LUISS

Dipartimento di Impresa e Management

Cattedra di Matematica Finanziaria

L'immunizzazione finanziaria del portafoglio: Asset Liability Management nelle imprese di assicurazione

Prof. Marilena Sibillo

RELATORE

Ilaria Sorbino Matr. 255301

CANDIDATO

Anno accademico 2022/2023

Alla mia splendida famiglia

Indice:

Introduzione:

A partire dagli anni Settanta del secolo scorso, in particolar modo a seguito delle crisi economiche che hanno caratterizzato gli ultimi decenni, si è assistito ad una crescente complessità del comportamento dei mercati finanziari. Tale situazione ha reso necessaria la gestione di fattori di rischio alcuni dei quali, fino ad allora, completamente trascurati. In un mercato sempre più volatile e incerto infatti, molti intermediari finanziari si sono ritrovati, come ha mostrato la storia nel corso del tempo, a dover fronteggiare situazioni di insolvenza e molto spesso di fallimento. In questo contesto, appaiono fondamentali le teorie di immunizzazione finanziaria in quanto strumenti in grado di ridurre e persino annullare le componenti di rischio presenti nel mercato. Tra i rischi che verranno analizzati nel corso di questo studio, si citano, ad esempio, il rischio di tasso di interesse, il rischio di cambio, il rischio di credito o quello di liquidità. All'interno di questo lavoro di tesi verranno analizzate alcune tecniche di immunizzazione finanziaria ed in particolare si farà riferimento al rischio di tasso di interesse. I tassi di interesse infatti, essendo, tra le altre cose, un importante strumento di politica monetaria, come evidenziano anche i recenti accadimenti, è soggetto a forte volatilità e per questo può impattare in maniera significativa sul valore delle operazioni finanziarie.

In questo studio, verrà analizzata una specifica categoria di intermediari finanziari, quella delle imprese di assicurazione. Esse infatti, per il tipo di attività svolta e di servizio offerto, hanno come obbiettivo primario quello di preservare il valore delle proprie attività così da avere la certezza di essere solvibili nei confronti degli assicurati. La tutela di questi ultimi e del loro credito è infatti di cruciale importanza nello svolgimento dell'attività assicurativa ed è per questo oggetto di numerose norme anche in tema di vigilanza. Per capire in che modo tali imprese possono coprirsi dal rischio di tasso, verranno analizzate dapprima le tecniche di *Asset Liability Management* e, in particolare, i modelli di *gap management,* i modelli basati sull'uso della *duration* ed infine i modelli dinamici di simulazione. Dopo aver esposto il funzionamento e gli eventuali limiti di tali modelli, verrà offerta un'applicazione pratica dei modelli di ALM basati sull'uso della *duration* tramite la creazione *ad hoc* di due portafogli, uno attivo ed uno passivo. Infine, si mostrerà in che modo anche gli strumenti derivati possono essere utilizzati da un'impresa assicurativa a copertura del rischio di tasso. Nello specifico verranno utilizzati *future,* opzioni e *swap.* Nelle appendici A e B verrà esposta la teoria, comprensiva di dimostrazioni matematiche, sottostante agli argomenti trattati. Si affronteranno infatti i concetti di *duration, volatilty* e *convexity* per poi esporre il teorema di Fisher e Weil e quello di Redington.

CAPITOLO I

L'ALM nelle imprese di assicurazione

1. La gestione del rischio nelle imprese di assicurazione

All'interno di questo capitolo, si analizzeranno le tecniche di *Asset Liability Management* (ALM) volte alla gestione del rischio di tasso da parte delle imprese assicuratrici. A tal fine si chiarirà dapprima il funzionamento dell'attività di tali imprese per poi passare in rassegna le diverse tipologie di rischio a cui esse sono esposte. In seguito, si definiranno le condizioni storiche che hanno reso necessaria l'introduzione delle tecniche di ALM facendo riferimento alla situazione economica degli Stati Uniti alla fine degli anni Settanta. Dopo aver fornito un'attenta definizione di tali tecniche, si effettuerà una doppia distinzione. La prima vedrà contrapporsi tecniche statiche e tecniche dinamiche mentre la seconda prevede una suddivisione tra modelli di *gap management*, modelli basati sull'uso della *duration* e infine modelli dinamici di simulazione. Di ognuno di tali modelli verranno analizzati i vantaggi e gli eventuali limiti applicativi.

1.1 L'attività delle imprese di assicurazione

Prima di analizzare i metodi utilizzati dalle imprese di assicurazione per proteggere i propri portafogli, bisogna chiarire il ruolo di questo intermediario e il funzionamento di questa tipologia di attività.

Un contratto di assicurazione è un contratto tra due parti a seguito del quale l'assicurato corrisponde un premio unico o periodico all'assicuratore che si obbliga, in cambio, a pagare un determinato capitale al verificarsi di un evento prestabilito. Nel caso specifico delle imprese di assicurazione sulla vita, il rischio che grava sull'assicuratore dipende dalla durata della vita dell'assicurato ed è sulla base di tale rischio, attraverso specifiche tavole di mortalità, che si determina il premio che verrà corrisposto all'impresa. Questa parte di premio è denominata "premio di rischio". Sulla base del tasso di rendimento che l'assicuratore si aspetta di ricavare dall'investimento del premio corrisposto dall'assicurato, si determina un'altra parte del premio, detta "premio di risparmio". Il premio di risparmio assieme al premio di rischio determina il premio puro.

L'assicuratore riconosce sulle somme versate dall'assicurato un rendimento minimo garantito sulla base di un tasso di interesse che deve però essere minore dei tassi correnti di mercato e che, una volta definito, rimane invariato per tutta la durata del contratto. A tal proposito l'ISVAP (Istituto per la Vigilanza sulle Assicurazioni Private) stabilisce che, nella stipula dei contratto di assicurazione, il tasso di interesse corrisposto non può superare il 60% del tasso medio dei prestiti obbligazionari dello Stato (d.lgs. 145/1995) al fine di agevolare l'impresa nell'adempimento delle proprie obbligazioni nel caso di una discesa dei tassi di interesse. I relativi provvedimenti dell'Isvap sono il n.79/1995 e il n. 1036 del 1998 (I. Bozzano 2001, Quaderno Isvap n.12).

Il suddetto decreto legislativo, viene dunque reso necessario dall'esistenza di un rischio posto in capo all'assicuratore, vale a dire il rischio che l'impresa, negli anni successivi alla stipulazione del contratto, non riesca a realizzare, tramite investimenti nel mercato dei capitali, rendimenti necessari a coprire quelli minimi garantiti. A tal proposito, nel seguente capitolo verranno analizzati nel dettaglio i rischi connessi all'attività assicurativa.

1.2 Suddivisione dei rischi delle imprese assicuratrici

L'attività assicurativa comporta in primo luogo una tipologia di rischio, detto rischio tecnico, che è quello normalmente collegato a questo tipo imprese. Tra questi, ad esempio, il rischio di sovrasinistralità, di sottotariffazione e di insufficienza delle riserve tecniche (E. Bellizzi 1999, Quaderno Isvap n.6). Tuttavia, ciò che è più rilevante ai fini di questa analisi, è l'esistenza di una seconda tipologia di rischio, vale a dire quello legato all'attività finanziaria. Come accennato precedentemente infatti, le imprese assicuratrici investono sul mercato dei capitali i premi corrisposti dagli assicurati aspettandosi un rendimento almeno pari a quello garantito. È evidente, dunque, che sotto questo profilo le imprese assicuratrici, al pari di un qualunque intermediario finanziario, sono esposte a tutti i rischi connessi alla variabilità delle condizioni dei mercati e quindi alla possibilità che i rendimenti conseguiti ex-post siano diversi-inferiori a quelli attesi all'atto della stipula della polizza assicurativa.

Di seguito, una suddivisione del rischio derivante da attività assicurativa in quattro macroclassi proposta da D.Babbel e A. Santomero nel 1999 (I. Bozzano 2001):

1. Rischio attuariale: tale rischio consiste nella possibilità che avvengano modifiche nei fattori demografici o finanziari attuariali utilizzati per

determinare il premio puro. In altre parole deriva dall'inadeguatezza delle assunzioni circa le probabilità degli eventi sinistrosi e del tasso tecnico utilizzato nel calcolo del premio.

2. Rischio di mercato: questo tipo di rischio, come anticipato precedentemente si riferisce alla probabilità che, a causa di variazioni delle condizioni del mercato. In generale, si riportano cinque categorie principali di rischio di mercato identificate da Sironi nel 1995: (E.Bellizzi 1999)
    - Rischio di tasso di interesse: tale rischio si manifesta quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile alle variazioni dei tassi di interesse.
    - Rischio di cambio: quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazioni dei tassi di cambio.
    - Rischio azionario: : quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile all'andamento dei mercati azionari.
    - Rischio merci: quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile alle variazioni dei prezzi delle *commodities*.
    - Rischio di volatilità: quando il valore di mercato delle posizioni assunte è sensibile a variazioni della volatilità di una delle variabili sopra considerate.
3. Rischio di credito: questo rischio è difficilmente eliminabile e consiste nel rischio di insolvenza da parte del debitore, cioè il rischio che egli possa non essere in grado di adempiere alle proprie obbligazioni.
4. Rischio di liquidità: tale rischio consiste nella possibilità che l'impresa non riesca a trasformare gli investimenti in liquidità in un tempo ragionevole senza che questa subisca delle perdite.

Ai fini di questo studio, tra le macroclassi appena menzionate, quella che rileva maggiormente è la macroclasse del rischio di mercato. Quest'ultima, in particolar modo, ha raggiunto col passare del tempo un'importanza sempre maggiore nell'area del *risk management* ed è proprio la gestione di questo rischio che sarà l'argomento principale dei prossimi paragrafi.

1.3 Origini e definizione dell'ALM

Fino agli anni Settanta, le imprese di assicurazione non hanno risentito del rischio di mercato visto l'andamento piuttosto stabile dei tassi. Tuttavia, a partire dalla fine degli anni Settanta, la maggiore volatilità delle condizioni di mercato ha reso necessaria l'introduzione di sistemi volti alla sua gestione.

Durante quegli anni infatti, negli Stati Uniti si è assistito ad un aumento dell'inflazione che ha provocato un'impennata dei tassi di interesse e della loro volatilità. In risposta a questa situazione, i risparmiatori cominciarono a cercare investimenti con rendimenti superiori all'inflazione e, in particolar modo, questi cominciarono a prendere in prestito capitali dalle proprie polizze assicurative per poterli investire in investimenti con rendimenti maggiori. Per stare al passo con l'inflazione, gli assicuratori progettarono allora nuovi prodotti sensibili ai tassi di interesse esponendosi così ad un alto rischio di credito e, senza considerare l'allineamento tra attivo e passivo, portarono nel 1987 al fallimento di 19 imprese assicuratrici statunitensi.

Un secondo fattore che ha portato alla nascita di un nuovo sistema di gestione del rischio è dipeso dalla mancata considerazione delle *embedded options* nella determinazione dei premi e dei contratti assicurativi. Le *embedded options* previste dai contratti assicurativi sono delle opzioni che conferiscono agli assicurati diverse opportunità, tra cui l'opzione di liquidazione e quella di riscatto, in base alle quali l' assicurato può decidere rispettivamente la forma di pagamento preferita oppure può chiedere la risoluzione anticipata del contratto cessando quindi di versare i premi. Finché le condizioni di mercato si sono mantenute stabili, gli assicuratori hanno potuto evitare di considerare tali opzioni vista la scarsa attrattiva che queste esercitavano sui risparmiatori. Tuttavia, a seguito dell'aumento della volatilità dei tassi di interesse, gli assicurati cominciarono a esercitare sempre più spesso le *embedded options* ed in particolar modo quando i tassi di mercato aumentavano, così da poter sfruttare le migliori opportunità di rendimento. Problemi si verificavano anche nel caso opposto di discesa dei tassi, poiché le imprese assicuratrici detenevano in portafoglio prodotti che assicuravano alla scadenza un rendimento maggiore di quello che poteva ottenersi sul mercato finanziario. Per fronteggiare tale situazione, le imprese di assicurazione cominciarono a porre maggiore attenzione alla costruzione dei propri portafogli, in particolare aumentando la quota delle attività a copertura delle passività. La comprensione delle problematiche che riguardavano questo tipo di attività, portò in quegli stessi anni allo sviluppo delle tecniche di *Asset Liability Management* (ALM).

L'espressione "*Asset Liability Management*" può essere tradotta letteralmente come "gestione integrata attivo passivo" e anche se, visti i suoi innumerevoli campi di applicazione, non ha una definizione univoca, ai fini di questa analisi possiamo riportarne una proveniente dalla Society of Actuaries in base alla quale: *"l'ALM consiste nella gestione di un'attività in modo tale che le decisioni riguardanti l'attivo e il passivo siano coordinate: può essere definita come il processo continuo di formulare, implementare, monitorare e rivedere le strategie relative alle attività e alle passività nel tentativo di raggiungere obiettivi finanziari per un dato insieme di tolleranze al rischio e restrizioni"* (I.

Bozzano 2001). In base alla capacità dell'impresa di poter effettuare previsioni attendibili sull'andamento futuro dei tassi di interesse, l'ALM può essere finalizzato alla persecuzione di due obiettivi tra loro contrapposti. Nel caso in cui l'impresa di assicurazioni abbia suddetta capacità, allora l'obiettivo sarà quello di massimizzare il margine di interesse (differenza tra interessi attivi e interessi passivi) gestendo proficuamente lo sbilanciamento tra attività e passività. In linea generale, in previsione di un rialzo nei tassi si preferirà investire a breve termine mentre nel caso opposto di diminuzione dei tassi si sceglierà di investire a lungo termine. Al contrario, se l'impresa di assicurazioni non è in grado di formulare ipotesi sull'andamento futuro dei tassi, procederà alla minimizzazione del rischio di mercato attraverso il bilanciamento tra attività e passività ma non riuscirà ad immunizzare il margine di interesse così come avveniva nel caso precedente. In questo secondo caso, in teoria, l'impresa dovrebbe essere in grado di eliminare il rischio di mercato mediante un perfetto allineamento tra attività e passività i cui flussi finanziari sono identici. Praticamente questa situazione si otterrebbe se un impresa di assicurazione acquistasse un portafoglio di BTP con scadenza nei giorni esatti in cui deve fare fronte alle obbligazioni assunte (A. Silvestri 2008). Nei fatti, questa tecnica è inattuabile vista l'impossibilità di conoscere con certezza il momento in cui le passività si presenteranno. Specialmente con riferimento al ramo assicurativo infatti, non vi è alcuna certezza riguardo la struttura dei flussi finanziari futuri giacché gli assicurati possono in qualsiasi momento esercitare le opzioni di smobilizzo a loro disposizione. Inoltre, la variazione di fattori esogeni, tra cui il tasso di mortalità, contribuisce a creare incertezza su scadenze e entità dei pagamenti futuri da effettuare.

