



Dipartimento di laurea in Impresa e Management

Cattedra di Statistica applicata ad econometria

## Modelli statistici applicati alla finanza

Prof.ssa Marianna Brunetti

---

RELATORE

Sofia Cecilia 257221

---

CANDIDATO

Anno Accademico 2022/2023

[Digitare qui]



## Sommario

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>4</b>
<b>CAPITOLO 1 - CAPM ed efficienza dei mercati finanziari .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Diversificazione e rischio .....</b>	<b>6</b>
<b>CAPITOLO 2 – Frontiera efficiente e portafoglio di mercato .....</b>	<b>7</b>
<b>2.2 Capital Market Line.....</b>	<b>9</b>
<b>2.3. Linea caratteristica e coefficiente beta .....</b>	<b>11</b>
<b>CAPITOLO 3 - Capital Asset Pricing Model.....</b>	<b>15</b>
<b>3.1 Coefficiente alpha di Jensen .....</b>	<b>16</b>
<b>CAPITOLO 4 – Lo stesso modello statisticamente osservato .....</b>	<b>16</b>
<b>4.1 Analisi grafica.....</b>	<b>17</b>
<b>4.2 Introduzione generale alle serie stocastiche, test DF, ADF, ADFa.....</b>	<b>18</b>
<b>CAPITOLO 5 - Lavoro svolto con Rstudio.....</b>	<b>20</b>
<b>CONCLUSIONI .....</b>	<b>24</b>
<b><i>Bibliografia .....</i></b>	<b>26</b>

## INTRODUZIONE

L'apparente disordine creato dalla finanza, in termini di fluttuazioni di mercato e scelte degli operatori che vi agiscono, può sembrare spesso incomprensibile e caotico. Tuttavia, questo sistema tanto intricato quanto affascinante, lascia ai suoi studiosi scoprirne invece uno regolare, analizzabile ed intelligibile.

In questa tesi, in particolare, si scopre come sia proprio la statistica la chiave della comprensione finanziaria, lente cruciale nell'analisi di modelli resi da questa comprensibili.

“Ecco la chiave per comprendere i misteri finanziari: la statistica è la lente attraverso cui il caos dei mercati si rivela come un insieme di modelli comprensibili.”

James Gleick

La continua incertezza e volatilità a cui i mercati finanziari sono sottoposti, nasconde un velo di regolarità colto proprio dalla statistica, che tramite dati e spiegazioni razionali, permette di chiarificare previsioni, rendimenti e tendenze.

In un contesto così globalizzato ed interconnesso, oltre che utile, è necessaria la capacità di adattarsi ed addirittura anticipare le dinamiche dei mercati, in vista di soluzioni di investimento razionali, informate e solide.

## CAPITOLO 1 - CAPM ed efficienza dei mercati finanziari

Il CAPM, il cui acronimo si identifica come Capital Asset Pricing Model, consiste nel modello matematico della teoria del portafoglio pubblicato nel 1964 da William Sharpe. Essa si identifica come la linea del mercato azionario, occupandosi di rappresentare l'equilibrio di mercato tra rendimenti e rischio. Essa prende in considerazione un unico fattore di rischio, individuato dal beta, mettendo in relazione il rendimento di un titolo con la sua rischiosità.

L'analisi nel lungo periodo ha permesso di stabilire che a titoli diversi corrispondano rischi nonché rendimenti (intesi come costo-opportunità) differenti. L'avversione al rischio che l'investitore manifesta (graficamente rappresentabile tramite le curve di isoutilità o di indifferenza), porta ad individuare, dunque, una misura adeguata a quantificarlo ed una teoria in grado di convertirlo in rendimento.<sup>1</sup>

Lo scarto quadratico medio costituisce una misura di dispersione che misura la variabilità dei rendimenti del titolo considerato rispetto alla media dei rendimenti di quel titolo (rispetto a sé stesso), ma non una misura adeguata in quanto comprende il rischio totale o assoluto. Oltre, quindi, ad essere in valore assoluto, non ha valori massimi o minimi e dipende dall'unità di misura. Assumendo la distribuzione normale dei rendimenti dei titoli, canalizziamo l'interesse degli investitori verso due soli parametri:

- la media che misura il rendimento del titolo stesso
- lo scarto quadratico medio (o la varianza) che misura il suo rischio

Il principale problema da considerare in questi termini è l'esistenza di un portafoglio, che quindi comprende più di un solo ed unico titolo.

---

<sup>1</sup>Danilo Fieni, D. (2020, April 29). *La moderna teoria del portafoglio spiegata in modo semplice*. Finanza e Borsa - Investireoggi.it. <https://www.investireoggi.it/finanza-borsa/la-moderna-teoria-del-portafoglio-spiegata-in-modo-semplice/> [Digitare qui]

## 1.1 Diversificazione e rischio

Nel momento in cui si crea un portafoglio, e si inseriscono titoli al suo interno, si verifica il fenomeno della diversificazione, grazie alla quale una parte della rischiosità dei titoli presenti viene eliminata; il che dà vita ad investimenti più efficienti di altri. È necessario individuare quindi una misura di rischio di ciascun titolo che sia già al netto del potenziale effetto di diversificazione ottenibile combinando titoli all'interno dei portafogli. Questo prende il nome di rischio sistematico, che consiste proprio nel rischio rimanente rispetto a quello eliminato per effetto della diversificazione. In particolare, si tratta del rischio attribuito alle incertezze del mercato, implicito nell'investimento di un'attività finanziaria. D'altra parte, il rischio specifico e quindi non sistematico e diversificabile, è invece quello del titolo.

Alla base della diversificazione, quindi, non c'è lo scarto quadratico medio, ma c'è il modo in cui i rendimenti di un titolo covariano con i rendimenti di un altro titolo; si parla dunque di correlazione. In particolare, il coefficiente di correlazione (covarianza / prodotto delle SQM), ha un range definito che va da -1 ad 1. Oltre a ciò, esso permette di capire quanta diversificazione del rischio possiamo avere dalla combinazione di titoli all'interno del portafoglio.

- Il coefficiente di correlazione uguale a -1 implica eliminazione del rischio e dunque massima diversificazione. L'andamento dei rendimenti di un titolo rispetto ad un altro, in questo caso, è opposto e della stessa intensità. Ciò può essere rappresentato graficamente all'interno di un grafico cartesiano, in cui sulla retta delle ascisse è rappresentato lo scarto quadratico medio, mentre sulla retta delle ordinate è rappresentato appunto il rendimento. Dal suddetto grafico si evince il rapporto inversamente proporzionale sussistente tra rischio e rendimento.
- Coefficiente di correlazione maggiore di zero suggerisce medesimo andamento, sul mercato, dei rendimenti degli strumenti finanziari considerati. Ciò è rappresentato da una curva.
- Coefficiente di correlazione uguale a zero implica invece totale assenza di correlazione.
- Coefficiente di correlazione uguale a 1 infine, rappresenta l'unico caso in cui è possibile parlare di assenza di diversificazione, in cui l'andamento dei rendimenti dei titoli considerati è uguale e della stessa intensità. Aumentando il rischio, quindi, aumenterà proporzionalmente anche il rendimento.

