



Corso di laurea in Banche ed Intermediari Finanziari

Cattedra Economia del Mercato Mobiliare

Prezzi futures del petrolio: Bachelier vs. Black-Scholes

Prof. Emilio Barone

RELATORE

Prof. Valerio Marchisio

CORRELATORE

Gabriele Bellucci

CANDIDATO

Alla mia famiglia

Indice

1. Introduzione

2. Il mercato dei derivati

2.1. Struttura del mercato dei *futures*

2.2. Analisi dei prezzi *futures* e *forward*

2.2.1. Prezzi *forward* su titoli, indici, valute e merci

2.2.2. Valore contratto *forward*

2.2.3. Confronto tra prezzi *futures* e *forward*

2.3. Relazione prezzi *futures* e aspettative dei prezzi *spot*

2.4. *Contango* e *Normal backwardation*

3. Bachelier vs Black-Scholes

3.1. Processi stocastici

3.1.1. Moto browniano

3.1.2. Moto browniano geometrico

3.1.3. Processo di Ornstein-Uhlenbeck

3.2. Modello di Bachelier vs Black-Scholes

3.2.1. Modello di Bachelier

3.2.2. Modello di Black-Scholes

3.2.3. Volatilità storica

3.2.4. Volatilità implicita

3.2.5. Conversione volatilità tra i modelli

4. Caso empirico: volatilità del prezzo del petrolio

4.1. Determinazione volatilità storica prezzo del petrolio

4.2. Determinazione volatilità implicita con Black-Scholes e Bachelier

4.3. Predittività volatilità storica e implicita

5. Conclusione

Appendice

Capitolo 1

Introduzione

L'elaborato tratta la determinazione della volatilità nel mercato del petrolio, una variabile essenziale per il *pricing* delle opzioni, e la sua capacità previsiva circa la volatilità corrente del petrolio. Il secondo capitolo della tesi riguarda l'analisi teorica della struttura del mercato futures delle *commodities* e, in particolare, del petrolio. Quindi, verranno trattati e studiati i contratti *forward* e *futures*, analizzando il prezzo, di diversi titoli, e il valore del contratto *forward*.

Nel terzo capitolo verranno, prioritariamente, approfonditi i processi stocastici in quanto alla base dei modelli di *pricing*. In particolare, verranno esaminati il moto browniano standard, geometrico e il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Successivamente, verranno esaminati attentamente il modello di Bachelier e di Black-Scholes per il *pricing* delle opzioni. Inoltre, verranno trattate la volatilità storica del Brent, con diversi metodi di stima, e la volatilità implicita dei modelli di Black-Scholes e Bachelier. Il capitolo si conclude con la spiegazione teorica della conversione delle volatilità implicite delle opzioni.

Il quarto capitolo empirico tratterà la stima della volatilità storica, della volatilità implicita, con la conversione tra i diversi modelli, e lo studio della capacità predittiva della volatilità implicita e storica rispetto a quella corrente. La finalità del seguente capitolo è quello di determinare se la volatilità storica e le volatilità implicite riescono a spiegare la volatilità corrente.

L'ultimo capitolo è la conclusione dell'elaborato dove verranno ripresi i risultati ottenuti nel precedente capitolo.

In appendice verranno inseriti i codici Python utilizzati durante l'elaborato.

Capitolo 2

Il mercato dei derivati

Il mercato dei derivati ha assunto sempre più importanza per determinati settori, come quello energetico, soprattutto in virtù della rilevante e crescente volatilità che li caratterizza. Un derivato è un contratto in cui due soggetti concordano una futura transazione che è influenzata dal valore dell'attività sottostante. In particolare, l'attività sottostante può essere un'attività finanziaria, come un titolo obbligazionario, oppure una materia prima come oro, argento o petrolio. Se un derivato ha come sottostante una materia prima è essenziale definire l'attività senza ambiguità e quindi specificare, in maniera dettagliata, la qualità e la quantità del prodotto. I contratti derivati possono essere utilizzati per tre diverse finalità: finalità di copertura, quindi ridurre l'esposizione del proprio portafoglio rispetto a variabili di mercato; finalità speculative, cioè per trarre profitto anticipando e prevedendo potenziali movimenti di mercato; finalità di arbitraggio, ottenendo un guadagno privo di rischio attraverso due o più operazioni atte a sfruttare eventuali distorsioni di mercato. I contratti derivati vengono negoziati principalmente dal CME group. Il mercato dei derivati è costituito principalmente da *futures*, *forward*, *swap* e opzioni.

Le opzioni sono contratti derivati che danno al portatore il diritto, e non l'obbligo, di comprare o vendere una determinata attività sottostante ad un prezzo d'esercizio prestabilito ed entro una determinata data. Le opzioni si differenziano in opzioni *call* e *put*, le prime danno il diritto a comprare l'attività sottostante mentre le seconde danno il diritto a vendere. Un'ulteriore differenziazione delle opzioni è tra opzioni europee, il cui portatore può esercitare esclusivamente alla scadenza dell'opzione stessa, e opzioni americane, che danno il diritto al portatore di esercitare l'opzione in qualsiasi istante. Le opzioni vengono principalmente negoziate alla *Chicago Board Options Exchange (CBOE)*.

Gli *swap* sono contratti derivati in cui due soggetti si scambiano dei pagamenti futuri divisi in diverse transazioni. Tali pagamenti dipendono dalle specifiche contrattuali che comportano la classificazione degli *swap* in diverse categorie come *interest rate swap*, *equity swap*, *currency swap* e *commodities swap*.

In questo elaborato, concentreremo l'attenzione sui contratti *futures* e *forward* che hanno come sottostante delle *commodities* e in particolare il petrolio. Al contrario del mercato *futures*, il mercato *spot* è caratterizzato dal fatto che la regolazione del contratto avviene immediatamente. Gli investitori preferiscono negoziare le *commodities* attraverso il mercato *futures*, in quanto è un mercato più liquido rispetto al mercato *spot*. Questo perché il mercato *spot* è contraddistinto da maggiori costi di transizione e immagazzinamento della merce rispetto al mercato *futures*.

2.1 Struttura del mercato dei futures

I *forward* sono contratti derivati in cui due soggetti si accordano su una futura transazione per comprare o vendere una determinata attività sottostante ad un determinato prezzo e ad una determinata data. Il *payoff* del contratto per chi assume una posizione *long* è dato dalla differenza tra il prezzo *spot* dell'attività sottostante al tempo t (S_t) e il prezzo di consegna (K), quindi: $S_t - K$. Il *payoff* per la parte *short* è esattamente l'opposto, cioè: $K - S_t$. I *futures* sono contratti derivati che hanno delle proprietà simili ai contratti *forward*; tuttavia, ci sono delle peculiari differenze tra questi contratti. In particolare, i contratti *futures* sono contratti standardizzati e negoziati in borsa mentre i contratti *forward* sono contratti non standardizzati e negoziati fuori dalla borsa (*over the counter*). Quindi, nei contratti *forward* gli investitori negoziano direttamente tra loro e non vi è nessuna borsa che svolge il ruolo di intermediazione nelle contrattazioni, ruolo che invece assume nel caso dei contratti *futures*.

I contratti *futures* vengono scambiati principalmente presso il CME group e l'*InterContinental Exchange*. La maggiore parte degli investitori utilizzano i contratti *futures* come meri strumenti finanziari e non sono interessati alla consegna dell'attività sottostante. Per evitare la consegna del sottostante è necessario chiudere il contratto, prima del mese di consegna, aprendo un altro contratto di segno opposto rispetto al precedente. Nel momento della negoziazione del contratto *futures* le parti devono accordarsi sull'oggetto dell'attività sottostante e sulla dimensione del contratto. La borsa definisce le specifiche contrattuali dei contratti *futures*, regolando la qualità del sottostante, la dimensione (*size*) del contratto e il luogo di consegna dell'attività sottostante.

La qualità dell'attività sottostante viene definita dalla borsa, tuttavia la parte corta può consegnare una qualità diversa da quella specificata sul contratto a patto che il prezzo venga aggiustato tenendo in considerazione la diversa qualità del sottostante consegnata alla parte lunga. Per quanto riguarda il *crude oil*, le qualità del petrolio ammessi alla contrattazione sono il *West Texas Intermediate* (WTI), principalmente utilizzato in nord e sud America o il *Brent*, negoziato in Inghilterra ed Europa. La dimensione è una caratteristica essenziale del contratto *futures* in quanto rappresenta la quantità di attività sottostante che la parte *short* deve consegnare alla parte *long*. La *size* del contratto *future* è fondamentale per catturare l'attenzione degli investitori e per l'efficienza stessa del contratto. Infatti, un contratto con una *size* elevata non permette agli investitori di usare il contratto a fini di copertura di posizioni piccole. Al contrario, un contratto con una *size* piccola non è un contratto efficiente in quanto comporta

maggiori costi perché bisogna aprire un numero maggiore di posizioni. La dimensione del WTI e del *Brent crude oil futures* è pari a mille barili. Di solito, la funzione di consegna dell'attività sottostante viene data al venditore del contratto che deve notificare alla borsa la sua intenzione ad effettuare la consegna. La borsa definisce il luogo standard di consegna, tuttavia anche in questo caso c'è la possibilità per la parte corta di consegnare in un luogo diverso da quello previsto dalla borsa e in caso di consegna in un luogo diverso il prezzo viene aggiustato di conseguenza. Tale aggiustamento viene fatto per tenere in considerazione i costi di trasporto delle merci che possono influenzare notevolmente il valore del contratto. In particolare, il prezzo ricevuto dalla parte corta aumenta se il luogo di consegna è più lontano dal luogo predefinito dalla borsa. Il luogo standard per la consegna del *WTI crude oil* è Cushing in Oklahoma mentre il *Brent crude oil* viene, generalmente, consegnato a Sullom Voe in Scozia.

L'elemento identificativo di ciascun contratto *futures* è il mese di consegna che viene definito dalla borsa. Immediatamente prima del mese di consegna, gli investitori teoricamente non possono usufruire di opportunità di arbitraggio, in quanto il prezzo del contratto *futures* è identico al prezzo *spot* dell'attività sottostante. Se tale proprietà non fosse verificata e supponendo che il prezzo *spot* del sottostante sia superiore al prezzo *futures*, allora l'arbitraggista potrebbe comprare il contratto *futures*, farsi consegnare il sottostante dalla parte corta e rivenderlo al prezzo spot ad un prezzo maggiore ottenendo un guadagno privo di rischio pari alla differenza tra il prezzo *spot* e *futures*. Viceversa, se il prezzo *futures* è maggiore di quello *spot*, l'arbitraggista può assumere posizioni esattamente opposte a quelle precedentemente dette.

Tab. 2.1 prezzi *WTI crude oil*

MONTH	OPTIONS	CHART	LAST	CHANGE	PRIOR SETTLE	OPEN	HIGH	LOW	VOLUME
 APR 2023 CLJ3	 OPT		76.67	+0.12 (+0.16%)	76.55	76.64	77.74	75.94	340,998
 MAY 2023 CLK3	 OPT		76.82	+0.12 (+0.16%)	76.70	76.83	77.90	76.11	50,055
 JUN 2023 CLM3	 OPT		76.85	+0.14 (+0.18%)	76.71	76.78	77.89	76.15	53,178
 JUL 2023 CLN3	 OPT		76.64	+0.11 (+0.14%)	76.53	76.73	77.68	76.00	20,067

Fonte: CME Group

La tabella 2.1 rappresenta i prezzi del *WTI crude oil futures*, dove la prima colonna indica il mese di consegna del *WTI crude oil*, CL è la sigla del contratto. La sesta colonna è il *settlement*

price ovvero il prezzo di liquidazione del contratto, tale prezzo è fondamentale in quanto serve per calcolare i profitti e le perdite (P&L) e il deposito di garanzia. Attraverso i *settlement prices* è possibile capire la tendenza del mercato, in particolare se i prezzi di liquidazione aumentano con la scadenza del contratto parliamo di mercato normale, se diminuiscono il mercato è detto mercato inverso altrimenti abbiamo un mercato misto. In questo caso, i prezzi di liquidazione in alcuni mesi aumentano mentre in altri diminuiscono e quindi abbiamo un mercato misto. La quinta colonna rappresenta la differenza tra l'ultimo prezzo odierno dell'attività sottostante e il prezzo di liquidazione. Le ultime quattro colonne rappresentano rispettivamente, il prezzo di apertura del contratto, il prezzo più alto, quello più basso e il volume di transazioni durante la giornata.

Come detto precedentemente, *forward* e *futures* hanno delle caratteristiche base in comune ma si differenziano per alcuni aspetti che andremo ad analizzare più in profondità. In particolare, i contratti *futures* sono contratti standardizzati e trattati in borsa mentre i contratti *forward* sono negoziati fuori dalla borsa. La sostanziale differenza risiede nel rischio di credito e in particolare nel rischio di controparte (*counterparty risk*). Il *counterparty risk* è il rischio di inadempienza di una delle parti che hanno negoziato il contratto ed è contraddistinto dal fatto che la perdita potenziale varia al variare del valore dell'attività sottostante. I contratti *futures* essendo negoziati in borsa sono privi di rischio di controparte. Ciò è possibile attraverso i depositi di garanzia che ogni investitore è obbligato a versare alla cassa di compensazione (*clearinghouse*). La *clearinghouse* è un intermediario finanziario che mette in relazione *traders* di *futures* e permette la riduzione del rischio di controparte. Un investitore che vuole assumere una posizione, lunga o corta, su un contratto *futures* deve versare prioritariamente un margine iniziale sul conto di deposito. Il conto di deposito viene aggiustato alla fine di ogni giornata di negoziazioni attraverso il *marking to market* ("agganciamento al mercato"), che determina le perdite o i profitti giornalieri degli investitori. Per cui, alla fine di ogni giornata lavorativa abbiamo dei flussi di capitale tra investitori che hanno posizioni opposte. Quindi, il *marking to market* permette che i contratti *futures* vengano liquidati giornalmente. Al fine di ridurre il rischio di inadempienza di una controparte, il conto di deposito non può scendere al di sotto di un determinato limite, detto margine di mantenimento. In genere, la borsa definisce il valore del margine di mantenimento pari al 75% del margine iniziale richiesto. La stessa borsa stabilisce quanto dev'essere almeno il margine iniziale e il margine di mantenimento. Se il conto di deposito di un *trader* risulta essere inferiore al margine di mantenimento, l'investitore riceverà una *margin call* ("richiesta di integrazione") per ricondurre il conto almeno al livello

del margine iniziale, se ciò non accade la posizione dell'investitore viene chiusa.

I contratti *forward* sono caratterizzati da un alto rischio di controparte in quanto sono negoziati “*over the counter*” (OTC). I mercati OTC sono mercati non regolamentati in cui gli investitori negoziano in maniera diretta i contratti fra di loro e sono gli stessi *traders* che definiscono le caratteristiche contrattuali. Questa negoziazione diretta è il motivo per cui i contratti *forward* presentano un rischio di controparte. Di solito, la data di consegna dell'attività sottostante corrisponde alla scadenza del contratto ed è unica per cui non è possibile scegliere uno specifico mese di consegna, come avviene invece per i contratti *futures*. I contratti *forward* avendo queste caratteristiche sono contratti meno liquidi rispetto ai contratti *futures*. Per andare a ridurre il rischio di controparte nel mercato OTC, sono stati introdotti degli strumenti che svolgono un ruolo simile a quello della *clearinghouse* nei mercati regolamentati. In particolare, sono state introdotte le controparti centralizzate (“*central counterparties*”, CCPs) che svolgono il ruolo di intermediario tra i *traders* andando a ridurre il rischio di credito attraverso la richiesta dei margini. Se la negoziazione di un contratto OTC non avviene attraverso la controparte centralizzata, i *traders* possono utilizzare la compensazione bilaterale (“*bilateral clearing*”). Con la compensazione bilaterale, i *traders* negoziano direttamente tra di loro il contratto *forward* senza che organi di borsa svolgano la funzione di intermediari nelle contrattazioni. Tuttavia, i contratti OTC negoziati attraverso questa modalità devono seguire un contratto quadro (“*master agreement*”), ossia un documento che definisce le caratteristiche contrattuali essenziali. In genere, al contratto quadro viene accompagnato un allegato di supporto al credito (“*credit support annex*”, CSA). Questo allegato serve per ridurre il rischio di controparte andando a definire le garanzie che le parti devono mettere a disposizione. Di norma, i contratti quadri vengono definiti dall'*International Swap and Derivates Association* (ISDA). Recentemente, istituzioni finanziari che sottoscrivono un contratto quadro ISDA sono obbligati a versare i margini ad un soggetto terzo.

2.2 Analisi dei prezzi futures e forward

In questo paragrafo verrà analizzata la determinazione dei prezzi *futures* e *forward* e la relazione che lega il prezzo *futures* con quello *spot*. La formazione dei prezzi di questi contratti è molto simile e dipendono da diversi fattori come l'attività sottostante, il tasso privo di rischio e il tempo di scadenza dei contratti. Come visto nel paragrafo precedente, i contratti *forward* e *futures* presentano delle caratteristiche contrattuali diverse. Tuttavia, se i contratti presentano la medesima data di consegna e attività sottostante, i prezzi *forward* e *futures* saranno molto simili. Per questo motivo utilizzeremo come simbolo F_0 per indicare in maniera indistinta il prezzo *forward* o *futures* corrente. I prezzi *forward* e *futures* derivano principalmente dal prezzo *spot* dell'attività sottostante che possiamo dividere in beni d'investimento e beni di consumo. I primi vengono utilizzati dai *traders* prevalentemente a scopo di investimento mentre i secondi sono tutte quelle attività che non rientrano nella prima categoria. Un esempio di beni di investimento è l'oro mentre un esempio di bene di consumo è il petrolio. Come vedremo successivamente, il prezzo di un *futures* che ha come sottostante un bene di investimento diverge dal prezzo di un *futures* scritto su un bene di consumo per il tasso di convenienza (*convenience yield*, y), ossia l'utilità che il *trader* ha nel poter usufruire della merce rispetto al beneficio nell'avere una posizione sul medesimo contratto *futures*.

Per andare ad analizzare la relazione esistente tra prezzi *futures* e *spot* è prima necessario chiarire quali sono le ipotesi sottostanti che devono valere per la maggiore parte dei *traders*. In particolare, abbiamo che:

1. Non ci sono costi di transazione;
2. A tutti gli investitori si applica la medesima tassazione;
3. Tutti gli investitori possono prendere e dare in prestito denaro al tasso privo di rischio, r ;
4. Gli arbitraggisti approfittano delle opportunità di arbitraggio, eliminandole.

2.2.1 Prezzi forward su titoli, indici, valute e merci

La relazione che lega prezzi forward e prezzi spot dipende dal tempo e dall'attività sottostante e se quest'ultima genera redditi e/o costi per il *trader*. Analizzeremo prioritariamente la formazione dei prezzi *forward* scritti su titoli che non generano redditi, come per esempio uno *zero coupon bond* (zcb).

In questo caso, il prezzo *forward* è dato da:

$$F_0 = S_0 * e^{r*T} \quad (1)$$

Dove,

S_0 è il prezzo *spot* corrente del titolo;

r è il tasso *risk free*;

T è il tempo che intercorre prima della scadenza del contratto.

Il motivo per cui il prezzo forward F_0 è maggiore del semplice prezzo spot S_0 è dato dal fatto che il trader percepisce degli interessi (r) per un determinato periodo di tempo (t) sul capitale non utilizzato. Questa relazione dev'essere valida altrimenti ci sarebbero opportunità di arbitraggio. In particolare, se $F_0 > S_0 * e^{r*T}$ è possibile acquistare il titolo sul mercato *spot* e venderlo al prezzo *forward* ottenendo un profitto privo di rischio. Se la relazione è esattamente l'opposta è possibile fare un'operazione di arbitraggio attraverso la vendita allo scoperto dello *zero coupon bond* al prezzo *spot* e il successivo acquisto al prezzo *forward*.

Per quanto concerne un titolo che offre un rendimento noto, come un'obbligazione con tasso cedolare fisso, il legame fra F_0 e S_0 è leggermente diverso. In particolare,

$$F_0 = (S_0 - I) * e^{r*T} \quad (2)$$

Dove,

I è il valore attuale del rendimento noto del titolo.

Questa relazione è valida solo se l'investitore conosce già la somma assoluta che riceverà durante un determinato periodo di tempo. Questa formula non può essere utilizzata per i titoli che hanno un tasso di dividendo composto continuamente noto. Infatti, se i dividendi vengono reinvestiti continuamente, la quantità di un contratto *forward* scritto su questa tipologia di titolo cresce in relazione al tasso di dividendo. Quindi, avremo che:

$$e^{q*T} * F_0 = S_0 * e^{r*T} \quad (3)$$

Dove,

q è il tasso di dividendo medio di un titolo sottostante il contratto *forward*.

Per cui,

$$F_0 = S_0 * e^{(r-q)*T} \quad (4)$$

Generalmente, questa formula vale anche per i *forward* scritti su indici azionari che possono essere considerati come titoli che generano un *dividend yield* noto. Nel caso di indici azionari bisogna controllare che il contratto *forward* non sia un contratto “quanto”, ossia un contratto in cui il valore dell’indice è dato da una valuta mentre il *payoff* è dato da un’altra valuta. Questa relazione è valida anche per i *forward* che hanno come attività sottostante una valuta estera, se il tasso di dividendo medio di un titolo (q) viene sostituito con il tasso privo di rischio estero, r_f . Quindi, per questo tipo di titoli la relazione diventa:

$$F_0 = S_0 * e^{(r-r_f)*T} \quad (5)$$

Questa formula è anche conosciuta come l’*interest rate parity*.

