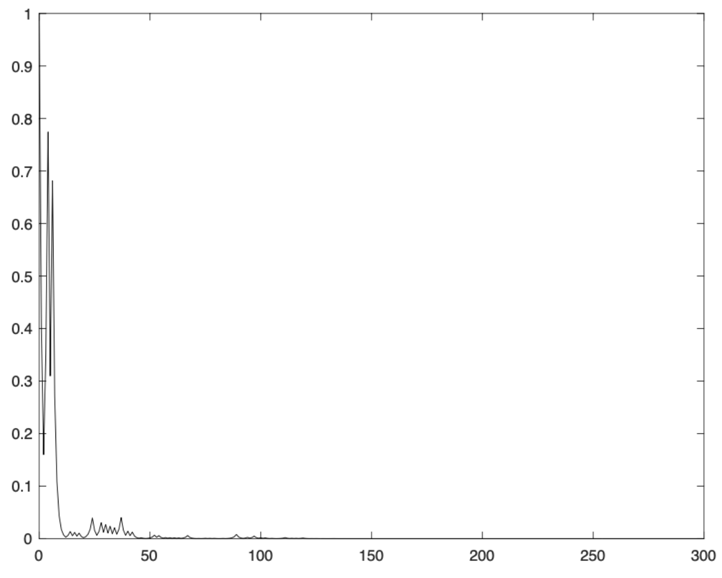
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
50
100
150
200
250
300

Fig. 2.5

Notiamo come tutte e tre le curve abbiano un trend crescente, ma $M_n(f^*)$ risulta essere decisamente maggiore nel lungo periodo a confronto di $M_n(f)$ per $f \in (0, f^*) \cup (f^*, f_0)$, come predetto dalla Proposizione 2.3.3. Il trend di $M_n(f)$, per $f \neq f^*$, sarà tanto più distante da quello di $M_n(f^*)$ tanto più sarà la distanza di f da f^*.
Nella Figura 2.5 invece troviamo il grafico di $M_n(f)$ per $f > f_0$. Notiamo come esso decada a 0 essendo $\mu(f) < 0$, come previsto e osserviamo come la differenza tra le scale sull'asse delle ordinate nella Figura 2.4 e nella Figura 2.5, renda impossibile rappresentare tutte le curve in un unico grafico riuscendone ad apprezzare le caratteristiche.

I grafici sopra riportati sono stati realizzati tramite il seguente codice MATLAB.

```
%Fissiamo la probabilita' di vincita p:
p=0.5;

%Fissiamo la vincita per unita' di denaro scommessa:
a=2;

%Fissiamo il capitale iniziale:
M0=1;

%Fissiamo il numero di round che giochiamo:
n=300;

%Calcoliamo fstar (Qui fstar=0.25):
fstar=((a+1)p-1)/a;
```

```
%Fissiamo una frazione f>fstar:
f=0.35;

%Fissiamo una frazione h<fstar:
h=0.15;

%Qui f0=0.5. Fissiamo una frazione r>f0:
r=0.6;



%Inizializziamo quattro differenti dinamiche:
F=zeros(n+1);
H=zeros(n+1);
G=zeros(n+1);
R=zeros(n+1);
F(1)=M0;
H(1)=M0;
G(1)=M0;
R(1)=M0;



%F=capitale associato alla frazione f (con fstar<f<f0).
%H=il capitale associato alla frazione h (con h<fstar).
%G=il capitale associato alla frazione fstar.
%R=il capitale associato alla frazione r (con r>f0).

%Scriviamo la dinamica:
for i=1:n
```

```
    if rand(1)<=p
        F(i+1)=F(i)*(1+f*a);
        H(i+1)=H(i)*(1+h*a);
        G(i+1)=G(i)*(1+fstar*a);
        R(i+1)=R(i)*(1+r*a);
    else
        F(i+1)=F(i)*(1-f);
        H(i+1)=H(i)*(1-h);
        G(i+1)=G(i)*(1-fstar);
        R(i+1)=R(i)*(1-r);
    end
end

%Disegniamo i grafici dei capitali nei vari casi:
figure(1)
plot(F,'r',G,'b',H,'g')
figure(2)
plot(R,'k')
```

Come sottolineato nel comando **plot**, si verifica la descrizione fatta sopra della Figura 2.4 e della Figura 2.5.

2.4 Il Criterio di Kelly per scommesse simultanee

Supponiamo di avere differenti scommesse da poter effettuare simultaneamente. In particolare assumiamo di avere d scommesse e che almeno una sia favorevole, ovvero, denotando con X_i il guadagno per unità di denaro scommessa nell'i-esimo gioco, richiediamo che

$$\max_{1\leq i\leq d} \mathbb{E}[X_i] > 0\,. \tag{2.20}$$

Supponiamo inoltre che, per $i = 1,\ldots,d$, X_i assuma un numero finito di valori e che tali esiti siano nell'insieme $[-1,+\infty)$. Le variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$ non necessariamente indipendenti, ovvero, i titoli contenuti in ciascun vettore $\mathbf{X}$, con riferimento al medesimo tempo, possono essere correlati tra di loro. Al contrario, supponendo di ripetere le scommesse simultanee più volte, i vettori $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots$ risutano essere indipendenti tra loro. Definiamo dunque $\mathbf{X}_n$ come il vettore contenente le singole vincite per unità di denaro puntata per ogni scommessa simultanea. Dunque