La figura 1 mostra i valori assunti dal coefficiente di correlazione, e dunque il concetto appena illustrato.

Tutti i casi della relazione rischio-rendimento

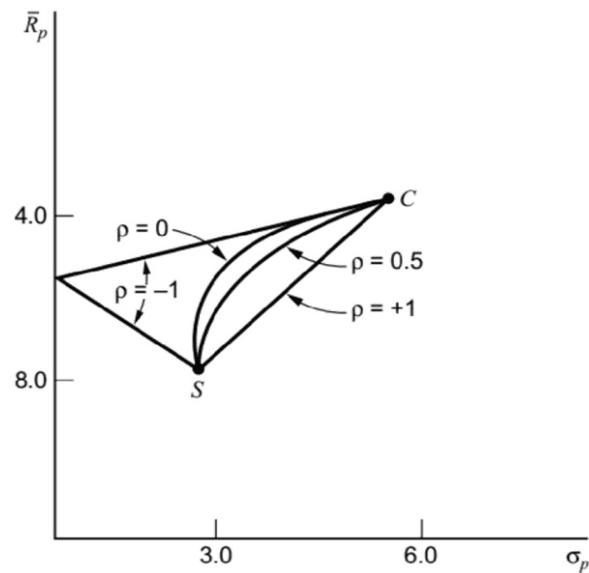


Figura 1

Fonte: <https://www.dedaloinvest.com/education/didattica-investimenti/asset-allocation>

## CAPITOLO 2 – Frontiera efficiente e portafoglio di mercato

[Digitare qui]

Markowitz esplica il prossimo passo facente parte della sua teoria del portafoglio con la determinazione della frontiera efficiente. Si tratta di una curva formata da punti, ognuno dei quali costituisce il miglior portafoglio efficiente in termini di combinazione rischio-rendimento, nonché quello ottimale per l'investitore. Al fine di costruire la frontiera, è necessario però tenere presente che non può risultare efficiente un portafoglio che ne veda presente sul mercato un altro che offra un rendimento più elevato a parità di rischio, oppure un rischio più basso a parità di rendimento.<sup>2</sup>

### Frontiera efficiente dei portafogli

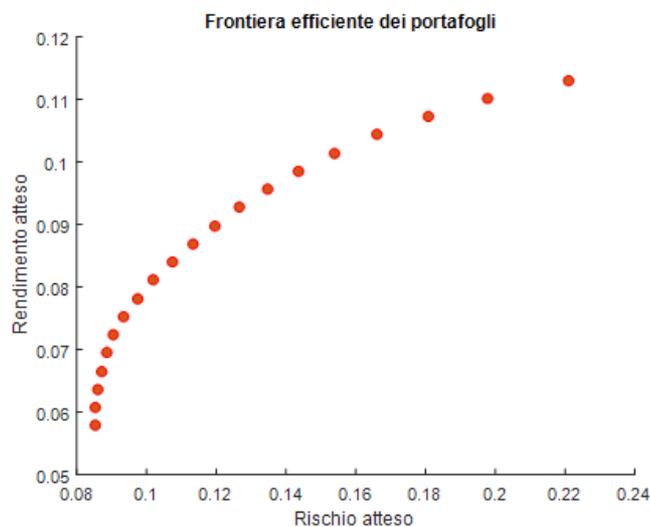


Figura2

Fonte: <https://www.adviseonly.com/economia-e-mercati/economia-politica-e-societa/numeri-caso-la-frontiera-efficiente-e-i-portafogli-creati-da-scimmie-bendate/>

Viene da sé, dunque, la deduzione che la scelta di un portafoglio piuttosto che un altro sia unicamente dovuto alle preferenze individuali dell'investitore: se propenso al rischio, considererà maggiormente i portafogli locati nella parte destra della frontiera, contrariamente alla preferenza alternativa.

---

<sup>2</sup> Danilo Fieni, D. (2020, May 4). *Capital asset pricing model: IL primo modello Di mercato per IL calcolo dell'adeguata remunerazione del rischio ed IL pricing Di titoli azionari*. Finanza e Borsa - Investireoggi.it. <https://www.investireoggi.it/finanza-borsa/capital-asset-pricing-model-il-primo-modello-di-mercato-per-il-calcolo-dell'adeguata-remunerazione-del-rischio-ed-il-pricing-di-titoli-azionari/>

La curva sopracitata non può essere convessa, perché ad un aumento del rischio corrisponde un aumento meno che proporzionale del rendimento. La frontiera è individuata sempre da una curva concava, tranne nel caso si studino solo due titoli (retta).

## 2.2 Capital Market Line

Considerando ora ogni portafoglio come la combinazione di pesi relativi a tutti i titoli presenti sul mercato, l'investitore è nella possibilità di scegliere se investire in un titolo rischioso, privo di rischio, o combinarli considerando unicamente la frontiera efficiente. Data la scelta dell'ultima opzione sopracitata, la frontiera efficiente finora considerata si trasforma in una nuova, che prende il nome di CML (Capital Market Line), linea del mercato dei capitali. Essa consiste in una retta tangente alla vecchia frontiera efficiente (nel suo punto più alto) che ha l'intercetta nell'asse delle ordinate nel rendimento privo di rischio rf.

Frontiera efficiente lineare CML

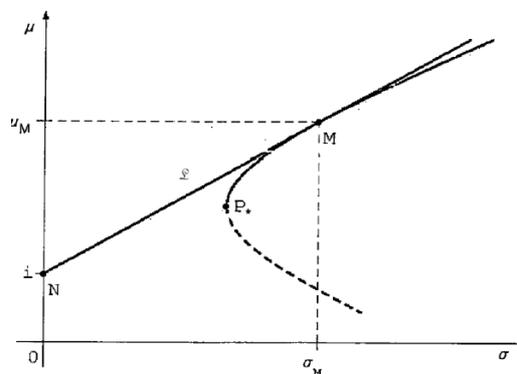


figura3

Fonte: <https://www.investireoggi.it/finanza-borsa/capital-asset-pricing-model-il-primo-modello-di-mercato-per-il-calcolo-delladeguata-remunerazione-del-rischio-ed-il-pricing-di-titoli-azionari/>

La seguente è l'equazione della retta CML.

$$r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \sigma_i \quad (1)$$

In cui:

