

LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI  
“LUISS - GUIDO CARLI”

---

**LUISS**

---



DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E FINANZA

Corso di laurea in Economia e Finanza

**OPZIONI SU FUTURES:  
REPLICA DINAMICA**

RELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. EMILIO BARONE

LAUREANDA:  
CHIARA LECCHINI

CORRELATORE:  
CHIARISSIMO PROF. GIACOMO MORELLI

---

ANNO ACCADEMICO 2023-24



# *Indice*

## **Capitolo 1...Introduzione...1**

- 1.1 CME University Trading Challenge...1

## **Capitolo 2...Opzioni su Futures...7**

- Futures call...7*
- Futures put...7*
- 2.1 Aspetti Istituzionali...7
- 2.2 Formula di Black...10
  - Futures Options vs. Spot Options...10*
  - Black vs. Black-Scholes...13*
  - Greche...13*
- 2.3 Volatilità...15
  - Volatilità Storica...15*
  - Volatilità Implicita...18*

## **Capitolo 3...Replica Dinamica...21**

- 3.1 L'Intuizione di Kenneth Arrow...21
- 3.2 La Formalizzazione di Robert C. Merton...23
- 3.3 Delta Hedging...24
  - Annullamento di Gamma e Vega...25*
  - Performance dell'Hedge...28*
  - DerivaGem...28*

## **Capitolo 4...E-mini S&P 500 Futures Options...31**

- 4.1 Specifiche Contrattuali...31
- 4.2 Opzioni Call e Opzioni Put...31
- 4.3 Quale Strike?...32
- 4.4 Superficie di Volatilità...36
  - Volatilità in funzione del delta...36*
  - E-mini S&P500...36*

## **Capitolo 5...Conclusioni...38**

- 5.1 Sintesi dei principali risultati...38
- 5.2 Limiti dello studio...39

## **Riferimenti Bibliografici...42**



# Capitolo 1

## *Introduzione*

Questa tesi trae spunto dalla University Trading Challenge, la competizione organizzata dal CME Group a cui ho partecipato nell'autunno del 2023 (Riquadro 1.1).

### 1.1 CME UNIVERSITY TRADING CHALLENGE

La CME Group University Trading Challenge ([www.cmegroup.com/events/university-trading-challenge.html](http://www.cmegroup.com/events/university-trading-challenge.html)) è una competizione di *trading* elettronico che consente agli studenti di sperimentare l'ambiente decisionale del *trading* in tempo reale. Ai *teams* che si registrano, composti da studenti universitari, viene offerta l'opportunità di negoziare un'ampia gamma di *futures* in una piattaforma fornita da CQG, una società con sede negli Stati Uniti che crea *software* finanziario per il *trading* elettronico.

Il CME Group è il principale mercato di derivati al mondo. È composto da quattro borse:

- CME (Chicago Mercantile Exchange);
- CBOT (Chicago Board of Trade);
- NYMEX (New York Mercantile Exchange);
- COMEX (Commodity Exchange).

Il CME Globex è il principale sistema di *trading* utilizzato dal CME Group. Fornisce l'accesso, 24 ore su 24, ai mercati globali. Consente di visualizzare il «libro-ordini» (*order book*), con le quotazioni in tempo reale, e di inserire direttamente i propri ordini di acquisto e di vendita. È aperto dalla domenica al venerdì, senza vincoli di confini geografici o di fusi orari.

I contratti negoziati presso il CME Group sono principalmente *futures* e opzioni, ma vengono trattati anche *forwards* e *swaps*. Le «attività sottostanti» (*underlying assets*) possono essere raggruppate in 9 categorie:

- Agriculture
- Cryptocurrencies
- Energy
- Equities
- FX
- Interest Rate
- Metals
- Real Estate
- Weather

**Riquadro 1.1** CME Group: University Trading Challenge.

CHICAGO, 30 novembre 2023 /PRNewswire/ -- CME Group, il principale mercato mondiale dei derivati, ha annunciato oggi i vincitori della 20a edizione della University Trading Challenge. La classifica è guidata dalla Universidad De Guadalajara, in Messico. Per la quarta volta consecutiva la competizione è stata vinta da una squadra dell'America Latina e per la seconda volta consecutiva da una squadra messicana.

20 <sup>th</sup> Annual CME Group University Trading Challenge Winners		
Team Position	University Name	Country
First Place	Universidad De Guadalajara	Mexico
Second Place	Christopher Newport University	United States
Third Place	University of Colorado	United States
Fourth Place	Georgia Institute of Technology	United States
Fifth Place	Universidad de Medellin	Colombia

La competizione di quest'anno si è svolta in quattro settimane e ha coinvolto più di 400 squadre provenienti da 24 Paesi. I 1.865 studenti che hanno partecipato rappresentavano 156 università di tutto il mondo.

Gli studenti hanno imparato a negoziare *futures* su prodotti agricoli, energetici, metalli, indici azionari, tassi d'interesse e valute utilizzando la piattaforma di *trading* elettronico (simulato e in tempo reale) di CQG. Durante la sfida, gli studenti hanno ricevuto aggiornamenti di mercato in tempo reale tramite i canali di Dow Jones e di Hightower Report.

“Ci congratuliamo con gli studenti di tutto il mondo che hanno partecipato alla nostra 20a sfida di trading universitario”, ha affermato Anita Liskey, CME Group Senior Managing Director of Global Brand Marketing and Communications. “Nell’odierna economia globale, la gestione del rischio è più importante che mai e la University Trading Challenge del CME Group offre alle prossime generazioni di *traders* e *risk managers* un’opportunità unica per esplorare il mondo del *trading* e sviluppare le competenze di cui avranno bisogno per le loro future carriere in finanza.”

“Congratulazioni a tutti i vincitori e ai partecipanti alla University Trading Challenge di quest’anno”, ha affermato Pat Kenny, SVP of Client Relations presso CQG. “CQG continua a impegnarsi nell’educare le prossime generazioni di *traders* su derivati. La competizione offre agli studenti l’opportunità unica di prendere decisioni di *trading* basate sui dati in tempo reale del CME Group, sulle analisi di CQG, sui commenti e sulle notizie in tempo reale di Dow Jones, e mandate in esecuzione con la tecnologia di indirizzamento sviluppata da CQG.”

“La University Trading Challenge del CME Group motiva gli studenti e apre le loro menti a immense opportunità”, ha affermato Maf. Luis Nicolau, specialista in strumenti finanziari derivati presso la Universidad De Guadalajara. “Siamo orgogliosi dei nostri studenti che hanno partecipato alla sfida di quest’anno e siamo grati al CME Group per aver invitato a partecipare gli studenti di tutto il mondo.”

Gli studenti delle prime cinque squadre vincitrici ricevono premi in denaro, se idonei, e tutti i partecipanti alla sfida di *trading* di quest’anno sono invitati a partecipare a un esclusivo evento di formazione che si terrà, dal vivo, il 4 dicembre.

Il CME Group offre un’ampia gamma di corsi di formazione sulla gestione del rischio, compreso il suo CME Institute Education Hub, che offre corsi *online*, *webinars* e video sul *trading* di *futures* e opzioni, nonché un simulatore di *trading*.

Il CME Group collabora con altre organizzazioni del settore per offrire strumenti educativi, come *Futures Fundamentals*, una risorsa educativa unica per aiutare gli studenti di tutti i livelli a comprendere i mercati dei *futures* e il ruolo che svolgono nella vita di tutti i giorni.

Fonte: CME Group.

**TAVOLA 1.1** CME Group: principali contratti *futures*.

#	Asset Class	Futures	Yahoo Code
1	Agriculture	Corn Futures	ZC=F
2		Soybean Futures	ZS=F
3		Soybean Meal Futures	ZM=F
4		Soybean Oil Futures	ZL=F
5		Chicago SRW Wheat Futures	ZW=F
6		Live Cattle Futures	LE=F
7		Lean Hog Futures	HE=F
8		KC HRW Wheat Futures	KE=F
9		Feeder Cattle Futures	GF=F
10	Cryptocurrencies	Bitcoin Futures	BTC=F
11		Ether Futures	ETH=F
12	Energy	Crude Oil Futures	CL=F
13		Henry Hub Natural Gas Futures	NG=F
14		RBOB Gasoline Futures	RB=F
15		NY Harbor ULSD Futures	HO=F
16	Equities	E-mini S&P 500 Futures	ES=F
17		E-mini Russell 2000 Index Futures	RTY=F
18		E-mini Nasdaq-100 Futures	NQ=F
19		E-mini Dow Jones Industrial Average Index Futures	YM=F
20	FX	Euro FX Futures	6E=F
21		Japanese Yen Futures	6J=F
22		Mexican Peso Futures	6M=F
23		British Pound Futures	6B=F
24		Australian Dollar Futures	6A=F
25		Canadian Dollar Futures	6C=F
26		New Zealand Dollar Futures	6N=F
27		Swiss Franc Futures	6S=F
28		Brazilian Real Futures	6L=F
29		South African Rand Futures	6Z=F
30	Interest Rate	5-Year T-Note Futures	ZF=F
31		10-Year T-Note Futures	ZN=F
32		2-Year T-Note Futures	ZT=F
33		Ultra 10-Year U.S. Treasury Note Futures	TN=F
34		30 Day Federal Funds Futures	ZQ=F
35		U.S. Treasury Bond Futures	ZB=F
36	Metals	Gold Futures	GC=F
37		Copper Futures	HG=F
38		Silver Futures	SI=F
39		Platinum Futures	PL=F
40		Palladium Futures	PA=F

La Tavola 1.1 riporta i principali contratti *futures* trattati al CME Group.



Figura 1.1 2023 CME Group University Trading Challenge.

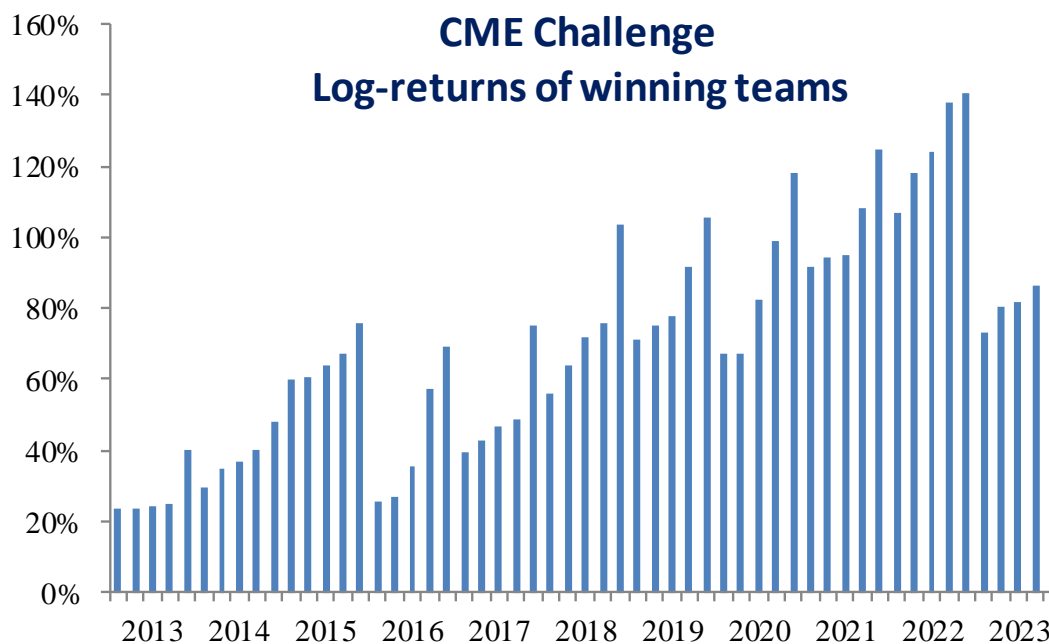
**2023 CME GROUP UNIVERSITY TRADING CHALLENGE PARTICIPATING UNIVERSITIES**

<b>Canada</b>	University of British Columbia University of Toronto University of Waterloo	<b>Mongolia</b>	University of Finance and Economics, Mongolia	<b>Engineering</b>	Rutgers University Stevens Institute of Technology Texas A&M University The University of Chicago The University of Iowa The University of Texas at Dallas The Wharton School, University of Pennsylvania Thunderbird School of Global Management, ASU UC Berkeley University of Indianapolis University of Bridgeport University of Georgia University of New Mexico - Albuquerque University of North Carolina at Charlotte University of Pennsylvania University of Texas at Austin Yale University State University Boston College California Polytechnic State University - San Luis Obispo California State University East Bay Chapman College Christopher Newport University Clark Summit University Cornell University CUNY Brooklyn College CUNY College of Staten Island Dalton State College Lamont College Econ University Georgetown University Georgia Institute of Technology Illinois Institute of Technology Indiana University-Purdue University Indianapolis Kansas State University Louisiana State University Loyola University Chicago Marquette College Messiah University Missouri S&T Morehead State University Montclair State University New York University North Carolina Old Dominion State University Penn State Abington Purdue University Roosevelt University South Dakota State	<b>Southern Illinois University</b> Carbondale Southern Illinois University Springfield Suffolk University The College of New Jersey The Ohio State University Tulane University Truman State University UC Berkeley UNC Chapel Hill University of Austin at Texas University of Bridgeport University of Colorado University of Detroit Mercy University of Georgia University of Hartford University of Idaho University of Illinois University of Iowa University of Maine University of Massachusetts Lowell University of Memphis University of New Mexico University of North Carolina at Charlotte University of North Carolina at Chapel Hill University of Oklahoma University of South Alabama Virginia Tech Washington University in St. Louis Western Michigan University	
<b>China</b>	Georgia Institute of Technology	<b>Peru</b>	Universidad Nacional Mayor de San Marcos	<b>Switzerland</b>	HEC Lausanne	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of
<b>Colombia</b>	Aspa Andino University Universidad Jorge Tadeo Lozano Politecnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid Sergio Arboleda Universidad de Antioquia Universidad de Medellin Universidad EA Universidad Jorge Tadeo Lozano	<b>Spain</b>	Universidad Politecnica de Madrid UPM IE University	<b>Turkey</b>	Istanbul University	<b>United Kingdom</b>	Sheffield Hallam University Swansea University University of Birmingham University of Bristol Edison College Birmingham City University King's College London London School of Economics University of Leeds University of London University of Manchester University of Strathclyde
<b>Denmark</b>	Aalborg University Business School	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Ecuador</b>	Universidad San Francisco de Quito	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>France</b>	ESLSCA Business School University of Bordeaux ECE Paris	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Germany</b>	University of Stuttgart Frankfurt School of Finance & Management	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Hong Kong</b>	City University of Hong Kong HKUST Hong Kong University of Science and Technology University of Hong Kong	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>India</b>	IT-HARASPUR KES institute college Indian Institute of Technology Wharodpur Indian Institute of Technology Borjibori	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Ireland</b>	Dublin City University	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Italy</b>	Luiss Guido Carli University of Rome	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Korea</b>	Pukyong National University	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		
<b>Mexico</b>	Autonoma Queretaro CITEA CUSUR Escuela Bancaria y Comercial Instituto Politecnico Nacional Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO) ITESO Tec de Monterrey	<b>Ukraine</b>	Ivan Franko National University of Lviv	<b>United States</b>	Baruch College, City University of New York California State University East Bay Carnegie Mellon University Clark Summit University Cornell University Duke University Florida University George Mason University Illinois Institute of Technology Indiana University South Bend Johns Hopkins University Kansas State University Marquette College MIT Norwich College NYU Tandon School of		

Figura 1.2 2023 CME Group University Trading Challenge: Università Partecipanti.