$$\mathbf{X}_n := (X_{n,1},\ldots,X_{n,d}),$$

dove $X_{n,i}$ rappresenta la quantità di denaro vinta nell'i-esima scommessa all'n-esimo round.
Come già detto supponiamo $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots$ vettori aleatori i.i.d. con analoga distribuzione di $\mathbf{X}$, e il sistema di scommesse $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\ldots$. Si ha

$$\mathbf{X} := (X_1,\ldots,X_d)\,, \qquad \mathbf{B}_n := (B_{n,1},\ldots,B_{n,d}),$$

dove la variabile $X_{n,i}$ denota il profitto dello scommettitore per unità scommessa all'i-esima puntata all'n-esimo gioco e $B_{n,i}$ rappresenta l'ammontare scommesso all'i-esima scommessa all'n-esimo round. È naturale supporre che $\mathbf{B}_n$ dipenda dal risultato dei precedenti round, ovvero $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_{n-1}$. Precisiamo,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \geq 0,\ , \qquad \mathbf{B}_n = \mathbf{b}_n(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_{n-1}) \geq 0\,, \quad n\geq 2,$$

dove $\mathbf{b}_1$ è definito come un vettore deterministico e $\mathbf{b}_n$ è una funizone vettoriale deterministica di $n-1$ variabili per ogni $n\geq 2$. Il capitale dello scommettitore M_n dopo n round soddisfa la seguente uguaglianza

$$M_n = M_{n-1} + \langle \mathbf{B}_n, \mathbf{X}_n\rangle, \tag{2.21}$$

per ogni $n \geq 1$, e quindi similmente a (2.13) ma con scommesse simultanee si ha

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{B}_i, \mathbf{X}_i \rangle \, , \qquad n \geq 1 \, ,$$

dove $M_0 > 0$ è una quantità deterministica e rappresenta il capitale iniziale, mentre, dati due vettori $\mathbf{b}, \mathbf{x}$, con la notazione $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle := \sum_{i=1}^{d} b_i x_i$, indichiamo il prodotto scalare tra i due vettori. Assumiamo che lo scommettitore non possa scommettere più del capitale che possiede, quindi

$$B_{n,1} + \ldots + B_{n,d} \leq M_{n-1} \, , \qquad n \geq 1 \, .$$

Poiché è vantaggioso effettuare una o più scommesse, l'aspettatativa di guadagno può essere massimizzata puntando tutto il capitale sulla scommessa disponibile più favorevole. Ma, come abbiamo notato nella sezione precedente, questo sistema di scommessa può risultare insoddisfacente. Dunque, piuttosto che puntare tutto il capitale, anche in questo caso cerchiamo di capire quale sia la frazione ottimale da puntare in ogni scommessa simultanea per massimizzare il profitto nel lungo periodo. A tale scopo definiamo l'insieme

$$\Delta := \left\{ \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) : f_1 \geq 0, \ldots, f_d \geq 0, \, \sum_{i=1}^{d} f_i \leq 1 \right\} \, .$$

Dunque un approccio migliore per lo scommettitore è quello di scegliere un $f \in \Delta$ e scommettere una porzione fissata di f_i del suo attuale capitale all'i-esima scommessa simultanea per $i = 1, \ldots, d$ per ogni round. Quindi ponendo

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{f} M_{n-1}, \qquad n \geq 1 \, , \tag{2.22}$$

e sostituendo in (2.21), si ottiene

$$M_n = M_{n-1}(1 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \rangle) \, , \qquad n \geq 1 \, . \tag{2.23}$$

Iterando si ha

$$M_n = M_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_i \rangle) \, , \qquad n \geq 1. \tag{2.24}$$

Al fine di stabilire la scelta ottimale del vettore della porzione di capitale da scommettere $\mathbf{f}$, determiniamo il tasso di crescita del capitale in n periodi

$$r_n(\mathbf{f}) := \frac{1}{n}\ln(M_n/M_0)\,.$$

Dunque, attraverso la Legge dei grandi numeri (vedi Proposizione (A.3)), procediamo a definire il tasso di crescita nel lungo periodo come in (2.16)

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\mathbf{f}) = \mathbb{E}[\ln(1+\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}\rangle)] =: \mu(\mathbf{f})\,, \qquad \text{quasi certamente.} \tag{2.25}$$

Al fine di scegliere un vettore $\mathbf{f}$ che massimizza il capitale nel lungo periodo, è innanzitutto necessario imporre $\mathbf{f}$ in modo tale che il prodotto in (2.24) non si annulli. Dunque restringiamo l'insieme Δ all'insieme Δ_0 definito come

$$\Delta_0 := \{\mathbf{f} \in \Delta \,:\, \mathbb{P}(\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}\rangle = -1) = 0\}\,. \tag{2.26}$$

Notiamo che, da (2.25), per n grande si ha

$$M_n = M_0 \cdot e^{\mu(\mathbf{f})n}\,.$$

Essendo $\mu(\mathbf{f})$ il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo, per massimizzare il capitale è sufficiente massimizzare tale tasso. L'esistenza di un punto $\mathbf{f}^*$ che massimizza $\mu(\mathbf{f})$ è dato dal seguente lemma che verificherà la concavità di $\mu(\mathbf{f})$ e dunque l'esistenza di un punto di massimo.

