DIPARTIMENTO DI IMPRESA E MANAGEMENT

CATTEDRA DI MATEMATICA FINANZIARIA

LA TEORIA DI ASSET ALLOCATION: IL MODELLO BLACK-LITTERMAN

RELATORE

Prof.ssa. Gabriella Foschini

CANDIDATO

Beatrice Di Tondo

Matricola 252581

ANNO ACCADEMICO

2022/2023

INDICE

Introduzione

La gestione dei portafogli finanziari rappresenta una sfida complessa per gli investitori, i gestori di asset e gli analisti di mercato. In generale, la gestione degli investimenti è un articolato e complesso processo che richiede una rigorosa analisi e un'efficiente allocazione delle risorse finanziarie al fine di massimizzare i rendimenti e minimizzare il rischio (volatilità). Infatti, in un contesto di mercati finanziari sempre più volatili e incerti, i modelli di *asset allocation* si rivelano strumenti fondamentali per gli investitori e i gestori di portafoglio.

In generale, un processo di selezione del portafoglio di un investitore prevede diversi passi, che consistono nel determinare preliminarmente elementi come l'orizzonte temporale di investimento, l'insieme degli asset o mercati rilevanti da prendere in esame e il peso percentuale da assegnare a ogni asset o ad ogni mercato. Questi tre step compongono la cosiddetta *Asset Allocation Strategica* (AAS), ossia l'insieme delle scelte fondamentali che caratterizzano l'investimento al fine di attuare una ripartizione efficiente delle risorse tra diversi asset finanziari presenti sul mercato. Naturalmente, da un punto di vista dinamico, le decisioni suddette possono essere riviste sia temporaneamente sia in modo permanente attraverso un nuovo processo di selezione[1].

La presente tesi si propone di esplorare e analizzare i modelli che gettano le basi dei moderni modelli di asset allocation dei titoli in portafoglio utilizzati. L'obiettivo principale è quello di fornire una panoramica dei principali approcci e metodologie utilizzate per la costruzione di portafogli ottimali, tenendo conto delle esigenze specifiche degli investitori e delle condizioni di mercato. Nel corso della tesi, verranno esaminati diversi modelli di allocazione ottima dei titoli in portafoglio, tra cui il modello di Markowitz, il Capital Asset Pricing Model e il modello di Black-Litterman. In conclusione, verrà presentata un'applicazione pratica di quest'ultimo modello, prendendo in considerazioni 5 diversi asset appartenenti all'indice di mercato FTSE MIB.

In particolare, nel primo capitolo viene presentata la base di partenza dell'AAS, ovvero un modello che risale al premio Nobel Harry Markowitz e questo approccio, introdotto per la prima volta nel 1952, rappresenta una delle più importanti teorie del portafoglio e

[1] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 121.

fornisce un metodo per determinare l'allocazione ottimale dei titoli in un portafoglio finanziario utilizzando il doppio del massimo rendimento atteso e della minima volatilità (*approccio media-varianza*). Ciò che questa teoria rileva non è tanto la storia passata, ma le prospettive *future*. Pertanto, rendimenti attesi e volatilità, devono riflettere gli andamenti previsti sull'orizzonte di investimento futuro. A proposito, contestualmente, viene elaborata l'idea che, secondo Markowitz, la scelta corretta dal punto di vista della razionalità economica consiste nel trovare il mix (dato dal portafoglio finanziario) che contemperi (*trade-off*) il rendimento atteso e la volatilità. È proprio in questa sede che emerge il concetto di *diversificazione*, ovvero la selezione del portafoglio caratterizzata da titoli non correlati (o almeno perfettamente), che ha rappresentato un momento cruciale nella storia della teoria del portafoglio e ha portato Harry Markowitz ad essere riconosciuto come il creatore della moderna teoria del portafoglio[2]. Lo studioso, quindi, individua il rischio del portafoglio nella varianza del portafoglio stesso (o la sua radice, chiamata deviazione standard) e riesce così ad individuare un insieme di portafogli ottimali ed efficienti (che insieme compongono la *frontiera efficiente*) cercando di minimizzare la varianza per ogni dato valore del rendimento atteso.

Ancora nel primo capitolo, viene esposto il Capital Asset Pricing Model (CAPM), noto anche come modello di Sharpe, sviluppato da quest'ultimo nel 1964. Questo modello trasforma il modello di Markowitz, al "prezzo" di alcune ipotesi restrittive, da metodo di selezione del portafoglio individuale a relazione di equilibrio macroeconomico sul mercato finanziario. Nel modello media-varianza con le ipotesi di Sharpe, il *rendimento in eccesso* di un qualunque titolo o portafoglio è proporzionale alla covarianza fra il rendimento del titolo (dato della somma del *tasso risk-free* e di un *premio al rischio*) e il rendimento del mercato[3]. A proposito, saranno esaminati i principali concetti e le formule matematiche fondamentali del modello, nonché le assunzioni alla base della sua implementazione. In particolare, nell'intero capitolo si esamineranno i concetti principali del modello di Markowitz e di Sharpe, come la nozione di rendimento atteso, varianza, covarianza, rischio sistemico di mercato, beta e tasso privo di rischio.

Le competenze acquisite degli operatori finanziari con il tempo hanno evidenziato le problematicità applicative dell'approccio di Markowitz. Infatti, gli operatori finanziari

[2] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 123, 124.
[3] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 178.

tendono ad investire in portafogli simili ai benchmark di mercato per cercare di ridurre il rischio, distaccandosi solo a causa delle proprie opinioni. Al contrario, il modello proposto da Markowitz è caratterizzato da limiti applicativi quali, ad esempio, l'uso di assunzioni irrealistiche, la sensibilità ai dati di input, la costruzione di portafogli estremi, e una diversificazione limitata. Di fronte a tali problematiche, la letteratura finanziaria ha sviluppato con il tempo modelli più efficienti e stabili. Di conseguenza, si è cercato di rielaborare il concetto di volatilità, andando quindi oltre alla sua associazione con la varianza. In altre parole, si è cercato di legare i portafogli efficienti a quelli di riferimento (benchmark di mercato), al fine di sviluppare modelli più affidabili e idonei per l'asset allocation.

Uno degli ultimi (cronologicamente parlando) studiosi che hanno esposto un nuovo approccio per l'allocazione ottima dei titoli in portafoglio sono stati Fisher Black e Robert all'inizio degli anni Novanta. Questo modello viene descritto ampiamente nel secondo capitolo di questo elaborato. Verranno esaminati gli assunti fondamentali del modello di Black-Litterman, tra cui l'importanza delle views degli investitori e l'utilizzo di informazioni di mercato per migliorare la precisione delle stime dei rendimenti attesi e delle covarianze. La peculiarità di questo approccio risiede appunto nella sua capacità di combinare due differenti tipi di informazioni (l'equilibrio di mercato e le views degli investitori) grazie all'approccio bayesiano, al fine di stimare un'ottimale matrice di varianza-covarianza delle attività finanziarie tenute in considerazione per la costruzione del proprio portafoglio. Verrà esaminato nel capitolo anche l'eventualità che l'investitore non abbia in alcun modo espresso opinioni sui rendimenti degli asset costituenti il portafoglio dello stesso. Nel contesto descritto, quando si verificano determinate condizioni, il portafoglio ottimale coinciderà con il portafoglio di equilibrio[4]. A questo punto, bisogna comporre un portafoglio finanziario efficiente ed ottimo e a questo scopo si applicherà l'approccio di media-varianza di Markowitz, che si basa su stabili e credibili modelli economici. Oltre a Markowitz, il modello Black Litterman usa anche il modello di Sharpe per calcolare i rendimenti di equilibrio, che a sua volta utilizza il metodo chiamato "*reverse optimization*".

[4] Il portafoglio di equilibrio non è altro che il portafoglio di mercato, ossia quello composto dai diversi titoli in proporzione alla loro capitalizzazione di mercato (rappresenta l'equilibrio del Capital Asset Pricing Model).

Nell'ultimo capitolo invece viene illustrata un'applicazione del modello di Black Litterman, prendendo cinque titoli appartenenti ognuno ad un settore economico differente, per cercare di diversificare il nostro portafoglio esemplificativo. In particolare, sono stati scelte le azioni di Intesa San Paolo, Enel, Amplifon, Terna e Generali Assicurazioni, ovvero tutti titoli appartenenti al FTSE MIB, il principale indice azionario presente in Italia. Una volta reperiti i dati storici e calcolati i rendimenti logaritmici e quelli in eccesso, abbiamo proseguito la nostra implementazione calcolando tutte le variabili necessarie, come la matrice di varianza-covarianza, il coefficiente di avversione al rischio e i pesi del mercato dei cinque titoli presenti in portafoglio. Con questi input, successivamente, abbiamo stimato i rendimenti in eccesso impliciti di equilibrio e introdotto le aspettative (views) relative dell'investitore sugli asset considerati. A questo punto, con tali informazioni, abbiamo calcolato la matrice di collegamento e quella che contiene le varianze relative alle opinioni dell'investitore, per poi arrivare finalmente ai rendimenti attesi stimati attraverso la l'equazione principale del modello di Black-Litterman (*equazione 2.13*). Ottenuti suddetti valori li abbiamo poi messi a confronto con i rendimenti calcolati facendo la media aritmetica dei rendimenti logaritmi storici e con quelli calcolati secondo l'approccio del CAPM.

Capitolo 1
Evoluzione della teoria di ottimizzazione di portafoglio

1.1 Il Modello di Markowitz

Il modello di Markowitz, noto anche come teoria della selezione del portafoglio efficiente, è stato introdotto per la prima volta nel 1952 con la pubblicazione dell'articolo *Portfolio Selection* dal premio Nobel per l'economia Harry Markowitz[5]. Questo modello sull'allocazione dei titoli nel portafoglio finanziario è una delle più importanti teorie del portafoglio e fornisce un metodo per determinare l'allocazione ottimale dei titoli in un portafoglio sulla base del rischio e del rendimento atteso. Costituisce infatti uno dei più importanti strumenti di gestione del rischio e allocazione degli investimenti, ed è ancora ampiamente utilizzato dai professionisti del settore finanziario. In questo capitolo, presenteremo i principali concetti della teoria di Markowitz, le formule e le derivazioni matematiche che consentono di calcolare l'allocazione ottimale dei titoli.

Prima della pubblicazione di tale articolo, gli studi finanziari in merito avevano valutato solamente titoli finanziari presi singolarmente, non tenendo conto delle possibili correlazioni tra gli stessi, rappresentate dalla covarianza tra i titoli. Al contrario, lo studio di Markowitz dimostra che un investitore, sotto determinate ipotesi, può costruire dei portafogli finanziari efficienti se si considerano le correlazioni tra gli asset nel momento in cui si costruisce il portafoglio, perciò attraverso la cosiddetta "diversificazione" dei titoli. Così facendo si otterranno dei portafogli finanziari che offrono una volatilità più bassa ottenendo il medesimo rendimento atteso; oppure livello più alto di rendimento atteso con il medesimo grado di volatilità, paragonandoli ai portafogli costruiti ignorando il grado di correlazione fra gli asset. Tuttavia, cosa intende Markowitz quando nel suo articolo "Portfolio Selection" scrive la parola "*diversification*"? L'economista, infatti, con questo termine intende semplicemente la selezione di strumenti finanziari non perfettamente correlati fra loro la cui combinazione, nel portafoglio finanziario, risulti in una

[5] Harry Markowitz (1952), "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91

minimizzazione del rischio e contemporaneamente in una massimizzazione del rendimento[6]. Cioè si distribuisce il rischio in diversi titoli per diminuirlo[7]. Quindi, l'introduzione di questa nuova idea ha segnato un momento cruciale nella storia, tanto che Harry Markowitz è attualmente riconosciuto come il creatore della moderna teoria del portafoglio.

Le ipotesi del modello elaborato da Markowitz sono:

1. I mercati sono *efficienti*, ossia:
    a. Non sono presenti asimmetrie informative;
    b. I costi di transazione sono nulli;
    c. Le imposte sono trascurabili;
    d. Gli operatori sono razionali;
    e. C'è un regime di concorrenza perfetta (gli agenti sono *price-taker*);
    f. Non sussiste possibilità di arbitraggio (non c'è la possibilità di ottenere extra profitti).
2. Gli operatori sono *avversi al rischio*;
3. Esistono *n* attività finanziarie disponibili sul mercato;
4. Gli operatori, nello scegliere le diverse alternative di investimento sono interessati esclusivamente a massimizzare il valore atteso (rendimento) e a minimizzare la varianza (rischio);
5. Gli investitori hanno accesso illimitato al capitale a un tasso di interesse privo di rischio;
6. Gli investimenti avvengono in un *unico periodo*, valido per tutti i partecipanti al mercato;
7. Il rendimento dell'i-esima attività finanziaria ha distribuzione normale con media μ e deviazione standard σ;
8. Esistono le vendite allo scoperto.

Consideriamo quindi un portafoglio P, composto da *n* asset finanziari (che possono essere rischiosi e/o non). Supponiamo che questo portafoglio venga costruito da un agente che

[6] Francesca Benedetti (2020), "Markowitz: l'inizio di una nuova economia", *Starting finance*, https://startingfinance.com/approfondimenti/markowitz-fine-economia-classica/#:~:text=I%20risultati%20ottenuti%20dalla%20Modern,rendimenti%20non%20sono%20perfettamente%20correlati.

[7] Annalisa Fabretti (2019/2020), "Teoria del portafoglio e approccio media varianza", slide 19-20 https://economia.uniroma2.it/cdl/triennio/clef/corso/asset/YTo0OntzOjI6ImlkIjtzOjQ6IjEyMTkiO3M6MzoiaWRhIjtzOjU6IjQ3Mzc0IjtzOjI6ImVtIjtOO3M6MToiYyI7czo1OiJjZmNkMiI7fQ==
alternativamente cercare "slide teoria portafoglio-2020-04-15-09-59-54.pdf"

ha deciso di investire un certo importo X_0 (rappresenta quindi la ricchezza iniziale dell'investitore). La somma investita per l'*i-esimo* asset è X_{0i} dove $i = 1, 2, \dots, n$, tale per cui $X_0 = \sum_{i=1}^{n} X_{0i}$.

In questo portafoglio, ogni titolo è ponderato in base alla percentuale $w_1, w_2, \dots, w_n$ in modo che la somma di questi pesi sia pari a 1. In particolare, è importante precisare che assumendo l'eventuale presenza delle vendite allo scoperto, i pesi w dei titoli nel portafoglio presi singolarmente possono essere anche negativi. Tuttavia, bisogna mantenere appunto la seguente condizione:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad i = 1,2, \dots, n \tag{1.1}$$

Inoltre, ne deriva che l'ammontare del capitale investito in un'attività finanziaria potrà essere espresso anche come una frazione del totale investito. Analiticamente possiamo scrivere:

$$X_{0i} = w_i X_0 \tag{1.2}$$

Il procedimento per illustrare il modello di Markowitz si può articolare in tre fasi, basandoci quindi su un modello composto da *n* titoli o mercati di riferimento:

1. Calcolare ed analizzare il *rendimento atteso*, la *varianza* e la *covarianza* dei tassi di rendimento di ogni portafoglio di riferimento;
2. Definire e derivare matematicamente la frontiera efficiente;
3. Selezionare il portafoglio ottimale in base alle preferenze dell'investitore.

1.1.1 Il rendimento atteso

In generale, il rendimento di un portafoglio finanziario è il guadagno o la perdita che si ottiene dall'investimento in un insieme di asset finanziari in un determinato periodo di tempo, espresso come percentuale del capitale investito. Formalmente, una volta definito R_i come il rendimento[8] del titolo i-esimo con $i = 1,2, \dots, n$, possiamo derivare la stima del rendimento del portafoglio mettendo in relazione il valore iniziale del portafoglio

[8] Il rendimento è una misura (di solito espressa in termini percentuali, che indica l'aumento o la diminuzione del valore di un investimento, in questo caso di titoli, nel corso di un periodo specifico. Si può calcolare facendo la differenza tra il prezzo del titolo finale (al termine del periodo considerato) e tra il prezzo iniziale, tutto rapportato per il prezzo iniziale. In termini matematici: $\frac{P_1 - P_0}{P_0}$.

(quello che prima abbiamo definito il capitale investito X_0, supponendo in t=0) con quello finale (che chiameremo X_1, supponendo che avvenga in t=1)[9] Questo ultimo valore rappresenterebbe la ricchezza finale dell'investitore.:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0 \tag{1.3}$$

Quindi:

$$R_P = \frac{X_1}{X_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i \tag{1.4}$$

Analogamente possiamo scrivere che il *tasso di rendimento del portafoglio* è pari a:

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i \tag{1.5}$$

Dove r_i è il tasso di rendimento di ciascun asset.
Quello appena descritto è il rendimento del portafoglio *ex-post,* ovvero il rendimento effettivo che un portafoglio ha generato in passato. Rappresenta quindi il risultato effettivo dell'investimento nel periodo considerato. Tuttavia, al momento della costruzione del portafoglio, l'agente non ha la possibilità di calcolare il rendimento (e quindi il guadagno o la perdita) che percepirà effettivamente dopo la data di scadenza dell'investimento. Dovrà quindi calcolare un rendimento *ex ante*, chiamato *rendimento atteso del portafoglio*, che esprime il ricavo che un portafoglio dovrebbe generare in futuro. Questo valore viene calcolato in base alle aspettative di rendimento dei singoli titoli e alla loro correlazione storica, utilizzando un modello di previsione del rendimento futuro. Viene quindi utilizzato per prendere decisioni future sulla composizione del portafoglio.