L'ultima CME Group University Trading Challenge si è svolta in 4 settimane, da domenica 1° ottobre 2023 a venerdì 27 ottobre 2023. Vi hanno partecipato 413 teams in rappresentanza di 156 università con sedi in 24 Paesi (Figura 1.1). In totale, gli studenti partecipanti sono stati 1,865. La Luiss è stata l'unica università italiana (Figura 1.2).





**Figura 1.3** CME Group University Trading Challenge: Performance (2013-2023).

Le squadre erano composte da 3-5 studenti (tutti triennali o tutti magistrali). Le squadre che si sono classificate ai primi 5 posti hanno ricevuto premi in denari pari a \$ 2.000; \$ 1.500; \$ 1.000; \$ 750; \$ 500 per studente.

La *performance* realizzata nelle ultime competizioni dalle prime 5 squadre in classifica è illustrata nella Figura 1.3. Si tratta di risultati “brillanti”, ottenuti nell’arco di 4 settimane seguendo strategie estremamente “aggressive”.

La Luiss ha partecipato all’ultima competizione con 19 squadre. Il capitale iniziale era di \$500.000. Il «saldo finale» (*final balance*) è riportato nella Tavola 1.2.

Io sono stata il *team leader* del Luiss Blue Team. I miei *teammates* sono stati Alessia Scozzi, Salvatore Alessio Franzese, Pasquale Bifulco e Gianluca Gricia ([https://docs.google.com/spreadsheets/d/1KEWegwwgbCXRsyR3rVb\\_M6kyEvj6DwF7drbEcxcH5kQ/edit#gid=1400401](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1KEWegwwgbCXRsyR3rVb_M6kyEvj6DwF7drbEcxcH5kQ/edit#gid=1400401)).

Il nostro *final balance* è stato pari a \$653.282,13 per un *log return* pari al 26,74%. Abbiamo quindi ottenuto il 44-esimo posto in classifica (su 413 *teams*).

In quanto *traders* alle prime armi, la nostra preparazione è consistita principalmente nel familiarizzare con la piattaforma CME e con gli *asset* su cui avremmo operato durante l’intero mese successivo. Abbiamo studiato le caratteristiche principali dei *futures* in gara e praticato diverse transazioni sul simulatore di mercato, affidandoci ai consigli di ex studenti LUISS e alle notizie sui mercati.

Abbiamo iniziato la gara aprendo posizioni per strategie a lungo termine. In particolare, una posizione corta sui *futures* scritti sul palladio con consegna a dicembre 2023 (PAEZ23) ci ha dato un iniziale vantaggio e ha fatto da “cuscinetto” assorbendo le ingenti perdite subite nella parte finale della competizione.

<b>TAVOLA 1.2</b> 2023 CME Group University Trading Challenge   Final Balance		
<i>Rank</i>	<i>Team Name</i>	<i>Balance</i>
44	Luiss Blue Team	\$653,282.13
47	Luiss A Team	\$643,735.50
53	Luiss Blue Medallion	\$622,541.80
97	Luiss Blue BarOne	\$529,312.33
132	Luiss Blue Chips	\$498,549.90
141	Luiss Blue Orca	\$492,790.00
169	Luiss Blue Opliti	\$482,925.00
183	Luiss Blue Orchid	\$481,825.00
191	Luiss Blue Sky	\$481,000.00
191	Luiss Blue Win	\$481,000.00
296	Luiss Blue Esperia	\$473,695.38
304	Luiss Blue Serendipity	\$470,375.00
307	Luiss Blue Bears	\$469,001.25
332	Luiss Blue Octopus	\$440,564.16
356	Luiss Blue Wolves	\$396,246.75
358	Luiss Blue Bye Buy	\$390,128.70
368	Luiss Blue Morgan	\$368,574.75
399	Luiss Blue Bulls	\$243,950.00
401	Luiss Blue Wolves Stark	\$231,221.20

La scelta del palladio è stata il risultato di un'analisi storica dei suoi prezzi; rispetto ad altri metalli, si è dimostrato altamente più volatile. Volevamo infatti avvalerci di titoli relativamente più rischiosi per massimizzare eventuali guadagni, e il palladio si presentava come un ottimo candidato. La sua domanda, inversamente correlata alla diffusione delle auto elettriche (essendo il palladio uno dei principali componenti dei convertitori catalitici utilizzati per ridurre le emissioni inquinanti delle auto a benzina), aveva buone prospettive di ribasso in un contesto di crescente diffusione dei veicoli elettrici. Per soddisfare i criteri minimi riguardo al numero di transazioni da effettuare ogni giorno, abbiamo anche implementato strategie a brevissimo termine, basate principalmente su analisi tecnica e speculazione. Queste brevi transazioni hanno aumentato la nostra familiarità con la piattaforma, permettendoci di costruire un portafoglio eterogeneo. Tuttavia, una posizione sfortunata sul petrolio grezzo, aperta poco dopo l'inizio del conflitto in Gaza, ha eliminato tutti i nostri guadagni, rendendo il resto della competizione una corsa per minimizzare le perdite.

Questo elaborato si propone di sviluppare strategie più efficienti da attuare in gara, che minimizzino le perdite e sfruttino al meglio le opportunità di mercato.

## Capitolo 2

# Opzioni su Futures

Com'è noto, le opzioni sono contratti che concedono al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare (*call*) o di vendere (*put*) un'attività a una certa data (o entro una certa data), a un prezzo prestabilito (*strike* dell'opzione). Le «opzioni su contratti *futures*» (*futures options*) si distinguono dalle «opzioni su contratti a pronti» (*spot options*) dato che, per quest'ultime, la consegna del bene sottostante avviene al momento dell'esercizio dell'opzione, mentre per le prime la data di esercizio non coincide con la data di consegna. Al momento dell'esercizio di una *futures option*, il possessore riceve un contratto *futures* (lungo o corto a seconda del tipo di opzione) con scadenza e prezzo predefiniti. È a quel prezzo che egli, a termine del contratto, comprerà o venderà il bene sottostante, anche se solitamente i *traders* non mantengono la posizione aperta fino alla fine.

### Futures call

Se il prezzo di liquidazione del contratto *futures* è più alto dello *strike* dell'opzione, il compratore esercita l'opzione e riceve una posizione lunga sul *futures*, più un compenso pari alla differenza tra prezzo di acquisto del *futures* e lo *strike* dell'opzione. Nel caso in cui il possessore volesse immediatamente chiudere la propria posizione, a tale ammontare si aggiungerebbe il guadagno vero e proprio sul *futures*, cioè la differenza tra il prezzo *futures* e il prezzo di acquisto. Il *payoff* effettivo di una *futures call* è quindi pari a:

$$\max(0, F_T - K) \quad (2.1)$$

dove  $F_T$  è il prezzo del *futures* con scadenza  $T$  e  $K$  è lo *strike*.

### Futures put

In questo caso, il possessore della *put* esercita l'opzione se il prezzo di liquidazione del *futures* è sufficientemente più basso dello *strike* dell'opzione. Per le stesse motivazioni discusse nel punto precedente, il *payoff* effettivo di una *futures put* è pari a:<sup>1</sup>

$$\max(0, K - F_T) \quad (2.2)$$

## 2.1 ASPETTI ISTITUZIONALI

Uno degli aspetti più affascinanti del trading di *futures* è il fatto che alla base ci siano strumenti estremamente semplici, così semplici da essere stati parte della vita dell'uomo per secoli. La loro storia

---

<sup>1</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, pp. 397-398.

parte dall'agricoltore, magari analfabeta, che per proteggersi dalle fluttuazioni di prezzo dei suoi prodotti stipulava accordi con i mercanti su prezzo di vendita e data di consegna, per arrivare a oggi, dove comprare o vendere contratti *futures* è tanto semplice come ordinare una pizza *online* e pagare il fattorino alla consegna.<sup>2</sup>

Pare quindi incredibile, considerata la storia di questi derivati, che gli esperti del settore dedichino l'intera estensione della propria carriera a studiarli e che il frutto di tali studi – accompagnato dalle esigenze economiche e dai costumi moderni – abbia portato a un mercato da più di cento miliardi di scambi all'anno.<sup>3</sup>

Alla base di questo vasto fenomeno c'è la regolamentazione dei mercati finanziari. L'origine dei *futures* e delle opzioni sui *futures* risale al XIX secolo, quando i coltivatori di cereali sentirono la necessità di centralizzare i loro scambi in un unico mercato. Il Chicago Board of Trade (CBOT) fu quindi fondato il 3 aprile 1848 e quasi immediatamente iniziarono le negoziazioni dei contratti *futures* o *to arrive*.<sup>4</sup>

Il successo del CBOT aprì la strada a ulteriori innovazioni, e nel 1919 fu fondato il Chicago Butter and Egg Board, che, nel 1961, si trasformò in Chicago Mercantile Exchange (CME).

Negli anni, il CME ha ampliato la sua offerta e migliorato le proprie capacità, lanciando le opzioni sui *futures* nel 1982 e permettendo così agli investitori di adottare strategie di *trading* più flessibili e avanzate. Queste innovazioni hanno consolidato la posizione del CME come *leader* mondiale nei mercati dei derivati. Oltre a essere un *hub* centrale per il *trading* di *futures*, ha sviluppato piattaforme di *trading* elettronico e servizi che hanno reso le negoziazioni più accessibili ed efficienti a livello globale.

Nei mercati regolamentati, *futures* e opzioni su *futures* sono soggetti a un insieme rigoroso di norme e regolamenti progettati per garantire la trasparenza, l'equità e la sicurezza delle transazioni. A noi, in particolare, interessa la regolamentazione relativa ai prezzi *futures*. La principale distinzione tra *forwards* e *futures*, entrambi costruiti sulle stesse premesse, risiede nella loro struttura e nella modalità di scambio. Difatti, i contratti *futures* sono standardizzati e, a differenza dei *forwards*, sono scambiati su borse regolamentate come il CME Group. Ad esempio, i *futures* sul grano del CME sono scritti su 5.000 *bushels* (stai), e la loro quotazione corrisponde a centesimi di dollaro per stajo.<sup>5</sup> Allo stesso modo, spostandoci sui *futures* su indici azionari, i contratti sul NASDAQ-100 (E-mini Nasdaq-100) trattati su CME sono tali che una variazione unitaria dell'indice comporta una variazione di \$20 del valore del contratto.<sup>6</sup>

---

<sup>2</sup> «Se avete mai ordinato una pizza con consegna a domicilio, avete comprato un *forward* con scadenza – verosimilmente – molto breve.» Cfr. RUBINSTEIN, M., *Derivati - Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, 2005, p. 28.

<sup>3</sup> Futures Industry Association (FIA), "Global futures and options volume hits record 137 billion contracts in 2023", 19 January 2024. Cfr. <https://www.fia.org/fia/articles/global-futures-and-options-volume-hits-record-137-billion-contracts-2023>.

<sup>4</sup> Commodity Futures Trading Commission (CFTC), "History of the CFTC". Cfr. [https://www.cftc.gov/About/HistoryoftheCFTC/history\\_precftc.html](https://www.cftc.gov/About/HistoryoftheCFTC/history_precftc.html).

<sup>5</sup> CME Group, "Corn Overview". Cfr. <https://www.cmegroup.com/markets/agriculture/grains/corn.html>.

<sup>6</sup> CME Group, "E-Mini Nasdaq-100 Overview". Cfr. <https://www.cmegroup.com/markets/equities/nasdaq/e-mini-nasdaq-100.html>.