Fino ad ora sono stati trattati i prezzi *forward/futures* scritti su beni di investimento, ora vedremo qual è la relazione per i prezzi *forward/futures* su *commodities*. Il legame tra prezzo *forward/futures* e prezzo *spot* per una merce che genera un rendimento noto (q) e presenta costi di immagazzinamento proporzionali al prezzo della merce (u) è dato da:

$$F_0 = S_0 * e^{(r-q+u-y)*T} \quad (6)$$

Dove y è il tasso di convenienza dato dalla detenzione della merce ed un suo possibile utilizzo futuro. Il tasso di convenienza dipende direttamente dalla scarsità della merce, maggiore è la scarsità maggiore è il tasso di convenienza, e viceversa. Più in generale possiamo legare il prezzo *forward/futures* al prezzo *spot* attraverso il *cost of carry* (costo di trasferimento), ossia l’insieme del tasso d’interesse privo di rischio, dei costi d’immagazzinamento e del rendimento noto generato dall’attività sottostante. Per un bene di consumo, possiamo scrivere questa relazione come:

$$F_0 = S_0 * e^{(c-y)*T} \quad (7)$$

Dove, c è il costo di trasferimento che dipende da qual è l'attività sottostante il contratto *forward/futures*.

2.2.2 Valore contratto forward

Durante la negoziazione di un contratto forward le parti si mettono d'accordo che il prezzo di consegna (K) dell'attività sottostante sia uguale al prezzo forward corrente, in questo modo il valore al tempo 0 di un contratto *forward* è nullo. Infatti, i trader che assumono posizioni su un contratto *forward* non hanno un'uscita di cassa immediata. Il valore di un contratto *forward long* è dato da questa relazione:

$$f = (F_0 - K) * e^{-r*T} \quad (8)$$

È chiaro che se $K = F_0$ allora il valore del contratto *forward* è nullo. Il prezzo di consegna dell'attività è determinato ex ante ed è fisso per tutta la durata del contratto mentre il prezzo *forward* corrente varia e, di conseguenza, fa cambiare il valore del contratto *forward* che può diventare positivo o negativo. Questa formula può essere dimostrata attraverso la costruzione di un portafoglio formato da un *long forward* con prezzo di consegna alla scadenza pari a F_0 e con un *forward* uguale ma con prezzo di consegna K . La differenza tra questi contratti è data esclusivamente dal prezzo di consegna pagato alla scadenza T , pari a $F_0 - K$. Sapendo che al tempo 0 il contratto *long forward* ha valore nullo, attualizzando tale costo al tasso privo di rischio si otterrà esattamente la formula di partenza. Il valore di un contratto *short forward* è:

$$f = (K - F_0) * e^{-r*T} \quad (9)$$

sostituire tale prezzo con il suo prezzo *spot* corrente (S_0), ottenendo il valore di un contratto *long forward* per un titolo che non genera rendimenti pari a:

$$f = (S_0 - K) * e^{-r*T} \quad (10)$$

Mentre il valore di un *long forward* scritto su un'attività che genera un tasso di dividendo noto è uguale a:

$$f = S_0 * e^{-q*T} - K * e^{-r*T} \quad (11)$$

2.2.3 Confronto tra prezzi forward e futures

Il legame tra prezzi *forward* e *futures* può essere teoricamente dimostrato supponendo che i contratti abbiano la medesima data di scadenza e che il tasso privo di rischio composto continuamente (δ) rimanga costante per tutto l'arco temporale. La dimostrazione si basa anche sulla legge del prezzo unico che afferma che strategie di investimento che hanno gli stessi *payoff* devono avere anche lo stesso identico valore corrente. Bisogna inoltre sottolineare le ipotesi sottostanti questa dimostrazione, ossia che non ci sono costi di transazione e tasse. Consideriamo una strategia di investimento tale per cui un *trader* apre una posizione su un *long futures* uguale a e^δ alla fine del tempo 0 e che tale posizione viene incrementata ogni giorno fino al tempo $n-1$, in cui avremo che la posizione sul *long futures* sarà pari a $e^{n\delta}$. Il *payoff* alla fine dell' i -esimo giorno sarà sempre pari a:

$$(F_i - F_{i-1}) * e^{\delta i} \quad (12)$$

Capitalizzando fino alla fine del periodo n , il *payoff* sarà:

$$(F_i - F_{i-1}) * e^{\delta i} * e^{(n-i)\delta} = (F_i - F_{i-1})e^{n\delta} \quad (13)$$

Sapendo che il tasso privo di rischio rimane costante ogni giorno fino alla scadenza, il valore finale dell'investimento sarà pari alla sommatoria dei singoli *payoff* giornalieri e quindi:

$$(F_n - F_0)e^{n\delta} \quad (14)$$

Sapendo che F_n è identico al prezzo spot, S_n si ricava che:

$$(S_n - F_0)e^{n\delta} \quad (15)$$

Aggiungendo a questa strategia l'investimento in titoli al tasso *risk free* al prezzo F_0 , otteniamo:

$$F_0 * e^{n\delta} + (S_n - F_0)e^{n\delta} = S_n * e^{n\delta} \quad (16)$$

Tale importo lo si ottiene investendo esattamente F_0 . Questo identico importo può essere ottenuto attraverso l'apertura di una posizione *long* di $e^{n\delta}$ contratti *forward* e impiegando una somma pari a G_0 , che ipotizziamo rappresenti il prezzo *forward* alla fine del tempo 0, su un titolo *risk free*. Ricordando la legge del prezzo unico, otteniamo che:

$$F_0 = G_0 \quad (17)$$

Abbiamo dimostrato che, sotto determinate ipotesi e condizioni, il prezzo *forward* e *futures*

devono essere uguali.

Se consideriamo l'ipotesi per cui i tassi di interesse possano non rimanere costanti per l'arco di tutte le scadenze, questa identità tra prezzi *forward* e *futures* non è più valida. Possiamo considerare la correlazione tra prezzo spot dell'attività sottostante e tasso di interesse al fine di identificare la differenza teorica tra prezzi *forward* e *futures*. In particolare, se il prezzo spot dell'attività è positivamente correlato con il tasso di interesse privo di rischio e il prezzo spot S_n aumenta allora l'investitore con un *long futures* avrà un guadagno istantaneo. Come sappiamo, il *forward* non è influenzato giornalmente dalla variazione dei tassi come lo è il *futures*. Per questo motivo un *long futures* verrà preferito ad un *long forward*, rendendo il prezzo *futures* maggiore del prezzo *forward*. Contrariamente, se il prezzo *spot* dell'attività sottostante è negativamente correlato con i tassi, avremo che il prezzo *futures* sarà minore del prezzo *forward*. Un altro caso in cui la relazione di identità tra prezzi *forward* e *futures* non è valida avviene quando le scadenze dei contratti *futures* sono molto lontane nel tempo.

2.3 Relazione tra prezzi futures e aspettative dei prezzi spot

La relazione tra prezzi *futures* e l'*expected spot price* può essere spiegata attraverso le teorie di John Maynard Keynes e John Hicks e con il *capital asset pricing model* (CAPM).

La formazione dei prezzi *futures* secondo Keynes e Hicks avviene attraverso l'assunzione delle posizioni, lunghe o corte, da parte degli speculatori ed *hedgers* sul mercato. In particolare, il prezzo *futures* viene principalmente formato dalle operazioni che gli speculatori attuano nel mercato, cercando di ottenere un profitto quando credono che il prezzo *futures* è minore del prezzo *spot* atteso per una determinata data. Uno speculatore, per definizione, assume posizioni rischiose sul mercato e tale rischio dev'essere compensato da un possibile guadagno futuro. Dall'altra parte, l'*hedger* fa una strategia di copertura del rischio che può comportare la riduzione di potenziali profitti. Di norma, gli *hedgers* utilizzano i contratti *futures* per stabilire il prezzo che, in futuro, andranno a pagare evitando l'esposizione ad oscillazioni di mercato. Quindi, quando gli speculatori assumono posizioni *long* e gli *hedger* assumono posizioni *short*, il prezzo *futures* è più basso dell'*expected spot price*. Viceversa, se gli speculatori hanno prevalentemente posizioni *short* e gli *hedgers* posizioni *long*, il prezzo *futures* sarà più elevato del prezzo *spot* atteso. Dalla teoria delle aspettative di Keynes (1930) nascono i concetti di *normal backwardation* e *contango* che verranno spiegati ed analizzati in maniera più approfondita nel prossimo paragrafo.

Il collegamento tra prezzi *futures* e prezzi *spot* attesi può essere spiegato attraverso il *capital asset pricing model*, un modello economico che determina la relazione tra il rendimento atteso di un'attività finanziaria e il relativo rischio attraverso un fattore di mercato chiamato beta (β). Per cui, il rendimento atteso sarà determinato dalla seguente equazione:

$$E(R) = R_f + \beta * (R_m - R_f) \quad (18)$$

Dove,

R_f è il rendimento di un'attività priva di rischio;

R_m è il rendimento di mercato, di solito è un indice di mercato come l'S&P500.

L'investimento in un titolo comporta due tipi di rischi:

- 1) Rischio sistematico che è il rischio proprio di un'attività finanziaria che non può essere annullato attraverso la diversificazione;

- 2) Rischio non sistematico (o specifico), è quella parte di rischio del titolo che dipende dall'andamento del settore e può essere eliminato attraverso la diversificazione.

Il beta (β) misura la sensitività del tasso di rendimento di un titolo al variare del tasso di rendimento di mercato e misura il rischio sistematico del titolo. Fama e French hanno ampliato questa versione del CAPM unifattoriale prendendo in considerazione altri due fattori, ossia il *size effect* e il *value effect*. Il *size effect* rappresenta la differenza tra i rendimenti attesi da società con bassa capitalizzazione di mercato e rendimenti attesi da società con elevata capitalizzazione. Il *value effect* è la differenza tra rendimenti attesi da società con un elevato rapporto *book-to-market* e rendimenti attesi da società con un basso rapporto *book-to-market*. È possibile spiegare la relazione tra prezzi futures e prezzi spot attesi, tenendo in considerazione il rischio e il rendimento di un'attività finanziaria, attraverso la strategia di investimento di uno speculatore. Supponiamo che uno speculatore, al tempo 0, assuma una posizione su un *long futures* e che investa il valore attuale del prezzo *futures* al tasso *risk free*. Alla scadenza T , lo speculatore acquisterà l'attività sottostante che venderà al prezzo *spot* di mercato. I flussi di cassa dello speculatore sono:

- al tempo 0, un'uscita di cassa pari a $-F_0 * e^{-r*T}$;
- alla scadenza T , un'entrata di cassa pari a S_T .

Per valutare la strategia dello speculatore dobbiamo supporre che la strategia abbia un valore attuale netto uguale a 0 e bisogna tenere in considerazione il valore atteso del prezzo *spot* attualizzando al tasso k , che rappresenta anche il rischio non diversificabile dell'attività finanziaria. Per cui avremo che:

$$-F_0 * e^{-rT} + E(S_T) * e^{-kT} = 0 \quad (19)$$

Mettendo tutto in funzione del prezzo *futures*, otteniamo:

$$F_0 = E(S_T) * e^{(r-k)*T} \quad (20)$$

Perciò, il legame tra prezzi *futures* e prezzi *spot* attesi dipende dalla correlazione del prezzo *spot* con i movimenti di mercato e quindi dal valore che viene assunto dal fattore di mercato (β). In particolare, il prezzo *futures* sarà esattamente uguale al prezzo *spot* atteso, se e solamente se, il beta è zero, ossia quando l'attività sottostante non è correlata con i movimenti del mercato. In questo caso avremo che $r = k$, allora:

$$F_0 = E(S_T) \quad (21)$$

Nel caso in cui il sottostante fosse positivamente correlato con il mercato ($\beta > 0$) abbiamo che $k > r$ e quindi:

$$F_0 < E(S_T) \quad (22)$$

Quindi, il prezzo *futures* sottostima quello *spot* atteso. Viceversa, se l'attività sottostante è negativamente correlata con il mercato, la relazione sarà:

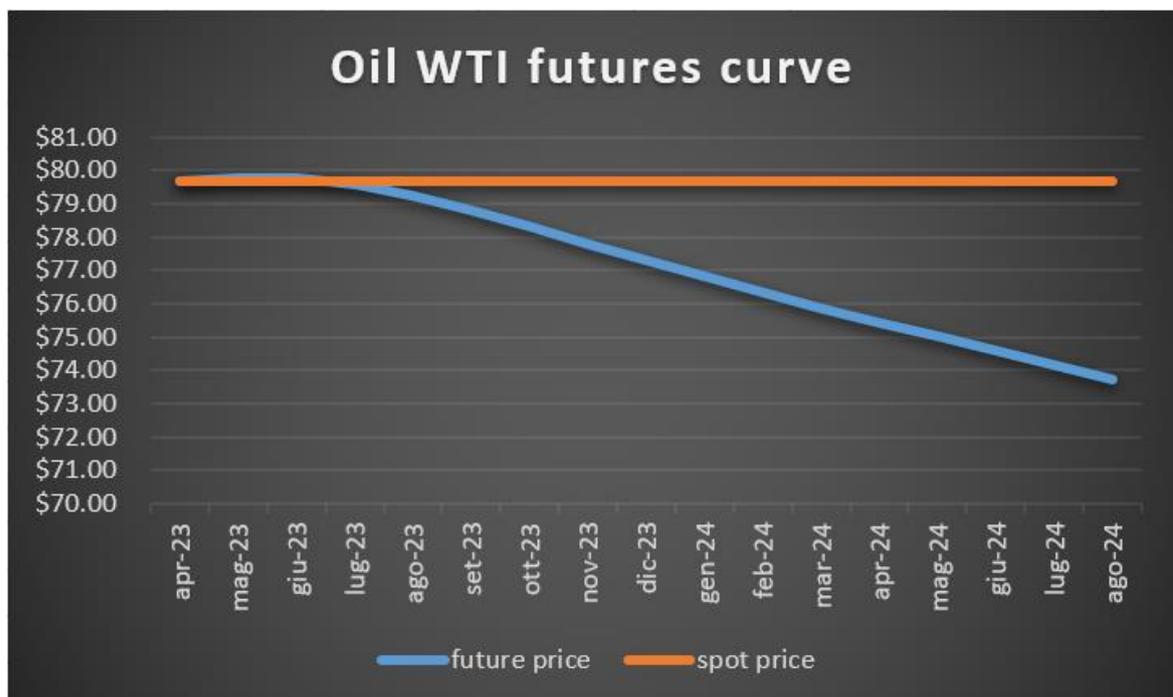
$$F_0 > E(S_T) \quad (23)$$

In questo caso, il prezzo *futures* sovrastima il prezzo *spot* atteso.

2.4 Contango e Normal Backwardation

Il *contango* e il *normal backwardation* derivano dalla pendenza della struttura della *futures curve*, che rappresenta la curva dei prezzi *futures* in funzione delle relative scadenze dei contratti, e sono concetti essenziali per le scelte di investimento sui *futures* che hanno come attività sottostante materie prime. Un mercato si dice in *contango* (o riporto) quando il prezzo *futures* è superiore al prezzo *spot* corrente. Dall'altro canto, un mercato in *backwardation* (o deporto) si verifica quando il prezzo *futures* è minore del prezzo *spot* corrente. Nelle figure 2.2 e 2.3 sono riportati degli esempi di mercati futures in *contango* e in *backwardation*. I grafici sono stati costruiti prendendo in considerazione le quotazioni futures dell'*oil* WTI e dell'argento a marzo dell'anno corrente.

Figura 2.2



Fonte: elaborazione personale

La figura 2.2 rappresenta la *futures curve* del WTI in relazione al prezzo *spot*. La linea blu è il *futures price* mentre quella arancione è il prezzo *spot* corrente. In questo caso il mercato dell'*oil* WTI è in *backwardation* in quanto, come si può facilmente osservare, il prezzo *futures* è minore del prezzo *spot* corrente.

Figura 2.3



Fonte: elaborazione personale.

Dalla figura 2.3 si può notare come il mercato dell'argento è in *contango*, in quanto il prezzo dei *silver futures* è maggiore del prezzo *spot* corrente. La forma della curva dei prezzi futures è un indicatore molto importante per i traders in quanto dà delle indicazioni sullo stato, attuale o futuro, dell'attività sottostante.

Per capire se un mercato è in *backwardation* o in *contango* è, quindi, necessario comprendere come si forma la *futures curve*. La formazione della curva a termine può essere spiegata da due diverse teorie:

- la teoria delle aspettative di Keynes, ripresa da Hicks, che basa la formazione dei prezzi futures sul premio per il rischio assunto ("*risk premium*") e le aspettative sul prezzo spot;

- la teoria dello stoccaggio ("*theory of storage*") di Kaldor, Working, Brennan e Tesler in cui la differenza tra prezzo *futures* delle *commodities* e prezzo *spot* corrente è data dai tassi di interessi per lo stoccaggio, dal *convenience yield* e dai costi di mantenimento della merce.

La teoria delle aspettative di Keynes è stata trattata nel paragrafo precedente per analizzare la formazione dei prezzi *futures*, tuttavia è necessario riprenderla per spiegare anche l'evoluzione

teorica. Keynes nel suo “A Treatise on Money” analizzò il rischio finanziario derivante dalla necessità di detenere le materie prime. Secondo l’economista britannico, i prezzi *futures* delle *commodities* sono delle stime distorte (“*bias*”), verso il basso, dei prezzi *spot*. Questo in quanto gli speculatori attraverso l’assunzione di posizioni *long* vendono delle assicurazioni contro il rischio agli *hedgers*. Questa teoria è stata ripresa e sviluppata da Hicks (1939) che parte da un presupposto di mercato. Secondo lui, i produttori di materie prime si trovano in una posizione di svantaggio rispetto ai consumatori, in quanto si assumono il rischio di detenere i beni. Questo rischio viene coperto dagli speculatori che assumeranno delle posizioni *long*, se e solamente se, gli viene riconosciuto un premio per il rischio (“*risk premium*”). Quindi, partendo da basi differenti sia Keynes che Hicks arrivano alla stessa conclusione. Cootner (1960) ha aggiunto che gli *hedgers* possono assumere sia posizioni corte che lunghe e gli speculatori ottengono il premio per il rischio assumendo posizioni lunghe quando c’è un picco di posizioni corte degli *hedgers* e, viceversa, assumendo posizioni corte quando c’è un picco di posizioni lunghe. Queste teorie sono state oggetto di critiche da parte dei fautori della “teoria dello stoccaggio”, soprattutto da Telser.

La teoria dello stoccaggio è stata sviluppata principalmente da Kaldor, Working, Brennan e Telser che evidenziarono le caratteristiche proprie dei *futures* e il ruolo del mercato per spiegare le differenze tra prezzi *futures* e *spot*. Possiamo considerare come padre fondatore di tale teoria Kaldor (1939), che spiega come la differenza tra prezzi *futures* e *spot* dipenda esclusivamente dal tasso di interesse, dai costi di stoccaggio delle materie prime e dal tasso di convenienza. È quindi il mercato che determina questo differenziale e, in particolare, i loro partecipanti (produttori e consumatori) che decidono se vogliono detenere o meno le materie prime per fini produttivi o come scorte per il futuro.

Un importante contributo alla teoria dello stoccaggio è stato dato da Working (1948), il quale concentrò le sue ricerche empiriche sul mercato dei *futures* del grano. In particolare, l’economista cerca di mettere in relazione i livelli di stoccaggio del grano con i prezzi *spot* e *futures*. L’obiettivo principale per Working è quello di comprendere il motivo per cui i produttori detengono *stock* di grano quando il rendimento dello stoccaggio è negativo. Working conclude che la ragione di ciò è data da alti costi fissi per lo stoccaggio del grano e dell’interdipendenza tra varie voci di costo. In aggiunta a ciò, l’autore sostiene che il prezzo negativo dello stoccaggio del grano era dato dal fatto che, durante i periodi di scarsa reperibilità della merce, il tasso di convenienza era superiore al costo dello stoccaggio. Working concluse la sua analisi affermando che i mercati *futures* delle materie prime dovrebbero essere

considerati come un tutt'uno con il mercato *spot* e che il differenziale tra i prezzi è dato dal costo/rendimento dello stoccaggio dell'attività.

Brennan (1958) ha sviluppato un modello teorico a sostegno della teoria di Working e fu il primo ad applicare il suo modello su dati reali, trovando delle conferme empiriche. Brennan sostiene con il suo modello che il costo di immagazzinamento è in funzione degli investimenti nella capacità di stoccaggio, del tasso di convenienza e di un tasso di avversione al rischio dei produttori. L'economista è stato anche il primo ad introdurre l'avversione al rischio all'interno della teoria dello stoccaggio; avversione che cresce al crescere dei livelli di scorta. L'autore ha confrontato il differenziale tra prezzi *spot* e *futures*, corretto per i fattori del modello, con il livello di scorte presente sul mercato per un *set* di materie prime più ampio rispetto a quello di Working. Il risultato trovato da Brennan è simile a quello di Working, ossia differenziale di prezzo aggiustato per i fattori positivi quando il livello delle scorte è elevato e negativo quando il livello è basso. Il lavoro di Brennan ha confermato la bontà dei risultati di Working e la possibilità di estendere la teoria dello stoccaggio anche in altri mercati.