---

[9] Annalisa Fabretti (2019/2020), "Teoria del portafoglio e approccio media varianza", slide 19-20 https://economia.uniroma2.it/cdl/triennio/clef/corso/asset/YTo0OntzOjI6ImlkIjtzOjQ6IjEyMTkiO3M6MzoiaWRhIjtzOjU6IjQ3Mzc0IjtzOjI6ImVtIjtOO3M6MToiYyI7czo1OiJjZmNkMiI7fQ==
alternativamente cercare "slide teoria portafoglio-2020-04-15-09-59-54.pdf"

Fatta questa premessa, il rendimento atteso del portafoglio si può definire come la media ponderata dei rendimenti delle singole attività che compongono il portafoglio[10].

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mu_P \qquad con\ i = 1,2,\dots,n \tag{1.6}$$

Dove $E(r_i)$, che in questa trattazione chiameremo anche μ_i, rappresentano il rendimento atteso della i-esima attività finanziaria investita all'interno del portafoglio.

1.1.2 La varianza

Nel modello matematico elaborato da Markowitz, il *rischio* è misurato come la radice quadrata della varianza, chiamata deviazione standard, poiché questa misura la volatilità dei rendimenti intorno al loro valore atteso. Infatti, la varianza non è altro che una misura statistica (di grande rilevanza economica) che in generale si può definire come un indice di dispersione dei dati intorno alla media. Di conseguenza stima quanto i rendimenti degli asset in un portafoglio variano rispetto alla media del portafoglio stesso. Maggiore è la varianza, maggiore è il rischio associato all'investimento in quel portafoglio. Al contrario, una varianza bassa indica che i rendimenti sono meno volatili e che fluttuano in modo più prevedibile rispetto alla media. Come accennato precedentemente, Markowitz sostiene infatti che il rischio di un portafoglio non è determinato semplicemente dalla somma dei rischi dei singoli titoli che lo compongono, ma dipende anche dalle interazioni tra di essi. Deriviamo analiticamente la varianza di un portafoglio finanziario:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= E[(r_P - \overline{r_P})^2] = E\left[\sum_{i=1}^{n} r_i w_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} w_i\right]^2 = \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \overline{r_i})\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \overline{r_j})\right)\right] = E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j E[(r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})]) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{1.7}$$

[10] Borsa italiana, Glossario finanziario, "*Portafoglio*"
https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/portafoglio.html#:~:text=Il%20valore%20atteso%20del%20rendimento,wi%20x%20E(Ri)%5D.

Dove:

- σ_{ij} è una misura di correlazione, nello specifico rappresenta la covarianza tra i rendimenti del titolo i-esimo e del titolo j-esimo;
- $\bar{r}$ è la media dei tassi di rendimento dei titoli (scelto arbitrariamente). Tuttavia dobbiamo specificare che se i due titoli coincidono ($i = j$), la covarianza tra questi due titoli non è altro che la varianza dei due titoli presi in considerazione.

La varianza complessiva di un portafoglio è determinata non solo dalle varianze individuali dei titoli che lo compongono, ma anche dalle relazioni tra le attività finanziarie stessi, rappresentate dalle correlazioni tra di essi. In altre parole, la varianza del portafoglio dipende sia dalle caratteristiche individuali dei titoli che dalla loro interazione all'interno del portafoglio.

1.1.3 La covarianza

La covarianza è una misura della relazione lineare tra le variazioni di rendimento di due asset all'interno di un portafoglio. Quindi, si può definire come un indice che esprime la dipendenza reciproca tra due o più variabili casuali, che in questo caso sono rappresentate dai vari asset. Formalmente:

$$\sigma_{ij} = Cov(i, j) = E\left[(r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right] \tag{1.8}$$

La covarianza può assumere un valore compreso nell'intervallo compreso tra $-\sigma_i\sigma_j$ e $\sigma_i\sigma_j$ (dominio), ovvero questa misura di correlazione è sempre compresa tra il prodotto delle deviazioni standard. Tale vincolo può essere espresso dalla disuguaglianza $|\sigma_{ij}| < \sigma_i\sigma_j$. A proposito, considerati due asset rischiosi tali che $\sigma_i, \sigma_j > 0$, è opportuno analizzare tre diversi casistiche. La prima illustra quando due titoli nel portafoglio non sono correlati, ovvero se $\sigma_{ij} = 0$. Il secondo caso invece si presenta quando le due variabili sono positivamente correlate, ovvero quando $\sigma_{ij} > 0$. La terza e ultima situazione avviene quando i due asset sono correlati negativamente, ovvero se $\sigma_{ij} < 0$.

Esistono anche altri due casi "limite", nel momento in cui la covarianza coincide con i due estremi del suo dominio. Infatti, se $\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j$ tra i due titoli vi è una perfetta correlazione positiva. Nel caso in cui, invece, $\sigma_{ij} = -\sigma_i\sigma_j$, allora ci troveremo davanti ad una situazione di perfetta correlazione negativa tra i due asset finanziari.

Sempre relativa alla covarianza, esiste una nuova misura statistica, chiamata *coefficiente di correlazione* (ρ), che descrive la relazione lineare tra le performance di due strumenti finanziari all'interno di un portafoglio di investimento. Si può esprimere questo coefficiente attraverso il rapporto tra la covarianza di due titoli finanziari e il prodotto delle loro deviazioni standard. Analiticamente questa misura si può ricavare proprio dalla limitazione della covarianza, dividendo l'intervallo tra cui sono compresi i valori possibili assunti da quest'ultima per il prodotto delle deviazioni standard delle due variabili casuali[11]:

$$\begin{gathered} -\sigma_i\sigma_j \leq \sigma_{ij} \leq \sigma_i\sigma_j \\ \frac{-\sigma_i\sigma_j}{\sigma_i\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} \leq \frac{\sigma_i\sigma_j}{\sigma_i\sigma_j} \\ -1 \leq \rho = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} \leq 1 \end{gathered} \tag{1.9}$$

Ottenuto il coefficiente di correlazione, si osserva come anche quest'ultimo può assumere valori solamente compresi tra 1 e -1. Se l'indice ρ assume un valore di -1 ciò significa che tra i due titoli sussiste una correlazione perfettamente negativa (ovvero i due asset si muovono sempre in direzioni opposte), mentre un valore pari ad 1 indica una correlazione perfettamente positiva (ovvero i due asset si muovono sempre nella stessa direzione). Quindi, in entrambi i casi ($\rho = \pm 1$), la dipendenza tra le due attività finanziarie è massima. Un valore di ρ pari a 0 indica una completa mancanza di correlazione tra i due asset. Più in generale invece, se il coefficiente di correlazione ρ si trova tra 0 e 1, ciò indica che le due variabili sono correlate positivamente, ovvero quando una delle variabili aumenta, anche l'altra tende ad aumentare. Al contrario, se il coefficiente di correlazione si trova tra -1 e 0, ciò indica che le due variabili sono correlate negativamente e quando una variabile aumenta, l'altra tende a diminuire.

Questo indice è importante perché consente di valutare la diversificazione del portafoglio. Infatti, se due asset hanno un'alta correlazione positiva, ovvero se si muovono insieme

[11] "Teoria matematica del portafoglio finanziario", pag. 33-34
https://www.unirc.it/documentazione/materiale_didattico/1465_2015_398_22140.pdf

nella stessa direzione, il loro inserimento nel portafoglio non ridurrà il rischio complessivo del portafoglio. Al contrario, se due asset hanno una bassa correlazione o una correlazione negativa, il loro inserimento nel portafoglio può ridurre il rischio complessivo del portafoglio. Bisogna specificare inoltre che la correlazione esaminata è un legame lineare, poiché se i titoli sono correlati non linearmente, anche in questo caso la covarianza assume un valore nullo.

1.1.4 L'approccio media-varianza

Come abbiamo visto anche in precedenza, si può notare quindi che ciò che conta non è tanto la storia passata, quanto le prospettive future. Di conseguenza, i rendimenti attesi e la volatilità, devono riflettere le previsioni future sull'orizzonte di investimento. In base a queste previsioni, l'investitore seleziona un portafoglio ottimale utilizzando il doppio criterio di massimo rendimento atteso e minima volatilità. Sarebbe sbagliato scegliere solamente in base al rendimento atteso, poiché questo potrebbe portare a scegliere la classe di attività con il più alto rendimento atteso indipendentemente dalla volatilità (rischio), oppure scegliere solamente in base alla volatilità, che potrebbe spingere a preferire le obbligazioni a breve termine per il loro basso rischio. La scelta corretta dal punto di vista della razionalità economica consiste nel trovare un mix (portafoglio) che contemperi queste due caratteristiche opposte, che risultano sia dalla teoria finanziaria sia dall'osservazione empirica: infatti, all'aumentare del rendimento atteso, aumenta anche la volatilità[12].

Una volta che abbiamo introdotto questi concetti fondamentali per iniziare ad illustrare questo modello elaborato da Markowitz, ora possiamo esaminare la situazione considerandola da un punto di vista aggregato. Ricapitolando, per costruire il modello ipotizziamo che siano disponibili n attività finanziarie, con rendimenti medi attesi pari a $E[\overline{r_1}], E[\overline{r_2}], \ldots, E[\overline{r_n}]$ e covarianza σ_{ij}. Inoltre, ogni portafoglio è costituito da *n* pesi w_i, con i = 1,2, ..., n[13].

[12] Riccardo Cesari, Elisa Susini (2005), "*Introduzione alla Finanza Matematica*", McGraw-Hill, capitolo quinto paragrafo 2

[13] Cfr. equazione (1), che dimostra come la somma dei pesi dei singoli titoli presenti nel portafoglio deve essere pari ad 1

Il punto di partenza per impostare il modello di *asset allocation* è la massimizzazione della funzione di utilità attesa della ricchezza futura X_1(ipotizziamo in t=1).
Riepilogando:

$$X_1 = X_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) \equiv X_0(1 + R_P) \tag{1.10}$$

Il *problema di massimizzazione* diventa, pertanto

$$\begin{aligned} &\max_{w_1,\dots,w_n} \; E[U(R_P)] \\ &sub \quad i) \quad R_P \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \\ &\qquad ii) \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dove $U(R_P)$ rappresenta la funzione di utilità espressa in funzione della variabile che rappresenta il rendimento del portafoglio.
Relativamente a questo problema di massimizzazione vincolata, bisogna supporre inoltre che ci troviamo davanti ad una funzione di utilità che (per ipotesi, appunto) è una *funzione quadratica.* È quindi un'assunzione sulla funzione di utilità che un investitore usa per valutare il rendimento e il rischio di un portafoglio di investimenti.

1.1.5 Funzione di utilità quadratica

Per funzione di utilità quadratica si intende una *funzione polinomiale di secondo grado* nella ricchezza (X). Formalmente:

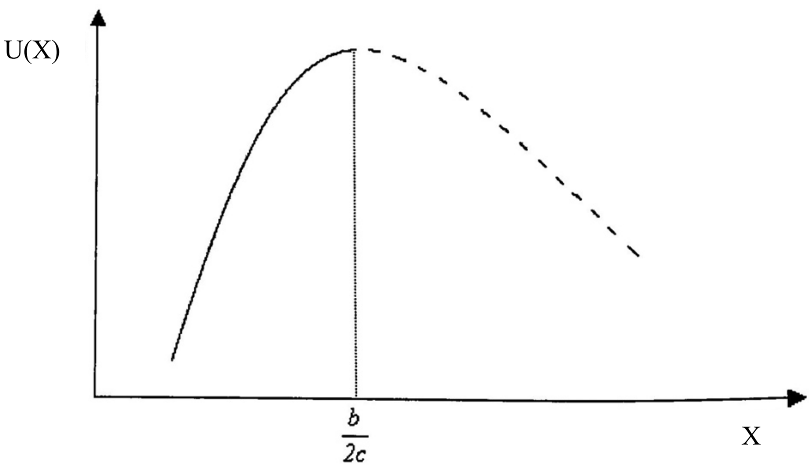
$$U(X) = a + bX - cX^2 \tag{1.12}$$

Questa funzione è caratteristica degli operatori avversi al rischio se la derivata prima è positiva e la derivata seconda è negativa, ossia quando:

$$\frac{\partial U(X)}{\partial X} = b - 2cX > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < X < \frac{b}{2c} \quad con\ bc > 0$$
$$\frac{\partial^2 U(X)}{\partial X} = -2c < 0 \quad \rightarrow \quad c > 0 \tag{1.13}$$

Di conseguenza otteniamo una parabola (funzione di II grado) crescente per i valori di X compresi tra 0 e $\frac{b}{2c}$ (derivata prima positiva) e concava per tutti i valori di c positivi. La possiamo quindi raffigurare nella seguente maniera:

Figura 1.1 Funzione di utilità quadratica



Fonte: Riccardo Cesari, Elisa Susini, “Introduzione alla Finanza Matematica”

Nel grafico sopra possiamo notare che la funzione rappresentata è una parabola simmetrica rispetto alla retta verticale, con quest’ultima passante per il punto di massimo. In generale, l'asse di simmetria di una parabola rappresenta una retta che divide la parabola esattamente in due parti uguali. Inoltre, in questo caso il punto di massimo coincide al vertice della parabola e ciò implica che i punti sulla sinistra del vertice hanno valori di y sempre crescenti, mentre i punti sulla destra del vertice hanno valori di y sempre decrescenti.

Poi, se prima supponiamo che di avere due asset rischiosi (ipotizziamo I e J) e calcoliamo l’utilità attesa per entrambi i titoli, considerando la proprietà della varianza tale che $E(I^2) = Var(I) + E^2(I)$, possiamo ricavare due importanti risultati:

1. Un agente con funzione di utilità quadratica deciderà solamente in base alla *media* (rendimento atteso) e alla *varianza* secondo la funzione:

$$E[U(X)] = \psi(\mu_P, \sigma_P^2) \tag{1.14}$$

   dove la funzione ψ rappresenta la *funzione di utilità indiretta media-varianza* e i suoi argomenti sono la media, che ha un effetto *positivo* (al crescere della media cresce il livello di utilità), e la varianza, che ha un effetto *negativo* (al crescere della varianza diminuisce il livello di utilità);
2. Se i rendimenti attesi dei due asset rischiosi presi in considerazione hanno pari valore, il criterio secondo il quale l'operatore deciderà sarà solamente la varianza. Ipotizzando che il soggetto è avverso al rischio, quest'ultimo preferirà la soluzione che ha un valore della varianza più basso (a parità di media).

Ricapitolando, il problema di massimizzazione vincolata, una volta illustrata l'ipotesi di utilità quadratica, si riduce analiticamente a:

$$\begin{aligned} &\max_{w_1,\dots,w_n} \psi(\mu_P, \sigma_P^2) \\ &sub\ i)\ \mu_P = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \\ &ii)\ \sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &iii)\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Per risolvere questo problema di massimizzazione vincolata, Harry Markowitz utilizza un metodo che prevede l'utilizzo di un sottosistema. Questo procedimento si basa sulla considerazione che il rendimento atteso (media) ha un effetto positivo sull'utilità, mentre la varianza ha un effetto negativo, come abbiamo accennato sopra. Quindi, tenendo conto di questo principio, l'investitore selezionerà i portafogli con la minima varianza quando la media è costante; mentre sceglierà i portafogli con la massima media quando la varianza è costante.

Considerando il primo caso, che riguarda portafogli di minima varianza data la media, possiamo, risolvere il sistema sopra con un *sotto-problema di minimizzazione quadratica vincolata*, ossia:

$$\begin{aligned} &\min_{w} \ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &sub\ i)\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &\quad ii)\ \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = m \end{aligned} \tag{1.16}$$

Attraverso questa dicitura si indica che il sistema mira a ridurre al minimo la funzione di rischio, che in questo caso è rappresentata dalla varianza. Inoltre, è necessario impiegare tutte le risorse disponibili per conseguire un determinato livello di rendimento desiderato, pari in questo caso ad m.

Per risolvere questo problema, è possibile utilizzare i moltiplicatori di Lagrange λ e $,\gamma$, che ci consentono di trovare le condizioni per una soluzione, trasformando il problema di minimo vincolato in un problema di minimo non vincolato. Per fare ciò, dobbiamo scrivere la funzione Lagrangiana, che si ottiene convertendo i vincoli in equazioni che hanno zero come membro destro. Successivamente, ogni termine del lato sinistro viene moltiplicato per il corrispondente moltiplicatore di Lagrange e sottratto dalla funzione obiettivo. Nella formula, λ e $,\gamma$ rappresentano rispettivamente i moltiplicatori per il primo e il secondo vincolo. Quindi, la funzione Lagrangiana può essere scritta come segue:

$$L(w_i, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i - m\right) - \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) \tag{1.17}$$

Dove ½ è uno scalare introdotto per facilità di calcolo.

Ora calcoliamo le condizioni del primo ordine differenziando la Lagrangiana per ciascuna variabile $w_i, \lambda\ e\ \gamma$, facendo la derivata per ciascuna e ponendola uguale a 0.

A proposito, le *condizioni del primo ordine* sono:

1) $\frac{\partial L}{\partial w_i} = \frac{1}{2} 2 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - \lambda(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) - \gamma = 0$ (1.19)

2) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i - m = 0$ (1.20)

3) $\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0$ (1.21)

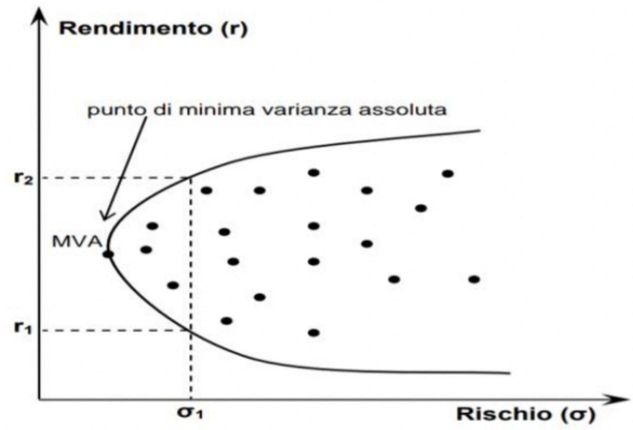
Quindi possiamo notare come le condizioni di primo ordine rispetto ai due moltiplicatori lagrangiani corrispondono ai vincoli del problema di minimizzazione riportato sopra. Al contrario, è il valore ottimale dei pesi del portafoglio che dipende dalla condizione rispetto a *w*, in relazione ai parametri λ e γ. In questo modo abbiamo generato *n* equazioni insieme alle due equazioni dei vincoli, per un totale di n + 2 equazioni che hanno n + 2 incognite, ovvero gli n valori w_i e i due moltiplicatori di Lagrange, λ e γ. Poiché tutte le n + 2 equazioni sono di tipo lineare, è possibile risolverle utilizzando metodi di algebra lineare[14].