ASSET CLASS	PRODUCT	OPTION					UNDERLYING FUTURES		
		CVOL	CHG	VOLUME	OI	OI CHG	PRICE	\$ CHG	VOLUME
Equity Index >	E-mini S&P 500 (ES ES)	10.95% *	0.00	82,167	6,494,999	419,047	\$5364.25	-\$1.75	57,849
	E-mini NASDAQ 100 (NQ NQ)	15.33% *	0.00	10,129	221,109	20,829	\$19086.75	\$12.50	37,431
Interest Rates >	3M SOFR (SR3 SR3)	78.1377%	0.00	13	41,191,110	640,500	\$94.6675	-\$0.0050	424,533
	10 Yr (TY TY)	7.2620%	0.19	47,949	3,449,620	297,300	\$110.21875	-\$0.078125	205,524
	30 Yr (US US)	13.4842%	0.16	3,828	903,834	76,020	\$119.125	-\$0.125	34,943
FX >	EUR/USD (EUU 6E)	5.6508%	0.00	459	311,171	-9,174	\$1.0886	\$0.00045	45,787
	GBP/USD (GBU 6B)	6.5746%	0.00	2	184,801	50,075	\$1.2793	-\$0.0001	14,718
	JPY/USD (JPU 6J)	9.5642%	0.00	829	185,998	9,654	\$0.006411	-\$0.000075	54,830
Cryptocurrencies >	Bitcoin (BTC BTC)	56.45% *	0.00	10	5,999	303	\$71490	-\$400	635
Energy >	WTI (LO CL)	27.0190%	0.00	9,400	2,251,995	64,730	\$74.75	\$0.60	54,910
	Nat Gas (LNING)	78.7754%	0.00	617	4,119,801	43,856	\$2.749	-\$0.000	8,807
	Brent FSO (BZO BZ)	24.52% *	0.00	0	20,917	13,912	\$77.24	\$0.45	5,157
Agriculture >	Corn (OZC ZC)	28.2693%	0.00	5,831	1,456,618	26,095	\$443.5	\$4.25	22,721
	SRW Wheat (OZW ZW)	38.6031%	0.00	1,507	319,831	14,205	\$646.75	\$0.00	7,400
	Soybeans (OZS ZS)	19.0494%	0.00	5,232	830,503	29,141	\$1182.5	\$5.25	25,627
Metals >	Gold (OG GC)	15.0048%	0.00	10,902	1,026,113	22,815	\$2382.7	\$7.2	47,546
	Silver (SO SI)	36.8681%	0.00	6,325	200,298	57,716	\$30.45	\$0.377	25,576
	Copper (HXE HG)	31.2397%	0.00	500	206,684	9,126	\$4.629	\$0.023	15,573

\*QuikStrike Implied Volatility estimate from highest Open Interest expiration. Data provided by QuikStrike.

**Figura 2.1** CME Group: Futures Options (6 giugno 2024).<sup>7</sup>

I prezzi dei *futures* sono anche soggetti ad “aggancio al mercato” (*marking-to-market*): ogni giorno, i profitti e le perdite vengono contabilizzati nei conti dei *traders*, riflettendo le variazioni del prezzo *futures* rispetto al prezzo di chiusura del giorno precedente.<sup>8</sup> La CME Clearing, *clearing house* del CME Group, richiede inoltre un margine iniziale per aprire posizioni su *futures* e opzioni su *futures*. Il margine iniziale fa da garanzia per eventuali perdite. Durante il periodo di vita del contratto, è necessario mantenere un margine di mantenimento minimo. Dovesse la *performance* del titolo compromettere tale margine, il *trader* ha l’obbligo di depositare ulteriori fondi, pena la liquidazione della posizione. Questo limita la libertà del *trader*, che potrebbe non avere la possibilità di aprire ulteriori posizioni o essere costretto a liquidare posizioni già aperte.<sup>9</sup>

La Figura 2.1 riporta un estratto delle quotazioni delle *futures options* negoziate al CME Group.

<sup>7</sup> CME Group, “Options on Futures”, Cfr. <https://www.cmegroup.com/markets/options.html#market-activity>.

<sup>8</sup> Per un’analisi delle differenze tra *forwards* e *futures* si veda RUBINSTEIN, M. (2005). *Derivati - Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, pp. 94-99.

<sup>9</sup> CME Group, “Margin: Know What’s Needed”. Cfr. <https://www.cmegroup.com/education/courses/introduction-to-futures/margin-know-what-is-needed.html>.

## 2.2 FORMULA DI BLACK

Una parte importante dell'analisi dei derivati è la loro valutazione. Quando valutiamo i derivati siamo in un mondo neutrale al rischio, in quanto le aspettative dei consumatori hanno effetto solo sull'*asset* sottostante. Le leggi che legano un derivato al suo sottostante rimangono difatti inalterate, e quindi gli scostamenti dal suo prezzo effettivo vengono annullati tramite operazioni di arbitraggio.<sup>10</sup>

La formula Black-Scholes è l'espressione per il «prezzo di non arbitraggio» (*no-arbitrage price*) di una *call* europea scritta sul prezzo *spot* di un titolo che non paga dividendi.<sup>11</sup>

Se indichiamo con

$S_0$  il prezzo *spot* del sottostante,

$K$  lo *strike* dell'opzione,

$T$  la vita residua dell'opzione,

$r$  il tasso d'interesse privo di rischio,

$\sigma$  la volatilità del sottostante,

la formula per una *call* europea, scritta sul prezzo *spot* di un titolo che non paga dividendi è

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.3)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.4)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (2.5)$$

La formula per la corrispondente *put* europea, facilmente ricavabile attraverso la *put-call parity*, è invece la seguente:

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (2.6)$$

### Futures Options vs. Spot Options

Le opzioni su *futures* hanno lo stesso comportamento delle opzioni scritte sul prezzo *spot* di un titolo con *dividend yield* pari al tasso d'interesse privo di rischio.<sup>12</sup>

Questa affermazione può essere dimostrata formalmente ricavando l'equazione differenziale per i derivati scritti sul prezzo *futures* di un titolo per poi metterla a confronto con l'equazione differenziale per i derivati scritti sul prezzo *spot* di un titolo con *dividend yield* noto,  $q$ .<sup>13</sup>

<sup>10</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, p. 279-280.

<sup>11</sup> BLACK, F., and SCHOLES, M., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654, 1973.

<sup>12</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, p. 403-404.

<sup>13</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, p. 338-339.

Nel modello Black-Scholes-Merton sia il prezzo *futures* sia il prezzo *spot*,  $S$ , di un titolo con *dividend yield* noto,  $q$ , seguono un particolare processo di Itô, il cosiddetto “moto geometrico Browniano”:<sup>14</sup>

$$dF = \mu F dt + \sigma F dz \quad (2.7)$$

$$dS = (r - q) S dt + \sigma S dz. \quad (2.8)$$

Il valore dei derivati scritti sul titolo è funzione del prezzo *spot* e del tempo  $t$ . In base al Lemma di Itô si ha:<sup>15</sup>

$$df_F = \left( \frac{\partial f_F}{\partial F} \mu F + \frac{\partial f_F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_F}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 \right) dt + \frac{\partial f_F}{\partial F} \sigma F dz. \quad (2.9)$$

$$df_S = \left( \frac{\partial f_S}{\partial S} (r - q) S + \frac{\partial f_S}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f_S}{\partial S} \sigma S dz. \quad (2.10)$$

Il processo di Wiener,  $dz$ , che rappresenta la parte stocastica del processo, è lo stesso sia per i derivati sia per i sottostanti. Possiamo eliminare l'incertezza costruendo un portafoglio composto da una posizione corta su una quantità unitaria del derivato,  $f_S$ , e una posizione lunga su una quantità  $\partial f_S / \partial S$  del sottostante,  $S$ .<sup>16</sup>

In teoria, dato che non costa nulla aprire una posizione su un *futures*, il valore del portafoglio composto da una posizione corta sul *futures* è pari a:

$$\Pi_F = -f_F \quad (2.11)$$

Il valore del secondo portafoglio, composto da una posizione corta sul *futures*,  $f$ , e da una posizione lunga su una quantità  $\partial f_S / \partial S$  del sottostante,  $S$ , è invece pari a:

$$\Pi_S = -f_S + \frac{\partial f_S}{\partial S} S. \quad (2.12)$$

Passato un intervallo di tempo  $\Delta t$ , le variazioni di valore dei due portafogli sono:

$$\Delta \Pi_F = -\Delta f_F + \frac{\partial f_F}{\partial F} \Delta F. \quad (2.13)$$

$$\Delta \Pi_S = -\Delta f_S + \frac{\partial f_S}{\partial S} \Delta S + q \frac{\partial f_S}{\partial S} S \Delta t. \quad (2.14)$$

<sup>14</sup> Per un approfondimento sui processi di Itô, si veda HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022 [Capitolo 12 (Processi di Wiener e Lemma di Itô)].

<sup>15</sup> ITÔ, K., “On stochastic differential equations”, *Memoirs*, American Mathematical Society, 4, 1951.

<sup>16</sup> Nel Capitolo 3 vedremo meglio le ragioni che giustificano questa procedura.

Sostituendo la (2.7) e la (2.9) nella (2.11), nonché la (2.8) e la (2.10) nella (2.12), si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_F &= -\left[\left(\frac{\partial f_F}{\partial F}\mu F + \frac{\partial f_F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_F}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)\Delta t - \frac{\partial f_F}{\partial F}\sigma F \Delta z\right] + \frac{\partial f_F}{\partial F}(\mu F \Delta t + \sigma F \Delta z) \\ &= -\left(\frac{\partial f_F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_F}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)\Delta t.\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_S &= -\left[\left(\frac{\partial f_S}{\partial S}(r-q)S + \frac{\partial f_S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t - \frac{\partial f_S}{\partial S}\sigma S \Delta z\right] \\ &\quad + \frac{\partial f_S}{\partial S}[(r-q)S \Delta t + \sigma S \Delta z] + q\frac{\partial f_S}{\partial S}S \Delta t \\ &= -\left(\frac{\partial f_S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + q\frac{\partial f_S}{\partial S}S \Delta t \\ &= -\left(\frac{\partial f_S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - q\frac{\partial f_S}{\partial S}S\right)\Delta t.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Abbiamo quindi dimostrato che, nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , i due portafogli non sono rischiosi, in quanto nelle Equazioni (2.15) e (2.16) non appare la variabile stocastica  $\Delta z$ . Ne segue che, in tale intervallo di tempo, il tasso di rendimento dei due portafogli deve essere uguale a quello di un titolo privo di rischio.

In generale,  $\Delta\Pi = r \Pi \Delta t$ . Pertanto

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial f_F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_F}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)\Delta t &= -rf_F \Delta t \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial f_F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_F}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 &= rf_F\end{aligned}\quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial f_S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - q\frac{\partial f_S}{\partial S}S\right)\Delta t &= -r\left(f_S - \frac{\partial f_S}{\partial S}S\right)\Delta t \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial f_S}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f_S}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_S}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 &= rf_S.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Sostituendo, nella (2.18), il *dividend yield*,  $q$ , con il tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ , il termine  $\partial f_S/\partial S$  si annulla. Pertanto, la (2.18) diventa uguale alla (2.17). Abbiamo quindi dimostrato che un derivato su *futures* si comporta come un derivato scritto su un titolo con *dividend yield* pari al tasso d'interesse privo di rischio.



**Black vs. Black-Scholes**

Nel 1976, Fisher Black utilizzò queste stesse premesse per sviluppare una formula per la valutazione delle *futures options*.<sup>17</sup>

Le ipotesi alla base del modello di Black sono le seguenti:

- le variazioni del prezzo *futures* hanno distribuzione log-normale, con varianza nota  $\sigma^2$ ;
- tutti i parametri del modello (tasso di rendimento atteso,  $\mu$ , varianza,  $\sigma^2$ , e tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ ) sono costanti nel tempo;
- tasse e costi di transazione sono nulli.<sup>18</sup>

Sulla base di queste ipotesi, Fisher Black ricava l'equazione differenziale (2.17), che risolve ponendola a sistema con i seguenti vincoli:

$$f(F_T, t) = \begin{cases} F_T - K & \text{se } F_T > K \\ 0 & \text{se } F_T \leq K \end{cases} \quad (2.19)$$

$$f(0, t) = 0.$$

Le soluzioni del modello di Black sono:

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (2.20)$$

$$p = e^{-rT} [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (2.21)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + (\sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.22)$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / K) - (\sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (2.23)$$

**Greche**

Le "greche" sono misure di sensitività delle opzioni. Svolgono un ruolo fondamentale nelle operazioni di copertura.

Uno dei vantaggi delle formule di Black è che le greche sono facilmente calcolabili.<sup>19</sup>

<sup>17</sup> BLACK, F., "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, Nos. 1-2, pp. 167-179, January-March 1976.

<sup>18</sup> L'ipotesi di assenza dei costi di transazioni può essere "stemperata" facendo aumentare la volatilità. Si veda LELAND, H., "Option Pricing and Replication with Transactions Costs", *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 5, pp. 1283-1301, December 1985.

<sup>19</sup> HOLTON, G., "Black (1976) Option Pricing Formula", June 3<sup>rd</sup>, 2013. Cfr. [https://www.glynholton.com/notes/black\\_1976/](https://www.glynholton.com/notes/black_1976/).

*Delta*

Il delta,  $\Delta$ , di una *futures option* misura la sensitività del suo prezzo rispetto al prezzo *futures*.

Il delta della *futures call*,  $\Delta_c$ , e il delta della *futures put*,  $\Delta_p$ , sono:

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial F_0} = e^{-rT} N(d_1). \quad (2.24)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial F_0} = e^{-rT} [N(d_1) - 1]. \quad (2.25)$$

Il delta della *call* è sempre positivo e il delta della *put* è sempre negativo. Pertanto, se il prezzo *futures* aumenta, il prezzo della *call* aumenta e il prezzo della *put* diminuisce. Per entrambe le opzioni, il valore assoluto del delta è compreso tra 0 e 1.