- $r_i$  è il rendimento di un titolo sul portafoglio  $i$

[Digitare qui]

- $r_f$  è il titolo privo di rischio
- $r_m$  è il rendimento del portafoglio di mercato
- $\sigma_M$  è lo scarto quadratico medio e quindi il rischio totale del portafoglio di mercato, calcolato come la radice quadrata della varianza
- $\sigma_i$  è lo scarto quadratico medio e quindi il rischio totale del titolo considerato, calcolato come radice quadrata della varianza

Considerando ad esempio la combinazione di un titolo a con un titolo b, il rischio totale dell'investimento è individuabile tramite la seguente formula, le "x" con i pedici indicano i pesi che i rispettivi titoli hanno all'interno del portafoglio.

$$\sigma = SQM = \sqrt{x_a^2 \sigma_a^2 + x_b^2 \sigma_b^2 + 2x_a x_b \sigma_{ab}} \quad (2)$$

Il portafoglio di tangenza consiste proprio nel portafoglio individuato in seguito all'investimento in un titolo privo di rischio che si decide di combinare con l'investimento effettuato in vari portafogli rischiosi efficienti. L'importanza di questo portafoglio sta proprio nella possibilità per l'investitore di posizionarsi nel livello più elevato possibile delle combinazioni rischio-rendimento. Il punto M di tangenza tra le due, prende il nome di "portafoglio di mercato", il migliore in termini di combinazione rischio-rendimento qualora l'investitore avesse la possibilità di combinare l'investimento in un titolo rischioso con uno privo di rischio. Gli investitori deterranno dunque, secondo il principio di separazione di Tobin, portafogli costituiti solo da titoli privi di rischio (risk free) e portafoglio di mercato.

L'ipotesi che ci permette di gestire questa complessità e di confermarne la validità effettiva è quella delle aspettative omogenee, proprie dell'investitore cosiddetto "razionale". Il mercato è formato dalle stesse persone e condivide le stesse informazioni, sulla base delle quali tutti si aspettano una certa volatilità, rendimento atteso e correlazione con altri titoli. Se questo vale, la composizione del portafoglio di tangenza e la curva è la stessa per chiunque. Ciò porta chiaramente ad investire nel mercato azionario allo stesso modo ed a considerare l'esistenza del portafoglio di mercato, di nuovo l'unico realmente efficiente perché, contemplando tutti i titoli, massimizza l'effetto di diversificazione. Per essere ancora più chiari, sarà la propensione al rischio il fondamentale movente che porterà l'investitore alla scelta del portafoglio migliore per lui e quindi della posizione più allettante sulla retta tangente al portafoglio di mercato.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Guido Gallico. (2022, May 30). *Conoscere i mercati finanziari: la frontiera efficiente ed i modelli di equilibrio del mercato dei capitali*. AEEE-Italia | Associazione Europea per l'Educazione Economica. <https://www.aceitalia.it/new/wp-content/uploads/2022/05/8.-Frontiera-efficiente-e-modelli-di-equilibrio.pdf>

Il modello media-varianza individuato dalla CML presenta tuttavia gravi limiti, il primo dei quali identificato dal fatto che la CLM contempla unicamente l'investimento nel portafoglio di mercato, non nel singolo titolo. Dovessi infatti immaginare il rischio di un titolo, non posso considerare il titolo come isolato, ma devo considerarne il comportamento all'interno del portafoglio di mercato.

L'agente può posizionarsi sulla retta CML solo investendo sul portafoglio di tangenza, motivo per cui la formula della linea del mercato di capitali vale quando l'oggetto dell'investimento è l'intero portafoglio di mercato.

Parlando in termini pratici, associare il rendimento di un titolo a quello corrispondente allo scarto quadratico medio (ascisse) è sbagliato. Questo perché il sigma dell'equazione sopra riportata, rappresentando il rischio totale a cui l'investimento su quel titolo è sottoposto, non tiene conto dell'effetto di diversificazione. Il rischio totale è dunque il frutto dell'investimento nel portafoglio di mercato; mentre invece il rischio, non in termini di variabilità assoluta, che il mercato riconosce al singolo titolo è calcolato al netto dell'effetto di diversificazione. In questi termini, è importante valutare il rischio alla luce delle variazioni di rendimento del titolo non rispetto a sé stesso (varianza), quanto rispetto alle variazioni del portafoglio di mercato rispetto a cui occorre immaginare il titolo.

È importante dunque considerare come i rendimenti del titolo varino non rispetto a sé stesso, ma rispetto al portafoglio in cui il titolo è inserito. Ciò in quanto all'agente non interessa il rischio complessivo del singolo titolo, ma unicamente il contributo che il rischio complessivo dà al rischio del portafoglio in cui è inserito: rischio sistematico.<sup>4</sup>

### **2.3. Linea caratteristica e coefficiente beta**

Per risolvere questo problema, occorre immaginare la relazione giornaliera, chiaramente mutevole, esistente tra i rendimenti di un titolo  $i$  e del portafoglio di mercato, come rappresentato graficamente di seguito.

---

<sup>4</sup> Aswath Damodaran. (n.d.). *La stima dei parametri del rischio - Evaluation.it*. Analisi fondamentale per gli investimenti - Evaluation.it. <https://www.evaluation.it/teoria-finanza/damodaran/la-stima-dei-parametri-del-rischio/>  
[Digitare qui]

## Linea caratteristica utile all'introduzione della CML

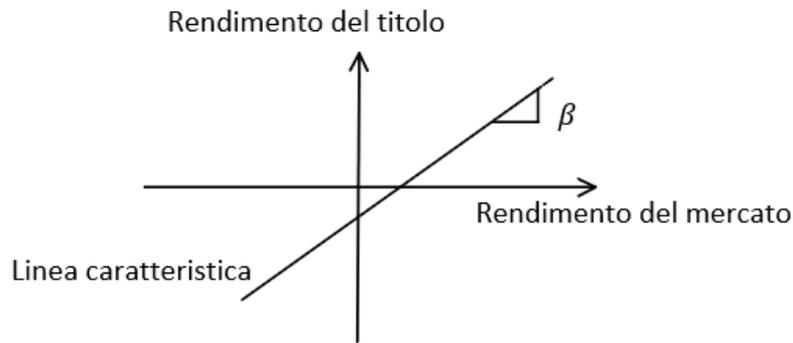


Figura4

Fonte: realizzata da me

La figura4 riporta il rendimento di mercato sull'asse delle ascisse ed il rendimento del singolo titolo sull'asse delle ordinate. La relazione sopra spiegata tra i due rendimenti viene rappresentata da una retta di regressione chiamata "linea caratteristica" il cui coefficiente angolare è rappresentato dal coefficiente  $\beta$ . Quest'ultimo identifica anche la misura del rischio relativo del titolo  $i$  rispetto al mercato, fornendo quindi indicazioni circa il fatto che il titolo sia più o meno rischioso non rispetto a sé stesso, ma rispetto all'andamento di mercato. Il calcolo avviene confrontando la volatilità storica del titolo (informazioni passate) con il mercato.