Proprio in base alle svariate difficoltà applicative appena menzionate, la dottrina è concorde nel ritenere che l'ALM non sia un sistema finalizzato ad immunizzare la compagnia dai rischi di tasso tramite il perfetto allineamento tra attività e passività ma sia piuttosto un insieme di tecniche sviluppate per misurare il grado di disallineamento e per poterlo gestire proficuamente (I. Bozzano 2001).

1.4 Tecniche di ALM

Fino ad ora, si è evidenziata l'importanza di gestire il rischio di tasso per le compagnie assicurative e di come questo sia l'obbiettivo principale dell'ALM. Da questo momento in poi, verranno trattati attentamente i modelli e le tecniche di ALM elaborati per la misurazione e la gestione del rischio in oggetto. A tal fine, si opera una distinzione tra i vari modelli che si dividono in statici e dinamici.

Nelle tecniche statiche i modelli valutano eventuali sbilanci tra le attività e le passività in portafoglio e sono validi per orizzonti temporali molto brevi in quanto non si preoccupano di integrare in modo dettagliato le previsioni sull'impatto di possibili azioni future (A. Silvestri 2008). I modelli statici vengono utilizzati prevalentemente nelle scelte di ristrutturazione del portafoglio da effettuare immediatamente ed hanno il vantaggio della semplicità nell'applicazione. Quando però sono necessarie indicazioni operative sul lungo periodo e nel caso di fluttuazioni dei tassi è fondamentale che essi vengano integrati con i modelli dinamici.

Nelle tecniche dinamiche i modelli, a differenza di quelli statici, misurano il grado di sensitività dei portafogli al variare delle variabili finanziarie (E. Bellizzi, 1999) e di conseguenza sono utili per fornire indicazioni sulle finalità da perseguire. Tali finalità possono essere individuate nel preservare un determinato valore dell'impresa, quale ad esempio la conservazione di un *surplus*, per un periodo di tempo superiore rispetto a quello a cui mirano le tecniche statiche oppure nel conseguimento di obiettivi di redditività prefissati.

I modelli di ALM possono essere suddivisi anche in base ad un secondo criterio che consiste nella scelta della variabile utilizzata per rilevare il rischio di tasso. A tal proposito si distinguono tre tipologie di modelli, quelli di *gap management,* quelli basati sull'uso della *duration* ed infine i modelli dinamici di simulazione.

1.4.1 I modelli di *gap management*

I modelli di *gap management* hanno la finalità di indagare sulla sensibilità del margine di interesse alle variazioni dei tassi di interesse. Nel corso del tempo, ad un modello base sono susseguite versioni più complesse quali il modello del gap incrementale e del gap standardizzato. Facendo riferimento al modello base, si procede innanzitutto a riclassificare le voci di bilancio e quelle fuori bilancio sulla base della sensibilità evidenziata dalle poste attive e passive al variare dei tassi di mercato in un determinato intervallo temporale chiamato *gapping period.* Precisamente, le poste sensibili sono quelle che risultano in scadenza nel suddetto arco temporale e quelle che sono soggette a revisione contrattuale o indicizzazione delle condizioni di tasso. Le poste attive sensibili sono chiamate RSA *(Rate Sensitive Assets)* mentre quelle passive RSL *(Rate Sensitive Liability).* La differenza tra le due poste sensibili è definita GAP:

$$GAP = RSA - RSL$$

In questo caso, per capire in che modo le variazioni dei tassi influenzano il margine di interesse, bisogna osservare la consistenza delle poste attive sensibili e stabilire se queste sono maggiori, minori o uguali di quelle passive.

- $RSA > RSL$→ Nel caso di gap positivo, l'impresa è definita *asset sensitive* ed è quindi più sensibile alle variazioni di tasso dal lato dell'attivo. In questa situazione, lo scenario più conveniente è quello di rialzo dei tassi poiché in tal caso la ridefinizione dei tassi interni si effettua su un volume di attività maggiore di quello delle passività e dunque l'effetto positivo supera quello negativo portando ad un incremento nel margine di interesse. Viceversa, nel caso di una diminuzione dei tassi, questa situazione si rivelerebbe svantaggiosa poiché anche qui, la ridefinizione dei tassi interni si effettua su un volume di attività più ampio delle passività ma in modo negativo, portando ad un decremento del margine di interesse.
- $RSA < RSL$→ In caso di gap negativo, l'impresa è definita *liability sensitive* ed è quindi più sensibile alle variazioni di tasso dal lato del passivo. Al contrario del caso precedente, in questa situazione è conveniente un ribasso dei tassi di interesse poiché in tal caso si riprezzerebbero a tassi inferiori più poste attive che passive con il risultato di un margine di interesse positivo mentre in caso di rialzo dei tassi, viceversa, si avrà un margine negativo.
- $RSA = RSL$→ Nel caso di un gap nullo, il margine di interesse non dovrebbe subire variazioni poiché qualsiasi mutamento nei tassi di mercato dovrebbe in linea teorica avere lo stesso impatto sul riprezzamento dei tassi sia dal lato dell'attivo che da quello del passivo.

L'impresa di assicurazione, a seconda della propria strategia e della propria propensione al rischio, sceglierà in quale direzione orientarsi e cioè se perseguire una strategia di immunizzazione dal rischio di tasso, e in tal caso cercherà di ottenere un valore nullo del gap, oppure utilizzare una strategia attiva sfruttando i mutamenti di tasso per aumentare il proprio margine. In questo secondo caso in particolare l'impresa cercherà di avere un gap positivo in caso di previsione di rialzo dei tassi, viceversa in previsione di un ribasso dei tassi si collocherà in una posizione *liability sensitive.*

Il motivo per cui al modello base di *gap management* ne siano subentrati altri, sta nella sua eccessiva semplicità e nel fatto che questo non prenda in considerazione il lungo periodo. La possibilità di un'inversione di tendenza nelle variazioni dei tassi previste infatti, potrebbe vanificare o danneggiare le strategie pianificate. In particolare, il modello base del gap, partendo dall'assunto che la variazione dei tassi di mercato si manifesti allo stesso modo e nello stesso istante su attività e passività, non considera debitamente i differenti tempi nei quali le attività e le passività sensibili assorbono le modifiche di tasso. Alla luce di tale ultimo aspetto, le situazioni di gap positivo, negativo e nullo precedentemente analizzate finiscono col perdere la loro validità assoluta. Non è detto, dunque, che in caso di rialzo dei tassi, una posizione *asset sensitive* porti ad un aumento del margine di interesse poiché se le passività assorbono il cambiamento dei tassi prima delle attività tale situazione non si verificherà. Allo stesso modo, in previsione di un ribasso dei tassi, non per forza aumenterà il margine se si detiene una posizione *liability sensitive.* Parimenti, non ci si può ritenere immunizzati dal rischio di tasso in caso di gap nullo poiché, anche in questo caso, l'immunizzazione dipende dall'istante di assorbimento del cambiamento delle attività e delle passività. Per ovviare ai limiti del modello base di gap management, come anticipato precedentemente, sono stati sviluppati ulteriori due modelli, quello del gap incrementale e quello del gap standardizzato.

Nel modello del gap incrementale, al fine di tenere in debita considerazione l'istante in cui le attività e le passività assorbono i cambiamenti di tasso, il *gapping period* viene suddiviso in sotto periodi, detti *maturity buckets*, per ciascuno dei quali vengono calcolati dei gap separati. La lunghezza dei *maturity buckets* può essere scelta arbitrariamente e chiaramente più questi vengono ridotti e meno si rischierà di effettuare degli errori nel grado di misurazione del rischio di tasso. Anche questo modello presenta vari limiti legati al fatto che l'associazione dei gap a dei periodi molto ristretti può risultare difficoltosa e costosa al punto da non rendere possibile la minimizzazione degli errori senza cadere in onerosità rilevanti. Alla luce di questo primo limite, un secondo limite è rappresentato dall'arbitrarietà nella scelta dell'ampiezza dei *maturity buckets*. Non potendo infatti scegliere degli intervalli temporali abbastanza piccoli da minimizzare gli errori, si dovrà cercare di sceglierli arbitrariamente in modo da mediare tra i vantaggi in termini di precisione apportati dall'abbreviazione dei *maturity buckets* e i costi aggiuntivi richiesti per farlo.

Il modello del gap standardizzato nasce invece per superare un altro problema presente nei precedenti due, e cioè quello di presumere che la variazione dei tassi di mercato si trasferisca per intero sulle attività e passività sensibili. Non è detto infatti che i tassi utilizzati per il riprezzamento delle poste attive e passive cambino allo stesso modo di quelli di mercato, potrebbero subire variazioni inferiori o superiori a quelle dei tassi esterni e i modelli precedenti non considerano questo aspetto. Per questo motivo, nel modello del gap standardizzato vengono calcolati dei "coefficienti beta" che misurano la volatilità dei tassi di attività e passività sensibili rispetto a quella dei tassi di mercato. Dopo aver calcolato tali coefficienti, questi vengono moltiplicati per le RSA e le RSL giungendo così ad una misura del gap definita standardizzata.

Anche questo terzo modello presenta dei limiti che sono principalmente legati alla necessità di sottoporre i coefficienti beta ad una stima periodica così da adeguarli ai movimenti nella struttura dei tassi.

Dall'analisi svolta fino a questo momento, si è potuto comprendere come i modelli di gap management, nonostante i miglioramenti apportati dai modelli del gap incrementale e standardizzato, presentino comunque ancora dei limiti per cui prima di scegliere di utilizzarli bisogna fare un'attenta ponderazione dei vantaggi e svantaggi connessi al loro utilizzo.

1.4.2 I modelli basati sull'uso della *duration*

A differenza dei modelli di gap management che analizzano gli effetti del variare dei tassi sul margine di interesse di un'impresa di assicurazione, i modelli che si basano sull'uso della *duration* misurano la variabilità del valore di mercato del patrimonio netto di un intermediario per determinati mutamenti nella struttura dei tassi di interesse. Il valore del patrimonio netto è dato dalla differenza tra il valore di mercato delle attività e quello delle passività e, poiché tali valori sono determinati in base ai tassi di mercato, allora il valore del patrimonio netto è esposto al rischio di mercato quando il valore di mercato delle attività muta in maniera differente rispetto a quello delle passività (A. Silvestri 2008). Per conoscere il valore del patrimonio netto dunque bisogna calcolare a tassi correnti i valori attuali dei *cash flows* che compongono le attività e le passività. Chiaramente, vista la relazione inversa tra tassi di interesse e valori attuali, al crescere di uno il valore di attività e passività diminuirà e viceversa. Per determinare l'incidenza delle variazioni di tasso sul valore di mercato di attività e passività vanno quantificati valori e i tempi con cui le suddette variazioni impattano su ciascuna attività e passività presente in bilancio fino a scadenza delle stesse. A tal proposito viene utilizzato un indice sintetico di durata, la *duration* di Macaulay. Tale indice, che può essere interpretato come misura della vita media di un investimento, è anche indicatore della volatilità del prezzo di un titolo rispetto alle variazione del tasso di interesse (cfr. Appendice A). Sulla base di questo indicatore, verranno quindi esaminate tre strategie finalizzate alla limitazione, immunizzazione o gestione attiva del rischio di tasso: il modello di *Duration Gap Modeling* (DGAP), l'immunizzazione standard e l'immunizzazione *key rate*.

Il primo passo per l'applicazione del modello di DGAP è conoscere le variazioni di prezzo delle attività e passività di un'impresa di assicurazione. A tal fine, se ne considera lo stato patrimoniale alla stregua di un portafoglio attivo/passivo e si calcola la *duration* delle singole operazioni finanziarie. In seguito, considerando il peso di ciascuna operazione attiva o passiva sul totale rispettivamente di attività e passività detenute, si procede alla determinazione delle *duration* medie delle due poste. Come anticipato precedentemente, il valore del patrimonio netto è dato dalla differenza (gap) tra il valore di mercato delle attività e quello delle passività, e dunque si distinguono i tre casi in cui il gap è maggiore, minore o uguale a zero.

- $GAP = 0$→ nel caso di gap nullo, la *duration* dell'attivo coincide con quella del passivo e dunque l'intermediario può considerarsi immunizzato dal rischio di tasso visto che qualunque variazione dei tassi avrà effetto in egual misura sulle attività e sulle passività, in modo tale da mantenere costante il valore del patrimonio netto. Volendo esemplificare, se la *duration* di attività e passività fosse per entrambe uguale a 10, un aumento dello 0,5% nei tassi di interesse comporterebbe una diminuzione del 5% del valore di entrambe le poste, lasciando invariato il valore del patrimonio netto. Il primo a discutere di immunizzazione finanziaria fu F.M. Redington nel 1952 (cfr. Appendice A).

- $GAP > 0$→ nel caso di gap positivo, la *duration* dell'attivo è più lunga di quella del passivo e quindi un aumento dei tassi di interesse comporterebbe una diminuzione del valore di mercato delle attività maggiore di quello delle passività determinando una diminuzione nel patrimonio netto. Al contrario, il ribasso dei tassi di interesse porterebbe ad un aumento nel patrimonio netto.
- $GAP < 0$→ nel caso di gap negativo, la *duration* dell'attivo è più corta di quella del passivo e quindi all'opposto di come accadeva nel caso precedente, un aumento dei tassi di interesse provocherebbe una diminuzione del valore di mercato delle passività maggiore di quella delle attività con un incremento del valore del patrimonio netto. Viceversa, nel caso di una riduzione dei tassi si avrebbe una riduzione nel patrimonio netto.

