LUISS

Corso di laurea in Economia e Finanza

Cattedra: Computational Tools for Finance

Hedging di Portafogli Azionari Mediante Opzioni Put Sintetiche

Prof. Valerio Marchisio

RELATORE

Prof. Francesco Lippi

CORRELATORE

Lorenzo D'Angelo

CANDIDATO

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

Introduzione

Come proteggere un portafoglio azionario da eventuali perdite? E come, dopo aver così operato, lasciare invariate le opportunità di profitto? In questa ricerca indagheremo un metodo quantitativo, che, unendo le intuizioni di Black-Scholes-Merton ad un'analisi di correlazione, cercherà di dare una risposta esaustiva a queste domande.

Per risposta esaustiva intendiamo un modello che sia in grado sistematicamente di rispondere a cambiamenti nell'ecosistema di mercato in modo tale da calibrare la copertura alle nostre esigenze. Il tutto minimizzando il rischio di liquidità e il livello dei costi di transazione.

Procederemo illustrando i fondamenti teorici e le intuizioni che stanno alla base di un modello che, come quello da noi prodotto, utilizzerà le opzioni come strumento di *hedging*. Più specificamente, opzioni sintetiche mediante *futures*. È stato scelto questo particolare strumento finanziario proprio per ridurre al minimo i costi di transazione e per rendere la copertura più personalizzabile possibile.

All'interno dei primi due capitoli andremo ad analizzare gli specifici aspetti teorici delle opzioni e dei *futures* che saranno poi alla base del nostro modello. Nel capitolo 3 verrà illustrata l'intuizione fondamentale alla base del modello. Successivamente, nel capitolo 4, esamineremo i passaggi matematici e di programmazione che sono stati adottati al fine di giungere alla versione finale del modello. Infine, all'interno del capitolo 5, ne testeremo l'efficacia al variare di diverse condizioni.

CAP 1 Opzioni

1.1 *Le Opzioni*

Le opzioni sono dei contratti finanziari che conferiscono al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere una data quantità di una certa attività ad un determinato prezzo d'esercizio (*strike price*) ad una determinata scadenza o entro tale scadenza, dietro il pagamento di un premio. La quantità di sottostante su cui sono scritti i contratti varia al variare della tipologia del sottostante, ad esempio, ogni contratto di opzione su azioni dà al possessore il diritto di comprare o vendere 100 azioni. Le opzioni europee possono essere esercitate solo alla scadenza del contratto, mentre le opzioni americane possono essere esercitate in qualsiasi momento entro l'*expiration date*.

Le opzioni sono strumenti finanziari derivati, cioè strumenti il cui valore dipende direttamente dal valore di un *asset* sottostante. L'attività sottostante può essere di vario genere; esistono contratti scritti su materie prime, azioni, indici azionari, obbligazioni, tassi di cambio, ecc. Le opzioni vengono negoziate sia nei mercati *over the counter*[1] sia nei mercati regolamentati (in borsa), tra i principali mercati di borsa per le opzioni figurano la CBOE (Chicago Board Options Exchange), il NYSE American (New York Stock Exchange) e in Europa l'Eurex (European Exchange).

Esistono due tipologie fondamentali di contratti d'opzione, le *calls* e le *puts*:

- Le opzioni *call* conferiscono al proprietario il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare una specifica attività
- Le opzioni *put* conferiscono al proprietario il diritto (ma non l'obbligo) di vendere una specifica attività

Per ogni tipologia di contratto si possono assumere due tipi di posizione, in particolare:

[1] Un mercato *over the counter* (OTC) è una tipologia di mercato finanziario dove gli scambi avvengono direttamente tra le parti, e non all'interno di mercati regolamentati come le borse. I principali attori nei mercati OTC sono le grandi istituzioni finanziarie e i gestori di fondi, che negoziano sia azioni, obbligazioni, ecc. Sia, per la maggior parte, derivati.

- Posizione lunga (*long position*): la assume chi compra un determinato contratto. Ad esempio, nel momento in cui un *trader* acquista una *call* (o una *put*) si dice che ha assunto una posizione lunga su quell'opzione.

- Posizione corta (*short position*): la assume chi vende un determinato contratto. Ad esempio, nel momento in cui un *trader* vende una *call* (o una *put*) si dice che ha assunto una posizione corta su quell'opzione.

Chi compra l'opzione ha un costo iniziale (il prezzo della *call/put*) ma è soggetto ad un possibile guadagno. Guadagno che nel caso della *long call* è teoricamente illimitato (non esiste un limite superiore al prezzo del sottostante) e che nel caso della *long put* è massimo quando il sottostante vale zero.

Chi vende l'opzione ha un guadagno iniziale (il prezzo della *call/put*) ma è soggetto ad una possibile perdita. Perdita che nel caso della *short call* è teoricamente illimitata e che nel caso della *short put* è massima quando il sottostante vale zero.

1.1.1 *Payoffs delle opzioni*

Le possibili posizioni su opzioni[2], dunque, sono quattro: *long call, short call, long put e short put*. I relativi *payoff*, associati ad ogni diversa posizione, sono riassunti nella seguente tabella. Dove c e p sono rispettivamente il prezzo della *call* e della *put*, K è lo *strike price* e S_0 è il valore del sottostante.

[2] D'ora in poi, quando parleremo di opzioni, faremo sempre riferimento ad opzioni di tipo europeo.

Posizione	*Call Payoff*	*Put Payoff*
Long	$\mathbf{max}(\boldsymbol{S_0 - K}, \mathbf{0}) - \boldsymbol{c}$	$\mathbf{max}(\boldsymbol{K - S_0}, \mathbf{0}) - \boldsymbol{p}$
Short	$\mathbf{min}(\boldsymbol{K - S_0}, \mathbf{0}) + \boldsymbol{c}$	$\mathbf{min}(\boldsymbol{S_0 - K}, \mathbf{0}) + \boldsymbol{p}$

Tabella n°1. I quattro payoffs delle posizioni su opzioni

Può essere utile visualizzare le quattro differenti posizioni possibili, e i loro *payoffs*, nel cosiddetto *payoff diagram*. Dove troviamo sull'asse delle ordinate il *payoff* della relativa posizione e sull'asse delle ascisse il prezzo del sottostante (S_0).

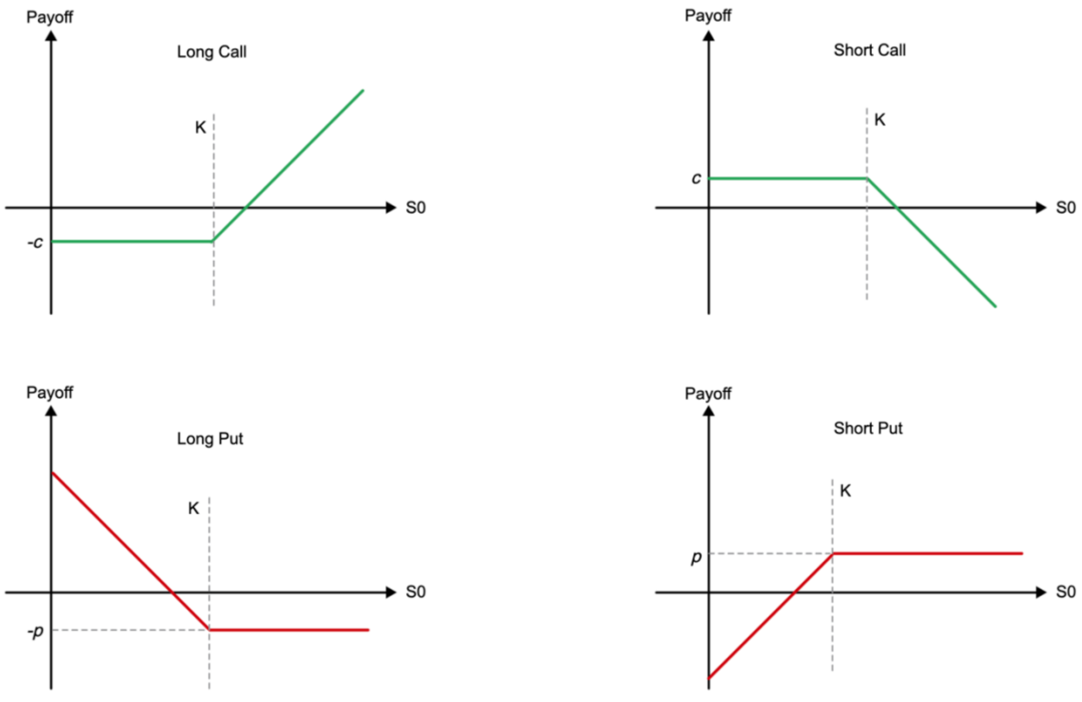


Grafico n°1. Le quattro possibili posizioni su opzioni, e i loro payoffs, dove c rappresenta il prezzo della call, p il prezzo della put, K lo strike e S0 il prezzo del sottostante

1.2 *Determinanti del prezzo delle opzioni*

Il prezzo di un'opzione è influenzato da diversi fattori, che insieme determinano il suo valore di mercato. Questi fattori sono:

1. **Valore dell'asset sottostante**: per le opzioni *call* , un aumento del prezzo del sottostante fa registrare un conseguente aumento del valore del contratto d'opzione. Al contrario, per le opzioni *put*, è una diminuzione del prezzo del sottostante a far registrare un aumento del valore del contratto.

2. ***Strike Price***: opzioni con prezzi d'esercizio più vicini al prezzo corrente del sottostante sono generalmente più costose, in quanto è maggiore la probabilità che esse vengano esercitate. Inoltre, all'aumentare del prezzo d'esercizio il valore delle *calls* diminuisce, mentre quello delle *puts* aumenta.

3. **Vita residua**: il tempo rimanente fino alla scadenza del contratto influisce positivamente sul valore delle opzioni sia *call* che *put.* Più tempo deve trascorrere per arrivare alla scadenza, maggiore è il tempo durante il quale il prezzo dell'asset sottostante può muoversi a favore del possessore del contratto, aumentando il valore sia delle *calls* che delle *puts*.

4. **Volatilità del sottostante**: se la volatilità aumenta, aumenta la probabilità di osservare significativi movimenti del prezzo del titolo sottostante. Ora, dato che le opzioni sono posizioni *asimmetriche*, un'alta volatilità si traduce in un'elevata probabilità che l'opzione finisca *in the money*, il che, ovviamente, rende le opzioni scritte su asset molto volatili più costose. Per capire la differenza tra una posizione *simmetrica* rispetto ad una *asimmetrica* è utile ricorrere ad un esempio. Prendiamo – seguendo l'esempio di J. Hull - un'azione, il fatto che aumenti la volatilità implica l'aumento della probabilità di osservare grandi apprezzamenti o deprezzamenti. Per il possessore, questi due effetti si compensano perfettamente tra loro. Nel caso di un'opzione *call*, il possessore trae beneficio dai rialzi ma ha un rischio di ribasso (*downside risk*) limitato, infatti non può perdere più del premio pagato per l'opzione.

L'azione, dunque, rappresenta una posizione *simmetrica* mentre la *call* rappresenta una posizione *asimmetrica*. (John C. Hull, 2022; tr. it. 2022)

5. **Tasso d'interesse *risk-free***: per capire come variazioni del tasso d'interesse influiscono sul prezzo delle opzioni, occorre distinguere due differenti effetti di queste variazioni. Il primo effetto è che all'aumentare del tasso d'interesse, tendono ad aumentare anche i tassi di crescita attesi dei prezzi azionari. Il secondo è che, nell'ottica del possessore dell'opzione, l'aumento del tasso *risk-free* fa diminuire il valore attuale dei flussi di cassa futuri. Il risultato combinato di questi due effetti è che, all'aumentare del tasso d'interesse privo di rischio, il prezzo delle *calls* tende a crescere, e quello delle *puts* a diminuire. (Ibidem)

6. **Dividendi**: se è previsto uno stacco di dividendi per una determinata azione il valore della stessa diminuisce. Ricordando la relazione tra prezzo del sottostante e valore dell'opzione di cui al punto 1, uno stacco di dividendi fa diminuire il prezzo delle opzioni *call* e aumentare il prezzo delle opzioni *put*.

Tutti e sei questi fattori si combinano e, insieme, determinano il prezzo di un'opzione. La valutazione complessiva di questi elementi, e di come concorrono alla formazione del prezzo, richiede l'uso di modelli matematici complessi come il modello di Black-Scholes-Merton, vincitore del premio Nobel per l'economia nel 1997.

1.3 *Put-Call Parity*

La relazione più importante tra il prezzo delle opzioni *call* e *put* europee, è la cosiddetta *put-call parity*. Il principio alla base della *put-call parity* è quello di non arbitraggio, principio per cui, in mercati efficienti, non è possibile realizzare profitti privi di rischio.

Prendiamo due portafogli, il primo, composto da una *call* europea e un importo pari a Ke^{-rT} di denaro. Il secondo composto da una *put* europea e un'azione. Le opzioni hanno lo stesso *strike* e la stessa scadenza. Entrambi i portafogli a scadenza hanno un valore di K se $S_0 \leq K$, e di S_0 se $K < S_0$. Dunque, i due portafogli devono avere lo stesso valore al tempo zero, altrimenti, un arbitraggista riuscirebbe a bloccare un profitto privo di rischio vendendo il portafoglio più costoso e acquistando quello meno dispendioso. L'arbitraggista conterebbe, infatti, sul fatto che entrambi i portafogli godono dello stesso *payoff* a scadenza.

Da cui, la formula della *put-call parity*:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Dove:

- $\boldsymbol{c}$ è il prezzo dell'opzione *call* europea
- $\boldsymbol{p}$ è il prezzo dell'opzione *put* europea
- $\boldsymbol{S_0}$ è il prezzo corrente dell'*asset* sottostante
- $\boldsymbol{K}$ è il prezzo d'esercizio delle opzioni
- $\boldsymbol{r}$ è il tasso d'interesse privo di rischio (*risk-free*)
- $\boldsymbol{T}$ è la scadenza delle opzioni (in anni)
- $\boldsymbol{e^{-rT}}$ è il fattore di attualizzazione composto continuamente

La condizione di parità non è solo utilizzata ai fini dell'identificazione di possibili opportunità di arbitraggio, ma può essere sfruttata per una serie di altri scopi. Ad esempio, utilizzando la *put-call parity*, i *traders* possono creare posizioni sintetiche che replicano il *payoff* di un altro strumento (il tema delle opzioni sintetiche verrà trattato nel paragrafo 1.8). Possono proteggere i loro investimenti[3], o addirittura valutare le aspettative del mercato riguardo la volatilità futura. Una discrepanza tra prezzo teorico e prezzo di mercato, infatti, può riflettere l'intuizione degli operatori riguardo possibili movimenti significativi del prezzo di un determinato *asset*.

[3] Un *trader* potrebbe coprire una posizione lunga su azioni acquistando una *put* e vendendo una *call* con stesso *strike* e scadenza.

Quando il sottostante è un'azione che paga dividendi durante la vita delle opzioni, la formula della *put-call parity* diventa:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Dove D indica il valore attuale dei dividendi.

1.4 *Il modello di Black-Scholes-Merton*

Il modello di Black-Scholes-Merton è uno dei contributi più significativi e rivoluzionari nel mondo della finanza, e più specificatamente, nel campo del *pricing* delle opzioni. Esso ha fornito un metodo matematico, che partendo da alcune ipotesi fondamentali, consente di valutare il prezzo teorico di opzioni di tipo europeo. Il modello è stato sviluppato all'inizio degli anni '70 da Fischer Black e Myron Scholes e indipendentemente da Robert Merton. La rilevanza della ricerca è stata riconosciuta globalmente nel 1997, quando Scholes e Merton furono insigniti del premio Nobel per l'economia (Black era già deceduto e non poté essere incluso), grazie proprio al lavoro svolto circa vent'anni prima.