L'equazione del  $\beta$  è la seguente:

$$\beta_i \equiv \frac{\rho_{i,m}\sigma_i}{\sigma_m} \quad (3)$$

In cui:

- $\rho_{i,m}$  è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti del titolo  $i$  e quelli del portafoglio di mercato  $M$
- $\sigma_i$  è lo scarto quadratico medio dei rendimenti del titolo
- $\sigma_m$  è lo scarto quadratico medio dei rendimenti del portafoglio di mercato

Tuttavia, la stessa equazione può essere scritta in questo modo:

[Digitare qui]

$$\beta_i = \frac{Cov(r_m, r_i)}{Var(r_m)} \quad (4)$$

In cui:

- $r_m$  ed  $r_i$  rappresentano rispettivamente il rendimento del portafoglio di mercato ed il rendimento del singolo titolo  $i$
- $Cov(r_m, r_i)$  è la covarianza tra il titolo  $i$  ed il portafoglio di mercato
- $Var(r_m)$  è la varianza del portafoglio di mercato

Coma sopra citato, il coefficiente  $\beta$  consente la misurazione del rischio sistematico di un titolo, dunque quanto sia effettivamente sensibile il rendimento del titolo. Il rischio sistematico che il  $\beta$  misura è rappresentato da: ciclicità dei ricavi, leva operativa e leva finanziaria, in cui i primi due interessano l'impresa non indebitata (rischio sistematico dei progetti di investimento), mentre l'ultimo riguarda le imprese indebitate.<sup>5</sup>

I valori che il parametro assume identificano diversi significati:

- $\beta_i = 0$

In questo caso si ha a che fare con un titolo risk free, in quanto non vi è correlazione tra titolo e portafoglio di mercato. Tra l'altro, la pressoché indipendenza del titolo dai movimenti di mercato, rende la prevedibilità del rendimento molto difficile da determinare.

- $\beta_i \equiv 1$

È come se si detenesse il portafoglio di mercato, il cui valore di  $\beta$  è per definizione pari ad 1 appunto

- $0 < \beta_i < 1$

Il rendimento di mercato è soggetto, in media, a maggiori variazioni rispetto al rendimento atteso sul titolo.

In particolare, se il titolo presenta un coefficiente minore di 1, è come se venisse continuamente battuto dal mercato e quindi definito “difensivo”; questi titoli esprimono una minore variabilità rispetto al portafoglio di mercato, i cui movimenti tendono ad essere attenuati. In genere, il beta tende ad essere minore di uno specialmente nel trading sulle azioni.

---

<sup>5</sup> Guido Gallico. (2022, May 30). *Conoscere i mercati finanziari: la frontiera efficiente ed i modelli di equilibrio del mercato dei capitali*. AEEE-Italia | Associazione Europea per l'Educazione Economica. <https://www.aeeitalia.it/new/wp-content/uploads/2022/05/8.-Frontiera-efficiente-e-modelli-di-equilibrio.pdf>

Un titolo con un coefficiente maggiore di 1, invece, viene definito “aggressivo”, in quanto il suo tendere ad amplificare i movimenti di mercato gli consente di batterlo. In quest’ultimo caso, il rendimento atteso sul titolo si vede variare maggiormente rispetto al rendimento di mercato. Per questo motivo si ritiene che società con politiche imprenditoriali o con un indebitamento elevato, presentino valori di beta di conseguenza più alti. In particolare, appartenenti a questa categoria sono le azioni delle start-up o delle società tecnologiche.

Il coefficiente in questione, dunque, permette all’investitore di valutare l’effettiva sicurezza dell’investimento, nonché i rendimenti attesi; il suo ruolo, infatti, è osservare le variazioni del mercato e del trend di riferimento per poi comprendere il giusto comportamento da far assumere al titolo di riferimento.

A questo punto, sappiamo che l’investitore razionale tiene effettivamente conto solo del rischio al netto dell’effetto di diversificazione, che però il solo tasso privo di rischio non è chiaramente in grado di coprire. Proprio per questo motivo il mercato finanziario si occupa di offrire all’investitore esposto al rischio del portafoglio di mercato una remunerazione aggiuntiva; si definisce quindi il premio per il rischio, componente essenziale del rendimento del portafoglio di mercato, come differenza tra il rendimento di mercato ed il rendimento del titolo privo di rischio.

Scriviamo quindi il rendimento del portafoglio di mercato come:

$$r_m = r_f + (r_m - r_f) \quad (5)$$

In cui:

- $r_m$  è il rendimento atteso del portafoglio di mercato
- $r_f$  è il rendimento del titolo risk free
- $r_m - r_f$  è il premio per il rischio

Considerando un qualsiasi titolo, il rapporto esistente tra il suo coefficiente  $\beta$  ed il suo rendimento è descritto dalla Security Market Line (SML). Per essere più precisi, si tratta della linea del mercato

azionario che rappresenta l’equilibrio di mercato tra rendimenti e prezzi, individuando una relazione lineare tra rendimento atteso del titolo e coefficiente  $\beta$ . Tale retta appare molto simile alla Capital Market Line, dalla quale però si differenzia per il rapporto che rappresenta: essa presenta sull’asse delle ascisse non il rischio totale  $\delta$ , ma appunto il rischio sistematico ( $\beta$ ). Oltre a questa, altro rilevante punto è il seguente: per quanto riguarda la CML, la relazione rischio-rendimento non vale per i singoli titoli, ma solo per l’investimento effettuato all’interno del portafoglio di mercato combinato per il titolo privo di rischio. Non è dunque utile se

[Digitare qui]

si deve calcolare il rendimento atteso su un determinato titolo di per sé considerato, e che quindi non sia inserito nel portafoglio di mercato. Differentemente si valuta invece la relazione rischio-rendimento nel caso della SML, la quale vale per qualsiasi attività; questo vuol dire che il rendimento atteso di un determinato titolo possa essere calcolato a partire dal suo rischio sistematico  $\beta$ .

La retta della Security Market Line individua l'equazione del Capital Asset Pricing Model, chiave di volta della teoria finanziaria.

## CAPITOLO 3 - Capital Asset Pricing Model

L'equazione che individua la retta CAPM è quindi la seguente:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f) \quad (6)$$

In cui:

- $r_i$  indica il rendimento atteso su un titolo
- $r_f$  corrisponde al rendimento atteso su un titolo privo di rischio
- $\beta_i$  individua il rischio sistematico del titolo scelto
- $r_m - r_f$  è invece la differenza tra il rendimento di mercato ed il rendimento del titolo risk free, nient'altro che il premio per il rischio e quindi l'extra rendimento di mercato.