1.1.6 La frontiera efficiente

Markowitz, elaborando il suo modello, come abbiamo visto, ~~che~~ ha ipotizzato sia la razionalità degli operatori (cioè che fossero minimizzatori del rischio e massimizzatori del profitto) sia la loro avversione al rischio. Immaginiamo quindi che un investitore possa scegliere solo i portafogli che corrispondono ai punti su una retta orizzontale specifica nel piano della deviazione standard (σ_P) e del rendimento (μ_P). I punti su questa retta, che è parallela all'asse delle ascisse, hanno lo stesso rendimento ma una diversa deviazione standard. La curva che unisce tutti i punti di minima varianza dell'insieme possibile è detta curva di minima varianza e viene rappresentata in seguito:

[14] Riccardo Cesari, Elisa Susini (2005), "*Introduzione alla Finanza Matematica*", McGraw-Hill, pagg. 31-32.

Figura 1.2: Curva di minima varianza



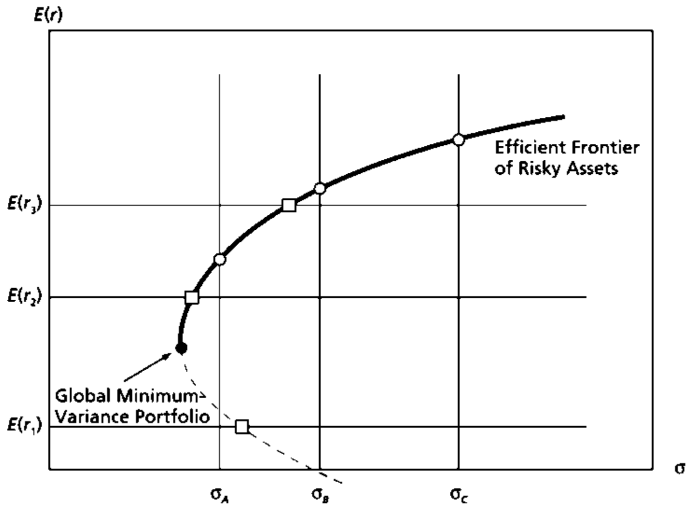
Fonte: Università degli Studi di Pisa

Per ogni livello della deviazione standard, l'investitore razionale tende a massimizzare l'utilità e sceglierà il livello di rendimento più alto. Nella figura sopra è possibile individuare il *punto di minima varianza assoluta (MVA)* che rappresenta il portafoglio con la minima varianza possibile. L'investitore che si muove da questo punto lungo la parte superiore della curva potrà scegliere portafogli aventi rischio e rendimento crescenti, mentre spostandosi lungo la parte inferiore otterrà portafogli caratterizzati da rendimenti decrescenti ma da livelli crescenti di rischio: ne consegue che un investitore avverso al rischio sarà interessato solamente alla parte superiore della curva.

Tale sezione prende il nome di *frontiera efficiente* di Markowitz e rappresenta l'insieme di portafogli dominanti, che quindi che hanno la varianza minima per un dato rendimento o, egualmente, che hanno il rendimento maggiore per una certa varianza.

La frontiera efficiente viene rappresentata di seguito:

Figura 1.3 Frontiera efficiente



Fonte: Bodie, Kane, Marcus (2011)

Inoltre, consideriamo che i punti sopra la curva rappresentano portafogli che non possono esistere perché, per definizione, non esistono portafogli con una volatilità inferiore a quella espressa sulla frontiera per un determinato rendimento. Al contrario, i punti al di sotto dell'iperbole rappresentano portafogli possibili ma non ottimali poiché c'è sempre un portafoglio sulla frontiera con un rischio inferiore o un rendimento medio maggiore.

1.1.7 Il Teorema dei due fondi

Questo teorema stabilisce che ogni portafoglio che giace sulla frontiera efficiente può essere riprodotto come la combinazione lineare di due soli portafogli fissi (i "fondi comuni", appunto). Infatti, se consideriamo, ad esempio, i pesi di due titoli A e B (w^Ae w^B) tali che $w^A = (w_1^A, w_2^A, \dots, w_n^A)$ e $w^B = (w_1^B, w_2^B, \dots, w_n^B)$ e due portafogli efficienti composti da n titoli con rendimenti attesi medi $\bar{\mu}$, allora il portafoglio

$$w = \alpha w^A + (1-\alpha) w^B \qquad (1.22)$$

è un portafoglio efficiente.

In generale, l'idea principale di questo teorema è che gli investitori dovrebbero separare i loro investimenti in due fondi distinti: un fondo di investimento a basso rischio (noto anche come portafoglio di attività senza rischio) e un fondo di investimento a rischio elevato (noto anche come portafoglio di attività rischiose). In merito, Markowitz suggerisce che gli investitori dovrebbero decidere quanto investire in ciascuno di questi due fondi in base al loro livello di avversione al rischio. Quindi dato che abbiamo ipotizzato che gli investitori siano avversi al rischio, questi ultimi dovrebbero investire la maggior parte del loro denaro nel fondo a basso rischio[15].

[15] Annalisa Fabretti (2019/2020), "Teoria del portafoglio e approccio media varianza", slide 60-64 https://economia.uniroma2.it/cdl/triennio/clef/corso/asset/YTo0OntzOjI6ImlkIjtzOjQ6IjEyMTkiO3M6MzoiaWRhIjtzOjU6IjQ3Mzc0IjtzOjI6ImVtIjtOO3M6MToiYyI7czo1OiJjZmNkMiI7fQ==
alternativamente cercare "slide teoria portafoglio-2020-04-15-09-59-54.pdf"

1.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Dopo oltre dieci anni dalla creazione del modello di selezione del portafoglio da parte di Markowitz, l'approccio media-varianza rimane ancora il fondamento di un nuovo modello presentato da Sharpe.

Il Capital Asset Pricing Model, o CAPM, è stato sviluppato per la prima volta nel 1964 da William Sharpe, che è stato un economista finanziario premiato con il Nobel per l'economia. In seguito, il modello è stato trattato indipendentemente da Lintner nel 1965 e da Mossin l'anno successivo. Il modello del CAPM, quindi, si basa sulla teoria di scelta del portafoglio sviluppata da Harry Markowitz, ma anche quella di Tobin, che ha dimostrato l'importanza della diversificazione del portafoglio per ridurre il rischio degli investimenti. Il CAPM amplia questo concetto, introducendo il fattore di rischio, chiamato *beta* (β), che permette di valutare la relazione tra il rendimento di un titolo e il rischio sistemico del mercato.

Questo modello si basa su alcune assunzioni:

1. Le aspettative sono *omogenee* (ovvero, che hanno tutti le stesse stime dei rendimenti attesi, varianze e covarianze dei titoli);
2. Il titolo risk-free è endogeno (gli investitori offrono e acquistano titoli privi di rischio in pari misura);
3. Vendite allo scoperto consentite;
4. Investitori tutti avversi al rischio;
5. Il mercato è *efficiente*[16].

La prima ipotesi afferma indirettamente che la frontiera efficiente è uguale per tutti gli investitori. Di conseguenza tutti detengono lo stesso portafoglio di attività rischiose. Questo è definito "*portafoglio di mercato*", che corrisponde al portafoglio che contiene il mercato aggregato degli investitori. Quindi si tratta di un portafoglio che contiene tutti i titoli esistenti ponderati per le rispettive capitalizzazioni di mercato, ed è efficiente in senso media-varianza sotto l'ipotesi di equilibrio. Questa inoltre è la diretta conseguenza della seconda assunzione.

---

[16] cfr. pag. 5

1.2.1 Capital Market Line (CML)

Si consideri ora un portafoglio efficiente (ossia che appartiene alla frontiera efficiente), allora deve valere la seguente equazione[17]:

$$E(R_P) = \beta E(R_M) + (1 - \beta) r_F \tag{1.23}$$

dove R_M e r_F sono, rispettivamente, il tasso di rendimento del portafoglio di mercato e il tasso risk-free.

La volatilità del portafoglio risulta pari a:

$$\sigma_P = \beta \sigma_M \tag{1.24}$$

Ottenendo che il nostro beta, ovvero il coefficiente che misura la sensibilità del rendimento di un singolo titolo o di un portafoglio rispetto all'andamento generale del mercato, si può esprimere come il rapporto tra la covarianza tra il titolo i-esimo e il portafoglio di mercato e la varianza del portafoglio di mercato stesso.

Prima di illustrare matematicamente come si definisce il coefficiente beta, dobbiamo introdurre due ipotesi importanti introdotte da Sharpe nel 1964, ipotesi che consentono di dare un significato specifico al portafoglio di mercato (se ci troviamo in equilibrio di mercato):

1. *Ipotesi di aspettative omogenee*: tutti gli operatori finanziari hanno le stesse aspettative per cui la matrice di varianza-covarianza e il vettore dei rendimenti medi sono gli stessi per tutti i soggetti.
2. *Ipotesi di endogenità del titolo risk-free*: a differenza degli altri titoli rischiosi, il titolo privo di rischio è "endogeno[18]" all'insieme degli investitori.

La conseguenza della prima ipotesi è che la frontiera efficiente è la stessa per tutti gli investitori; la conseguenza della seconda ipotesi è che il mercato aggregato degli investitori ha un portafoglio di mercato (w_m), che corrisponde alla somma ponderata dei portafogli individuali, che è a un tempo efficiente e senza titolo risk-free[19].

[17] Per il *teorema dei due fondi comuni*.
[18] Ciò significa che la domanda aggregata del titolo risk-free è nulla. In altre parole, alcuni investitori offrono titoli risk-free (quindi si indebitano, ma senza rischio di fallimento) e altri investitori li acquistano in pari misura.
[19] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 175.

A questo punto, possiamo passare ad introdurre analiticamente il coefficiente beta:

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \tag{1.25}$$

Di conseguenza, il rendimento atteso del portafoglio può essere espresso anche nel modo seguente:

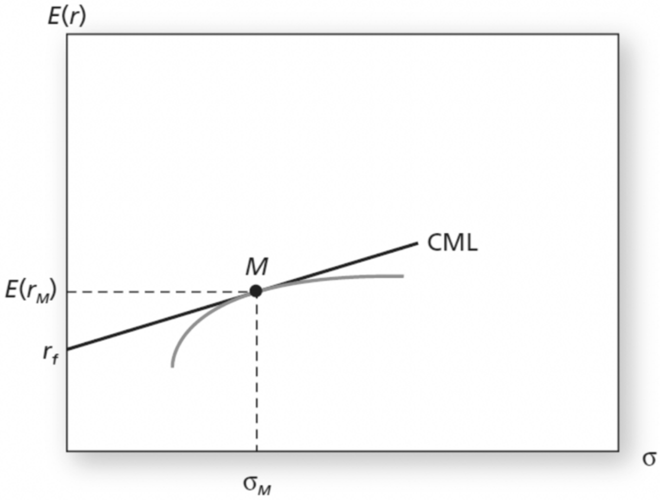
$$\mu_P = r_F + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}[\mu_M - r_F] \tag{1.26}$$

Si osserva quindi che il rendimento atteso di un portafoglio efficiente è dato dal rendimento del titolo risk-free sommata ad una componente di *premio al rischio* pari a $\frac{\sigma_P}{\sigma_M}[\mu_M - r_F]$. Se si riscrive quest'ultima equazione nel modo seguente $\sigma_P \frac{[\mu_M - r_F]}{\sigma_M}$, si nota come il premio al rischio stesso è il risultato del prodotto tra la quantità di rischio del portafoglio (σ_P) e il prezzo unitario del rischio ($\frac{[\mu_M - r_F]}{\sigma_M}$), che corrisponde a sua volta al cosiddetto *Shape Ratio (SR)*.

Con le assunzioni di Sharpe, questa equazione sopra viene chiamate la *capital market line (CML*), ovvero la rappresentazione del trade off esistente per ogni agente tra rischio e rendimento atteso, a partire dal rendimento del titolo "sicuro". È una retta che collega il rendimento privo di rischio con il rendimento atteso del mercato azionario nel suo complesso, utilizzando la volatilità del mercato come misura del rischio. La sua pendenza corrisponde esattamente allo SR e la sua intercetta è rappresentata dal tasso di rendimento risk-free.

Per concludere, rappresentiamo nello stesso spazio media-varianza la Capital Market Line e la frontiera efficiente di seguito:

Figura 1.4 La frontiera efficiente e la capital market line



Fonte: Bodie, Kane, Markus (2011)

Da questa rappresentazione deriviamo un concetto molto importante, ovvero il punto di tangenza *M* tra la frontiera efficiente e la retta, che rappresenta il *portafoglio di mercato*, ossia il portafoglio ottimale delle attività rischiose. Da un punto di vista economico individua quindi la componente rischiosa dei titoli nel portafoglio che l'investitore vuole detenere. In pratica, questo significa che gli investitori possono utilizzare questo portafoglio come punto di riferimento per creare un portafoglio bilanciato di asset rischiosi e privi di rischio, al fine di massimizzare il loro rendimento atteso per ogni unità di rischio assunto.

Tuttavia, la CML viene utilizzata per valutare il rendimento atteso di un portafoglio diversificato per ogni livello di rischio a partire dal portafoglio di mercato, che rappresenta tutti gli investimenti sul mercato. Questo approccio impedisce di rappresentare portafogli che differiscono dal portafoglio di mercato, ad esempio singoli titoli. Per superare questa limitazione, è necessario includere un'espressione del rischio sistemico e sviluppare la Security Market Line. La SML invece esprime la relazione lineare tra il rendimento e il rischio valido per portafogli non efficienti e quindi per i singoli titoli. In sintesi, la CML mostra i tassi di rendimento per un portafoglio diversificato specifico, mentre la SML rappresenta il rischio e il rendimento dell'intero mercato in un dato momento e mostra i rendimenti attesi delle singole attività finanziarie[20].

1.2.2 Security Market Line (SML)

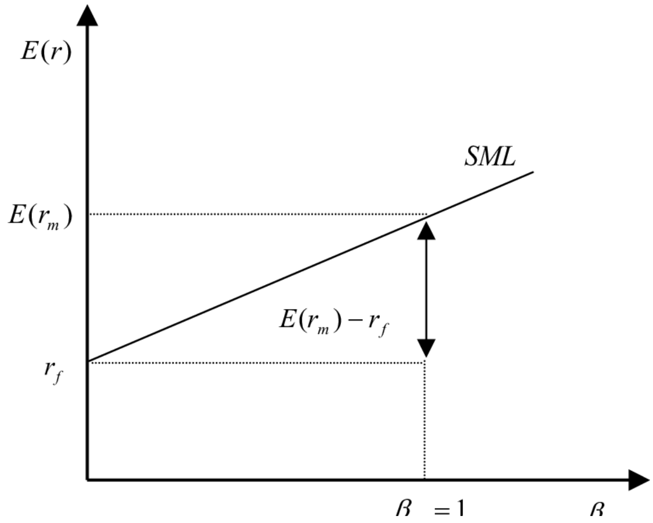
Dalla Capital Market Line possiamo derivare la Security Market Line esprimendo il rischio specifico (sistematico) come coefficiente beta. Rappresenta quindi la relazione tra il rendimento atteso di un'attività finanziaria e il suo rischio sistemico, misurato dal suo beta (β), e viene utilizzata per valutare il rendimento atteso di una singola attività finanziaria. Permette di valutare se l'attività finanziaria è adeguatamente compensata per il rischio che comporta e indica se l'attività finanziaria offre un rendimento superiore o inferiore rispetto al rischio che comporta.

La SML rappresenta inoltre l'equazione fondamentale del CAPM, che si può riscrivere come una r*egressione lineare*, ovvero una tecnica statistica usata in questo caso per stimare il *beta* di mercato. La regressione lineare, infatti, permette di studiare in questo caso la relazione lineare tra due variabili, una *indipendente* rendimento del portafoglio del mercato R_m) e una *dipendente* (rendimento del singolo asset r_i), cercando quindi di trovare una linea retta in grado di adattarsi al meglio secondo i dati raccolti sulle variabili stesse. Formalmente:

$$r_i = r_f + \beta_i\left[E(R_m) - r_f\right] + \varepsilon_i \tag{1.27}$$

[20] Kamil Taylan (2021), KamilTaylan.blog - Enciclopedia finanziaria, "*Capital Market Line (CML)*" https://it.kamiltaylan.blog/cml/#Capital_Market_Line_vs_Security_Market_Line

Figura 1.5 Security Market Line



Fonte: ResearchGate

La sua pendenza corrisponde al *premio per il rischio* e la sua intercetta è rappresentata dal tasso di rendimento risk-free.

Inoltre, questa relazione di mercato illustra come il rischio complessivo di un titolo può essere suddiviso in sistematico e non sistematico. Il rischio *sistematico*, infatti, rappresenta una componente collegata al rischio di mercato (e tanto più bassa quanto minore è il beta del titolo) ed una componente *idiosincratica* di rischio, che è una scollegata al rischio di mercato. La componente sistematica di rischio è ineliminabile anche in un portafoglio ben diversificato. Viceversa, la componente non sistematica (o idiosincratica) può essere ridotta (al limite eliminata) attraverso una efficace diversificazione del portafoglio.