Questo modello ha avuto un enorme impatto sul mondo della finanza e sulla struttura dei mercati finanziari. Con un modello credibile a disposizione, il *trading* di opzioni, ma anche di altri derivati finanziari è esploso. Le istituzioni finanziarie hanno potuto sviluppare nuovi prodotti derivati, sapendo di avere uno strumento valido a disposizione per valutarli. I *traders* hanno potuto implementare nuove strategie di arbitraggio in cui sono in grado di sfruttare a loro favore le discrepanze tra il prezzo teorico e quello di mercato. Quest'ultimo punto, e non è da poco, ha reso i mercati più efficienti di quanto non lo fossero prima; quando un arbitraggista conclude un'operazione con successo non solo trae un vantaggio per sé stesso, ma muove anche il mercato (i prezzi) verso l'equilibrio.

Fondamentale per la nostra analisi, ed è qui che ci concentreremo, è stato l'impatto del modello Black-Scholes-Merton sulle strategie di *hedging*. La nuova scoperta, infatti, ha aperto la strada ad innovative strategie di copertura che includono la valutazione di vari coefficienti di sensibilità del prezzo delle opzioni a diversi fattori. Queste misure di sensibilità prendono il nome di *Option Greeks* (greche), e consentono ai traders di implementare strategie dinamiche, che non solo sono più precise, ma che sono anche capaci di reagire meglio a movimenti di mercato improvvisi.

1.4.1 *Le ipotesi del modello di Black-Scholes-Merton*

Le ipotesi fondamentali sottostanti il modello di Black-Scholes-Merton sono:

1. Il prezzo dell'azione (il sottostante) si distribuisce come una log-normale.
2. Il prezzo dell'azione segue un moto Browniano geometrico del tipo:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma\, S\, dz$$

Dove:

- $\boldsymbol{S}$ è il prezzo dell'azione (sottostante)
- $\boldsymbol{\mu}$ è il tasso di rendimento atteso dell'azione
- $\boldsymbol{\sigma}$ è la volatilità del prezzo del sottostante

Con μ e σ costanti.

3. Sono consentite le vendite allo scoperto, e non esistono limiti all'utilizzo dei relativi profitti.
4. I titoli sono perfettamente divisibili e non esistono costi di transazione o tasse.
5. L'azione non paga dividendi durante la vita dell'opzione.
6. Non esistono opportunità di arbitraggio.
7. I titoli sono negoziati continuamente.
8. Il tasso d'interesse *risk-free* a breve termine è uguale per tutte le scadenze.
9. Ci troviamo in un mondo neutrale verso il rischio.

Il punto 9 merita un'attenzione particolare. In un mondo neutrale al rischio, si presuppone che gli investitori siano indifferenti al rischio, il che significa che non richiedono un premio di rischio addizionale per detenere titoli più rischiosi. La conseguenza principale di questa semplificazione è che ogni futuro flusso di cassa va attualizzato ad un solo tasso d'interesse, quello privo di rischio. Ciò agevola notevolmente l'analisi del modello. A primo sguardo questa potrebbe sembrare una semplificazione eccessiva, e in effetti lo è. Come sappiamo dagli studi di economia comportamentale non ci troviamo affatto in un mondo neutrale verso il rischio, ma anzi, in un mondo avverso al rischio. Non solo, ogni operatore, infatti, possiede un personale grado di avversione che non è per forza simile a quello degli altri. Nonostante ciò, ed è qui che risiede la forza del modello di Black-Scholes-Merton, le soluzioni ottenute sono valide sempre, non solo nel caso in cui gli investitori sono neutrali verso il rischio. Quando passiamo da un mondo neutrale verso il rischio ad un mondo di avversione al rischio accadono due cose: cambia il tasso d'interesse per attualizzare il valore dei derivati e cambia il valore atteso di essi. Questi due effetti si compensano perfettamente tra di loro, rendendo le soluzioni del modello valide in ogni scenario di propensione al rischio. (John C. Hull, 2022; tr. it. 2022)

1.4.2 *L'equazione differenziale fondamentale*

L'equazione fondamentale del modello Black-Scholes-Merton è:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Dove:

- $\boldsymbol{f}$ è il prezzo del derivato
- $\boldsymbol{S}$ è il prezzo dell'azione sottostante
- $\boldsymbol{r}$ è il tasso d'interesse risk-free
- $\boldsymbol{t}$ è il tempo
- $\boldsymbol{\sigma}$ è la volatilità del sottostante

L'equazione differenziale, se risolta per f, porta a diverse soluzioni, una per ogni derivato che dipende da S.

Nel caso della valutazione di opzioni *call* e opzioni *put* europee le soluzioni all'equazione differenziale fondamentale sono:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Dove:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Come di consueto c e p sono rispettivamente il prezzo dell'opzione *call* e dell'opzione *put*, K è lo strike price, S_0 è il prezzo del sottostante (l'azione), r il tasso d'interesse privo di rischio, T la vita residua dell'opzione e σ la volatilità del prezzo del sottostante. $N(d_x)$ indica la distribuzione cumulativa di una variabile normale con media nulla e deviazione standard pari a 1, ed è calcolato come l'integrale da $-\infty$ a x della funzione di densità di probabilità normale standard.

1.5 *Interpretazione di* $N\ (d_1)$ *e* $N\ (d_2)$

Facciamo riferimento a un interessante *paper* di Lars Tyge Nielsen, *Understanding N(d1) and N(d2): Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model* (1992), dedicato all'interpretazione dei fattori $N(d_1)$ e $N(d_2)$.

Prima di tutto, dividiamo il *payoff* dell'opzione *call* in 2 componenti:

- Il pagamento del prezzo d'esercizio (K)
- La consegna delle azioni (il sottostante, S_0)

Entrambi dipendono dall'esercizio dell'opzione. Ciò si verifica solo se l'opzione è *in the money*. Cioè, quando il prezzo delle azioni a scadenza, S_0, supera il prezzo di esercizio, K. La probabilità che si verifichi questo evento è pari a P ($S_0 > K$).

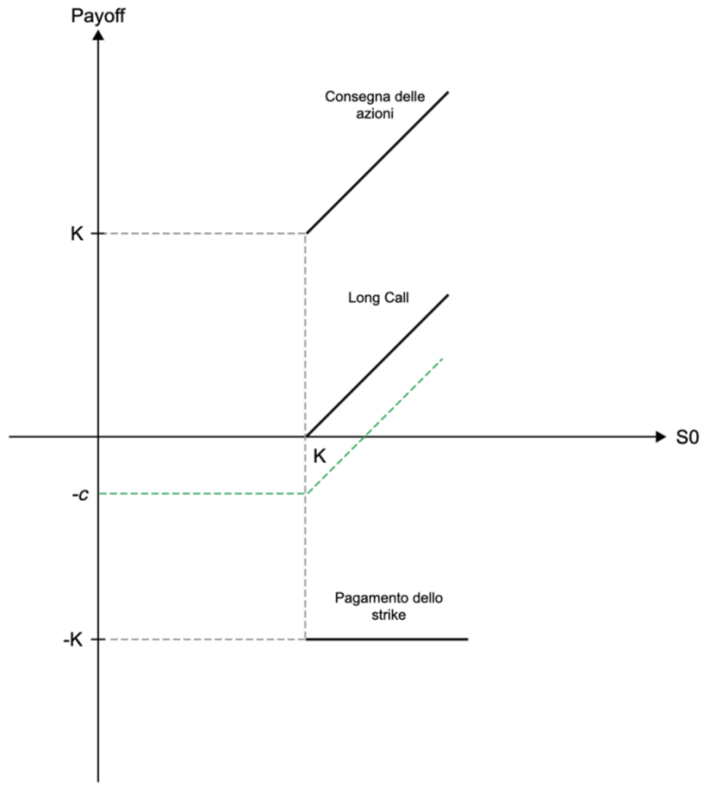


Grafico n°2. Payoff di un'opzione call e le sue componenti

Ora calcoliamo il valore atteso e il valore attuale di tutte e due le componenti.

1. Pagamento dello *strike* e $N(d_2)$

Il valore atteso del pagamento del prezzo di esercizio è dato dallo *strike* K moltiplicato per la probabilità che il prezzo delle azioni superi il prezzo di esercizio (probabilità d'esercizio):

$$-K * P(S_0 > K)^{4}$$

Per determinare il valore attuale del termine precedente lo moltiplichiamo per il fattore di attualizzazione e^{-rT}, trovando:

$$-Ke^{-rT} * P(S_0 > K)$$

Confrontando questo termine con il secondo termine dell'equazione Black-Scholes-Merton per il prezzo della *call*:

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Troviamo che $N(d_2) = P(S_0 > K)$ *(1)*. Quindi $N(d_2)$ è la probabilità (*risk adjusted*) che l'opzione *call* venga esercitata.

2. Consegna delle azioni e $N(d_1)$

Il valore atteso della consegna delle azioni è condizionato dall'esercizio dell'opzione. È quindi il prodotto del valore atteso condizionato del ricevimento di S_0, dato l'esercizio dell'opzione, per la probabilità di esercizio:

$$E(S_0|S_0 > K) * P(S_0 > K)$$

Data la *(1)* scriviamo:

[4] Il segno negativo sta a indicare un'uscita di denaro, un pagamento.

$$E(S_0|S_0 > K) * N(d_2)$$

Si noti che il primo termine di questa equazione è un'aspettativa condizionata. Si tratta del valore atteso di S_0, considerando solo i valori futuri di S_0 che superano il prezzo di esercizio K. Se non si aggiungesse questo vincolo, si avrebbe l'aspettativa non condizionata di S_0 pari a $E(S_0) = S_0 e^{rT}$. Data la condizionalità, dunque, $E(S_0|S_0 > K)$ sarà sempre superiore a $E(S_0)$, proprio perché nel calcolo dell'aspettativa condizionata rientrano soltanto i prezzi dell'azione che superano il valore dello *strike*. Ricapitolando abbiamo che:

$$E(S_0|S_0 > K) * N(d_2) > E(S_0) * N(d_2) = S_0 e^{rT} * N(d_2)$$

Consideriamo ora il valore attuale del termine precedente, scontandolo sempre per il fattore e^{-rT}, troviamo:

$$E(S_0|S_0 > K) e^{-rT} * N(d_2) > E(S_0) * N(d_2) e^{-rT} = S_0 * N(d_2)$$

Confrontando questo termine con il primo termine dell'equazione Black-Scholes-Merton per il prezzo della *call*:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Troviamo che:

$$S_0 N(d_1) = E(S_0|S_0 > K) e^{-rT} * N(d_2) > E(S_0) * N(d_2) e^{-rT} = S_0 * N(d_2)$$

Il termine $N(d_1)$ garantisce, dunque, che il valore atteso attualizzato del prezzo dell'azione ricevuto a scadenza sia maggiore del valore attuale dell'azione.

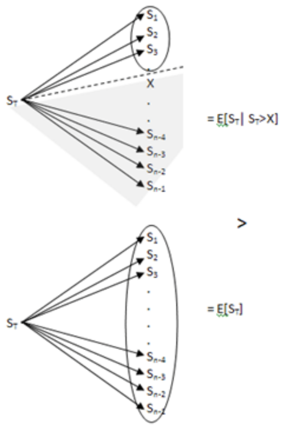
UNDERSTANDING RISK ADJUSTED PROBABILITIES THROUGH THE VALUE OF A CALL OPTION		
	PAYMENT OF EXERCISE PRICE	RECEIPT OF STOCK
Payment/ Receipt amount: Exercise Not exercised	$-X$ 0	S_T 0
Payment/ Receipt type on exercise	Deterministic – can only take one value	Probabilistic – Must therefore consider expected value of S_T. Values of S_T must be > X
Expectation of amount on exercise	$-X$	
Probability: Of exercise Of not being exercised	$P(S_T>X)$ $P(S_T<=X)$	$P(S_T>X)$ $P(S_T<=X)$
Discount factor	e^{-rt}	e^{-rt}
Present Value= Expectation * Discount Factor* Probability	$-X e^{-rt} P(S_T>X)$	$E[S_T \mid S_T>X] e^{-rt} P(S_T>X)$ **>** $E[S_T] e^{-rt} P(S_T>X) = SP(S_T>X)$
Comparison with Black Scholes call option value formula components	$-X e^{-rt} N(d_2)$	$SN(d_1)$
RESULTS	**$P(S_T>X) = N(d_2)$**	**$N(d_1) > N(d_2)$**

Tabella n° 2. Understanding risk adjusted probabilities through the value of a call option

Fonte: https://financetrainingcourse.com/education/2011/03/option-pricing-black-scholes-probabilities-explained-understanding-nd1-vs-nd2/

Concludiamo che $N(d_1)$ incorpora sia la probabilità di esercizio, data da $N(d_2)$, sia il fatto che il ricevimento delle azioni al momento dell'esercizio dipende dai valori futuri condizionati che il prezzo delle azioni assumerà alla data di scadenza. In particolare, ciò significa che prezzi delle azioni superiori allo *strike price* sono considerati come dati quando si calcola il valore futuro atteso delle azioni a scadenza. Considerando ciò, la diretta conseguenza è che $N(d_1)$ risulterà sempre maggiore di $N(d_2)$:

$$N(d_1) > N(d_2)$$

1.6 *Option Greeks*

Nel capitolo *3.2* abbiamo elencato i fattori che influenzano i prezzi delle opzioni, che sono rispettivamente: il valore del sottostante, lo *strike*, la vita residua, la volatilità del sottostante, il tasso d'interesse privo di rischio e l'eventuale stacco di dividendi. Ognuno di essi rappresenta una diversa forma di rischio per chi detiene una o più posizioni su opzioni. Una questione fondamentale per i *traders* e per i gestori di portafoglio è, dunque, avere degli strumenti validi che consentano la misurazione di questi rischi. Le *Option Greeks* rispondono a questa domanda. Ogni lettera greca misura, infatti, una diversa entità di rischio per le opzioni.

Le *Option Greeks* sono:

1. ***Delta* (Δ)**: il *delta* misura la sensibilità del prezzo di un'opzione rispetto a variazioni nel prezzo del sottostante. Si calcola quindi come la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'*asset* sottostante.

2. ***Gamma* (Γ)**: il *gamma* di un'opzione indica quanto il *delta* cambierà in risposta a un movimento nel prezzo del sottostante. È definito, dunque, come la derivata seconda della funzione prezzo dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante.

3. ***Theta* (Θ)**: il *theta* misura la variazione del valore dell'opzione in funzione del trascorrere del tempo. Si calcola come la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione rispetto al tempo.

4. ***Vega* (*V*)**: il *vega* di un'opzione misura la sensibilità del prezzo della stessa rispetto a variazioni della volatilità del sottostante. È definita come la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione rispetto alla volatilità del sottostante.

5. ***Rho* (*P*)**: il *rho* quantifica l'effetto delle variazioni dei tassi di interesse sul prezzo delle opzioni. Si calcola come la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione rispetto al tasso d'interesse *risk-free*.

Per gestire in maniera ottimale un portafoglio di opzioni è fondamentale avere una strategia di gestione del rischio che faccia riferimento alle *greche*. Non è raro, infatti, che all'interno dei *trading floors* delle principali banche mondiali esistano dei limiti ai rischi a cui i singoli *trade* sono esposti. Questi limiti sono sempre espressi in termini di valore delle *option greeks*. Ad esempio, esiste un limite giornaliero all'esposizione al rischio di variazioni nel prezzo del sottostante che i *traders* devono rispettare: il cosiddetto *delta limit*.