Capitale umano, attività non finanziarie, ma anche azioni ed obbligazioni è ciò che si può vedere contenuto nel portafoglio di mercato. La grande mole di elementi da cui il portafoglio è composto, non permette di osservarne esattamente la composizione; motivo per cui ci si avvale di proxy del portafoglio di proxy per usare il modello in questione.

Alcune frequentemente usate sono ad esempio S&P/Mib per il mercato italiano o S&P500 per il mercato statunitense, per quanto riguarda gli indici azionari.

### 3.1 Coefficiente alpha di Jensen

Altro coefficiente fondamentale quando si parla di linea del mercato dei capitali è sicuramente  $\alpha$ . L'Alpha di Jensen, spesso indicato come "rendimento in eccesso" o "tasso di rendimento anormale", individua fondamentalmente il rischio specifico legato ad un titolo, e permette di capire come esso vari indipendentemente dal mercato. Il coefficiente alpha è, insieme a deviazione standard, R quadrato, rapporto di Sharpe e coefficiente  $\beta$ , una delle misurazioni statistiche usate nella MPT (teoria del portafoglio moderno). Si può effettivamente parlare di coefficiente alpha nel momento in cui si registra un tasso di rendimento maggiore rispetto a quello che ci si aspettava di registrare basandosi sull'equilibrio nel modello CAPM. L'idea di base su cui il concetto di coefficiente  $\alpha$  si fonda è l'efficienza del mercato; l'interpretazione di alfa è legata alla capacità del manager di generare profitti mediamente maggiori a quelli di mercato, il cui sistematico guadagno non è comunque possibile proprio perché insito nel concetto di mercato efficiente. Graficamente parlando, invece, rappresenta l'intercetta sull'asse delle ordinate della retta di regressione di cui il coefficiente beta è coefficiente angolare.

Il valore che  $\alpha$  assume, inoltre, individua un particolare comportamento del titolo di riferimento; in particolare:

- Nel caso in cui  $\alpha > 0$ , il titolo genera autonomamente un rialzo. Ciò permette di osservare una performance di portafoglio migliore rispetto alle aspettative stabilite a partire dall'osservazione del suo coefficiente  $\beta$ .
- Il manager distrugge valore, invece, quando si registra un  $\alpha < 0$ . In questo caso la performance di portafoglio sembra essere peggiore rispetto alle aspettative con riferimento al suo  $\beta$ .
- Quando  $\alpha = 0$ , allora, il manager ha lasciato il valore del mercato generale invariato. Anche se in realtà, in termini di commissione addebitata da un qualsiasi consulente finanziario quando si gestisce un portafoglio, un alpha pari a zero registra una sorta di perdita netta per l'investitore. Questo accade quando la commissione addebitata dall'investitore è maggiore all'alpha che ha generato.<sup>6</sup>

## CAPITOLO 4 – Lo stesso modello statisticamente osservato

Fino ad ora ho presentato questo modello dal punto di vista finanziario.

---

<sup>6</sup> *sg\_beta*. (n.d.). [Www.grtrends.com](https://www.grtrends.com/sg/sg_beta.html). Retrieved August 17, 2023, from [https://www.grtrends.com/sg/sg\\_beta.html](https://www.grtrends.com/sg/sg_beta.html)

I parametri alfa e beta sono parametri non noti che possono variare da asset ad asset, da fondo a fondo. Per questo motivo, andremo ora ad introdurre i metodi statistici che sappiamo esistere e che possono essere usati per stimare questi due parametri incogniti alfa e beta. Per fare questo si fa una regressione lineare semplice e si presenta il dataset (S&P500 che è la misura del mercato ed Amazon è l'asset di riferimento).

Ho scaricato i dati giornalieri dei prezzi di Amazon dal sito "Yahoo finance" su un foglio Excel, stessa cosa con i prezzi giornalieri dell'indice S&P500, ne ho fatto i rendimenti e la regressione. Il range temporale considerato va dal 20/04/2020 al 20/04/2023.

Nei fogli Excel sopracitati, i dati riportati su ogni colonna analizzano quotazioni giornaliere, prezzo di apertura, massimo, minimo, prezzo di chiusura, prezzo di chiusura aggiustato (che userò nello sviluppo dell'analisi) e volume (quanti titoli sono stati scambiati quel giorno).

Tramite le figure 5 e 6 si svolge l'analisi grafica delle serie dei prezzi di S&P500 e di Amazon, riportando i grafici non stazionari ottenuti dai dati della chiusura aggiustata rispettivamente dei prezzi dello S&P500 e di quelli di Amazon.

## 4.1 Analisi grafica

Grafico non stazionario ottenuto dai valori della chiusura aggiustata dei prezzi di S&P500

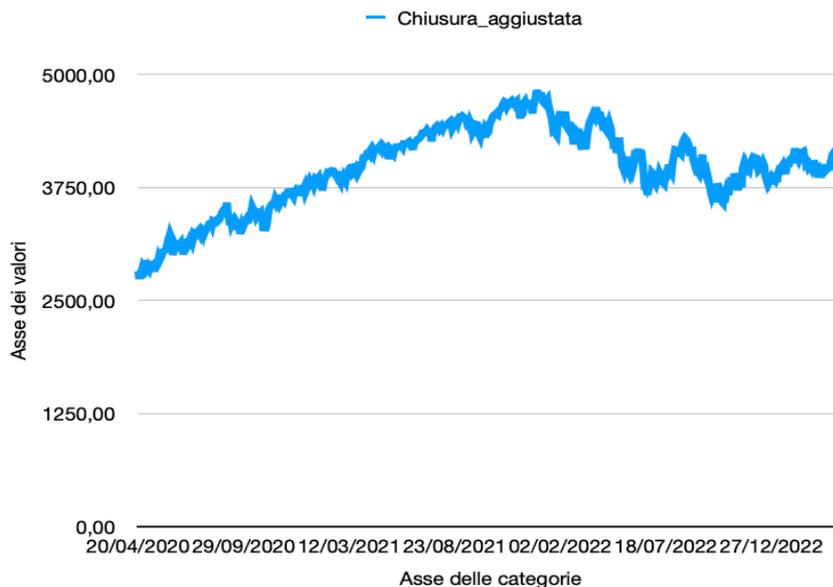


Figura5

Fonte: ottenuta dal foglio Excel di riferimento

Grafico non stazionario ottenuti dai valori della chiusura aggiustata dei prezzi di Amazon