La teoria di Working è stata confermata anche dal lavoro svolto da Telser (1958), sulla relazione tra il differenziale dei prezzi e il livello di scorte. Il contributo innovativo portato da Telser è nell'aver aggiunto la ciclicità della produzione delle materie prime come fattore in relazione al tasso di convenienza e, quindi, nel differenziale tra prezzi *spot* e *futures*. Perciò, alla fine del processo produttivo ciclico il tasso di convenienza sarà basso in quanto c'è un maggiore accumulo di scorte, ciò impatta sullo *spread* tra i prezzi.

Ci sono recenti studi riguardanti l'impatto dei *futures* sulle *commodities* in un portafoglio rispetto ad un portafoglio composto da azioni e obbligazioni. In particolare, Gorton e Rouwenhorst (2006) hanno costruito un indice equi ponderato su *commodities futures* aggiustato per l'inflazione, ciò per valutare i rendimenti nel lungo periodo. Gli economisti hanno misurato il premio per il rischio dei *futures* su *commodities*, azioni e obbligazioni per un periodo di quarantacinque anni. Nel caso dei *futures*, il premio per il rischio è il loro rendimento ed è calcolato come differenziale tra prezzi *spot* futuri e quelli attesi, ciò è in linea con la teoria di Keynes e Hicks.

Tab. 2.2 Premio per il rischio annuale delle *asset class* dal 1959 al 2004

	Commodity Futures	Stocks	Bonds
Average	5.23	5.65	2.22
Standard Deviation	12.10	14.85	8.47
T-statistic	2.92	2.57	1.77
Sharpe ratio	0.43	0.38	0.26
% returns > 0	55	57	54

Fonte: Gorton e Rouwenhorst (2006)

Gorton e Rouwenhorst (2006) hanno dimostrato come il premio per il rischio annuo medio dei futures su materie prime è simile a quello delle azioni e, nettamente, superiore a quello delle obbligazioni e con uno *sharpe ratio* maggiore delle altre *asset class*. Un altro elemento innovativo è dato dalla dimostrazione della correlazione tra i rendimenti dei futures con quelli delle azioni e obbligazioni e con il tasso di inflazione per un arco temporale che va da un mese a cinque anni.

Tab. 2.3 Correlazione tra rendimenti futures e altre *asset class* e inflazione

	Stocks	Bonds	Inflation
Monthly	0.05	-0.14*	0.01
Quarterly	-0.06	-0.27*	0.14
1-year	-0.10	-0.30*	0.29*
5-year	-0.42*	-0.25*	0.45*

Fonte: Fonte: Gorton e Rouwenhorst (2006)

La tabella 2.3 mostra come i rendimenti dei futures su materie prime siano negativamente correlati con quelli delle azioni, obbligazioni e con il tasso di inflazione soprattutto in un arco temporale di medio periodo (cinque anni). Nel brevissimo periodo tale correlazione appare meno forte.

Capitolo 3

Bachelier vs Black-Scholes

Louis Bachelier fu il primo matematico a costruire un modello di determinazione dei prezzi delle opzioni considerando il moto browniano aritmetico per le variazioni stocastiche del prezzo delle azioni. La sua analisi dei moti browniani ha preceduto, di qualche anno, quella fatta da Albert Einstein. La caratteristica peculiare del modello di Bachelier, e del moto browniano aritmetico, è quella di consentire al prezzo dell'attività sottostante di assumere un valore negativo. Questo aspetto è stato considerato il grande punto debole del modello e per tale ragione sono stati sviluppati altri modelli come il modello di Black-Scholes. Per questo motivo, la prima sezione di tale capitolo verterà sullo studio dei processi stocastici nel continuo andando ad analizzare, in particolare, il moto browniano, il moto browniano geometrico e il processo di Ornstein-Uhlenbeck. Questi processi sono sia alla base dei modelli di Bachelier e Black-Scholes per il *pricing* delle opzioni ma vengono utilizzati, più in generale, in numerosi modelli finanziari.

Il modello di Black-Scholes è basato sul moto browniano geometrico e, quindi, il prezzo dell'attività sottostante segue una distribuzione log normale che non permette valori negativi. Dalla sua introduzione, il modello di Black-Scholes è stato quello più utilizzato per il *pricing* delle opzioni mentre il modello di Bachelier viene maggiormente utilizzato nei mercati obbligazionari a reddito fisso (*fixed-income*) e per le opzioni *spread*, per la possibilità che i prezzi possano assumere valori negativi. Tuttavia, con la crisi del Covid-19, i contratti *futures* sul petrolio dell'aprile 2020 hanno assunto valori negativi rendendo impossibile, da parte del CME e ICE, l'utilizzo del modello di Black-Scholes con l'inevitabile passaggio al modello di Bachelier. Questo cambiamento è stato fondamentale per il mercato *futures* del petrolio e ha riportato in auge il modello di Bachelier.

Oltre all'approfondimento dei modelli, nel seguente capitolo verrà analizzata e spiegato nel dettaglio il concetto di volatilità storica ed implicita e verrà presentata una formula di conversione tra la volatilità del modello di Bachelier e la volatilità del modello di Black-Scholes.

3.1 Processi stocastici

In finanza, i processi stocastici vengono utilizzati, all'interno di diversi modelli, per comprendere ed analizzare l'evoluzione dei prezzi di un'attività e della volatilità. Nel seguente capitolo verranno analizzati il moto browniano aritmetico e geometrico che sono i processi stocastici sottostanti al modello di Bachelier e di Black-Scholes. Tuttavia, esistono diversi processi stocastici che vengono utilizzati in finanza per descrivere l'andamento probabilistico di una determinata variabile, come ad esempio il processo di Ornstein e Uhlenbeck (O-U) che descrive l'evoluzione dei tassi d'interesse e il loro ritorno alla media (*mean reverting*).

Un processo stocastico rappresenta l'evoluzione probabilistica di determinate variabili aleatorie, $Y(t)$, nel tempo. Il processo stocastico può essere a tempo discreto o a tempo continuo, a seconda se l'insieme dei tempi, τ , e l'insieme degli stati, ς , è discreto o continuo. In tale elaborato verranno presi in considerazione solo processi stocastici continui, che sono caratterizzati dalla continuità delle traiettorie nell'insieme dei tempi, τ . La maggiore parte dei modelli finanziari che descrivono l'evoluzione di determinate variabili nel tempo, come l'andamento del prezzo dell'attività sottostante o dei tassi d'interesse, hanno come base dei processi stocastici continui. I processi stocastici sono determinati da diversi fattori quali la sua caratterizzazione probabilistica, la stazionarietà (in senso forte o debole) del processo, e dal processo di Markov.

La caratterizzazione probabilistica di un processo stocastico è definita essenzialmente dalle sue funzioni di densità di probabilità (*probability density function*, PDF) congiunte, che consentono di analizzare la distribuzione dei valori assunti dal processo. Il numero di PDF richieste, per la caratterizzazione probabilistica, del processo stocastico dipende dall'ordine della PDF. Un processo stocastico può richiedere fino a ∞^n PDF di ordine n . La caratterizzazione probabilistica più semplice è quella dei processi stocastici indipendenti e identicamente distribuiti (IID). Possiamo definire due variabili aleatorie stocastiche, $Y(1)$ e $Y(2)$, indipendenti se:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1) * F(x_2) \quad (24)$$

Quindi, se il prodotto tra le funzioni di ripartizioni marginali è uguale a quella congiunta. Generalizzando, otteniamo:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i) \quad (25)$$

Inoltre, se le variabili aleatorie hanno la stessa funzione di distribuzione allora il processo stocastico, $Y(t)$, è identicamente distribuito. Se entrambe le condizioni sono rispettate, il processo stocastico, $Y(t)$, è IID.

Un processo stocastico è stazionario se le funzioni di densità di probabilità non variano con il variare del tempo. Per cui avremo che:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{1+s}, x_{2+s}, \dots, x_{n+s}) \quad (26)$$

Un processo stocastico è stazionario in senso debole se il momento primo (la media) e il momento secondo (la varianza) non variano con la traslazione dei tempi. Quindi:

- 1) $E(Y_t) = m \quad \forall t \in \tau;$
- 2) $Var(Y_t) = \sigma_t^2 = \sigma^2 \quad \forall t \in \tau.$

Un processo stocastico, $Y(t)$, è caratterizzato dalla proprietà di markovianità se la sua distribuzione di probabilità futura non dipende dai valori precedenti all'istante di valutazione, t , ma deriva esclusivamente dal valore che la variabile assume all'istante t . Un processo stocastico definito nel continuo che è caratterizzato dalla proprietà di markovianità, e dalla continuità delle traiettorie, è anche definito processo di diffusione.

3.1.1 Moto browniano

Il moto browniano (o processo di Wiener), $Y(t)$, è un processo di diffusione; quindi, un processo stocastico caratterizzato da continuità delle traiettorie e dalla proprietà di markovianità. Questo moto venne per la prima volta utilizzato in finanza da Louis Bachelier per studiare ed analizzare l'evoluzione dei prezzi dell'attività sottostante. Inoltre, il moto browniano è un processo stocastico omogeneo IID. Queste caratteristiche comportano che il moto browniano deve assumere una distribuzione normale; quindi, la distribuzione di una variabile aleatoria è data da:

$$Y(t) \sim \varphi(\mu(t), \sigma^2(t))$$

La media del processo, μ , è anche detta parametro di *drift* del processo ed è pari a:

$$\mu = E[Y(t + 1)] - Y(t) \quad (27)$$

Quindi, il parametro di *drift* del processo è la differenza dal valore atteso al tempo $t+1$ e il suo valore effettivo al tempo t .

La varianza del processo, σ^2 , è il parametro di diffusione del moto browniano ed è data da:

$$\sigma^2 = E[(Y(t + 1) - \mu)^2] \quad (28)$$

Una specificazione del moto browniano è il moto browniano standard, in cui il parametro di drift, μ , e il parametro di diffusione, σ^2 , del processo sono rispettivamente pari a 0 e a 1. Perciò, l'equazione che definisce il moto browniano è:

$$Y(t) = \mu t + \sigma Z(t) \quad (29)$$

Dove,

$Z(t)$ è il moto browniano standard.

La variabile aleatoria, $Y(t)$, può assumere qualsiasi valore positivo o negativo, in quanto lo spazio degli spazi è rappresentato da tutti i numeri reali. Di norma, all'istante zero assume valore nullo.

Il moto browniano può essere scritto anche attraverso l'equazione differenziale stocastica (EDS). In generale, i modelli differenziali stocastici descrivono l'evoluzione di determinate variabili aleatorie attraverso la somma di due componenti, una deterministica (il drift del

processo) e l'altra stocastica (il parametro di diffusione). In linea di principio un'equazione differenziale stocastica (EDS) può essere scritta in questo modo:

$$dY = a(Y(t))dt + b(Y(t))dZ \quad (30)$$

Dove,

$a(Y(t))$ rappresenta il parametro di drift, o la media, del modello al tempo t ;

$b(Y(t))$ è il parametro di diffusione, o varianza, del processo in t ;

dZ è il differenziale stocastico.

Per cui l'EDS del moto browniano è:

$$dY = \mu dt + \sigma dZ \quad (31)$$

Supponendo che le variabili aleatorie del processo rappresentino la variazione del prezzo di un'attività sottostante, S_t , avremo che:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dZ \quad (32)$$

Quindi, l'evoluzione del prezzo è data dalla somma della componente deterministica rappresentata dal drift e dalla componente stocastica rappresentata dal parametro di diffusione.

Il moto browniano non è un buon modello stocastico per determinare l'andamento del prezzo di un'attività sottostante in quanto può accadere che, in un qualsiasi momento, il prezzo assuma un valore negativo.

3.1.2 Moto browniano geometrico

Il moto browniano geometrico (o moto browniano esponenziale) è un processo stocastico continuo estremamente utilizzato in finanza per spiegare la possibile evoluzione di determinate variabili aleatorie nel tempo; in particolare, il logaritmo della variabile aleatoria segue un moto browniano. Il modello di Black e Scholes fa uso di questo processo stocastico per ipotizzare l'andamento del prezzo di un'azione sottostante. A differenza del moto browniano, il moto browniano geometrico è definito nell'insieme degli spazi che vanno da zero in poi, per cui la variabile aleatorie non può assumere, con probabilità positiva, un valore negativo. Il moto browniano geometrico è definito dalla seguente equazione:

$$S(t) = S(0) * e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma Z(t)} \quad (33)$$

Il moto browniano geometrico può essere considerato un'estensione del modello esponenziale che è un modello deterministico nel quale il parametro di diffusione viene considerato nullo ($\sigma=0$), ossia:

$$S(t) = S(0) * e^{\mu t} \quad (34)$$

In questo caso, il parametro di *drift* è:

$$\mu = \frac{dS(t)}{S(t)dt} = \frac{d}{dt} \log S(t) \quad (35)$$

Per cui possiamo considerare il parametro di *drift* come il tasso di rendimento istantaneo.

L'equazione differenziale stocastica (EDS) del moto browniano geometrico è:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t) \quad (36)$$

Il moto browniano geometrico assume l'ipotesi di lognormalità del prezzo dell'azione sottostante; perciò, il prezzo non può assumere un valore negativo. Un aspetto negativo del moto browniano geometrico è che non prende in considerazione il *mean-reversion*, ossia un fattore che riconduce il processo ad un determinato livello medio della variabile aleatoria.

3.1.3 Processo di Ornstein-Uhlenbeck

Ornstein e Uhlenbeck studiarono l'andamento di una particella in un moto browniano e, in particolare, studiarono il suo processo di velocità. Il processo stocastico Ornstein-Uhlenbeck è un processo stocastico definito nel continuo, stazionario e le variabili aleatorie si distribuiscono come una normale. Inoltre, il processo di Ornstein-Uhlenbeck è caratterizzato dalla proprietà di ritorno alla media (*mean-reversion*), ossia l'intero processo tenderà, nel lungo periodo, al suo valore medio con una determinata velocità. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è determinato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS(t) = \alpha(\gamma - S(t))dt + \sigma dZ_t \quad (37)$$

Dove,

α è il parametro di richiamo, ossia è la velocità con cui l'intero processo ritorna al valore medio. Maggiore è il valore del parametro di richiamo, minore è il tempo che il processo ci mette per tornare al valore medio.

γ è il valore medio di lungo periodo dell'intero processo. Quando il valore della variabile aleatoria, $S(t)$, è minore del valore medio di lungo periodo, γ , allora il *drift* è positivo e riporta la variabile aleatoria verso il suo valore medio. Il *drift* è negativo quando il valore della variabile aleatoria, $S(t)$, è maggiore del suo valore medio, γ .

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck è caratterizzato da una parte deterministica, ossia il parametro di drift, e una parte stocastica rappresentata dal coefficiente di diffusione, che può essere inteso come un termine di disturbo del processo. Nel processo di Ornstein-Uhlenbeck le variabili aleatorie si distribuiscono come una normale, per cui, così come per il moto browniano, è possibile che in qualsiasi istante temporale, la variabile assuma un valore negativo. Per questo motivo, è un processo maggiormente utilizzato per descrivere l'andamento dei tassi di interesse. L'equazione differenziale stocastica può essere scritta in forma chiusa, come:

$$S(t) = S(0) * e^{-\alpha t} + \gamma * (1 - e^{-\alpha t}) + \sigma * e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dZ(s) \quad (38)$$

Le variabili aleatorie si distribuiscono come:

$$S(t) \sim \varphi\left(\gamma, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$$

3.2 Modello di Bachelier vs Black-Scholes

Louis Bachelier sviluppò il suo modello utilizzato per la determinazione dei prezzi degli strumenti derivati nella sua tesi di dottorato “*Théorie de la Spéculation*” nel 1900. Bachelier studiò l’andamento e le variazioni della borsa di Parigi e fu il primo economista a teorizzare il moto browniano, anticipando di cinque anni il lavoro di Einstein. Inoltre, l’elaborato di Bachelier fu fondamentale per la teorizzazione della “*random walk*” e dell’ipotesi del mercato efficiente, sviluppata, successivamente, da Fama. Bachelier viene considerato, in virtù delle sue idee innovative, il fondatore della matematica finanziaria.

Dagli anni ’70, il modello di Bachelier non è stato più utilizzato, per la determinazione del prezzo di un’opzione, in quanto il moto browniano aritmetico permette prezzi negativi dell’attività sottostante e, inoltre, a causa del modello di Black-Scholes sviluppato in quegli anni. Tuttavia, quello che può essere considerato il maggiore limite del modello di Bachelier, negli ultimi decenni, è stato il suo punto di forza. Infatti, nel 2020, il modello di Bachelier è stato reintrodotta per la valutazione del prezzo delle opzioni scritte sul petrolio quando, con la crisi del Covid-19, il prezzo dei contratti futures sul petrolio hanno assunto valori negativi. Per risolvere questo problema, CME group e ICE sostituirono temporaneamente il modello di Black-Scholes con il modello di Bachelier.

Il modello di Black-Scholes è un modello di non-arbitraggio, ossia parte del presupposto che se le opzioni fossero correttamente prezzate allora non sarebbe possibile per gli investitori ottenere un profitto privo di rischio.

Riepilogando, nei primi due paragrafi illustrerò dal punto di vista teorico ed analitico il modello di Bachelier, il modello di Black-Scholes. Negli altri paragrafi successivi, invece, verrà approfondita la volatilità storica ed implicita e verrà spiegata la conversione della volatilità tra i due modelli (Bachelier e Black-Scholes), prendendo in considerazione anche il modello SABR.

3.2.1 Modello di Bachelier

La teoria moderna del *pricing* delle opzioni è stata teorizzata da Louis Bachelier nel 1900 con la sua tesi di dottorato alla Sorbona “*Théorie de la Spéculation*”, nella quale il matematico francese studiò le cause delle variazioni del prezzo della borsa di Parigi e provò a sviluppare delle formule per determinare il corretto prezzo di uno strumento derivato. L’assunto principale di Bachelier è che l’aspettativa matematica del rendimento di uno speculatore è zero, ciò è basato sul principio dell’equilibrio di mercato. Per determinare la variazione dei prezzi nella borsa di Parigi, Bachelier sviluppò il concetto di “*random walk*”. La *random walk* può essere compresa attraverso un gioco non ripetuto come il lancio di una moneta non truccata, in cui l’esito testa dà un valore positivo e l’esito croce un uguale valore negativo. L’idea di base è che, alla fine delle N ripetizioni nel tempo, il gioco dovrebbe dare un profitto nullo. Bachelier sviluppò il concetto di “*random walk*” cinque anni prima di Einstein (1905) che lo utilizzò in fisica e sessantacinque anni prima rispetto a Samuelson (1965) che lo implementò in finanza per studiare l’evoluzione dei prezzi. Bachelier nella sua tesi di dottorato non riuscì a trovare una formula chiusa per la valutazione delle opzioni, ciò perché, all’epoca di Bachelier, i prezzi dell’opzioni, quotate nella borsa di Parigi, erano fissi e il prezzo di esercizio variava nel tempo. Attualmente, i prezzi delle opzioni sono quotati al contrario ossia il prezzo di esercizio è fisso e il prezzo dell’opzione varia nel tempo. Va sottolineato come il modello di Bachelier è un modello molto avanzato per l’epoca che ha, tuttavia, due principali problematiche. La prima riguarda l’utilizzo del moto browniano che permette al prezzo dell’attività sottostante di assumere valori negativi. La seconda carenza riguarda l’ipotesi che gli speculatori hanno aspettative di rendimento nulle, ciò ignora il valore temporale del denaro e il rischio intrinseco di un’opzione. Nonostante tali carenze, il modello di Bachelier è un modello che funziona in modo particolarmente corretto per le opzioni di breve durata.

Il prezzo forward di un’opzione *call*, al tempo T con un prezzo di esercizio K e prezzo forward corrente F_0 è dato da:

$$C_N(K) = E[\max(F_T - K, 0)] = (F_0 - K) * N(d_N) + \sigma_N \sqrt{T} * n(d_N) \quad (39)$$

Quindi, il prezzo forward di un’opzione *put* è:

$$P_N(K) = E[\max(K - F_T, 0)] = (K - F_0) * N(-d_N) + \sigma_N \sqrt{T} * n(d_N) \quad (40)$$

Dove:

$n(\cdot)$ è la funzione di densità di probabilità;

$N(\cdot)$ è la funzione di distribuzione di una variabile normale;

d è la “*moneyness*”, ossia la distanza tra prezzo corrente dell’azione sottostante l’opzione e prezzo di esercizio, misurata in termini di standard deviation. Infatti, d è pari a:

$$d_N = \frac{F_0 - K}{\sigma_N \sqrt{T}}$$

La standard deviation σ_N è la volatilità implicita, calcolato con il moto browniano aritmetico, che permette di trovare il prezzo corrente di un’opzione *call* e *put*. In particolare, nel modello di Bachelier, il prezzo *forward* di un’attività sottostante segue il moto browniano aritmetico con volatilità σ_N , ed è:

$$dF_T = \sigma_N dZ_T \quad (41)$$

Il modello di Bachelier è anche denominato modello normale in quanto presuppone che il prezzo dell’azione sottostante è distribuito come una normale; per cui, la volatilità implicita, nel modello di Bachelier, può essere definita come volatilità implicita normale, σ_N . Possiamo scrivere il prezzo dell’opzione *call* in funzione del prezzo *spot*, S_0 , in questo modo:

$$C_N(K) = (S_0 - K) * N(d_N) + S_0 \sigma_N \sqrt{T} * n(d_N) \quad (42)$$

Dove:

$$d_N = \frac{S_0 - K}{S_0 \sigma_N \sqrt{T}}$$

Nel caso particolare in cui $F_0 = K$, ossia quando l’opzione *call* è “*at the money*”, avremo che il prezzo dell’opzione *call* è pari a:

$$C_N(F_0) = \sigma_N \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$$

Riscrivendo la formula in funzione della volatilità implicita normale otterremo:

$$\sigma_N = C_N(F_0) \sqrt{\frac{2\pi}{T}}$$

Quando il prezzo *forward/futures* dell'attività sottostante si distribuisce come una normale, possiamo calcolare il prezzo dell'opzione call in questo modo:

$$C_N(K) = \sigma_N(F_T)(d_N N(d_N) + n(d_N)) \quad (43)$$

Dove:

$$d_N = \frac{\mu(F_T) - K}{\sigma_N(F_T)}$$

Questa formula è particolarmente utilizzata per la valutazione delle opzioni *basket* e asiatiche. Dal modello di Bachelier possiamo ricavare le lettere greche, che vengono utilizzate dai traders per quantificare il rischio prendendo in considerazione diversi fattori che caratterizzano un'opzione. Le greche sono:

1. Delta, Δ , misura la sensitività del prezzo dell'opzione *call* o *put* rispetto a variazioni del prezzo dell'attività sottostante. Il delta per gli investitori *long call* e *short put* è positivo mentre, all'opposto, per i compratori di un'opzione *put* e venditori di una *call* è negativo. Il delta viene utilizzato dai *traders*, a fini di copertura, per la creazione di un portafoglio di opzioni privo di rischio;
2. Gamma, Γ , è la derivata seconda parziale del premio dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante. Quindi, rappresenta la variazione del delta di un'opzione alle variazioni del prezzo dell'attività sottostante;
3. Vega, V , misura la sensitività del valore di un'opzione rispetto alle variazioni nella volatilità dell'attività sottostante. Maggiore è il vega, maggiore è la variazione del valore dell'opzione data da variazioni della volatilità. Il vega è strettamente collegato alla superficie della volatilità ("*volatility surface*"), che verrà trattata successivamente;
4. Theta, Θ , è la derivata prima parziale del premio dell'opzione rispetto al tempo. Generalmente, il theta di un'opzione assume valore negativo e ciò significa che alla avvicinandoci alla scadenza di un'opzione il suo valore diminuisce;
5. Rho misura la sensitività del valore di un'opzione rispetto alle variazioni del tasso d'interesse.