Se l'impresa di assicurazione volesse perseguire una strategia in base alle proprie aspettative sull'andamento dei tassi, appare chiaro che in previsione di un loro aumento questa dovrà cercare di ridurre la *duration* media dell'attivo e ampliare quella del passivo. In questo modo l'attivo assorbirà il vantaggio delle nuove condizioni più velocemente mentre il passivo si comporterà all'opposto. Nel caso opposto di diminuzione dei tassi invece l'impresa cercherà di aumentare la *duration* media dell'attivo e diminuire quella del passivo. Tuttavia, nel caso in cui si voglia condurre una gestione attiva del portafoglio sfruttando il disallineamento tra le *duration* delle due poste, bisogna che ricorrano due condizioni. La prima condizione prevede che l'impresa sia in grado di formulare previsioni attendibili sull'andamento futuro dei tassi per cui dovrà disporre di informazioni riguardanti l’ampiezza e il *timing* delle variazioni future. La seconda condizione che deve ricorrere per condurre una strategia attiva di gestione è la possibilità di avere un’ampia discrezionalità nella revisione della struttura dell’attivo e del passivo. In relazione a quest’ultimo punto, bisogna tenere in considerazione il fatto che le imprese di assicurazione non hanno un grande spazio di manovra sia per quanto riguarda le modifiche sull’attivo che, e soprattutto, per le modifiche sul passivo. Le operazioni sull’attivo sono prevalentemente limitate dalla regolamentazione fissata in materia di investimenti ammessi a copertura delle riserve tecniche (accantonamento effettuato da un’impresa assicurativa allo scopo di affrontare gli impegni che prende nei confronti di un assicurando) e dal basso grado di liquidabilità di alcune classi di valori mobiliari. Va però tenuto conto, a tal proposito, delle nuove direttive di “terza generazione” che hanno ampliato la possibilità di intervento sull’attivo sia tramite l’aumento della gamma di attività ammesse a copertura delle riserve tecniche, sia tramite la possibilità di utilizzare gli strumenti derivati a copertura del rischio di tasso. Di tale argomento si parlerà ampiamente nel corso del terzo capitolo.

Per quanto riguarda le passività nelle compagnie assicurative, è importante notare che queste non consentono una grande flessibilità, ma rappresentano un elemento rigido nella definizione delle politiche aziendali. La natura e la durata delle passività sono difficilmente modificabili, pertanto sia nella gestione attiva del rischio di tasso, sia nella strategia passiva di immunizzazione dal rischio, è importante considerare che le opportunità di intervento sono principalmente legate alle attività.

Inoltre, quando si adotta la strategia di immunizzazione dal rischio di tasso, ovvero con un gap nullo, è fondamentale prendere in considerazione la durata media dei contratti stipulati nelle diverse aree di attività. In effetti, si può dedurre che un equilibrio tra le durate delle due componenti sia raggiungibile solo nel settore assicurativo vita, dove le passività tendenzialmente hanno scadenze più lunghe. Al contrario, nel settore danni, i contratti di solito hanno una durata annuale, che non è compatibile con la struttura degli *assets* che, sia nel settore vita che nel settore danni, solitamente hanno una *duration* più prolungata.

Fino a questo momento è stata condotta un'analisi che valuta gli effetti di un mutamento dei tassi sul valore del patrimonio netto di un'impresa di assicurazione. Tuttavia, è possibile utilizzare lo stesso modello anche nell'ottica degli utili correnti e cioè, come visto nel paragrafo precedente, analizzando gli effetti di un mutamento dei tassi sul margine di interesse. A tal fine è sufficiente calcolare la *duration* media delle poste attive e passive scadenti entro l'anno. Per quanto però questo modello sia valido per monitorare due variabili distinte, il valore del patrimonio netto e il margine di interesse, non è altresì vero che perseguire l'equilibrio di una di esse porti automaticamente all'equilibrio dell'altra. Allo stesso modo, nel caso in cui si raggiunga un equilibrio tra la *duration* delle due poste, non si ottiene una stabilizzazione dei margini di interesse futuri, ma soltanto una stabilizzazione del loro livello medio. Similmente ai modelli di gap management infatti, i modelli di DGAP non sono in grado di individuare con precisione il momento esatto in cui si verifica l'esposizione al rischio di tasso e quindi non è possibile effettuare operazioni di gestione immediate per far fronte al rischio di tasso. All'inizio di questo capitolo abbiamo analizzato la differenza tra modelli statici e dinamici. Quelli che abbiamo analizzato fino ad ora rientrano nella prima categoria poiché sono rivolti ad un orizzonte temporale brevissimo e si limitano ad una valutazione uniperiodale che non fornisce alcuna indicazione operativa sugli effetti futuri che il valore dell'impresa potrebbe subire a causa della variazione dei tassi. Da questo momento in poi verranno invece brevemente analizzati alcuni modelli dinamici quali l'immunizzazione standard e l'immunizzazione *key rate* mentre, nel paragrafo seguente, si studieranno più nel dettaglio i modelli dinamici di simulazione.

Le strategie di immunizzazione standard e *key rate* consentono di proteggere il portafoglio dalle perdite che possono essere causate da variazioni dei tassi di interesse tramite una strutturazione del portafoglio tale da compensare l'impatto della variazione dei tassi sul valore delle attività con l'impatto subito dalle passività. L'immunizzazione standard presuppone l'allineamento della *duration* dell'attivo e del passivo attraverso l'utilizzo della curva di convessità (cfr. Teorema di Redington Appendice A). Nell'ipotesi in cui tale modo di procedere sia finalizzato alla conservazione di un *surplus* sarà necessario che il portafoglio dell'attivo abbia una convessità maggiore di quella del passivo. L'immunizzazione *key rate* è molto simile a quella standard con la differenza che in questo caso viene riconosciuta la possibilità che avvengano cambiamenti non paralleli nella struttura dei tassi. La curva dei tassi viene creata prendendo in considerazione un numero limitato di tassi dei quali si eseguirà l'interpolazione (I. Bozzano 2001).

1.4.3 I modelli dinamici di simulazione

I modelli dinamici di simulazione sono i sistemi più efficaci e sofisticati per gestire il rischio di tasso di interesse. Un modello di simulazione deve poter fornire una rappresentazione prospettica della situazione finanziaria attuale dell'impresa al fine di analizzare in che modo i risultati attesi potrebbero modificarsi rispetto a mutamenti delle variabili del mercato. Affinché tale modello funzioni, è necessario disporre di una grande mole di dati attendibili che funzionino da input ed è anche necessario che il numero delle variabili prese in considerazione sia sufficientemente grande da assicurare la significatività dei risultati ma non così elevato da renderne difficile la comprensione.

Il modello viene costruito attraverso alcune fasi: (A. Silvestri 2008)

1. Definizione dei problemi oggetto della simulazione
2. Formulazione delle ipotesi e definizioni delle relazioni logico-matematiche
3. Raccolta dei dati
4. Stima del modello
5. Rifiuto o accettazione del modello elaborato

Anche se non si entrerà nel merito di ognuna di queste fasi, ciò che è rilevante per questo studio è comprendere in che modo un modello venga stimato al fine di accettare o rifiutare il modello stesso. Durante la fase di stima infatti, il modello viene confrontato con il sistema da rappresentare e l'eventuale accettazione dipende dalla sua capacità di fornire informazioni operative sulla gestione del rischio di tasso. Per dimostrare la validità del modello, e quindi la sua corretta rappresentatività del comportamento del sistema considerato, si utilizzano vari test. Uno tra i metodi più comuni è quello di inserire nel modello i dati storici relativi al sistema rappresentato così da condurre una simulazione sul passato invece che sul futuro. In questo modo, si possono confrontare i risultati della simulazione con il comportamento reale del sistema e stabilirne o meno la validità.

Riguardo l'utilizzo dei modelli di simulazione, in primo luogo si proietta la situazione attuale nel periodo di analisi coperto dal modello per poter costruire il cosiddetto "caso base" cioè quello ritenuto più probabile. In seguito, verranno formulate varie ipotesi sull'andamento futuro delle variabili considerate nel modello così da disporre di diversi scenari di riferimento che possono incidere sull'andamento dell'impresa in esame. Tutte le simulazioni effettuate vengono poi tradotte in termini contabili sotto forma di stati patrimoniali e conti economici. Così facendo la posizione dell'impresa in termini di liquidità e di esposizione al rischio di tasso potrà essere tenuta sotto controllo.

Per quanto i modelli di simulazione siano strumenti molto complessi da predisporre e utilizzare, questi sono comunque largamente utilizzati da parte degli intermediari finanziari perché offrono innumerevoli vantaggi in termini di gestione del rischio. Primo fra tutti la loro flessibilità che emerge sia dalla possibilità di effettuare analisi del tipo *"what if"*, grazie alle quali si può conoscere il comportamento del sistema al verificarsi di determinati avvenimenti, sia dall'opportunità di aggiungere periodicamente informazioni che permettono di aggiornare il modello stesso. Anche la dinamicità dei modelli di simulazione costituisce un grande vantaggio per tali intermediari ed è sicuramente un importante elemento di differenza rispetto ai modelli di *gap management* e ai modelli basati sull'uso della *duration* che, come abbiamo visto, sono considerati modelli statici. Tuttavia, non bisogna ragionare in un'ottica di totale contrapposizione tra i vari modelli, dovrebbe piuttosto venire riconosciuta una loro complementarietà laddove i primi, ovvero i modelli statici, evidenziano l'effetto prodotto sul margine di interesse o sul patrimonio netto da una singola variazione dei tassi, mentre gli altri prendono in considerazione anche le possibili ulteriori oscillazioni dei tassi.

CAPITOLO II

La *duration* e le tecniche di ALM

2. Obbiettivi dell'analisi

Per verificare l'effettiva utilità della *duration* nei modelli di ALM, si propone un esempio pratico in cui viene creato un portafoglio attivo a fronte di una passività relativa ad una linea di business di un'impresa di assicurazione. Ciò che si vuole dimostrare è che, qualora il valore attuale delle attività sia pari a quello delle passività e le due *duration* coincidano, il portafoglio risulterà immunizzato dal rischio di tasso di interesse e dunque qualunque variazione dei tassi avrà effetto in egual misura sulle due poste, in modo tale da mantenere costante il valore del patrimonio netto.

2.1 Composizione del portafoglio passivo

Si supponga che, in data 15/05/2023, un'impresa assicurativa valuti un'uscita per copertura assicurativa del valore di 12189,94 e che tale esborso dovrà essere corrisposto fra 10 anni. Tale uscita, essendo rappresentata da un esborso unico, e dunque priva di cedole, si comporta esattamente come uno ZCB per cui presenta una *duration* uguale alla sua *maturity*, vale a dire 10 anni.

Affinché la società assicurativa sia certa di essere in grado di ripagare tale debito, sarà necessario costruire un portafoglio attivo che abbia la stessa *duration* e lo stesso valore attuale della passività. In questo modo, anche in presenza di variazioni nei tassi di interesse, la società disporrà almeno della cifra che dovrà corrispondere a scadenza, vale a dire 12189,94.

Conoscendo già il valore della *duration* del portafoglio passivo che, come anticipato, è pari a 10, bisogna trovare il valore attuale della posta passiva attualizzando, in regime composto, 12189,94 per 10 anni al tasso di mercato. Supponendo che tale tasso sia uguale, in data 15/05/2023, al 2%, si trova facilmente che il valore attuale del flusso passivo è pari a 12189,94*(1+0,02)^-10=10000.

Tale valore di 10000 dovrà essere uguale al valore attuale del portafoglio attivo, che viene costruito come indicato nel paragrafo seguente.

2.2 Criteri di scelta e composizione del portafoglio attivo

Per quanto riguarda la creazione del portafoglio attivo, si è fatto riferimento ad Allianz SE, società europea fra i maggiori player a livello globale nel settore dei servizi finanziari e leader nell'offerta di prodotti e servizi assicurativi, bancari e di *asset management*. In particolare, è stato selezionato il Fondo *"Allianz Strategic Bond"*, definito dalla società stessa come "*soluzione di investimento obbligazionaria flessibile e diversificata, che ricerca il rendimento investendo attivamente nei mercati obbligazionari a livello globale*". Mike Riddell, gestore di tale fondo, annovera tra i principali obiettivi "*il mantenimento di una bassa correlazione con l'andamento del mercato azionario: può quindi contribuire efficacemente alla diversificazione di un portafoglio d'investimento, offrendo potenziali vantaggi in termini di difesa dei rendimenti nelle fasi di ribasso e incrementando il rendimento complessivo ponderato per il rischio*". In particolare, al fine di formare un portafoglio di attività, sono stati scelti a titolo esemplificativo due titoli obbligazionari in base al peso che questi ricoprivano sull'interno fondo, e cioè due titoli di Stato statunitensi, che ricoprono rispettivamente il 3,56% e il 2,54% del fondo. Si farà dunque l'ipotesi che la società acquisti solo i due titoli di seguito descritti:

ISIN: US912810SR05 *Treasury bill*

Emittente: USA

Tipo di emissione: Titoli di Stato

Data valuta: 14/05/2023

Data di scadenza: 15/05/2040

Periodicità della cedola: annuale

Tasso cedolare: 1,125%

Valore nominale: 100

Modalità di rimborso: in un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale.

ISIN: US912828ZQ64 *Treasury bill*

Emittente: USA

Tipo di emissione: Titoli di Stato

Data valuta: 14/05/2023

Data di scadenza: 15/05/2034

Periodicità della cedola: annuale

Tasso cedolare: 5%

Valore nominale: 100

Modalità di rimborso: in un'unica soluzione alla data di scadenza ad un prezzo pari al 100% del valore nominale.

Fonte: boerse-frankfurt-2023

2.3 Svolgimento

Ipotizzando di effettuare l'investimento in data 15/05/2023, si riportano i prezzi delle obbligazioni in tale giorno, calcolati tramite l'attualizzazione dei vari flussi al tasso del 2%:

ISIN	**Corso secco**	**Tasso Cedolare**
US912810SR05	87,29	1,125%
US912828ZQ64	129,36	5%

Come è possibile notare dai valori riportati in tabella, il secondo titolo ha un prezzo sopra la pari, e questo è determinato dal fatto che il suo tasso cedolare, pari al 5%, è più alto del tasso di rendimento che è invece pari al 2%.

A questo punto, è possibile calcolare la *duration* dei due titoli sulla base dei calcoli esposti nell'Appendice B di questo lavoro:

ISIN	***Duration***
US912810SR05	15,24
US912828ZQ64	8,7

In seguito, bisognerà trovare i capitali q_1, q_2 da investire in *t=0* nei suddetti titoli tali per cui la *duration* media dell'attivo sia uguale a quella del passivo, che abbiamo visto essere uguale a 10, e il valore attuale del portafoglio sia pari a

10000. Svolgendo un sistema di equazioni lineari, tali quantità risultano essere pari a:

ISIN	Capitali Investiti
US912810SR05	1984,61
US912828ZQ64	8015,38
Totale	10000

Dividendo tali capitali investiti, per i prezzi dei titoli, è possibile trovare esattamente le quantità che vengono acquistate per ognuno dei titoli in portafoglio:

ISIN	Quantità Titoli
US912810SR05	22,68
US912828ZQ64	61,96

Una volta che le *duration* e i valori attuali di entrambe le poste sono stati allineati, si ha la certezza che il valore del portafoglio attivo calcolato a 10 anni sarà, al tasso del 2%, esattamente uguale alla cifra da corrispondere in base alla passività assunta. In effetti, per entrambi i titoli, capitalizzando al tasso del 2% i flussi intermedi ricevuti per i primi dieci anni e attualizzando allo stesso tasso i flussi successivi a tale scadenza, si ottiene esattamente il valore di 12189,94.