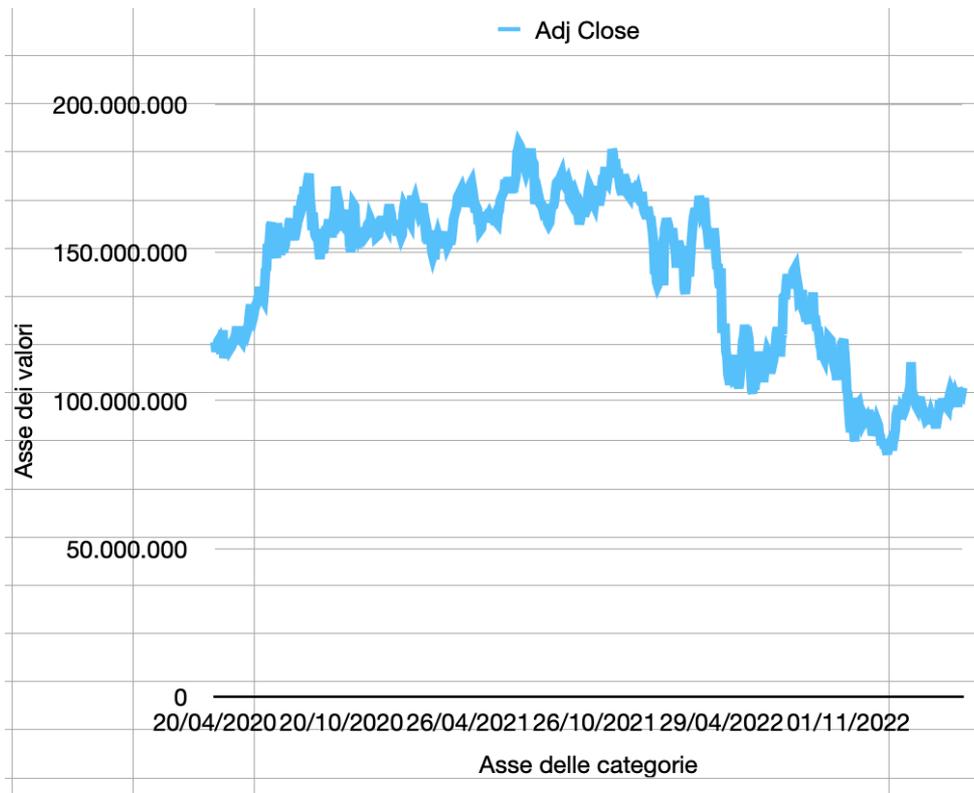


Figura6

Fonte: ottenuta dal foglio Excel di riferimento

## 4.2 Introduzione generale alle serie stocastiche, test DF, ADF, ADFa

Trattando di serie storiche, la assunzione di indipendenza ed identica distribuzione è sostituita da indipendenza nel tempo e da stazionarietà o non stazionarietà. Una serie è stazionaria quando la sua distribuzione (quindi le sue caratteristiche storiche, dunque valore atteso e varianza) non cambia nel tempo.<sup>7</sup>

Importante è sottolineare il principale obiettivo dello studio delle serie storiche: la previsione.

<sup>7</sup> Team, D. S. (2020). Quasi tutto quello che dovete sapere sulle serie temporali. *DATA*

*SCIENCE*. <https://datascience.eu/it/matematica-e-statistica/quasi-tutto-quello-che-dovete-sapere-sulle-serie-temporali/>

Usare il passato per individuare quello che oggi desidero studiare, raggiungibile tramite l'identificazione di caratteristiche stabili.

Lo studio dell'eventuale stazionarietà di una serie storica avviene tramite l'analisi della presenza di un trend o di un break strutturale.

Analisi grafica, correlogramma e test ADF sono i tre metodi utili ad individuare l'esistenza di un eventuale trend.

Quello che userò per identificare la stazionarietà della serie storica in questione è il *TEST DICKEY FULLER*, dunque tramite l'uso di un test di ipotesi, applicato mediante il software statistico Rstudio. Considero quindi un'ipotesi nulla  $H_0$  ed una alternativa  $H_1$ .  $H_0$  ipotizza la non stazionarietà della serie storica e dunque la presenza di una radice unitaria, dalla quale si parte per sviluppare il metodo, e che è vera fino a prova contraria (fino a quando accetto  $H_1$ , dunque radice unitaria e quindi stazionarietà della serie).

L'individuazione di un eventuale trend inizia dall'analisi del random walk, processo non stazionario; in particolare, considero un AR(1), in cui  $Y_t$  è funzione di una costante  $\beta_0$  e del valore  $\beta_1$  del periodo precedente  $Y_{t-1}$ .

A questo punto, se  $\beta_1$  fosse uguale ad 1, il processo AR(1) sarebbe non stazionario. Ciò tuttavia non è sufficiente, in quanto se la serie  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$  è non stazionaria, allora  $\beta_0$  e  $\beta_1$  sono stime distorte ed il trend non può essere valutato.

Inoltre, imporre il coefficiente uguale ad un certo valore, è certamente più comodo se il valore in questione è 0, considerando il calcolo del T-ratio, rispetto all'uso dell'unità.

A questo punto, dunque, uso una procedura alternativa, che implica l'introduzione della differenza prima  $\Delta y_t$  come variabile dipendente e dunque di una scrittura in grado di risolvere i problemi individuati in precedenza, arrivando alla conclusione che anche se  $Y_t$  non è stazionaria, la sua differenza prima lo è.<sup>8</sup>

Nel test ADF, in particolare, occorre stimare il modello che ha la differenza prima come variabile dipendente sul primo ritardo della serie, sviluppare il test di ipotesi e calcolare la statistica t, individuando dunque la regione critica e di accettazione per valutare il rifiuto dell'ipotesi nulla.

---

<sup>8</sup> *Introduzione ai processi stazionari e non stazionari - Investire 2023.* (n.d.). Talking Of

Money. <https://it.talkingofmoney.com/introduction-to-stationary-and-non-stationary-processes>

Il test Augmented Dickey-Fuller consiste in una versione estesa del classico test di cui sopra, consentendo di gestire possibili trend ed eventuale autocorrelazione di dati.

La formula generale usata nel test ADF è la seguente:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_p \Delta Y_{t-p} + u_t \quad (7)$$

In cui:

$\Delta$  indica una differenza finita,  $y_t$  è la serie storica, e  $\Delta Y_t$  identifica la differenza prima

$\beta_0$  è il coefficiente legato al trend analizzato

$\gamma$  è il coefficiente di autocorrelazione

$y_{t-1}$  è il primo ritardo della serie

$\delta$  è il coefficiente di autocorrelazione associato a  $p$  ritardo, uguale a  $\beta_1 - 1$

$u_t$  è l'errore stocastico

A seconda poi del livello di significatività in questione, e dunque dalla serie analizzata, avrò valori critici appositi riferiti a due specificazioni:

- DF con intercetta:  $\Delta Y_t = \beta_0 + \delta Y_{t-1} + u_t$

Quando il trend non è presente.