Le greche nel modello di Bachelier sono pari a:

$$\Delta_N = \frac{\partial C_N}{\partial F_0} = N(d_N)$$

$$\Delta_N = \frac{\partial P_N}{\partial F_0} = N(d_N) - 1$$

$$\Gamma_N = \frac{\partial^2 C_N}{\partial F_0^2} = \frac{n(d_N)}{\sigma_N \sqrt{T}}$$

$$V_N = \frac{\partial C_N}{\partial \sigma_N} = \sqrt{T} n(d_N)$$

$$\Theta_N = \frac{\partial C_N}{\partial T} = -\frac{\sigma_N n(d_N)}{2\sqrt{T}}$$

Le greche verranno calcolate anche per il modello di Black-Scholes, così è possibile fare un confronto tra le formule determinate con i due metodi.

3.2.2 Modello di Black-Scholes

Il modello di pricing più famoso e maggiormente utilizzato è il modello di Black-Scholes, teorizzato nel 1973, per la valutazione delle opzioni europee. Il successo del modello è principalmente dovuto dalla capacità da parte di Black e Scholes di trovare in maniera analitica, attraverso l'utilizzo del *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), il tasso di attualizzazione del rendimento atteso generato dall'opzione. Un contributo fondamentale al modello di Black-Scholes è stato dato da Robert Merton (1973); infatti, il modello viene anche chiamato il modello di Black-Scholes-Merton. Il principale contributo di Merton è l'ipotesi di assenza di arbitraggio. In particolare, Merton ha evidenziato come gli investitori possono conservare la propria posizione di copertura ("*hedge*"), negoziando continuamente le opzioni o le attività sottostanti, mantenendo il portafoglio privo di rischio. Questa dimostrazione richiede assunzioni meno forti e, quindi, più generali rispetto a quelle del CAPM utilizzato, in prima battuta, da Black-Scholes. Per questo motivo, nel paper di Black-Scholes compare, prioritariamente, l'argomentazione di assenza di arbitraggio di Merton e, successivamente, l'argomentazione degli stessi autori basata sul CAPM. Prima della formulazione del modello di Black-Scholes il mercato delle opzioni era scarsamente utilizzato dagli investitori. Il maggiore utilizzo di questo mercato è avvenuto proprio in seguito all'enunciazione del modello che ha permesso agli investitori di valutare il corretto prezzo delle opzioni e di creare portafogli privi di rischio. Come detto precedentemente, il modello di Black-Scholes è stato teorizzato sulle opzioni europee; tuttavia, il modello è stato esteso per la valutazione delle opzioni americane e altre opzioni come *cap* e *floor*. Un ulteriore contributo fondamentale dato da Black-Scholes è la possibilità di considerare l'insieme delle azioni, obbligazioni e *warrants* di una società come un'opzione sull'attivo della società. La peculiarità del modello di Black-Scholes è che il prezzo dell'azione sottostante segue il moto browniano geometrico. Quindi, l'equazione differenziale stocastica che determina l'andamento del prezzo dell'azione sottostante nel modello di Black-Scholes è:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)$$

In questo caso, σ rappresenta la volatilità del prezzo dell'azione sottostante che risulta essere costante per tutto l'arco temporale. A differenza del modello di Bachelier, le caratteristiche del moto browniano geometrico rendono impossibile al prezzo dell'attività sottostante l'assunzione di valori negativi. Il modello di Black-Scholes ipotizza la log-normalità dei prezzi delle azioni. Infatti, il tasso di variazione del prezzo dell'azione sottostante nell'arco temporale

discreto, Δt , è distribuito come una normale, in questo modo:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Utilizzando il lemma di Ito, è possibile scrivere:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Per cui:

$$\ln(S_T) \sim \varphi\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Ciò significa che il prezzo dell'azione sottostante al tempo T, S_T , ha una distribuzione log-normale che assume un valore che va da zero in poi. È possibile dimostrare come il valore atteso e la varianza del prezzo dell'azione sottostante al tempo T, S_T , siano esattamente:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

$$\sigma^2(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Inoltre, è possibile determinare la distribuzione del tasso di rendimento del prezzo dell'attività sottostante. Supponendo che η è il tasso di rendimento di un'attività, possiamo scrivere:

$$S_T = S_0 e^{\eta T}$$

Esplicitando in funzione del tasso di rendimento, avremo che:

$$\eta = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$$

Per cui:

$$\eta \sim \varphi\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right]$$

Quindi la varianza del tasso di rendimento dell'attività sottostante è inversamente correlata con il tempo T. Infatti, all'aumentare del tempo diminuisce la varianza e viceversa.

Black-Scholes (1973) al fine di ricavare la formula per il *pricing* delle opzioni europee fecero le seguenti assunzioni:

- 1) Tasso privo di rischio costante;
- 2) La variazione del prezzo dell'attività sottostante ha una distribuzione log-normale;
- 3) L'attività sottostante è un titolo che non paga dividendi;
- 4) L'opzione è di tipo europeo;
- 5) Non ci sono costi di transazione e non viene considerata la tassazione;
- 6) È possibile prendere in prestito al tasso privo di rischio;
- 7) L'investitore può vendere allo scoperto l'attività sottostante.

Queste assunzioni permettono di valutare un'opzione *call* o *put* europea prendendo in considerazione solo due fattori quali, il prezzo dell'azione sottostante e il tempo. È possibile derivare le formule di Black-Scholes attraverso l'argomentazione di non arbitraggio di Merton riguardante la creazione di un portafoglio privo rischio. In particolare, è possibile costruire un portafoglio privo di rischio in questo modo:

- Una posizione lunga sull'azione sottostante, S ;
- $\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial S}}$ posizioni corte sull'opzione, dove "c" rappresenta il prezzo di un'opzione *call* europea.

Se il prezzo dell'attività sottostante varia di un ammontare pari a ΔS , di conseguenza anche il numero di posizioni corte varierà di ΔS . La variazione del numero di posizioni corte compensa la variazione del valore della posizione lunga in portafoglio. Quindi, è la variazione del numero di posizioni corte sull'opzione che crea un portafoglio coperto dal cambiamento del prezzo dell'attività sottostante e del tempo, rendendo il portafoglio privo di rischio. Tuttavia, il portafoglio è privo di rischio solo in un'istante di tempo infinitesimo, Δt ; quindi, è fondamentale aggiustare continuamente il numero di opzioni corte per ottenere un portafoglio privo di rischio. Il valore del portafoglio è:

$$\Pi = S - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial S}} \quad (44)$$

Per cui la variazione del valore del portafoglio, nell'intervallo Δt , sarà:

$$\Delta\Pi = \Delta S - \frac{\Delta C}{\frac{\partial C}{\partial S}} \quad (45)$$

Partendo dal presupposto che il valore della posizione corta sul derivato cambi continuamente, possiamo trovare la variazione del valore della *call* europea tra l'istante t e Δt , ossia:

$$\Delta C = \Delta S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t \quad (46)$$

Sostituendo l'equazione (46) nell'equazione (45) si ottiene che la variazione del valore del portafoglio è:

$$\Delta\Pi = - \frac{\Delta t \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right)}{\frac{\partial C}{\partial S}} \quad (47)$$

Sapendo che questo portafoglio è un portafoglio privo di rischio, allora il suo rendimento, nell'istante di tempo Δt , dev'essere pari al tasso privo di rischio, r . Se ciò non fosse vero e se il portafoglio avesse un rendimento maggiore del tasso privo di rischio ci sarebbe un'opportunità di arbitraggio, che consiste nel prendere in prestito una somma al tasso privo di rischio e investirla nel portafoglio. Perciò, la variazione del valore del portafoglio dev'essere uguale al valore del portafoglio moltiplicato per il tasso privo di rischio nell'intervallo temporale Δt , ossia:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Sostituendo, si ottiene:

$$- \frac{\Delta t \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right)}{\frac{\partial C}{\partial S}} = \left(S - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial S}} \right) * r\Delta t$$

Da cui si ottiene:

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + Sr \frac{\partial C}{\partial S} \quad (48)$$

Questa è l'equazione differenziale di Black-Scholes, dove σ^2 rappresenta la varianza delle variazioni del logaritmo dell'azione sottostante e r è il tasso privo di rischio. La condizione di contorno ("*boundary condition*") della *call* europea è:

$$C(S, t) = \max(S - K, 0)$$

In questo caso, la soluzione particolare è:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (49)$$

Dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$N(d)$ rappresenta la funzione di distribuzione normale standardizzata di una variabile che ha, quindi, media nulla e *standard deviation* unitaria. È da notare come il prezzo dell'opzione non dipende dal rendimento atteso dell'azione sottostante. È possibile constatare che all'aumentare del prezzo dell'azione sottostante, S_0 , e all'aumentare della scadenza del titolo, T , aumenta anche il prezzo dell'opzione *call* europea. Viceversa, all'aumentare del prezzo d'esercizio diminuisce il valore dell'opzione *call*.

Contrariamente, la condizione di contorno per l'opzione put europea è:

$$P(S, t) = \max(K - S, 0)$$

Per cui, la soluzione particolare è:

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (50)$$

$d_{1,2}$ sono determinati dalle stesse formule che valgono per le opzioni *call*. In questo caso, all'aumentare del prezzo d'esercizio, aumenta il valore dell'opzione put europea. Diversamente, al crescere del prezzo dell'azione sottostante diminuisce il prezzo dell'opzione *put*.

È possibile estendere il modello di Black-Scholes per trattare le opzioni call o put su contratti *futures*, che danno il diritto al portatore di esercitare un contratto *futures* lungo o corto ad un prezzo d'esercizio ed una data prefissata ex ante. La peculiarità delle opzioni sui contratti *futures* è che se l'investitore esercita l'opzione *call* scritta sul *futures* sottostante, allora l'investitore riceverà un premio uguale alla differenza tra l'ultimo prezzo futures di liquidazione e il prezzo d'esercizio. Per l'opzione *put* l'investitore riceverà l'opposta

differenza. I rendimenti massimi di un'opzione *call* e *put* scritte sui contratti *futures* sono:

$$C = \max(F_T - K, 0)$$

$$P = \max(K - F_T, 0)$$

Il prezzo *futures*, F , di solito, segue il seguente processo stocastico:

$$\frac{dF_T}{F_T} = \sigma_{BS} dZ_T \quad (51)$$

È possibile notare come la volatilità nel modello di Black-Scholes, σ_{BS} , misura le variazioni relative del prezzo *futures* mentre la volatilità nel modello di Bachelier, σ_N , misura le variazioni assolute. Inoltre, è possibile ricavare la relazione tra la volatilità nel modello di Bachelier e la volatilità del modello di Black-Scholes, sostituendo l'equazione (41) nell'equazione (51) si ottiene:

$$\sigma_N = \sigma_{BS} F_0 \quad (52)$$

Questa relazione è particolarmente importante in quanto assicura che i due modelli avranno un andamento simile nel breve periodo.

Avendo le condizioni di contorno e l'equazione differenziale di Black-Scholes si può ricavare il prezzo di una *futures call* e *put* europea, pari a:

$$C = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (53)$$

$$P = e^{-rT} [KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (54)$$

Dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le equazioni (53) e (54) rappresentano, in particolare, il prezzo di un'opzione *call* e *put* scritta su un *futures* che ha come sottostante una merce che possono essere esercitate solo alla scadenza dell'opzione stessa. Inoltre, queste equazioni ricavano il prezzo delle opzioni in

assenza di tassazione. Tuttavia, se fosse applicata la tassazione all'investitore le opzioni scritte su materie prime avranno un valore più basso. Black (1976) ricavò il prezzo di un'opzione europea *call* e *put* su *futures*, come:

$$C = F_0 N(d_1) - KN(d_2) \quad (55)$$

$$P = KN(-d_2) - F_0 N(-d_1) \quad (56)$$

Queste formule sono maggiormente utilizzate dai traders in quanto il prezzo futures dell'azione sottostante già incorpora in sé il *convenience yield*. Conoscendo la relazione tra la volatilità tra i due modelli esposti, è possibile ricavare un'approssimazione per il calcolo del prezzo di una *call* europea quando l'opzione è *at the money* (ATM). Tale approssimazione è:

$$C_{BS} \approx C_N \approx \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sigma_{BS} F_0 \quad (57)$$

Questa approssimazione è ampiamente utilizzata per il calcolo a ritroso del prezzo dell'opzione secondo il modello di Black-Scholes. Così come è stato fatto per il modello di Bachelier, è possibile trovare le greche per le opzioni *call* e *put* secondo il modello di Black-Scholes. In particolare, esse sono pari a:

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial F_0} = N(d_1)$$

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial F_0} = N(d_1) - 1$$

$$\Gamma_{BS} = \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial F_0^2} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma_{BS} \sqrt{T}}$$

$$V_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

$$\Theta_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial T} = -\frac{S_0 \sigma_{BS} N'(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT} N(d_2)$$

$$\Theta_{BS} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial T} = -\frac{S_0 \sigma_{BS} N'(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} N(-d_2)$$

Prendendo in considerazione le formule delle greche ricavate per il modello di Bachelier è notevole la diversità dei valori assunti rispetto al modello di Black-Scholes.

Come detto precedentemente, il modello di Black-Scholes si basa su una serie di assunzioni. Diversi studiosi hanno allentato queste restrizioni per osservare il funzionamento del modello. In particolare, Ingersoll e Scholes (1976) hanno preso in considerazione le conseguenze sul modello della tassazione sul *capital gain* e sui dividendi. Inoltre, Thorpe (1973) e Leland (1985) hanno valutato rispettivamente il funzionamento del modello sotto il vincolo alle vendite allo scoperto e prendendo in considerazione gli effetti dei costi di transazione nelle negoziazioni delle opzioni.

3.2.3 Volatilità storica

La volatilità è una misura di rischio maggiormente utilizzata nelle diverse branche della finanza, in particolare per il *pricing* delle opzioni. In genere, l'unico parametro non noto nei modelli di *pricing* delle opzioni è proprio la volatilità. Quindi, è evidente come la determinazione della volatilità risulta essere un elemento chiave per la determinazione del prezzo di un'opzione. Come abbiamo visto, il modello di Black-Scholes suppone che la volatilità rimanga costante durante tutto l'orizzonte temporale. Un modo per stimare la volatilità dell'attività sottostante è attraverso la volatilità storica. La volatilità è determinata come la deviazione standard del tasso di rendimento del prezzo di un'attività in un determinato periodo di tempo. La volatilità storica è ricavata attraverso le variazioni passate del prezzo dell'attività in un periodo di riferimento. Supponendo che:

- Il numero di osservazione è $(n+1)$;
- S_i è il prezzo dell'azione alla fine dell' i -esimo tempo;
- τ è l'orizzonte temporale misurato in anni;
- Il logaritmo della variazione del prezzo dell'attività, u_i , è:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Otterremo che la deviazione standard del logaritmo della variazione del prezzo dell'attività è:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

Essendo \bar{u} la media delle singole variazioni logaritmiche del prezzo, possiamo scrivere:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

Tuttavia, spesso al posto dei log rendimenti viene utilizzata la variazione proporzionale del prezzo dell'attività e si suppone che la sua media sia nulla. Per cui, è possibile trovare la volatilità di un titolo come:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{n-1}^2}$$

Teoricamente andrebbe sottratta la media campionaria dei rendimenti giornalieri ma essendo molto vicina allo zero può essere ignorata. Il tasso di varianza dipende dal solo parametro “ m ” che rappresenta la lunghezza del periodo di riferimento. Di solito, i valori usuali che vengono utilizzati sono 22, per rappresentare il mese lavorativo, o 252, per rappresentare l’anno lavorativo.

Avevamo visto che la varianza di $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$, ossia u_i , è uguale a $\sigma^2\tau$. Per cui, la sua deviazione standard è $\sigma\sqrt{\tau}$ ed è stimata da s . Da ciò deriva che la deviazione standard σ può essere stimata da $\hat{\sigma}$. Per cui:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Questa stima della deviazione standard ha uno *standard error* di circa $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$. Tuttavia, il prezzo delle opzioni, di solito, non viene determinato prendendo in considerazione la volatilità storica dell’attività sottostante in quanto la volatilità corrente potrebbe essere superiore o inferiore rispetto a quella storica. Inoltre, calcolando la volatilità in questo modo viene dato un uguale peso a tutte le osservazioni. Quindi, l’osservazione più recente, che essendo più attuale contiene maggiori informazioni, ha lo stesso peso di una più vecchia. Per risolvere questo problema è possibile utilizzare due metodi: 1) Exponentially Weighted Moving Average (EWMA); 2) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH(p,q).

Il modello EWMA è un modello in cui la varianza corrente dipende, solamente, da due fattori la varianza e il tasso di variazione del prezzo dell’attività passate, pesati da un coefficiente λ che può variare tra zero e uno. In particolare, la formula del modello EWMA è:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda)u_{n-1}^2 \quad (58)$$

Sostituendo il valore di σ_{n-1}^2 all’interno della formula (59), si ricava:

$$\sigma_n^2 = \lambda^2\sigma_{n-2}^2 + (1 - \lambda) * (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2)$$

Andando a ritroso fino al tempo m , si ottiene:

$$\sigma_n^2 = \lambda^m \sigma_{n-m}^2 + (1 - \lambda) \sum_{i=0}^m \lambda^i u_{n-i-1}^2$$

È evidente come il coefficiente del tasso di variazione del prezzo dell'attività decresca esponenzialmente quando si torna indietro nel tempo con le osservazioni. Per cui, le osservazioni passate hanno un peso minore rispetto a quelle più recenti, in coerenza del fatto che i dati recenti hanno maggiori informazioni. Minore è il valore del parametro λ , maggiore è il peso assegnato a u_{n-1}^2 e, conseguentemente, un valore sempre più basso alle variazioni passate. J.P. Morgan stimò il parametro λ , ottenendo un valore di 0.94.

Bollerslev (1986) sviluppò il modello GARCH(p,q) partendo dal modello ARCH di Engle (1982). Il modello di Bollerslev prende in considerazione l'evidenza empirica che, nelle serie finanziarie, la volatilità non è costante (eteroschedasticità). Per cui, in un determinato periodo temporale, la varianza può essere superiore o inferiore al suo valore medio. Nel modello GARCH (p,q), la varianza storica di una variabile è influenzata dai suoi valori passati ed inoltre incorpora un fattore che riporta la varianza ad un suo livello medio di lungo periodo. Le formule del GARCH (p,q) sono:

$$u_n = \mu_0 + \varepsilon_n$$

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{n=1}^q \alpha_n u_{n-t}^2 + \sum_{n=1}^p \beta_n \sigma_{n-t}^2$$

$$\varepsilon_n \sim IID N(0, \sigma_n^2)$$

Le prime due equazioni rappresentano rispettivamente la media condizionata e la varianza condizionata mentre la terza equazione stabilisce la distribuzione normale del termine di disturbo, ε . La varianza, al tempo n, dipende dalla varianza di lungo periodo, V_L , dalle p osservazioni del tasso di rendimento del prezzo dell'azione, u_{t-n}^2 , e dalle q osservazioni della stessa varianza passata, σ_{t-n}^2 . I coefficienti γ , α_n , β_n , sono i pesi assegnati alle tre variabili. Deve valere la condizione per cui la somma di questi coefficienti è uguale ad uno. Il modello di GARCH(p,q) maggiormente utilizzato è il modello GARCH (1,1), che è scritto come:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

È possibile sostituire il primo termine dell'equazione con il parametro ω . Quindi:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (59)$$

Ciò consente di trovare il valore medio di lungo periodo della varianza di una serie finanziaria, V_L , come il rapporto tra ω/γ . Inoltre, se i parametri ω , α e β sono uguali rispettivamente a zero, $(1-\lambda)$ e λ allora il GARCH(1,1) corrisponde esattamente al modello EWMA. Una condizione importante da verificare è se il processo è stabile, ciò accade quando la somma dei coefficienti α e β è minore di uno. Se il processo è stabile, allora la varianza, di lungo periodo, è uguale al rapporto tra $\omega/(1-\alpha-\beta)$. Dalla formula (59) è possibile tornare al ritroso e trovare σ_{n-1}^2 , che è pari a:

$$\sigma_{n-1}^2 = \omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2$$

Sostituendo nella formula (59) si ottiene:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta * (\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2)$$

Continuando a sostituire all'infinito si ricava che:

$$\sigma_n^2 = \omega * \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \right) + \alpha \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u_{n-1-i}^2 \right)$$

Per cui il peso assegnato a u_{n-i}^2 decresce esponenzialmente in base al parametro β^i .