*Gamma*

Il gamma,  $\Gamma$ , di una *futures option* misura la sensitività del suo delta rispetto al prezzo *futures*.

$$\Gamma_c = \Gamma_p = \frac{\partial^2 f}{\partial F_0^2} = \frac{e^{-rT} N'(d_1)}{F_0 \sigma \sqrt{T}}. \quad (2.26)$$

Il gamma delle posizioni lunghe sulle *futures options* è sempre positivo, mentre è negativo per le posizioni corte.

*Vega*

Il vega,  $V$ , di una *futures option* misura la sensitività del suo prezzo rispetto alla volatilità del prezzo *futures*.

$$V_c = V_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = e^{-rT} F_0 \sqrt{T} N'(d_1). \quad (2.27)$$

Come per il gamma, il vega è positivo sia per le *calls* che per le *puts*. Questo significa che una posizione lunga su un'opzione trae sempre beneficio da un aumento della volatilità del sottostante.

*Theta*

Il theta,  $\Theta$ , di una *futures option* misura la sensitività del suo prezzo rispetto al tempo,  $t$ .

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{e^{-rT} F_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + re^{-rT} F_0 N(d_1) - re^{-rT} KN(d_2). \quad (2.28)$$

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{e^{-rT} F_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - re^{-rT} F_0 N(-d_1) + re^{-rT} KN(-d_2). \quad (2.29)$$

Il theta è tendenzialmente negativo sia per le *calls* che per le *puts*, prova di un fenomeno chiamato *time decay* (decadimento temporale): più un'opzione si avvicina alla scadenza, più il suo valore decade. Notiamo, però, che la formula per le *calls* è diversa da quella per le *puts*.

*Rho*

Il rho,  $\rho$ , di una *futures option* misura la sensitività del suo prezzo rispetto al tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ .

Notiamo che, sia per una *call* che per una *put* scritte su *futures*, possiamo facilmente raggruppare gli argomenti che non dipendono da  $r$  in questo modo:

$$c = e^{-rT} \cdot k, p = e^{-rT} \cdot k. \quad (2.30)$$

Le derivate prime rispetto a  $r$  sono

$$\frac{\partial(e^{-rT} \cdot k)}{\partial r} = -T \cdot e^{-rT} \cdot k = -Tf. \quad (2.31)$$

Pertanto

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = -Tc. \quad (2.32)$$

$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = -Tp. \quad (2.33)$$

## 2.3 VOLATILITÀ

Tra le cinque variabili delle formule di Black ( $F_0, K, T, r, \sigma$ ), la volatilità,  $\sigma$ , del *futures* sul quale è scritta l'opzione è senza dubbio la più ardua da determinare. Il prezzo *futures* del sottostante ( $F_0$ ) è facilmente reperibile. Lo *strike* ( $K$ ) e la scadenza ( $T$ ) sono caratteristiche esplicite del contratto. Infine, il tasso d'interesse privo di rischio ( $r$ ), di fondamentale importanza per l'intero mercato finanziario, si può stimare in diversi modi, a volte anche semplicemente consultando un quotidiano.

D'altro canto, la volatilità non è una variabile controllata o influenzata in modo diretto dagli agenti di mercato o dalle dinamiche di domanda e offerta. Viene quindi stimata attraverso varie metodologie.

### Volatilità Storica

I metodi retrospettivi (*backward looking*) per la stima della volatilità dei titoli si basano sull'analisi delle serie storiche dei prezzi.<sup>20</sup>

L'ampiezza del campione da analizzare può variare a seconda delle necessità. Un campione particolarmente vasto conduce a una stima più stabile della volatilità, in quanto l'effetto di eventuali *shocks* viene attenuato dalla gran quantità di osservazioni ordinarie. Tuttavia, l'eccesso di informazioni rende il modello di stima obsoleto e poco reattivo.

<sup>20</sup> RESTI, A., e SIRONI, C., *Rischio e valore nelle banche. Misura, regolamentazione, gestione*, Egea Editore, 2021 (Capitolo 7: I modelli per la stima di volatilità e correlazioni).

D'altro canto, un campione non sufficientemente ampio potrebbe risultare eccessivamente reattivo agli *shocks*, causando differenze significative nella stima della volatilità quando tali *shocks* entrano ed escono dal modello.<sup>21</sup>

Un buon compromesso per i *risk managers* – gli operatori che sono più soliti utilizzare metodi *backward looking* per la stima della volatilità – è l'utilizzo dei prezzi di chiusura degli ultimi 90-180 giorni.<sup>22</sup>

### Medie Mobili Semplici

Supponiamo di avere una serie storica dei prezzi di chiusura giornalieri di un determinato *futures*, per un totale di  $n$  osservazioni. Il nostro obiettivo è stimare la volatilità sulla base delle variazioni giornaliere dei prezzi. Per estendere le capacità di comparazione del nostro modello, possiamo usare le variazioni logaritmiche:

$$\Delta F_i = u_i = \ln \left( \frac{F_{0,i}}{F_{0,i-1}} \right) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.34)$$

Estraiamo dalla serie storica delle variazioni logaritmiche un campione adeguato di  $n$  elementi, tale che essi siano i più recenti. Con il passare del tempo, ogni nuovo dato sostituirà il più vecchio, aggiornando il campione giornalmente (*rolling window*).

La volatilità giornaliera delle  $u_i$  appartenenti al campione è data da:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (2.35)$$

dove  $\bar{u}$  è la media campionaria delle  $u_i$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i. \quad (2.36)$$

Solitamente, per intervalli di tempo sufficientemente brevi, si ipotizza che la media  $\bar{u}$  sia nulla, permettendoci così di calcolare una buona *proxy* della varianza condizionata del campione in modo diretto.

### Medie Mobili Esponenziali

Il metodo delle medie mobili esponenziali è una versione più sofisticata del metodo delle medie mobili semplici, in quanto consente una stima della volatilità con un elevato contenuto informativo, senza però incorrere nei problemi precedentemente discussi legati a campioni eccessivamente ampi.

La volatilità stimata tramite le medie mobili esponenziali, infatti, pondera in minor modo gli elementi più vecchi del campione, permettendo loro di lasciarlo gradualmente, ed evitando così che le stime subiscano salti in corrispondenza di forti *shocks*.

<sup>21</sup> *Echo Effect*.

<sup>22</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, p. 334.

Introduciamo quindi  $\lambda$ , il fattore di decadimento (*decay factor*) delle osservazioni campionarie. Il suo valore, compreso tra 0 e 1, ci dice quanto velocemente il campione si adegua a nuove osservazioni. Più piccolo è  $\lambda$ , più velocemente le vecchie osservazioni lasciano il modello.

Se si ipotizza che la media  $\bar{u}$  sia nulla, la formula per la stima della varianza delle  $u_i$  tramite le medie mobili esponenziali è la seguente:

$$\sigma^2 = \frac{u_n^2 + \lambda u_{n-1}^2 + \dots + \lambda^n u_0^2}{1 + \lambda + \dots + \lambda^n} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i u_{n-i}^2}{\sum_{i=0}^n \lambda^i} \quad (2.37)$$

Dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda^i = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (2.38)$$

possiamo semplificare la formula come segue

$$\sigma^2 \approx (1 - \lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{n-i}^2. \quad (2.39)$$

Pertanto

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{n-i}^2}. \quad (2.40)$$

### Modelli ARCH e GARCH

Il modello GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), sviluppato nel 1986 da Tim Bollerslev,<sup>23</sup> rappresenta un'evoluzione del modello ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) introdotto nel 1982 da Robert Engle.<sup>24</sup>

Questi modelli partono dal presupposto che la varianza della serie storica non è costante nel tempo, ma varia sulla base delle informazioni dei periodi precedenti.

- ARCH( $p$ ):  $\sigma_t^2$  dipende dal quadrato dei residui dei modelli da  $t - 1$  a  $t - p$ :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \quad (2.41)$$

- GARCH( $p, q$ ):  $\sigma_t^2$  dipende sia dal quadrato dei residui dei modelli da  $t - 1$  a  $t - p$  che dalle varianze passate:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (2.42)$$

<sup>23</sup> BOLLERSLEV, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327, April 1986.

<sup>24</sup> ENGLE, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1007, July 1982.

La stima dei parametri  $(\omega, \alpha, \beta)$  nei modelli ARCH e GARCH viene tipicamente effettuata tramite metodi di massima verosimiglianza.<sup>25</sup>

### Volatilità Implicita

Stimando la volatilità attraverso metodi retrospettivi, diamo per scontato che il futuro si comporterà come il passato. I prezzi dei titoli, d'altro canto, si basano sulle aspettative attuali degli operatori di mercato sulla volatilità futura.

Se si ipotizza che le formule di Black valutino correttamente le *futures options*, possiamo utilizzarle per estrarre la volatilità implicita dai prezzi a cui queste vengono scambiate nel mercato.<sup>26</sup>

#### Algoritmo di Newton-Raphson

Dal punto di vista matematico, ricavare la volatilità implicita dalle formule di Black non è semplice, poiché non è possibile isolare  $\sigma$  nell'equazione. Per trovare la soluzione, si deve utilizzare un metodo iterativo. Si parte con un valore iniziale plausibile della volatilità e lo si inserisce nell'equazione. Se il valore inserito genera un prezzo dell'opzione superiore a quello di mercato, si prova con un valore di  $\sigma$  più basso, ripetendo il processo fino a ottenere il prezzo desiderato. Allo stesso modo, se il valore iniziale di  $\sigma$  produce un prezzo troppo basso per l'opzione, si sostituisce con valori progressivamente più alti, fino a raggiungere il prezzo corretto dell'opzione.

Un metodo più sofisticato per calcolare la volatilità implicita di un'opzione è l'utilizzo dell'algoritmo di Newton-Raphson, una tecnica matematica risalente al XVII secolo, dettagliatamente descritta nelle opere di Isaac Newton e Joseph Raphson.

Sia  $f(\sigma)$  la differenza tra il prezzo teorico e il prezzo effettivo di una *futures call*:

$$f(\sigma) = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] - c. \quad (2.43)$$

In questo caso,  $c$  è una costante nota. Pertanto la derivata di  $f(\sigma)$  non è altro che il vega della *call*,<sup>27</sup> che sappiamo essere sempre positivo per posizioni lunghe su opzioni:

$$f'(\sigma) = e^{-rT} F_0 \sqrt{T} N'(d_1). \quad (2.44)$$

Il nostro obiettivo è quello di trovare quel valore della volatilità,  $\sigma^*$ , che annulla  $f(\sigma)$ .

L'algoritmo di Newton-Raphson, di natura iterativa, viene anch'esso inizializzato scegliendo un valore iniziale,  $\sigma_0$ , che sia ragionevole.

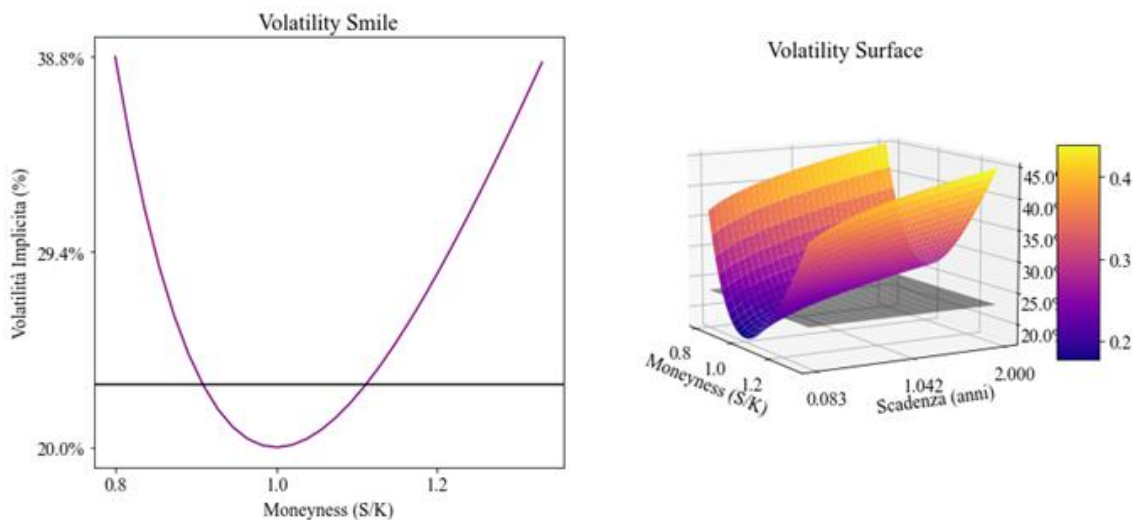
Inoltre, si noti che:

$$f'(\sigma_0) \approx \frac{f(\sigma_0) - f(\sigma_1)}{\sigma_0 - \sigma_1}. \quad (2.45)$$

<sup>25</sup> Per approfondimenti: HURN, S., VANCE, L. M., JUN, Y., PETER, C. B. P., *Financial Econometric modeling*, Oxford University Press, 2020.

<sup>26</sup> RUBINSTEIN, M., *Derivati - Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, 2005, pp. 313-321.

<sup>27</sup> Lo stesso procedimento si può applicare alle *puts* ponendo  $f(\sigma) = e^{-rT} [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] - p$ .



**Figura 2.2** Esempi di Volatility Smile e di Volatility Surface.

Pertanto, se il nostro obiettivo è quello di annullare  $f(\sigma)$  nel minor numero di iterazioni possibili, allora ponendo  $f(\sigma_1) = 0$  si ottiene un passo correttivo, da  $\sigma_0$  a  $\sigma_1$ , che non è arbitrario e ci consente di trovare rapidamente la soluzione:

$$\begin{aligned}
 f'(\sigma_0) &\approx \frac{f(\sigma_0) - 0}{\sigma_0 - \sigma_1} \\
 &\Rightarrow \\
 \sigma_1 &= \sigma_0 - \frac{f(\sigma_0)}{f'(\sigma_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

La convergenza verso valori accurati della volatilità implicita è molto rapida, permettendoci di ottenere in breve tempo approssimazioni soddisfacenti di  $\sigma^*$ .