1.7 *Delta*

Fondamentale ai fini della nostra ricerca è comprendere come risponde il valore di un'opzione a variazioni del valore del sottostante. Come abbiamo introdotto nel capitolo 3.6, il *delta* di un'opzione è una misura che quantifica la sensibilità del prezzo della stessa rispetto a variazioni del prezzo del sottostante. Ad esempio, un *delta* pari a 0,7 indica che per ogni aumento di 1$ del prezzo del sottostante, il prezzo della nostra opzione crescerà di 0,7$. Matematicamente il *delta* si calcola come la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'*asset* sottostante.

Per la *call*:

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S_0}$$

Dove con c indichiamo la funzione prezzo della *call*.

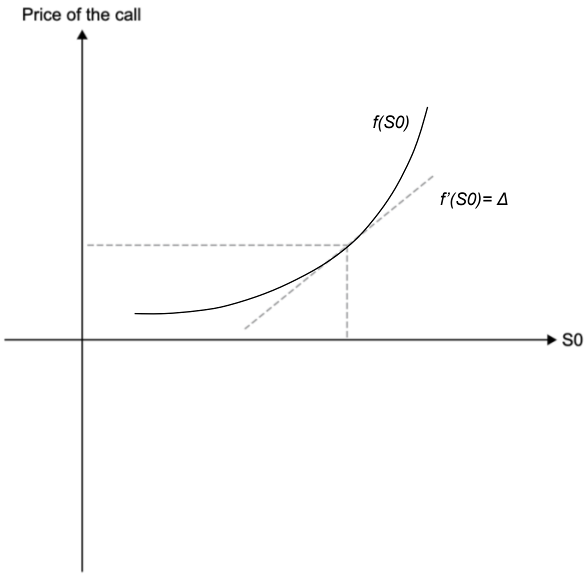


Grafico n° 3. Il calcolo del delta di una call come derivata della funzione f(S0)

Per la put:

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S_0}$$

Dove con p indichiamo la funzione prezzo della *put*.

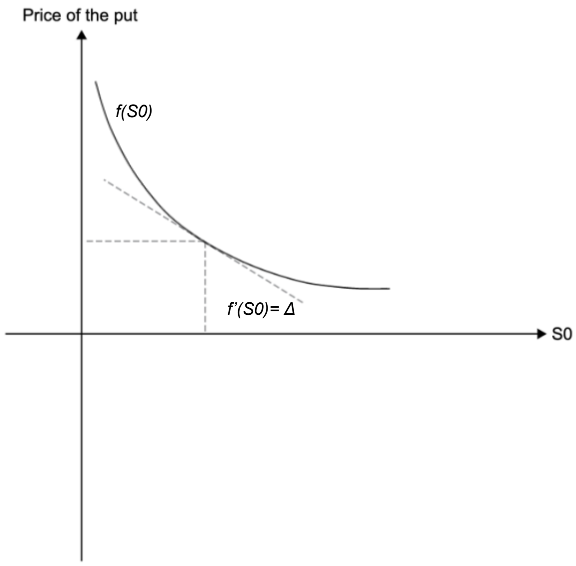


Grafico n° 4. Il calcolo del delta di una put come derivata della funzione f(S0)

1.7.1 *Le proprietà del Delta*

Il valore del *delta* è compreso tra 0 e 1 per una *call*, e tra -1 e 0 per una *put*; il motivo di ciò è relativamente semplice se illustrato tramite un esempio pratico. Prendiamo come modello una posizione *long call* scritta su un'azione. Quando la *call* è *deep in the money*[5], abbiamo la certezza che essa venga esercitata. Dunque, la posizione è analoga a quella di detenere un'azione acquistata in precedenza ad un prezzo pari allo *strike* (*K*). Ora, detenere un'azione ha evidentemente un delta pari a 1, in quanto un aumento (o una diminuzione) di *X*$ del prezzo dell'azione comporta un aumento (o una diminuzione) di *X*$ del valore della mia posizione. Quando la *call* è *deep out of the money*[6], invece, abbiamo la certezza che l'opzione non verrà esercitata. Dunque, non esercitando l'opzione, non entreremo mai in possesso delle azioni. Ora, non entrando mai in possesso delle azioni, variazioni del prezzo delle stesse non influiscono sul valore della nostra posizione i.e. il *delta* della posizione è uguale a 0.

[5] Quando un'opzione *call* è *deep in the money* significa che il prezzo corrente del sottostante è di gran lunga maggiore dello *strike price* (*K*).
[6] Quando un'opzione *call* è *deep out of the money* significa che il prezzo corrente del sottostante è di gran lunga inferiore rispetto allo *strike price* (*K*).

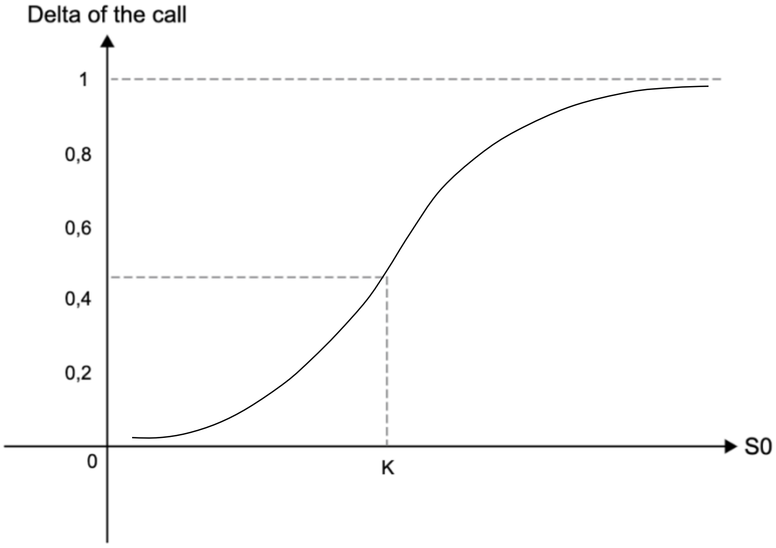


Grafico n° 5. Il range di valori che il delta di una call può assumere in funzione del prezzo del sottostante

Nel caso di una posizione *long put* (sempre scritta su un'azione), diversamente, abbiamo che quando la *put* è *deep in the money*[7], c'è la certezza che essa venga esercitata. Dunque, la posizione è analoga a quella di vendere allo scoperto un'azione ad un prezzo pari allo *strike* (*K*). Ora, assumere una posizione *short* su un'azione ha evidentemente un delta pari a -1, in quanto un aumento di *X*$ del prezzo dell'azione comporta una riduzione di *X*$ del valore della mia posizione, mentre una diminuzione di *X*$ del prezzo dell'azione comporta un aumento di *X*$ del valore della mia posizione. Quando la *put* è *deep out of the money*[8], invece, abbiamo la certezza che l'opzione non verrà esercitata. Dunque, non esercitando l'opzione, non assumeremo mai una posizione corta sulle azioni. Ora, non vendendo mai allo scoperto le azioni, variazioni del prezzo delle stesse non influiscono sul valore della nostra posizione i.e. il *delta* della posizione è uguale a 0.

[7] Quando un'opzione *put* è *deep in the money* significa che il prezzo corrente del sottostante è di gran lunga inferiore rispetto allo *strike price* (*K*).
[8] Quando un'opzione *put* è *deep out of the money* significa che il prezzo corrente del sottostante è di gran lunga maggiore dello *strike price* (*K*).

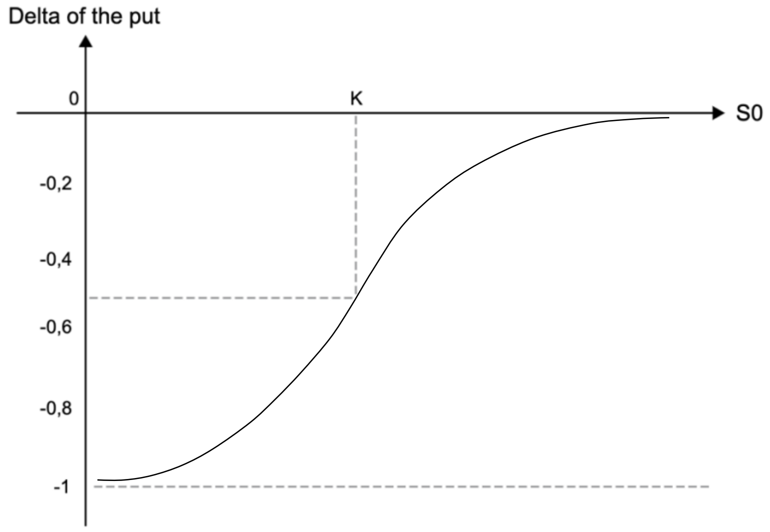


Grafico n° 6. Il range di valori che il delta di una put può assumere in funzione del prezzo del sottostante

Dai grafici n°5 e n°6 notiamo come il *delta* varia più velocemente nel momento in cui l'opzione (sia *call* che *put*) è *at the money*, cioè quando il prezzo del sottostante è uguale allo *strike* (*K*). Questa proprietà può essere dimostrata seguendo due approcci differenti:

- Quando il valore dell'*asset* sottostante si approssima, o addirittura è uguale allo *strike*, piccolissime variazioni di S_0 sono cruciali per decidere se esercitare o meno l'opzione. La diretta conseguenza di ciò è che anche piccolissime variazioni di S_0, se in prossimità di *K*, determinano grandi movimenti del prezzo dell'opzione i.e. il *delta* varia più velocemente.

- Seguendo un approccio matematico, se disegnassimo la retta tangente alla curva nei grafici n°5 e n°6 non sarebbe altro che la derivata prima della funzione *delta*. Ricordando che il *delta* è a sua volta la derivata prima della funzione prezzo dell'opzione, concludiamo che la retta tangente in questione è la derivata seconda della funzione prezzo dell'opzione (rispetto a S_0). Dal capitolo 1.6 sappiamo che la derivata seconda in questione è il *gamma* (Γ) dell'opzione. La retta tangente ha inclinazione massima quando $S_0 = K$, di conseguenza il *gamma* ha un punto di massimo in $S_0 = K$, ciò comporta che il *delta*, in prossimità di K, varia più velocemente al variare di S_0.

1.7.2 *Relazione tra Vita Residua e Delta*

Con l'avvicinarsi della scadenza dei contratti, il *delta* di opzioni *call* e *put* varia in maniera differente. A giocare un ruolo centrale in questa relazione non è solo la tipologia di contratto, esso sia *call* o *put*, ma anche se l'opzione risulta *in the money, at the money* o *out of the money* in prossimità della scadenza.

Partiamo dal caso di una *call*:

- Se l'opzione è *in the money*, il *delta* si avvicina a 1 man mano che la scadenza si approssima.

- Se l'opzione è *at the money*, il *delta* tende ad essere un valore vicino a 0.5, indicando l'equiprobabilità degli eventi in cui la *call* termina *in the money* o *out of the money* a scadenza.

- Se l'opzione è *out of the money*, il *delta* tende a diminuire fino a 0 con l'avvicinarsi della scadenza.

Nel caso di una *put*:

- Se l'opzione è *in the money*, il *delta* si avvicina a -1 man mano che la scadenza si approssima.

- Se l'opzione è *at the money,* il *delta* tende ad essere un valore vicino a -0.5, indicando l'equiprobabilità degli eventi in cui la *put* termina *in the money* o *out of the money* a scadenza.

- Se l'opzione è *out of the money*, il *delta* tende ad aumentare fino a 0 con l'avvicinarsi della scadenza

Contratto	*out of the money*	*at the money*	*in the money*
Delta della *Call*	0↓	≈0.5	1↑
Delta della *Put*	0↑	≈-0.5	-1↓

Tabella n° 3. Comportamento del delta in prossimità della scadenza. La freccia verso l'alto sta a indicare un avvicinamento al valore da numeri inferiori, la freccia verso il basso da numeri superiori

Il concetto chiave da comprendere per intuire la relazione tra vita residua e *delta* di un'opzione è strettamente legato a ciò che è stato enunciato nel paragrafo 1.7.1. In quel caso, per illustrare gli estremi dei valori che può assumere il *delta*, si richiamavano i concetti di opzione *deep in the money* e *deep out of the money*. Ora, ammettiamo che il prezzo del sottostante di una *call* sia leggermente sopra lo *strike*, la *call* dunque è *in the money* ma sicuramente non è *deep in the money* (ricordiamo che la condizione per definire una *call deep in the money* è quella di registrare un prezzo del sottostante di gran lunga superiore allo *strike*). A questo punto, se la scadenza è relativamente lontana il *delta* si attesterà su un valore di poco superiore a 0.5. Se, al contrario, la scadenza è molto vicina (nell'ordine di grandezza pochi giorni/ore) il *delta* si attesterà su un valore prossimo a 1. Questo perché il prezzo del sottostante ha poco tempo per muoversi significativamente e diminuire al di sotto dello *strike*. In termini probabilistici, è molto improbabile che la *call* finisca *out of the money*. La diretta conseguenza di ciò è che l'opzione, nonostante sia *in the money* in termini di valore del sottostante di fatto risulta *deep in the money* per il ruolo giocato dal fattore tempo. Evidentemente la stessa logica si può applicare analogamente ai contratti *put*.

1.7.3 *Calcolo del delta*

Nel caso di un'opzione *call* europea scritta su un titolo che non paga dividendi, il *delta* risulta pari a:

$$\Delta_c = N(d_1)$$

Se il titolo paga dei dividendi durante la vita dell'opzione il *delta* sarà:

$$\Delta_c = e^{-qT} N(d_1)$$

Dove:

- $\boldsymbol{q}$ è il *dividend yield* annuo dell'azione
- $\boldsymbol{T}$ è la vita residua dell'opzione
- $\boldsymbol{N(d_1)}$ è il fattore descritto dalla formula di Black-Scholes-Merton

Nel caso di un'opzione *put* europea scritta su un titolo che non paga dividendi, il *delta* risulta pari a:

$$\Delta_p = N(d_1) - 1$$

Se il titolo paga dei dividendi durante la vita dell'opzione il *delta* sarà:

$$\Delta_p = e^{-qT} [N(d_1) - 1]$$

Dove:

- $\boldsymbol{q}$ è il *dividend yield* annuo dell'azione
- $\boldsymbol{T}$ è la vita residua dell'opzione
- $\boldsymbol{N(d_1)}$ è il fattore descritto dalla formula di Black-Scholes-Merton

1.7.4 *Il ruolo del delta nelle coperture*

Il concetto di *delta* di un'opzione è cruciale quando si parla di *hedging* per due motivi:

1. *Delta hedging*: il *delta* è il parametro fondamentale quando si intende coprire un'esposizione su opzioni. Illustriamo la strategia tramite un esempio. Un *trader*, al tempo 0, ha assunto una posizione corta su 10 contratti *call* per l'acquisto di

1000 azioni, il *delta* della *call* è pari a 0,7 e l'azione quota 50$. Il giorno stesso il *trader* intende coprire completamente la sua posizione, a questo punto, egli deve comprare un numero *N* di azioni pari a

$$N_0 = \Delta_0 * 1000 = 0{,}7 * 1000 = 700\ azioni$$

Alla fine del primo giorno il numero di azioni in portafoglio sarà pari a:

$$N_{TOT} = 700\ azioni$$

Una volta effettuata l'operazione la posizione è *delta neutral*, il profitto (o la perdita) sulla *call* è compensato dal profitto (o dalla perdita) sull'azione. Il giorno seguente il prezzo dell'azione scende a 45$, di conseguenza il *delta* scende a 0,6. A questo punto il trader, per rimanere *delta neutral*, deve vendere

$$N_1 = (\Delta_0 - \Delta_1) * 1000 = (0{,}7 - 0{,}6) * 1000 = 0{,}1 * 1000 = 100\ azioni$$

Il secondo giorno, dunque, il numero di azioni in portafoglio sarà pari a:

$$N_{TOT} = 700 - 100 = 600\ azioni$$

Come si evince da questo esempio si tratta di una copertura dinamica, cioè una strategia di *hedging* che deve essere ribilanciata ogni qual volta il prezzo del sottostante si muove.