Ciò che si vuole dimostrare, arrivati a questo punto, è che qualunque variazione dei tassi, in aumento o in diminuzione, produrrà sicuramente un rendimento ex-post non minore di quello ex ante calcolato nell'ipotesi dei tassi al 2%.

Di seguito viene formulata l'ipotesi di uno *shift* additivo dei tassi di interesse del 2%, tenendo in ogni a caso a mente che la condizione di immunizzazione dal rischio di tasso si otterrebbe allo stesso modo a seguito di qualunque oscillazione nel livello dei tassi.

2.4 Ipotesi di uno *shift* additivo

Si ipotizzi che, in un istante successivo a quello di stipulazione dei contratti e precedente il successivo flusso in entrata, avvenga una traslazione verso l'alto nella curva dei tassi di interesse del 2%. In tal caso, calcolando il valore del portafoglio attivo a 10 anni, questo sarà, come già anticipato, non minore del valore calcolato al tasso del 2%. Precisamente, scegliendo a titolo di esempio il tasso del 4%, capitalizzando i flussi antecedenti la scadenza di 10 anni, e attualizzando quelli successivi per entrambi i titoli, si ottengono i seguenti valori:

ISIN	**Valore a *t=10* dei titoli**
US912810SR05	2195,604945
US912828ZQ64	10124,14923
Totale	**12319,75418**

Come si evince dalla tabella, il valore del portafoglio attivo è aumentato da 12189,94 a 12319,75 per cui si può considerare dimostrata la tesi iniziale per cui, eguagliando le *duration e* i valori attuali delle poste attive e passive, ci si potrà considerare immunizzati dal rischio di tasso. In questo caso, l'impresa di assicurazione potrà essere sicura di disporre nell'istante *t=10* <u>almeno</u> della cifra sufficiente a coprire la passività assunta. Risultati analoghi si ottengono anche in caso di ribasso del tasso d'interesse.

A tale conclusione, si può giungere allo stesso modo anche nel caso di una variazione dei tassi successiva ai flussi di cassa intermedi. In tal caso sarà necessario ricalibrare il portafoglio ristabilendo le quantità di titoli da acquistare tali che la *duration* del portafoglio attivo sia riportato al valore originario, e cioè in questo caso a 10.

CAPITOLO III

L’utilizzo degli strumenti derivati a copertura del rischio di tasso di interesse

3. i *financial future*, le opzioni e gli *swap*

All’interno di questo capitolo, si studieranno nuove tecniche di gestione del rischio di tasso di interesse tramite l’utilizzo degli strumenti derivati. Come si vedrà in seguito, tali strumenti si sono diffusi particolarmente verso la fine del secolo scorso a seguito di numerosi fattori che hanno modificato la struttura dei mercati.

Dopo una breve introduzione sulla storia e sul significato di tali strumenti, si passerà ad analizzare nel dettaglio in che modo essi sono utilizzati per la copertura del rischio di tasso. Si comincerà analizzando dapprima i *financial future*, per poi studiare il funzionamento delle opzioni e infine dei contratti *swap*. Per ognuno di questi strumenti, saranno forniti degli esempi pratici sul funzionamento delle operazioni di copertura al fine di comprenderne meglio l’utilizzo. Inoltre, si analizzeranno per alcuni di essi anche gli eventuali limiti applicativi.

3.1 Gli strumenti finanziari derivati, origini e utilizzi

A partire dalla seconda metà del ventesimo secolo, una serie di fattori hanno portato ad una grande diffusione degli strumenti finanziari derivati. Tra questi si riportano ad esempio la caduta degli accordi di Bretton Woods nel 1971che condusse alla fine del sistema internazionale di cambi fissi. Ancora, gli shock petroliferi del 1973 e del 1979 che causarono un aumento dei prezzi del petrolio e dei beni e servizi ad esso collegati con conseguente aumento dell'inflazione. Tali accadimenti, assieme a molti altri, portarono ad una maggiore volatilità e ad un aumento del rischio di mercato. Un ulteriore fattore che ha sicuramente inciso sulla diffusione dei derivati, è lo sviluppo della tecnologia e in particolare la diffusione dei computer che hanno permesso di svolgere velocemente complessi calcoli di prezzi relazionati tra loro e anche di calcolare i prezzi dei derivati stessi.

Nello specifico, sono definiti strumenti finanziari derivati quei contratti il cui valore dipende dall'andamento di un'attività sottostante nota anche come "*underlying asset*". Le attività sottostanti possono avere sia natura finanziaria come ad esempio titoli azionari, tassi di interesse e di cambio, indici etc. sia natura reale come ad esempio l'oro e il petrolio. I contratti derivati si suddividono in simmetrici e asimmetrici. I primi prevedono che entrambi i contraenti, e quindi sia acquirente che venditore, si impegnino ad effettuare una prestazione alla data di scadenza mentre nel secondo caso l'obbligo sta in capo solo al venditore. In questa seconda fattispecie infatti, l'acquirente ottiene, in cambio del pagamento di un premio, la facoltà di decidere se effettuare o meno, ad una scadenza temporale prefissata, la compravendita del bene sottostante. Un secondo criterio di classificazione degli strumenti derivati è correlato al mercato nel quale tali contratti vengono negoziati dal momento che essi possono essere scambiati all’interno o al di fuori dei mercati regolamentati. Nel primo caso, gli strumenti derivati devono possedere delle caratteristiche predefinite dall'autorità del mercato su cui vengono negoziati. Tali caratteristiche possono riguardare, ad esempio, l'attività sottostante, la durata o il taglio minimo di negoziazione. All’interno di questa categoria rientrano strumenti quali i *futures* e le opzioni. Nel secondo caso, vengono definiti derivati *over-the-counter* (OTC) e sono negoziati direttamente tra le due parti fuori dai mercati regolamentati. Le caratteristiche di tali strumenti possono essere liberamente stabilite dagli stessi contraenti. Generalmente, i derivati OTC includono *swap* e *forward.*

L’utilizzo degli strumenti derivati nell’ambito della gestione del rischio ha assunto, nel recente passato, una dimensione sempre maggiore e ciò, di pari passo con la crescente volatilità delle variabili del mercato. Una ricerca del 2018 ha evidenziato che circa il 25,5% delle imprese italiane, seppur con diverse finalità, ricorre all’utilizzo degli strumenti derivati (C. Marcon et al. 2018). Si osserva, peraltro, che gli strumenti derivati non vengono utilizzati per la sola gestione del rischio ed in particolare possono individuarsi tre finalità principali per cui vengono stipulati:

1. Copertura: tale finalità, detta anche *hedging*, rappresenta il motivo principale della diffusione dei derivati. Consiste nel mettere in atto un’operazione finanziaria che diminuisce o elimina del tutto il rischio legato alle fluttuazioni delle variabili del mercato, in particolare i tassi di interesse e quelli di cambio. *La copertura del rischio richiede di intraprendere un’operazione finanziaria che compensa una posizione lunga assumendo una posizione corta supplementare, o che compensa una posizione corta assumendone una lunga supplementare* (F.S. Mishkin et al. 2019).

2. Speculazione: a differenza del caso precedente, l'obiettivo degli speculatori non è quello di evitare l'esposizione alle variazioni di mercato ma, al contrario, di sfruttarle per massimizzare il profitto.
3. Arbitraggio: in questo tipo di operazione gli arbitraggisti cercano di ottenere un profitto immediato e privo di rischio sfruttando i disallineamenti tra i prezzi a pronti e quelli a termine. Nello specifico l'operazione prevede l'acquisto di uno strumento derivato e la simultanea vendita del sottostante oppure al contrario la vendita dello strumento derivato con simultaneo acquisto del sottostante.

Date le finalità del presente studio, si analizzerà unicamente l'utilizzo degli strumenti derivati con fini di copertura e con particolare riferimento alle imprese di assicurazione. Queste ultime infatti, in quanto intermediari finanziari, sono esposte alle fonti di rischio di cui si è ampiamente riferito nel capitolo precedente e dunque, in particolare, al rischio di tasso, di cambio e di credito. Nei prossimi paragrafi si analizzerà come contenere il rischio di tasso e come gli strumenti derivati siano funzionali a perseguire lo scopo di immunizzazione del portafoglio in modo più economicamente vantaggioso e flessibile rispetto alle tecniche di ALM studiate nel capitolo precedente. All'uopo, appare significativo quanto affermato da Alan Greenspan nel 1999 *"I derivati rappresentano un importante veicolo per diversificare i rischi e per allocarli agli investitori più capaci di gestirli"*.

Prima di analizzare i meccanismi di copertura tramite gli strumenti derivati, è importante sottolineare che tali strumenti sono pur sempre delle "scommesse" fatte su tassi di interesse, ma anche su valute estere, su azioni, su fallimenti di privati e di società, e, persino, scommesse su scommesse e che dunque introducono all'interno del portafoglio assicurativo un'ulteriore fonte di rischio.

Tali motivazioni hanno condotto peraltro ad un'attenta regolamentazione sull'utilizzo degli strumenti derivati a copertura del rischio. A tal proposito, la direttiva CEE 92/96 del Consiglio, Art. 21 in materia di investimenti prevede che *"gli strumenti derivati quali «options», «futures» e «swaps» in relazione ad attivi che coprono le riserve tecniche possono essere utilizzati nella misura in cui contribuiscono a ridurre il rischio di investimento o consentono una gestione efficace del portafoglio. Tali strumenti devono essere valutati in modo prudente e possono essere presi in considerazione nella valutazione degli attivi sottostanti"*.

3.2 I *financial future*

I *financial future* rappresentano uno strumento derivato standardizzato che viene scambiato sui mercati regolamentati. Esso prevede che l'acquirente e il venditore si accordino per negoziare ad una certa data una specifica quantità di attività sottostante, ad un prezzo già determinato al momento della stipula del contratto. Si tratta di un derivato simmetrico in quanto, come spiegato precedentemente, entrambe le parti sono obbligate a effettuare una prestazione alla scadenza del contratto. Il soggetto che acquista un *financial future* assume una posizione *long*, ovvero si impegna ad acquistare l'attività sottostante alla scadenza del contratto. Esso avrà un profitto soltanto qualora il prezzo *spot*, ovvero il valore corrente di mercato, sia maggiore rispetto a quello stipulato nel contratto. Al contrario, il soggetto che vende un *financial future* assume una posizione *short* e si impegna a consegnare l'attività sottostante al prezzo stabilito alla scadenza del contratto. Il venditore, realizzerà dunque un profitto laddove il prezzo stabilito dal *future* risulterà superiore al valore di mercato. Come già accennato in precedenza, il principio base della copertura prevede che per gestire il rischio di tasso si debba assumere una posizione opposta a quella di portafoglio in chiave compensativa, così da non modificare né la dimensione né la composizione dello Stato Patrimoniale (A. Silvestri 2008). Per comprendere questo meccanismo, si consideri una semplificazione del portafoglio di un'impresa assicurativa in cui a fronte di una passività a tasso fisso a quattro mesi corrisponda un'attività a tasso variabile a due mesi. In questa situazione, essendo di fronte ad un disallineamento tra poste attive e poste passive sensibili, il margine di interesse risulta esposto al rischio di tasso ed in particolare, nel caso di una diminuzione dei tassi, l'attivo verrebbe riprezzato a condizioni più svantaggiose con una contrazione del margine di interesse. Per coprirsi contro tale eventualità, bisognerà assumere una posizione lunga e quindi acquistare a termine un'attività dello stesso valore nominale della posizione attiva che si vuole coprire. Nel caso in cui la contrazione dei tassi dovesse verificarsi, si otterrebbe sicuramente un minore incasso sugli interessi attivi, ma allo stesso tempo verrà chiusa la posizione future mediante l'apertura di un'altra posizione uguale ma di segno opposto che consentirà di vendere lo stesso contratto ad un prezzo più elevato vista l'avvenuta diminuzione del tasso di interesse ed in questo modo si otterrà un profitto che compenserà le minori entrate per interessi attivi. In seguito si propone un esempio numerico per comprendere meglio in che modo un intermediario finanziario può utilizzare i *futures* per immunizzare il proprio portafoglio dal rischio di tasso: (F.S. Mishkin et al. 2019)

Si consideri un'impresa di assicurazione A che voglia utilizzare i *future* per coprirsi dal rischio di tasso legato al possesso di 1000 euro di obbligazioni al 5% con scadenza nel 2030. Si supponga inoltre che nel 2020 tale impresa riceva i 1000 euro di obbligazioni a lungo termine al tasso del 5% a fronte di un contratto *future* su obbligazioni del valore di 100 euro alla banca B con scadenza entro un anno, dunque nel 2021. In questa situazione, per coprirsi dal rischio di tasso, l'impresa A dovrà bilanciare la posizione lunga assunta comprando le obbligazioni con una posizione corta, e dunque dovrà vendere il *future*. Sapendo che fino al 2021 il tasso di interesse è rimasto stabile al 5%, sia le obbligazioni che il *future* sono venduti al valore di parità e dunque rispettivamente a 1000 e 100 euro. Ciò che è importante capire a questo punto, è il numero di contratti da vendere affinché l'impresa A sia efficacemente protetta dal rischio. Tale valore è dato dal quoziente tra il totale dell'attività da proteggere e il valore in euro di ogni contratto:

$NC = VA/VC$

dove :

$NC =$ numero dei contratti per la copertura

$VA =$ valore dell'attività sottostante

$VC =$ valore di ogni contratto *future*

In questo caso dunque $NC = \frac{1000}{100} = 10$ per cui bisognerà vendere 10 contratti *future* per coprirsi dal rischio di tasso.

Per dimostrare la riuscita della copertura, si consideri che nel corso dell'anno seguente i tassi di interesse aumentino al 6%. Nel 2021 allora, il valore delle obbligazioni in portafoglio scenderà a 943 euro, con una perdita conseguente pari a 57 euro. Tuttavia, anche la posizione corta assunta subirà una modifica a causa dell'aumento dei tassi e in particolare avrà lo stesso valore delle obbligazioni e cioè, come abbiamo visto, 943 euro. In questo caso dunque, la banca B si sarà impegnata a pagare 1000 euro alla scadenza un sottostante il cui valore è sceso a 943 euro determinando un guadagno per l'impresa A che compensa esattamente la perdita subita sulle obbligazioni. Il guadagno netto dell'impresa di assicurazione è quindi pari a zero, a dimostrazione del fatto che la copertura è stata effettuata con successo.

L'operazione appena descritta è chiamata microcopertura in quanto la protezione dal rischio di tasso avviene su una singola attività facente parte del portafoglio. Qualora l'impresa volesse coprire da tale rischio l'intero portafoglio, essa utilizzerebbe invece una tecnica di macrocopertura.