Gli investimenti che si trovano sopra la linea della SML sono considerati "buoni" perché forniscono un rendimento superiore rispetto al rischio associato. Gli investimenti che si trovano al di sotto della linea della SML sono considerati "cattivi" perché fornirebbero un rendimento inferiore rispetto al rischio associato. Di seguito riportiamo il grafico:

Dall'equazione fondamentale del Capital Asset Pricing Model, inoltre, si possono ricavare alcune importanti proprietà del coefficiente beta di Sharpe. Distinguiamo, a proposito, tre situazioni:

- $\beta = 1$: quando un titolo ha un beta di mercato uguale a 1, significa che il titolo ha la stessa volatilità del mercato generale. In questa situazione, il titolo è considerato "medio" rispetto al mercato generale. Infatti, se il beta del titolo (i) rispetto al mercato (m) assume un valore pari ad 1, allora la deviazione standard (volatilità) del titolo è maggiore o uguale a quella del mercato e il portafoglio con all'interno il titolo considerato ha lo stesso rendimento atteso del mercato. Formalmente se $\beta_{i,m}$:

$$r_i = r_f + [E(R_m) - r_f] = r_m \tag{1.28}$$

- $\beta > 1$: quando un titolo ha un beta di mercato superiore a 1, significa che il titolo è più volatile del mercato generale. In questa situazione, il titolo è considerato più rischioso rispetto al mercato generale e potrebbe essere una scelta migliore per gli investitori che cercano di massimizzare il potenziale di guadagno, ma a scapito di un maggiore rischio
- $\beta < 1$: quando un titolo ha un beta di mercato inferiore a 1, significa che il titolo è meno volatile del mercato generale. In questa situazione, il titolo è considerato meno rischioso rispetto al mercato generale e potrebbe essere una scelta migliore per gli investitori che cercano di minimizzare il rischio.

In generale, se il valore del coefficiente beta è diverso da zero, ciò significa che le fluttuazioni dell'attività sono strettamente legate alle fluttuazioni del mercato. Infatti, se il beta è positivo, ciò implica che l'attività non è immune dal rischio di mercato e, pertanto, il suo rendimento atteso dovrebbe essere superiore a quello di un'attività che non è esposta a questo tipo di rischio. Al contrario, se il valore di beta è negativo, l'attività si muove in direzione opposta rispetto al mercato. Infine, se il valore di beta è pari a zero, ciò indica che non esiste alcuna correlazione tra l'attività e il mercato, il che significa che l'attività non è esposta al rischio di mercato[21].

In questo capitolo abbiamo esaminato due approcci fondamentali per la creazione di portafogli. Per quanto riguarda il primo metodo, abbiamo utilizzato il modello classico di selezione del portafoglio di Markowitz, che si basa sui rendimenti attesi e sulla matrice di varianza-covarianza derivati dai rendimenti storici. Abbiamo quindi applicato l'ottimizzazione media-varianza per determinare il mix ottimale di asset rischiosi e privi

---

[21] Abigail Narciso (2014), Statistica applicata, "*Capital Asset Pricing Model*" https://narcisoabigail.wordpress.com/2014/04/07/capital-asset-pricing-model/

di rischio. Nel secondo metodo, abbiamo applicato la tecnica dell'ottimizzazione inversa derivata dal modello CAPM. Questo ha portato alla creazione del portafoglio di mercato, che rappresenta l'equilibrio di mercato secondo questo modello.

Capitolo 2
Il modello di Black-Litterman

2.1 Storia e sviluppo del modello

Agli inizi degli anni ‘90 *Fischer Black* e *Robert Litterman* crearono un modello presso Goldman Sachs (banca in cui proprio Robert Litterman era un dipendente e con la quale anche Fischer Black cooperava) per calcolare i pesi ottimali del portafoglio. Il modello di B-L viene presentato dai due autori precisamente con due articoli: il primo pubblicato nel 1991 con il titolo “*Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium*”[22] e il secondo nel 1992 con un articolo sul Financial Analysts Journal intitolato “*Global Portfolio, Optimization*”[23].

Fin da subito, questo studio ha riscosso un grande successo grazie al fatto che risolveva molte delle problematiche presenti nel modello di allocazione ottima degli asset finanziari sviluppato da Harry Markowitz. Infatti, questo modello unisce diverse teorie di investimento del XX secolo, tra cui i modelli illustrati nel Capitolo 1, ossia il metodo di ottimizzazione di Markowitz del 1952 e il CAPM di Sharpe del 1964. Nello specifico, il BL combina l'approccio di Markowitz basato sulla media e sulla varianza con l'equilibrio del CAPM, migliorando così l'efficacia dei modelli quantitativi di allocazione degli asset e ottenendo così portafogli efficienti più stabili e diversificati e, di conseguenza, meno rischiosi.

Il modello si basa su due concetti fondamentali: le opinioni degli investitori e l'equilibrio di mercato. Le opinioni degli investitori vengono chiamate da Black e Litterman nell’articolo scritto nel 1991 le "*implicit views*", ovvero l'insieme dei rendimenti attesi che renderebbero ottimale il portafoglio dell'investitore. Queste, si basano sulle valutazioni soggettive dei prezzi relativi delle attività finanziarie all'interno del mercato, valutando se sono sopravalutate o sottovalutate. L'equilibrio di mercato rappresenta il punto di partenza per la valutazione dei rendimenti attesi e indica il valore di equilibrio dei rendimenti attesi che eguaglia l'offerta e la domanda di attività finanziarie. Il valore

[22] Fischer Black, Robert Litterman (1991), “Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium”, The Journal of Fixed Income, September, pp. 7-18

[23] Fischer Black, Robert Litterman (1992), “Global Portfolio Optimization”, Financial Analysts Journal, September-October, pp. 28-40

di equilibrio è ignoto e può essere ottenuto attraverso il CAPM o l'ottimizzazione di media-varianza partendo dal portafoglio di mercato, dal quale si possono estrarre i rendimenti di equilibrio[24].

Quindi sia i rendimenti attesi degli investitori influenzati dalle opinioni di questi ultimi sia i rendimenti di equilibrio di mercato rappresentano due tipologie di informazioni, che nel modello di Black e Litterman vengono combinate utilizzando un approccio di tipo bayesiano, utilizzando quindi il Teorema di Bayes.

2.1.1. Le problematiche nel modello di Markowitz

Il modello di asset allocation sviluppato da Harry Markowitz rappresenta ancora oggi uno dei capisaldi dell'asset allocation su cui si basa tutta la finanza. Infatti, l'approccio media-varianza ha riscosso diverso successo come paradigma teorico per la costruzione di portafogli efficienti. Tuttavia, il suo effetto pratico nelle strategie d'investimento è rimasto limitato nel corso del tempo poiché questa teoria presenta diverse limitazioni e problematiche di natura economica. Nello specifico possiamo osservare:

- *Assunzioni irrealistiche*: il modello di Markowitz assume ad esempio che gli investitori siano razionali. Tuttavia, questo è un'ipotesi a dir poco irrealistica, poiché gli investitori possono essere influenzati da tanti fattori, come le emozioni.
- *Sensibilità ai dati di input*: il modello di Markowitz è molto sensibile ai dati di input, come le stime dei rendimenti e delle covarianze. Se queste stime non sono accurate, le decisioni di investimento basate sul modello possono essere errate. Infatti, piccoli cambiamenti dei dati di partenza possono portare a grandi variazioni nei pesi del portafoglio ottimale. In particolare, è stato dimostrato che i portafogli ottimali sono particolarmente sensibili alle variazioni dei rendimenti attesi, in quanto la procedura di ottimizzazione dei portafogli tende a concentrare la soluzione che incorpora gli asset con rendimenti particolarmente elevati
- *Portafogli estremi*: il modello può portare a portafogli estremi, che possono essere troppo concentrati in alcuni titoli. Ciò può aumentare il rischio complessivo del portafoglio e rendere difficile la gestione del rischio.

[24] Roberto Nunnari (2020), *"Modello Black Litterman e asset allocation"*, Altervista, https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875

- *Diversificazione limitata*: il modello di Markowitz può anche avere difficoltà a gestire la diversificazione in caso di grandi mercati o di portafogli di investimento complessi. In alcuni casi, può essere difficile trovare un'allocazione di portafoglio ottimale.
- *Requisiti di calcolo*: Markowitz richiede un grande numero di calcoli, che possono essere costosi e richiedere molto tempo. Di conseguenza, ciò può rendere difficile l'implementazione del modello in tempo reale.
- *Dati storici*: Il modello genera risultati utilizzando dati storici per valutare e stimare le grandezze necessarie (rendimento atteso, varianza, covarianza), che ovviamente non considerano la situazione attuale di mercato e delle eventuali previsioni per il futuro.

2.1.2 Il teorema di Bayes

Il concetto alla base del modello di Black e Litterman consiste nell'unire le l'informazioni provenienti dall'equilibrio con quelle fornite dall'investitore (views). Poiché entrambi questi concetti sono espressi in termini di probabilità, la maggior parte della letteratura suggerisce di utilizzare un approccio di tipo bayesiano. Il teorema di Bayes, che prende il nome dal matematico inglese del XVIII secolo Thomas Bayes, permette di combinare due diverse fonti d'informazione tramite il calcolo delle probabilità condizionate. Il teorema afferma che, dati due eventi A e B, possiamo utilizzare la seguente formula per calcolare la probabilità che un evento A si verifichi quando l'evento B è sicuramente verificato:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A) \tag{2.1}$$

Dove l'evento A rappresenta i rendimenti attesi dell'agente e l'evento B rappresenta i rendimenti di mercato (di equilibrio, quindi)[25]. In particolare:

- $P(A|B)$ rappresenta la probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B;
- $P(B|A)$ rappresenta la probabilità condizionata dell'evento B dato l'evento A;
- $P(A)$ è la probabilità l'evento A;

[25] Utilizziamo in questo caso l'interpretazione di Christodoulakis (2002). Tuttavia, è importante osservare che scegliendo il teorema di Bayes, bisogna anche affrontare la questione della scelta tra cosa considerare distribuzione a priori e cosa distribuzione a posteriori. Si può infatti decidere di ipotizzare il contrario, cioè che l'investitore esprime i rendimenti attesi (evento B) avendo conoscenza dei rendimenti d'equilibrio (evento A).

- $P(B)$ è la probabilità che si verifichi l'evento B.

In altre parole, l'*equazione 2.1* afferma che la probabilità congiunta di due eventi A e B si può calcolare moltiplicando la probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B per la probabilità dell'evento B; alternativamente, $P(A \cap B)$ si può calcolare moltiplicando la probabilità condizionata dell'evento B dato l'evento A per la probabilità dell'evento A.

Dall'equazione del teorema di Bayes possiamo ricavare la formula inversa della probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} \tag{2.2}$$

La probabilità condizionata rappresenta la probabilità di un evento dato il fatto che si è verificato un altro evento (in questo caso si parla della stima dei rendimenti attesi degli investitori una volta che siamo certi dei valori dei rendimenti di equilibrio). Questo implica che l'esperimento in questione sia già stato effettuato almeno una volta. La probabilità condizionata permette quindi di correggere la probabilità di un evento in base alle informazioni raccolte in seguito a ogni esperimento. Tale tecnica consente di effettuare previsioni sempre più precise all'aumentare del numero di esperimenti ripetuti.

Il teorema di Bayes in sostanza è in grado di fornire un metodo efficace per correggere la stima di una probabilità alla luce di nuove informazioni utilizzando distribuzioni di probabilità a priori per ottenere probabilità a posteriori. La probabilità *a priori* è la stima della probabilità di un evento prima della raccolta di nuovi dati (in questo caso $P(A)$), ed è la valutazione più razionale possibile basata sulla conoscenza attuale. La probabilità *a posteriori* (in questo caso $P(A|B)$) è invece la probabilità rivista di un evento dopo aver considerato nuove informazioni. La statistica bayesiana utilizza questo approccio per effettuare inferenze sulla probabilità di eventi futuri[26].

[26] Kamil Taylan (2021), *KamilTaylan.blog – Enciclopedia finanziaria*, Teorema di Bayes Definizione, https://it.kamiltaylan.blog/bayes-theorem/

L'approccio di Bayes consente di trattare le opinioni degli investitori come informazioni soggettive, offrendo il vantaggio di aggiornare periodicamente i parametri stimati grazie all'aggiunta di nuovi dati osservati nel tempo, superando dunque la problematica del modello di Markowitz legata all'utilizzo dei dati storici per valutare le grandezze necessarie per costruire il portafoglio ottimale.

2.1.3 I vantaggi del modello[27]

Il modello di Black e Litterman permette di superare, come abbiamo già accennato, alcune delle problematiche dei modelli di asset allocation sviluppati da Markowitz e Sharpe. Infatti, il contributo più innovativo è quello di consentire agli investitori di confrontare le loro prospettive per i tassi di interesse con i rendimenti attesi generati dall'equilibrio del Capital Asset Pricing Model (CAPM).
Inoltre, il modello B-L consente agli investitori di esprimere le proprie opinioni (views) con diversi gradi di fiducia sui rendimenti relativi su asset in modo flessibile. A ciò è sottesa l'idea fondamentale che i rendimenti attesi debbano essere coerenti con l'equilibrio di mercato, salvo appunto che l'investitore non affermi esplicitamente il contrario. Questo utilizzo dei rendimenti attesi associati all'equilibrio di mercato degli asset come punto di riferimento per gli investitori è una caratteristica unica del modello.

Infine, l'approccio dei due studiosi include molte scelte per l'investitore, non solo nell'esprimere le opinioni ma anche nell'individuare i rischi dai dati storici e nell'esporre obiettivi e vincoli.

2.2 Elementi chiave del modello

2.2.1 Ipotesi del modello

Molte ipotesi fondanti il modello di Black Litterman sono in realtà comuni agli altri modelli finanziari di asset allocation. Infatti, altri modelli di portafoglio quantitativi assumono:

- La razionalità degli investitori, che devono fare un trade-off tra rischio e rendimento;

[27] Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", The Journal of Fixed Income, September, pp. 7-18

- L'efficienza dei mercati;[28]
- La rischiosità di un portafoglio finanziario è determinata dalla varianza e dalla covarianza dei rendimenti dei titoli finanziari che lo compongono;
- Le decisioni di investimento sono prese solamente sulla base del rischio e del rendimento atteso, dove quest'ultimo ha distribuzione con andamento normale.

Invece, le assunzioni che caratterizzano del modello di Black Litterman sono le seguenti:
- La non completa efficienza del mercato;
- L'investitore si pone come scopo la massimizzazione del rendimento del portafoglio, confrontandolo con un portafoglio benchmark di riferimento;
- Ci sono due fonti di informazione per la stima dei rendimenti attesi: le views dell'investitore e l'equilibrio del mercato;[29]
- Le stime di mercato vengono considerate come una distribuzione a priori dei rendimenti degli asset, che viene aggiustata in base alle convinzioni dell'investitore per ottenere una distribuzione a posteriori;
- Per ogni previsione dell'investitore (*views*) deve essere quantificato un livello di confidenza, che chiameremo c[30].

In conclusione, queste ipotesi sono cruciali per il corretto funzionamento del modello e consentono agli investitori di combinare le loro previsioni soggettive con le stime di mercato al fine di ottenere un portafoglio ottimale.

2.2.2 Le views degli investitori

Gli investitori che cercano di utilizzare modelli di allocazione degli asset quantitativi devono tradurre le loro opinioni in un insieme completo di rendimenti attesi sugli asset che possono essere utilizzati come base per l'ottimizzazione del portafoglio.
Si parte dal presupposto che il mercato abbia delle aspettative sui rendimenti basate su informazioni disponibili al pubblico. Tuttavia, gli investitori possono avere opinioni

[28] cfr. pag. 6
[29] Roberto Nunnari (2020), *"Modello Black Litterman e asset allocation"*, Altervista, https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875
[30] In generale, il livello di confidenza è un concetto statistico che indica la probabilità che un intervallo di confidenza contenga il vero valore di un parametro di interesse. In questo contesto invece, rappresenta il grado di fiducia dell'investitore nelle proprie previsioni rispetto alle stime di mercato e influenza il processo di combinazione di queste per ottenere un portafoglio ottimale.

diverse basate su informazioni private o considerazioni personali. Pertanto, si parte dal punto di vista del mercato con le sue aspettative, e l'investitore decide se allinearsi o meno da esse in base alle proprie opinioni.

Nel caso in cui l'investitore non abbia opinioni personali o abbia le stesse aspettative del mercato (nonostante ne sia a conoscenza), investirà semplicemente nel portafoglio di mercato. Le opinioni degli investitori si basano sulla valutazione personale dei prezzi relativi degli strumenti finanziari all'interno del mercato, determinando se essi sono sovrastimati o sottovalutati. Le opinioni implicite possono quindi formare la base per una formulazione attenta di un insieme di opinioni esplicite che riflettono in modo più adeguato la strategia di investimento attuale dell'investitore.

A differenza del modello di media varianza e dei modelli tradizionali, non è necessario stimare un insieme completo di rendimenti attesi, ma è possibile farlo solo per specifici asset finanziari. Una volta che l'investitore fornisce le sue opinioni, il modello combina tali opinioni con i valori di equilibrio per determinare il portafoglio risultante. Nel caso in cui l'investitore abbia delle views (e quindi si discosta dalle aspettative del mercato), secondo il modello Black Litterman, dovrebbe esprimerle esplicitando per ciascuna view il *livello di confidenza*. Il livello di confidenza, da un punto di vista matematico, indica di quanto i rendimenti attesi stimati si discostano dai valori di equilibrio. Di conseguenza questo si esprime con la deviazione standard, secondo cui maggiore è il livello di confidenza, maggiore sarà lo scostamento dalle aspettative del mercato[31].