Lemma 2.4.1. *Supponiamo che, per $i = 1, \ldots, d$, X_i sia una variabile aleatoria che può assumere valori finiti compresi nell'insieme* $[-1, +\infty)$ *e assumiamo che valga* (2.20). *La funzione $\mathbf{f} \in \Delta_0 \longmapsto \mu(\mathbf{f})$ è concava e ammette un punto di massimo. Se $\mathbf{f}_0^*$ e $\mathbf{f}_1^*$ risultano essere entrambi punti di massimo, si avrà che* $\mathbb{P}(\langle \mathbf{f}_0^*, \mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{f}_1^*, \mathbf{X}\rangle) = 1$, *ovvero $\mu(\mathbf{f}_0^*) = \mu(\mathbf{f}_1^*)$ con probabilità 1.*

Dimostrazione. La funzione $h(\mu) := \ln(1+\mu)$ è strettamente concava e continua in $(-1, \infty)$, e di conseguenza si ha che $\mu(\mathbf{f}) = \mathbb{E}[h(\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}\rangle)]$ è continua in Δ_0. Poiché

Δ_0 è un insieme chiuso e limitato, esso risulta essere anche compatto. Dunque, per il Teorema di Weierstrass (vedi Proposizione A.5) $\mu(\mathbf{f})$ ammette un punto di massimo globale $\mathbf{f}^*$ in Δ_0. Inoltre $\mu(\mathbf{f})$ risulta essere una funzione concava in quanto è composizione di una funzione lineare (ovvero il valore atteso) ed una funzione concava (ovvero h). Infatti scelti $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1 \in \Delta_0$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, dalla concavità di h si ha

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda \mathbf{f}_0 + (1-\lambda)\mathbf{f}_1) &= \mathbb{E}[h(\lambda\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\rangle)] \\
&\geq \mathbb{E}[\lambda h(\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\rangle) + (1-\lambda) h(\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\rangle)] \\
&= \lambda \mathbb{E}[h(\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\rangle)] + (1-\lambda)\mathbb{E}[h(\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\rangle)] \\
&= \lambda \mu(\mathbf{f}_0) + (1-\lambda)\mu(\mathbf{f}_1)\,.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza è valida se e solo se $\mathbb{P}(\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\rangle) = 1$. Inoltre, dalla (2.20), possiamo trovare una frazione $\mathbf{f} \in \Delta_0$ tale che $\mu(\mathbf{f}) > 0$ e di conseguenza si ha che $\mu(\mathbf{f}^*) > 0$, essendo $\mathbf{f}^*$ punto di massimo di $\mu(\mathbf{f})$. $\square$

Il sistema di scommesse che usa la frazione ottimale $\mathbf{f}^*$ predetta dal lemma precedente è chiamato *sistema di Kelly.*

Concludiamo questa sezione mettendo a confronto vari sistemi di scommesse che usano differenti frazioni $\mathbf{f}$. A tal fine, scriveremo $M_n(\mathbf{f})$ invece di M_n per sottolineare la dipendenza di M_n dalla frazione di capitale $\mathbf{f}$ che si sta scommettendo. In aggiunta a $\mu(\mathbf{f})$ nell'equazione (2.25) introduciamo la varianza

$$\sigma^2(\mathbf{f}) := \mathrm{Var}(\ln(1 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{X}\rangle)).$$

Teorema 2.4.2. *Nelle stesse ipotesi del Lemma 2.4.1, considerato $\mathbf{f} \in \Delta_0$, si ha:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(M_n(\mathbf{f})/M_0)^{1/n} = e^{\mu(\mathbf{f})}$ *quasi certamente;*

(b) se $\mu(\mathbf{f}) > 0$, *allora* $\lim_{n\to\infty} M_n(\mathbf{f}) = +\infty$*quasi certamente;*

(c) se $\mu(\mathbf{f}) < 0$, *allora* $\lim_{n\to\infty} M_n(\mathbf{f}) = 0$*quasi certamente;*

(d) se $\mu(\mathbf{f}) < \mu(\mathbf{f}^*)$*, allora* $\lim_{n\to\infty} M_n(\mathbf{f}^*)/M_n(\mathbf{f}) = +\infty$ *quasi certamente;*

(e) se $\sigma(\mathbf{f}) > 0$*, allora*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(\mathbf{f})}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{M_n(\mathbf{f})}{M_0}\right) - \mu(\mathbf{f})\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

L'idea della dimostrazione del teorema non viene riporatata, ma risulta analoga a quella illustrata nella sezione precedente (vedi Proposizione (2.3.3)).