Per stimare i parametri dei modelli, al fine di trovare la volatilità storica, è possibile utilizzare il metodo della massima verosimiglianza. Lo stimatore di massima verosimiglianza è quel parametro del modello che massimizza la funzione di densità dei dati. La funzione di verosimiglianza dipende dalle osservazioni u_1, u_2, \dots, u_m e dal vettore dei parametri θ . Possiamo scrivere:

$$L(u_1, u_2, \dots, u_m; \theta) = \prod_{i=1}^m f(u_i; \theta)$$

Di solito, viene utilizzata la funzione di verosimiglianza logaritmica in quanto usando questo tipo di funzione è possibile sostituire la produttoria con la sommatoria delle funzioni di densità senza avere problemi di massimizzazione dello stimatore. La funzione di verosimiglianza logaritmica è:

$$\log L(u_1, u_2, \dots, u_m; \theta) = l(u_1, u_2, \dots, u_m; \theta) = \sum_{i=1}^m \log f(u_i; \theta)$$

In questo caso, abbiamo assunto che le variabili osservate, u_1, u_2, \dots, u_m , sono indipendenti e identicamente distribuite. Lo stimatore di massima verosimiglianza, $\hat{\theta}$, è il parametro che massimizza l'argomento della funzione di verosimiglianza logaritmica:

$$\hat{\theta} = \arg \max \log L(u_i; \theta)$$

In particolare, lo stimatore è il valore che annulla il gradiente della funzione di verosimiglianza logaritmica e per cui la matrice Hessiana è definita negativa. Quindi, devono valere queste due condizioni:

$$G(\hat{\theta}) = \frac{\partial l(u_i; \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

$$H(\hat{\theta}) = \frac{\partial^2 l(u_i; \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}'} < 0$$

La matrice Hessiana è definita negativa quando il primo elemento della matrice è negativo e quando il determinante è strettamente positivo. Nel caso del modello GARCH(1,1) il vettore dei parametri è composta dai coefficienti ω , α e β . Abbiamo specificato che il termine di disturbo, ε , si distribuisce come una normale con media condizionata nulla e varianza condizionata, σ_n^2 . Quindi la funzione di massima verosimiglianza è:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(u_n - \mu_0)^2}{2\sigma_n^2}}$$

Dove il numeratore dell'esponenziale rappresenta il termine di disturbo al quadrato. La log verosimiglianza è:

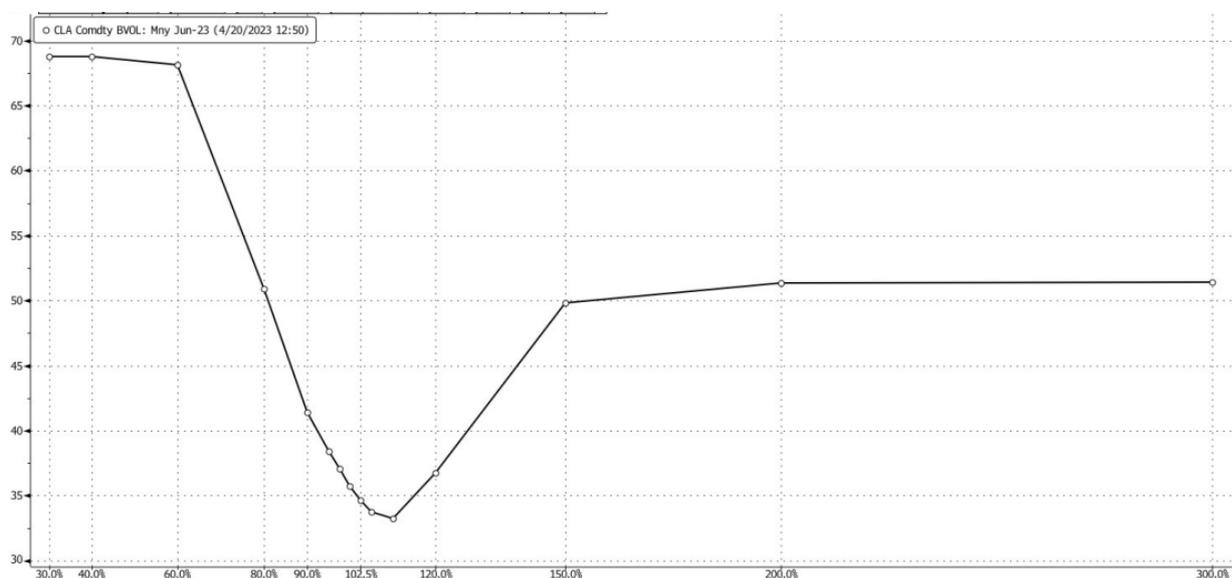
$$\log L_t(\theta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_n^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^2}{\sigma_n^2}$$

Al fine di ricavare la stima del GARCH(1,1) è necessario specificare il valore della varianza condizionata al tempo zero che può essere fissata pari alla varianza di lungo periodo, $\omega/(1-\alpha-\beta)$.

3.2.4 Volatilità implicita

Abbiamo visto come nel modello di Bachelier e di Black-Scholes le volatilità implicite (“*Implied volatility*”, IV) sono fondamentali per la determinazione del prezzo dell’opzione. La volatilità implicita ci dice cosa il mercato pensa circa la volatilità futura di un titolo. È stato spiegato come la volatilità storica utilizza i dati passati ed è, quindi, una misura di volatilità *backward looking*. Al contrario, la volatilità implicita di un’opzione è una misura di volatilità futura dell’opzione stessa. Per questo motivo la volatilità implicita viene detta *forward looking*. Le volatilità implicite hanno un ruolo fondamentale nel pricing dell’opzione e spesso sono gli stessi analisti che quotano direttamente le volatilità implicite. Attraverso le volatilità implicite di un’opzione è possibile creare il *volatility smile* (o *smirk*) e la *volatility surface*. Il *volatility smile* rappresenta graficamente la volatilità implicita rispetto alla *moneyness* (K/S_0) dell’opzione. Il *volatility smile* assume un valore minimo quando la volatilità implicita dell’opzione è minima cioè quando l’opzione è *at the money* (ATM). Quando l’opzione è *in the money* o *out of the money*, allora la volatilità implicita cresce e, di conseguenza, anche il *volatility smile*.

Figura 3.1 “Implied volatility e moneyness”



Fonte: Bloomberg

La figura 3.1 mostra il *volatility smile* per le opzioni sul WTI *crude oil* osservato il 20 aprile 2023. Si nota che quando l’opzione è *in the money* e *out of the money*, la volatilità implicita è maggiore. La volatilità implicita decresce quando l’opzione tende ad essere *at the money*

(ATM). Infatti, è possibile notare come quando l'opzione è ATM, la volatilità implicita raggiunge il suo valore minimo. Inoltre, il *volatility smile* è rappresentabile graficamente come la curva che lega la volatilità implicita e il prezzo d'esercizio di un'opzione (K). Quando la volatilità implicita viene mostrata in funzione del prezzo d'esercizio dell'opzione possono esserci due tipi di relazioni. La prima è il *volatility smile*, già spiegata, mentre la seconda è la *volatility smirk* o *skew* ("smorfia di volatilità"), ossia quando la volatilità implicita di un'opzione è più elevata per le opzioni *in the money* e più bassa per le opzioni *out of the money*. Un problema nella rappresentazione della volatilità implicita in funzione dello *strike* è che la curva dipende dall'andamento del prezzo dell'attività sottostante. In particolare, se il prezzo dell'attività aumenta la curva si sposta verso destra mentre se diminuisce si sposta verso sinistra.

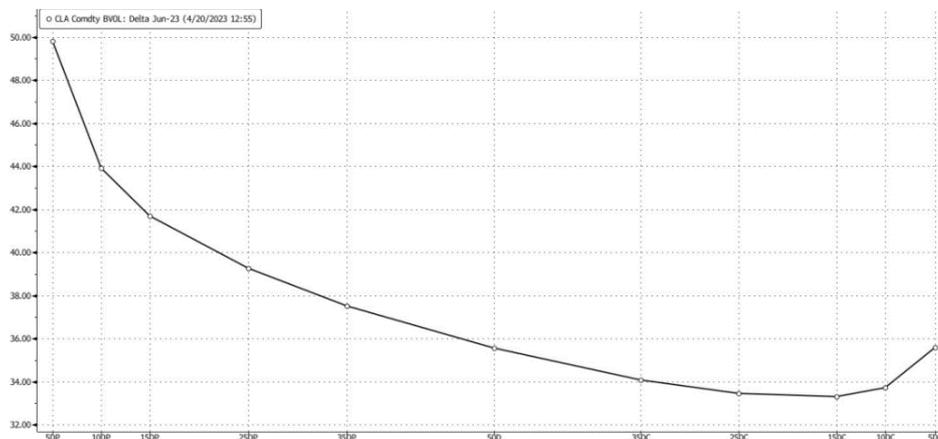
Figura 3.2 "Implied volatility e strike price"



Fonte: Bloomberg

La figura 3.2 mostra la *volatility smile* delle opzioni scritte sul WTI *crude oil* osservato il 20 aprile 2023. È possibile notare come la volatilità implicita è più elevata, circa 42%, quando il prezzo d'esercizio assume un valore più basso mentre diminuisce quando il prezzo d'esercizio aumenta. Un altro tipo di dimostrazione grafica del *volatility smile* è il legame tra la volatilità implicita e la lettera greca delta, che è stata spiegata precedentemente.

Figura 3.3 “Implied volatility e delta”

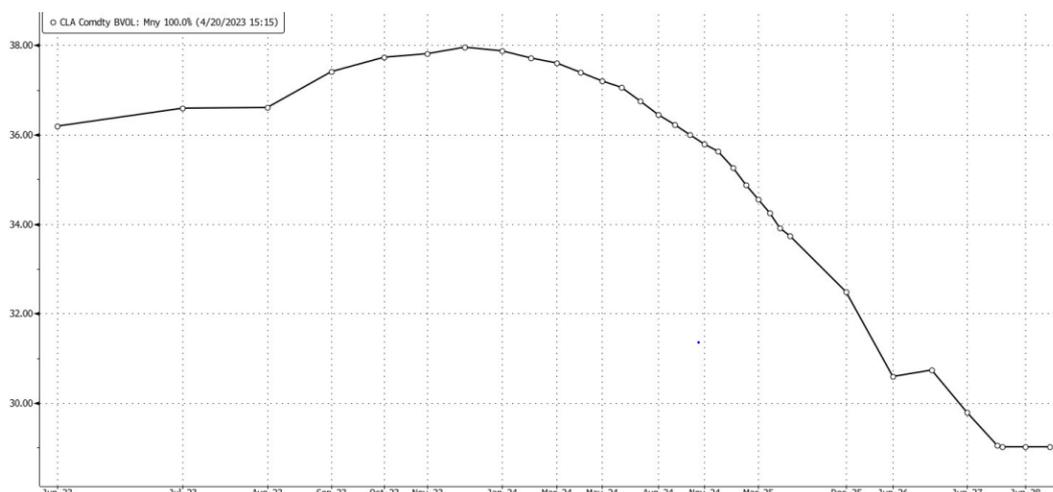


Fonte: Bloomberg

La figura 3.3 illustra il collegamento tra volatilità implicita e delta per le opzioni sul WTI *crude oil* osservato il 20 aprile 2023. Il valore 50D rappresenta il 50-delta options ossia le opzioni *call e put at the money*.

Di solito, gli investitori per analizzare il prezzo delle opzioni prendono in considerazione anche la struttura a termine delle volatilità (“*term structure*”), cioè l’evoluzione delle volatilità implicite delle opzioni ATM nei diversi mesi di scadenza. L’inclinazione della *term structure* è un segnale circa le aspettative degli investitori sulla volatilità futura del titolo sottostante l’opzione.

Figura 3.4 “Term structure”



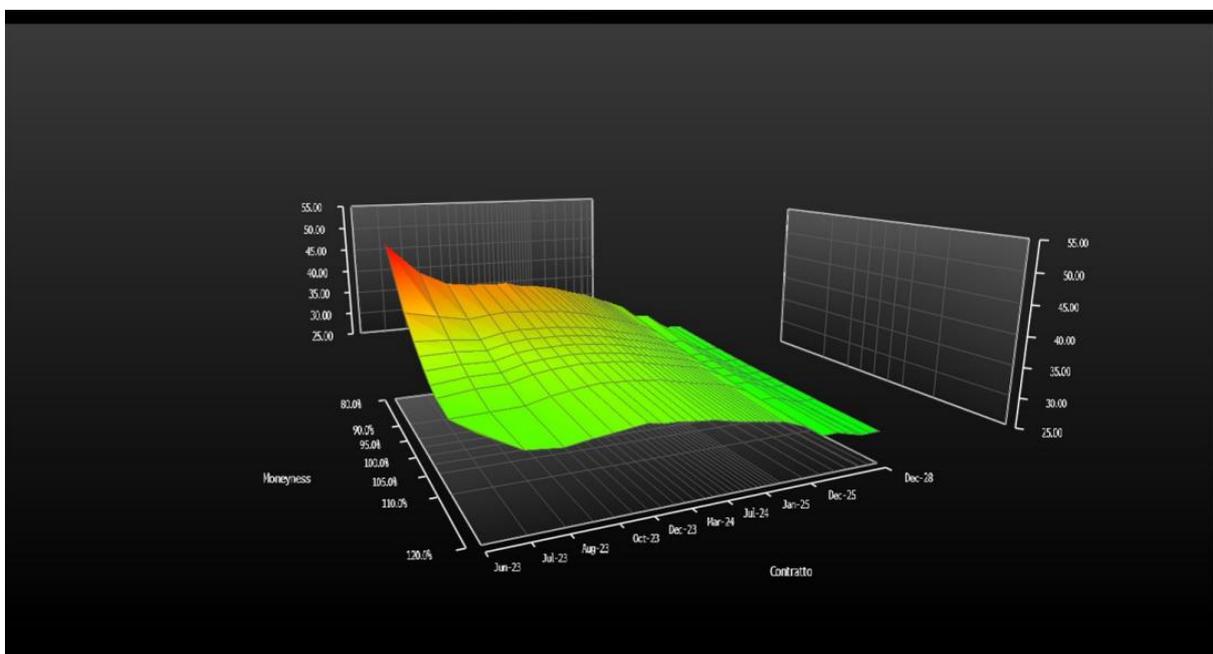
Fonte: Bloomberg

La figura 3.4 mostra la struttura a termine delle volatilità implicite delle opzioni ATM scritte

sul WTI *crude oil* con scadenze fino a giugno 2028. La *term structure* è, nel breve periodo, inclinata positivamente e, nel lungo periodo, inclinata negativamente. Per cui i traders si aspettano che la volatilità del WTI *crude oil* aumenterà il prossimo anno ma diminuirà fortemente successivamente.

Mettendo insieme la struttura a termine delle volatilità implicite con il *volatility smile* è possibile ottenere un grafico tridimensionale che rappresenta la *volatility surface* di un'opzione. Di solito, le tre dimensioni della superficie di volatilità sono: - volatilità implicite dell'opzione ATM; - tempo residuo alla scadenza dell'opzione; - *moneyness* dell'opzione. Al posto della *moneyness* dell'opzione può essere utilizzato lo *strike* o il delta dell'opzione.

Figura 3.5 “Volatility surface”



Fonte: Bloomberg

Secondo il modello di Black-Scholes la volatilità implicita di un'opzione è una costante, per cui la superficie di volatilità dovrebbe essere piatta. In realtà, opzioni che hanno prezzi d'esercizio diversi presentano anche diverse volatilità implicite. Infatti, si nota come nella figura 3.5 la superficie di volatilità non è piatta, ma presenta un picco di volatilità per le opzioni *deep in the money* a breve termine mentre, per le opzioni *out of the money*, la volatilità implicita è minore.

3.2.5 Conversione della volatilità tra i modelli

Nel seguente paragrafo verrà illustrata la conversione della volatilità implicita tra il modello di Bachelier e il modello di Black-Scholes. Al fine di convertire le volatilità implicite, è necessario presentare ed analizzare il modello SABR (Hagan et al., 2002) che fa da ponte tra i due modelli. È stato detto nel paragrafo precedente come il *volatility smile*, rappresentato come relazione tra volatilità implicita e prezzo d'esercizio, si sposta con la variazione del valore dell'attività sottostante. Teoricamente, si sposta verso destra quando il prezzo dell'attività sottostante aumenta e a sinistra se il prezzo diminuisce. Il "stochastic, alpha, beta, rho" model (SABR) mette in relazione la volatilità implicita dell'opzione con il prezzo dell'attività sottostante. Il modello permette di trovare formula chiusa per il calcolo della volatilità implicita di un'opzione in funzione del prezzo d'esercizio e forward. Il modello SABR è un modello di volatilità stocastica, in quanto la stessa volatilità di un'opzione è trattata come un processo stocastico. In particolare, il modello presuppone che:

$$\frac{dF_t}{F_t^\beta} = \sigma_t dZ_{1t}$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \nu dZ_{2t}$$

$$dZ_{1t}dZ_{2t} = \rho dt$$

Dove:

ν è la volatilità della volatilità;

β è il parametro di elasticità della curva di volatilità ed è compreso tra 0 ed 1; $dZ_{1t}dZ_{2t}$ sono i due moti browniani correlati tra di loro dal coefficiente di correlazione compreso tra -1 e 1;

ρ è il coefficiente di correlazione tra il prezzo dell'attività sottostante e la volatilità.

Nel modello SABR, la volatilità implicita di Bachelier è:

$$\sigma_N(K) = \sigma_0 F_0^\beta H(z) \frac{k-1}{q} \left\{ 1 + \left[\log \left(\frac{qk^{\frac{\beta}{2}}}{k-1} \right) \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{\rho(k^\beta - 1)}{4(k-1)} \alpha \nu + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T \right\} \quad (60)$$

Dove il valore dei coefficienti sono:

$$k = \frac{K}{F_0}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{F_0^{\hat{\beta}}}, z = \frac{\nu}{\alpha} q$$

$$q = \int_1^k k^{-\beta} dk = \begin{cases} \frac{k^{\hat{\beta}} - 1}{\hat{\beta}} & \text{se } 0 \leq \beta < 1 \\ \log(k) & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

$$H(z) = z / \log\left(\frac{\sqrt{1+2\rho z+z^2}+z+\rho}{1+\rho}\right), H(0) = 1$$

Questa è l'equazione fondamentale per convertire la volatilità implicita del modello di Bachelier con la volatilità implicita del modello di Black-Scholes, attraverso il prezzo dell'opzione. Il modello SABR, nel caso in cui $\beta = 1$ e il limite della volatilità della volatilità tende a 0, $\nu \rightarrow 0$, converge verso il modello di Black-Scholes. Per cui, sotto queste condizioni, è possibile convertire la volatilità tra i due modelli in questo modo:

$$\sigma_N(K) \approx \sigma_{BS} F_0 \frac{k-1}{\log(k)} \left[1 - \log\left(\frac{k-1}{\sqrt{k} \log(k)}\right) \frac{\sigma_{BS}^2 T}{\log^2 k}\right] \quad (61)$$

Una migliore approssimazione è stata data da Grunspan (2011):

$$\sigma_N(K) \approx \sigma_{BS} F_0 \sqrt{k} \left(1 + \frac{\log^2 k}{24}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_{BS}^2 T}{24}\right) \quad (62)$$

È possibile scrivere la volatilità del modello di Black-Scholes in funzione di quella di Bachelier, ottenendo:

$$\sigma_{BS}(K) \approx \frac{\sigma_N}{F_0 \sqrt{k}} \left(1 + \frac{\sigma_N^2}{24kF_0^2} T\right) / \left(1 + \frac{\log^2 k}{24}\right) \quad (63)$$

Le formule (62) e (63) sono le equazioni utilizzate per convertire le volatilità implicite tra i modelli per le opzioni non ATM.

Per le opzioni ATM a breve termine è possibile convertire la volatilità implicita, determinata con il modello di BS, nella volatilità implicita di Bachelier utilizzando la formula di Brenner e Subrahmanyam (1994), ossia:

$$\sigma = \frac{c\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T}} \quad (64)$$

Dove,

C è il prezzo teorico di un'opzione call, che viene determinato con la volatilità implicita del modello preso in considerazione.

T è la vita residua dell'opzione.

Quindi, al fine di convertire la volatilità implicita di un modello, è necessario solamente determinare il prezzo dell'opzione *call* ATM, a breve termine. Bisogna sottolineare come questa formula funziona particolarmente bene per le opzioni a breve ATM mentre, aumentando la vita residua dell'opzione, diminuisce il grado di approssimazione della formula.