2.2.3 Il concetto di equilibrio di mercato

L'equilibrio rappresenta la condizione di stabilità verso cui il mercato tende, ed è il punto di partenza dell'investitore per la valutazione dei rendimenti attesi, tenendo conto delle proprie opinioni. Quando i valori degli asset, come i rendimenti e i prezzi, si discostano, le forze di mercato agiscono per ricondurli verso l'equilibrio. Questo suggerisce che i rendimenti attesi stimati dall'investitore non si discostino eccessivamente dai valori di equilibrio. L'approccio basato sull'equilibrio mira a individuare il valore di equilibrio dei rendimenti attesi che equilibra l'offerta e la domanda degli asset finanziari.

Tuttavia, il valore di equilibrio non è direttamente osservabile e può essere stimato utilizzando modelli come il Capital Asset Pricing Model (CAPM) o attraverso

[31] Roberto Nunnari (2020), *"Modello Black Litterman e asset allocation"*, Altervista, https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875

l'ottimizzazione del portafoglio basata sulla media e la varianza, partendo dal portafoglio di mercato. Da questo portafoglio di equilibrio si possono estrarre i rendimenti attesi corrispondenti. In sostanza, i premi di rischio in equilibrio rappresentano un punto di riferimento cruciale per la stima dei rendimenti attesi. Tuttavia, Secondo Black e Litterman, il concetto di equilibrio di per sé è interessante ma non particolarmente utile perché il suo vero valore sta nel fornire un quadro neutrale che l'investitore può adattare in base alle proprie opinioni, obiettivi di ottimizzazione e vincoli.

2.2.4 La scelta del benchmark

L'allocazione di portafoglio non comincia considerando i singoli titoli bensì ragionando sui diversi mercati in cui i titoli vengono scambiati. In particolare, si esaminano panieri di asset rappresentativi di un particolare mercato di riferimento e la sintesi dei prezzi dei titoli presenti nel paniere viene effettuata tramite la costruzione degli indici di mercato (o *benchmark*). Il benchmark, pertanto, riassume l'informazione rilevante contenuta in uno specifico paniere/mercato di titoli. In generale, un indice di mercato deve soddisfare delle principali necessità, come fornire informazioni precise e tempestive sull'andamento dei prezzi del mercato di riferimento e rappresentare la performance in termini di rendimento e rischio di un portafoglio (fittizio) che può essere utilizzato come confronto per valutare i risultati dei portafogli effettivi gestiti dagli operatori[32].

Nel modello di Black-Litterman, il benchmark di riferimento è un indice o un portafoglio di confronto che l'investitore seleziona per valutare il portafoglio ottimizzato generato dal modello. Questo portafoglio ottimizzato di solito rappresenta una configurazione con minore volatilità. Il benchmark può essere un ampio indice di mercato o un portafoglio esistente che riflette una strategia di investimento specifica.
La scelta del benchmark di riferimento è basata sugli obiettivi dell'investitore e sulla strategia di investimento che si intende implementare. Il benchmark rappresenta il punto di partenza per la misurazione del rischio. In sostanza, l'investitore utilizza il benchmark come strumento per valutare le performance del portafoglio ottenuto e per verificare l'impatto delle proprie opinioni sul rischio complessivo del portafoglio, valutando come e in che misura le proprie visioni abbiano influenzato il risultato. In definitiva, il benchmark di riferimento è scelto come punto di confronto per valutare le performance

---

[32] Riccardo Cesari (2012), “Introduzione alla Finanza Matematica”, Seconda edizione, McGraw-Hill, pag.67-74.

del portafoglio e comprendere l'efficacia delle opinioni dell'investitore nel gestire il rischio complessivo[33].

2.3 Equazioni e formule utilizzate nel modello

Ricapitolando, la metodologia di Black e Litterman si inserisce nel contesto delle gestioni attive di portafoglio, fornendo una strumentazione analitica di tipo bayesiano volta a battere il benchmark. I due autori, infatti, hanno mostrato, ricollegandosi ai modelli di Markowitz e Sharpe, come tradurre le previsioni (view) dell'asset manager in un portafoglio tattico coerente con l'asset allocation strategica.
Infatti, da un lato, il portafoglio di mercato contiene implicitamente la view del mercato che rende il portafoglio efficiente ex-ante; dall'altro lato, il gestore attivo avrà le sue personali views sugli andamenti futuri dei mercati d'investimento e la combinazione ottimale delle due views darà luogo a un portafoglio attivo che differirà da quello di mercato in base alle differenti previsioni formulate dall'asset manager e al loro grado di certezza[34].

2.3.1 Esempio con tre asset

Black e Litterman illustrano un primo esempio di applicazione del modello nell'articolo del 1992 "Global Portfolio Optimization", ipotizzando un mondo con tre asset (A, B e C). I rendimenti di questi assets hanno una distribuzione normale incentrata in μ (che indica il rendimento atteso) e con deviazione standard pari alla matrice di covarianza Σ.
Formalmente:

$$R \sim N(\mu, \Sigma)$$

Dove R rappresenta il vettore dei rendimenti delle N attività (con dimensione N[35] $\times 1$).

[33] Roberto Nunnari (2020), *"Modello Black Litterman e asset allocation",* Altervista, https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875
[34] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 215.
[35] In questo caso specifichiamo che N è pari al numero di asset presi in considerazione, ovvero in questo caso 3.

Il rendimento in eccesso di ognuno di queste attività finanziarie viene determinato da un premio al rischio d'equilibrio, da un fattore comune e da uno shock indipendente per ognuno dei tre asset secondo lo schema seguente[36]:

$$\begin{cases} R_A = \pi_A + \gamma_A Z + v_A \\ R_B = \pi_B + \gamma_B Z + v_B \\ R_C = \pi_C + \gamma_C Z + v_C \end{cases} \tag{2.3}$$

dove:

- R_i = rendimento in eccesso dell'i-esimo asset;
- π_i = premio per il rischio di equilibrio dell'i-esimo asset;
- Z = fattore di rischio comune;
- γ_i = incidenza sull'i-esimo asset del fattore di rischio comune;
- v_i= lo shock indipendente per l'i-esimo asset.

In questo contesto, secondo i due studiosi, la matrice di covarianza Σ dei rendimenti in eccesso degli asset[37] è determinata dall'impatto relativo del fattore comune Z e degli shock indipendenti v_i. La matrice di covarianza Σ è una matrice quadrata che rappresenta tutte le covarianze possibili tra gli asset nel portafoglio. I rendimenti in eccesso attesi degli asset sono espressi in funzione dei premi di rischio di equilibrio, del valore atteso del fattore di rischio comune e dei valori attesi degli shock indipendenti per ciascun asset. Ad esempio, il rendimento in eccesso atteso dell'asset i-esimo, indicato come $E[R_i]$ è dato da:

$$E[R_i] = \pi_i + \gamma_i E[Z] + E[v_i] \tag{2.4}$$

Non si sta assumendo che il mondo sia in equilibrio, ovvero che i valori attesi dei fattori di rischio $E[Z]$ e $E[v_i]$ siano pari a zero. Infatti, se così fosse, il rendimento atteso dei tre asset finanziari diventerebbe una variabile casuale con media centrata nei rispettivi premi per il rischio di equilibrio:

$$E[R_i] = \pi_i + \gamma_i \underbrace{E[Z]}_{=0} + \underbrace{E[v_i]}_{=0} = \pi_i \tag{2.5}$$

[36] Fischer Black and Robert Litterman, "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September-October 1992, pag. 34.
[37] La matrice di covarianza Σ si assume sia una matrice nota e costante.

Tuttavia, assumiamo che la media $E[R_i]$ sia essa stessa una variabile casuale la cui distribuzione è centrata sul premio di rischio di equilibrio. La nostra incertezza sul valore atteso del rendimento in eccesso dell'asset i-esimo è dovuto all'incertezza sui valori attesi dei fattori di rischio. Inoltre, assumiamo che questo grado di incertezza su $E[Z]$ e sugli $[v_i]$ sia proporzionale alle volatilità, e quindi al rischio, dei fattori di rischio stessi.
Ciò implica che $E[R_i]$ è distribuito con una struttura di covarianza proporzionale a Σ:

$$COV(E[R_i]) = \tau\Sigma \tag{2.6}$$

Dove τ è una costante con un valore prossimo allo zero, dato che l'incertezza sui rendimenti attesi in eccesso è molto più piccola rispetto a quella sul rendimento stesso.
La suddetta costante può essere descritta come il rapporto tra la quantità di informazioni rilevate dall'investitore rispetto a quella rilevata dal mercato. Inoltre, bisogna specificare che per $E[R_i]$ si intendono i rendimenti attesi di ogni asset, di cui nella suddetta matrice si devono calcolare le correlazioni presenti tra ognuno di essi. Infatti, la matrice di covarianza misura la covarianza tra le varie coppie di asset finanziari in un portafoglio, indicando quanto i rendimenti di un asset variano insieme ai rendimenti degli altri asset nel portafoglio.
I premi di rischio di equilibrio e $\tau\Sigma$ insieme determinano la distribuzione di equilibrio per i rendimenti attesi in eccesso. Assumiamo che queste informazioni siano note a tutti e che non dipendono dalle circostanze di nessun investitore individuale.

A questo punto, Fisher Black e Robert Litterman introducono nello sviluppo del modello B-L le views degli investitori[38], ipotizzando quindi che ogni investitore fornisca informazioni aggiuntive sui rendimenti attesi in eccesso sotto forma di opinioni soggettive. Queste aspettative devono essere espresse soltanto in termini relativi[39], quindi una dichiarazione del tipo "*Mi aspetto che l'asset A superi l'asset B di Q*", dove Q è un valore dato.

[38] cfr. par. 2.2.2.
[39] In generale, le opinioni sugli asset presi individualmente possono essere espresse anche in termini assoluti, tuttavia nell'approccio originale sviluppato negli anni '90 dai due studiosi le views degli investitori vengono espressi in modo relativo, comparando le opinioni riguardo un asset con quelle riguardo un altro.

Per riflettere ed esprimere queste informazioni (views) abbiamo due alternative a disposizione:

i. Agire come se l'investitore fosse in possesso di una *statistica riassuntiva da un campione di dati estratti dalla distribuzione dei rendimenti futuri*, dati in cui tutto ciò che siamo stati in grado di osservare è la differenza tra i rendimenti di A e B;
ii. Considerare le opinioni degli investitori come una *distribuzione di probabilità* per la differenza tra le medie dei rendimenti in eccesso di A e B.

In entrambi i casi otteniamo lo stesso risultato, ovvero che per determinare quanto peso attribuire alla view quando la combiniamo con i rendimenti d'equilibrio, è necessario avere una misura del grado di fiducia dell'investitore nelle sue opinioni: il *livello di confidenza*. Il grado di fiducia può essere considerato, nel primo caso, come un fattore che influenza il numero di osservazioni disponibili dalla distribuzione dei rendimenti futuri. Nel secondo caso, invece, il grado di fiducia è determinante per la deviazione standard della distribuzione di probabilità[40].

2.3.2 Caso limite: view dell'investitore espressa con un livello di confidenza pari al 100%

Lo sviluppo del modello da parte di Black e Litterman arriva in questa fase a considerare "*the limiting case*[41]", ovvero un caso particolare in cui l'investitore è sicuro al 100% della sua opinione. Possiamo pensare a questo come al caso in cui abbiamo un numero illimitato di osservazioni dalla distribuzione dei rendimenti futuri e in cui il valore medio della differenza tra i rendimenti in eccesso degli asset A e B da questi dati è Q[42].

In particolare, Q è un *vettore* noto (con dimensione N[43] $\times 1$) e rappresenta le opinioni degli investitori riguardo ai rendimenti attesi dei diversi asset finanziari, espresse in termini di deviazioni rispetto alla media di mercato. Questo vettore viene quindi utilizzato per incorporare le previsioni degli investitori nel processo di allocazione degli asset e, di

[40] Fischer Black and Robert Litterman, "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September-October 1992, pag. 34-35.
[41] Fischer Black and Robert Litterman, "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September-October 1992, pag. 35.
[42] Pari ad uno scalare.
[43] In questo paragrafo consideriamo, come già specificato, N è pari a 3.

conseguenza, apportare modifiche alle stime dei rendimenti attesi derivate dal modello di equilibrio dei prezzi dei titoli (*CAPM*).

In generale, se consideriamo opinioni espresse relativamente rispetto ad altri asset, nel vettore Q è rappresentata la differenza tra i rendimenti attesi degli strumenti finanziari presi in considerazione. In questo caso particolare, possiamo rappresentare l'opinione come una restrizione lineare sui rendimenti eccedenti attesi, ossia:

$$E[R_A] - E[R_B] = Q \tag{2.7}$$

In questo caso speciale, possiamo calcolare la distribuzione di $E[R] = \{E[R_A], E[R_B], E[R_C]\}$ condizionata all'equilibrio e a queste informazioni assumendo una distribuzione normale per le medie dei componenti casuali, per semplificare.
Abbiamo quindi la distribuzione di equilibrio per $E[R]$, che è data dalla normale con media pari al vettore dei premi per il rischio di equilibrio dei tre asset e con deviazione standard pari alla matrice di covarianza dei tre assets considerati moltiplicata per la costante τ. Analiticamente:

$$E[R] \sim N(\pi, \tau\Sigma) \tag{2.8}$$

Dove $\pi = \{\pi_A, \pi_B, \pi_C\}$ e rappresenta il valor medio dei rendimenti in eccesso di equilibrio.
A questo punto vogliamo calcolare una distribuzione condizionale per i rendimenti attesi, soggetti alla restrizione che i rendimenti attesi soddisfino la restrizione lineare illustrata nell'*equazione 2.8*. Possiamo esprimere questa restrizione come un'equazione lineare dei rendimenti attesi:

$$P \cdot E[R]^T = Q \tag{2.9}$$

Dove P è la *matrice* che deve avere una forma pari a $[-1, 0, 1]$ e $E[R]'$ indica la matrice o il vettore trasposto[44] dei valori attesi del vettore dei rendimenti in eccesso dei tre assets.

In generale, P è una *matrice* nota (di dimensione $N \times N$) definita dall'investitore che collega le opinioni degli investitori (vettore Q) alle stime dei rendimenti attesi dei singoli

[44] Per matrice trasposta si intende la stessa matrice ottenuta scambiandone le righe con le colonne, o viceversa.

asset finanziari. Il numero di righe della matrice è pari al numero delle view; il numero di colonne è pari al numero di assets[45]. In pratica, la matrice P viene utilizzata per trasformare le opinioni degli investitori in una stima dei rendimenti attesi per ciascun asset. La matrice P può essere specificata in base a diverse metodologie, a seconda del contesto e delle preferenze dell'investitore. Spesso viene utilizzata un approccio lineare, dove P assegna un peso alle opinioni degli investitori per ciascun asset. Tuttavia, è possibile utilizzare anche altre metodologie, come l'approccio bayesiano, per determinare la matrice in questione.

Successivamente, Black e Litterman determinano la distribuzione normale dei rendimenti attesi eccedenti, tenendo conto della distribuzione di equilibrio e imponendo la condizione che i rendimenti attesi soddisfino la view descritta in precedenza:

$$E[R] = \pi^T + \tau\Sigma \cdot P^T[P \cdot \tau\Sigma \cdot \mathrm{P}^{\mathrm{T}}]^{-1} \cdot [Q - P \cdot \pi^T] \tag{2.10}$$

L'*equazione 2.10* rappresenta la soluzione al problema di minimizzazione seguente[46]:

$$\begin{cases} \min\limits_{R} \ (E[R] - \pi) \cdot \tau\Sigma^{-1} \cdot (E[R] - \pi)^T \\ \qquad sub \ \ P \cdot E[R]^T = Q \end{cases} \tag{2.11}$$

Per questo particolare caso, in cui il grado di fiducia dell'investitore nell'esprimere le proprie aspettative personali è massimo e pari al 100%, si utilizza la media condizionale nell'*equazione 2.10* come vettore dei rendimenti attesi in eccesso. A questo punto, è sufficiente incorporare il nuovo vettore dei rendimenti attesi eccedenti e la matrice di covarianza $\tau\Sigma$ nel processo di ottimizzazione per determinare il portafoglio ottimale[47].

---

[45] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 217.
[46] Bisogna specificare che i termini elevate alla -1 indicano le *matrici inverse* del termine alla base.
[47] Fischer Black and Robert Litterman, "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September-October 1992, pag. 35.

2.3.3 Caso generale: view dell'investitore espressa con un livello di confidenza *non* pari al 100%

Nel caso più generale, in cui l'investitore non è sicuro al 100% della view espressa da lui stesso, Anche in questo caso i due autori danno la possibilità di utilizzare due approcci in base all'interpretazione che vogliamo dare alle views degli investitori:

i. Il primo suggerisce l'utilizzo della strategia di "stima mista" descritta da Theil[48] se l'aspettativa dell'investitore deriva da un numero fisso di osservazioni tratte dalla distribuzione dei rendimenti futuri.
ii. Il secondo suggerisce l'utilizzo dell'approccio bayesiano di Black-Litterman[49] se consideriamo la view come una riflessione diretta di una distribuzione soggettiva per i rendimenti attesi eccedenti.

Qualsiasi approccio si voglia utilizzare il risultato finale sarà lo stesso perché la formula per il vettore dei rendimenti attesi in eccesso è la stessa per entrambe le prospettive. In entrambi i casi quindi assumiamo che la view possa essere espressa in una forma matriciale del tipo:

$$P \cdot E[R]^T = Q + \varepsilon \tag{2.12}$$

dove P e Q sono dati ed ε è una variabile casuale distribuita normalmente, incentrata in 0 e con deviazione standard pari a Ω, ovvero una matrice (per ipotesi diagonale) che rappresenta il grado di incertezza nella view.