#### *Volatility Smiles e Volatility Surfaces*

Il modello di Black-Scholes-Merton ipotizza che la volatilità del sottostante su cui è scritta l'opzione sia costante nel tempo. Questo significa che la volatilità implicita dovrebbe essere la stessa per tutte le opzioni, indipendentemente dal prezzo di esercizio o dalla scadenza.<sup>28</sup>

In realtà non è esattamente così. Se calcoliamo le volatilità implicite di opzioni che differiscono per scadenza e *strike*, non troveremo linee rette e piani, ma figure più complesse (Figura 2.2).

Non è garantito che le opzioni presentino un *volatility smile*; tuttavia, una tendenza piuttosto comune è quella per cui le opzioni *at-the-money* (cioè, le opzioni per le quali  $K = S$ ) mostrano una volatilità implicita inferiore rispetto a quelle delle opzioni che non sono *at-the-money*.<sup>29</sup>

<sup>28</sup> Questo perché, in un contesto di volatilità costante, il rischio associato alle fluttuazioni del sottostante è uniforme per tutte le opzioni, indipendentemente dallo *strike* e dalla scadenza.

<sup>29</sup> Si veda HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022, Capitolo 20: Volatility Smiles e Volatility Surfaces.





## Capitolo 3

# *Replica Dinamica*

Se riteniamo che le formule di Black siano idonee a valutare efficacemente le opzioni su *futures*, possiamo provare a sfruttare le differenze tra prezzi effettivi e prezzi teorici per generare profitti privi di rischio.

Supponiamo di notare una *futures call* sottovalutata. Il primo istinto sarebbe quello di comprarla, fiduciosi che, col tempo, il suo prezzo salirà. Tuttavia, sappiamo che il valore di un'opzione dipende anche dal prezzo del sottostante, sul quale siamo incerti. Per isolare il profitto privo di rischio, dobbiamo coprirci dalle fluttuazioni del *futures* su cui la *call* è scritta, annullando ogni guadagno o perdita a esse legato.

Esaminiamo i *payoffs* delle *futures options* in funzione di  $F_0$  (Figura 3.1). L'unico modo che abbiamo per annullare i *payoffs* di una *long call* è andare *short* sulla *call* stessa. Tuttavia, se proviamo a vendere la *call* che abbiamo appena comprato, non facciamo altro che neutralizzare la posizione (Figura 3.2).

Quello che possiamo fare, quindi, è trovare un modo per replicare la *call* e poi andare *short* sulla sua replica.

### 3.1 L'INTUIZIONE DI KENNETH ARROW

Kenneth Arrow<sup>1</sup> (1964) è stato il primo a introdurre l'incertezza nelle teorie legate all'equilibrio dei mercati completi<sup>2</sup>, generalizzando i risultati ottenuti da Gérard Debreu<sup>3</sup> (1959).

Arrow ha dimostrato che è possibile raggiungere un'allocatione ottimale del rischio dei consumatori assumendo che siano debolmente «avversi al rischio» (*risk averse*). Lo ha fatto introducendo gli *Arrow-Debreu securities*, cioè dei titoli che cedono un'unità di moneta solo all'occorrenza di un dato stato del mondo, e in nessun altro stato. Arrow ha dimostrato che questi titoli, in un mercato inizialmente completo (quindi con tanti stati quanti sono i titoli Arrow-Debreu), possono essere utilizzati per replicare, senza alcuna incertezza, i *payoffs* di titoli rischiosi.<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> ARROW, K. J., "The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing", *Review of Economic Studies*, Vol. 31, No. 2, pp. 91-96, April 1964.

<sup>2</sup> Un mercato completo è un mercato che consente ai suoi partecipanti di trasferire su un contratto il rischio associato a ogni possibile evento futuro (*contingency*).

<sup>3</sup> DEBREU, G., *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press, 1959.

<sup>4</sup> Si veda RUBINSTEIN, M., *A History of the Theory of Investments: My Annotated Bibliography*, John Wiley & Sons, 2011.

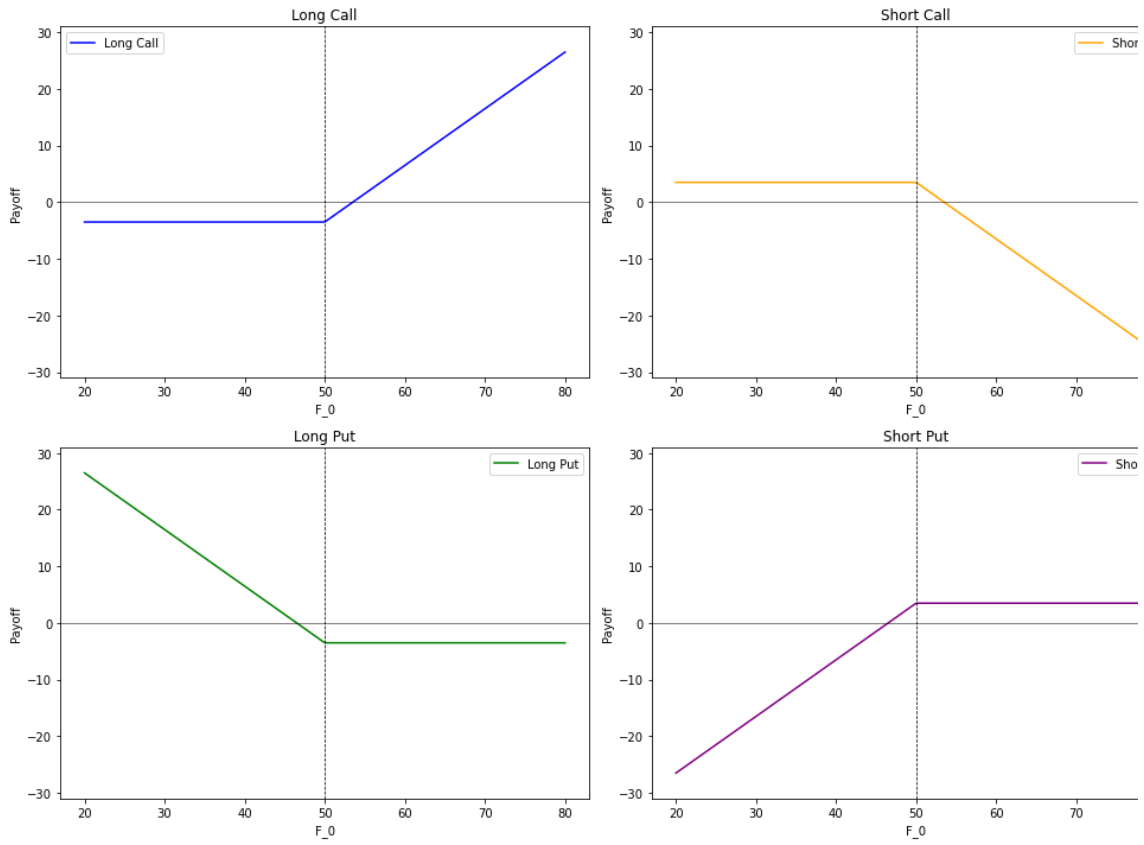


Figura 3.1 Payoffs di opzioni call e put con  $K = 50$  e  $c = p = 3.50$ .

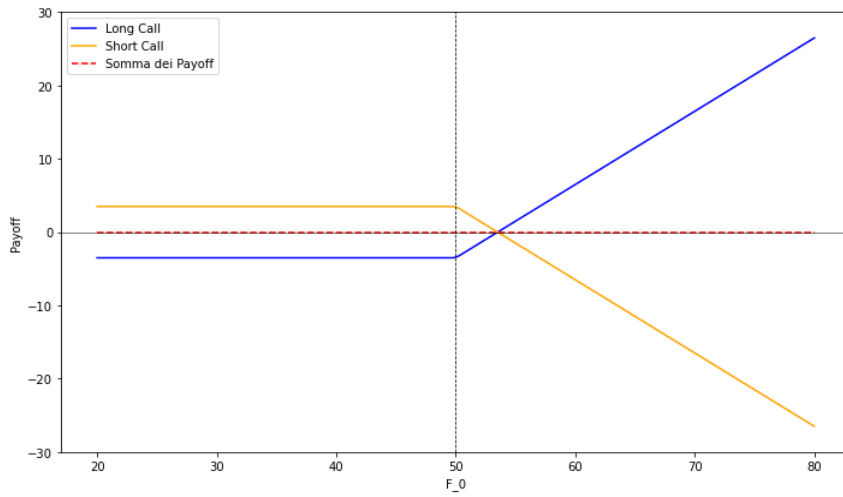


Figura 3.2 Long Call + Short Call.

### 3.2 LA FORMALIZZAZIONE DI ROBERT C. MERTON

*Un sabato pomeriggio, Merton chiamò Scholes al telefono ed esclamò: "Avete ragione!". Sì, avevano ragione, ma per motivi che loro stessi non erano in grado di riconoscere. Merton riuscì a offrir loro una derivazione più elegante della formula per la valutazione delle opzioni.<sup>5</sup>*

Fu sulla base degli studi di Arrow che Robert C. Merton, nel 1973, pubblicò una nuova derivazione delle formule di Black e Scholes. Pur considerando i risultati di Arrow più generici ed eleganti rispetto a quelli basati sulla media-varianza di Sharpe-Lintner-Mossin,<sup>6</sup> Merton ne riconobbe la limitata praticabilità empirica, evidenziando inoltre quanto fosse restrittivo assumere un'economia con tanti stati quanti sono i titoli.

L'obiettivo di Merton fu quindi quello di provare che è possibile riprodurre il *payoff* di un'opzione costruendo un portafoglio formato da una posizione sul sottostante e una posizione su un titolo privo di rischio:

$$f = \Pi = a S + b B \quad (3.1)$$

dove  $a S$  è la posizione sul sottostante e  $b B$  è la posizione sul titolo privo di rischio.

Sotto l'ipotesi che i mercati siano perfetti,<sup>7</sup> che gli scambi dei titoli avvengano continuamente e che il prezzo del sottostante segua un moto geometrico Browniano, in ogni istante avremo un guadagno legato a  $\Pi$  pari a

$$d\Pi = a dS + r b dB \quad (3.2)$$

dove:<sup>8</sup>

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \quad (3.3)$$

Il portafoglio è una replica dell'opzione se riesce a generare il suo stesso guadagno senza ulteriori spese oltre al costo iniziale per costruirlo. Deve quindi valere:

$$df - d\Pi = 0 \quad (3.4)$$

Se  $f$  segue un processo di Wiener generalizzato, per Lemma di Itô abbiamo:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad (3.5)$$

<sup>5</sup> BERNSTEIN, P. L., *Capital ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, Simon and Schuster, 1993. Cfr. p. 217.

<sup>6</sup> SHARPE, W. F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442, September 1964; LINTNER, J., "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification", *Journal of Finance*, Vol. 20, No. 4, pp. 587-615, December 1965; MOSSIN, J., "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783, October 1966.

<sup>7</sup> Queste sono le ipotesi: 1 - Tutti i titoli hanno responsabilità limitata. 2 - Non ci sono costi di transazione, tasse, o problematiche legate all'indivisibilità dei titoli. 3 - C'è un numero sufficiente di investitori, tutti con simili livelli di ricchezza, tale da far credere a ciascuno di loro di poter comprare o vendere la quantità desiderata di un titolo al prezzo di mercato. 4 - Il mercato dei capitali è sempre in equilibrio, ossia non si verificano scambi a prezzi non di equilibrio. 5 - Esiste un mercato che consente di erogare e ricevere prestiti allo stesso tasso di interesse. 6 - Le vendite allo scoperto, con totale reinvestimento dei guadagni, sono consentite.

<sup>8</sup> Abbiamo già visto questa formula e alcune successive in: Capitolo 2 - Modello di Black.

Pertanto:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz - a(\mu S dt + \sigma S dz) - r b dB = 0. \quad (3.6)$$

Poniamo uguali a zero i termini legati al processo di Wiener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz - a \sigma S dz &= 0 \\ \Rightarrow & \\ a^* &= \frac{\partial f}{\partial S}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Notiamo bene che il valore di  $a$  che annulla la parte incerta del modello è pari alla derivata prima del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante, cioè il delta dell'opzione.

Trovato  $b^*$  sostituendo  $a^*$  nella (3.6), Merton ricava l'equazione differenziale del modello di Black e Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf. \quad (3.8)$$

L'importante implicazione di questo metodo è che è possibile annullare il rischio aprendo posizioni opposte su un'opzione e il suo sottostante. Più specificatamente, il portafoglio composto da:

$$\begin{aligned} &1 : \text{opzione} \\ &-\frac{\partial f}{\partial S} : \text{sottostante.} \end{aligned} \quad (3.9)$$

è un portafoglio che avrà lo stesso *payoff* di un titolo privo di rischio. Annullando il rischio legato alle fluttuazioni di prezzo del sottostante, siamo in grado di sfruttare a pieno le opportunità di arbitraggio causate dal *mispricing* delle opzioni.

### 3.3 DELTA HEDGING

Parliamo di repliche dinamiche perché il delta di un'opzione non rimane costante fino alla scadenza. Vediamo perché esaminando le formule dei delta delle *futures options*:<sup>9</sup>

$$\Delta_c = e^{-rT} N(d_1) \quad (3.10)$$

$$\Delta_p = e^{-rT} [N(d_1) - 1] \quad (3.11)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + (\sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (3.12)$$

e  $N(d_1)$  è la funzione di distribuzione della normale standardizzata calcolata in  $d_1$ .