2. Coperture dinamiche mediante opzioni sintetiche: non è raro che per sviluppare strategie di *hedging* sofisticate si ricorra all'utilizzo di opzioni sintetiche. Questi strumenti permettono di avere un altissimo grado di personalizzazione e, molto spesso, permettono di abbattere in maniera efficace i costi di transazione. Affronteremo in dettaglio questo argomento nel capitolo successivo; per adesso è sufficiente dire che, per il *design* di questi strumenti, il *delta* gioca un ruolo cruciale.

1.8 *Opzioni Sintetiche*

L'obbiettivo di questa ricerca, come abbiamo accennato, è quello di sviluppare una strategia di *hedging* mediante l'utilizzo di opzioni *put* sintetiche. Soffermiamoci per un momento sul termine «sintetico». Un'opzione sintetica non è un contratto *stand-alone* come un'opzione tradizionale, essa infatti viene generata attraverso la combinazione di altri strumenti finanziari. Quando, dunque, si vogliono perseguire gli obbiettivi tipici di un contratto di opzione, senza acquistare direttamente il prodotto sul mercato, si può ricorrere alla creazione sintetica assumendo una posizione su altri prodotti finanziari (azioni, obbligazioni, *futures*, altre opzioni, ecc.).

Per visualizzare meglio questo concetto può essere utile ricorrere ad un esempio. Creiamo un'opzione *long call* sintetica mediante l'utilizzo di azioni e *puts*, i passaggi sono i seguenti:

1. **Posizione lunga sulle azioni**: si acquistano sul mercato le azioni che rappresentano il sottostante della *call* che si intende replicare.

2. **Posizione lunga sulla *put***: si acquistano le opzioni *put* scritte sullo stesso sottostante associate ad un certo *strike price (K)*.

La posizione lunga sulle azioni, permette di beneficiare di eventuali apprezzamenti del titolo, mentre la posizione *long put* consente di detenere una sorta di *assicurazione* nel caso di eventuali deprezzamenti del titolo. Lo scenario peggiore dal punto di vista del detentore della posizione sintetica si verifica quando il prezzo del sottostante (l'azione) diminuisce al di sotto dello *strike price (K)* dell'opzione *put* a scadenza. In questo caso, la perdita potenziale è limitata in quanto le perdite subite sulla posizione lunga su azioni vengono bilanciate dai profitti realizzati sulla *long put.* Il potenziale profitto è teoricamente illimitato in quanto cresce al crescere del prezzo delle azioni. Se, dunque, si acquista uno specifico numero di azioni il *payoff* della posizione sintetica (opzioni e azioni) corrisponderà al *payoff* dell'opzione *call* maggiorato di un fattore $Ke^{-rT} + D$ (1), che noi chiameremo *z* (cfr. capitolo 1, *put-call parity*).

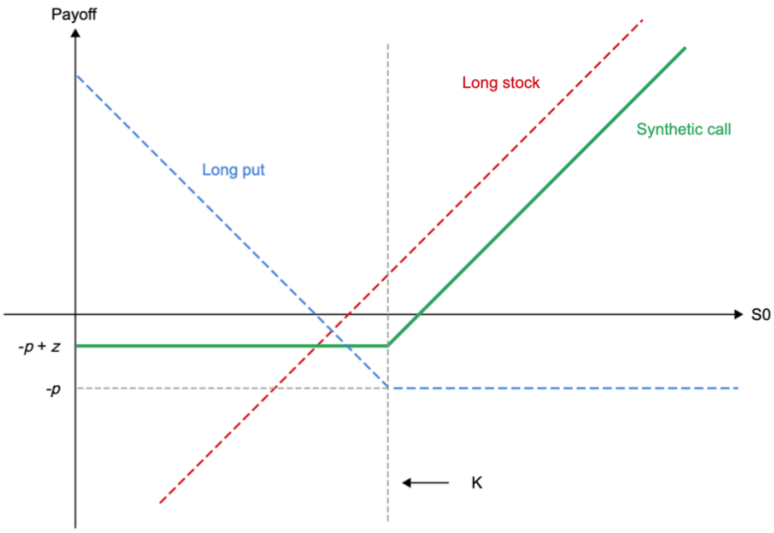


Grafico n° 7. Call sintetica mediante azioni e put, dove p rappresenta il prezzo della put, z il fattore additivo descritto nella (1), K lo strike e S0 il prezzo del sottostante

Diversamente, se vogliamo replicare un'opzione *long put,* mediante l'utilizzo di azioni e opzioni *call*, seguiamo i seguenti passaggi:

1. **Posizione corta sulle azioni**: si vendono allo scoperto le azioni che rappresentano il sottostante della *put* che si intende replicare.

2. **Posizione lunga sulla *call***: si acquistano le opzioni *call* scritte sullo stesso sottostante associate ad un certo *strike price (K).*

La posizione corta sulle azioni permette di beneficiare degli eventuali cali del prezzo del titolo, mentre la posizione lunga sulla *call* consente di avere una sorta di *assicurazione* quando il prezzo delle azioni sale. Lo scenario peggiore dal punto di vista del detentore della posizione sintetica si verifica quando il prezzo dell'azione cresce al di sopra dello *strike price (K)* dell'opzione *call* a scadenza. In questo caso, la perdita potenziale è limitata dato che le perdite sulla posizione corta su azioni sono bilanciate dai profitti realizzati sulla *long call*. Il potenziale profitto, quando il prezzo dell'azione diminuisce sensibilmente, non è illimitato come nel caso della *call* sintetica, ma è pari alla differenza tra il prezzo di vendita delle azioni e il prezzo più basso a cui sono state riacquistate, meno il prezzo pagato per la *call*. Se, come precedentemente, si vende allo scoperto uno specifico numero di azioni il *payoff* della posizione sintetica corrisponderà al *payoff* dell'opzione *put* diminuito di un fattore $z = Ke^{-rT} + D$ (2) (cfr. capitolo 1, *put-call parity*).

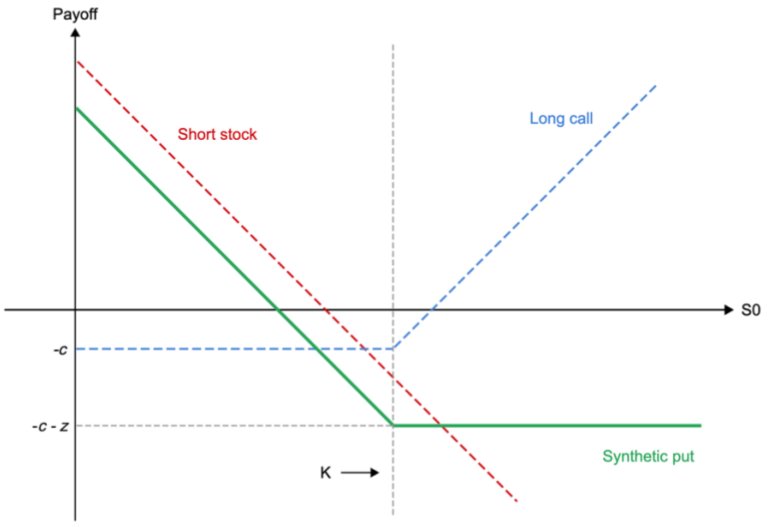


Grafico n° 8. Put sintetica mediante azioni e call, dove c rappresenta il prezzo della call, z il fattore sottrattivo descritto nella (2), K lo strike e S0 il prezzo del sottostante

Nei due esempi precedenti, la posizione sintetica viene creata utilizzando due tipi diversi di strumenti finanziari: le azioni e i derivati. Non è detto che per replicare un'opzione bisogna ricorrere sempre all'utilizzo di un altro derivato, ad esempio, è possibile creare un'opzione *call* sintetica mediante l'utilizzo di obbligazioni e azioni. Si assume una posizione lunga sulle azioni, finanziando questo acquisto emettendo un'obbligazione (quindi con denaro in prestito). Se si acquista un numero preciso di azioni, il *payoff* della posizione sintetica corrisponderà perfettamente al *payoff* di un'opzione *call* scritta sulle stesse azioni. Il numero di azioni da acquistare/vendere si basa sul *delta* dell'opzione.

1.8.1 *Vantaggi delle opzioni sintetiche*

Le opzioni sintetiche possono essere utilizzate per diversi motivi. Un motivo per cui un investitore potrebbe entrare in una posizione sintetica è quello di modificare una posizione già esistente quando le aspettative cambiano. In questo modo è possibile modificare una posizione senza chiudere quella preesistente. Ad esempio, se si detiene già una posizione lunga su un'azione e si teme il rischio di ribasso, si può entrare in una posizione sintetica di opzione *call* acquistando un'opzione *put*. Un altro motivo può essere il seguente: creando un'opzione *call* sintetica, si mantiene comunque il titolo sottostante. Questo può essere importante se ci sono altre considerazioni, come la necessità di mantenere la proprietà della società.

L'utilizzo di posizioni sintetiche può anche ridurre il numero di transazioni da effettuare per modificare la posizione. Ad esempio, prendiamo la situazione sopra descritta di modificare una posizione lunga sul titolo in una posizione *call* sintetica acquistando un'opzione *put*. Nel caso di un *trader* che volesse cambiare la sua posizione da una posizione lunga sull'azione a una posizione *call* senza utilizzare una posizione sintetica, egli dovrebbe vendere l'azione e acquistare l'opzione *call*. In questo modo si utilizzano due transazioni, se invece il trader optasse per una strategia sintetica, dove si acquista solo l'opzione *put*, il numero totale delle transazioni sarebbe pari a uno. L'utilizzo di un minor numero di transazioni può essere importante per strategie di *trading* efficienti. Ogni transazione ha generalmente un costo, per cui è ragionevole voler ridurre il numero di transazioni quando possibile.

Un altro motivo per cui le opzioni sintetiche possono essere utilizzate è per impiegare strategie di arbitraggio. Se si riesce a individuare una posizione sintetica che ha un prezzo diverso rispetto alla posizione singola, si ha l'opportunità di trarre profitto. Ad esempio, se un'opzione *call* costa più dell'opzione *call* sintetica, si può vendere l'opzione *call* e acquistare l'opzione *call* sintetica, traendone profitto (CFI Team, 2022).

Nel contesto della nostra ricerca, sono due i vantaggi che vogliamo sfruttare dall’utilizzo di opzioni sintetiche rispetto all’utilizzo di opzioni *standard*. (John C. Hull, 2022; tr. it. 2022)

1. Il primo è che i mercati delle opzioni non sempre hanno la liquidità sufficiente per assorbire gli ordini che i gestori di portafoglio intendono immettere. Questo può portare alla spiacevole conseguenza di dover acquistare lo stesso contratto a prezzi diversi via via crescenti.

2. Il secondo è che i gestori ricercano il massimo grado di personalizzazione per i contratti d'opzione. Quest'obbiettivo, soprattutto quando si parla di mercati di borsa, è molto difficile da raggiungere, in quanto i contratti quotati sono per definizione *standardizzati* al massimo livello. Ciò implica che, ad esempio, un contratto *call* su un'azione avrà degli *strike prices* e delle scadenze predefinite. Un gestore che, quindi, desidera prezzi d'esercizio e scadenze differenti da quelli disponibili sul mercato, opterà per un'opzione di tipo sintetico.

CAP 2 Futures

2.1 I Futures

I contratti *futures* sono accordi standardizzati tra due parti per comprare o vendere una certa attività, a una certa scadenza, a un certo prezzo di consegna (*futures price, K*). Le attività sottostanti possono essere molteplici, sia materie prime sia prodotti finanziari. Ad esempio, abbiamo *futures* scritti sul petrolio, sull'oro, sul rame; ma anche su indici azionari, tassi di cambio e buoni del Tesoro. Tra le principali borse di negoziazione per i *futures* figurano: la Chicago Mercantile Exchange (CME Group), l'Eurex, l'Hong Kong Futures Exchange (HKFE) e la Tokyo Commodity Exchange (TOCOM).

2.1.1 Payoffs dei Futures

Come per le opzioni, si possono assumere due tipi di posizione sui futures, una *long* e una *short*. Una posizione lunga beneficerà di apprezzamenti del titolo sottostante, una posizione corta dei deprezzamenti. I *payoffs* delle due differenti posizioni sono riassunti nella seguente tabella. Per comodità utilizzeremo la stessa notazione delle opzioni, dunque, K è il *futures price* e S_0 è il valore del sottostante.

Posizione	*Futures Payoff*
Long	$\boldsymbol{S_0 - K}$
Short	$\boldsymbol{K - S_0}$

Tabella n° 4. I due payoffs delle posizioni su futures

Può essere utile visualizzare le due differenti posizioni, e i loro *payoffs*, nel *payoff diagram*. Dove troviamo sull'asse delle ordinate il *payoff* della relativa posizione e sull'asse delle ascisse il prezzo del sottostante (S_0).

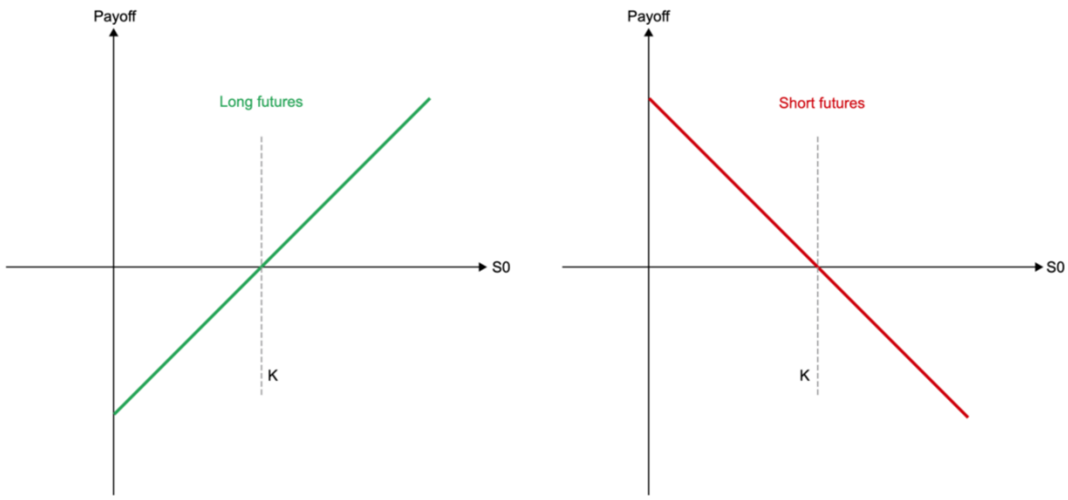


Grafico n° 9. Le due possibili posizioni sui futures, e i loro payoffs

2.1.2 Possibili utilizzi dei contratti Futures

I contratti *futures* vengono acquistati o venduti per diverse finalità, tra cui:

1. ***Trading***: gli investitori possono operare sul mercato dei *futures* al fine di trarre profitto dalle fluttuazioni dei prezzi del sottostante. Ad esempio, un *trader* potrebbe acquistare un *futures* sul rame se ritiene che l'offerta di rame calerà sensibilmente nei prossimi mesi.