Gli esempi mostrati finora, sono senza dubbio utili per comprendere le potenzialità di copertura dello strumento in esame, ma non rispecchiano del tutto la realtà in quanto lasciano pensare che i guadagni realizzati sulla posizione *future* compensino sempre esattamente le perdite derivanti dalla posizione assunta in portafoglio. A tal proposito bisogna infatti ricordare che tali strumenti derivati sono standardizzati in quanto non è possibile negoziare "spezzature" (A. Silvestri 2008) degli stessi e quindi non sempre si riesce ad ottenere una posizione di perfetta equivalenza tra il valore dell'oggetto della copertura e quello del contratto derivato.

3.3 Le opzioni

Un altro metodo utilizzato dalle imprese di assicurazione per coprirsi dal rischio di tasso consiste nell'utilizzo delle opzioni. Tali strumenti derivati sono contratti che offrono all'acquirente la facoltà di acquistare o vendere lo strumento finanziario sottostante ad un prezzo prefissato (prezzo di esercizio) ed entro una scadenza determinata. Il venditore dell'opzione, al contrario, è obbligato ad acquistare o vendere il sottostante qualora l'acquirente decida di esercitare rispettivamente il diritto di vendere o acquistare. Chiaramente, avere il diritto di esercitare o meno un contratto di opzione ha un valore ed è per questo che l'acquirente di tale strumento è disposto a pagare in cambio un importo chiamato "premio". Per ciò che concerne il sottostante, questo può essere costituito, come nel caso precedente, da titoli azionari, indici, valute estere o *commodities* e in aggiunta può anche essere rappresentato da un contratto *future*. Le opzioni si suddividono in base al momento in cui è possibile esercitarle e a tal proposito quelle esercitabili solo alla data di scadenza del contratto vengono chiamate opzioni europee, mentre le opzioni che consentono al titolare di esercitare il diritto in qualsiasi momento entro la data di scadenza del contratto vengono chiamate opzioni americane.

L'opzione che dà al compratore il diritto di acquistare uno strumento finanziario sottostante al prezzo di esercizio entro un determinato periodo di tempo è chiamata *opzione call,* mentre è chiamata *opzione put* quella che da al compratore il diritto di vendere uno strumento finanziario sottostante alle stesse condizioni di cui sopra. Nel primo caso, l'acquirente della call pagherà un premio per avere il diritto di acquistare il sottostante, si supponga rappresentato da un titolo obbligazionario, al prezzo di esercizio. Per questo motivo, tale operatore avrà un profitto (a meno del premio pagato) solo nel caso in cui il prezzo di esercizio sia minore di quello di mercato. Se tale condizione ricorre, l'opzione *call* si dice *in the money* e dunque l'operatore avrà convenienza ad esercitarla. Qualora il prezzo di esercizio fosse uguale a quello di mercato, l'opzione sarebbe *at the money* e per l'investitore sarebbe indifferente esercitarla o meno. Tuttavia, visto il pagamento del premio, egli sarebbe comunque soggetto ad una perdita pari al valore del premio. Se invece il prezzo di esercizio fosse maggiore di quello di mercato, l'opzione sarebbe *out of the money* per cui l'operatore non ha alcun interesse ad esercitarla esponendosi ad una perdita pari, anche in questo caso, al valore del premio. Da quanto detto fino ad ora, si capisce che l'acquirente di una *call* ha una prospettiva di rialzo dei prezzi ed è per questo motivo che la sua posizione viene definita rialzista. Chiaramente, una posizione rialzista sui prezzi è, al contrario, ribassista sui tassi di interesse vista la relazione inversa tra le due variabili e dunque il sottoscrittore di una *call* ha un'aspettativa di ribasso sui tassi.

Nel secondo caso, l'acquirente della *put* pagherà un premio per avere il diritto di vendere il sottostante al prezzo di esercizio. Facendo anche in questo caso l'ipotesi che il sottostante sia rappresentato da un titolo obbligazionario, va da sé che, al contrario del caso precedente, l'operatore assume una posizione ribassista sui prezzi, e dunque rialzista sui tassi, poiché avrà un guadagno, e quindi l'opzione sarà *in the money,* solo nel caso in cui il prezzo di esercizio sia maggiore di quello di mercato. In questo caso egli potrà vendere il sottostante ad un prezzo maggiore di quello al quale è possibile comprarlo sul mercato e dunque avrà convenienza ad esercitare l'opzione. Qualora prezzo di mercato e prezzo di esercizio siano uguali, l'opzione sarà *at the money* e anche in questo caso sarà indifferente se esercitare o meno l'opzione e infine sarà *out of the money* un'opzione in cui il prezzo di mercato è maggiore di quello di esercizio e dunque non sarà conveniente per l'investitore esercitare l'opzione, con conseguente perdita del premio.

Quando si utilizzano le opzioni come strumento di copertura dal rischio di tasso, bisogna tenere conto di alcuni elementi tra cui in primis l'obiettivo che si vuole proteggere, che può essere ad esempio rappresentato dal margine di interesse, a seguire l'orizzonte temporale nel quale si vuole conseguire la copertura e infine, naturalmente, la scelta del tipo di opzione da acquistare (A. Silvestri 2008). In base alla loro insita complessità, le opzioni sono maggiormente impiegate in tecniche di microcopertura piuttosto che di macrocopertura. In particolare, nel caso in cui si evidenzi una condizione di portafoglio in cui le passività sensibili sono maggiori delle attività sensibili, il margine di interesse subirà una riduzione, come si è studiato nel capitolo precedente, nel caso di un rialzo dei tassi di interesse. In questa situazione bisogna quindi sottoscrivere un'opzione che tragga beneficio dall'aumento dei tassi, vale a dire, come analizzato precedentemente, una *put.* Al contrario, qualora risulti che le attività sensibili sono maggiori delle passività sensibili, il margine di interesse si ridurrà a seguito di un ribasso dei tassi di interesse per cui si dovrà acquistare un'opzione *call* che trae beneficio dall'aumento dei prezzi e dunque dal ribasso dei tassi.

Anche in questo caso, si propone un esempio pratico per comprendere meglio in che modo tali strumenti possono essere utilizzati come copertura dal rischio di tasso: (F.S. Mishkin et al. 2019)

Nell'esempio precedente, si è mostrato in che modo un'impresa di assicurazione A poteva proteggere dal rischio di tasso 1000 euro di obbligazioni al 5% con scadenza nel 2030 tramite la vendita di 10 contratti *future* del valore di 100 euro ciascuno. Ebbene, tale copertura può effettuarsi, alternativamente, acquistando 1000 euro di opzioni *put* su *financial future* da 100 euro. In questo caso, essendo il sottostante dell'opzione rappresentato da contratti *future*, il numero di contratti di opzione *put* da acquistare è uguale a quello dei contratti *future* venduti, vale a dire 10. Un aumento dei tassi di interesse, e la conseguente riduzione del prezzo delle obbligazioni verrebbe dunque compensata dal profitto che si otterrà sulle opzioni *put* visto che l'impresa A potrà vendere il sottostante ad un prezzo maggiore di quello osservabile all'attualità sul mercato. Ciò che bisogna considerare a questo punto, è che l'impresa A dovrà pagare i premi sui contratti di opzione e questo ridurrà i suoi profitti. Per questo motivo ci si potrebbe chiedere come mai un intermediario dovrebbe scegliere di coprirsi dal rischio di tasso con un'opzione su *future* piuttosto che direttamente tramite i *future*. La risposta a questa domanda sta nel fatto che il contratto di opzione, a differenza di quello *future*, permette all'impresa di ottenere un profitto nel caso in cui i tassi di interesse subiscano una riduzione e i prezzi delle obbligazioni salgano. Tramite l'utilizzo dei *future* infatti, l'impresa non avrebbe beneficio dall'aumento dei prezzi delle obbligazioni poiché tale profitto sarebbe compensato dalle perdite subite dalla vendita dei contratti *future*. Al contrario, qualora la copertura fosse ottenuta tramite l'acquisto di opzioni *put*, se i prezzi delle obbligazioni superano il prezzi di esercizio, l'impresa subirebbe perdite sulle opzioni limitate solo al valore del premio ma tali perdite sarebbero più che compensate dall'aumento del valore delle obbligazioni presenti in portafoglio generando così un profitto. Pertanto, l'utilizzo delle opzioni, a differenza dei contratti *future*, permette all'impresa A di proteggersi in caso di aumenti dei tassi di interesse e di trarre al contempo beneficio da eventuali diminuzioni degli stessi.

3.4 Gli *swap*

Un terzo e ultimo strumento derivato utile a fini di copertura dal rischio di tasso è costituito dagli *swap*. Tale tipologia di contratto prevede che le controparti si scambino dei flussi futuri. Principalmente esistono due tipologie di contratti *swap*, i *currency swap*, ovvero gli *swap* su cambi, che prevedono lo scambio di flussi denominati in una valuta con flussi denominati in un'altra e gli *interest rate swap* (IRS), di cui ci occuperemo in questo capitolo, ovvero gli *swap* su tassi di interesse, che prevedono lo scambio di flussi determinati sulla base di un tasso di interesse fisso con flussi determinati sulla base di un tasso di interesse variabile. Per comprendere in che modo gli IRS possono essere utilizzati per coprire il rischio di tasso all'interno di un portafoglio, si ipotizzi la posizione di un'impresa di assicurazione A che abbia 1000 euro di attività sensibili in meno rispetto alle passività sensibili. Come si è analizzato in precedenza, tale situazione porterebbe, in caso di un rialzo dei tassi di interesse, ad una riduzione del margine di interesse. Per proteggersi da tale eventualità, l'impresa A potrà convertire 1000 euro di attività a tasso fisso in un uguale importo di attività sensibili ai tassi di interesse tramite la stipula di un contratto *swap* sui tassi di interesse, così da pareggiare il dislivello tra attività e passività sensibili ed essere immunizzata dal rischio. Ci si potrebbe chiedere a questo punto il motivo per cui l'altro contraente dovrebbe avere interesse nel concludere tale contratto. Ebbene, egli potrebbe essere un intermediario finanziario che si trova in una posizione esattamente opposta rispetto a quella dell'impresa A. Tale intermediario, ad esempio, potrebbe avere 1000 euro di attività sensibili in più rispetto alle passività sensibili per cui una diminuzione dei tassi di interesse potrebbe provocare una riduzione del margine di interesse e così un calo nei profitti. Per far fronte a questa situazione, dunque, tale intermediario potrà stipulare un contratto *swap* e convertire 1000 euro di attività sensibili in 1000 euro di attività a tasso fisso. In questo modo, in caso di discesa dei tassi di interesse, il calo nel rendimento delle attività sensibili sarà compensato dalla diminuzione nel costo delle passività lasciando immutato il margine di interesse (F.S. Mishkin et al. 2019).

Tramite la stipula dei contratti *swap*, è possibile eliminare il rischio di tasso ma bisogna tenere presente che in cambio si accetta un maggior rischio di credito legato alla possibilità di insolvenza della controparte che è pur sempre rappresentata da un intermediario finanziario e che dunque in quanto tale può soffrire di mancanza di liquidità (A. Silvestri 2008). Gli *swap*, come è stato detto in precedenza, sono infatti contratti negoziati *over-the-counter* e dunque al di fuori dei mercati regolamentati. A differenza dei *future*, in questo caso, non esiste una *Clearing House*, e cioè un organo di vigilanza che garantisca sul buon esito delle operazioni. Ad ogni modo, svolgere questo tipo di operazione è considerato conveniente poiché si ritiene che il rischio di credito sia più che compensato dalla diminuzione del rischio di tasso.

Conclusione :

Sulla base di ciò che è stato affermato nel corso di questo lavoro di tesi, appare evidente il motivo per cui è stato scelto il caso delle imprese di assicurazione per analizzare la problematica del *risk management*. In questo tipo di attività infatti, è previsto un costante lavoro di allineamento tra attività e passività per poter far fronte ad un susseguirsi di uscite di breve, medio e lungo periodo, il tutto senza conoscere con esattezza gli istanti in cui tali uscite si manifesteranno. Negli ultimi anni, le autorità di controllo e vigilanza hanno riservato una crescente attenzione sull'argomento, arrivando alla creazione di norme vincolanti per assicurare la solvibilità di questo tipo di imprese. Chiaramente questo è stato reso necessario, come ribadito più volte all'interno di questo lavoro, dall'aumento della volatilità dei mercati e delle sue variabili. Basti pensare che, solo nell'ultimo anno, le decisioni di FED e BCE in tema di politica monetaria, hanno portato ad un incremento nei tassi di interesse di circa il 4% al fine di ridurre l'inflazione, modificando completamente lo scenario economico. In Italia ad esempio, prima di tali interventi si sono osservati per anni dei tassi di interesse negativi e questo cambiamento ha sicuramente impattato sul funzionamento del sistema economico e sulla solvibilità dei singoli intermediari finanziari.

Ad oggi dunque, rispetto agli scorsi decenni, assume una centralità assoluta il concetto di gestione del rischio. Si è analizzato nel corso di questo studio quali sono le tecniche che un intermediario finanziario può utilizzare per coprirsi dai rischi tipici del mercato partendo da una logica di base di coordinamento delle poste attive e passive di un'impresa, per poi applicare concetti più complessi quali quello di *duration* e di gestione del rischio tramite modelli dinamici di simulazione e sono stati infine studiati i possibili utilizzi degli strumenti derivati a copertura di tali rischi. Nell'utilizzo delle tecniche studiate finora, bisogna sicuramente tenere in debita considerazione che nessuna di esse è in grado di replicare perfettamente la realtà o prevedere con esattezza le variazioni future dei tassi di interesse e con altrettanta sicurezza può dirsi che una completa eliminazione del rischio di tasso non è semplice da realizzare se non impossibile per certi versi. Tuttavia, rimane comunque indubbio che le strategie di immunizzazione studiate sono un valido supporto per coprirsi dal rischio di tasso e, come osservato anche nell'applicazione pratica svolta nel secondo capitolo del presente lavoro, sono mezzi efficaci al fine di ricalibrare un portafoglio e, quando applicati, sono assolutamente funzionanti.

APPENDICE A

1. Indici temporali e di rischio

Gli indici temporali e di rischio sono elementi fondamentali nella scelta tra progetti finanziari differenti. In questa analisi, verranno contrapposti i titoli con cedole a quelli a capitalizzazione integrale che, ai fini di questo studio, sono considerati come privi di rischio. Alcuni esempi di titoli privi di rischio sono i buoni del tesoro, emessi dallo Stato, che si presume abbia la capacità di onorare il debito. Tuttavia, quest'ultima è un'assunzione che facciamo per semplificare lo studio, poiché non esistono nel mercato dei titoli totalmente privi di rischio, questi sono infatti sempre esposti al rischio di variazione dei tassi di interesse e all'inflazione.