Concludiamo il capitolo tornando nuovamente sull'equazione (2.23). In particolare, se $\sum_{i=1}^{d} f_i = 1$, l'equazione (2.23) può essere riscritta come

$$M_n = M_{n-1}(1 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \rangle) = M_{n-1}(\langle \mathbf{f},\, \mathbf{1} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \rangle)\,,$$

dove $\mathbf{1}$ è un vettore d-dimensionale con tutte le entrate pari a 1 e dunque $\langle \mathbf{f},\, \mathbf{1} \rangle = \sum_{i=1}^{d} f_i = 1$. Si ottiene allora che (2.23) è equivalente a

$$M_n = M_{n-1}\langle \mathbf{f},\, \mathbf{1} + \mathbf{X}_n \rangle\,. \tag{2.27}$$

In questo contesto, anche la condizione (2.20) può essere riformulata in termini del vettore $\mathbf{1} + \mathbf{X}_n$ chiedendo

$$\max_{1\le i\le d} \mathbb{E}[1 + X_i] > 1\,. \tag{2.28}$$

Questa formulazione sarà utile nel prossimo capitolo, dove l'andamento del capitale sarà ottenuto iterando (2.27) e soddisferà la condizione (2.28).

Capitolo 3

Applicazione del Criterio di Kelly al mercato azionario

Il Criterio di Kelly è una strategia di investimento ampliamente utilizzata nell'ambito del gioco d'azzardo ed in special modo nel blackjack (vedi [2], [3], [10], [12], [13]). Tale metodo ha applicazioni in vari altri contesti come nelle scommesse sportive (vedi [5], [9], [13], [14]) e nel mercato azionario (vedi [6], [7], [8], [10], [11], [13], [14]). L'attività di investimento nel mercato azionario sarà l'argomento di discussione del capitolo. In questo ambito, il giocatore d'azzardo diventa un investitore desideroso di investire il suo capitale in stock options nel mercato azionario. L'investitore può così decidere di acquistare o vendere stock options sul mercato, tenendo conto che tali strumenti finanziari incorporano variazioni in aumento o in diminuzione, in funzione del trend di mercato. Dunque, si ha una diversa probabilità che il loro valore possa subire un'oscillazione. Ad esempio, un'azione dal valore di 150 dollari nel mese di Ottobre, può subire un rialzo del 10 percento e raggiungere un valore pari a 165 dollari a Novembre e diminuire del 5 percento a Dicembre arrivando ad un prezzo pari a 142,5 dollari. Supponiamo che un investitore detenga due azioni che chiameremo A e B, rispettivamente. Ciascuna azione ha una differente probabilità di subire un aumento (p_A, p_B) o un decremento di valore ($q_A = 1 - p_A$, $q_B = 1 - p_B$). Questi strumenti finanziari possono registrare una crescita o una perdita di valore indipendentemente l'uno dall'altro. Assumiamo che, quando una delle due azioni aumenta di valore, la percentuale di rialzo sia costante e dunque che non cambi tra un mese e l'altro ed inoltre che, al termine del mese, l'investitore abbia un aumento di capitale pari a quello che ha investito nell'acquisto dell'azione moltiplicato per il fattore di aumento del valore dell'azione. Considerando l'esempio illustrato precedentemente, l'investitore avrebbe 165 dollari a Novembre conseguentemente al rialzo del 10 percento del titolo. Nel caso in cui le azioni crescessero nuovamente (del 10 percento perchè la percentuale di crescita è costante), il mese successivo l'investitore godrebbe di 181,5 dollari. Lo stesso accadrebbe in caso di ribasso del prezzo. Se l'azione aumentasse di valore, il capitale dell'investitore sarebbe pari all'importo del capitale che lui ha investito nell'azione moltiplicato per $V \in (1, +\infty)$, invece se l'azione perdesse valore, la diminuzione del capitale dell'investitore sarebbe data dall'ammontare del capitale investito moltiplicato per la frazione $Z \in (0, 1)$. Questo caso somiglia molto al caso del generale lancio di una moneta in cui se esce testa, il titolo aumenta di V volte il suo valore, mentre se esce croce si avrà una riduzione di Z volte il valore originale. Le frazioni di capitale che l'investitore investe in ciascuna azione sono f_A, $f_B \in [0, 1]$, $f_A + f_B = 1$. In particolare, se l'investitore investisse nelle due azioni e il mese successivo il valore del titolo A avesse subito un incremento, mentre il valore del titolo B risultasse diminuito, il capitale diventerebbe

$$M_1 = M_0 \cdot (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B),$$

dove M_n rappresenta il capitale nell'n-esimo periodo, mentre Z_B e V_A sono, rispettivamente, i fattori di decrescita del titolo B e di crescita del titolo A. Se nel mese successivo l'azione B aumentasse e l'azione A diminuisse, si avrebbe

$$M_2 = M_1 \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) = M_0 \cdot (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B),$$

dove Z_A e V_B sono, rispettivamente, i fattori di decrescita del titolo A e di crescita del titolo B.