<sup>9</sup> HULL, J. C., (2022). *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, p. 419-435.

La funzione di distribuzione,  $N(\cdot)$ , è monotonamente crescente. Pertanto, con l'aumentare di  $d_1$  aumenta anche  $N(d_1)$ .

Notiamo che il delta di un'opzione su *futures* non solo è legato al prezzo del sottostante ( $F_0$ ), ma anche allo *strike* ( $K$ ), alla vita residua ( $T$ ), alla volatilità ( $\sigma$ ), al tasso d'interesse privo di rischio ( $r$ ). Delle cinque variabili, solo  $K$  è costante per tutta la vita dell'opzione, e assumiamo, per semplicità, che anche  $r$  lo sia.<sup>10</sup>

Per ottenere una copertura ottimale è quindi necessario modificare frequentemente le posizioni sul sottostante. In caso di opzioni con gamma e vega elevati, questo metodo potrebbe rivelarsi particolarmente costoso a causa dell'elevato numero di aggiustamenti richiesti e dei costi di transazione associati. È quindi di nostro interesse annullare, o comunque abbassare, il valore di queste greche del portafoglio.

### Annullamento di Gamma e Vega

Abbiamo visto che aprire posizioni sul sottostante ci copre dal rischio associato alle sue fluttuazioni di prezzo. Questo è possibile anche grazie al fatto che la posizione sul sottostante ha un delta unitario, rendendo quindi opzioni e sottostante comparabili in termini di delta.

Lo stesso però non vale per il gamma e per il vega, che sono nulli per le posizioni sul sottostante. Per coprirci dobbiamo quindi vendere o comprare altre opzioni, creando portafogli sicuramente più complessi di quello originale.

Le greche di un portafoglio non sono altro che la somma ponderata delle greche delle singole posizioni, quindi, dato un portafoglio  $\Pi$ , avremo:

$$\Delta_{\Pi} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Delta_i \quad \Gamma_{\Pi} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Gamma_i \quad V_{\Pi} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot V_i \quad (3.13)$$

dove  $w_i$  è la quantità dell' $i$ -esima opzione ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Partiamo dal portafoglio semplice, formato da una posizione lunga su 1 opzione e da una posizione corta pari a  $-\Delta_1$  sul *futures* sottostante. In  $t = 0$ , il delta del portafoglio è nullo.

Vogliamo, per prima cosa, annullare il gamma del portafoglio. Dato che a posizioni lunghe su opzioni corrisponde un gamma positivo, dobbiamo vendere allo scoperto una quantità  $w_2$  di una nuova opzione, tale che

$$\begin{aligned} \Gamma_1 - w_2 \Gamma_2 = \Gamma_{\Pi} = 0 \\ \Rightarrow \\ w_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

<sup>10</sup> Nel contesto delle opzioni su *futures*, cioè di opzioni che tendono ad avere una scadenza abbastanza breve, non è sbagliato supporre che le possibili fluttuazioni di  $r$  non abbiano così tanta influenza sul delta.

L'introduzione di una nuova opzione cambia il delta del portafoglio, costringendoci a modificare la posizione sul *futures* sottostante,  $w^*$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{\Pi} &= \Delta_1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Delta_2 - w^* = 0 \\ &\Rightarrow \\ w^* &= \Delta_1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Delta_2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Il portafoglio con due opzioni ha ora un vega pari a:

$$V_{\Pi} = V_1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} V_2.\tag{3.16}$$

Nella realtà, le cose sono leggermente più complicate. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, diverse opzioni hanno diverse volatilità implicite. Se assumiamo che le volatilità del nostro portafoglio si modifichino allo stesso modo, per brevi periodi di tempo possiamo coprire il rischio vega con le stesse metodologie usate per neutralizzare il gamma.

Aggiungiamo, quindi, una quantità  $w_3$  di una terza opzione, tale che:

$$V_1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} V_2 + w_3 V_3 = V_{\Pi} = 0.\tag{3.17}$$

Nel momento in cui compriamo o vendiamo la terza opzione, sia il gamma che il delta del portafoglio torneranno a essere diversi da zero. Dobbiamo quindi bilanciare nuovamente la posizione sulla seconda opzione, per contrastare i cambiamenti causati dall'introduzione della terza:

$$\begin{cases} w_1 V_1 + w_2 V_2 + w_3 V_3 = 0 \\ w_1 \Gamma_1 + w_2 \Gamma_2 + w_3 \Gamma_3 = 0. \end{cases}\tag{3.18}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 V_1 \\ -w_1 \Gamma_1 \end{pmatrix}.\tag{3.19}$$

La matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}\tag{3.20}$$

è invertibile se il suo determinante è diverso da zero:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix} &\neq 0 \\ &\Rightarrow \\ V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2 &\neq 0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

L'equazione è valida se i vettori  $(V_2, V_3)$  e  $(\Gamma_2, \Gamma_3)$  sono linearmente indipendenti. Se non lo fossero, potremmo esprimere i gamma in termini di vega (o viceversa) e ciò renderebbe la presenza di una terza opzione obsoleta.

Andiamo avanti assumendo che la matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$$

sia invertibile. La soluzione del nostro sistema sarà quindi la seguente:

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -w_1 V_1 \\ -w_1 \Gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

con

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\det \begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_3 & -V_3 \\ -\Gamma_2 & V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \begin{pmatrix} \Gamma_3 & -V_3 \\ -\Gamma_2 & V_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \\ \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \begin{pmatrix} \Gamma_3 & -V_3 \\ -\Gamma_2 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w_1 V_1 \\ -w_1 \Gamma_1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \begin{pmatrix} -w_1 (\Gamma_3 V_1 - V_3 \Gamma_1) \\ -w_1 (V_2 \Gamma_1 - \Gamma_2 V_1) \end{pmatrix} = \\ &\Rightarrow \\ \begin{cases} w_2^* = w_1 \left( \frac{\Gamma_3 V_1 - V_3 \Gamma_1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \right) \\ w_3^* = w_1 \left( \frac{V_2 \Gamma_1 - \Gamma_2 V_1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Trovati i pesi delle due opzioni, non ci resta che rendere il portafoglio *delta-neutral* modificando la posizione sul *futures*:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi} &= \Delta_1 + w_2^* \Delta_2 + w_3^* \Delta_3 - w^* = 0 \\ &\Rightarrow \\ w^* &= \Delta_1 + w_2^* \Delta_2 + w_3^* \Delta_3 = \Delta_1 + w_1 \frac{\Gamma_3 V_1 - V_3 \Gamma_1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \Delta_2 + w_1 \frac{V_2 \Gamma_1 - \Gamma_2 V_1}{V_2 \Gamma_3 - V_3 \Gamma_2} \Delta_3. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Almeno all'apparenza, la formula sembra molto complessa. Tuttavia, una volta ottenuta, possiamo inserirla in un foglio di calcolo e in pochi secondi cambiare le variabili per ottenere i nuovi pesi del nostro portafoglio.

### Performance dell'Hedge

I *traders* possono teoricamente coprirsi da ogni rischio possibile, ma con ogni nuova copertura arriva una nuova posizione da aprire e tante altre da modificare. Se l'obiettivo iniziale era quello di evitare frequenti modifiche alla nostra posizione sul sottostante, dobbiamo anche essere cauti nell'aprire troppe posizioni per rischi di minore importanza.

*A priori*, un esperto conosce il mercato abbastanza da permettergli di identificare le principali fonti di rischio e quindi costruire un'adeguata copertura. Tuttavia, è prudente e utile valutare a posteriori la *performance* dell'*hedge* e confrontarla con altre strategie:<sup>11</sup>

$$\text{Performance dell'hedge} = \frac{\text{deviazione standard del costo della copertura}}{\text{prezzo teorico dell'opzione}} \quad (3.25)$$

Diciamo che un *trader*, oltre al gamma e al vega, vuole anche coprirsi dal decadimento temporale, e quindi annullare il theta del portafoglio. Dopo qualche settimana, però, nota che la *performance* dell'*hedge* è migliorata solo di qualche punto percentuale o, peggio ancora, è leggermente peggiorata. Potrebbe quindi decidere di annullare la copertura e investire il capitale in altri titoli che ritiene saranno più redditizi.

### DerivaGem

Insieme al suo *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, John Hull mette a disposizione DerivaGem, un *software Excel-based* che permette, tra le altre cose, di calcolare - attraverso le formule di Black - il prezzo teorico, la volatilità implicita e le greche delle opzioni su *futures*.

Tramite un esempio, useremo DerivaGem per vedere in modo pratico come funzionano le strategie di *hedging*.

#### Un Esempio

Il gestore di un fondo mette a disposizione \$100.000 da investire in opzioni scritte su un *futures* sull'«argento» (*silver*) con scadenza tra sei mesi.

Il prezzo *futures* corrente è di \$30,83, mentre il tasso di interesse privo di rischio è pari al 2%. Gli analisti del fondo, basandosi sulle volatilità implicite raccolte negli anni, stimano che la volatilità del mercato dei *futures* sul *silver* sia attualmente pari al 28%.

L'ultimo prezzo a cui è stata scambiata una *call* leggermente *in-the-money* ( $K = \$30$ ), con vita residua di 3 mesi, è \$2,31. Inserendo, però, i dati in DerivaGem, si nota che un'opzione con le stesse caratteristiche dovrebbe valere circa €20 di meno, ossia \$2,134 (Figura 3.3).

La volatilità implicita coerente con l'ultimo prezzo di \$2,31 rilevato per la *futures call* è pari al 30,98%, un valore più elevato di quello (28%) su cui si è basata la stima del valore teorico dell'opzione (Figura 3.4). Evidentemente, il mercato si aspetta - nei prossimi 3 mesi - una volatilità del prezzo *futures* dell'argento maggiore di quella che gli analisti hanno stimato.

<sup>11</sup> HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022. Cfr. pp. 423-424.



<b>Underlying Type:</b>	
Futures Price:	30,83
Volatility (% per year):	28,00%
Risk-Free Rate (% per year):	2,00%
<b>Option Type:</b>	
Black-Scholes - European	<input type="checkbox"/> Imply Volatility
Life (Years):	0,2500
Strike Price:	30,00
	<input type="radio"/> Put
	<input checked="" type="radio"/> Call
<b>Calculate</b>	
<b>Results:</b>	
Price:	2,134

**Figura 3.3** Prezzo teorico di una *call* su *futures* ( $F_0 = \$30,83$ ;  $\sigma = 28\%$ ,  $r = 2\%$ ,  $T = 0,25$  e  $K = \$30$ ).

Futures Price:	30,83
Volatility (% per year):	30,98%
Risk-Free Rate (% per year):	2,00%

**Figura 3.4** Volatilità implicita di una *call* su *futures* ( $c = \$2,31$ ;  $F_0 = \$30,83$ ;  $r = 2\%$ ,  $T = 0,25$  e  $K = \$30$ ).

Ritenendo che la *call* sia sopravvalutata, i *traders* del fondo si aspettano che il suo valore col tempo diminuisca e raggiunga un valore in linea col prezzo teorico. Decidono quindi di venderla allo scoperto e implementare una copertura dinamica simile a quella da noi descritta: utilizzano una *call deep-out-of-the-money* con  $K = \$35$  e una *call in-the-money* con  $K = \$28$ .

La (3.23) consente di calcolare le quantità delle due nuove opzioni che occorre vendere/comprare a fronte della vendita della prima opzione. I calcoli sono illustrati nella Figura 3.5.

<b>1. Neutralizzazione Gamma e Vega</b>				
	Call 1	Call 2	Call 3	F_0
Price (\$):	<u>2,31</u>	0,45	3,41	30,83
Strike (\$):	30	35	28	
Delta (per \$):	0,6015	0,2005	0,7718	
Gamma (per \$ per \$):	0,0888	0,0648	0,0690	
Vega (per %):	0,0591	0,0431	0,0459	
	w_1 =	<u>-1,00</u>	<- La call è sopravvalutata	
	w_2 =	<u>-4,71</u>	<- Inserendo i valori della	
	w_3 =	<u>5,71</u>	tabella in (13)	
<b>2. Delta Hedging</b>				
$\Delta\Pi = -0,6015 - 4,71 * 0,2005 + 5,71 * 0,7718 - w_F = 0$				
	w_F =	<u>2,864</u>		
<b>3. Composizione Portafoglio</b>				
Capitale tot. = \$ 100.000,00				
$\Pi = -x * 2,31 + x * 0,45 + x * 0,5 * 3,41 + x * 0,015 * 30,83$				
	x =	<b>967,68</b>		
Il fondo comprerà (venderà):	<b>(968)</b>	Call 1		
	<b>(4562)</b>	Call 2		
	<b>5530</b>	Call 3		
	<b>2771</b>	Silver Futures		

Figura 3.5 Replica dinamica su Excel

## Capitolo 4

# *E-mini S&P 500 Futures Options*

L'indice Standard & Poor's 500 è uno degli indici azionari più seguiti e rappresentativi al mondo. Data la sua ampiezza e diversità, l'indice è frequentemente utilizzato dai gestori di fondi e dagli investitori come *benchmark* della *performance* del mercato azionario.

Nel contesto di questo ampio interesse per l'indice, gli E-mini S&P 500 *futures* sono stati introdotti per offrire una versione più accessibile e gestibile del trading su *futures*. Questi contratti sono denominati "mini" perché hanno una dimensione del contratto ridotta, pari a un quinto dei normali *futures* su S&P500. Mentre un contratto standard S&P 500 potrebbe essere troppo oneroso per i piccoli investitori a causa del suo alto valore nominale, gli E-mini S&P 500 *futures* consentono una partecipazione più ampia grazie alla loro leva finanziaria e alla ridotta dimensione del contratto, rendendo l'ingresso nel mercato dei *futures* più accessibile anche per gli investitori individuali o quelli con meno capitale da allocare.