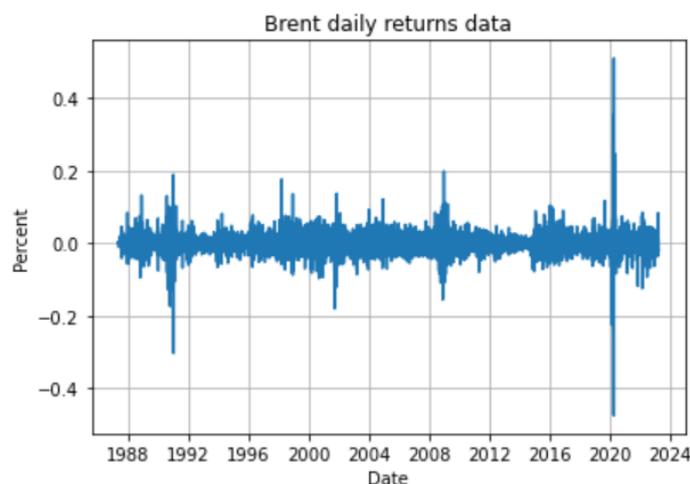
Caso empirico: volatilità del prezzo del petrolio

Il seguente capitolo empirico è incentrato sulla possibilità di utilizzare le volatilità storiche ed implicite come variabili previsive della volatilità del prezzo del petrolio. Per ottenere ciò, verrà determinata, prioritariamente, la volatilità storica del prezzo del petrolio, prendendo in considerazione il metodo GARCH(1,1), precedentemente spiegato. Successivamente, verrà calcolata la volatilità implicita delle opzioni ATM sul petrolio con il metodo di Bachelier e di Black-Scholes. Infine, sarà confrontata la capacità previsiva della volatilità storica ed implicita nello spiegare la volatilità corrente.

4.1 Determinazione volatilità storica del petrolio

Nel seguente paragrafo, verrà analizzata la volatilità storica dei prezzi del Brent dal 20 maggio 1987 al 17 aprile 2023, ottenendo un campione di 9114 osservazioni. Per ricavare la volatilità storica è necessario determinare i rendimenti giornalieri dei prezzi del Brent.

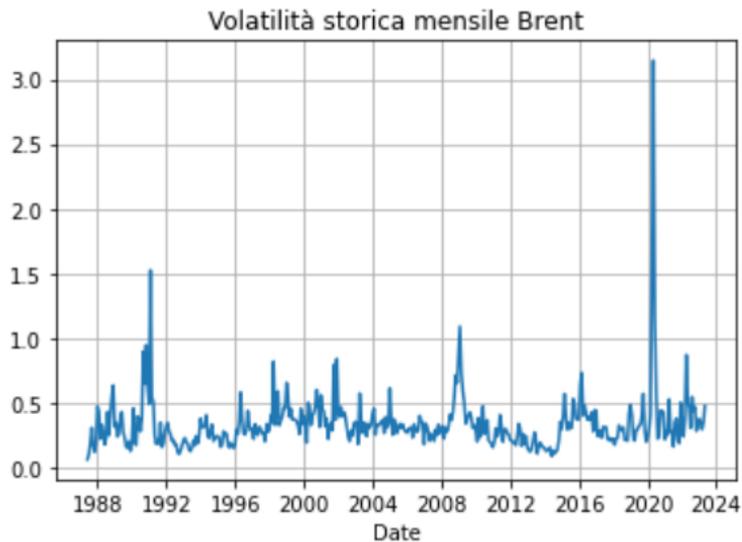
Figura 4.1



Fonte: elaborazione personale

Dalla figura 4.1 si nota come la maggiore variabilità dei rendimenti del Brent è stata durante i periodi di crisi come durante la crisi dei mutui subprime e del COVID-19. Con i rendimenti è possibile determinare la volatilità storica dei prezzi del Brent per un determinato periodo di tempo.

Figura 4.2



Fonte: elaborazione personale

La figura 4.2 mostra la volatilità storica mensile del Brent dal 1987 al 2023. Si nota ciò che è stato detto in precedenza, ossia come i periodi di maggiore volatilità corrispondano ai momenti di crisi economica. I rendimenti vengono utilizzati, non solo per determinare la volatilità in un certo periodo di tempo, ma anche per controllare se il processo della serie storica è stazionario. Un test statistico che viene prevalentemente utilizzato per la determinazione della stazionarietà di una serie storica è il Augmented Dickey–Fuller test (ADF). Il test di Dickey-Fuller aumentato serve a studiare la stazionarietà della serie storica. L’ipotesi nulla del ADF test è la non stazionarietà della serie storica mentre l’ipotesi alternativa è che la serie è stazionaria. La serie storica è non stazionaria se la serie è a radice unitaria (“*unit root*”).

Figura 4.3

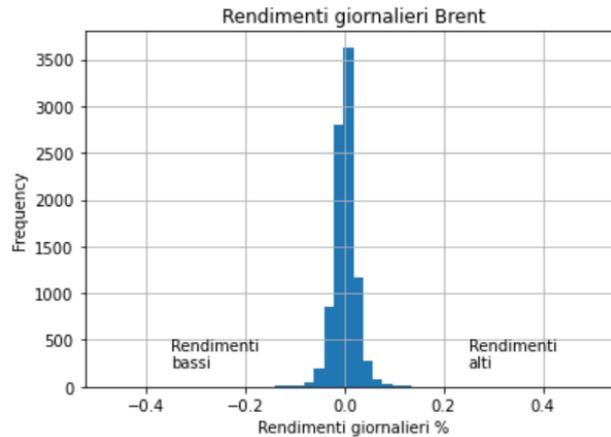
```
ADF Statistic: -12.166495
p-value: 0.000000
Critical Values:
  1%: -3.446
  5%: -2.868
 10%: -2.570
```

Fonte: Elaborazione personale

La figura 4.3 mostra il ADF test per i rendimenti mensili del Brent. Si nota come il p-value è

minore del livello di significatività, pari al 5%, e come il *test statistic* è minore dei *critical value* al 1%, 5% e 10%. Ciò significa che è possibile rigettare l'ipotesi nulla e quindi il processo è stazionario.

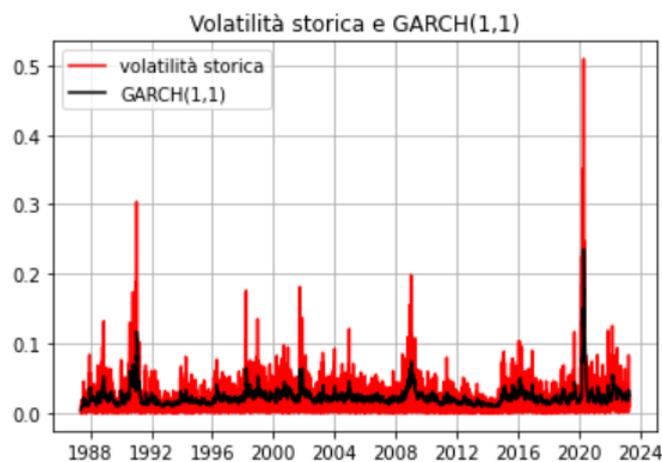
Figura 4.4



Fonte: elaborazione personale

La figura 4.4 mostra la frequenza delle osservazioni dei rendimenti giornalieri del Brent. Si nota come la maggiore parte delle volte i rendimenti giornalieri siano prossimi allo zero e, quindi, raramente si verificano rendimenti giornalieri estremamente bassi o alti. Come detto nel precedente capitolo, un modello che viene utilizzato per stimare la volatilità storica è il GARCH(p,q), in cui la volatilità corrente viene influenzata dalla volatilità e dai rendimenti passati dell'attività.

Figura 4.5



Fonte: elaborazione personale

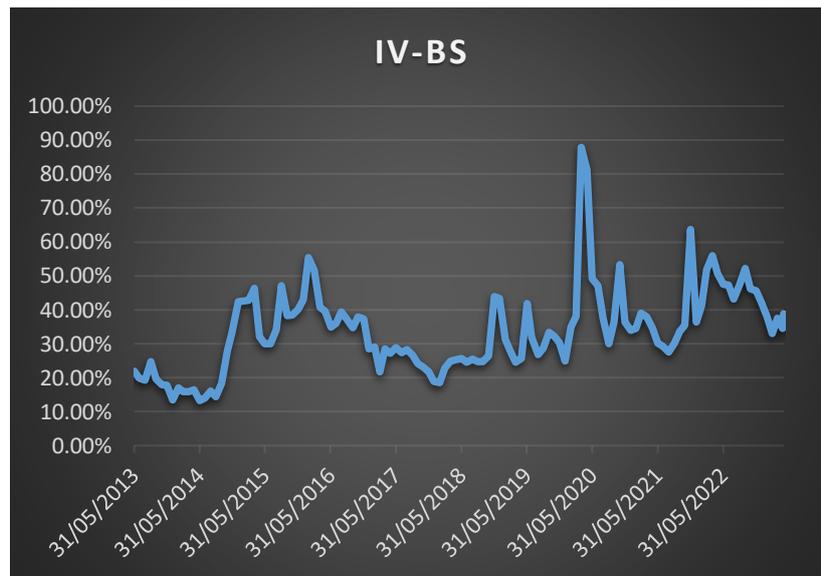
La figura 4.5 mostra la volatilità storica effettivamente realizzata e il GARCH(1,1), nel periodo di riferimento. I parametri ω , α , β del GARCH(1,1) sono pari rispettivamente a $4.39484e-06$, 0.0917 e 0.9073 . I parametri stimati del GARCH(1,1) confermano la stazionarietà della serie storica, in quanto la somma di α e β è un valore minore di uno. La varianza di lungo periodo, fissata al tempo zero per potere stimare i parametri, è data da $\omega/(1-\alpha-\beta)$ ed è pari a 0.0046 .

Per valutare le prestazioni del GARCH(1,1) nel calcolare la volatilità storica sono stati calcolati alcuni indicatori di performance, quali il “mean absolute error” (MAE), “mean standard error” (MSE) e “relative mean standard error” (RMSE). Il MAE rappresenta la distanza media, in valori assoluti, tra i valori della volatilità storica e quelli predetti dal modello GARCH(1,1). Il MSE è la distanza media al quadrato tra i valori effettivi della volatilità e quelli del GARCH(1,1). Il RMSE è la radice quadrata del MSE e misura la deviazione standard dei residui. Minori sono i valori assunti da questi indicatori di performance migliore è la stima data dal modello. I valori del MAE, MSE e RMSE sono pari rispettivamente a 0.01327 , 0.00036 , e 0.01921 .

4.2 Determinazione volatilità implicita con Black-Scholes e Bachelier

La volatilità implicita determinata con il modello di Black-Scholes è stata ricavata dai dati di Bloomberg. In particolare, sono state estratte le volatilità implicite mensili delle opzioni *call* ATM con scadenza mensile da maggio 2013 a maggio 2023; quindi, un totale di 121 osservazioni.

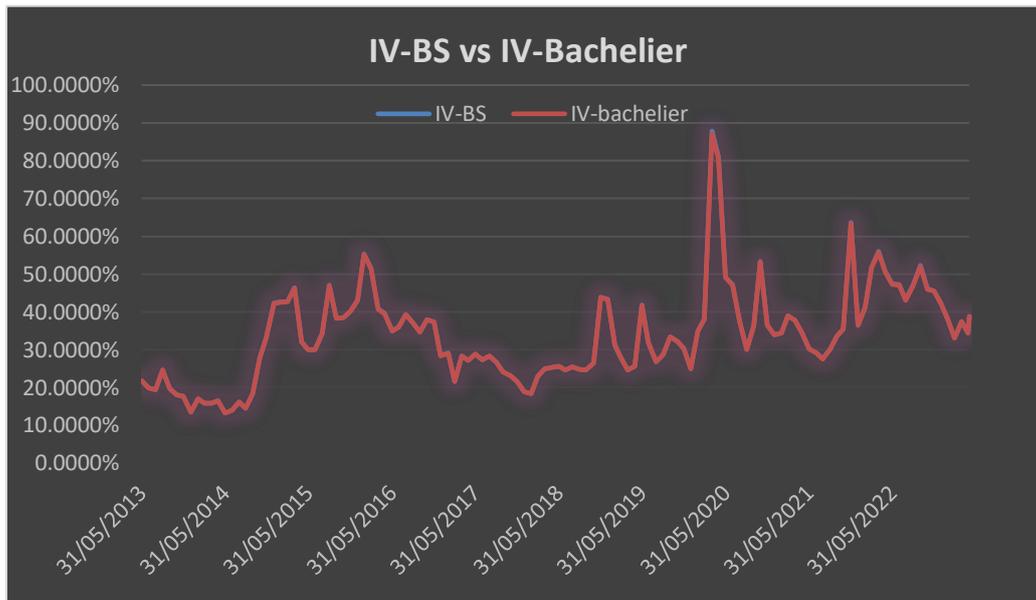
Figura 4.6



Fonte: Bloomberg

La figura 4.6 mostra l'andamento della volatilità implicita delle opzioni *call* a un mese ATM ed è possibile notare come il picco di volatilità, circa il 90%, è dato dalla crisi del COVID-19. Una volta ricavata la volatilità implicita delle opzioni *call* ATM è possibile convertire tale volatilità al fine di trovare la volatilità implicita con il modello di Bachelier. In particolare, dalla volatilità implicita è stato calcolato il prezzo teorico di un'opzione *call* ATM con vita residua mensile utilizzando la formula di Black-Scholes e Merton. Una volta determinato il prezzo di un'opzione *call* ATM mensile è possibile utilizzare la formula di Brenner e Subrahmanyam per ricavare la volatilità implicita di un'opzione *call* ATM secondo il modello di Bachelier.

Figura 4.7



Fonte: Elaborazione personale

La figura 4.7 mostra l'andamento della volatilità implicita mensile delle opzioni *call* ATM determinate con il metodo di Black-Scholes e di Bachelier. È possibile osservare come non ci sia una divergenza tra i due modelli. È interessante notare come la volatilità implicita determinata con il metodo di Bachelier sia una valida approssimazione della volatilità implicita calcolata con il metodo di Black-Scholes e Merton. Va ricordato come nel modello di Bachelier i prezzi delle opzioni hanno una distribuzione normale mentre, nel modello di Black-Scholes, la variazione dei prezzi ha una distribuzione log-normale. Inoltre, nel modello di Bachelier la volatilità implicita misura le variazioni assoluta del prezzo futures dell'attività sottostante mentre, nel modello di Black-Scholes, misura la variazione relativa del prezzo *futures*. Tuttavia, nonostante queste differenze nei modelli, le volatilità implicite, per le opzioni a breve durata e ATM, hanno un'evoluzione praticamente identica. Bisogna ricordare che la formula di Brenner e Subrahmanyam permette di convertire la volatilità implicita dal modello di BS al modello di Bachelier quando l'opzione è ATM. Quando le opzioni non sono ATM, la formula perde di approssimazione e conviene utilizzare le formule precedentemente presentate che riescono a convertire le volatilità senza perdere in efficienza. In particolare, possono essere utilizzate le equazioni (62) e (63) per convertire le volatilità implicite tra i due modelli.

Le volatilità implicite calcolate, nel periodo di riferimento, saranno utilizzate per determinare la loro capacità previsiva circa la volatilità futura. In particolare, verranno messe

a confronto con la volatilità storica per capire e determinare se la volatilità implicita (con il metodo di Black-Scholes o Bachelier) ha una capacità previsiva superiore rispetto a quella storica per la volatilità futura del prezzo del Brent.

4.3 Predittività volatilità storica ed implicita

L'obiettivo del seguente paragrafo è quello di determinare se la volatilità storica o la volatilità implicita delle opzioni call scritte sul Brent sono delle variabili che possono prevedere, in maniera efficace, la volatilità effettivamente realizzata in un determinato periodo temporale. Nel paragrafo verrà analizzato la capacità predittiva della volatilità storica ed implicita in diverse maniere. Innanzitutto, per stabilire la relazione tra volatilità realizzata e volatilità implicita o storica sono state effettuate le seguenti regressioni lineari:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$$

Nelle seguenti regressioni lineari sono state testate tre ipotesi. La prima ipotesi è che se le volatilità storica o implicite hanno delle informazioni che riescono a spiegare la volatilità realizzata, allora il beta, β_1 , dev'essere diverso da zero. Quando il p-value è minore al livello di significatività (di solito al 5%) allora il beta della variabile indipendente è significativamente diverso da zero. La seconda ipotesi è che le volatilità siano delle variabili *unbiased*. Per essere delle variabili *unbiased*, deve valere il seguente test congiunto: $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$. L'ultima ipotesi che viene testata è che gli errori della regressione non siano autocorrelati, ciò ci permette di affermare che le volatilità sono degli stimatori efficienti. Per stimare le regressioni è stato utilizzato il criterio dei minimi quadrati ordinari (*Ordinary Least Squares*, OLS). I dati utilizzati per le regressioni sono i dati che sono stati precedentemente ricavati ed illustrati. Quindi, per la volatilità storica, sono state prese in considerazione 432 osservazioni mentre per la volatilità implicita 118 osservazioni, in quanto il dataset è stato pulito dai valori anomali registrati durante la crisi del COVID-19. I risultati delle regressioni sono riportati nella tavola 4.3.1.

Tavola 4.3.1

Equazioni	Coefficienti		$R^2 Adj$	DW
	β_0	β_1		
$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \varepsilon_t$	0,1969 (0,039)	0,4385 (0,104)	7,3%	0,87
$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$	0,0981 (0,031)	0,6740 (0,087)	33,4%	1,72

La prima equazione illustra la volatilità realizzata e storica del Brent in 432 mesi borsistici. Il beta della volatilità storica è significativamente diverso da zero, ciò significa che la volatilità storica ha delle informazioni circa la volatilità effettivamente realizzata nel periodo successivo. Tuttavia, l'R quadro aggiustato dell'equazione è molto basso, perciò la volatilità storica non è un fattore che riesce a spiegare la volatilità corrente. Inoltre, i risultati della prima equazione mostrano come la volatilità storica è caratterizzata da autocorrelazione positiva. Infatti, il Durbin-Watson test è significativamente diverso da due e ciò mostra come la volatilità storica non è una misura efficiente. Perciò, essendoci autocorrelazione, a periodi di elevata volatilità seguono altri periodi caratterizzati da alta volatilità e viceversa. La prima equazione mostra come la volatilità storica è una misura *biased* della volatilità corrente in quanto il valore dell'intercetta è significativamente diverso da zero.

La seconda equazione mostra la volatilità realizzata implicita delle opzioni *call* con vita residua un mese scritte sul Brent in 118 mesi borsistici. L'equazione mostra come il beta della volatilità implicita sia significativamente diverso da zero. Inoltre, il coefficiente della volatilità implicita e l'R-quadro aggiustato sono superiori rispetto a quelli della volatilità storica. Ciò dimostra come la volatilità implicita contenga delle informazioni e che queste informazioni riescono a spiegare la volatilità realizzata. In particolare, un aumento di un punto percentuale della volatilità implicita comporta un aumento di 0,67% nella volatilità realizzata. Inoltre, la volatilità implicita è una misura efficiente in quanto il Durbin-Watson test non risulta significativamente diverso da due. Perciò, la volatilità implicita non è autocorrelata. Tuttavia, come la volatilità storica, anche la volatilità implicita è una misura *bias* della volatilità

realizzata in quanto l'intercetta è significativamente diversa da zero.

Un'altra importante relazione da determinare è quella tra la volatilità e il tasso di rendimento del Brent. Infatti, è stata notata, nei precedenti studi, l'esistenza di una correlazione negativa tra questi due fattori. Quindi, tassi di rendimento negativi comportano un aumento della volatilità e viceversa. Per spiegare tale fenomeno è stata analizzata la seguente equazione:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Questa equazione è stata stimata attraverso OLS prendendo in considerazione 432 mesi borsistici. I risultati sono riportati nella tavola 4.3.2 sottostante.

Tavola 4.3.2

Equazione	Coefficienti			$R^2 Adj$	DW
	β_0	β_1	β_2		
$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 r_{t-1} + \varepsilon_t$	0,1959 (0,039)	0,4504 (0,103)	-0,2877 (0,157)	8,3%	0,86

I risultati mostrano una correlazione negativa tra la volatilità effettivamente realizzata e il tasso di rendimento del Brent nel periodo preso in considerazione, in quanto il beta del tasso è negativo. Tuttavia, il beta non è significativamente diverso da zero, in quanto il suo p-value è maggiore al livello di significatività del 5% e quindi non è possibile rigettare l'ipotesi nulla. Inoltre, l'R-quadro aggiustato è solo lievemente maggiore di quello stimato nella prima equazione e ciò significa che il tasso di rendimento non spiega, in maniera completa, la volatilità realizzata. È notevole che, anche in questo caso, la volatilità storica è *bias* e gli errori sono autocorrelati.

Come abbiamo appena visto, la volatilità storica da sola contiene delle informazioni riguardanti la volatilità effettivamente realizzata. L'obiettivo è quello di capire la differenza nella capacità previsiva della volatilità storica rispetto alla volatilità implicita determinata con il modello di BS e di Bachelier. Quindi, quale delle due variabili riesce a spiegare meglio la volatilità effettivamente realizzata. Per determinare questa relazione sono state stimate le seguenti equazioni:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^N + \varepsilon_t$$

Per determinare la capacità previsiva della volatilità storica è stato preso lo stesso orizzonte temporale della volatilità implicita ossia 118 osservazioni. Va ricordato come la volatilità storica è una misura ex ante mentre la volatilità implicita è una misura ex post della volatilità. I risultati di tali equazioni sono riportati nella tavola 4.3.3. sottostante.