L'investitore investe in opzioni azionarie per una serie di $N \in \mathbb{N}$ mesi con

- $WL \in \mathbb{N}$ - numero di mesi in cui l'azione A cresce di valore e B diminuisce di valore.

- $LW \in \mathbb{N}$ - numero di mesi in cui l'azione B aumenta di valore e A subisce una diminuzione.

- $WW \in \mathbb{N}$ - numero di mesi nei quali entrambi i titoli A e B aumentano il valore.

- $LL \in \mathbb{N}$ - numero di mesi nei quali sia A che B perdono valore. Con $WL + LW + WW + LL = N$.

L'equazione che descrive il capitale corrente a disposizione dell'investitore diventa dunque

$$\frac{M_N}{M_0} = (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B)^{WL} \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B)^{LW} \cdot (V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B)^{WW} \cdot (Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B)^{LL}.$$

Si noti la similitudine con l'iterazione della formula (2.27).

Proseguiamo definendo la funzione G come segue

$$G(f_A, f_B) = \ln\left(\frac{M_N}{M_0}\right) = WL \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) + LW \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + WW \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + LL \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B).$$

Come fatto in (2.14), consideriamo la funzione di crescita logaritmica del capitale di N serie discrete di investimenti appena definita e la dividiamo per N

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\cdot G(f_A,f_B) = \frac{1}{N}\cdot \ln\left(\frac{M_N}{M_0}\right) &= \\ &= \frac{WL}{N}\cdot \ln(V_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B) + \frac{LW}{N}\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) + \\ &+ \frac{WW}{N}\cdot \ln(V_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) + \frac{LL}{N}\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B)\,.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Dopo una lunga serie di investimenti otteniamo

$$\begin{aligned} g(f_A,f_B) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cdot G(f_A,f_B) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cdot \ln\left(\frac{M_N}{M_0}\right) = \\ = \lim_{N\to\infty}\frac{WL}{N}\cdot \ln(V_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B) &+ \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LW}{N}\right)\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) + \\ + \lim_{N\to\infty}\left(\frac{WW}{N}\right)\cdot \ln(V_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) &+ \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LL}{N}\right)\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B)\,.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Notiamo che, in analogia a (2.16), $g(f_A, f_B)$ rappresenta il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo.

Dividendo WL, LL, LW e WW per il numero di mesi che si è scelto di investire nei titoli A e B, ed utilizzando la Legge dei grandi numeri (vedi Proposizione (A.3)), si ha

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{WL}{N}\right) &= p_A\cdot q_B\,, & \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LL}{N}\right) &= q_A\cdot q_B\,, \\ \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LW}{N}\right) &= q_A\cdot p_B\,, & \lim_{N\to\infty}\left(\frac{WW}{N}\right) &= p_A\cdot p_B\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} g(f_A,f_B) = p_A\cdot q_B\cdot \ln(V_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B) + q_A\cdot p_B\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) + \\ p_A\cdot p_B\cdot \ln(V_A\cdot f_A + V_B\cdot f_B) + q_A\cdot q_B\cdot \ln(Z_A\cdot f_A + Z_B\cdot f_B)\,. \end{aligned}$$

In analogia a (2.19), notiamo che da (3.2) si ha che il capitale M_N nell'N-esimo periodo, per N grande, si comporta come

$$M_N \sim e^{N\cdot g(f_A,f_B)}\,.$$

Deduciamo quindi che per ottimizzare il capitale nel lungo periodo occorre individuare il massimo del tasso di crescita asintotico $g(f_A, f_B)$. Per garantire l'esistenza di un massimo globale per tale funzione, è necessario ipotizzare che

$$\max\{p_A V_A + (1 - p_A) Z_A, p_B V_B + (1 - p_B) Z_B\} > 1\,,$$

ovvero la condizione (2.28), in modo da poter render valido il Lemma 2.4.1.
Possiamo trattare la ricerca del massimo di g come un problema di ottimizzazione non lineare che può essere risolto tramite la piattafroma MATLAB. Il caso di ottimizzazione è definito come la massimizzazione di (3) al vicolo di uguaglianza: $h(f_A, f_B) = f_A + f_B - 1 = 0$, con il vincolo superiore pari a $f_A, f_B \geq 0$, dove $g(f_A, f_B)$ è denominata funzione obiettivo e $h(f_A, f_B)$ è il vincolo di uguaglianza. Inoltre, è possibile inserire il vincolo $h(f_A, f_B)$ all'interno della funzione tramite la sostituzione $f_B = 1 - f_A$, ottenendo

$$\begin{aligned} r(f_A) &:= g(f_A, 1 - f_A) = \\ &= p_A \cdot p_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)) + p_A \cdot q_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)) + \\ &+ p_B \cdot q_A \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)) + q_A \cdot q_B \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A))\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Denotiamo con $\Delta = [0, 1]$ l'insieme dei valori assunti da f_A, ovvero il dominio in cui consideriamo la funzione $r(f_A)$.
Calcoliamo il punto critico della funzione derivando la funzione r

$$\begin{aligned} r'(f_A) = &\frac{p_A \cdot p_B \cdot (V_A - V_B)}{V_A \cdot f_A + V_B(1 - f_A)} + \frac{p_A \cdot q_B \cdot (V_A - Z_B)}{V_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)} + \\ &- \frac{p_B \cdot q_A \cdot (V_B - Z_A)}{Z_A \cdot f_A + V_B(1 - f_A)} + \frac{q_A \cdot q_B \cdot (Z_A - Z_B)}{Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)}. \end{aligned}$$