2. ***Hedging***: le società utilizzano spesso i contratti *futures* per proteggersi dal rischio di fluttuazione dei prezzi. Un produttore di grano potrebbe vendere contratti *futures* per bloccare un prezzo di vendita futuro e dunque proteggersi da una eventuale diminuzione dei prezzi. Un altro esempio può essere quello di un gestore di portafoglio, che per proteggersi dal *downside risk*, assume una posizione *short* sul *future* scritto su un determinato *asset*[9] presente in portafoglio.

[9] Nel caso di *hedging* di portafogli azionari si ricorre più spesso all'utilizzo di *futures* scritti sull'indice di riferimento rispetto a *futures* scritti sui singoli titoli.

3. **Arbitraggio**: gli operatori possono sfruttare le discrepanze tra i prezzi *futures* e i prezzi *spot* per trarre un profitto privo di rischio. Ad esempio, se il prezzo *spot* di un determinato bene è più basso rispetto al relativo prezzo *futures*, un arbitraggista potrebbe vendere contratti *futures* e acquistare il bene sul mercato *spot*, così da bloccare il differenziale come profitto.

4. **Accesso ai mercati**: i contratti futures consentono agli investitori di ottenere esposizioni su una moltitudine di attività senza dover necessariamente possedere fisicamente il sottostante.

2.2 Funzionamento del mercato dei Futures

Ogni contratto *futures* è scritto su una precisa quantità di sottostante. L'ordine di grandezza non è affatto piccolo, parliamo di decine di migliaia di dollari per le materie prime fino ad arrivare addirittura a centinaia di migliaia di dollari per i prodotti finanziari. Ad esempio, il contratto *futures* standard sull'indice Nasdaq 100 è scritto su una quantità pari a 100 volte il valore *spot* dello stesso indice. Negli ultimi anni il CME Group ha introdotto nuovi tagli più piccoli sui *futures*, rendendoli più appetibili anche a investitori non istituzionali. Recuperando l'esempio precedente, è stato introdotto il contratto Mini sull'indice Nasdaq 100, dove il moltiplicatore si riduce da 100 a 20 volte il prezzo *spot*.

Ogni contratto viene identificato tramite il suo mese di consegna. È importante sottolineare che, nella stragrande maggioranza dei casi, la chiusura del contratto *futures* non comporta la consegna dell'attività sottostante. La ragione è che i *traders* preferiscono chiudere le posizioni prima della scadenza, in modo tale da incassare (o pagare) il profitto (o la perdita) come flusso di denaro e mai come possesso fisico e rivendita del sottostante. La chiusura della posizione si effettua con un'operazione di segno opposto rispetto all'originale. Ad esempio, una posizione *long* su 10 contratti *futures* sul petrolio scadenza luglio 2024 può essere chiusa in qualsiasi momento assumendo una posizione *short* su 10 contratti *futures* sul petrolio scadenza luglio 2024.

Le borse possono specificare dei limiti alle variazioni giornaliere dei prezzi dei *futures*, i cosiddetti *price limits*. Una volta che il prezzo di un contratto supera il limite giornaliero vengono automaticamente interrotte le contrattazioni di quel preciso *futures*. Questi limiti hanno lo scopo di impedire che degli eccessi speculativi impattino in maniera significativa sui prezzi.

2.2.1 Il Marking to Market

Il principale vantaggio di organizzare le negoziazioni dei *futures* in borsa è il sistema dei depositi di garanzia. Questi depositi mirano a minimizzare il rischio d'insolvenza tra le parti. Senza di essi una delle due parti potrebbe non rispettare l'impegno preso, oppure, non avere le risorse finanziare adeguate per onorarlo. In questo contesto si inserisce la pratica del *marking to market*. Il *marking to market* consiste in una serie di operazioni di segno diverso su un determinato conto di deposito, il *margin account*, volti a garantire la solvibilità del *trader*. Esaminiamo una possibile dinamica di *marking to market* tramite un esempio. Un *trader* è intenzionato ad assumere una posizione lunga sul *futures* scritto sull'indice S&P 500 consegna giugno (dimensione del contratto 100). Nel momento in cui si concretizza l'operazione il *broker* chiede al *trader* di versare un margine iniziale sul conto di deposito, supponiamo che questo margine sia pari a 50,000$. Alla fine di ogni giorno di contrattazione il conto di deposito viene aggiustato in base a movimenti del prezzo *futures*, che possono aver generato profitti o perdite sulla posizione. Ipotizziamo che, a fine giornata, il prezzo *futures* sull'S&P 500 scenda da 5,000$ a 4,900$. Il *trader*, che aveva assunto una posizione lunga, subisce una perdita pari a:

$$100 * (4{,}900\$ - 5{,}000\$) = -10{,}000\$$$

In conseguenza di ciò, il saldo del conto di deposito si riduce di 10,000$, risultando pari a 40,000$. Se, al termine del secondo giorno, il prezzo sale da 4,900$ a 4,950$, la perdita del *trader* si riduce di:

$$100 * (4{,}950\$ - 4{,}900\$) = 5{,}000\$$$

Dunque, il saldo del *margin account* deve aumentare di 5,000$ risultando pari a 45,000$, al termine del secondo giorno di contrattazione.

Il *marking to market*, quindi, comporta ogni giorno lo spostamento di fondi tra *traders* con posizioni lunghe e *traders* con posizioni corte. Quando il prezzo *futures* sale i fondi passano dai conti di detentori di posizioni corte ai conti di detentori di posizioni lunghe. Quando il prezzo *futures* scende accade esattamente il contrario.

Ricapitolando, se si detiene una posizione lunga, il conto di deposito va aggiustato ogni giorno di una quantità Q, pari a:

$$Q = N * D * (P_t - P_{t-1})$$

Dove:

- $\boldsymbol{N}$ è il numero di contratti *futures* lunghi in portafoglio
- $\boldsymbol{D}$ è la dimensione del contratto
- $\boldsymbol{P_t}$ è il prezzo *futures* corrente
- $\boldsymbol{P_{t-1}}$ è il prezzo *futures* del giorno precedente

Ovviamente, un segno negativo della quantità Q denota un addebito al conto di deposito, un segno positivo un accredito.

Se, invece, si detiene una posizione corta, il conto di deposito va aggiustato ogni giorno di una quantità Q, pari a:

$$Q = -N * D * (P_t - P_{t-1})$$

Dove:

- $\boldsymbol{N}$ è il numero di contratti *futures* corti in portafoglio
- $\boldsymbol{D}$ è la dimensione del contratto
- $\boldsymbol{P_t}$ è il prezzo *futures* corrente
- $\boldsymbol{P_{t-1}}$ è il prezzo *futures* del giorno precedente

Anche in questo caso un segno negativo della quantità Q denota un addebito al conto di deposito, un segno positivo un accredito.

La condizione di solvibilità è garantita dal fatto che il saldo del *margin account* non può mai scendere sotto una certa soglia, denominata margine di mantenimento (*maintenance margin*), che è in genere pari al 75% del margine iniziale. Se il saldo del conto scende sotto detta soglia, il *trader* riceve la cosiddetta richiesta di integrazione dei margini (*margin call*) e deve obbligatoriamente riportare il livello del saldo del conto di deposito al livello iniziale. Se il cliente non effettua questo accredito, il *broker* chiude definitivamente la posizione.

È importante sottolineare che il deposito non comporta costi-opportunità, in quanto i *brokers* consentono di ricevere interessi sul saldo del *margin account*. Inoltre, la richiesta del margine iniziale può essere adempiuta anche con dei titoli e non solo in contanti. Logicamente, a causa della mutevole natura del valore di un prodotto finanziario, quando vengono versati dei titoli sul conto di deposito, essi non vengono contabilizzati al loro valore di mercato, ma a una precisa proporzione di esso. Ad esempio, i titoli di stato sono accettati al 90% del loro valore di mercato, mentre le azioni sono accettate al 50% del rispettivo valore di mercato.

2.2.2 La Clearinghouse

Come ulteriore garanzia di solvibilità, si inserisce un organo terzo, estraneo ai *brokers* e ai *traders*: la *clearinghouse* o cassa di compensazione. Come i *traders* devono versare il margine iniziale ed eventuali integrazioni sul conto di deposito presso i *brokers*, anche i *brokers* devono detenere un conto di deposito presso la *clearinghouse*. Il conto di deposito presso la *clearinghouse* è assimilabile come funzionamento a quello descritto parlando di *marking to market*. Il *broker* deve inizialmente versare un margine iniziale e poi effettuare degli aggiustamenti in base ai movimenti del mercato. La differenza sostanziale tra i due conti di deposito risiede nel fatto che, il saldo del conto detenuto dai *brokers* presso la cassa di compensazione non può mai scendere sotto il livello del margine iniziale. Dunque, in caso di perdite tali da intaccare il *margin account*, il *broker* è costretto immediatamente a integrare quanto perduto e riportare il saldo al livello iniziale. In termini tecnici possiamo dire che, parlando della *clearinghouse*, il *maintenance margin* è uguale al margine iniziale.

Il sistema combinato di *marking to market* e cassa di compensazione ha dato prova nella storia recente di essere un validissimo metodo per contrastare il rischio d'insolvenza. Ricordiamo crisi come quella del 2007 o del 1987 (il famoso *Black Monday*), in entrambe l'indice S&P 500 perse decine di punti percentuali nell'arco di pochi giorni. Questo causò ingenti perdite per chi deteneva posizioni lunghe sull'indice cedendo il passo a numerosi fallimenti da parte dei *brokers*. Nonostante ciò, le *clearinghouses* disponevano di una liquidità tale da essere in grado di pagare tutte le posizioni corte esistenti sul *futures* sull'S&P 500.

2.2.3 Contabilità per le Coperture

Le norme contabili[10] distinguono le modalità di registrazione di profitti e perdite sui contratti *futures* in base alle finalità per le quali si è aperta una posizione su questo derivato.

Se il *futures* è utilizzato per finalità speculative o di arbitraggio le variazioni dei valori di mercato vengono registrate nel momento in cui esse si verificano. Se i contratti sono stati negoziati per finalità di *hedging* (questo è il caso della nostra ricerca), i profitti o le perdite vengono registrati nello stesso momento in cui si registrano le medesime variazioni sull'attività che si è inteso coprire.

[10] Le norme contabili a cui si fa riferimento sono quelle dettate dalla legislazione degli Stati Uniti (FAS 133 e ASC 815).

CAP 3 Intuizione alla base del modello

L'obbiettivo della nostra ricerca è quello di sviluppare un modello capace di generare delle opzioni *put* sintetiche e poi utilizzarle come strumento di *hedging* dinamico di un portafoglio azionario. Il rischio da cui intendiamo proteggerci è il cosiddetto *downside risk*, cioè il rischio di subire perdite a causa di movimenti del mercato sfavorevoli.

Al fine di sviscerare i fondamenti teorici e le applicazioni pratiche del modello, in questo capitolo procederemo descrivendo uno per uno i passaggi logici che sono stati intrapresi per giungere all'intuizione finale.

3.1 Copertura di Portafogli Azionari mediante Opzioni Put

Come primo *step*, è utile intuire un concetto fondamentale quando si parla di *hedging*. Nel momento in cui decidiamo di coprire un certo *asset* da un determinato tipo di rischio, utilizzando un preciso strumento finanziario, la scelta di esso, e delle sue caratteristiche, risulterà cruciale per determinare il successo o meno della strategia. Le caratteristiche in questione sono essenzialmente due:

1. Il valore dello strumento prescelto deve essere correlato negativamente con il fattore di rischio da cui vogliamo proteggerci. Chiariamo con un esempio. Un investitore detiene una posizione lunga su un portafoglio di azioni statunitensi ben diversificato. Egli teme che movimenti del mercato avversi possano minare il valore del suo portafoglio, in altre parole egli teme il *downside risk*. L'investitore decide, a questo punto, di assumere una posizione corta sull'indice S&P 500; il portafoglio è ben diversificato, dunque, il suo andamento sarà assimilabile (con piccoli margini di errore) a quello dell'indice. Adoperando questa strategia, le eventuali perdite subite dal portafoglio sono compensate dai relativi profitti della posizione corta sull'indice S&P 500. Non può succedere che le due posizioni si muovano nella stessa direzione, proprio perché il portafoglio azionario è correlato positivamente con il fattore di mercato (l'indice), mentre la posizione corta sull'indice è per definizione correlata negativamente ad esso. Vediamo cosa sarebbe successo se l'investitore avesse assunto una posizione correlata

positivamente con il fattore di rischio. L'investitore, in questo caso, assume una posizione lunga sull'indice S&P 500. Con questa strategia le perdite sul portafoglio azionario vengono amplificate invece di essere mitigate. Le due posizioni invece di muoversi in direzioni opposte si muovono nella stessa direzione, in altre parole a ogni dollaro perso dal portafoglio va sommata la perdita subita dall'indice. Da questo esempio risulta chiaramente che la condizione di correlazione negativa col fattore di rischio è una caratteristica imprescindibile quando si parla di strumenti di *hedging*.

2. Notiamo come nell'esempio precedente viene analizzato il caso nel quale il portafoglio azionario subisce effettivamente delle perdite, e dunque, la strategia di *hedging* entra in gioco per mitigarle. Tuttavia, i gestori di portafoglio non sono solo interessati a mitigare le perdite, ma anche a non precludersi possibilità di guadagno nel caso l'evento avverso non si verifichi. Continuando l'esempio al punto 1, analizziamo cosa sarebbe successo se il valore del portafoglio fosse aumentato invece di diminuire. In questa situazione abbiamo che il portafoglio genera un profitto, ma la posizione corta sull'indice genera una perdita, ricordiamoci che le due posizioni si muovono sempre in direzioni opposte se l'*hedge* è correlato negativamente al fattore di rischio. Dunque, una strategia del genere è sì efficiente in caso di movimenti sfavorevoli del mercato, ma completamente inefficiente se parliamo di movimenti favorevoli. In conclusione, uno strumento di *hedging* ottimale deve essere capace di assicurare il valore del portafoglio in caso di mercato ribassista, e, allo stesso tempo, di non ostacolare il rendimento del portafoglio in caso di mercato rialzista. In altre parole, l'*hedge* deve avere un profilo di *payoff asimmetrico*.

Ricordando ciò che è stato detto nel paragrafo 1.2, esistono degli strumenti derivati che godono proprio della proprietà citata in precedenza dell'*asimmetria*: le opzioni. Il profilo del *payoff* di un'opzione, infatti, permette al detentore di beneficiare di eventuali apprezzamenti o deprezzamenti del sottostante senza mai perdere più del premio pagato per acquistare il rispettivo contratto.

Data la natura del nostro obbiettivo, e le caratteristiche dello strumento con il quale lo perseguiamo, individuiamo nelle opzioni *put* il candidato che fa al caso nostro. L'opzione *put*, infatti, gode sia della proprietà della correlazione negativa col fattore di rischio, sia dell'asimmetria del proprio *payoff*. Utilizzando sempre l'esempio precedente, vediamo cosa sarebbe successo se il gestore del portafoglio avesse optato per acquistare delle *puts* sull'indice invece di venderlo allo scoperto. In caso di mercato avverso, egli decide di esercitare le opzioni, compensando così le perdite del portafoglio azionario con i profitti realizzati sulle *puts*. In caso di mercato rialzista il gestore non esercita più le opzioni in modo tale da mantenere invariati i profitti realizzati sul portafoglio azionario. In questo scenario l'unico costo che il gestore sostiene è quello di acquisto delle *puts*.