### 4.1 SPECIFICHE CONTRATTUALI

#### *E-mini S&P500 Futures*

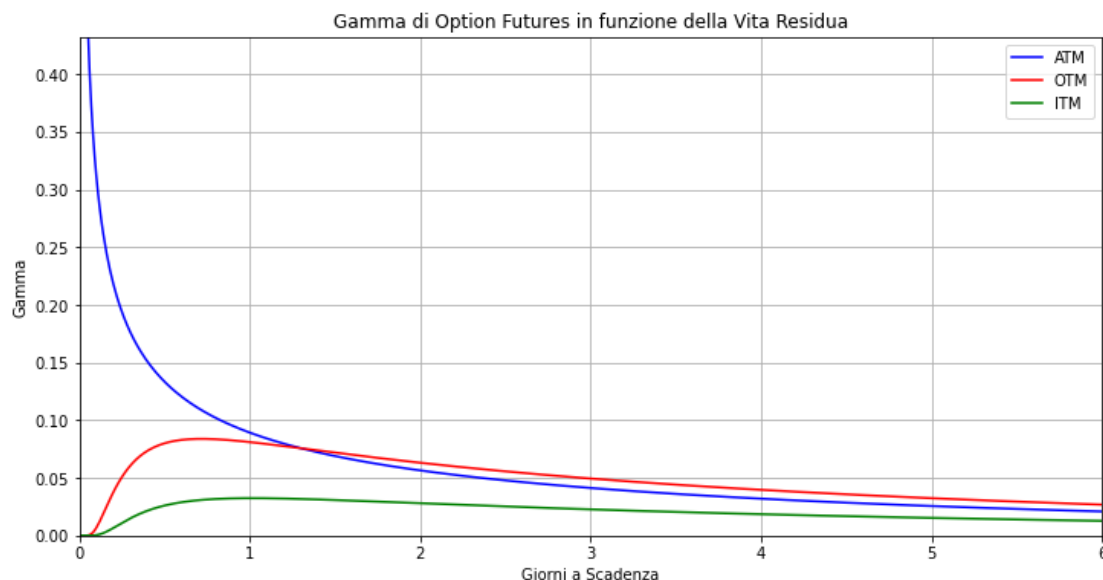
- Contract Unit:  $\$50 \times \text{S\&P500 Index}$ ;
- Trading Hours: lunedì 00:00 – venerdì 23:00;
- Listed Contracts: Contratti trimestrali (marzo, giugno, settembre, dicembre) per 21 trimestri consecutivi;
- Termination of Trading: alle 15:30 del terzo venerdì del mese di scadenza del contratto.

#### *E-mini S&P500 Options*

- Contract Unit: 1 E-mini S&P 500 futures;
- Trading Hours: lunedì 00:00 – venerdì 23:00;
- Listed Contracts: Contratti trimestrali (marzo, giugno, settembre, dicembre) per 8 trimestri consecutivi e ulteriori contratti per i 3 mesi di dicembre successivi;
- Termination of Trading: alle 15:30 del terzo venerdì del mese di scadenza del contratto.

### 4.2 OPZIONI CALL E OPZIONI PUT

Abbiamo a disposizione i dati di undici *calls* e undici *puts*. Le prime opzioni su cui ci concentreremo sono le ESM4C ed ESM4P.



**Figura 4.1** Gamma di opzioni ATM, ITM e OTM in prossimità della scadenza

Vediamo innanzitutto come interpretare questi *tickers*.

- “ES” indica il sottostante su cui le opzioni sono scritte (E-mini S&P500). Altri esempi sono “GC” per i derivati sull’oro e “CL” per quelli sul petrolio grezzo;
- “M” indica il mese di scadenza. Le opzioni scambiate nel CME hanno solitamente la stessa scadenza dei sottostanti e i derivati emessi sono sempre “H”, “M”, “U” e “Z”, rispettivamente, per marzo, giugno, settembre e dicembre;
- “4” indica l’ultima cifra dell’anno di scadenza, in questo caso 2024;
- “C” e “P” indicano il tipo di opzione, se call o put.

Con circa 20 giorni di vita residua, queste opzioni sono in una fase critica, in quanto sono molto sensibili ai cambiamenti di prezzo del sottostante. Il valore di un’opzione, infatti, non è solo legato alla sua *performance*, ma anche alla probabilità che il sottostante si muova a suo favore. Minore è il tempo perché questo accada, minore è la probabilità che le opzioni guadagnino ulteriore valore (Figura 4.1).

Vediamo, ad es., il caso delle opzioni *call at-the-money*. In prossimità della scadenza, un piccolo spostamento del prezzo del *futures* è decisivo per determinare il loro valore finale. Un suo leggero aumento, infatti, le porta *in-the money*, contribuendo significativamente al loro valore intrinseco. Al contrario, una lieve diminuzione le rende *out-of-the-money*, annullando completamente il loro valore. In entrambi i casi, la probabilità che tali opzioni subiscano un’ulteriore variazione in termini di *moneyness* è molto bassa, rendendo gli ultimi movimenti dei prezzi del sottostante estremamente cruciali.

### 4.3 QUALE STRIKE?

Vediamo i dati a nostra disposizione. La tabella riportata mostra *strike*, *ticker*, prezzi *bid*, *ask* e *last*, volatilità implicita e volume degli scambi delle opzioni. Quelle evidenziate in rosso sono *at-the-money* (ATM); infatti, al momento in cui i dati sono stati estratti l’ESM4 era quotato a \$5.271,50.

Strike	Ticker	Bid	Ask	Ultimo	IVM(%)	Volm
5250	ESM4C	69	69,5	86	12,80592	40
5250	ESM4P	48	48,5	46,5	12,79265	42
5260	ESM4C	63	63,25	65,25	12,61059	25
5260	ESM4P	51,75	52,25	52	12,63257	7
5270	ESM4C	57	57,5	57	12,44215	7
5270	ESM4P	56	56,5	54,75	12,49639	3
5275	ESM4C	54,25	54,75	55,75	12,37609	18
5275	ESM4P	58,25	58,75	56,75	12,43311	15
5280	ESM4C	51,5	52	51,5	12,32414	16
5280	ESM4P	60,5	61	59	12,3544	10

Figura 4.2 E-mini S&P500 Options per giugno 2024 (ESM4).

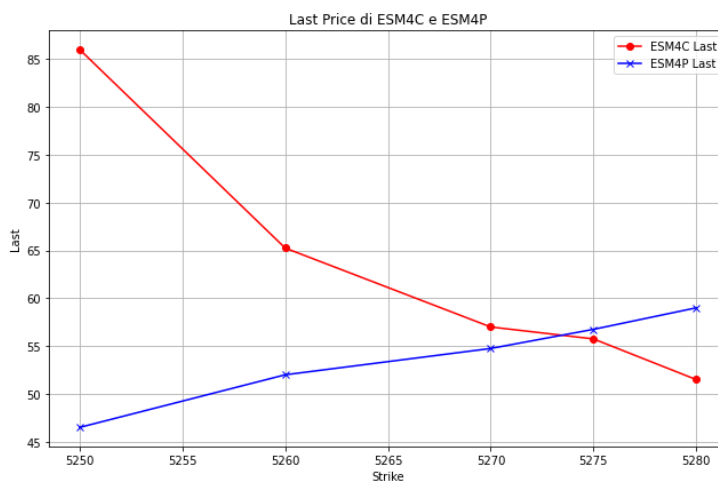
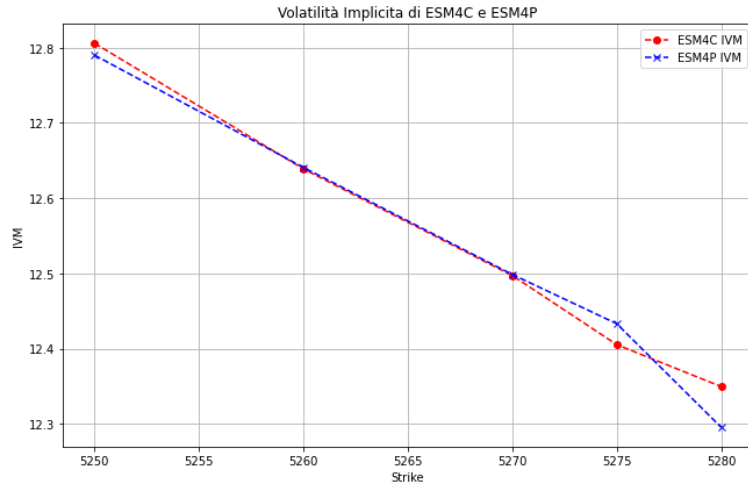


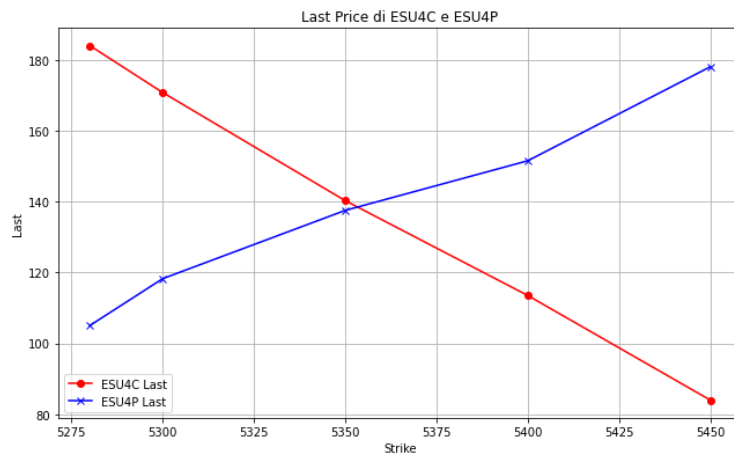
Figura 4.3 Prezzi delle opzioni per giugno 2024 (ESM4).

L'analisi della Figura 4.3 suggerisce aspettative rialziste. Osserviamo, infatti, che le opzioni *call in-the money* (ITM) presentano, a parità di *moneyness*, un valore significativamente superiore rispetto alle opzioni *put* ITM. Questo indica che i partecipanti al mercato sono poco inclini a credere che le opzioni *put* manterranno il loro stato ITM per molto tempo ancora.

L'andamento monotono decrescente del *volatility smile* (Figura 4.4), unito all'analisi del numero dei contratti scambiati, ci indica che il mercato non è molto attivo per le opzioni con *strike* elevato. Prendiamo, ad esempio, una *call* attualmente OTM con *strike* a \$2.580. Anche se il prezzo dovesse aumentare in prossimità della scadenza, il guadagno atteso non sarebbe tanto alto quanto per le *calls*



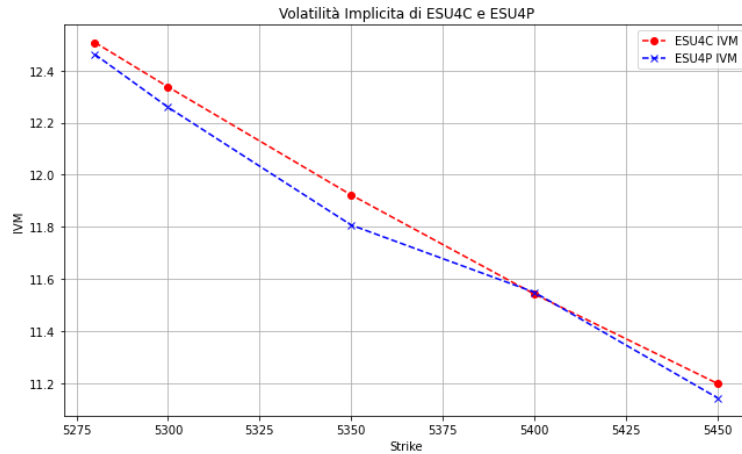
**Figura 4.4** Volatilità implicite delle opzioni per giugno 2024 (ESM4).



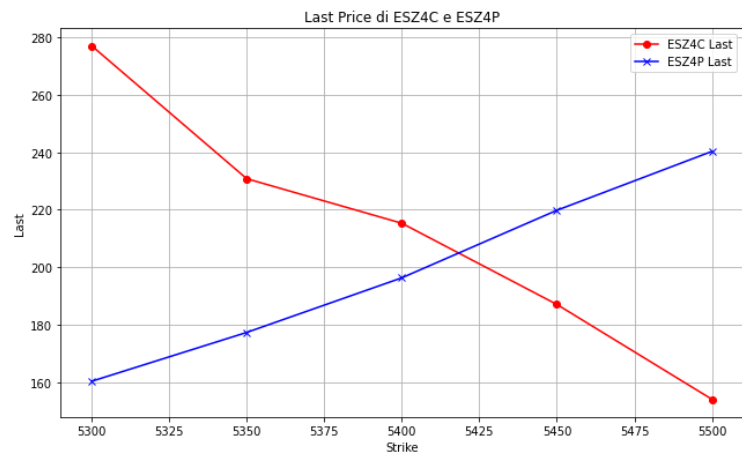
**Figura 4.5** Prezzi delle opzioni per settembre 2024 (ESU4).

con *strike* minore. D'altro canto, in questa situazione, le uniche *puts* che mantengono un valore significativo sono quelle *deep* ITM, che comunque non beneficiano dall'aumento di prezzi atteso dal mercato.