Ponendo l'equazione $r'(f_A) = 0$, si ha difficoltà nella risoluzione analitica e dunque ci affidiamo a MATLAB. Nello specifico, avvalendoci della funzione `fmincon`, siamo in grado di calcolare il minimo vincolato di una funzione di più variabili. Si noti che `fmincon` risolve il problema di ottimizzazione per la ricerca di punti di minimo mentre noi siamo invece interessati a cercare un punto di massimo. Per tale ragione si applica la funzione `fmincon` alla funzione $-r$ ed il punto di minimo che ci verrà fornito sarà esattamente il punto di massimo di r.

Di seguito si propone una simulazione nel mercato azionario freundo di MATLAB per fornire un'applicazione più realistica.

3.1 Simulazione nel mercato azionario

In questa sezione saranno presentate delle simulazioni che descrivono differenti scenari del mercato azionario. Supponiamo che un investitore investa in due titoli A e B. Ciascun titolo ha una probabilità di rialzo alla fine di ogni mese: l'azione A ha probabilità pari a p_A di aumentare il suo valore, mentre l'azione B ha probabilità p_B di accrescere. Nel momento in cui A aumenta il suo valore, esso aumenterà di $(V_A - 1) \cdot 100$ percento, mentre, se diminuisce, diminuirà di $(1 - Z_A) \cdot 100$ percento. Analogamente accade per il titolo B, ovvero, se l'azione B aumenta di valore, esso aumenterà di $(V_B - 1) \cdot 100$ percento, mentre se diminuirà , si avrà un riduzione del $(1 - Z_B) \cdot 100$ percento. Successivamente segue una lista di scenari utilizzando valori diversi delle probabilità p_A, p_B e dei fattori di crescita e descrescita V_A, V_B, Z_A, Z_B:

(i) Titolo A: $p_A = 0.4$, $V_A = 1.18$, $Z_A = 0.93$.
Titolo B: $p_B = 0.4$, $V_B = 1.14$, $Z_B = 0.96$.

(ii) Titolo A: $p_A = 0.3$, $V_A = 1.20$, $Z_A = 0.94$.
Titolo B: $p_B = 0.9$, $V_B = 1.02$, $Z_B = 0.98$.

(iii) Titolo A: $p_A = 0.5$, $V_A = 1.08$, $Z_A = 0.94$.
Titolo B: $p_B = 0.65$, $V_B = 1.01$, $Z_B = 0.94$.

Utilizziamo il seguente codice MATLAB che sfrutta la funzione `fmincon` per il calcolo del punto di minimo del tasso di crescita del capitale nel lungo periodo.

```
%Fissiamo i parametri del titolo A:
pA=0.4;
VA=1.18;
ZA=0.93;

%Fissiamo i parametri del titolo B:
pB=0.4;
VB=1.14;
ZB=0.96;

%Definiamo la funzione da ottimizzare:
r=@(f) -FUN(f,pA,pB,VA,VB,ZA,ZB);

%Definiamo il punto iniziale per l'ottimizzazione:
f0=0.5;

%Operiamo fmincon per trovare il punto di minimo fA di r:
fA=fmincon(g,f0,[],[],[],[],0,1)
fB=1-fA
```

La funzione `FUN` utilizzata nel codice appena descritto rappresenta la funzione $-r(f_A)$ (vedi (3.3)) e la definiamo in MATLAB come segue.

```
function r=FUN(fA,pA,pB,VA,VB,ZA,ZB)
```

```
%Calcoliamo i vari contributi nella funzione g:
AB=pA*pB*log(VA*fA+VB*(1-fA));
Ab=pA*(1-pB)*log(VA*fA+ZB*(1-fA));
aB=(1-pA)*pB*log(ZA*fA+VB*(1-fA));
ab=(1-pA)*(1-pB)*log(ZA*fA+ZB*(1-fA));

%Definiamo g come la somma dei contributi:
r=AB+Ab+aB+ab;
```

Tramite la suddetta procedura otteniamo i seguenti risultati per il punto di minimo f_A^* di $-r(f_A)$ (ovvero il punto di massimo di $r(f_A)$):

(i) $f_A^* \approx 0.25$, $f_B^* = 1 - f_A^* \approx 0.75$;

(ii) $f_A^* \approx 0.15$, $f_B^* = 1 - f_A^* \approx 0.85$;

(iii) $f_A^* \approx 1$, $f_B^* = 1 - f_A^* \approx 0$.