In aggiunta alle proprietà appena descritte è bene specificare che le opzioni permettono di individuare anche un preciso valore *target* del nostro portafoglio, sotto al quale non vogliamo che esso scenda. Ipotizziamo, ad esempio, che il nostro portafoglio valga 10,000$ e il gestore decida che il suo valore non debba mai scendere al di sotto di 7,000$ fino a dicembre 2024. Ipotizziamo anche, per semplicità, che il portafoglio sia composto da 100 azioni Apple che quotano 100$ l'una. A questo punto il gestore può assicurare il portafoglio semplicemente acquistando un contratto *put* su Apple (scritto su 100 azioni) con *strike price* pari a 70$ e scadenza dicembre 2024.

3.2 Opzioni su Indici

L'esempio al paragrafo precedente fa riferimento ad un portafoglio composto esclusivamente da azioni di una singola società, ovviamente si tratta di una semplificazione estrema, nella realtà i portafogli azionari sono diversificati e composti da decine se non centinaia di diverse azioni. Alla luce di ciò, sorge il problema di come coprire un portafoglio diversificato. Acquistare delle *put*s per ogni diversa azione non è una strada percorribile per diverse ragioni, tra cui:

1. Costi di transazione: ad ogni operazione di compravendita è associato un relativo costo, detto costo di transazione. Tra le principali tipologie di costi di transazione abbiamo:

- Commissioni: sono le commissioni di intermediazione pagate ai *broker* o agli intermediari finanziari per l'esecuzione delle operazioni. Spesso sono espressi come percentuale del valore totale dell'operazione.

- *Bid-Ask spread*: il *bid-ask spread* è la differenza tra il prezzo di acquisto (*bid*) e il prezzo di vendita (*ask*) di un titolo. Questo *spread* rappresenta un guadagno per l'intermediario ma un costo per il gestore, poiché quest'ultimo deve acquistare il titolo a un prezzo più alto e venderlo a un prezzo più basso.

- Imposte: in molti paesi le operazioni di compravendita finanziarie sono soggette a imposte specifiche, come l'imposta sulle transazioni finanziarie o *Financial Transaction Tax* (FTT).

All'aumentare delle transazioni, naturalmente, cresce il totale dei costi che il gestore deve sopportare. Inoltre, se si intende effettuare una copertura dinamica, ogni aggiustamento significa ulteriori costi in quanto si torna sul mercato per modificare la posizione precedente. Risulta chiaro, dunque, che una strategia di *hedging* che implichi assumere posizioni su centinaia di contratti *put* è totalmente inefficiente dal punto di vista della gestione dei costi di transazione.

2. Liquidità del mercato: non sempre i mercati hanno la profondità adeguata ad assorbire la totalità degli ordini, soprattutto nei mercati delle opzioni. Questo comporta un rischio per il gestore, quello di doversi trovare costretto ad acquistare o vendere un contratto a un prezzo di gran lunga più sfavorevole rispetto a quello che avrebbe pagato o ricevuto nel caso in cui il mercato avesse avuto la liquidità necessaria. Ovviamente la probabilità che questo accada aumenta all'aumentare delle transazioni che si effettuano. Detto questo, approfondiremo in maniera precisa la tematica del rischio di liquidità, e di come esso condiziona le strategie di copertura, nel paragrafo 3.3.

3. Rapidità di esecuzione: un modello di *hedging* efficace deve permettere al gestore di reagire nella maniera più rapida possibile a movimenti improvvisi del mercato.

Maggiore il numero di contratti *puts* (scritti su diverse azioni) in portafoglio maggiore il tempo che occorre per ribilanciarlo dinamicamente.

Per ovviare a questi problemi, abbiamo scelto di utilizzare opzioni su indici azionari piuttosto che sulle singole azioni. Questa strategia ci permette di operare su un singolo contratto *put* per coprire un intero portafoglio azionario ben diversificato.

3.2.1 Indici azionari

Un indice azionario sintetizza la performance di un gruppo specifico di azioni quotate in borsa in un unico strumento. Gli indici sono utilizzati per replicare l'andamento di particolari segmenti di mercato, settori industriali o l'intero mercato azionario di un certo paese. Gli indici azionari possono essere costruiti in vari modi, di seguito riportiamo le due principali modalità:

1. Ponderazione per capitalizzazione di mercato: ciascun titolo incluso nell'indice ha un peso proporzionale alla sua capitalizzazione di mercato. La ponderazione da applicare a un generico titolo *x* è pari a:

$$\lambda_x = \frac{Cap_x}{Cap_{mkt}}$$

Dove:

- $\boldsymbol{\lambda_x}$ è la ponderazione del titolo *x*
- $\boldsymbol{Cap_x}$ è la capitalizzazione di mercato dell'azienda *x*
- $\boldsymbol{Cap_{mkt}}$ è la capitalizzazione di mercato totale dell'indice, data dalla somma di tutte le capitalizzazioni delle singole società presenti nell'indice

I principali indici costruiti in questa maniera sono, negli Stati Uniti l'S&P 500 e il NASDAQ Composite, in Europa il FTSE 100 e il DAX.

2. Ponderazione per prezzo: ciascun titolo incluso nell'indice ha un peso proporzionale al suo prezzo per azione. La ponderazione da applicare a un generico titolo *x* è pari a:

$$\lambda_x = \frac{P_x}{P_{mkt}}$$

Dove:

- $\boldsymbol{\lambda_x}$ è la ponderazione del titolo *x*
- $\boldsymbol{P_x}$ è il prezzo per azione corrente della società x
- $\boldsymbol{P_{mkt}}$ è la somma dei prezzi delle azioni di tutte le società presenti nell'indice

Il principale indice costruito in questo modo è il Dow Jones Industrial Average (DJIA).

I vantaggi degli indici costruiti per capitalizzazione di mercato sono molti. Essi riflettono meglio la dimensione delle aziende in quanto le società con una maggiore capitalizzazione rappresentano una porzione più significativa dell'economia. Gli indici ponderati per prezzo, invece, possono essere distorti dai prezzi per azione, indipendentemente dalla dimensione effettiva dell'azienda. Non è detto infatti che ad un elevato prezzo per azione corrisponda un'elevata dimensione dell'azienda. Inoltre, poiché il peso delle società è distribuito in base alla loro dimensione relativa nel mercato, gli indici costruiti per capitalizzazione risultano più diversificati rispetto a quelli costruiti per prezzo.

Dovendo trovare il miglior sottostante per le *put* del nostro modello, ricordando che il portafoglio che intendiamo coprire è ben diversificato e costituito da azioni statunitensi, e date tutte le considerazioni fatte in precedenza sui vari indici, individuiamo nell'S&P 500 il candidato che si adatta meglio ai nostri obbiettivi.

Lo Standard & Poor's 500 (S&P 500) è un indice statunitense, costruito per capitalizzazione, composto dalle cinquecento maggiori società quotate a Wall Street. Viene spesso utilizzato come *proxy* dell'intero mercato azionario statunitense e finanche dell'economia degli USA. I requisiti che le società devono soddisfare per poter far parte dell'indice sono: capitalizzazione di mercato superiore a 6,1 miliardi di dollari, un flottante[11] pari almeno al 50% delle azioni, un volume di scambi mensili superiore a 250,000 azioni e un valore medio annuale del titolo superiore a 1.00 dollari. Il valore dell'S&P 500 viene calcolato continuamente in base al prezzo degli ultimi contratti negoziati dalle 9:30 EDT alle 16:00 EDT.

Adesso siamo arrivati a definire con precisione lo strumento di *hedging* prescelto per questa ricerca, si tratta di opzioni *put* scritte sull'indice S&P 500 (SPX). Queste opzioni sono quotate alla Chicago Board Exchange (CBOE) e sono scritte su 100 volte il prezzo *spot* dell'indice.

3.3 Opzioni sintetiche su indici

Effettuare una copertura di un portafoglio azionario mediante opzioni *put* scritte sull'indice di riferimento è sicuramente una strategia affidabile, ma può essere potenziata notevolmente. Iniziamo con l'individuare i limiti di questa strategia:

1. In precedenza abbiamo ricordato come la liquidità del mercato delle opzioni sia una condizione fondamentale al fine di implementare una strategia di *hedging* efficace. Ora, se è vero che operando su una sola tipologia di contratto si diminuisce la probabilità di imbattersi in mercati illiquidi è altrettanto vero che concentrando tutto il capitale su un singolo contratto (SPX) rischiamo di essere proprio noi a rendere il mercato illiquido. Chiariamo questo concetto simulando una dinamica di *trading*. Ipotizziamo che un investitore voglia acquistare 10 contratti *put* con *strike* 100$ su Microsoft al prezzo di mercato di 5$ ciascuno. È molto improbabile che l'investitore non trovi una controparte disposta a vendere a quel prezzo, dunque, sicuramente concluderà la transazione al prezzo di 5$. Ipotizziamo, ora, che l'investitore voglia acquistare 1000 contratti *put* a 5$ l'uno,

[11] Il flottante rappresenta la quantità di azioni di una società disponibili per la negoziazione in borsa.

la situazione adesso è diversa, certamente troverà controparti disposte a vendere a 5$ ma è molto probabile che per eseguire interamente l'ordine di acquisto egli dovrà negoziare dei contratti ad un prezzo superiore, in altre parole, la quantità offerta di quella precisa *put* a quel preciso prezzo, non raggiunge i 1000 contratti. Seguendo l'esempio, in questo scenario, il *trader* acquisterà 100 contratti a 5$, 300 contratti a 5.5$ e 600 contratti a 6.5$, portando a termine dunque l'operazione ad un prezzo medio di 6.05$ significativamente più alto rispetto ai 5$ dell'operazione precedente. Concludiamo, quindi, che operare su un mercato liquido è di vitale importanza, soprattutto quando i capitali da investire sono elevati. Dato che i mercati delle opzioni non sono particolarmente liquidi, è necessario trovare uno strumento con un mercato capace di assorbire una notevole quantità di ordini.

2. Le opzioni sono, in generale, lo strumento derivato che comporta i maggiori costi di transazione (cfr. paragrafo 3.2).

3. Le opzioni non offrono un elevato grado di personalizzazione. I contratti quotati, come abbiamo accennato al paragrafo 1.8.1 sono *standardizzati* al massimo livello. Ciò implica che, ad esempio, un contratto *put* su un indice avrà degli *strike prices* e delle scadenze predefinite. Un gestore di portafoglio che desidera prezzi d'esercizio e scadenze differenti da quelli disponibili sul mercato sarà, dunque, costretto a rivedere la propria strategia, proprio a causa della mancanza di offerta del contratto individuato come *hedge* ottimale.

4. Una strategia che implica l'acquisto al tempo zero di un certo numero di contratti *put* è una copertura di tipo *hedge and forget*, cioè una strategia che non richiede aggiustamenti al variare delle condizioni di mercato. Ovviamente, questo è si un vantaggio in termini di semplicità del modello, ma un grandissimo svantaggio in termini di flessibilità. Ricordiamo come, ad esempio, nel *delta hedging* (cfr. paragrafo 1.7.4) la posizione di copertura sul sottostante vada aggiustata continuamente al variare del prezzo dello stesso. Nel nostro caso, la posizione sulle *put* scritte sull'indice deve essere aggiustata a seconda dei movimenti che si registrano sul mercato azionario. In altre parole, è cruciale trovare una relazione

che permetta di modificare la posizione sul portafoglio di copertura al variare delle condizioni del mercato.

I limiti descritti in precedenza possono essere minimizzati, se non addirittura totalmente eliminati, ricorrendo all'utilizzo di opzioni *put* sintetiche mediante *futures* invece di opzioni *standard*. Partiamo dai limiti ai punti 1 e 2. Essi possono essere minimizzati ricorrendo ai *futures* al posto delle opzioni. I *futures* su indici, infatti, sono quotati all'interno di un mercato extra-liquido, il Chicago Mercantile Exchange (CME), e godono di costi di transazione minimi rispetto a quelli delle relative opzioni. Questi strumenti, dunque, rappresentano la soluzione perfetta ai problemi legati alla liquidità e ai costi di transazione. Riguardo, invece, i limiti ai punti 3 e 4, essi possono essere completamente eliminati costruendo sinteticamente l'opzione. Un'opzione sintetica, infatti, permette di scegliere a piacimento sia lo *strike price* sia la scadenza; e permette anche di legare il numero di *futures* detenuti in portafoglio ai movimenti (siano essi apprezzamenti o deprezzamenti) del mercato azionario.

3.3.1 Put sintetiche mediante Futures su indici

In precedenza abbiamo affermato che lo strumento di *hedging* che massimizza l'efficacia del modello è un'opzione *put* sintetica costruita mediante *futures* sull'indice S&P 500. Il funzionamento di questo strumento e come esso è stato utilizzato nel nostro modello verrà analizzato nel prossimo capitolo. Per adesso, ci limitiamo a dire che per creare la *put* sintetica, il gestore del portafoglio deve vendere, in ogni istante, una precisa quantità di contratti *futures* scritti sull'S&P 500. Il valore nominale di questa quota è pari a:

$$e^{-qT_1}[1 - N(d_1)]e^{-(r-q)T_2}$$

Dove:

- $\boldsymbol{q}$ è il *dividend yield* annuo dell'indice
- $\boldsymbol{r}$ è il tasso d'interesse *risk-free*
- $\boldsymbol{T_1}$ è la scadenza della *put* sintetica, ossia il periodo di copertura

- $\boldsymbol{T_2}$ è la vita residua del *futures* sull'S&P 500

- $\boldsymbol{N(d_1)}$ è il fattore descritto dalla formula di Black-Scholes-Merton

3.4 Beta del portafoglio azionario

Arrivati a questo punto, occorre fare una riflessione sulla composizione del portafoglio, e di come essa influenza la strategia di *hedging*. Se il portafoglio rispecchiasse completamente l'indice la copertura sarebbe relativamente semplice, paragonabile a quella illustrata nel paragrafo 3.1, con la sola differenza che in quel caso avevamo un'azione e una *put* scritta su di essa, in questo caso abbiamo un portafoglio[12] che replica l'indice e una *put* scritta sull'indice. Va da sé che questo scenario risulta alquanto improbabile. Un portafoglio azionario, per quanto ben diversificato, difficilmente replicherà esattamente l'andamento dell'indice. A tal proposito, entra in gioco il concetto di *beta* (β) del portafoglio. Il *beta* è un coefficiente che definisce la misura del rischio sistematico di un'attività finanziaria, ovvero la tendenza del rendimento di un'attività a variare in conseguenza di variazioni di mercato. (Borsa Italiana, 2024)

Esso è definito come il rapporto tra la covarianza dei rendimenti del titolo i-esimo con i rendimenti del mercato e la varianza dei rendimenti di mercato, in formule:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \frac{\sigma_{R_i R_{mkt}}}{\sigma^2{}_{R_{mkt}}}$$

Dove:

- $\boldsymbol{R_i}$ sono i rendimenti del titolo i-esimo

- $\boldsymbol{R_{mkt}}$ sono i rendimenti del mercato (dell'indice)

[12] Uno strumento che ha lo scopo di replicare un *benchmark* (o indice) prende il nome di Exchange Traded Fund (ETF).

Il *beta* di un portafoglio si calcola come la media ponderata dei *beta* dei singoli titoli che lo compongono, dove i pesi sono le proporzioni del valore di mercato di ciascun titolo nel portafoglio, in formule:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{N} (w_i \, \beta_i)$$

Dove:

- $\boldsymbol{N}$ è il numero di titoli in portafoglio
- $\boldsymbol{w_i}$ è la proporzione del valore di mercato del titolo i-esimo nel portafoglio
- $\boldsymbol{\beta_i}$ è il coefficiente *beta* del titolo i-esimo

3.4.1 Interpretazione del Beta

Il coefficiente *beta* di un portafoglio può assumere diversi valori, in base ai quali, si possono fare diverse considerazioni sul comportamento dello stesso in relazione a movimenti del mercato.