- DF con intercetta e trend temporale:  $\Delta Y_t = \beta_0 + u_t + \delta Y_{t-1} + u_t$

Quando la serie ha un trend, ad esempio quella del PIL.

## CAPITOLO 5 - Lavoro svolto con Rstudio

Rstudio costituisce l'ultima parte del lavoro di tesi, consistente nell'uso effettivo del test della (non) stazionarietà tramite l'Augmented Dickey Fuller test.

Di seguito, passo dopo passo verranno spiegati i passaggi effettuati ed i comandi usati nel software in questione.

Dopo l'import di entrambi gli asset Amazon e S&P500<sup>9</sup>, "library(tseries)" è stato il primo comando lanciato, utile al richiamo delle funzioni interne al package stesso, il cui contenuto è spiegato all'utilizzatore dal

---

<sup>9</sup> Riportati nel software con il nome di "Amazon\_2" e "S\_P\_500\_2"  
[Digitare qui]

software stesso nella sezione “console”, trattasi dunque di un package per l’installazione di time series per la computazione di dati finanziari<sup>10</sup>.

A questo punto è importante indicare su quali dati svolgere il test ADF. Nel caso in questione, i dati da considerare sono i valori della chiusura aggiustata e del rendimento di entrambi S&P500 ed Amazon.

Considerando `Amazon_2` (nominato in questo modo nella directory di riferimento una volta svolta l’importazione dei dati) come primo dataset e la stazionarietà della serie come ipotesi alternativa, utilizzo il comando che segue per sottoporre ad analisi i valori della chiusura aggiustata dell’asset di riferimento: `“adf.test(Amazon_2$Adj_Close, alternative=“stationary”)”`.

La risposta di Rstudio al comando lanciato in questo caso è riportata in console e consiste nel valore del test Dickey-Fuller pari a -2.9031, nel numero di 9 ritardi che sono stati ritrovati nell’analisi della serie storica, con un p-value di 0.196 ed ipotesi alternativa di stazionarietà.

Stesso discorso vale per i valori della chiusura aggiustata dello S&P500, come spiegato di seguito.

Lo stesso comando, con nomi diversi a seconda del file e della variabile da sottoporre ad analisi<sup>11</sup>, viene lanciata in questo caso. I valori che Rstudio restituisce in console sono -2.0787 per il valore del Dickey-Fuller, 9 ritardi ed il valore del p-value pari a 0.545.

La non stazionarietà delle serie riguardante i valori della chiusura aggiustata dei prezzi di Amazon e di S&P500, può essere chiaramente osservata anche dai grafici riportato in precedenza; nonostante ciò, è il valore del p-value confermare la non stazionarietà della serie.

Assumiamo in questa analisi un livello di significatività comunemente considerato pari a 0.05, ricordandone il significato: il valore del p-value rappresenta la probabilità che i valori più estremi tra quelli osservati possano verificarsi sotto l’ipotesi di non stazionarietà della serie (ipotesi nulla). Avendo in entrambi i casi un p-value maggiore di 0.05, possiamo dunque affermare che non è possibile non rifiutare l’ipotesi nulla. Dunque, le due serie storiche considerate sono non stazionarie, dato il superamento della soglia di significatività.

È interessante a questo punto osservare che considerando i rendimenti di entrambi i file, possiamo decretare la stazionarietà delle due serie storiche analizzate. Il rendimento in questione è calcolato come il logaritmo naturale del rapporto tra il valore della chiusura aggiustata al tempo  $t$  ed il valore della chiusura aggiustata al tempo  $t-1$ .

Occupandomi infatti, stavolta, di un test ADF sul rendimento, è facilmente apprezzabile la stazionarietà della serie, dimostrata graficamente di seguito.

---

<sup>10</sup> In Rstudio è così citato: “*tseries is a package for time series analysis and computational finance*”

<sup>11</sup> Il comando lanciato in Rstudio è: `“adf.test(S_P_500_2$Chiusura_aggiustata, alternative=“stationary”)”`