La variabile ε è un *vettore* che indica l'errore di stima del rendimento dei titoli. Questo vettore è utilizzato per introdurre l'errore di previsione nelle views degli investitori nel processo di allocazione ottima degli asset. La *matrice* Ω, invece, mostra le covarianze tra i rendimenti degli asset presenti nel portafoglio che viene utilizzata per stimare, insieme al vettore ε, una nuova matrice di covarianza dei rendimenti dei titoli aggiornata, tenendo conto delle aspettative degli investitori e di quelle relative al rendimento di mercato di equilibrio. Infine, è una matrice *diagonale* dove gli elementi posti in diagonale indicano le varianze dei rendimenti dei singoli asset (ω_{kk}); invece, gli elementi fuori dalla diagonale della matrice rappresentano le covarianze tra i rendimenti dei diversi asset.

[48] Henry Theil (1971), Principles of Econometrics, Wiley and Sons.
[49] F Black and R. Litterman, "Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium" (Goldman, Sachs & Co., September 1990).

L'articolo originale "Global Portfolio Optimization" del 1992 di Black e Litterman procede generalizzando questo approccio nel caso in cui l'operatore esprimesse più opinioni personali ed esprime la formula generale del valore medio dei rendimenti in eccesso attesi condizionati, associando le distribuzioni espresse dalle views con l'equilibrio iniziale. In sintesi, a questo punto è possibile combinare le informazioni di mercato e l'informazione a priori per ricavare una stima a posteriori che tenga conto di tutta l'informazione disponibile. Applicando il metodo dei minimi quadrati generalizzati (*GLS*) otteniamo[50]:

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P\Omega^{-1} \cdot P^T]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + P\Omega^{-1} \cdot Q] \qquad (2.13)$$

L'equazione sopra rappresenta la stima dei rendimenti attesi corretti per l'effetto della view. Indica la formula centrale dell'intero modello B-L poiché fornisce il valore medio della distribuzione dei rendimenti in eccesso attesi R. In questo modo basta inserire il rendimento atteso calcolato nel tradizionale problema di massimizzazione, al fine di ottenere il portafoglio finanziario ottimale[51]. La varianza della stima fornita dell'*equazione 2.13* si può scrivere come:

$$\begin{aligned} Var\ (E[R]) &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} \\ &= (\tau\Sigma) - (\tau\Sigma)\mathrm{P}^T[\mathrm{P}(\tau\Sigma)\mathrm{P}^T + \Omega]^{-1} \cdot P(\tau\Sigma) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

2.3.4 Specificazione del vettore dei premi di rischio di equilibrio $\boldsymbol{\pi}$

In equilibrio di mercato, tutti gli investitori, nel loro insieme, detengono il portafoglio ottimale di mercato w_{eq}, proporzionale ai premi di rischio di equilibrio. Questo portafoglio di mercato è composto da tutti gli assets disponibili nel mercato nella misura della capitalizzazione degli assets comparata con la capitalizzazione di mercato. Il vettore dei premi di rischio di equilibrio, π, è calcolato utilizzando la tecnica dell'ottimizzazione

[50] Riccardo Cesari (2012), "Introduzione alla Finanza Matematica", Seconda edizione, McGraw-Hill, pag. 218-219.
[51] Fischer Black and Robert Litterman, "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September-October 1992, pag. 35-36.

inversa (*reverse*) derivata dal Capital Asset Pricing Model[52] e rappresenta la differenza tra il rendimento atteso di un titolo rischioso e il rendimento di un titolo privo di rischio. Il vettore degli extra rendimenti di equilibrio può essere formulato attraverso una funzione di tre variabili note descritta in seguito:

$$\pi = E[R_i] - r_f = \delta\Sigma w_{eq} \tag{2.15}$$

Dove δ misura il parametro di avversione al rischio, ossia il tasso per il quale un investitore è disponibile a rinunciare al rendimento per assicurarsi un minor rischio (varianza). A proposito, la sua formula è:

$$\delta = \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m^2} \tag{2.16}$$

Con $E[R_m] - r_f$ che rappresenta il premio del rischio (risk premium), ovvero la differenza tra il rendimento del mercato e il rendimento del titolo risk-free, e con σ_m^2 che misura la varianza del mercato di riferimento.

Per dimostrare come si arriva a questa conclusione, dobbiamo partire dalla funzione di massimizzazione dell'utilità dell'investore, fare la derivata prima e porla uguale a 0:

$$\begin{gathered} U(w_{eq}) = w_{eq}\pi - \frac{\delta}{2} w_{eq}\Sigma w_{eq} \\ U'^{(w_{eq})} = 0 \\ \pi - \delta\Sigma w_{eq} = 0 \\ \pi = \delta\Sigma w_{eq} \end{gathered} \tag{2.17}$$

L'*equazione 2.15* consente di misurare i rendimenti degli asset calcolati dal mercato che "riconsegnano" il portafoglio di riferimento (*benchmark*), una volta inseriti nel processo di ottimizzazione.

[52] cfr. Capitolo Primo, paragrafo 1.2. Tuttavia, precisiamo che questa tecnica ragiona in maniera inversa, assumendo che i pesi di tutti gli strumenti finanziari del portafoglio di mercato w_{eq} sia ottimale e poi calcola l'equazione per individuare il vettore π.

Per concludere, abbiamo la possibilità di inserire un livello di confidenza soggettivo per ogni view espressa, quindi di lasciar esprimere all'investitore il proprio grado di fiducia nelle proprie views. Per farlo, Thomas M. Idzorek[53] ha sviluppato un modello che interpreta le situazioni estreme di fiducia in valori della matrice Ω, che si può tradurre nell'assoluta certezza nelle views espresse dagli investitori (varianza pari a 0) o nell'equilibrio di mercato. Quando gli operatori finanziari hanno una certezza completa riguardo le loro aspettative sugli assets, ciò si riflette nella costruzione di un portafoglio finanziario che si discosta il più possibile dal portafoglio di riferimento (*benchmark*), che è definito come vettore dei pesi ($W_{100\%}$) calcolato in modo seguente:

$$W_{100\%} = (\delta\Sigma)^{-1} \cdot E[R] \tag{2.18}$$

Quando invece l'investitore desidera esprimere la propria totale fiducia nell'equilibrio di mercato, si verifica il caso contrario; quindi, il vettore dei pesi è pari a quello del benchmark (W_{bmk}).

Quindi per incorporare il livello di confidenza nelle views espresse dagli operatori, si calcola il vettore dei pesi desiderato, che risulta diverso da quello calcolato solo per gli assets interessati dalla view. Al fine di incorporare tale livello di confidenza quindi possiamo stimare il vettore dei pesi voluto nel seguente modo:

$$W_c = c(W_{100\%} - W_{bmk}) + W_{bmk} \tag{2.19}$$

Dove il livello di confidenza è uno scalare con un valore compreso tra 0 e 1.
A questo punto si può sostituire l'*equazione 2.18* nella *2.15*, ricavando il vettore degli extra-rendimenti corrispondente:

$$\pi_c = \delta\Sigma W_c \tag{2.20}$$

Infine, vogliamo calcolare ω_{kk} che corrisponde al livello di confidenza *c* per quanto riguarda la k-esima view. Per farlo, bisogna aggiungere il vettore dei rendimenti in eccesso dell'*equazione 2.19* nella *2.13*, ottenendo:

[53] Thomas M. Idzorek (2005), "A step-by-step guide to the Black and Litterman model", Working Paper.

$$\pi_c = [(\tau\Sigma)^{-1} + P\omega_{kk}{}^{-1} \cdot P^T]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + P\omega_{kk}{}^{-1} \cdot Q]$$

$$\pi_c = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + \frac{P \cdot P^T}{\omega_{kk}}\right]^{-1} \left[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + \frac{P \cdot Q}{\omega_{kk}}\right]$$

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + \frac{P \cdot P^T}{\omega_{kk}}\right]\pi_c = \left[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + \frac{P \cdot Q}{\omega_{kk}}\right]$$

$$(\tau\Sigma)^{-1}(\pi_c - \pi) = \frac{1}{\omega_{kk}}[P \cdot Q - P \cdot P^T \cdot \pi_c]$$

$$\omega_{kk} = \frac{[P \cdot Q - P \cdot P^T \cdot \pi_c]}{[(\tau\Sigma)^{-1}(\pi_c - \pi)]} \tag{2.21}$$

Una volta trovato il valore di ω_{kk} che corrisponde al livello di confidenza c voluto dall'operatore finanziario da inserire nell'aspettativa, si ripete il processo per le altre views, al fine di definire completamente la matrice Ω.

Per concludere, gli studiosi Fisher Black e Robert Litterman hanno presentato un nuovo modello di allocazione degli asset che porta diverse innovazioni al problema dell'allocazione degli asset. La sua caratteristica più interessante è quella che ci permette di combinare e confrontare le "nostre" prospettive sugli assets con i rendimenti attesi generati da un equilibrio, calcolato attraverso l'utilizzo del modello CAPM. Ciò fornisce una soluzione "*elegant*"[54] al principale problema dell'approccio standard di media-varianza per quanto riguarda l'allocazione degli asset, ovvero la tendenza delle piccole variazioni nelle aspettative a produrre cambiamenti drammatici nel portafoglio ottimale.

L'approccio standard di solito calcola i rendimenti attesi su ciascun asset e quindi trova il portafoglio con il rendimento atteso più elevato per un dato livello di rischio, utilizzando una misura della rischiosità degli asset e delle loro interrelazioni.

Il CAPM riconosce che, in equilibrio, i rendimenti degli assets si adegueranno finché gli investitori siano fiduciosi e tranquilli nel detenere gli asset in circolazione. I rendimenti di equilibrio sono quelli che farebbero sentire un investitore a proprio agio nel detenere un portafoglio di capitalizzazione di mercato, ovvero che farebbero del portafoglio di capitalizzazione di mercato quello ottimale. Nello stesso modo, il modello può prendere il portafoglio effettivo di un investitore e derivare le "prospettive implicite" del

[54] Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", The Journal of Fixed Income, September, pag. 16.

portafoglio di un investitore, confrontandole poi con le prospettive effettive. Questo è un modo efficace per rivelare difetti nella strategia di investimento.
Questo nuovo approccio di allocazione degli asset, che quindi consente all'investitore di combinare rendimenti attesi particolari con i rendimenti di equilibrio, permette agli investitori di ottenere portafogli equilibrati che riflettono le loro opinioni, senza dover ricorrere a vincoli arbitrari sulla composizione del portafoglio[55].

Possiamo quindi giungere alla conclusione che il modello B-L presenta notevoli ed indiscutibili vantaggi; tuttavia, è importante anche far presente alcune limitazioni per quanto riguarda l'applicazione pratica dell'approccio stesso. Infatti, uno dei problemi di questo approccio è che il modello viene utilizzato solo per produrre una stima della matrice di varianza-covarianza e non un valore preciso. Questo modello, inoltre, ignora le informazioni nei dati riguardo al rendimento medio e la conseguenza è che una visione soggettiva viene combinata con un modello, ma solo in parte e in modo incompleto[56]. A proposito, quando gli investitori esprimono una propria opinione riguardo uno o più assets, si verificano solamente variazioni ai pesi del portafoglio ottimale per quanto riguarda gli asset coinvolti. Infine, il modello inserisce parametri difficili da interpretare e calcolare, come la costante τ, che rappresenta il peso sulle prospettive e indica la misura con cui i rendimenti attesi divergono dai rendimenti del portafoglio di equilibrio, e il fattore di avversione al rischio δ.

[55] Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", The Journal of Fixed Income, September, pag. 16.
[56] Ludwig B. Chincarini, Daehwan Kim (2013), "*Uses and Misuses of the Black-Litterman Model in Portfolio Construction*", The University of San Francisco, https://repository.usfca.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1004&context=fe#:~:text=original%20Black%20Litterman%20model.,data%20about%20the%20mean%20return.

Capitolo 3
Un'applicazione pratica del modello

3.1. Analisi ed implementazione del modello

Nell'articolo "*Global Portfolio Optimization*" del 1992 gli studiosi offrono un valido metodo per combinare le aspettative degli investitori (ponderate per il grado di fiducia riposto nelle views stesse) con i rendimenti d'equilibrio; tuttavia, non forniscono una descrizione matematica di come farlo. Infatti, è proprio questa caratteristica che complica l'applicazione della loro teoria, in quanto richiede un ampio volume di dati. In sostanza, l'obiettivo principale del modello B-L è quello di mettere insieme le due diverse fonti di informazione per formare un insieme unico di rendimenti attesi.

Ora, cerchiamo di riassumere e generalizzare i passaggi fondamentali del modello formulando alcuni step:

1. Prima di tutto, è necessario individuare gli strumenti finanziari da considerare nel mercato e determinarne la capitalizzazione del mercato;
2. Il passo successivo consiste nello estrarre i rendimenti impliciti scontati "a priori" dalle condizioni correnti di mercato e quindi stimare i rendimenti attesi per ogni *asset*[57].
3. Calcolare la matrice di covarianza degli asset utilizzando dati storici, pari a Σ. Contestualmente si stabilisce il valore della costante τ, in modo arbitrario;
4. Successivamente, si realizza la tecnica dell'ottimizzazione inversa sul portafoglio di mercato al fine di stimare i rendimenti d'equilibrio per ogni asset;
5. Determinare anche il parametro di avversione al rischio δ, attraverso il quale si calcolano anche i premi di rischio di equilibrio π;
6. A questo punto bisogna esprimere le proprie aspettative, individuando gli assets presi in considerazione e il vettore dell'incertezza ε associato ad ogni view. Queste aspettative vengono considerate per regolare i premi di rischio di equilibrio. Si

[57] Rodolfo Vanzini (2019), "Applicazioni del modello di Black-Litterman", http://www.rodolfovanzini.com/wp-content/uploads/2019/07/black-litterman_v2.html

possono tradurre le views degli investitori in un vettore di aspettative di rendimento P e una matrice di confidenza Q per poi introdurle nel modello.

7. Successivamente è necessario generare i rendimenti in eccesso attesi attraverso la combinazione dei rendimenti d'equilibrio con le aspettative degli investitori, grazie al modello di B-L:

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P\Omega^{-1} \cdot P^T]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + P\Omega^{-1} \cdot Q] \tag{2.13}$$

8. Poi, i rendimenti in eccesso attesi vengono implementati nel processo di ottimizzazione per determinare il portafoglio efficiente, manifestando il livello di confidenza *c* desiderato. Questo portafoglio ottimale è calcolato come una combinazione lineare di quello certo e quello di riferimento (benchmark):

$$W_c = c(W_{100\%} - W_{bmk}) + W_{bmk} \tag{2.19}$$

9. Il passo successivo è la stima del vettore dei rendimenti in eccesso che ridanno il suddetto portafoglio:

$$\pi_c = \delta\Sigma W_c \tag{2.20}$$

10. Si determina il valore di ω_{kk} che corrisponde al grado di fiducia *c*:

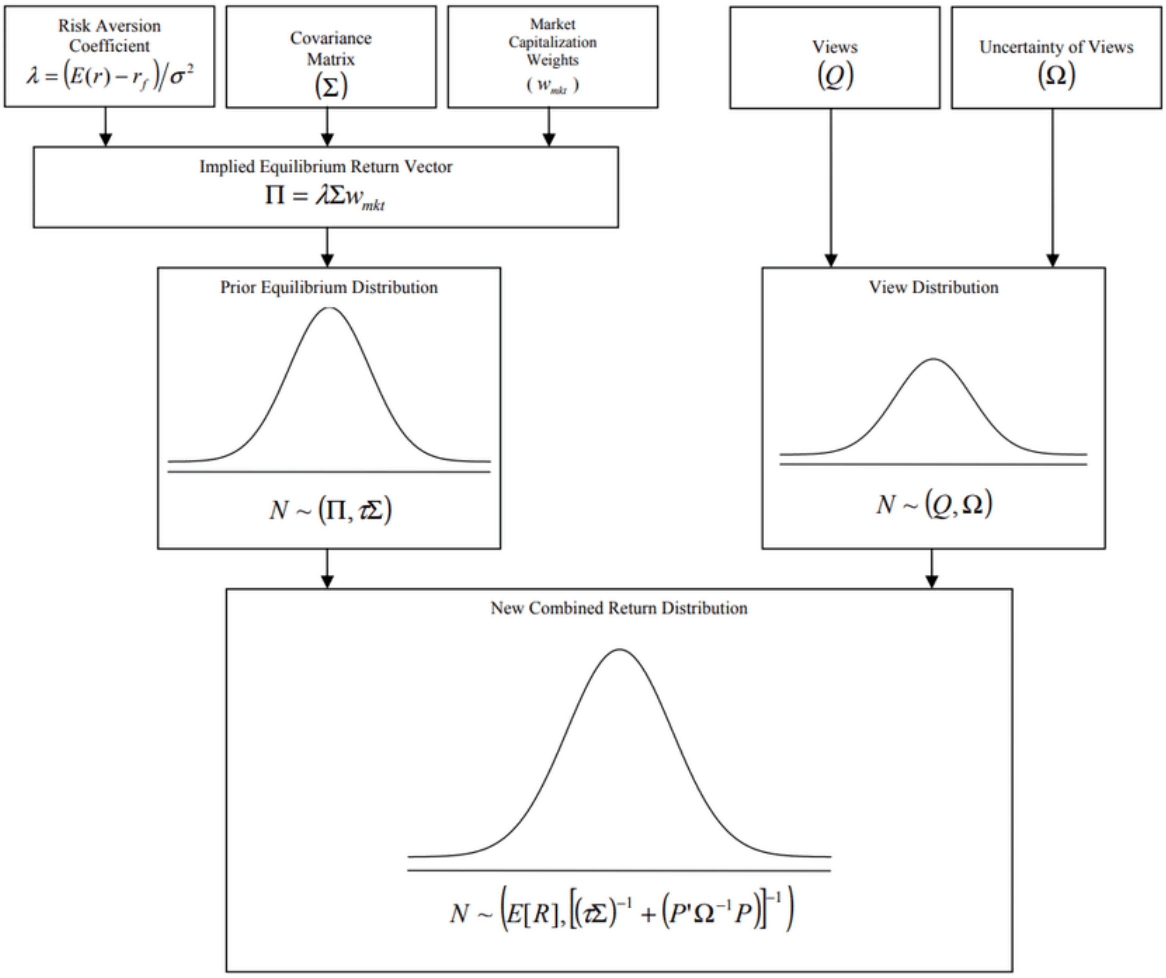
$$\omega_{kk} = \frac{[P \cdot Q - P \cdot P^T \cdot \pi_c]}{[(\tau\Sigma)^{-1}(\pi_c - \pi)]} \tag{2.21}$$

11. Infine, una volta calcolati tutti gli elementi della matrice Ω , si è in grado di determinare il portafoglio finanziario ottimale implementando il modello di Black & Litterman utilizzando l'*equazione 2.13*, che massimizza l'utilità dell'operatore finanziario, valutando il trade-off tra rendimento atteso e rischio. A proposito, la funzione di utilità di un investitore si può scrivere come:

$$U(w_{eq}) = w_{eq}\pi - \frac{\delta}{2} w_{eq}\Sigma w_{eq} \tag{2.22}$$

Ora possiamo schematizzare le fasi da seguire per implementare e mettere in pratica il modello di B-L riportando una figura tratta da Idzorek (2005)[58]:

Figura 3.1 Schema del Modello di Black & Litterman



Fonte: Idzorek T. M., “A step-by-step guide to the Black and Litterman model”, pag. 16

[58] Idzorek T. M. (2005), “A step-by-step guide to the Black and Litterman model”, Working Paper, pag. 16.