- $\beta = 1$: il portafoglio si muove con il mercato. Se il rendimento dell'indice cresce del 5%, ci si aspetta che il rendimento del portafoglio cresca del 5%.
- $\beta > 1$: il portafoglio è più volatile del mercato. Supponiamo, ad esempio, che il *beta* del portafoglio sia pari a 2. A questo punto, se il rendimento dell'indice cresce del 5%, ci si aspetta che il rendimento del portafoglio cresca del 10%.
- $\beta < 1$: il portafoglio è meno volatile del mercato. Supponiamo, ad esempio, che il *beta* del portafoglio sia pari a 0.5. A questo punto, se il rendimento dell'indice cresce del 5%, ci si aspetta che il rendimento del portafoglio cresca del 2.5%.

3.4.2 Ruolo del beta nella strategia di hedging

Nel capitolo successivo, dedicato al funzionamento del nostro modello di *hedging*, indagheremo con cura quale ruolo gioca il coefficiente *beta* nella costruzione dell'opzione *put* sintetica. Per adesso, ci basterà chiarire l'intuizione che sta alla base del nostro ragionamento.

Portafogli con coefficienti *beta* maggiori di 1 risultano, come detto in precedenza, più volatili rispetto all'indice di riferimento. Questo comporta che qualunque movimento del mercato risulta amplificato a livello di portafoglio. Essendo noi interessati ad assicurare il nostro investimento azionario dal *downside risk*, possiamo dire che, quando il *beta* risulta maggiore di 1, deprezzamenti dell'indice comporteranno deprezzamenti ancora maggiori a livello di valore del portafoglio. In altre parole, un *beta* maggiore di 1 amplifica gli effetti del *downside risk*. Naturalmente vale il discorso opposto in caso di portafogli con *beta* minore di 1. In questo caso deprezzamenti dell'indice si tradurranno in minori perdite a livello di portafoglio, dunque, un *beta* minore di 1 mitiga gli effetti del *downside risk*.

Nel momento in cui, quindi, procediamo con la costruzione dell'opzione *put* sintetica, dovremo essere più conservativi in caso di portafogli con *beta* maggiori di 1, meno conservativi quando il *beta* è, al contrario, minore di 1. Ora in cosa si traduce questa maggiore prudenza? L'unico fattore su cui possiamo intervenire è lo *strike price* (K) dell'opzione. In caso di portafogli con coefficienti *beta* maggiori di 1 dovremo scegliere *strikes* più elevati (più conservativi) rispetto agli *strike* richiesti dalla copertura di portafogli con beta minori di 1.

CAP 4 Matematica e Programmazione del modello

In questo capitolo ci occuperemo della costruzione del modello di *hedging*. Per facilitare la consultazione, abbiamo preferito raccogliere tutti i codici VBA in un'appendice che troverete alla fine del lavoro (pag.).

4.1 Portafoglio Azionario

Come primo obbiettivo, il nostro modello deve restituire l'evoluzione del valore del portafoglio azionario a *time-steps* giornalieri, e il coefficiente *beta* (β) dello stesso. Questo portafoglio costituirà la base della nostra ricerca, esso sarà, infatti, l'*asset* che intenderemo coprire dal *downside risk*.

Gli *inputs* del modello sono i seguenti:

1. ***Weights***: i pesi che ogni singola azione possiede all'interno del portafoglio. Se, ad esempio, ho investito il 30% del mio capitale iniziale in azioni Boeing, e il 70% in azioni Pfizer, il peso di Boeing all'interno del mio portafoglio sarà 0.3, il peso di Pfizer 0.7.

2. ***Beta* (β)**: i coefficienti *beta* delle singole azioni in portafoglio (fonte: Bloomberg L.P.).

3. **Periodo di copertura**: l'orizzonte temporale lungo il quale voglio realizzare la strategia di *hedging* (in giorni).

4. **Capitale iniziale**: se le azioni vengono acquistate al tempo $t = 1$ corrisponde all'intero ammontare di denaro utilizzato per aprire le posizioni, se le azioni sono già in possesso corrisponde al valore di mercato del portafoglio al tempo $t = 1$.

5. **Prezzi delle azioni**: la serie storica dei prezzi di chiusura giornalieri delle azioni presenti in portafoglio (fonte: Yahoo Finance).

Come primo step, il modello (cfr. *Appendice*, pag.) estrae il numero delle diverse società presenti in portafoglio contando i diversi pesi che sono assegnati ad esse.

In maniera analoga si contano il numero dei prezzi azionari della serie storica, trovando di conseguenza anche l'intervallo temporale della nostra copertura.

A questo punto, definito il capitale iniziale, troviamo il capitale allocato per ogni società moltiplicando il capitale di *input* per i rispettivi pesi delle singole azioni.

$$Cap_i = Cap_{tot} * Weights_i$$

Dove:

- $\boldsymbol{Cap_i}$ è il capitale allocato per ogni i-esima società
- $\boldsymbol{Cap_{tot}}$ è il capitale iniziale
- $\boldsymbol{Weights_i}$ è il vettore dei pesi delle singole azioni in portafoglio

Basandoci sul capitale allocato per ogni società e sul prezzo delle singole azioni al tempo $t = 1$, troviamo il numero di azioni da acquistare per ogni compagnia.

$$N°azioni_i = \frac{Cap_i}{Price_i}$$

Dove:

- $\boldsymbol{N°azioni_i}$ è il numero di azioni da acquistare per ogni i-esima società
- $\boldsymbol{Cap_i}$ è il capitale allocato per ogni i-esima società
- $\boldsymbol{Price_i}$ è il vettore dei prezzi delle singole azioni al tempo $t = 1$

Il numero di azioni verrà successivamente arrotondato alle unità in modo tale da rendere più immediata la compravendita delle stesse.

Segue il valore del portafoglio per ogni t, che viene calcolato moltiplicando i diversi prezzi delle azioni per il numero delle azioni detenute in portafoglio. L'*output* sarà, dunque, un vettore avente dimensione $t(giorni) * 1$.

```
'valore del portafoglio

Dim valorePortafoglio() As Double
ReDim valorePortafoglio(1 To nsoc)

For j = 1 To nprezzi
   sommap = 0

   For i = 1 To nsoc
      valorePortafoglio(i) = Cells(j + 11, 7 + 2 * i) * Cells(j + 11, 8 + 2 * i)
      sommap = sommap + valorePortafoglio(i)
   Next i

   Cells(j + 11, 5) = sommap
Next j
```

Passando al calcolo del *beta* del portafoglio, esso viene determinato come media ponderata dei *beta* dei singoli titoli che lo compongono (cfr. Cap 5.4).

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N°soc} \beta_i * Weights_i$$

Dove:

- $\boldsymbol{\beta_p}$ è il coefficiente *beta* dell'intero portafoglio
- $\boldsymbol{\beta_i}$ è il coefficiente *beta* del titolo i-esimo
- $\boldsymbol{Weights_i}$ è il vettore dei pesi delle singole azioni in portafoglio

4.2 Applicazione Pratica

Adesso andremo a visualizzare come si presenta l’interfaccia di Excel, considerando un portafoglio formato da azioni di cinque società diverse: Apple, Microsoft, Nvidia, Amazon e Alphabet e un periodo di copertura di 4 mesi.

Inputs:

1. ***Weights***: Apple: 0.3; Microsoft: 0.2; Nvidia: 0.2; Amazon: 0.2; Alphabet: 0.1.

2. ***Beta* (β)**: Apple: 1.29; Microsoft: 0.89; Nvidia: 1.73; Amazon: 1.17; Alphabet: 1.04; fonte: Bloomberg L.P.

3. **Periodo di copertura**: 86 giorni lavorativi (orizzonte temporale: 1° agosto 2023 - 1° dicembre 2023).

4. **Capitale iniziale**: $100mln.

5. **Prezzi delle azioni**: serie storica 1° agosto 2023 - 1° dicembre 2023; fonte: Yahoo Finance.

Di seguito viene presentata l’interfaccia di Excel, dove sono evidenziati i due *output* (il valore dinamico del portafoglio e il *beta* del portafoglio).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Weights		Beta	Beta del portafoglio	N° societa	Capitale	N° prezzi		Società	capitale allocato
2	Apple	0,3	1,29	1,249	5	100000000	86		Apple	30000000
3	Microsoft	0,2	0,89						Microsoft	20000000
4	Nvidia	0,2	1,73						Nvidia	20000000
5	Amazon	0,2	1,17		Launch Macro				Amazon	20000000
6	Aphabet	0,1	1,04						Aphabet	10000000
7										

giorni	VALORE DEL PORTAFOGLIO	prezzo azioni Apple	N° az	prezzo azioni Microsoft	N° az	prezzo azioni Nvidia	N° az	prezzo azioni Amazon	N° az	prezzo azioni Alphabet	N° az
1	100000001,8	195,6	153374	336,34	59464	465,07	43004	131,69	151872	131,89	75821
2	97273788,24	192,58	153374	327,5	59464	442,69	43004	128,21	151872	128,64	75821
3	97229538,11	191,17	153374	326,66	59464	445,15	43004	128,91	151872	128,77	75821
4	97560637,76	181,99	153374	327,78	59464	446,8	43004	139,57	151872	128,54	75821
5	98194786,2	178,85	153374	330,11	59464	454,17	43004	142,22	151872	131,94	75821
6	97421397,28	179,8	153374	326,05	59464	446,64	43004	139,94	151872	131,84	75821
7	95594378,29	178,19	153374	322,23	59464	425,54	43004	137,85	151872	130,15	75821
8	95643252,55	177,97	153374	322,93	59464	423,88	43004	138,56	151872	130,21	75821
9	94816409,39	177,79	153374	321,01	59464	408,55	43004	138,41	151872	130,17	75821
10	96952882,19	179,46	153374	324,04	59464	437,53	43004	140,57	151872	131,83	75821
11	96036676,85	177,45	153374	321,86	59464	439,4	43004	137,67	151872	130,27	75821
12	95136832,57	176,57	153374	320,4	59464	434,86	43004	135,07	151872	129,11	75821
13	94408670,26	174	153374	316,88	59464	433,43	43004	133,98	151872	130,46	75821
14	94147514,09	174,49	153374	316,48	59464	432,99	43004	133,22	151872	128,11	75821
15	96536967,65	175,84	153374	321,88	59464	469,67	43004	134,68	151872	128,93	75821
16	96218343,67	177,23	153374	322,46	59464	456,68	43004	134,25	151872	129,69	75821
17	98167400,37	181,12	153374	327	59464	471,16	43004	135,52	151872	133,21	75821
18	96272158,02	176,38	153374	319,97	59464	471,63	43004	131,84	151872	130,42	75821
19	96536902,79	178,61	153374	322,98	59464	460,18	43004	133,26	151872	130,69	75821
20	97238568,93	180,19	153374	323,7	59464	468,35	43004	133,14	151872	131,79	75821
21	99508903,29	184,12	153374	328,41	59464	487,84	43004	134,91	151872	135,49	75821
22	100412810,8	187,65	153374	328,79	59464	492,64	43004	135,07	151872	136,93	75821
23	100902787,3	187,87	153374	327,76	59464	493,55	43004	138,01	151872	137,35	75821
24	100811360,1	189,46	153374	328,66	59464	485,09	43004	138,12	151872	136,8	75821
25	101019805,3	189,7	153374	333,55	59464	485,48	43004	137,27	151872	136,71	75821
26	98907409,79	182,91	153374	332,88	59464	470,61	43004	135,36	151872	135,37	75821
27	97998710,72	177,56	153374	329,91	59464	462,41	43004	137,85	151872	136,2	75821
28	98198901,24	178,18	153374	334,27	59464	455,72	43004	138,23	151872	137,2	75821
29	99209239,66	179,36	153374	337,94	59464	451,78	43004	143,1	151872	137,74	75821
30	97829948,31	176,3	153374	331,77	59464	448,7	43004	141,23	151872	136,07	75821

…

76	103930236,5				188,01	153374	369,67	59464	488,88	43004	143,2	151872	136,38	75821
77	104951784,1				189,71	153374	376,17	59464	494,8	43004	142,83	151872	138,7	75821
78	104718091,1				189,69	153374	369,85	59464	492,98	43004	145,18	151872	136,94	75821
79	106135718,5				191,45	153374	377,44	59464	504,09	43004	146,13	151872	137,92	75821
80	105266059,4				190,64	153374	373,07	59464	499,44	43004	143,9	151872	138,62	75821
81	105657878,5				191,31	153374	377,85	59464	487,16	43004	146,71	151872	140,02	75821
82	104891223,2				189,97	153374	377,43	59464	477,76	43004	146,74	151872	138,22	75821
83	105271645,8				189,79	153374	378,61	59464	482,42	43004	147,73	151872	138,05	75821
84	105364272,4				190,4	153374	382,7	59464	478,21	43004	147,03	151872	138,62	75821
85	104838391,8				189,37	153374	378,85	59464	481,4	43004	146,32	151872	136,4	75821
86	104118795,1				189,95	153374	378,91	59464	467,7	43004	146,09	151872	133,92	75821

Il grafico dell'evoluzione del valore del portafoglio durante il periodo di copertura è di seguito riportato.

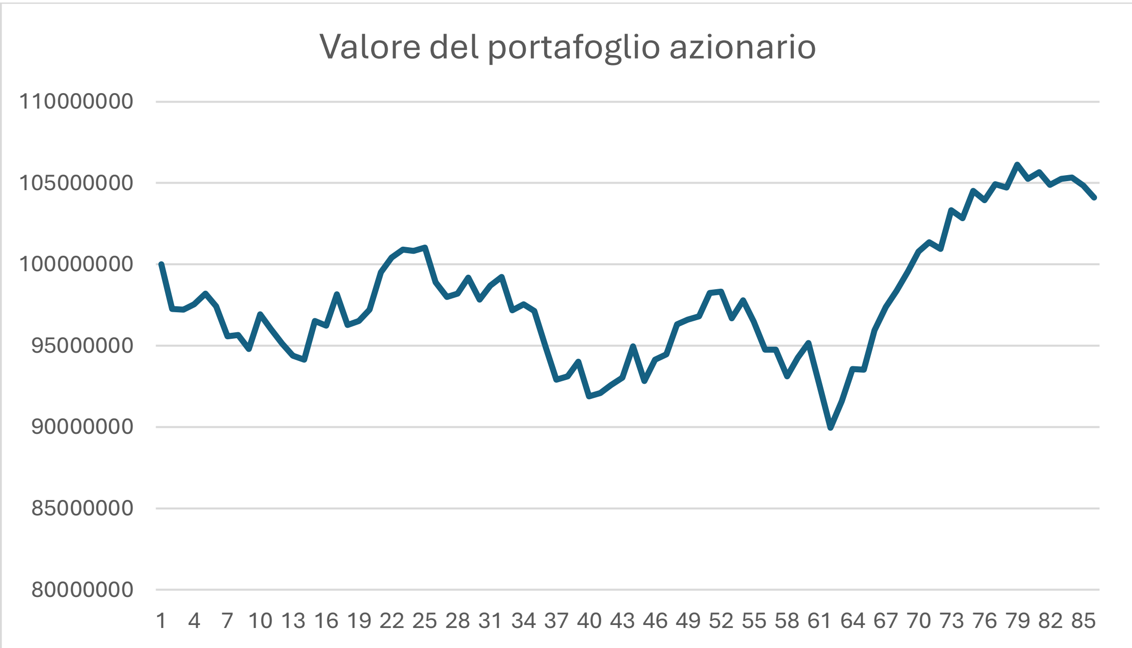


Grafico n° 10. Evoluzione del valore del portafoglio azionario

4.3 Design dell'opzione put sintetica

L'obbiettivo successivo è quello di modellare l'opzione *put* sintetica scritta sull'indice di riferimento in modo tale da soddisfare interamente i nostri parametri di copertura. Questo significa definire uno *strike price* (K) ben preciso, scelto in modo tale non far mai scendere, a scadenza, il valore del portafoglio completo (azioni e opzioni) sotto una determinata soglia, che può essere scelta arbitrariamente, detta *lower bound*. In altre parole, stiamo assicurando il nostro investimento dal *downside risk*. Non solo. Essendo capaci di definire con estrema precisione il valore del portafoglio assicurato, siamo in grado di gestire diversi gradi di avversione al rischio sia di investitori privati, sia di grandi investitori istituzionali.