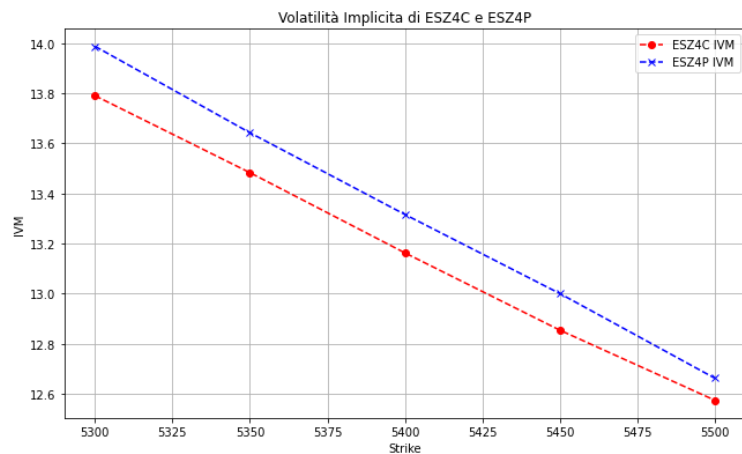
Notiamo tendenze simili anche per le opzioni con scadenze più lontane nel tempo: settembre 2024 (Figura 4.5 - Figura 4.6) e dicembre 2024 (Figura 4.7 - Figura 4.8).



**Figura 4.6** Volatilità implicite delle opzioni per settembre 2024 (ESU4).



**Figura 4.7** Volatilità implicite delle opzioni per dicembre 2024 (ESZ4).



**Figura 4.8** Volatilità implicite delle opzioni per dicembre 2024 (ESZ4).

In un mercato rialzista come quello degli indici azionari, chi investe in opzioni tende a prediligere strategie che beneficiano dall'aumento dei prezzi. Tra queste, le più comuni sono l'acquisto di opzioni *call* (*long call*) e la vendita di opzioni *put* (*short put*). Le *long calls* permettono agli investitori di

guadagnare sull'aumento dei prezzi del sottostante con un rischio limitato al premio pagato, mentre le *short puts* generano un guadagno immediato tramite l'incasso del premio, operando sotto l'aspettativa che il prezzo del sottostante rimanga stabile o cresca, evitando così l'obbligazione di acquistare l'*asset* a un prezzo superiore al mercato corrente.

#### 4.4 SUPERFICIE DI VOLATILITÀ

##### Volatilità in funzione del delta

La volatilità vista attraverso il delta aiuta a standardizzare i vari *strikes* per differenti scadenze e sottostanti, facilitando confronti diretti. In un approccio basato sul delta, ogni opzione viene considerata in termini di "quanto è lontana dal finire *in-the-money*", piuttosto che il suo specifico *strike*.

Il delta è quindi un indicatore di *moneyness*. Una 25 delta *call* è una *call* che ha circa il 25% di probabilità di finire *in-the-money*.

##### Opzioni Deep In-The-Money

Le opzioni *deep in-the-money* sono quelle con un alto delta, generalmente superiore a 0.75 per le *calls*. Queste opzioni hanno una sensibilità molto alta al prezzo del sottostante, e quindi detenere una *call deep in-the-money* è quasi equivalente a possedere l'azione stessa, ma con un impegno di capitale significativamente inferiore.

##### Opzioni At-The-Money

Le opzioni *at-the-money*, caratterizzate da un delta di circa 0.50, occupano una posizione di equilibrio nel mondo delle opzioni. Queste opzioni hanno un costo moderato e sono molto reattive ai movimenti di prezzo del sottostante, sebbene non così estreme come le opzioni *deep in-the-money* o *out-of-the-money*. La loro sensibilità è bilanciata, il che le rende estremamente popolari tra i *traders* che speculano sulle direzioni future del mercato o che cercano di coprire le loro posizioni.

##### Opzioni Out-of-The-Money

Le opzioni *out-of-the-money* hanno un delta basso, generalmente inferiore a 0.25 per le *calls*, indicando che hanno una bassa probabilità di finire *in-the-money*. Queste opzioni sono meno sensibili ai piccoli movimenti del prezzo del sottostante. Di conseguenza, anche grandi variazioni nel prezzo del sottostante possono avere un impatto limitato sul prezzo dell'opzione.

##### E-mini S&P500

Nel mercato delle E-mini S&P500 *options*, il rischio associato alle *call deep ITM* e alle *put deep OTM* è particolarmente elevato. Osserviamo, in generale, che con l'aumentare della scadenza delle opzioni, la volatilità implicita tende ad aumentare.

Inoltre, con l'aumentare della scadenza, si osserva un incremento della convessità del *volatility smile*. Questo implica che il mercato percepisce un rischio maggiore per le opzioni con scadenze più lunghe, indipendentemente dalla loro *moneyness*, principalmente a causa della maggiore probabilità



che queste opzioni possano finire ITM. La volatilità implicita rappresenta infatti le aspettative di mercato riguardo le future fluttuazioni dei prezzi del sottostante e una scadenza più lunga aumenta l'orizzonte temporale in cui possono verificarsi eventi significativi che impattino sui prezzi.

In sintesi, il mercato valuta più rischiose le opzioni a lunga scadenza sia per il maggiore livello di volatilità implicita sia per l'aumento della convessità del *volatility smile*. Questo riflette le usuali considerazioni sulle probabilità che un'opzione possa finire ITM, dato il maggiore intervallo di tempo in cui possono manifestarsi movimenti di mercato sostanziali.

## Capitolo 5

# *Conclusioni*

### 5.1 SINTESI DEI PRINCIPALI RISULTATI

Questo elaborato nasce dall'idea di rendere più competitiva la partecipazione all'annuale gara di *trading* su *futures* organizzata dal CME Group.

Abbiamo quindi iniziato con una breve storia sui *futures*, la nascita delle *futures options* e la loro regolamentazione, che ha attivamente contribuito a plasmare il mercato finanziario odierno.

Nel Capitolo 2, abbiamo condotto una revisione delle principali caratteristiche delle opzioni su *futures*. Inizialmente, abbiamo esaminato le regolamentazioni che mirano a rendere il mercato equo e competitivo (*marking-to-market*, *clearing house*, *margin call*), per poi passare alla valutazione delle opzioni stesse. In particolare, abbiamo approfondito il modello di Black (1976), teorizzato da Fisher Black come una specificazione per *futures options* del famoso modello Black-Scholes-Merton (1973). Il modello di Black riformula il modello originale, adattandolo ai derivati su *futures*. Grazie alle sue formule abbiamo anche ricavato le greche delle *futures options*, parte essenziale della replica dinamica.

Dopo aver ricavato le formule di Black, abbiamo proseguito con l'analisi della volatilità. Abbiamo innanzitutto sottolineato la sua importanza dal punto di vista computazionale, in quanto essa è l'unica tra le variabili delle formule di valutazione ( $F_0, K, T, r, \sigma$ ) che non è non direttamente osservabile. Abbiamo quindi esaminato diversi metodi di stima della volatilità, distinguendo tra quelli *backward looking* e *forward looking*. Quest'ultimi sono di nostro particolare interesse, in quanto calcolano la volatilità in base alle aspettative del mercato riguardo alle fluttuazioni di prezzo del sottostante.

Delineate quindi le basi importanti per lavorare con le opzioni su *futures*, nel Capitolo 3 abbiamo discusso di come sfruttare le inefficienze di mercato attraverso la replica dinamica delle opzioni. Abbiamo constatato che, in presenza di tali inefficienze, non è necessario speculare sulla *performance* dell'opzione stessa. Annullando i guadagni e le perdite ad essa relativi, possiamo "purificare" il profitto sfruttando l'arbitraggio in modo efficiente.

Appurato che per creare portafogli privi di rischio è necessario costruirli in modo che il guadagno di alcuni titoli compensi la perdita degli altri, abbiamo visto come le intuizioni di Kenneth Arrow sulla replica di derivati finanziari in un mercato incerto (1959) abbiano portato Robert C. Merton a una nuova derivazione delle formule di Black e Scholes. Nel 1973, infatti, Merton dimostrò che era possibile replicare il *payoff* di un'opzione con un portafoglio composto da un titolo privo di rischio e una posizione sul sottostante dell'opzione.

L'implicazione di questa scoperta è che un portafoglio composto da una quantità unitaria dell'opzione e da una posizione opposta sul suo sottostante pari al delta dell'opzione risulti privo di rischio, rendendo quindi possibile l'arbitraggio sul *mispicing* di opzioni.

Dato che il delta di un'opzione non è costante nel tempo ma varia con il mercato, abbiamo proseguito il capitolo introducendo il concetto di replica dinamica, che consiste nel modificare regolarmente le posizioni sul sottostante in modo da mantenere una copertura efficiente.

Soprattutto per le opzioni con gamma e vega particolarmente elevati, questo tipo di replica dinamica può presto rivelarsi troppo onerosa a causa dei costi di transazione e del tempo e della dedizione richiesti. Abbiamo quindi cercato di migliorarla, introducendo un metodo per annullare sia il gamma che il vega del portafoglio.

Dato che il sottostante non può essere determinato in termini di greche, fatta eccezione per il delta, questo tipo di *hedge* richiede di acquistare o vendere altre due opzioni (una se l'obiettivo è quello di annullare solo il gamma o solo il vega).

Per rendere più chiari i concetti elaborati, abbiamo anche visto un caso concreto di replica dinamica su Excel.

Per concludere l'elaborato, nel Capitolo 4 abbiamo preso come esempio le *futures options* su E-mini S&P500. Dopo aver delineato le specifiche contrattuali, abbiamo condotto una semplice analisi di mercato basata sui dati delle 22 opzioni attualmente scambiate. Abbiamo visto come in un mercato rialzista come quello degli indici azionari, gli investitori diano molta più fiducia ai titoli che beneficiano del rialzo dei prezzi, portando a valori e volatilità implicite che aumentano con la *moneyness* e la vita residua.

## 5.2 LIMITI DELLO STUDIO

Le formule di Black sono le soluzioni del modello di Black per il prezzo di non arbitraggio delle opzioni europee. Le opzioni europee si differenziano dalle opzioni americane nella loro impossibilità di venire esercitate prima della scadenza.

La maggior parte delle opzioni CME sono europee, ma fanno eccezione alcune come quelle sui *futures* sullo S&P500. In questi casi, potremmo avere bisogno di calcolare il loro prezzo teorico in modi diversi.

Ci sono tanti modelli atti a valutare le opzioni, oltre a quello Black-Scholes-Merton e alle sue evoluzioni e varie procedure numeriche. Vengono in mente il modello binomiale per la valutazione delle opzioni americane<sup>1</sup> (una procedura numerica a  $n$  stadi che, all'aumentare di  $n$ , rende più precisa la valutazione delle *American-style options*) ma anche il metodo Monte Carlo e i metodi più recenti costruiti con l'ausilio degli algoritmi di Machine Learning.

---

<sup>1</sup> RUBINSTEIN, M., (2005). *Derivati – Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, p. 206-214.

Tra le ipotesi del modello di Black c'è l'omoschedasticità, cioè la volatilità costante nel tempo. Questo comporta che ogni opzione dello stesso tipo dovrebbe avere la stessa volatilità implicita. Abbiamo però visto che nella realtà le opzioni *in and out of the money* tendono ad avere una volatilità implicita più elevata delle opzioni *at the money*. Anche se nella nostra analisi delle *futures options* su E-mini S&P500 la convessità della superficie di volatilità non era poi così accentuata per *strikes* maggiori, il termine “*volatility smile*” è ormai stato coniato per fare riferimento alle inefficienze del modello Black-Scholes-Merton e delle sue evoluzioni.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> RUBINSTEIN, M., (2005). *Derivati – Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, p. 317.



# *Riferimenti Bibliografici*

- [1] ARROW, K. J., “The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing”, *Review of Economic Studies*, Vol. 31, No. 2, pp. 91-96, April 1964.
- [2] BERNSTEIN, P. L., *Capital ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, Simon and Schuster, 1993.
- [3] BLACK, F., “The pricing of commodity contracts”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, Nos. 1-2, pp. 167-179, January-March 1976.
- [4] BLACK, F., and SCHOLES, M., “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654, 1973.
- [5] BOLLERSLEV, T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327, April 1986.
- [6] COMMODITY FUTURES TRADING COMMISSION (CFTC), “History of the CFTC”, [www.cftc.gov](http://www.cftc.gov).
- [7] DEBREU, G., *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press, 1959.
- [8] ENGLE, R. F., “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1007, July 1982.
- [9] FUTURES INDUSTRY ASSOCIATION (FIA), “Global futures and options volume hits record 137 billion contracts in 2023”, 19 January 2024.
- [10] HOLTON, G., “Black (1976) Option Pricing Formula”, June 3<sup>rd</sup>, 2013.
- [11] HULL, J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson Italia, 2022.
- [12] HURN, S., VANCE, L. M., JUN, Y., PETER, C. B. P., *Financial Econometric modeling*, Oxford University Press, 2020.
- [13] ITÔ, K., “On stochastic differential equations”, *Memoirs*, American Mathematical Society, 4, 1951.
- [14] LELAND, H., “Option Pricing and Replication with Transactions Costs”, *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 5, pp. 1283-1301, December 1985.
- [15] LINTNER, J., “Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification”, *Journal of Finance*, Vol. 20, No. 4, pp. 587-615, December 1965.
- [16] MOSSIN, J., “Equilibrium in a Capital Asset Market”, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783, October 1966.
- [17] RESTI, A., e SIRONI, C., *Rischio e valore nelle banche. Misura, regolamentazione, gestione*, Egea Editore, 2021.

- [18] RUBINSTEIN, M., *Derivati - Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 ORE, 2005.
- [19] RUBINSTEIN, M., *A History of the Theory of Investments: My Annotated Bibliography*, John Wiley & Sons, 2011.
- [20] SHARPE, W. F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442, September 1964.