3.2. Applicazione pratica del modello in un contesto di portafoglio

Al fine di comprendere il modello di Black & Litterman in maniera più completa, è utile l'analisi di un caso pratico attraverso la costruzione di un portafoglio. Per semplificare l'applicazione del modello in questione non considereremo il livello di confidenza, ovvero il grado di fiducia dell'investitore riguardo le proprie previsioni rispetto alle stime di mercato. In merito, si considera un portafoglio finanziario composto di 5 asset appartenenti a vari settori economici compresi nell'indice azionario FSE MIB. Questo indice di mercato azionario italiano è composto dai 40 titoli più liquidi e capitalizzati di società italiane ed estere quotate sul listino della Borsa Italiana. Rappresenta il principale indice di benchmarking del mercato azionario italiano[59]. Prendiamo quindi in considerazione 5 azioni di società quotate che appartengono all'indice FTSE MIB, cercando di diversificare il nostro portafoglio prendendo ogni titolo appartenente ad un settore economico differente. I titoli considerati sono i seguenti, con il rispettivo settore a cui appartengono e il rispettivo codice identificativo (ISIN)[60],:

Tabella 3.1 Nome, settore e codice ISIN delle azioni componenti il portafoglio

Azione	**Settore**	**Codice ISIN**
Intesa Sanpaolo S.p.A. (ISP.MI)	Servizi finanziari	IT0000072618
Enel S.p.A. (ENEL.MI)	Utilities	IT0003128367
Amplifon S.p.A. (AMP.MI)	Salute	IT0004056880
Terna S.p.A. (TRN.MI)	Servizi pubblici	IT0003242622
Assicurazioni Generali (G.MI)	Assicurazioni	IT0000062072

Fonte: Borsa Italiana

Una volta presi i dati storici giornalieri dei valori delle azioni considerate degli ultimi 10 anni ($n = 10$)[61], si calcolano quindi i rendimenti giornalieri che le azioni singolarmente

[59] Treccani (2012), "*FTSE Italia MIB"*, Dizionario di Economia e Finanza, https://www.treccani.it/enciclopedia/ftse-italia-mib_%28Dizionario-di-Economia-e-Finanza%29/
[60] Borsa Italiana, https://www.borsaitaliana.it/borsa/azioni/ftse-mib/lista.html
[61] I dati storici dei titoli sono stati presi e scaricati dalla sezione "Dati Storici" di *Investing.com*, prendendo quelli con frequenza giornaliera nel periodo di tempo di 10 anni, ovvero dalla data 25/05/2013 a 25/05/2023. https://it.investing.com/equities/italy

hanno ottenuto, facendo il logaritmo naturale (ln) del rapporto tra il prezzo al tempo t+1 a quello che corrisponde al tempo t. Formalmente:

$$R_i^{giorn} = ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \tag{3.1}$$

Una volta ottenuti tutti i rendimenti giornalieri generati da ogni asset, possiamo stimare la performance di ogni titolo nel periodo di tempo totale preso in considerazione (ovvero 10 anni), facendo la media aritmetica dei rendimenti logaritmici storici ottenuti in precedenza.

I valori ottenuti sono i seguenti:

Tabella 3.2 Rendimento medio storico delle azioni

Azione	**Rendimento storico medio dell'azione**
ISP.MI	**0,02%**
ENEL.MI	**0,03%**
AMP.MI	**0,08%**
TRN.MI	**0,03%**
G.MI	**0,01%**
FTSE MIB	**0,02%**

Fonte: Investing.com

Successivamente calcoliamo i rendimenti storici in eccesso sottraendo la media aritmetica del rendimento storico del nostro benchmark di riferimento (che risulta pari allo 0,505%) ai rendimenti storici stimati attraverso il logaritmo naturale in precedenza. Per quanto riguarda lo *yield* del titolo risk-free (benchmark) viene preso in considerazione un tasso istantaneo giornaliero, calcolato come il rendimento medio (utilizzando la media aritmetica) dei titoli obbligazionari dello Stato tedesco (i *bund tedeschi*) a 10 anni[62]. I risultati delle medie dei rendimenti in eccesso degli asset risultano:

Tabella 3.3 Rendimento medio in eccesso delle azioni

Azione	**Rendimento in eccesso medio dell'azione**
ISP.MI	**-0,49%**
ENEL.MI	**-0,48%**
AMP.MI	**-0,42%**
TRN.MI	**-0,47%**
G.MI	**-0,50%**

Fonte: Investing.com

A questo punto vogliamo calcolare il rendimento degli asset anche attraverso il CAPM, quindi attraverso l'*equazione 1.27*, tuttavia per farlo abbiamo bisogno del coefficiente beta (β) sia degli asset sia del mercato (FTSE MIB), indice che stima la sensibilità di un asset rispetto alle variazioni del mercato. Questa misura è calcolata di solito attraverso il rapporto tra covarianza tra i rendimenti dell'asset e del mercato e la varianza dei rendimenti del mercato (*equazione 1.25*). Tuttavia, per calcolare i valori in Excel abbiamo utilizzato la funzione "PENDENZA", che riporta la pendenza della retta di regressione lineare tramite i dati numerici in y (vettore del rendimento logaritmico di ognuno dei 5 asset presi in considerazione) e in x (vettore del rendimento logaritmico del mercato di riferimento)[63].

La funzione utilizzata restituisce i valori impiegando l'equazione della pendenza della retta di regressione, ossia:

$$\beta = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} \tag{3.2}$$

[62] *Rendimento obbligazione Germania 10 anni*, Investing.com https://it.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield-historical-data

[63] Dobbiamo infatti ricordare che il coefficiente beta rappresenta il coefficiente angolare della retta di regressione, che a sua volta raffigura una relazione di dipendenza tra due variabili, una dipendente (y) e un'altra indipendente (x). Attraverso questa relazione, infatti, si può stimare il valore di una variabile in funzione del valore che assumiamo dall'altra variabile, che in questo caso sono, rispettivamente, il rendimento di un asset e il rendimento del mercato.

Applicata la suddetta formula utilizzando il programma Excel, i valori ottenuti sono i seguenti:

- 0,0066 per Intesa San Paolo;
- 0,026 per Enel;
- - 0,016 per Amplifon;
- - 0,015 per Terna;
- 0,006 per Assicurazioni Generali;
- 1 per l'indice FTSE MIB.

Da questi valori, essendo tutti diversi da zero, possiamo osservare che le fluttuazioni dell'attività sono legate alle fluttuazioni del mercato; quindi, che questi asset non saranno immuni al rischio di mercato. Tuttavia, notiamo che il beta di tutti gli asset tendono al valore "zero", quindi possiamo concludere che anche se variazioni dei prezzi degli asset scelti sono collegate alle variazioni dei prezzi del nostro mercato, la correlazione è minima. In particolare, i beta di Intesa San Paolo, di Enel e di Assicurazioni Generali sono positivi, ciò implica che questi titoli si muovono nella stessa direzione del nostro mercato di riferimento; al contrario, i beta di Amplifon e Terna sono negativi e quindi gli asset si muovono in direzione opposta rispetto al nostro mercato di riferimento (FTSE MIB).

Una volta ottenuti i valori beta, abbiamo tutti gli elementi per calcolare i rendimenti ottenuti attraverso il Capital Asset Pricing Model (utilizzando l'*equazione 1.27*), che sono i seguenti:

Tabella 3.4 Rendimento di equilibrio delle azioni secondo il CAPM

Azione	**CAPM**
ISP.MI	**0,50%**
ENEL.MI	**0,49%**
AMP.MI	**0,51%**
TRN.MI	**0,51%**
G.MI	**0,50%**

Fino ad ora, dunque, abbiamo ottenuto una vasta serie temporale di dati per ottenere risultati utili che ci consentiranno di proseguire con l'implementazione del modello, scaricando 10 anni di dati giornalieri di mercato delle azioni considerate da un fornitore di dati (in questo caso, *Investing.com*). Questi risultati saranno utilizzati per calcolare i rendimenti attesi di Black-Litterman e confrontarli con quelli calcolati in precedenza (ovvero i rendimenti storici e quelli calcolati con il modello CAPM).

Ora iniziamo a calcolare gli input del modello Black-Litterman, ovvero:

1. La *matrice di covarianza* (Σ);
2. I *pesi* del portafoglio di mercato, ricavati dalle capitalizzazioni;
3. Il coefficiente di *avversione al rischio* δ.

Per quanto riguarda il primo input da quantificare, la matrice Σ rappresenta il modo in cui gli operatori valutano quantitativamente il rischio ed è composta appunto dalle varianze e covarianze degli asset presi in considerazione. Indica dunque quanto i rendimenti di un asset variano insieme ai rendimenti degli altri asset nel portafoglio. Per calcolare la suddetta matrice, ho utilizzato lo "*Strumento di analisi*" di covarianza su EXCEL inserendo come input tutti i valori dei rendimenti logaritmici giornalieri di tutti i 5 asset considerati. Una volta fatto ciò i risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 3.5 Matrice di varianza-covarianza dei rendimenti degli asset

	ISP.MI	ENEL.MI	AMP.MI	TRN.MI	G.MI
ISP.MI	0,00047	0,00022	0,00012	0,00013	0,00025
ENEL.MI	0,00022	0,00027	0,00011	0,00016	0,00016
AMP.MI	0,00012	0,00011	0,00039	0,00009	0,00009
TRN.MI	0,00013	0,00016	0,00009	0,00019	0,00010
G.MI	0,00025	0,00016	0,00009	0,00010	0,00024

Questa matrice inoltre deve rispettare il requisito della invertibilità, quindi calcoliamo anche la sua matrice inversa, che ci sarà utile nei prossimi passi dell'applicazione pratica del modello utilizzando la funzione "MATR.INVERSA" e selezionando i dati nella *tabella 2.5*:

Tabella 3.6 Matrice di varianza-covarianza inversa dei rendimenti degli asset

	ISP.MI	ENEL.MI	AMP.MI	TRN.MI	G.MI
ISP.MI	5179,11	-1733,89	-245,05	122,44	-4192,96
ENEL.MI	-1733,89	9135,18	-373,50	-5080,19	-1806,90
AMP.MI	-245,05	-373,50	3016,17	-833,60	-218,14
TRN.MI	122,44	-5080,19	-833,60	10106,73	-799,17
G.MI	-4192,96	-1806,90	-218,14	-799,17	9997,29

Ora dobbiamo calcolare i pesi degli asset rispetto al peso totale rappresentato dal mercato di riferimento, utilizzando le capitalizzazioni del mercato stesso (*mktcap*). Per farlo ricaviamo i valori delle capitalizzazioni dei titoli da un fornitore di dati (in questo caso, Borsa Italiana) e li rapportiamo al valore della capitalizzazione del mercato dell'indice FTSE MIB. I valori delle capitalizzazioni sono i seguenti:

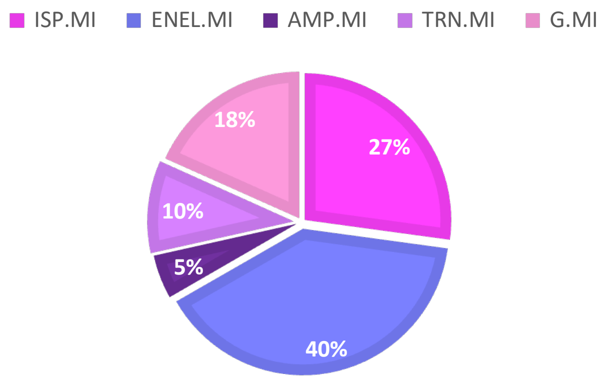
- 41.044.883.730 per Intesa San Paolo;
- 60.532.412.398 per Enel;
- 7.470.824.460 per Amplifon;
- 15.509.098.272 per Terna;
- 27.981.305.818 per Assicurazioni Generali;
- 571.886.400.000 (circa) per FTSE MIB.

Di conseguenza, rapportando ogni capitalizzazione di ogni asset per la capitalizzazione del mercato arriviamo a stimare i pesi di ogni asset componente il nostro portafoglio rispetto al mercato. Tradotto in termini matematici:

$$w_{\%} = \frac{mktcap_i}{\sum_{i=1}^{n} mktcap_i} \tag{3.3}$$

Rappresentiamo i risultati nel seguente grafico a torta:

Grafico 3.1 Pesi del portafoglio di mercato



L'ultimo input di cui abbiamo bisogno è il coefficiente δ, che stima il grado di avversione al rischio dell'investitore sottraendo il rendimento atteso del mercato al rendimento del titolo privo di rischio, il tutto rapportato per la varianza del mercato.

$$\delta = \frac{E[R_m] - r_f}{\sigma_m^2} \tag{2.16}$$

Il numeratore inoltre rappresenta il cosiddetto "*risk premium*" che abbiamo spiegato anche parlando del CAPM[64] e consiste nel rendimento in eccesso che gli investitori chiedono per investire in un'attività rischiosa rispetto al rendimento offerto dall'attività priva di rischio[65].

Nello specifico, abbiamo calcolato la varianza del mercato utilizzando la funzione di Excel "VAR.C", che stima la varianza presupponendo che gli argomenti della funzione siano un campione dell'intera popolazione. La suddetta funzione del software utilizza la formula seguente:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{(n-1)} \tag{3.4}$$

[64] cfr. pag. 22

[65] Francesca Rizzi (2022), *Cos'è il premio di rischio*, Rankia, https://rankia.it/azioni/cose-il-premio-di-rischio/

Dove x rappresenta il vettore dei rendimenti logaritmici del mercato di riferimento e n è pari alla dimensione del campione, in questo caso 2538 (ossia il numero di rendimenti logaritmici storici giornalieri presi in considerazione in un periodo pari a 10 anni).

Una volta individuati i valori di tutti gli input necessari, passiamo al calcolo del *rendimento in eccesso implicito di equilibrio* (π), un vettore contenente i premi per il rischio dei 5 assets. È determinato con il prodotto del prezzo del rischio (δ) dei pesi (w_{eq}) e della matrice di varianza-covarianza (Σ), ovvero:

$$\pi = \delta \Sigma w_{eq} \tag{2.17}$$

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Tabella 3.7 Rendimenti in eccesso impliciti di equilibrio dei titoli

ISP.MI	0,02%
ENEL.MI	0,02%
AMP.MI	0,01%
TRN.MI	0,01%
G.MI	0,02%

Ora dobbiamo incorporare le views degli investitori, individuando di conseguenza il *vettore colonna Q*, che contiene le opinioni degli investitori riguardo ai rendimenti attesi dei diversi titoli, e la *matrice P*, che rappresenta il numero di *views* dell'investitore e serve ad inserirle nel modello per collegarle con i rendimenti impliciti attesi a priori scontati nelle condizioni correnti di mercato, che calcoleremo dopo[66]. Supponiamo che l'investitore abbia le seguenti aspettative (in questo caso relative) sui titoli:

i. "Generali performerà meglio di (supererà) Terna dello 0,5%";
ii. "Amplifon performerà meglio di (supererà) Enel dell'1%";
iii. "Enel performerà meglio di (supererà) Intesa San Paolo dello 0,5%".