La determinazione del rendimento di un titolo, a prescindere dalla sua natura, non sempre è una problematica semplice da affrontare. Certamente il problema non si pone nel caso di un titolo a capitalizzazione integrale e *risk free* (BOT) che l'operatore decide di detenere fino a scadenza il cui il rendimento ex-ante coincide con il rendimento ex-post. Tuttavia, qualora l'operatore decidesse di smobilizzare lo stesso titolo prima della sua scadenza, egli sarà esposto ad un rischio legato alla variazione dei tassi di interesse, così come lo sarebbe nel caso di acquisto di titoli con cedole. In questo secondo caso, infatti, non basterà detenere il titolo fino a scadenza per ottenere un rendimento certo, ma bisognerà tener conto delle variazioni del tasso a cui verranno via via reinvestite le cedole. Si è cioè sottoposti al rischio di reinvestimento (Crenca et al., 2018).

Un altro aspetto molto rilevante quando si parla di un titolo con cedole (BTP) è la sua durata. Titoli a lunga scadenza risentiranno infatti maggiormente dell'effetto del reinvestimento delle cedole rispetto a titoli con scadenza a breve termine. Nei titoli a capitalizzazione integrale, al contrario, tale aspetto non è rilevante in quanto la durata è uguale alla scadenza che quindi rappresenta già di per sé un indice temporale.

Supponiamo di avere un'operazione finanziaria in cui ad un esborso iniziale corrisponde un cash flow di entrate aventi lo stesso segno. In questo caso, per individuare la durata di un titolo con cedole disponiamo di tre indici sintetici: la media di tutte le durate, la durata media aritmetica e la durata media finanziaria o *Duration*.

1. Media di tutte le durate:

$$\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n} \tag{1}$$

dove n rappresenta la scadenza dell'operazione.

Questo indice è chiaramente troppo semplicistico poiché somma tutte le scadenze ma non ne considera i relativi importi, mancando quindi di dare un peso alle scadenze. Inoltre, la media di tutte le durate non tiene conto di un fattore fondamentale; il tasso di interesse al quale le cedole vengono via via reinvestite.

Per ovviare al primo problema si utilizza un secondo indice:

2. Durata Media Aritmetica:

$$\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s}{\sum_{s=1}^{n} F_s} \tag{2}$$

dove F_s sono i pagamenti dovuti alle scadenze $s=1,2,\ldots,n$.

Questo secondo indice a differenza del primo fornisce dei pesi alle scadenze in base alla cedola che verrà di volta in volta corrisposta. Tuttavia anche questo, come quello analizzato in precedenza, non considera il tasso al quale le cedole vengono via via reinvestite. Per tenere in considerazione tale aspetto, disponiamo di un terzo indice:

3. Durata Media Finanziaria o *Duration*

$$D(i) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot v^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot v^{-t_s}} \quad (3)$$

dove v^{-t_s} è il fattore di attualizzazione dei pagamenti dovuti alle scadenze *s=1,2,…,n.*

La *Duration* di Macaulay viene dunque formulata per ovviare ai limiti dei precedenti due indici.

D(*i*) rappresenta la *duration* espressa in funzione del tasso effettivo *i* ed è definita come la media ponderata delle scadenze F_s in base ai relativi valori attuali calcolati tramite il tasso interno di rendimento (TIR) dell'operazione. È importante notare, in questo caso, che il denominatore della formula corrisponde al prezzo dell'operazione finanziaria.

La *duration*, in quanto indice in grado di fornire sinteticamente la durata dell'operazione, consente di valutare e così scegliere tra titoli con caratteristiche differenti. Nella scelta tra due titoli con cedole intermedie ad esempio, se si ha un'aspettativa rialzista sui tassi di interesse, si preferirà rientrare prima dall'investimento così da poter reinvestire le somme intermedie a tassi più alti. Si sceglierà dunque in questo caso un titolo con una *duration* minore. Viceversa, nell'ipotesi di una curva dei tassi decrescenti, si preferirà non uscire dall'investimento per godere di un tasso più vantaggioso di quello del mercato. Si sceglierà dunque un titolo con una *duration* maggiore.

1.1 Interpretazione della Duration come momento ottimo di smobilizzo

Per comprendere al meglio questa tematica, ipotizziamo di trovarci nella posizione di un detentore di un titolo che garantisce un flusso di importi **x** con scadenze $\boldsymbol{t}$ $t_1, t_2, \dots, t_n$ dove *n* rappresenta l'ultima scadenza. Supponiamo inoltre di essere, in un istante intermedio H (con $t_1 < H < t_n$), debitore di una determinata somma. In tale situazione, l'obbiettivo è avere la certezza di poter disporre al tempo *H* almeno dell'importo di cui siamo debitori. A tal fine bisogna calcolare il valore del titolo nell'istante *H* come somma tra il montante delle somme già incassate (valore di reinvestimento o reimpiego) e il valore attuale dei flussi ancora da incassare (valore di realizzo) (Crenca et al., 2018).

Il valore del titolo al tempo *H* è quindi dato da:

$$V(i, H) = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{H-t_s}. \qquad (4)$$

In questa situazione, un andamento crescente dei tassi avrà un effetto positivo sul montante poiché le somme intermedie verranno reinvestite via via ad un tasso più elevato mentre avrà un effetto negativo sul valore attuale che risulterà svalutato. La variazione del valore attuali di flussi futuri a causa di un cambiamento (crescenza) del tasso d'interesse viene detta rischio di realizzo mentre chiamiamo rischio di reinvestimento una variazione del montante dei flussi a seguito di una variazione dei tassi (decrescenza).

Ritornando al nostro esempio, nell'ipotesi in cui non ci siano variazioni nel tasso di interesse, conosceremo con certezza il valore del titolo al tempo H che chiameremo $V(i, H)$ cioè il valore del titolo al tempo *H*.

Tuttavia, qualora il tasso di interesse dovesse nel tempo subire una variazione, allora il valore del titolo in *H* sarà un valore incognito che dipenderà dai nuovi valori assunti dal tasso di interesse. È proprio in questa situazione che la *duration* può essere interpretata come istante ottimo di smobilizzo, cioè come momento in cui, se si disinveste il titolo, verrà incassato un valore di smobilizzo tale da garantire che il rendimento prodotto dal titolo **x** è non inferiore al rendimento prefissato al momento di acquisto del titolo.

La relazione che deve essere soddisfatta perché ciò accada è:

$$V(i^*, H) \geq V(i, H) \tag{5}$$

dove i^* è il tasso di interesse a seguito della variazione.

Per dimostrare quanto affermato, si studia la funzione

$V(i^*, H) = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1 + i^*)^{H-t_s}$ per trovarne gli eventuali punti di minimo.

In primo luogo, studiamo la derivata prima della funzione rispetto al tasso i per poi trovare il valore per cui questa si annulla:

$$\frac{dV(i^*,H)}{di^*} = (1 + i^*)^{-1} \cdot \left[\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot H \cdot (1 + i^*)^{H-t_s} - \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1 + i^*)^{H-t_s}\right].$$

Ciò che deriva da questo studio è che, ponendo $i^* = i$, la derivata prima di $V(i^*, H)$ si annulla quando:

$$\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot \mathrm{H} \cdot (1 + i)^{H-t_s} = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1 + i)^{H-t_s}$$

e cioè quando:

$$H = \frac{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)^{H-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{H-t_s}} \cdot \frac{(1+i)^{-H}}{(1+i)^{-H}}.$$

Da cui:

$$H = \frac{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}} \tag{6}$$

quindi quando H, momento di disinvestimento, è proprio pari alla *duration* del titolo calcolata al tasso i.

Per accertarsi del fatto che la funzione abbia un punto di minimo in $H = D(i)$, bisogna studiarne la derivata seconda e verificare che questa sia maggiore di zero, e cioè che la funzione volga la concavità verso l'alto. Sulla base della (6) scriviamo la funzione come segue: per semplicità scriveremo $D(i)$ come D

$$V(i,D) = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{D-t_s} \tag{7}$$

e ne calcoliamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2V(i,D)}{d^2i} = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{D-t_s-2} \cdot (D-t_s) \cdot (D-t_s-1)$$

$$= (1+i)^{-2} \cdot [\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (D-t_s)^2 \cdot (1+i)^{D-t_s} - \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (D-t_s) \cdot (1+i)^{D-t_s}].$$

Notiamo che è maggiore di zero se $-\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (D-t_s) \cdot (1+i)^{D-t_s} \geq 0$.

Scomponendo questo termine abbiamo che:

$$-\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (D-t_s) \cdot (1+i)^{D-t_s} = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)^{D-t_s} - (1+i)^D \cdot \frac{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}} \cdot \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s} = \quad \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)^{D-t_s} - \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot t_s \cdot (1+i)D^{-t_s} = 0.$$

Dunque poiché quest'ultimo termine dell'espressione si annulla, abbiamo che la derivata seconda è uguale a:

$$\frac{d^2V(i,D)}{d^2i} = (1+i)^{-2} \cdot [\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (D-t_s)^2 \cdot (1+i)^{D-t_s}] > 0$$

Abbiamo così dimostrato che la derivata seconda della funzione è maggiore di zero in quanto prodotto di fattori positivi e dunque la funzione ha un punto di minimo assoluto in $H = D(i)$.

1.2 Interpretazione della *Duration* come *Volatility*

Un'ulteriore interpretazione della *duration*, viene utilizzata per poter conoscere esattamente l'ampiezza delle variazioni del prezzo di un titolo a seguito di variazione nei tassi di mercato.

A tal proposito si riporta la formula della *duration* in funzione del tasso istantaneo δ:

$$D(\delta) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot e^{-\delta t_s}} \tag{8}$$

dove il denominatore della funzione rappresenta il prezzo V(δ) del titolo attualizzato rispetto al tasso δ.

Per calcolare dunque l'ampiezza delle variazioni del prezzo di un titolo a seguito di variazione del tasso δ , si utilizza la derivata prima della funzione prezzo rispetto al tasso δ. Si ottiene così:

$$\frac{dV(\delta)}{d(\delta)} = -\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}$$

Moltiplicando e dividendo per la stessa quantità V(δ) quanto appena ottenuto abbiamo:

$$\frac{dV(\delta)}{d(\delta)} = \frac{-\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot e^{-\delta t_s}} \cdot \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot e^{-\delta t_s} = -\mathrm{D}(\delta) \cdot \mathrm{V}(\delta)$$

Dividendo ancora il valore ottenuto per il prezzo V(δ) abbiamo la variazione relativa della funzione V(δ) in base ad una variazione di δ:

$$\frac{\frac{dV(\delta)}{d(\delta)}}{V(\delta)} = \frac{-\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot e^{-\delta t_s}} = -\mathrm{D}(\delta) \tag{9}$$

Quello che notiamo è che l'indicatore che stavamo cercando, ossia quello che avrebbe permesso di conoscere le oscillazioni del titolo al variare del tasso, corrisponde proprio alla *duration* (a meno del segno) che assume quindi significato di volatilità del prezzo. Il segno negativo indica in questo caso la relazione inversa esistente tra il prezzo e il tasso di interesse per la quale all'aumentare dell'uno l'altro diminuisce. Abbiamo così ricavato un'informazione aggiuntiva fondamentale per la nostra analisi, e cioè quella per cui è proprio la *duration*, e non la durata residua del titolo, ad influenzare la risposta del corso di un titolo alle oscillazioni del tasso impiegato per valutarlo (Cacciafesta, 2013). Si può dunque concludere affermando che il titolo più sensibile a variazioni di tasso, e cioè il più volatile, è quello che ha una maggiore *duration*.

Quando il tasso subisce una variazione, questo passa da δ a δ+Δδ, per cui il valore attuale del titolo diventa V(δ+Δδ). Sviluppando V(δ+Δδ) in serie di Taylor fino al secondo termine otteniamo:

$$\mathrm{V}(\delta+\Delta\delta) \cong \mathrm{V}(\delta) + \frac{dV(\delta)}{d\delta} \cdot \Delta\delta = V(\delta) - D(\delta) \cdot V(\delta) \cdot \Delta\delta \tag{10}$$

e riordinando i termini di questa espressione:

$$\frac{\mathrm{V}(\delta+\Delta\delta) - \mathrm{V}(\delta)}{V(\delta)} \cong -D(\delta) \cdot \Delta\delta \tag{11}$$

Abbiamo così ottenuto la variazione percentuale del prezzo che, come volevasi dimostrare, è approssimativamente uguale alla *duration* moltiplicata per l'incremento di δ.

Un altro aspetto rilevante collegato all'interpretazione della *duration* come *volatility* è rappresentato dalla presenza di cedole e dal relativo ammontare. Il crescere del numero di cedole, così come il crescere del loro importo, ha un effetto stabilizzante sul titolo al variare dei tassi. Un titolo con cedole elevate perde meno valore in caso di rialzo dei tassi ma allo stesso modo ne acquista meno se i tassi dovessero calare. Va da sé dunque che la presenza di cedole porta ad una sensibilità minore del titolo e di conseguenza ad una *duration* minore. È per questo motivo che un operatore avverso al rischio tenderà sempre a scegliere un titolo con *duration* bassa e preferirà un titolo con cedole ad uno ZCB. Per dimostrare algebricamente quanto appena affermato, si propone un esempio pratico che mette a confronto due titoli obbligazionari differenti, uno ZCB biennale con valore di rimborso pari a 100 ed un BTP biennale con valore di rimborso pari a 78,95 e con cedole a frequenza annuale di importo pari a 10. Nella tabella 1 vengono calcolati i valori attuali dei due titoli dapprima nel caso in cui il tasso δ è uguale a 0,1 ed in questo caso si osserva che i due prezzi sono esattamente identici, pari ad 81,92. In seguito, viene calcolata la *duration* dei due titoli per mostrare che la *duration* dello ZCB, coincidente con la sua data di scadenza e dunque uguale a 2, è maggiore della *duration* del titolo con cedole a indicare una minor volatilità di quest'ultimo. In seguito, si calcolano valori attuali dei titoli nei casi in cui il tasso δ salga a 0,15 oppure scenda a 0,09. Quello che si può osservare è, come volevasi dimostrare, che in caso di aumento del tasso il titolo con cedole subisce un deprezzamento ma comunque minore di quello subito dallo ZCB. Al contrario, nel caso di diminuzione del tasso, il valore del BTP aumenta, ma in misura inferiore rispetto allo ZCB.