Tavola 4.3.3

Equazioni	Coefficienti			$R^2 Adj$	DW
	β_0	β_1	β_2		
$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$	0,1483 (0,041)	-0,1352 (0,071)	0,6540 (0,087)	34,7%	1,70
$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^N + \varepsilon_t$	0,1468 (0,041)	-0,1348 (0,074)	0,6595 (0,088)	34,8%	1,70

Come detto precedentemente, la volatilità storica, da sola, ha un determinato contenuto previsivo circa la volatilità effettivamente realizzata, così come la volatilità implicita. Ad ogni modo, quando la volatilità storica viene utilizzata come variabile indipendente insieme alla volatilità implicita, determinata secondo il modello di BS o di Bachelier, allora il suo coefficiente perde di valore e anche di significatività. Infatti, al livello di significatività del 5%, il beta della volatilità storica, β_1 , non è significativamente diverso da zero. Quindi, la volatilità implicita ha una capacità previsiva migliore della volatilità storica circa la volatilità realizzata. Inoltre, per entrambe le equazioni gli errori non sono autocorrelati, ad un livello di significatività dell'1%, perciò la volatilità implicita delle opzioni *call* ATM è efficiente. Tuttavia, per entrambe le equazioni, il test congiunto viene rigettato in quanto, nonostante il coefficiente della volatilità storica è uguale a zero, l'intercetta è significativamente diversa da zero. È da notare come il coefficiente della volatilità implicita secondo il metodo di Bachelier è leggermente superiore a quello determinato secondo il metodo di BS, così come l'R-quadro aggiustato. È possibile affermare che la volatilità implicita delle opzioni ATM a breve termine è il migliore predittore della volatilità realizzata per il Brent. In particolare, la volatilità

implicita secondo il modello di Bachelier produce risultati praticamente identici, se non superiori, rispetto al modello di BS.

Capitolo 5

Conclusione

Nell'elaborato è stato presentato il modo per determinare il prezzo teorico delle opzioni attraverso il metodo di BS e di Bachelier, spiegando, nel dettaglio, la teoria sottostante e il ruolo assunto dalle volatilità implicite all'interno dei modelli.

Inizialmente, sono stati analizzati i processi stocastici alla base dei modelli, ossia il moto browniano, il moto browniano geometrico e il processo di O-U sottolineandone le differenze. Successivamente, i modelli di Bachelier e BS sono stati approfonditi prendendo in considerazione le differenze per il corretto *pricing* delle opzioni europee *call* e *put*, le differenze nel calcolo delle lettere greche e le differenze, anche di significato, nelle volatilità implicite. Per la conversione delle volatilità implicite tra i modelli si è fatto un distinguo per le opzioni ATM e non ATM. Per le prime è stata esposta la formula di Brenner e Subrahmanyam, la quale è particolarmente efficace quando le scadenze delle opzioni sono brevi. Infatti, un risultato importante che è stato ottenuto è quello di potere convertire la volatilità implicita delle opzioni *call*, ad un mese sul Brent, secondo il modello di BS, nella volatilità implicita di Bachelier ottenendo un'approssimazione accurata. Per le opzioni non ATM, è stato presentato il modello SABR che permette di convertire in maniera estremamente efficace le volatilità implicite senza perdere in approssimazione.

Oltre alla volatilità implicita e la sua determinazione con i vari modelli, è stata trattata anche la volatilità storica del prezzo del Brent. La volatilità storica è stata analizzata prendendo in considerazione anche la sua stima attraverso il metodo del GARCH(1,1). In particolare, sono stati stimati i parametri del GARCH(1,1) ed è stata elaborata una rappresentazione grafica della volatilità storica e della sua stima con il GARCH(1,1). Inoltre, sono stati calcolati gli indicatori di performance come il MAE, il MSE e il RMSE. I seguenti indicatori assumono dei valori relativamente piccoli, per cui la stima della volatilità storica attraverso il modello GARCH(1,1) è moderatamente efficace.

Il principale oggetto di studio del seguente elaborato è stato quello di determinare la capacità

previsiva della volatilità implicita e storica. Innanzitutto, è stata studiata la relazione tra volatilità effettivamente realizzata con la volatilità storica e con la volatilità implicita di BS prese singolarmente. I risultati della tavola 4.3.1 evidenziano come, per le opzioni *call* ATM sul Brent, sia la volatilità storica che la volatilità implicita di BS, singolarmente, hanno un contenuto informativo circa la volatilità effettivamente realizzata. Inoltre, in entrambe le equazioni le volatilità sono *bias* in quanto l'intercetta è significativamente diversa da zero. Tuttavia, l'R-quadro aggiustato dell'equazione con la volatilità storica è nettamente inferiore a quello con la volatilità implicita di BS. Ciò sta a significare che la volatilità implicita di BS, singolarmente, spiega in modo migliore la volatilità effettivamente realizzata. Inoltre, a differenza della volatilità storica, la volatilità implicita di BS è una misura efficiente in quanto gli errori non sono autocorrelati.

Oltre a ciò, è stata studiata la relazione tra volatilità realizzata, volatilità storica e il tasso di rendimento del Brent. La tavola 4.3.2 mostra come il beta del tasso di rendimento del Brent non è significativamente diverso da zero, per cui non c'è una relazione tra le due variabili.

Il principale risultato che è stato scoperto è quello della maggiore capacità previsiva della volatilità implicita, di BS e di Bachelier, rispetto alla volatilità storica per spiegare la volatilità realizzata del Brent, in un determinato periodo. In particolare, come dimostra la tavola 4.3.3, quando si mette in relazione la volatilità realizzata insieme alla volatilità storica ed implicita, di BS e Bachelier, il coefficiente della volatilità storica cala drasticamente e non è più significativo. Per cui, la volatilità implicita, di BS e Bachelier, risulta avere un contenuto informativo maggiore rispetto a quello della volatilità storica. Quindi, è possibile sostenere che un aumento, o diminuzione, della volatilità implicita di BS o di Bachelier comporti un parziale aumento, o diminuzione, della volatilità del Brent. Essendo la volatilità implicita una misura *ex ante* della volatilità ed essendo quotata sui mercati, è possibile prevedere come una variazione nella volatilità implicita possa impattare sulla volatilità del Brent.

Appendice

```
## importo le librerie

import numpy as np

import pandas as pd

import matplotlib.pyplot as plt

import scipy.optimize as minimize

import scipy.optimize as spop

from statsmodels.tsa.stattools import adfuller as adf

import sklearn.metrics as metrics

import statsmodels.api as sm

## importo i dati

oil: pd.DataFrame = pd.read_excel('BrentPrice.xls', index_col="Date")

oil.head()

## figura 4.1

oil_ret = oil['Close'].pct_change() ## formula rendimenti

oil_gg_ret = oil_ret.dropna()

oil_m_ret = oil['Close'].resample('M').ffill().pct_change() ## ricampiono in mesi

fig = plt.figure()

ax1 = fig.add_axes([0.1,0.1,0.8,0.8])

ax1.plot(oil_gg_ret)

ax1.set_xlabel("Date")

ax1.set_ylabel("Percent")

ax1.set_title("Brent daily returns data")

plt.grid()

plt.show()

## figura 4.2
```

```

def volatilità_storica(u):
    return np.sqrt(sum(u**2)*252/(len(u))) ## formula volatilità storica

Volatilità_mensile = oil.resample('M')['log_return'].apply(volatilità_storica)

plt.plot(Volatilità_mensile)

plt.title("Volatilità storica mensile Brent")

plt.xlabel("Anni")

plt.ylabel("Volatilità storica")

plt.grid()

plt.show()

## figura 4.3

oil_ret = oil_m_ret.dropna()

risultati = adf(oil_ret)

print('ADF Statistic: %f' % risultati[0])

print('p-value: %f' % risultati[1])

print('Critical Values:')

for key, value in risultati[4].items():
    print('\t%s: %.3f' % (key, value))

## figura 4.4

fig = plt.figure()

ax1 = fig.add_axes([0.1,0.1,0.8,0.8])

oil_gg_ret.plot.hist(bins = 50)

ax1.set_xlabel("Rendimenti giornalieri %")

ax1.set_title("Rendimenti giornalieri Brent")

ax1.text(-0.35,200,"Rendimenti\nbassi")

ax1.text(0.25,200,"Rendimenti\nalti")

plt.grid()

```

```

plt.show()

## figura 4.5 GARCH(1,1)

def funzione_GARCH(theta):

    #theta è il vettore con i parametri del modello

    media = theta[0]

    omega = theta[1]

    alpha = theta[2]

    beta = theta[3]

    #volatilità lungo periodo

    lr = (omega/(1 - alpha - beta))

    #volatilità storica e GARCH

    residui = oil_gg_ret - media

    vol_storica = abs(residui) ## prendo valori assoluti

    L = len(oil_gg_ret)

    # creo vettori di zeri di lunghezza pari ai rendimenti giornalieri

    vol_GARCH = np.zeros(L)

    vol_GARCH[0] = lr ## al tempo 0 la volatilità è pari alla volatilità di lungo periodo

    for i in range(1,len(oil_gg_ret)):

        vol_GARCH[i] = (omega + alpha*residui[i-1]**2 + beta*vol_GARCH[i-1]**2)**(1/2)

    # formula massima verosimiglianza

    likelihood = 1/((2*np.pi)**(1/2)*vol_GARCH)*np.exp(-
vol_storica**2/(2*vol_GARCH**2))

    log_likelihood = np.sum(np.log(likelihood))

    return -log_likelihood

```

```

#minimizzo la funzione di massima verosimiglianza perchè c'è il -
risultati = spop.minimize(funzione_GARCH, [mean, var, 0, 0], method='Nelder-Mead')
## risultati dei parametri

theta = risultati.x

media = risultati.x[0]

omega = risultati.x[1]

alpha = risultati.x[2]

beta = risultati.x[3]

log_likelihood = -float(risultati.fun)

lr = (omega/(1 - alpha - beta))

residui = oil_gg_ret - media

vol_storica = abs(residui)

# creo vettori di zeri di lunghezza pari ai rendimenti gg

vol_GARCH = np.zeros(len(oil_gg_ret))

vol_GARCH[0] = lr

for i in range(1,len(oil_gg_ret)):

    vol_GARCH[i] = (omega + alpha*residui[i-1]**2 + beta*vol_GARCH[i-1]**2)**(1/2)

## grafico

fig = plt.figure()

asse = fig.add_subplot(1,1,1)

asse.plot(oil.index[1:], vol_storica, color = 'red')

asse.plot(oil.index[1:], vol_GARCH, color = 'black')

plt.grid()

plt.title("Volatilità storica e GARCH(1,1)")

legend = plt.legend(['volatilità storica','GARCH(1,1)'], title_fontsize=15)

legend._legend_box.sep = 25

```

```

plt.show()

print("I valori dei parametri stimati sono:")

print(omega)

print(alpha)

print(beta) ## stampo a video i valori

## per controllare se il processo è stazionario:

if alpha + beta <= 1:

    print("processo stazionario")

else:

    print("processo non stazionario")

## MSE/MAE/RMSE

Y = vol_storica

Y_hat = vol_GARCH

d = Y - Y_hat ## d è la distanza tra i valori di Y e Y_hat

mse = np.mean(d**2)

mae = np.mean(abs(d))

rmse= np.sqrt(mse)

print(mse)

print(mae)

print(rmse)

## Regressione

Volatilità_corrente = Volatilità_mensile[216:]

Volatilità_passata = Volatilità_mensile[0:216]

Y = Volatilità_corrente

X = Volatilità_passata

X = sm.add_constant(X)

```

```

Y = list(Y)

model = sm.OLS(Y, X).fit()

summary = model.summary()

print(summary) ## regressione volatilità storica

model.pvalues[1]

## importo i dati per le altre regressioni

oil_2: pd.DataFrame = pd.read_excel('Iv.xlsx', index_col= "Date")

oil_2.head()

HV_m_ = Volatilità_mensile[311:] # allineo dati

HV_v = np.array(HV_m_)

oil_2["Volatilità_storica_mensile"] = HV_v

# pulisco dataset da valori estremi

vol_mensile = pd.DataFrame(oil_2["Volatilità_storica_mensile"])

valori_estremi = HV_v[83:86]

vol_mensile =
vol_mensile.drop(vol_mensile[oil_2["Volatilità_storica_mensile"].isin(valori_estremi)].index)

IV = oil_2['IV_BS']

IV_m = IV.drop(IV[oil_2['IV_BS'].isin(val_estremi)].index)

oil_2['r'] = oil_2['Price_Futures'].ffill().pct_change()

oil_monthly_returns = oil_2['r']

r_m = oil_monthly_returns.drop(oil_monthly_returns[oil_2['r'].isin(valori_estremi)].index)

r_m = r_m.dropna()

HV_p = Volatilità_mensile[195:312]

IV_m1 = IV_m[0:118]

x = IV_m1

x_ = sm.add_constant(x)

```

```

Y_1 = vol_mensile[0:118]

modell1 = sm.OLS(Y_1, x_).fit()

summary1 = modell1.summary()

print(summary1) ##### regressione volatilità implicita BS

ret = oil_monthly_returns[0:217].dropna()

Y_2 = Volatilità_corrente

Y_2 = list(Y_2)

X_2 = np.column_stack((Volatilità_passata, ret))

X_2 = sm.add_constant(X_2)

modello2 = sm.OLS(Y_2, X_2).fit()

summary2 = modello2.summary()

print(summary_2) ##### regressione volatilità storica e rendimenti

HV_p = Volatilità_mensile[194:312]

X3= np.column_stack((HV_p,IV_m))

X_3 = sm.add_constant(X3)

modello3 = sm.OLS(Y, X_3).fit()

summary = modello3.summary()

print(summary) ##### regressione volatilità storica e implicita BS

### importo i dati della volatilità implicita di Bachelier

oil_3: pd.DataFrame = pd.read_excel(r'Implied_Volatility.xlsx', index_col='Date')

oil_3.head()

IV_bachelier = oil_3['IV_bachelier']

v_e = IV_bachelier[83:86]

### pulisco il dataset

IV_b = IV_bachelier.drop(IV_bachelier[oil_3['IV_bachelier'].isin(v_e)].index)

X4= np.column_stack((HV_p,IV_b))

```

```
X_4 = sm.add_constant(X4)
modello3 = sm.OLS(Y, X_4).fit()
summary3 = modello3.summary() ## regressione volatilità storica e implicita Bachelier
print(summary3)
```

Bibliografia

Bachelier, L., (1900) “Theorie de la Spéculation”, *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure* 17, 21–88.

Black F., Scholes M. (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

Black, F., (1975) “The Pricing of Commodity Contracts”, *Journal of Financial Economics*, 3, 167-79.

Black, F., (1989) “How We Came Up with the Option Pricing Formula”, *Journal of Portfolio Management*, 4-8.

Bollerslev, T., (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, 307-27.

Brennan, M., (1958) “The Supply of Storage”, *American Economic Review*, Vol. 47, pp. 50-72.

Brenner M., Subrahmanyam., (1994) “A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model”. *Financial Analysts Journal*: Vol. 50, pp. 25-28.

Castellani G., M. D. (2007). *Manuale di finanza III. Modelli stocastici e contratti derivati*, il Mulino.

Choi, J., Kwak, M., Wen Tee, C., Wang, Y., (2022) “A Black-Scholes User’s Guide to the Bachelier Model”, *Journal of Futures Markets*.

Christensen, B.J., Prabhala, N.R., (1998) “The relation between implied and realized volatility”, *Journal of Financial Economics* Vol. 50, pp. 125-150.

CME Group, (2020) *Switch to Bachelier Options Pricing Model - Effective April 22, 2020*.

Cootner, P., (1960), “Returns to Speculators: Telser vs. Keynes”, *Journal of Political Economy*, Vol. 68, pp. 396-404.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. Ross, S. A., (1981) “The Relationship Between Forward Prices and Futures Prices”, *Journal of Financial Economics*, 321-46.

Courtault, J.M., Kabanov, Y., Bru, B., Crepel, P., Lebon, I., Marchand, A.L., (2000) “Louis

Bachelier on the Centenary of *Theorie de la Speculation*”, *Mathematical Finance* 10, 339–353.

Einstein, A., (1905) “uber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”. *Annalen der Physik* 4, 549–560.

Engle, R. F., (1982) “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, 50, 987-1008.

Gorton, G., K.G. Rouwenhorst (2006), “Facts and Fantasies about Commodities Futures”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 62, pp. 47–68.

Grunspan, C., (2011) “A Note on the Equivalence between the Normal and the Lognormal Implied Volatility: A Model Free Approach”.

Hagan, P.S., Kumar, D., Lesniewski, A.S., Woodward, D.E., (2002) “Managing Smile Risk”. *Wilmott* September, 84–108.

Hagan, P.S., Kumar, D., Lesniewski, A., Woodward, D., (2014) “Arbitrage-Free SABR”. *Wilmott* 2014, 60–75.

Hicks, J. K. R., (1939) “Value and Capital”, Oxford, Clarendon Press.

Hull, J. C., (2022) “Opzioni, futures e altri derivati”, undicesima edizione, Pearson.

Ingersoll, J.E. (1976) “A theoretical and empirical investigation of the dual purpose funds: an application of contingent-claims analysis”, *Journal of Financial Economics*, 3: 83-123

Ingersoll, J. E., (1987) “Option Pricing Theory,” in *The New Palgrave: A Dictionary of Economic Theory and Doctrine*, Macmillan, pp. 83-89.

Kaldor, N., (1939), “Speculation and Economic Stability”, *Review of Economic Studies*, Vol. 7, pp. 1-27.

Keynes, J. M., (1930) “A Treatise on Money”, London Macmillan.

Leland, H.E. (1985) “Option pricing and replication with transactions costs” *Journal of Finance* 40, 1283-30.

Merton R. (1973), “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), 141-183.

Samuelson, P. A., (1965) "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review* 6, 41–49.

Schachermayer, W., Teichmann, J., (2008) "How Close Are the Option Pricing Formulas of Bachelier and Black–Merton–Scholes?". *Mathematical Finance* 18, 155–170.

Scholes, M. J., (1976) "Taxes and the pricing of options", *Journal of Finance* 31, 319-32.

Telser, L., (1958), "Futures Trading and the Storage of Cotton and Wheat", *Journal of Political Economy*, Vol. 66, No. 3, pp. 233-255.

Thorpe, E.O. (1973), "Extensions of the Black-Scholes option model", *Bulletin of the International Statistica/ Institute, Proceedings of the 39th Session*: 522-9.

Working, H., (1948), "Theory of the Inverse Carrying Charge in Futures Markets", *Journal of Farm Economics*, Vol. 30, pp. 1-28.

Sitografia

www.bancaditalia.it

www.barchart.com

www.borsaitaliana.it

www.bloomberg.com

www.cmegroup.com

www.eia.gov

Abstract

Il mercato dei derivati è un mercato che, con il passare del tempo, sta assumendo maggiore importanza per determinati settori, come quello energetico. Il mercato dei derivati è composto principalmente dai contratti *forward*, *futures*, *swap* e opzioni. Le opzioni sono contratti derivati che danno al portatore il diritto, e non l'obbligo, di comprare o vendere una determinata attività sottostante ad un prezzo d'esercizio prestabilito ed entro una determinata data. Gli *swap* sono contratti derivati in cui due soggetti si scambiano dei pagamenti futuri divisi in diverse transazioni.

I *forward* sono contratti derivati in cui due soggetti si accordano su una futura transazione per comprare o vendere una determinata attività sottostante ad un determinato prezzo e ad una determinata data. Il *payoff* del contratto per chi assume una posizione *long* è dato dalla differenza tra il prezzo *spot* dell'attività sottostante al tempo t (S_t) e il prezzo di consegna (K), quindi: $S_t - K$. Il *payoff* per la parte *short* è esattamente l'opposto, cioè: $K - S_t$.

I *futures* sono contratti simili ai contratti *forward*, tuttavia presentano alcune differenze. La principale differenza è che i contratti *futures* sono contratti negoziati in borsa mentre i contratti *forward* sono negoziati OTC ("over the counter"). Quindi, a differenza dei contratti *forward*, i contratti *futures* sono contratti privi di rischio di controparte. Infatti, la cassa di compensazione ("clearinghouse") chiede agli investitori, che negoziano un contratto *futures*, di versare dei margini iniziali nei conti di deposito. Alla fine della giornata lavorativa, i conti di deposito vengono aggiustati attraverso il meccanismo del "marking to market", che definisce i profitti e le perdite giornalieri degli investitori. Il conto di deposito di un investitore non può scendere al di sotto del margine di mantenimento. Ciò serve per ridurre il rischio di controparte e rendere maggiormente sicure le transazioni. Dall'altra parte, i contratti *forward*, essendo negoziati OTC, sono caratterizzati da un elevato rischio di controparte. I mercati OTC sono mercati non regolamentati in cui gli investitori negoziano in maniera diretta i contratti tra di loro e sono gli stessi *traders* che definiscono le caratteristiche contrattuali. Il motivo principale dell'esistenza del rischio di controparte nei contratti *forward* è data proprio dalla negoziazione diretta tra gli investitori. Al fine di ridurre il rischio di controparte nei contratti *forward* sono stati introdotti degli strumenti che svolgono un ruolo simile a quello della *clearinghouse* nei mercati regolamentati. Sono state introdotte sia le controparti centralizzate ("central counterparties"),

CCPs) sia la compensazione bilaterale (“*bilateral clearing*”). Le controparti centralizzate assumono un ruolo simile a quello della *clearinghouse* per i contratti *futures*. Quindi, svolgono il ruolo di intermediari chiedendo i margini agli investitori, riducendo il rischio di controparte. Con la compensazione bilaterale, i *traders* negoziano direttamente tra di loro il contratto *forward* senza che organi di borsa svolgano la funzione di intermediari nelle contrattazioni. In questo tipo di negoziazioni, i contratti OTC seguono un contratto quadro che definisce le condizioni contrattuali.