Grafico stazionario ottenuto dai valori del rendimento dei prezzi di Amazon

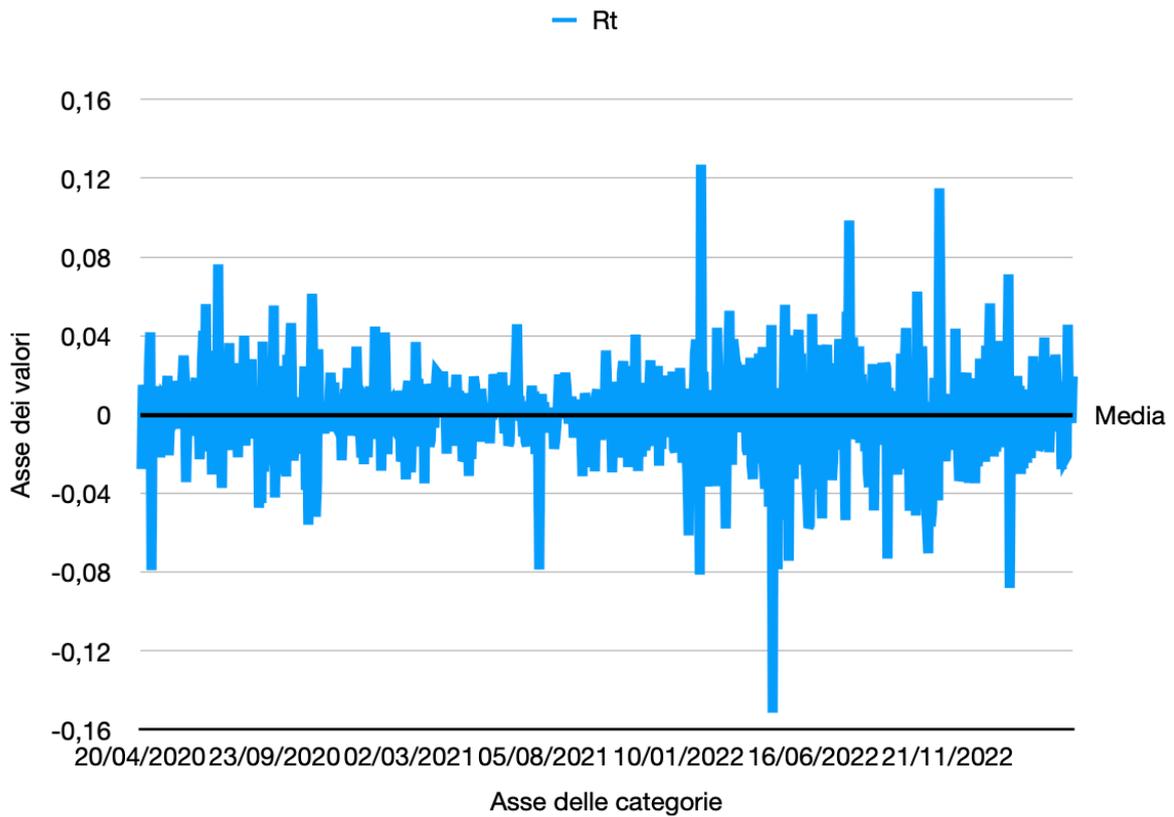


Figura7

Fonte: ottenuta dal foglio Excel di riferimento

Grafico stazionario ottenuto dai valori del rendimento dei prezzi di S&P500

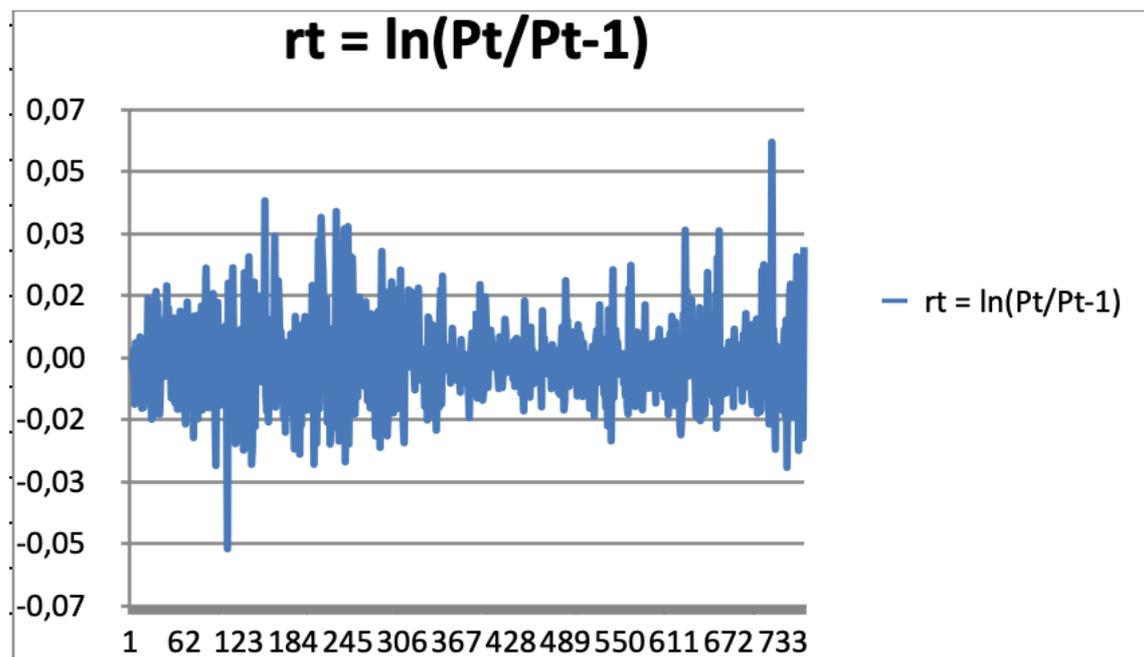


Figura8

Fonte: ottenuta dal foglio Excel di riferimento

## CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato analizzato il modello Capital Asset Pricing Model sia dal punto di vista teorico sia applicandolo. Appunto, l'applicazione dello stesso è avvenuta tramite statistiche econometriche dei dati relativi al titolo azionario Amazon parallelamente studiate con quelle dell'indice S&P500, considerate nel periodo di riferimento (dal 20/04/2020 al 20/04/2023).

Una delle conferme significative di questo studio è emersa nel momento in cui è stato effettuato un test ADF (Augmented Dickey-Fuller) sui prezzi di chiusura aggiustati del titolo Amazon. Il test ha rivelato che la serie storica generata dai prezzi di chiusura non era stazionaria.

Tuttavia, effettuando lo stesso test sui rendimenti del titolo, è stata invece dimostrata la stazionarietà della serie.

Lo stesso risultato è stato poi raggiunto ripetendo il processo con l'indice di riferimento S&P500.

Rilevante è inoltre che questa analisi è stata condotta usando il software Rstudio, il quale ha fornito strumenti necessari per eseguire analisi statistiche sofisticate ed ottenere dunque risultati significativi. Nonostante l'esito dell'analisi fosse già chiaro ad una semplice occhiata ai grafici delle serie storiche generati tramite Excel, l'uso di strumenti statistici effettivi e specializzati software, ha permesso di ottenere risultati quantitativamente robusti, e dunque sostenere conclusioni rigorose ed attendibili.

In definitiva, questa tesi evidenzia l'importanza dei modelli statistici, come il CAPM, in termini di comprensione ed effettiva analisi dei mercati finanziari, tenendo anche a sottolineare l'importanza delle proprietà di una serie storica generata da dati finanziari, come la stazionarietà, al fine di applicare questi modelli in modo efficace e corretto.



## ***Bibliografia***

Aswath Damodaran. (n.d.). *La stima dei parametri del rischio* - Evaluation.it. Analisi fondamentale per gli investimenti - Evaluation.it. <https://www.evaluation.it/teoria-finanza/damodaran/la-stima-dei-parametri-del-rischio/>

Danilo Fieni, D. (2020, April 29). *La moderna teoria del portafoglio spiegata in modo semplice*. Finanza e Borsa - Investireoggi.it. <https://www.investireoggi.it/finanza-borsa/la-moderna-teoria-del-portafoglio-spiegata-in-modo-semplice/>

Guido Gallico. (2022, May 30). *Conoscere i mercati finanziari: la frontiera efficiente ed i modelli di equilibrio del mercato dei capitali*. AEEE-Italia | Associazione Europea per l'Educazione Economica. <https://www.aeeitalia.it/new/wp-content/uploads/2022/05/8.-Frontiera-efficiente-e-modelli-di-equilibrio.pdf>

*Introduzione ai processi stazionari e non stazionari* - Investire 2023. (n.d.). Talkin Go Money. <https://it.talkingofmoney.com/introduction-to-stationary-and-non-stationary-processes>

*sg\_beta*. (n.d.). [Www.grtrends.com](http://www.grtrends.com). Retrieved August 17, 2023, from [https://www.grtrends.com/sg/sg\\_beta.html](https://www.grtrends.com/sg/sg_beta.html)

Team, D. S. (2020). *Quasi tutto quello che dovete sapere sulle serie temporali*. DATA SCIENCE. <https://datascience.eu/it/matematica-e-statistica/quasi-tutto-quello-che-dovete-sapere-sulle-serie-temporali/>