Fig.1 "Esercizio su ZCB e BTP"

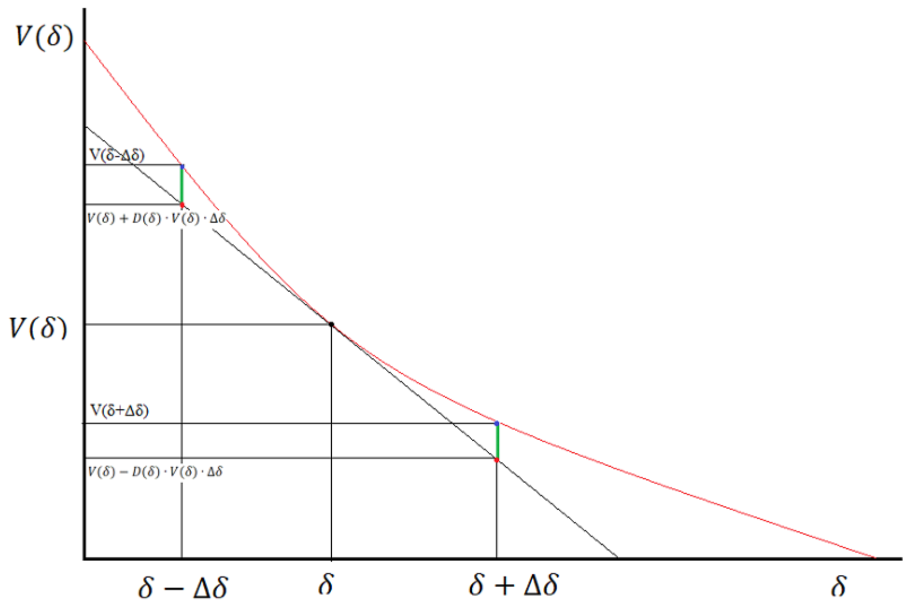
δ	ZCB	BTP
δ=0,1		
VA	81,92	81,92
DUR	2	1,8
δ=0,15		
VA	74,14	74,56
δ=0,09		
VA	83,57	83,47

(Elaborazione personale)

1.3 *Convexity*

Quando si studia la derivata prima della funzione prezzo al fine di calcolarne la volatilità, si misura la sua variazione al tasso sulla retta tangente e non sulla funzione stessa.

Fig.2 "Approssimazione con la retta tangente



(Elaborazione personale)

All'interno del grafico, la curva rossa rappresenta la funzione di rendimento dell'operazione finanziaria mentre la sua tangente è quella su cui studiamo gli effetti di una variazione del tasso. Notiamo che, man mano che ci si allontana dal punto di tangenza, l'approssimazione peggiora e i punti stimati sulla retta tangente differiscono sempre di più dai valori reali. In particolare, se il tasso di interesse cresce, avremo un errore per eccesso nella stima della variazione del prezzo evidenziato nel grafico dal segmento verde. Viceversa, se il tasso decresce, ci sarà un errore per difetto.

Allo stesso modo, quando nello sviluppo della serie di Taylor ci si ferma al secondo termine, quello che si ottiene è, come già sottolineato in precedenza, un'approssimazione. Ciò significa che la misura della *volatility* contiene un errore che dipende dall'andamento della curva del titolo al variare del tasso. Più precisamente, la *volatility* non tiene conto del grado di curvatura della funzione, cioè della sua convessità (Crenca et al., 2018).

Con l'analisi svolta fino a questo punto, potremmo essere erroneamente portati a pensare che due titoli con la medesima *duration* possano avere la stessa reazione ad una variazione dei tassi. Infatti, alcuni titoli possono essere sensibili in maniera diversa rispetto ad altri e, in generale, come abbiamo visto, più ci si allontana dal punto di tangenza meno l'approssimazione è attendibile.

Per migliorare l'approssimazione, dunque, viene sviluppata la serie di Taylor fino al terzo termine invece di fermarsi al secondo, ottenendo così:

$$V(\delta + \Delta\delta) \cong V(\delta) + \frac{dV(\delta)}{d(\delta)} \cdot \Delta\delta + \frac{d^2V(\delta)}{d\delta^2} \cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} \tag{12}$$

dove la derivata prima $\frac{dV(\delta)}{d(\delta)}$ abbiamo già visto essere uguale a $-D(\delta) \cdot V(\delta)$, mentre, per quanto riguarda la derivata seconda abbiamo:

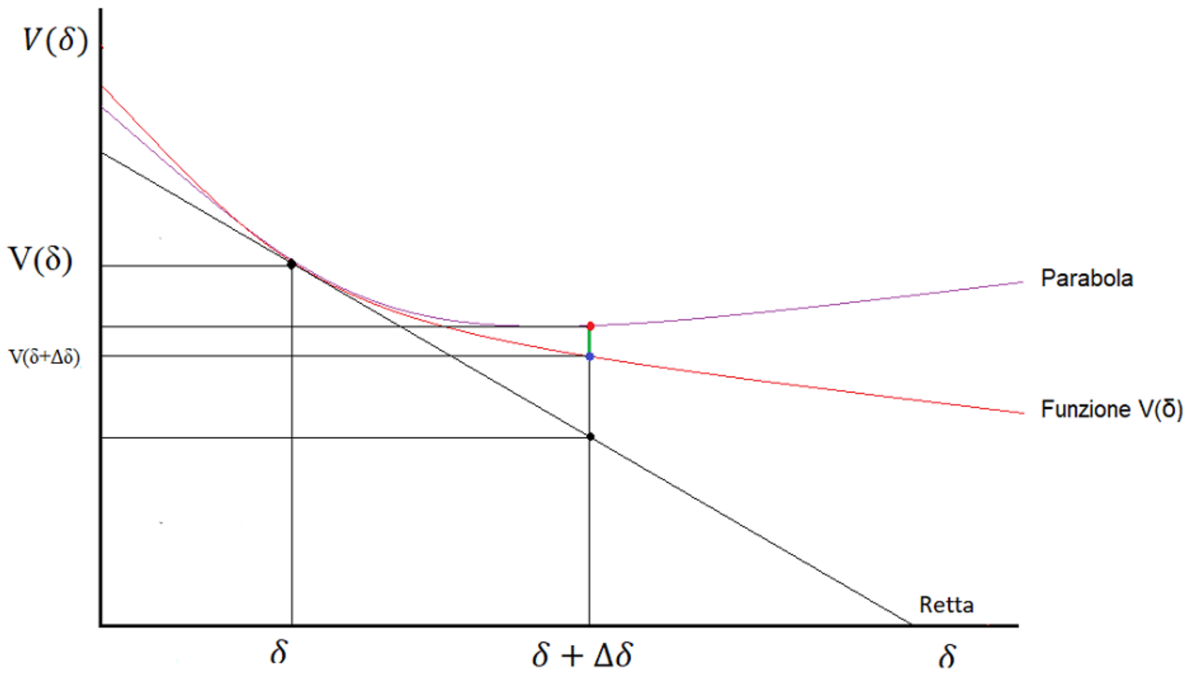
$$\frac{d^2V(\delta)}{d\delta^2} = \sum_{s=1}^{n} {t_s}^2 \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}$$

Come fatto per il caso della *volatility*, dividiamo per V(δ) per avere:

$$\frac{\frac{d^2V(\delta)}{d\delta^2}}{V(\delta)} = \frac{\sum_{s=1}^{n} {t_s}^2 \cdot F_s \cdot e^{-\delta t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot e^{-\delta t_s}} = D^2(\delta) \tag{13}$$

dove $D^2(\delta)$ è detta *duration* di secondo ordine ed è calcolata come media quadratica ponderata delle scadenze. In questo caso $D^2(\delta)$ coincide esattamente con la *convexity* del titolo e consente di studiare la curvatura della funzione. In particolare la *convexity* compensa l'errore sottostimando o sovrastimando le variazioni di prezzo rispettivamente nei casi di aumento o decremento del tasso.

Fig.3 "Approssimazione con la parabola"



(Elaborazione personale)

La figura mostra per l'appunto la differenza tra un'approssimazione lineare, rappresentata dalla retta tangente, ed una con la parabola, che nel grafico è la curva viola. In questo secondo caso vediamo come, per un aumento dei tassi, la parabola compensa l'errore per eccesso della retta sottostimando la variazione del prezzo. La sottostima fatta tramite l'approssimazione alla parabola è rappresentata nel grafico dal segmento verde. Nel caso opposto di diminuzione dei tassi, questa compensa l'errore per difetto della retta sovrastimando la variazione del prezzo.

Arrivati a questo punto, possiamo riscrivere lo sviluppo di Taylor come segue:

$$V(\delta+\Delta\delta) \cong V(\delta) - D(\delta)\cdot V(\delta)\cdot \Delta\delta + D^2(\delta)\cdot V(\delta)\cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} \qquad (14)$$

da cui:

$$V(\delta+\Delta\delta) \cong V(\delta) + Volatility\cdot V(\delta)\cdot \Delta\delta + Convexity\cdot V(\delta)\cdot \frac{\Delta\delta^2}{2!} \qquad (15)$$

Per *shift* molto piccoli del tasso di interesse la retta tangente esprime abbastanza bene le variazioni del prezzo a variazioni di tasso per cui ci si può fermare alla prima approssimazione del polinomio, mentre per variazioni maggiori è necessario aggiungere il secondo termine e considerare quindi la *convexity* della funzione.

1.4 Da tasso continuo (δ) a discreto (*i*)

Quando al posto di un tasso istantaneo δ viene utilizzato il tasso effettivo *i*, bisogna apportare alcuni aggiustamenti nella determinazione della volatilità e convessità di un titolo. Per svolgere questa analisi, si riporta il prezzo di un titolo calcolato in base al tasso *i*:

$$\mathrm{V}(i) = \sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s} \tag{16}$$

Nel caso della *volatility*, questa non coinciderà più esattamente con la *duration* ma con una nuova misura detta *duration* modificata.

Procediamo anzitutto derivando la funzione prezzo rispetto al tasso *i*. Avremo:

$$\frac{dV(i)}{di} = -\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-(t_s+1)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}.$$

Dividendo ancora il valore ottenuto per il prezzo V(i) abbiamo la variazione relativa della funzione V(i) in base ad una variazione di i:

$$\frac{\frac{dV(i)}{d(i)}}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}.$$

Ricordando che la *duration* in funzione del tasso effettivo di interesse è data da:

$$D(i) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}} \tag{17}$$

allora risulta che:

$$\frac{\frac{dV(i)}{d(i)}}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(i) = Volatility. \tag{18}$$

In questo caso dunque la *volatility* non coincide con la *duration* poiché bisogna dividere quest'ultima per 1+*i* al fine di ottenere la prima.

Anche utilizzando il polinomio di Taylor avremo che:

$$V(i+\Delta i) \cong V(i) + \frac{dV(i)}{di} \cdot \Delta i = V(i) - \frac{D(i)}{1+i} \cdot V(i) \cdot \Delta i \tag{19}$$

e ancora, riordinando i membri dell'equazione, avremo la variazione percentuale del prezzo :

$$\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{V(i)} \cong -\frac{D(i)}{1+i} \cdot \Delta i = Volatility \cdot \Delta i. \tag{20}$$

Anche nel caso della *convexity*, questa non coinciderà più esattamente con la *duration* di second'ordine nel caso di un tasso effettivo *i*, ma bisognerà ricorrere ad alcuni aggiustamenti.

In primo luogo, si calcola derivata seconda del prezzo rispetto al tasso effettivo *i*:

$$\frac{d^2V(i)}{di^2} = \sum_{s=1}^{n} t_s \cdot (t_s+1) \cdot F_s \cdot (1+i)^{-(t_s+2)}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2} \left[\sum_{s=1}^{n} (t_s{}^2 + t_s) \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2} \left[\sum_{s=1}^{n} t_s{}^2 \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s} + \sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}\right]$$

Dividendo quanto ottenuto per V(i) otteniamo:

$$\frac{\frac{d^2V(i)}{di^2}}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2} \left[\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s{}^2 \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}} + \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot (1+i)^{-t_s}}\right]$$

Che risulta essere uguale a:

$$\frac{\frac{d^2V(i)}{di^2}}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2} \left[D^2(i) + D(i)\right] = Convexity \tag{21}$$

Dunque, nel discreto, per ottenere la *convexity* bisogna sommare alla *duration* di secondo ordine la *duration* di primo ordine e dividere quanto ottenuto per $(1+i)^2$.

Considerando l'approssimazione al terzo termine del polinomio di Taylor abbiamo quindi:

$$V(i+\Delta i) \cong Vi + \frac{dVi}{d(i)} \cdot \Delta i + \frac{d^2Vi}{di^2} \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} \tag{22}$$

$$= V(i) - \frac{D(i)}{1+i} \cdot V(i) \cdot \Delta i + \frac{D(i)+D^2(i)}{(1+i)^2} \cdot V(i) \cdot \frac{\Delta i^2}{2!}$$

$$= V(i) + Volatility \cdot V(i) \cdot \Delta i + Convexity \cdot V(i) \cdot \frac{\Delta i^2}{2!}. \qquad (23)$$

1.5 Teorie semi-deterministiche di immunizzazione: l'immunizzazione classica

Il concetto di immunizzazione finanziaria viene introdotto da Redington per la prima volta al fine di trovare, all'interno di un portafoglio azionario, un equilibrio tra le operazioni finanziarie attive e quelle passive.

Un portafoglio è definito in equilibrio finanziario quando, in un determinato istante di valutazione *t*, il valore attuale dei flussi attivi è almeno uguale al valore attuale di quelli passivi, vale a dire quando il portafoglio ha valore non negativo.

L'analisi di Redington era quindi indirizzata alla ricerca di una condizione di "*matching*" tra le poste attive e quelle passive che potesse essere mantenuta anche e soprattutto nel caso di una perturbazione dei tassi di interesse (Redington, 1952).

Il punto chiave della sua analisi, quello che ha difatti ispirato numerosi studi successivi, è il concetto di "*general change*" della struttura dei tassi di interesse. Egli aveva ipotizzato, a fini esemplificativi, uno scenario in cui, all'interno di un portafoglio, fosse nota la struttura dei rendimenti all'istante *t* e che questa struttura fosse caratterizzata da un tasso di interesse costante su tutto il periodo. Nel caso di una perturbazione del tasso, quest'ultimo avrebbe potuto modificarsi solo per una traslazione, detta *shift*, di ampiezza casuale in un istante immediatamente successivo a *t*. In questo caso, dunque, l'unica incertezza è legata all'ampiezza e al segno dello *shift* additivo. Come anticipato in precedenza, questo esempio ha ispirato studi successivi tra cui quello di Fisher e Weil di cui si discuterà successivamente.

In ogni caso è importante notare che parliamo in questo caso di teorie semi-deterministiche poiché non si considerano le aspettative degli agenti economici sul futuro del mercato.