La formazione dei prezzi di contratti *forward* e *futures* è molto simile e dipende da diversi fattori come l’attività sottostante, il tasso privo di rischio e il tempo di scadenza dei contratti. Nel caso di titoli che non generano redditi, il prezzo *forward* è dato da:

$$F_0 = S_0 * e^{r*T}$$

Dove S_0 è il prezzo *spot* corrente del titolo, r è il tasso *risk free*, T è il tempo che intercorre prima della scadenza del contratto.

Il legame tra prezzo *forward/futures* e prezzo *spot* per una merce che genera un rendimento noto (q) e presenta costi di immagazzinamento proporzionali al prezzo della merce (u) è dato da:

$$F_0 = S_0 * e^{(r-q+u-y)*T}$$

Dove y è il tasso di convenienza dato dalla detenzione della merce ed un suo possibile utilizzo futuro. Il tasso di convenienza è direttamente correlato con la scarsità della merce.

Il valore di un contratto *forward*, al momento della sua negoziazione, è nullo. Infatti, le parti si mettono d’accordo che il prezzo di consegna (K) dell’attività sottostante sia uguale al prezzo *forward* corrente. Il valore di un contratto *forward long* è dato da questa relazione:

$$f = (F_0 - K) * e^{-r*T}$$

È chiaro che se $K = F_0$ allora il valore del contratto *forward* è nullo. Con il passare del tempo, il prezzo *forward* corrente varia e, quindi, essendo il prezzo di consegna (K) fissato *ex ante*, varia anche il valore del contratto *forward*.

La relazione tra prezzi *futures* e l’*expected spot price* può essere spiegata attraverso le teorie di John Maynard Keynes e John Hicks e dal CAPM. Tali teorie sono spiegate dettagliatamente nel paragrafo 2.3. Dalla teoria delle aspettative di Keynes nascono i concetti di *backwardation*

e *contango*.

Il *contango* e il *backwardation* derivano dalla pendenza della struttura della *futures curve*, che rappresenta la curva dei prezzi *futures* in funzione delle relative scadenze dei contratti. Un mercato si dice in *contango* (o riporto) quando il prezzo *futures* è superiore al prezzo *spot* corrente. Dall'altro canto, un mercato in *backwardation* (o deporto) si verifica quando il prezzo *futures* è minore del prezzo *spot* corrente. Le figure 2.2 e 2.3 mostrano degli esempi di mercati *futures* in *contango* e in *backwardation*. Inoltre, nel par. 2.4, vengono analizzata e spiegate le principali teorie riguardanti la formazione della curva a termine.

Per lo studio della volatilità nelle opzioni scritte sul Brent sono stati presi in considerazione due modelli di *pricing*, ossia il modello di Bachelier e il modello di Black-Scholes. Alla base di tali modelli vi sono dei processi stocastici a tempo continuo quali il moto browniano e il moto browniano geometrico. In finanza, i processi stocastici vengono utilizzati per comprendere ed analizzare l'evoluzione dei prezzi di un'attività e della volatilità. Un processo stocastico rappresenta l'evoluzione probabilistica di determinate variabili aleatorie, $Y(t)$, nel tempo. I processi stocastici sono determinati da diversi fattori quali la sua caratterizzazione probabilistica, la stazionarietà del processo, e dal processo di Markov.

Il moto browniano (o processo di Wiener), $Y(t)$, è un processo di diffusione; quindi, un processo stocastico caratterizzato da continuità delle traiettorie e dalla proprietà di markovianità. Questo moto venne per la prima volta utilizzato in finanza da Louis Bachelier per studiare ed analizzare l'evoluzione dei prezzi dell'attività sottostante. La variabile aleatoria, $Y(t)$, può assumere qualsiasi valore positivo o negativo, in quanto lo spazio degli spazi è rappresentato da tutti i numeri reali. Il moto browniano può essere scritto attraverso l'equazione differenziale stocastica (EDS), in cui la variabile aleatoria, $Y(t)$, rappresenta la variazione del prezzo dell'attività sottostante, $S(t)$. L'EDS del moto browniano è:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dZ$$

Dove, dZ rappresenta il differenziale stocastico. L'andamento del prezzo dell'attività sottostante dipende dal parametro di *drift*, μ , e dal parametro di diffusione del moto, σ . La problematica concernente il moto browniano è data dal fatto che il prezzo dell'attività sottostante può, in qualsiasi momento, assumere un valore negativo.

Il moto browniano geometrico è un processo stocastico continuo estremamente utilizzato in finanza per spiegare la possibile evoluzione di determinate variabili aleatorie nel tempo. Il modello di Black e Scholes fa uso di questo processo stocastico per ipotizzare l'andamento del

prezzo di un'azione sottostante. L'insieme degli spazi, nel moto browniano geometrico, va da zero in poi, per cui il prezzo dell'azione non può assumere, con probabilità positiva, un valore negativo. L'EDS del moto browniano geometrico è:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)$$

Il moto browniano geometrico assume l'ipotesi di lognormalità del prezzo dell'azione sottostante. Un fattore negativo del moto browniano geometrico è che non prende in considerazione il ritorno verso un livello medio della variabile aleatoria (“*mean-reversion*”). Tale problema è risolto dal processo di Ornstein-Uhlenbeck (O-U). Il processo di O-U viene analizzato nel dettaglio nel paragrafo 3.1.3.

I processi stocastici sono alla base dei modelli di *pricing* delle opzioni quali il modello di Bachelier e di Black-Scholes. Louis Bachelier sviluppò il suo modello, utilizzato per la determinazione dei prezzi degli strumenti derivati, nella sua tesi di dottorato “*Théorie de la Spéculation*” nel 1900. L'elaborato di Bachelier fu fondamentale per la teorizzazione della “*random walk*” e dell'ipotesi del mercato efficiente, sviluppata, successivamente, da Fama. Bachelier viene considerato, in virtù delle sue idee innovative, il fondatore della matematica finanziaria. Dagli anni '70, il modello di Bachelier non è stato più utilizzato in quanto il moto browniano aritmetico permette prezzi negativi dell'attività sottostante e, inoltre, a causa del modello di Black-Scholes sviluppato in quegli anni. Il modello di Black-Scholes è un modello di non-arbitraggio, ossia parte del presupposto che se le opzioni fossero correttamente prezzate allora non sarebbe possibile per gli investitori ottenere un profitto privo di rischio.

L'assunto principale di Bachelier è che l'aspettativa matematica del rendimento di uno speculatore è zero, ciò è basato sul principio dell'equilibrio di mercato. Per determinare la variazione dei prezzi nella borsa di Parigi, Bachelier sviluppò il concetto di “*random walk*”. Va sottolineato come il modello di Bachelier è un modello molto avanzato per l'epoca che ha, tuttavia, due principali problematiche. La prima riguarda l'utilizzo del moto browniano che permette al prezzo dell'attività sottostante di assumere valori negativi. La seconda carenza riguarda l'ipotesi che gli speculatori hanno aspettative di rendimento nulle, ciò ignora il valore temporale del denaro e il rischio intrinseco di un'opzione. Nonostante tali carenze, il modello di Bachelier è un modello che funziona in modo particolarmente corretto per le opzioni di breve durata. nel modello di Bachelier, il prezzo *forward* di un'attività sottostante segue il moto browniano aritmetico con volatilità σ_N , ed è:

$$dF_T = \sigma_N dZ_T$$

Il modello di Bachelier è anche denominato modello normale in quanto presuppone che il prezzo dell'azione sottostante è distribuito come una normale; per cui, la volatilità implicita, nel modello di Bachelier, può essere definita come volatilità implicita normale, σ_N . Possiamo scrivere il prezzo dell'opzione *call* in funzione del prezzo *spot*, S_0 , in questo modo:

$$C_N(K) = (S_0 - K) * N(d_N) + S_0 \sigma_N \sqrt{T} * n(d_N)$$

Dove:

$$d_N = \frac{S_0 - K}{S_0 \sigma_N \sqrt{T}}$$

$n(\cdot)$ è la funzione di densità di probabilità;

$N(\cdot)$ è la funzione di distribuzione di una variabile normale;

d è la “*moneyness*” dell'opzione.

Nelle pagine 38 e 39 è possibile trovare la spiegazione e le formule delle lettere greche secondo il modello di Bachelier, le quali possono essere paragonate con quelle determinate secondo il modello di Black-Scholes.

Il modello di *pricing* più famoso e maggiormente utilizzato è il modello di Black-Scholes, teorizzato nel 1973, per la valutazione delle opzioni europee. Un contributo fondamentale al modello di Black-Scholes è stato dato da Robert Merton (1973), circa l'ipotesi di assenza di arbitraggio. In particolare, Merton ha evidenziato come gli investitori possono conservare la propria posizione di copertura (“*hedge*”), negoziando continuamente le opzioni o le attività sottostanti, mantenendo il portafoglio privo di rischio. Il processo stocastico alla base del modello di Black-Scholes, per la determinazione dell'andamento del prezzo dell'azione, è il moto browniano geometrico, in cui la volatilità dell'azione, σ , rimane costante per tutto l'arco temporale. A differenza del modello di Bachelier, il modello di Black-Scholes ipotizza la log-normalità dei prezzi delle azioni. Per cui, il prezzo dell'azione non può, in qualsiasi istante temporale, assumere un valore negativo. L'equazione differenziale di Black-Scholes è:

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + Sr \frac{\partial C}{\partial S}$$

Le assunzioni del modello e la dimostrazione analitica della formula sono riportate nelle pagine 42 e 43. Sapendo la condizione di contorno di un'opzione *call* europea, è possibile scrivere la soluzione particolare come:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

N(d) rappresenta la funzione di distribuzione normale standardizzata di una variabile che ha, quindi, media nulla e *standard deviation* unitaria. È possibile estendere il modello di Black-Scholes per trattare le opzioni call o put su contratti *futures*. Il prezzo *futures*, F, di solito, segue il seguente processo stocastico:

$$\frac{dF_T}{F_T} = \sigma_{BS} dZ_T$$

È possibile notare come la volatilità nel modello di Black-Scholes, σ_{BS} , misura le variazioni relative del prezzo *futures* mentre la volatilità nel modello di Bachelier, σ_N , misura le variazioni assolute.

Avendo le condizioni di contorno e l'equazione differenziale di Black-Scholes si può ricavare il prezzo di una *futures call* europea, pari a:

$$C = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

Dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Inoltre, a pagina 46, sono state derivate le lettere greche secondo il modello di Black-Scholes. Quindi è possibile fare un confronto con quelle determinate con il modello di Bachelier.

Come è stato detto, il modello di Black-Scholes suppone che la volatilità rimanga costante durante tutto l'orizzonte temporale. Un modo per stimare la volatilità dell'attività sottostante è attraverso la volatilità storica. La volatilità è determinata come la deviazione standard del tasso

di rendimento del prezzo di un'attività in un determinato periodo di tempo. È possibile trovare la volatilità di un titolo come:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{n-1}^2}$$

Dove, u_i è il logaritmo della variazione del prezzo dell'attività.

La volatilità storica è stata analizzata anche attraverso il modello EWMA e GARCH(1,1). In particolare, il modello GARCH(1,1) è stato utilizzato per determinare la volatilità storica del Brent. La spiegazione analitica dei seguenti modelli si trova da pagina 49 a pagina 51.

È possibile stimare i parametri dei modelli attraverso il metodo della massima verosimiglianza. Lo stimatore di massima verosimiglianza è quel parametro del modello che massimizza la funzione di densità dei dati. Nel caso empirico, lo stimatore di massima verosimiglianza è stato utilizzato per la determinazione dei parametri del modello GARCH(1,1).

Nel modello di Bachelier e di Black-Scholes le volatilità implicite sono fondamentali per la determinazione del prezzo dell'opzione. La volatilità implicita ci dice cosa il mercato pensa circa la volatilità futura di un titolo. Quindi, mentre la volatilità storica è una misura ex ante della volatilità, la volatilità implicita è una misura ex post. Attraverso le volatilità implicite di un'opzione è possibile creare il *volatility smile* (o *smirk*) e la *volatility surface*. Il *volatility smile* rappresenta graficamente la volatilità implicita rispetto alla *moneyness* (K/S_0) dell'opzione. Il *volatility smile* assume un valore minimo quando la volatilità implicita dell'opzione è minima cioè quando l'opzione è *at the money* (ATM). Quando l'opzione è *in the money* o *out of the money*, allora la volatilità implicita cresce e, di conseguenza, anche il *volatility smile*. Inoltre, il *volatility smile* è rappresentabile graficamente come la curva che lega la volatilità implicita e il prezzo d'esercizio di un'opzione (K). Un problema nella rappresentazione della volatilità implicita in funzione dello *strike* è che la curva dipende dall'andamento del prezzo dell'attività sottostante. Un altro tipo di dimostrazione grafica del *volatility smile* è il legame tra la volatilità implicita e la lettera greca delta. Queste tre rappresentazioni della *volatility smile* sono riportate nelle figure 3.1, 3.2 e 3.3. In particolare, mostrano la *volatility smile* delle opzioni scritte sul WTI *crude oil* osservato il 20 aprile 2023. Gli investitori per analizzare il prezzo delle opzioni prendono in considerazione anche la struttura a termine delle volatilità ("*term structure*"), cioè l'evoluzione delle volatilità implicite delle opzioni ATM nei diversi mesi di scadenza. L'inclinazione della *term structure* è un

segnale circa le aspettative degli investitori sulla volatilità futura del titolo sottostante l'opzione. Mettendo insieme la struttura a termine delle volatilità implicite con il *volatility smile* è possibile ottenere un grafico tridimensionale che rappresenta la *volatility surface* di un'opzione. La *volatility surface* del WTI *crude oil* è rappresentata dalla figura 3.5.

Nel paragrafo 3.2.5 viene analizzato approfonditamente il modello SABR per la conversione della volatilità implicita, da un modello all'altro, per le opzioni non ATM. Nel caso pratico, le volatilità implicite delle opzioni ATM scritte sul Brent sono state convertite utilizzando la formula di Brenner e Subrahmanyam, spiegata nello stesso paragrafo.

Il caso pratico verte sulla possibilità di utilizzare le volatilità storiche ed implicite come variabili previsive della volatilità del prezzo del petrolio. Per ottenere ciò, è stata determinata, prioritariamente, la volatilità storica del prezzo del Brent e, successivamente, sono state ricavate le volatilità implicite con il metodo di Black-Scholes e Bachelier. Per lo studio dell'andamento dei prezzi del Brent, per la determinazione della volatilità storica e per l'analisi della capacità previsiva della volatilità storica ed implicita sono stati utilizzati dei codici in Python.

Il campione dei dati, riguardante i prezzi del Brent, è composto da 9114 osservazioni, ossia il periodo che va dal 20 maggio 1987 al 17 aprile 2023. La figura 4.1 mostra i rendimenti giornalieri del Brent nel periodo di riferimento. La figura 4.2 mostra la volatilità storica mensile del Brent dal 1987 al 2023, in cui si nota come i periodi di maggiore volatilità corrispondano ai momenti di crisi economica.

È stato effettuato il Augmented Dickey–Fuller test (ADF) per studiare la stazionarietà della serie storica. La figura 4.3. evidenzia come il p-value è minore del livello di significatività, pari al 5%, e come il *test statistic* è minore dei *critical value* al 1%, 5% e 10%. Ciò significa che è possibile rigettare l'ipotesi nulla e quindi il processo è stazionario. Nella figura 4.4 viene mostrata la frequenza delle osservazioni dei rendimenti giornalieri del Brent e si evidenzia come, la maggiore parte delle volte, i rendimenti giornalieri siano prossimi allo zero. Come detto, un metodo di stima della volatilità storica è il GARCH(1,1). La figura 4.5 rappresenta la volatilità storica effettivamente realizzata e quella stimata dal GARCH(1,1). I parametri stimati, con il metodo della massima verosimiglianza, del GARCH(1,1) confermano la stazionarietà della serie storica. Per valutare le prestazioni del GARCH(1,1) nel calcolare la volatilità storica sono stati calcolati alcuni indicatori di performance, quali il “*mean absolute error*” (MAE), “*mean standard error*” (MSE) e “*relative mean standard error*” (RMSE). I

valori assunti dai questi indicatori di performance sono relativamente bassi, segno che il modello GARCH(1,1) è un modello valido per la stima della volatilità storica.

La volatilità implicita determinata con il modello di Black-Scholes è stata ricavata dai dati di Bloomberg. In particolare, sono stati estratte le volatilità implicite mensili delle opzioni *call* ATM con scadenza mensile da maggio 2013 a maggio 2023; quindi, un totale di 121 osservazioni. La figura 4.6 mostra l'andamento della volatilità implicita delle opzioni *call* a un mese ATM ed è possibile notare come il picco di volatilità, circa il 90%, è dato dalla crisi del COVID-19. Una volta ricavata la volatilità implicita secondo il modello di Black-Scholes è possibile convertirla nella volatilità implicita di Bachelier, attraverso la formula di Brenner e Subrahmanyam. La figura 4.7 mostra l'andamento della volatilità implicita mensile delle opzioni *call* ATM determinate con il metodo di Black-Scholes e di Bachelier. Dalla figura 4.7 è possibile osservare come non ci sia una divergenza tra i due modelli.

Una volta determinata la volatilità storica ed implicita con i modelli di Black-Scholes e di Bachelier è possibile analizzare la loro capacità previsiva. In particolare, l'obiettivo è quello di capire se queste variabili possono prevedere, in maniera efficace, la volatilità effettivamente realizzata in un determinato periodo temporale. Per stabilire la relazione tra volatilità realizzata e volatilità implicita o storica sono state effettuate le seguenti regressioni lineari:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$$

Vengono testate tre ipotesi. La prima è se la volatilità storica o implicita hanno delle informazioni che riescono a spiegare la volatilità realizzata. In tale caso, il beta della variabile indipendente è significativamente diverso da zero. La seconda ipotesi è che le volatilità siano delle variabili *unbiased*. Per essere delle variabili *unbiased*, deve valere il seguente test congiunto: $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$. L'ultima ipotesi che viene testata è che gli errori della regressione non siano autocorrelati.

I risultati delle regressioni, attraverso il metodo OLS, sono riportati nella tavola 4.3.1. Dalla tavola è possibile notare come, nella prima equazione, il beta della volatilità storica è significativamente diverso da zero; perciò, la volatilità storica ha delle informazioni circa la volatilità effettivamente realizzata nel periodo successivo. Tuttavia, l'R-quadro aggiustato dell'equazione è molto basso, quindi la volatilità storica non è un fattore che riesce a spiegare la volatilità corrente. Inoltre, la volatilità storica è caratterizzata da autocorrelazione positiva

ed è una stima *bias* in quanto l'intercetta è significativamente diversa da zero.

Nella tavola, la seconda equazione mostra come il beta della volatilità implicita è significativamente diverso da zero. Inoltre, il coefficiente della volatilità implicita e l'R-quadro aggiustato sono superiori rispetto a quelli della volatilità storica. In aggiunta a ciò, la volatilità implicita non è autocorrelata. Tuttavia, come la volatilità storica, anche la volatilità implicita è una misura *bias* della volatilità realizzata in quanto l'intercetta è significativamente diversa da zero.

Un'altra importante relazione da determinare è quella tra la volatilità e il tasso di rendimento del Brent. Tale relazione è stata analizzata dalla seguente equazione:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Nella tavola 4.3.2 sono riportati i risultati della regressione. In particolare, si nota come il beta del tasso di rendimento non è significativamente diverso da zero. Ciò significa che il tasso di rendimento non contiene delle informazioni circa la volatilità effettivamente realizzata. Anche in questo caso, l'R-quadro è molto basso, la volatilità storica è *bias* e gli errori sono autocorrelati.

L'obiettivo principale è quello di capire la differenza nella capacità previsiva della volatilità storica rispetto alla volatilità implicita determinata con il modello di BS e di Bachelier. Quindi, quale delle due variabili riesce a spiegare meglio la volatilità effettivamente realizzata. Per determinare questa relazione sono state stimate le seguenti equazioni:

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^{HV} + \beta_2 \sigma_t^N + \varepsilon_t$$

Nella tavola 4.3.3 sono riportati i risultati. La conclusione più importante che si può trarre è che quando la volatilità storica viene utilizzata come variabile indipendente insieme alla volatilità implicita, determinata secondo il modello di BS o di Bachelier, allora il suo coefficiente perde di valore e anche di significatività. Infatti, il suo beta non è significativamente diverso da zero. Quindi, la volatilità implicita ha una capacità previsiva migliore della volatilità storica circa la volatilità realizzata. Inoltre, per entrambe le equazioni gli errori non sono autocorrelati, ad un livello di significatività dell'1%, perciò la volatilità implicita delle opzioni *call* ATM è efficiente. Tuttavia, in entrambe le equazioni, l'intercetta è significativamente diversa da zero. Un altro risultato interessante è che il coefficiente della

volatilità implicita secondo il metodo di Bachelier è leggermente superiore a quello determinato secondo il metodo di BS, così come l'R-quadro aggiustato. È possibile affermare che la volatilità implicita delle opzioni ATM a breve termine è il migliore predittore della volatilità realizzata per il Brent. Quindi, è possibile sostenere che un aumento, o diminuzione, della volatilità implicita di BS o di Bachelier comporti un parziale aumento, o diminuzione, della volatilità del Brent.