Proviamo adesso a simulare l'andamento del capitale nel tempo. In particolare mostriamo come l'andamento differisca molto se si scommettono le porzioni ottimali (f_A^*, f_B^*) o due frazioni generiche non ottimali (f_A, f_B). Ricordiamo che se M_n denota il capitale all'n-esimo periodo, allora

$$M_n = \begin{cases} M_{n-1} \cdot (V_A f_A + V_B f_B) & \text{con probabilità } p_A p_B; \\ M_{n-1} \cdot (Z_A f_A + V_B f_B) & \text{con probabilità } q_A p_B; \\ M_{n-1} \cdot (V_A f_A + Z_B f_B) & \text{con probabilità } p_A q_B; \\ M_{n-1} \cdot (Z_A f_A + Z_B f_B) & \text{con probabilità } q_A q_B. \end{cases}$$

Il seguente codice MATLAB mette a confronto i due andamenti sopra descritti nello scenario (i) illustrato precedentemente. In particolare `X` rappresenta l'evoluzione del capitale avendo investito le frazioni `fA1` e `fB1` del patrimonio nei due titoli, dove `fA1` e `fB1` sono i valori ottimali ottenuti in precedenza tramite la funzione `fmincon`. Il vettore `Y` rappresenta l'evoluzione del capitale avendo investito le frazioni non ottimali `fA2` e `fB2` del patrimonio nei due titoli. In entrambe le situazioni assumiamo che il capitale iniziale sia lo stesso (`X(1)=Y(1)=1`) ed osserviamo l'evoluzione di entrambi i capitali per $N = 90$ periodi (pensando ad un periodo come un giorno, $N = 90$ corrisponderebbe a considerare un tempo complessivo di tre mesi). Supponiamo infine che entrambi gli investitori stimino le stesse probabilità `pA` e `pB` di crescita dei due titoli e gli stessi fattori di crescita e descrescita, ovvero `ZA`, `VA`, `ZB`, `VB`. Di seguito forniamo il codice MATLAB per la simulazione.

```
%Fissiamo i parametri del titolo A:
pA=0.4;
VA=1.18;
ZA=0.93;

%Fissiamo i parametri del titolo B:
pB=0.4;
VB=1.14;
ZB=0.96;

%Fissiamo il numero di periodi considerati:
N=90;

%Inizializziamo le due dinamiche:
X=zeros(1,N+1);
Y=zeros(1,N+1);

%Definiamo le condizioni iniziali dei due capitali:
```

```
X(1)=1;
Y(1)=1;

%Impostiamo le frazioni ottimali:
fA1=0.25;
fB1=0.75;

%Impostiamo le frazioni non ottimali:
fA2=0.75;
fB2=0.25;

%Implementiamo la dinamica:
for t=2:N+1
    x=rand(1);
    y=rand(1);
    if x<=pA && y<=pB
        X(t)=X(t-1)*(VA*fA1+VB*fB1);
        Y(t)=Y(t-1)*(VA*fA2+VB*fB2);
    end
    if x>pA && y<= pB
        X(t)=X(t-1)*(ZA*fA1+VB*fB1);
        Y(t)=Y(t-1)*(ZA*fA2+VB*fB2);
    end
    if x<=pA && y> pB
        X(t)=X(t-1)*(VA*fA1+ZB*fB1);
        Y(t)=Y(t-1)*(VA*fA2+ZB*fB2);
    end
    if x>pA && y> pB
```

```
        X(t)=X(t-1)*(ZA*fA1+ZB*fB1);
        Y(t)=Y(t-1)*(ZA*fA2+ZB*fB2);
    end
end

%Rappresentiamo le evoluzioni dei due capitali:
plot(X,'r')
hold on
plot(Y,'b')
```

L'output del codice è fornito dalla Figura 3.1: la curva in rosso rappresenta l'evoluzione del capitale `X`, mentre la curva blu rappresenta l'evoluzione del patrimonio `Y`. Notiamo che, essendo `X` il capitale ottenuto nei vari periodi investendo le frazioni ottimali `fA1` e `fB1`, esso ha una crescita nettamente superiore nel lungo periodo rispetto al patrimonio `Y` ottenuto nei vari periodi investendo le frazioni non ottimali `fA2` e `fB2`, a conferma della teoria predetta da Kelly.

Fig. 3.1

Conclusioni

L'intento della tesi è orientato a fornire una visione razionale e ottimale di un investitore in merito al contesto delle scommesse tramite un approccio probabilistico. Le strategie di investimento precedentemente illustrate mostrano come un investitore possa definire il quantitativo da scommettere in base alla tipologia di scommessa.
Si è dimostrato come, nella ripetizione di un gioco favorevole, per un investitore non sia consigliabile, ma altresí rischioso, impiegare l'intero capitale in un'opportunità di scommessa. Risulta infatti più ragionevole applicare il Criterio di Kelly, ovvero scommettere una specifica frazione del capitale in modo da proteggersi dall'eventuale perdita di qualche round e massimizzare il capitale nel lungo periodo.
Nel contesto di giochi sfavorevoli invece risulta più utile procedere con altre strategie, come ad esempio il sistema martingala. Ricordiamo che in questo sistema di gioco, in ogni turno l'investitore deve raddoppiare l'ammontare da puntare rispetto al round precedente fintanto che il round risulta perdente, mentre si fermerà al primo round vincente.
Le applicazioni illustrate nel secondo capitolo dell'elaborato descrivono due casistiche relative ai due sistemi di gioco.
La prima simulazione fa riferimento a due possibili scenari per il capitale di un giocatore nella roulette europea nel caso in cui si usi il sistema martingala come strategia di scommessa. Viene in particolare mostrato come l'esito della proce-