L'ipotesi di *shift* additivi:
Si ipotizza che la curva dei rendimenti possa subire, a seguito di un cambiamento nella struttura dei tassi, solo una modifica sotto forma di traslazione rigida. Dunque la funzione subirà, al variare del tempo t, degli *shift* verticali di ampiezza e segno incogniti. L'ipotesi viene dunque così esplicitata: $\delta(t', s) = \delta(t, s) + Z(t, t')$ dove $t' \geq t$ e $s \geq t'$ Z è la variabile aleatoria e rappresenta l'ampiezza dello *shift* additivo nell'intervallo di tempo tra *t* e *t'*.

Quando viene utilizzato lo schema basato sull'ipotesi di *shift* additivo, in particolare negli studi di Redington, Fisher e Weil, si parla di immunizzazione finanziaria classica. Quest'ultima, si basa sulla presenza di un portafoglio composto da un flusso di cassa attivo **x** con importi $x_1, x_2, \dots, x_n$ e da un flusso passivo **y** con importi $y_1, y_2, \dots, y_n$ valutati nell'istante *t* e scadenti negli istanti $t, t_1, t_2, \dots, t_n$. Il tasso di interesse è rappresentato dal tasso istantaneo $\delta(t,s)$ con $s \geq t$. L'immunizzazione finanziaria classica teorizza la ricerca di un equilibrio tra le poste attive e passive del portafoglio al tempo *t* tale da essere mantenuto in caso di uno *shift* additivo che abbia effetto in un istante t^+immediatamente successivo a t.

Quanto appena detto può essere scritto come: $\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + Y$ (24)

dove Y è l'ampiezza dello shift che ha effetto in t^+.

1.6 Il teorema di Fisher e Weil

Il teorema di Fisher e Weil è quello a cui ad oggi si fa riferimento quando si parla di equilibrio finanziario di un portafoglio. Partendo dalla precedente analisi di Redington, Fisher e Weil proposero una strategia di immunizzazione grazie alla quale, in un portafoglio immunizzato, il reddito prodotto a fine periodo dopo l'effetto di uno *shift* è comunque non-minore del reddito che si produrrebbe in assenza dello *shift* (Fisher et al., 1971).

Nello specifico, il teorema di Fisher e Weil è un teorema ad uscita singola poiché, sul modello di una prima analisi di Redington, esso considera un portafoglio composto da un flusso **x** di entrate a copertura di un flusso passivo consistente in un unico importo esigibile ad una scadenza predeterminata. In questa situazione, il portafoglio è in equilibrio se il valore attuale del flusso attivo è uguale al valore dell'importo passivo. Risulterà invece immunizzato se, a seguito di uno *shift* in t^+, il portafoglio avrà valore netto non negativo.

Il teorema di Fisher e Weil viene formulato come segue: (De Felice, et al., 1991)

Sia **x** un flusso attivo di importi non negativi con scadenze $t, t_1, t_2, \dots, t_n$ e sia L>0 l'importo passivo esigibile al tempo *H*>*t* dove *H* è, per l'appunto, un istante intermedio tra *t* e t_n . Considerando $\delta(t,s)$come tasso istantaneo di interesse, il punto di partenza del teorema sta nel considerare l'uguaglianza tra il valore attuale al tempo *t* del flusso attivo e il valore attuale al tempo *t* di L:

$$V(t,x) = V(t,L) \tag{25}$$

Nel caso in cui avvenga uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria nell'istante t^+, il valore post shift del flusso attivo dovrà essere non-minore del valore post-*shift* di L. Questa condizione può essere scritta come:

$$V(t^+, x) \geq V(t^+, L) \tag{26}$$

Il teorema di Fisher e Weil stabilisce che suddetta condizione può essere raggiunta se e solo se la *duration* di **x**, calcolata al tempo *t*, è uguale alla *maturity* di L:

$$D(t, x) = H - t \tag{27}$$

Per dimostrare quanto affermato, si consideri il rapporto tra i valori attuali di **x** e di L al tempo *t*: $Q(t, x, L) = \frac{V(t,x)}{V(t,L)} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t,u)du}$ (28)

Dove, in base alla (25), si avrà che $Q(t, x, L) = 1$.

A questo punto bisogna dimostrare che, se in t^+ la curva dei rendimenti dovesse subire uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria Y come nella (24), allora la condizione (27) è necessaria e sufficiente affinché il rapporto $Q(t^+)$ tra i valori post-shift sia maggiore o uguale a $Q(t)$, vale a dire maggiore o uguale a 1.

Il valore nell'istante t^+del quoziente Q sarà una funzione di Y:

$$Q(t^+, x, L, Y) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x_k e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t,u)du} \cdot e^{Y(H-t_k)} \tag{29}$$

dove Y=0 poiché Q=1 come impostato nel vincolo di bilancio precedentemente.

Studiando la derivata prima e seconda di Q(t^+), si ha rispettivamente:

$$Q'(Y) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k) \cdot x_k e^{\int_{t_k}^{H} \delta(t,u)du} \cdot e^{Y(H-t_k)}$$

$$Q''(Y) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k)^2 \cdot x_k e^{\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} \cdot e^{Y(H-t_k)}$$

Partendo dalla derivata seconda, questa risulta essere sempre non negativa per cui Q(t^+) è una funzione convessa che vale 1 per Y=0. Affinché la funzione abbia un valore maggiore o uguale ad 1 per qualunque ampiezza dello *shift*, basta porre uguale a zero la sua derivata prima calcolata in Y=0:

$$Q'(0) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}(H - t_k) \cdot x_k e^{\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} = 0 \qquad (30)$$

L'equazione può essere riscritta come:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(H-t_k)\cdot x_k \cdot v(t,t_k)}{L\cdot v(t,H)} = 0 \qquad (31)$$

Tenendo conto del vincolo di bilancio si ha:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)\cdot x_k \cdot v(t,t_k)}{L\cdot v(t,H)} = H - t \qquad (32)$$

che, come volevasi dimostrare, equivale alla condizione (27) $D(t,x) = H - t$.

Questo teorema fornisce dunque una strategia di immunizzazione del portafoglio grazie alla quale, a prescindere dall'ampiezza dello *shift*, se è soddisfatta la condizione di *duration*, i flussi di cassa attivi copriranno sempre l'unica uscita e quindi la disponibilità di L in *H* sarà sempre garantita.

1.7 Il teorema di Redington. Copertura di uscite multiple

Quanto è stato appena visto sul teorema di Fisher e Weil, è una soluzione di un problema semplificato poiché prevede la copertura di un flusso passivo composto da una sola uscita. A tal proposito, Redington propose una generalizzazione del teorema precedente al caso di un flusso passivo **y** ad uscite multiple. In questo caso, affinché un flusso di entrate **x** copra un flusso **y** anche dopo uno *shift* additivo, non sono più sufficienti le condizioni (34) e (36), ma bisognerà apportare delle modifiche.

Seguono enunciato e dimostrazione del teorema di Redington (De Felice, et al., 1991):

Siano **x** e **y** due flussi, rispettivamente attivo e passivo, di importi non negativi con scadenze $t, t_1, t_2, \dots, t_n$. Considerando $\delta(t,s)$come tasso istantaneo di interesse, il punto di partenza del teorema sta nel considerare l'uguaglianza tra i valori attuali di **x** e **y** al tempo *t:*

$$V(t,x) = V(t,y) \tag{33}$$

Nel caso in cui avvenga uno *shift* additivo di ampiezza aleatoria infinitesima nell'istante t^+, il valore post shift di **x** attivo dovrà essere non-minore del valore post-*shift* di **y**. Questa condizione può essere scritta come:

$$V(t^+,x) \geq V(t^+,y) \tag{34}$$

Il teorema di Redington stabilisce che suddetta condizione può essere raggiunta quando avvengono contemporaneamente le seguenti condizioni:

1. La *duration* di **x** è uguale alla *duration* di **y** calcolate entrambe al tempo *t*:

$$D(t,x) = D(t,y) \tag{35}$$

2. La *convexity* di **x** è non-minore della *convexity* di **y**:

$$D^2(t,x) \geq D^2(t,y) \tag{36}$$

A tal proposito si ricorda che:

$D^2(t,x) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)^2 \cdot x_k \cdot v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v(t,t_k)}$ e che $D^2(t,y) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t)^2 \cdot y_k \cdot v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot v(t,t_k)}$.

Per dimostrare quanto appena detto, si consideri la differenza $V_N(t)$ tra i valori attuali dei flussi **x** e **y** calcolati al tempo *t* con il tasso δ(*t*,*s*):

$$V_N(t) = V(t,x) - V(t,y) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k) \cdot e^{-\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} \quad (37)$$

Il valore nell'istante t^+di $V_N(t)$ sarà una funzione di Y:

$$V_N(t^+,Y) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k) \cdot e^{-\int_{t_k}^{H}\delta(t,u)du} \cdot e^{-\int_{t_k}^{H}\delta(t^+,u)du}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k) \cdot v(t,t_k) \cdot e^{-Y(t_k-t)} \quad (38)$$

Studiando la derivata prima e seconda di $V_N(t)$ rispetto ad Y, si ha rispettivamente:

$$V'_N(Y) = -\sum_{k=1}^{n}(t_k - t) \cdot (x_k - y_k) \cdot v(t,t_k) \cdot e^{-Y(t_k-t)}$$

$$V''_N(Y) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t)^2 \cdot (x_k - y_k) \cdot v(t,t_k) \cdot e^{-Y(t_k-t)}$$

Considerando adesso lo sviluppo in serie di Taylor di $V_N(Y)$ fino al terzo termine intorno a Y=0 otteniamo:

$$V_N(Y) = V_N(0) + YV'_N(0) + \frac{1}{2}Y^2V''_N(0) \quad (39)$$

Le ipotesi (33) e (35) assicurano che $V_N(0) = V'_N(0) = 0$ per cui la condizione di immunizzazione, che si ricorda essere $V_N(Y) \geq 0$ per valori di Y sufficientemente prossimi a zero, è soddisfatta solo se il terzo termine della serie è non-negativo.

Studiando $V''_N(0)$, questa risulta non-negativa quando:

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t)^2 \cdot x_k \cdot v(t,t_k) \geq \sum_{k=1}^{n}(t_k - t)^2 \cdot y_k \cdot v(t,t_k)$$

Vale a dire quando:

$$V(t,x) \cdot D^2(t,x) \geq V(t,y) \cdot D^2(t,y) \tag{40}$$

e cioè proprio quando vale la condizione di *convexity* (36) poiché, in base alla (33), $V(t,x) = V(t,y)$.

Quello che è importante notare a questo punto, è la differenza tra i due teoremi appena analizzati, quello di Fisher e Weil e quello di Redington. Infatti, mentre il primo consente una strategia di immunizzazione del portafoglio “globale”, vale a dire valida per qualunque ampiezza dello *shift* additivo, il secondo consente un risultato solo locale poiché valido solo per ampiezze di Y, come precedentemente anticipato, sufficientemente prossime allo zero (Cacciafesta, 2013).

APPENDICE B

Al fine di calcolare le *duration* dei titoli nel portafoglio attivo creato nel secondo capitolo di questo lavoro, si è fatto ricorso alla formula richiamata finora sulla base del tasso di interesse discreto *i* per cui $D(i) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s \cdot F_s \cdot v^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} F_s \cdot v^{-t_s}}$.

Con riferimento al primo titolo in portafoglio, ISIN US912810SR05, il tasso cedolare è pari all'1,125% e la cedola è corrisposta annualmente. Per questo motivo i flussi intermedi (F_s) , calcolati sul valore nominale del titolo, e cioè su 100, sono pari a 1,125. Facendo la sommatoria dei flussi attualizzati, compreso il valore di rimborso, al tasso del 2% e ponderando per le scadenze, si è ottenuto il numeratore della *duration.* Al denominatore compare invece il prezzo del titolo, calcolato anche in questo caso tramite la sommatoria dei flussi intermedi e del valore rimborso attualizzati al medesimo tasso. Tramite questa operazione si è giunti a calcolare il valore della *duration* pari a 15,24.

Per il secondo titolo, con ISIN US912828ZQ64, si è proceduto analogamente. Le cedole, corrisposte annualmente e calcolate in base al valore nominale del titolo, anche in questo caso uguale a 100, sono pari a 5. In questo caso, come affermato anche nel corso del capitolo II, essendo il tasso cedolare maggiore di quello al quale le cedole vengono reinvestite, il prezzo del titolo è sopra la pari, cioè maggiore del valore nominale pari a 100. La *duration* di tale titolo è stata calcolata esattamente allo stesso modo di quella del titolo precedente, giungendo così ad un valore pari a 8,70. Tale valore, come è evidente, è di molto inferiore alla *maturity* del titolo, pari a 11, e questo è dato dal fatto che le cedole corrisposte sono molto elevate (tasso cedolare pari al 5%), a conferma del fatto che, come già affermato nell'Appendice A di questo studio, la frequenza cedolare e il relativo importo hanno un effetto stabilizzante sul titolo al variare dei tassi.

Bibliografia e Sitografia:

De Felice M., Moriconi F. (1991) La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie, Bologna, Il Mulino.

Crenca, C., Fersini, P., Melisi, G., Olivieri, G., & Pelle, M. (2018) Elementi di matematica finanziaria, Pearson.

Basso A., Pianca P. (2017) Introduzione alla matematica finanziaria, Cedam.

Cacciafesta F. (2013), Matematica finanziaria (classica e moderna) : per i corsi triennali, Torino, G Giappichelli.

Silvestri, A. (2008) La pianificazione finanziaria nelle imprese di assicurazione. Un approccio integrato alla gestione di portafoglio, Franco Angeli.

Mishkin F. S., Eakins S. G., Beccalli E. (2019) Istituzioni e mercati finanziari, Pearson.

Cummins, J. D., & Song, Q. (2008) Hedge the Hedgers: usage of reinsurance and derivatives by PC Insurance Companies.

Cesari R., Mosco V. (2017) Duration, convexity and the optimal management of bond portfolios for insurance companies (7)

Elena Bellizzi, I. B. (1999) Il margine di solvibilità delle imprese di assicurazione: confronto tra sistema europeo e americano. (6). Tratto da IVASS.

Bozzano, Roberti, Corvino, & Saita. (2001) L'asset liability management nelle imprese di assicurazione sulla vita. (12). Tratto da IVASS.

Rigo S., Fasan M. (2019) Gli strumenti finanziari derivati: aspetti di risk management, valutazione e contabilizzazione. Inserto n. 247, Ordine Dottori Commercialisti ed Esperti Contabili di Venezia.

Allianz Global Investors, Stategic Bond Fund. Tratto da: https://it.allianzgi.com/it-it/pro/i-nostri-fondi/funds/mutual-funds/allianz-strategic-bond-a-h2-eur-eur?nav=structure.

Börse Frankfurt: https://www.boerse-frankfurt.de