[66] Rodolfo Vanzini (2019), *Applicazioni del modello di Black-Litterman*, http://www.rodolfovanzini.com/wp-content/uploads/2019/07/black-litterman_v2.html

Prima di illustrare i risultati ottenuti, dobbiamo precisare tre aspetti: se l'investitore non ha views, noi considerariamo il portafoglio di mercato; la somma delle righe deve essere pari a zero; le aspettative devono essere espresse per ogni asset finanziario considerato. Rappresentiamo in seguito il vettore Q (nella seconda colonna della tabella) e la contestuale matrice P (nella terza colonna):

Tabella 3.8 Espressione delle views dell'investitore

		ISP.MI	ENEL.MI	AMP.MI	TRN.MI	G.MI
view 1	0,50%	0	0	0	-1	1
view 2	1%	0	-1	1	0	0
view 3	0,50%	-1	1	0	0	0

Di conseguenza, riguardo la prima opinione, l'investitore si aspetta che le azioni di Generali Assicurazioni sovra-performeranno rispetto le azioni di Terna di un valore pari a 0,5% ($E[R_G] - E[R_{TRN}] = 0{,}005$). La seconda aspettativa invece si può esprimere sostenendo che le azioni di Amplifon sovra-performeranno rispetto le azioni di Enel di un valore pari all' 1% ($E[R_{AMP}] - E[R_{ENEL}] = 0{,}01$). L'ultima opinione invece riguarda le azioni di Enel, che secondo l'operatore finanziario sovra-performeranno rispetto le azioni di Intesa San Paolo di un valore pari a 0,5% ($E[R_{ENEL}] - E[R_{ISP}] = 0{,}005$). Dunque, nella matrice di collegamento P abbiamo scritto il valore "1" nell'azione che abbiamo ipotizzato sovra performi rispetto ad un'altra, al quale abbiamo messo il valore "-1".

Il prossimo passo è determinare il grado di incertezza associato alle opinioni attraverso il calcolo della matrice diagonale Ω, che appunto mostra le covarianze tra i rendimenti degli asset presenti nel portafoglio. Questo input viene ottenuto moltiplicando la matrice di collegamento P per la matrice di varianza-covarianza Σ e trasponendo la matrice P. In questa sede, è opportuno precisare che la costante τ, per semplificare il modello, ipotizziamo avere un valore pari ad 1. La formula per ottenere i valori contenuti nella matrice considerata è la seguente:

$$\Omega = \tau P \Sigma P' \tag{3.5}$$

I valori ottenuti dall'applicazione dell'equazione sopra sono questi:

Tabella 3.9 Matrice Ω

Ω		
0,000231	-0,000005	-0,000116
-0,000005	0,000447	-0,000069
-0,000116	-0,000069	0,000307

Infine, ora ci preoccupiamo di integrare tutti i valori calcolati precedentemente nel modello Black-Litterman, tramite l'applicazione dell'*equazione 2.13* e scomponendola in due termini, ossia:

1. $[(\tau\Sigma)^{-1} + P\Omega^{-1} \cdot P']^{-1}$
2. $[(\tau\Sigma)^{-1} \cdot \pi + P\Omega^{-1} \cdot Q]$

Il primo termine, quindi, si ottiene facendo la matrice inversa della somma tra matrice varianza-covarianza inversa e tra il prodotto di P, la matrice inversa Ω e la matrice P trasposta. I valori numerici ottenuti sono:

Tabella 3.10 Primo termine dell'equazione di B-L

	ISP.MI	ENEL.MI	AMP.MI	TRN.MI	G.MI
ISP.MI	0,00034	0,00021	0,00016	0,00013	0,00019
ENEL.MI	0,00021	0,00024	0,00016	0,00014	0,00014
AMP.MI	0,00016	0,00016	0,00030	0,00011	0,00011
TRN.MI	0,00013	0,00014	0,00011	0,00017	0,00012
G.MI	0,00019	0,00014	0,00011	0,00012	0,00019

Il secondo termine si ottiene invece moltiplicando la somma tra la moltiplicazione tra la matrice varianza-covarianza inversa e i rendimenti in eccesso impliciti di equilibrio dei titoli e tra la moltiplicazione della matrice P, della matrice inversa Ω e del vettore Q. I risultati sono i seguenti:

Tabella 3.11 Secondo termine dell'equazione di B-L

ISP.MI	-38,326
ENEL.MI	10,055
AMP.MI	28,854
TRN.MI	-41,615
G.MI	41,846

Mettendo insieme i risultati possiamo arrivare finalmente alla conclusione, ovvero al rendimento atteso dei titoli appartenenti al portafoglio considerato utilizzando il modello di asset allocation elaborato da Black e Litterman.

Tabella 3.12 Rendimento atteso calcolato con il modello B-L

	Rendimento atteso con Black & Litterman
ISP.MI	-0,37%
ENEL.MI	-0,12%
AMP.MI	0,38%
TRN.MI	-0,23%
G.MI	0,02%

Con riguardo ai dati quantitativi illustrati sopra, possiamo fare delle considerazioni in merito. Infatti, notiamo come i rendimenti di Intesa San Paolo, di Enel e di Terna risultino negativi, rispettivamente -0,37%, -0,12% e -0,23%, e ciò significa che ci si aspetta una diminuzione del valore dell'asset. Invece i rendimenti attesi di Amplifon e Generali sono positivi, rispettivamente 0,38% e 0,02% e ciò indica una previsione di crescita del valore dell'asset. Tuttavia, dobbiamo considerare che questo approccio permette di integrare le views dell'investitore con i rendimenti attesi di equilibrio in maniera efficace. A proposito, vediamo quindi se le opinioni dell'investitore sono state rispettate e si riflettono nei valori ottenuti. Ricapitolando, abbiamo ipotizzato che il rendimento atteso di Generali avrebbe superato quello di Terna, che quello di Amplifon avrebbe superato quello di Enel e che quest'ultimo, a sua volta, avrebbe superato quello di Intesa San Paolo. Dai risultati ottenuti possiamo confermare le opinioni espresse dall'operatore finanziario, anche se la sovra-performance espressa dalle aspetta dell'investitore non coincide numericamente con quella poi effettivamente calcolata: il rendimento di Generali supera quello di Terna di 0,25% (mentre ci aspettavamo una performance superiore di 0,5%), quello di Amplifon supera quello di Enel di 0,5% (mentre ci aspettavamo una performance superiore di 1%) e quest'ultimo supera quello di Intesa San Paolo di 0,5% (mentre ci aspettavamo una performance superiore di 0,5%). Quindi possiamo come osservare che tra il rendimento frutto dell'opinione dell'operatore e quello effettivo c'è una discrepanza della metà rispetto a quello risultato dalle views.

Possiamo inoltre confrontare tali valori con quelli ottenuti in precedenza, ovvero i rendimenti storici dei titoli e quelli ottenuti attraverso il Capital Asset Pricing Model.

Tabella 3.13 Confronto tra rendimento atteso calcolato con il modello B-L, con la media dei rendimenti logaritmici e con il CAPM

Rendimenti	**Black & Litterman**	Media dei dati storici	CAPM
ISP.MI	**-0,37%**	0,02%	0,50%
ENEL.MI	**-0,12%**	0,03%	0,49%
AMP.MI	**0,38%**	0,08%	0,51%
TRN.MI	**-0,23%**	0,03%	0,51%
G.MI	**0,02%**	0,01%	0,50%

Confrontando i risultati secondo il modello CAPM e quelli ottenuti attraverso il modello di Black-Litterman, possiamo notare delle differenze significative tra i rendimenti calcolati. Ad esempio, se prendiamo in considerazione Intesa San Paolo, il CAPM prevede un rendimento positivo dell'0,5%, mentre il modello di Black-Litterman prevede un rendimento negativo del 0,37%. Tuttavia, se guardiamo alla media storica dei rendimenti, notiamo che il valore si avvicina molto di più al rendimento previsto dal modello di Black-Litterman. Infatti, esaminando sempre Intesa San Paolo, notiamo un rendimento frutto della media aritmetica dei rendimenti logaritmici pari a 0,02%, mentre quello frutto dell'applicazione del modello B-L è pari a -0,37%.

Per concludere, il parere espresso da chi scrive sul modello di Black & Litterman è estremamente favorevole nonostante il risultato dell'applicazione pratica, dove troviamo un portafoglio composto dalla maggior parte dei titoli con un rendimento negativo.

Questo modello, comunque, rappresenta un valore aggiunto disponibile per gli operatori finanziari altamente informati e si rivela un valido strumento di allocazione degli asset per coloro che si basano sulle aspettative di mercato, pur mantenendo l'opportunità di esprimere le proprie opinioni. A proposito, l'obiettivo principale di Fisher Black e Robert Litterman non consiste nel trovare i pesi ottimi per il portafoglio (come nell'approccio di ottimizzazione di Markowitz), ma nel trovare il rendimento atteso che verrà impiegato come input per stimare i pesi ottimali del portafoglio, poiché l'idea su cui si basa il modello è che i pesi ottimali siano già osservati nel mercato e riflessi nel portafoglio di mercato. Questo approccio è noto come tecnica di ottimizzazione inversa del portafoglio.

Infine, dobbiamo esporre delle ultime considerazioni riguardo l'applicazione pratica del modello di Black & Litterman. Questo approccio si distingue anche per il fatto che utilizza un *benchmark* di riferimento, limitando di conseguenza l'esposizione al rischio che riguarda l'*analisi di scenario*, ossia una tecnica di valutazione che viene utilizzata per identificare e misurare la potenziale ricorrenza di eventi di rischio operativo, per stimare l'impatto di perdite operative plausibili e per valutare la resilienza operativa[67]. Tuttavia, ciò è vero se l'investitore preso in considerazione non ha formulato views "sicure" e/o è avverso al rischio in maniera accentuata. Per concludere dobbiamo considerare anche il fatto che gestire *nel lungo periodo* il portafoglio degli investimenti utilizzando come approccio quello descritto fino ad ora, che si basa appunto sulle aspettative dell'investitore stesso, non è una soluzione ottimale. Questo poiché a mano a mano che si investe per un periodo sempre maggiore, la probabilità che l'investitore abbia sempre ragione in merito alle opinioni che esprime sarà sempre minore, esponendolo ad un rischio più elevato.

[67]IBM (2022), "Analisi dello scenario", OpenPages with Watson, https://www.ibm.com/docs/it/opw/8.3.0?topic=objects-scenario-analysis

Conclusione

La tesi ha esplorato i principali modelli che vengono utilizzati strumenti per l'allocazione ottima del portafoglio. Siamo partiti quindi dalla trattazione del modello di Markowitz che ha rappresentato un contributo fondamentale alla "*Portfolio Theory*" e ha aperto la strada ad ulteriori sviluppi e ricerche nel campo della gestione del rischio e dell'allocazione degli investimenti. La tesi ha inoltre proseguito seguendo un ordine cronologico i successivi sviluppi per quanto riguarda l'ASS con il modello di Black-Litterman, introdotto da Fischer Black e Robert Litterman nel 1992. L'approccio descritto da questi due studiosi americani ha delineato un'importante innovazione per quanto concerne la gestione degli investimenti, consentendo agli operatori finanziari di integrare le loro opinioni soggettive con le informazioni di mercato, al fine di ottenere una migliore allocazione dei capitali all'interno di un portafoglio finanziario.

Nel secondo capitolo, quindi, sono state esaminate le principali caratteristiche e metodologie del modello di Black-Litterman. La teoria si basa su una combinazione di teoria del portafoglio di Markowitz e approccio *bayesiano*, che consente di affrontare il problema dell'incertezza nelle previsioni di rendimento degli asset. Un aspetto chiave del modello in questione è l'introduzione di una "distribuzione a priori" che riflette le opinioni soggettive dell'investitore riguardo alle probabilità di rendimento degli asset. Questa distribuzione a priori viene successivamente combinata con le informazioni di mercato attraverso il calcolo della "distribuzione a posteriori", che rappresenta l'opinione aggiornata sull'allocazione dei capitali. Il modello consente quindi di bilanciare l'effetto delle opinioni personali con il peso delle informazioni di mercato, riducendo così la soggettività e migliorando la precisione delle decisioni di investimento.

Nel terzo capitolo della tesi è stata illustrata un'applicazione pratica del modello di Black e Litterman in cui sono stati messi a confronto due diversi portafogli ottenuti con tecniche differenti: il modello B-L e l'ottimizzazione inversa del Capital Asset Pricing Model. Tramite l'implementazione del modello si è giunti alla conclusione che i rendimenti attesi ottenuti con il CAPM si discostano maggiormente rispetto a quelli ottenuti facendo la media aritmetica dei rendimenti logaritmici dei dati storici. Inoltre, nell'ultima parte della tesi abbiamo illustrato due considerazioni da tenere presente quando si decide di gestire un portafoglio di investimento utilizzando il modello B-L al fine di esporsi il meno possibile al rischio: utilizzare un approccio di investimento orientato al *breve periodo* (a causa dell'utilizzo delle views degli investitori che possono non essere precise e sicure quando si tratta di fare opinioni nel lungo periodo) e utilizzare un *benchmark* di riferimento al quale "ancorare" il proprio portafoglio di investimento (per limitare i rischi derivanti dall'analisi di scenario).

In sintesi, è importante notare che il modello di Black-Litterman non è privo di sfide e limitazioni. Infatti, la corretta esplicitazione delle *views* soggettive, la scelta di una distribuzione a priori adeguata e la gestione dell'incertezza sono tutte questioni critiche che richiedono una valutazione attenta e una solida comprensione delle dinamiche del mercato. Per questo motivo, continuare a sviluppare e migliorare questo modello può consentire agli investitori di prendere decisioni più informate e di ottimizzare i loro risultati in un contesto finanziario odierno, ossia sempre mutevole ed "energico". In merito a ciò, continuare ad esplorare e adattare questi modelli descritti in questo elaborato alle dinamiche dei mercati finanziari attuali può aiutare gli investitori a prendere decisioni informate e a raggiungere i loro obiettivi finanziari nel modo più efficiente possibile.

Bibliografia

Benedetti, F. (2020). *Markowitz: l'inizio di una nuova economia*. Tratto da Starting Finance.

Borsa Italiana. (s.d.). *Glossario finanziario*. Tratto da Portafoglio.

Bevan A., Winkelmann K. (1998), "Using the Black-Litterman global asset allocation model: Three years of practical experience", Fixed Income Research, Goldman Sachs.

Cesari, R. (2012). *Introduzione alla Finanza Matematica* (Vol. Seconda Edizione). McGraw-Hill.

Cheung W. (2009). The Black-Litterman model explained. J*ournal of Asset Management,* Vol. 1, No. 4, pp. 229-243.

Fabretti, A. (2019/2020). *teoria portafoglio-2020-04-15-09-59-54.pdf.* Tratto da Teoria del portafoglio e approccio media varianza slide.

Fischer Black, R. L. (1991). Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, p. 7-18 .

Fischer Black, R. L. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, p. 28-40.

Gofman M., Manela A. (2012). *An empirical evaluation of the Black-Litterman approach to portfolio choice*.

He G., Litterman R. (1999), "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", Working paper.

IBM. (2022). *Analisi dello scenario.* Tratto da OpenPages with Watson.

Idzorek, T. M. (2005). A step-by-step guide to the Black and Litterman model.

Jorion P. (1992). *Portfolio optimization in practice*, Financial Analysts Journal, Vol. 48, No. 1, p. 68-74.

Ludwig B. Chincarini, D. K. (2013). *Uses and Misuses of the Black-Litterman Model in Portfolio Construction.* Tratto da The University of San Francisco.

Hamada, R.S. (1969). Portfolio Analysis, market equilibrium and corporation finance. *Journal of Finance*.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1*, p. 77-91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: efficient diversification of investments*. Cowels Foundation Monograph n.16, Wiley.

Meucci, A. (2009). *Risk and Asset Allocation*. Springer.

Meucci A. (2010). *The Black-Litterman approach: original model and extensions*. Working paper.

Narciso, A. (2014). *Capital Asset Pricing Model*. Tratto da Statistica applicata.

Nunnari, R. (2020). *Modello Black Litterman e asset allocation*. Tratto da Altervista.

Cesari, R. e Elisa, S. (2005). *Introduzione alla Finanza Matematica.* McGraw-Hill.

Rizzi, F. (2022). *Cos'è il premio di rischio?* Tratto da Rankia.

Sharpe W.F (1992), Asset allocation: management style and performance measurement, *Journal of Portfolio Management*.

Sharpe W.F. (2007). Expected utility asset allocation. *Financial Analysts Journal*, Vol. 3, No. 5, p. 18

Taylan, K. (2021). *KamilTaylan.blog - Enciclopedia finanziaria*. Tratto da Capital Market Line (CML).

Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics.* Wiley and Sons.

Treccani. (2012). *FTSE Italia MIB.* Tratto da Dizionario di Economia e Finanza.

Vanzini, R. (2019). *Applicazioni del modello di Black-Litterman.* Tratto da Rodolfo Vanzini.

Sitografia

https://startingfinance.com/approfondimenti/markowitz-fine-economia-classica/#:~:text=I%20risultati%20ottenuti%20dalla%20Modern,rendimenti%20non%20sono%20perfettame

https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/portafoglio.html#:~:text=Il%20valore%20atteso%20del%20rendimento,wi%20x%20E(Ri)%5D.

www.blacklitterman.org

https://economia.uniroma2.it/cdl/triennio/clef/corso/asset/YTo0OntzOjI6ImlkIjtzOjQ6IjEyMTkiO3M6MzoiaWRhIjtzOjU6IjQ3Mzc0IjtzOjI6ImVtIjtOO3M6MToiYyI7czo1OiJjZm

https://www.ibm.com/docs/it/opw/8.3.0?topic=objects-scenario-analysis

www.morningstar.com

https://repository.usfca.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1004&context=fe#:~:text=original%20Black%20Litte

https://narcisoabigail.wordpress.com/2014/04/07/capital-asset-pricing-model/

https://justknow.altervista.org/modello-black-litterman/?doing_wp_cron=1682408238.6753470897674560546875

https://rankia.it/azioni/cose-il-premio-di-rischio/

https://it.kamiltaylan.blog/cml/#Capital_Market_Line_vs_Security_Market_Line

https://www.treccani.it/enciclopedia/ftse-italia-mib_%28Dizionario-di-Economia-e-Finanza%29/

http://www.rodolfovanzini.com/wp-content/uploads/2019/07/black-litterman_v2.html https://www.unirc.it/documentazione/materiale_didattico/1465_2015_398_22140.pdf

https://www.borsaitaliana.it/borsa/azioni/ftse-mib/lista.html

https://it.investing.com/equities/italy

https://it.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield-historical-data