dura possa risultare fallimentare, anche se con probabilità bassa visto il carattere poco sfavorevole della scommessa. In particolar modo è stato sottolineato come il sistema martingala, nel caso in cui porti a successo, dia un guadagno abbastanza limitato rispetto a ciò che è stato investito nei vari round, rendendo il metodo poco spesse volte inadatto per ottenere guadagni rilevanti.
La seconda simulazione invece ha il fine di comprendere al meglio il criterio di Kelly. Abbiamo infatti sottolineato come la scelta di una frazione associata ad un tasso di crescita asintotico positivo del capitale porti ad un guadagno con un trend esponenzialmente crescente nel numero di round. Tale crescita è ottimizzata scegliendo la frazione predetta dal criterio di Kelly. Inoltre abbiamo evidenziato come invece la scelta di una frazione associata ad un tasso di crescita asintotico negativo del capitale porti alla rovina del giocatore.
Infine, si è mostrato come estendere il metodo di Kelly nel caso di più scommesse simultanee, dove almeno una di esse risulta essere favorevole, con applicazione diretta al mercato finanziario. Si è dimostrato, come anche in questo contesto, si possa trovare una distribuzione del capitale da investire sui vari titoli che massimizzi il profitto asintotico.

Ci aspettiamo che, dopo la lettura dell'elaborato, il lettore sia in possesso delle nozioni fondamentali per poter decidere una strategia più razionale e ottimale a cui affidarsi per massimizzare il profitto nelle varie scommesse.

Appendice

In questa appendice sono riportati risultati di base utilizzati nella trattazione della tesi.

Proposizione A.1 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dati $a, b \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \,.$$

Proposizione A.2 (Legge delle aspettazioni iterate)**.** *Siano X, Y due variabili aleatorie congiuntamente distribuite. Allora*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X] \,.$$

Proposizione A.3 (Legge dei grandi numeri)**.** *Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna con media finita μ. Allora*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mu\right) = 1 \,,$$

o equivalentemente, quasi certamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu \,.$$

Proposizione A.4 (Teorema del Limite Centrale)**.** *Siano $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media $\mu < \infty$ e varianza $\sigma^2 < \infty$. Definita $S_n = \sum i = 1^n X_i$ e $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ la sua normalizzazione, si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$*

$$F_{Z_n}(t) := \mathbb{P}(Z_n \leq t) \xrightarrow{q.c.} \mathbb{P}(Z \leq t) \quad \textit{per } n \to \infty \,,$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. *Equivalentemente* Z_n *converge in distribuzione a* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *per* $n \to \infty$.

Proposizione A.5 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme compatto (ovvero chiuso e limitato). Allora* f *ammette un minimo e un massimo globale in* D.

Bibliografia

[1] L. Bachelier, *Calcul des probabilités*, Calcul des probabilités, no. v. 1, Gauthier-Villars, 1912.

[2] S. N. Ethier, *The doctrine of chances: Probabilistic aspects of gambling*, Probability and Its Applications, Springer, Berlin and Heidelberg, 2010.

[3] P. A. Griffin, *The theory of blackjack*, Huntington Press, Las Vegas, Revised 1993.

[4] J. L. Kelly JR., *A new interpretation of information rate*, ch. 3, pp. 25–34, 2011 (original version in 1956).

[5] C. Kempton, *Horse play, optimal wagers and the kelly criterion*, 2011.

[6] D. G. Luenberger, *Investment science*, Oxford University Press, 2014.

[7] L.C. Maclean, W.T. Ziemba, and E.O. Thorp, *Kelly capital growth investment criterion, the: Theory and practice*, World Scientific Handbook In Financial Economics Series, World Scientific Publishing Company, 2011.

[8] P. Marek, T. Toupal, and F. Vavra, *Efficient distribution of investment capital*, 2016.

[9] U. Matej, S. Gustav, H. Ondrej, and Z. Filip, *Optimal sports betting strategies in practice: an experimental review*, IMA Journal of Management Mathematics **32** (2021), no. 4, 465–489.

[10] W. Poundstone, *Fortune's formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and wall street*, Farrar, Straus and Giroux, 2010.

[11] L. M. Rotando and E. O. Thorp, *The kelly criterion and the stock market*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 10, 922–931.

[12] E. O. Thorp, *Optimal gambling systems for favorable games*, Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute **37** (1969), no. 3, 273–293.

[13] E. O. Thorp, *The kelly criterion in blackjack sports betting, and the stock market*, Chapter 54 in *The Kelly Capital Growth Investment Criterion Theory and Practice*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011, pp. 789–832.

[14] A. Tushia, *Optimal betting using the kelly criterion*, 2014.