L'intuizione che sta alla base del modello, come accennato nel paragrafo. 3.4.2, è la seguente: nel momento in cui procediamo con la costruzione dell'opzione *put*, dovremo essere più conservativi in caso di portafogli con *beta* maggiori di 1, meno conservativi quando il *beta* è minore di 1. Che tradotto in termini di *strike price* significa che, in caso di portafogli con coefficienti *beta* maggiori di 1, dovremo scegliere *strikes* più elevati (più conservativi), in caso di portafogli con coefficienti *beta* minori di 1, dovremo scegliere *strikes* in valore assoluto più piccoli (meno conservativi).

La relazione tra *beta* e *strike price* risulta più chiara se illustrata tramite un esempio. Attraverso questo esempio indagheremo come, al variare del beta del portafoglio, varia lo *strike* della nostra opzione *put*.

Supponiamo che il portafoglio al tempo $t = 1$ valga \$100,000 e che l'S&P 500 quoti \$1000 nello stesso istante. Ipotizziamo anche che il gestore del portafoglio intenda assicurarsi che il valore del suo investimento non scenda mai sotto \$80,000 nel prossimo mese ($T = 30$). La dimensione di ogni contratto *put* sull' S&P 500 è pari a 10 volte il prezzo *spot* dell'indice e il *beta* del portafoglio è pari a 1.5. A questo punto, il numero di contratti *put* da acquistare per effettuare la copertura è pari a:

$$N = 1.5 * \frac{100{,}000}{1{,}000 * 10} = 15$$

In termini generali il numero di contratti *put* da acquistare è pari a:

$$N = \beta * \frac{Val_p^t}{S_0 * D}$$

Dove:

- $\boldsymbol{N}$ è il numero di contratti *put* da acquistare
- $\boldsymbol{\beta}$ è il *beta* del portafoglio
- $\boldsymbol{Val_p^t}$ è il valore al tempo $t = 1$ del portafoglio

- $\boldsymbol{S_0}$ è il prezzo *spot* dell'indice
- $\boldsymbol{D}$ è la dimensione del contratto d'opzione

Per quanto riguarda lo *strike price* (K) dell'opzione, esso deve essere uguale al livello atteso dell'indice quando il portafoglio raggiunge il valore soglia assicurato (il *lower bound*). Come primo step, dobbiamo trovare il valore del portafoglio al tempo $T = 30$ in base ai possibili valori che l'indice può assumere sempre a $T = 30$. Ipotizziamo che il *dividend yield* del portafoglio sia pari a q e che il tasso d'interesse *risk-free* sia pari a *rf*. La relazione che lega il valore del portafoglio al valore atteso dell'indice a scadenza è la seguente:

$$m = \frac{(S_T - S_0)}{S_0} + [(T * q) - (T * rf) * \beta] + (T * rf) - (T * q) \quad (1)$$

$$Val_p^T = Val_p^t * (1 + m) \quad (2)$$

Dove:

- $\boldsymbol{S_T}$ è il valore dell'indice a scadenza ($t = T$)
- $\boldsymbol{S_0}$ è il valore dell'indice al tempo $t = 1$
- $\boldsymbol{T}$ è il periodo di copertura, ovvero la scadenza dell'opzione, espresso come frazione in relazione ai giorni lavorativi in un anno i.e. 252
- $\boldsymbol{q}$ è il *dividend yield* del portafoglio
- $\boldsymbol{rf}$ è il tasso d'interesse *risk-free*
- $\boldsymbol{\beta}$ è il coefficiente *beta* del portafoglio
- $\boldsymbol{Val_p^T}$ è il valore del portafoglio a scadenza
- $\boldsymbol{Val_p^t}$ è il valore del portafoglio al tempo $t = 1$

Lo *strike price*, dunque, sarà uguale al valore atteso dell'indice quando il portafoglio raggiunge il valore assicurato a scadenza ($lower\ bound$). In termini matematici, *lo strike price* è quel valore che, se sostituito ad S_T nell'equazione (1), soddisfa la seguente relazione:

$$lower\ bound = Val_p^t * (1 + m)$$

Se vogliamo che il valore assicurato tenga conto dei dividendi incassati durante il periodo di copertura, occorrerà sottrarre al *lower bound* il valore corrente dei dividendi incassati nel periodo che va da $t = 1$ a T:

$$lower\ bound_{div} = lower\ bound - Q_T$$

Dove:

- $\boldsymbol{lower\ bound_{div}}$ è il valore assicurato tenendo conto dei dividendi incassati
- $\boldsymbol{Q_T}$ è il valore dei dividendi incassati durante il periodo di copertura

4.3.1 Modellizzazione

L'intero processo descritto nel capitolo precedente è stato modellizzato nelle seguenti modalità (cfr. *Appendice*, pag.).

Per prima cosa definiamo le variabili di *input*:

1. $\boldsymbol{S_0}$: prezzo *spot* dell'indice
2. ***Beta* (β)**: coefficiente *beta* del portafoglio
3. ***Dividend yield***: tasso di dividendo annuo del portafoglio
4. **Dimensione del contratto d'opzione**
5. **Valore del portafoglio**

6. ***Lower bound***: valore soglia assicurato

7. **T**: periodo di copertura

8. ***Risk-free rate***

Per completezza, troviamo anche il numero di contratti *put* da acquistare per la copertura. Questo numero non ci servirà in seguito, in quanto nella progettazione dell'opzione *put* sintetica l'unica variabile d'interesse è lo *strike price*. Tuttavia, nel caso in cui si optasse in una copertura del tipo *hedge-and-forget*, il numero di contratti da acquistare diverrebbe una variabile fondamentale per la riuscita della strategia.

In secondo luogo, per quantificare la relazione che lega il valore del portafoglio al valore atteso dell'indice a scadenza, e di conseguenza calcolare lo strike della nostra *put*, è stato scelto un approccio simile a una simulazione Monte-Carlo.

Il processo è così strutturato:

1. simuliamo una serie di *N* (scelto arbitrariamente) possibili valori che può assumere a scadenza l'indice. Questi valori sono generati seguendo la successiva equazione:

$$I^T = S_0 * \left(1 + \frac{i}{Z}\right)$$

$$con\ i\ numero\ intero\ che\ varia\ da - N\ a\ N$$

Dove:

- I^T è il valore atteso dell'indice a scadenza
- $\boldsymbol{S_0}$ è il valore dell'indice al tempo $t = 1$
- $\boldsymbol{Z}$ è un valore scelto arbitrariamente

2. leghiamo i valori derivanti dalla simulazione ai valori del portafoglio azionario seguendo la relazione descritta dalle equazioni (1) e (2) al paragrafo 4.3.

3. individuiamo il valore atteso dell'indice in corrispondenza del quale il valore del portafoglio corrisponde al *lower bound*. Questo valore è lo *strike price* dell'opzione *put*.

Nel caso in cui volessimo tener conto dei dividendi il processo è analogo, con l'unica differenza che il *lower bound* è calcolato al netto dei dividendi incassati durante il periodo di copertura.

In questo modo riusciamo ad individuare in maniera precisa lo *strike price* (K) che permette al portafoglio completo (azioni e opzioni) di non scendere, a scadenza, al di sotto della soglia prescelta dal gestore.

4.3.2 Applicazione Pratica

Seguendo l'esempio al paragrafo 4.2, visualizziamo l'interfaccia di Excel e l'output che ci restituisce il modello con i seguenti dati di *input*:

9. $\boldsymbol{S_0}$: \$4,576.73 (prezzo spot dell'indice S&P 500 al 1° agosto 2023)

10. ***Beta* (β)**: 1.249 (risultato dalla precedente analisi sul portafoglio azionario)

11. ***Dividend yield***: 1.7% (annuo; fonte: Bloomberg L.P.)

12. **Dimensione del contratto**: 50 (un singolo contratto d'opzione è scritto su 50 volte il prezzo spot dell'indice)

13. **Valore del portafoglio**: \$100mln

14. ***Lower bound***: \$95mln (valore soglia assicurato)

15. **T**: $\frac{86}{252}$ (periodo di copertura, orizzonte temporale: 1° agosto 2023 - 1° dicembre 2023)

16. ***Risk-free rate***: 4.1% (rendimento del 10 years Treasury Note al 1° agosto 2023; fonte: Bloomberg L.P.)

17. **Fattore di variazione (Z)**: 5,716.336 (il fattore di variazione dell'indice, nel nostro caso, è dato dalla seguente relazione, $Z = \beta * S_0$. Tuttavia, può essere scelto arbitrariamente a seconda della precisione con cui vogliamo legare i valori del portafoglio ai valori attesi dell'indice, i.e. valori elevati di Z permettono di generare scenari molto simili tra loro in termini numerici, capaci quindi di catturare al meglio lo *strike* desiderato)

18. **N**: 800 (corrisponde al numero di possibili valori dell'indice che intendiamo generare, per come è stato costruito il codice, un $N = 800$ genererà 1,600 possibili scenari)

Di seguito viene presentata l'interfaccia di Excel, dove sono evidenziati i tre *output* del modello: il numero di contratti *put* da acquistare, lo *strike pric*e (K) e lo *strike price* (K) considerando i dividendi incassati.

S0	4.576,73
β	1,249
dividend yield (annuo)	0,017
dimensione contratto	50
valore del portafoglio	100000001,8
lower bound	95000000
T	0,341269841
Risk free rate	0,041
N° Puts	545,8045472
K (strike)	4402
K (strike) considerando i dividendi	4380

Launch Macro

fattore di variazione (Z)
5716,33577
N
800

valore dell'indice	moltiplicatore	Valore del portafoglio
5217	0,172691707	117300000
5216	0,172418805	117200000
5216	0,172418805	117200000
5215	0,172145902	117200000
5214	0,171873	117200000
5213	0,171600098	117200000
5212	0,171327196	117100000
5212	0,171327196	117100000
5211	0,171054293	117100000
5210	0,170781391	117100000
5209	0,170508489	117100000
5208	0,170235587	117000000
5208	0,170235587	117000000
5207	0,169962684	117000000
5206	0,169689782	117000000
5205	0,16941688	116900000
5204	0,169143977	116900000
5204	0,169143977	116900000
5203	0,168871075	116900000
5202	0,168598173	116900000

dividend yield T	dividendi incassati T	valore assicurato tenendo conto dei dividendi
0,005801587	580158,7407	94400000

. . .

	4408	-0,048086228	95200000	
	4407	-0,048359131	95200000	
	4406	-0,048632033	95100000	
	4405	-0,048904935	95100000	
	4405	-0,048904935	95100000	
	4404	-0,049177837	95100000	
	4403	-0,04945074	95100000	
Strike (K) →	4402	-0,049723642	95000000	← Lower bound
	4401	-0,049996544	95000000	
	4401	-0,049996544	95000000	
	4400	-0,050269447	95000000	
	4399	-0,050542349	94900000	
	4398	-0,050815251	94900000	
	4397	-0,051088153	94900000	
	4397	-0,051088153	94900000	
	4396	-0,051361056	94900000	
	4395	-0,051633958	94800000	
	4394	-0,05190686	94800000	
	4393	-0,052179762	94800000	
	4393	-0,052179762	94800000	
	4392	-0,052452665	94800000	
	4391	-0,052725567	94700000	
	4390	-0,052998469	94700000	
	4389	-0,053271371	94700000	
	4389	-0,053271371	94700000	
	4388	-0,053544274	94600000	
	4387	-0,053817176	94600000	
	4386	-0,054090078	94600000	
	4385	-0,054362981	94600000	
	4385	-0,054362981	94600000	
	4384	-0,054635883	94500000	
	4383	-0,054908785	94500000	
	4382	-0,055181687	94500000	
	4381	-0,05545459	94500000	
	4381	-0,05545459	94500000	
Strike (K), con dividendi →	4380	-0,055727492	94400000	← Lower bound, con dividendi
	4379	-0,056000394	94400000	
	4378	-0,056273296	94400000	
	4377	-0,056546199	94300000	
	4377	-0,056546199	94300000	
	4376	-0,056819101	94300000	

. . .

3948	-0,173621272	82600000
3947	-0,173894174	82600000
3947	-0,173894174	82600000
3946	-0,174167076	82600000
3945	-0,174439979	82600000
3944	-0,174712881	82500000
3943	-0,174985783	82500000
3943	-0,174985783	82500000
3942	-0,175258686	82500000
3941	-0,175531588	82400000
3940	-0,17580449	82400000
3939	-0,176077392	82400000
3939	-0,176077392	82400000
3938	-0,176350295	82400000
3937	-0,176623197	82300000
3936	-0,176896099	82300000

In conclusione, l'opzione *put* sintetica che andremo a costruire nei passaggi successivi dovrà avere le seguenti caratteristiche:

- *Strike* pari a $4,402 ($4,380 se intendiamo considerare i dividendi)
- Scadenza (T) pari a 4 mesi (86 giorni lavorativi)

4.4 Costruzione sintetica dell'opzione put mediante futures

Nel capitolo 5 abbiamo affermato che lo strumento di *hedging* che massimizza l'efficacia del modello è un'opzione *put* sintetica costruita mediante *futures* sull'indice S&P 500. Ora illustreremo i passaggi che sono stati intrapresi per la costruzione dello strumento.

Per costruire la *put* sintetica, dobbiamo vendere, in ogni istante, una precisa quantità di contratti *futures* scritti sull'S&P 500. Il valore nominale di questa quota è pari a:

$$e^{-qT_1}[1 - N(d_1)]e^{-(r-q)T_2}$$

Dove:

- $\boldsymbol{q}$ è il *dividend yield* annuo dell'indice
- $\boldsymbol{r}$ è il tasso d'interesse *risk-free*
- $\boldsymbol{T_1}$ è la scadenza della *put* sintetica, ossia il periodo di copertura
- $\boldsymbol{T_2}$ è la vita residua del *futures* sull'S&P 500
- $\boldsymbol{N(d_1)}$ è il fattore descritto dalla formula di Black-Scholes-Merton

Notiamo anche che il termine:

$$e^{-qT_1}[1 - N(d_1)]$$

Corrisponde al delta (Δ) dell'opzione *put* sintetica cambiato di segno. In termini matematici:

$$e^{-qT_1}[1 - N(d_1)] = -\Delta_p$$

Il significato di questo cambio di segno è esclusivamente una questione di semplicità e immediatezza nella lettura dei risultati. La quantità di contratti *futures* corti in portafoglio, infatti, riteniamo sia preferibile esprimerla in termini positivi invece che negativi.

Adesso, se il valore del portafoglio azionario è pari a A_1 volte l'indice, e ogni contratto futures è scritto su un importo pari a A_2 volte l'indice, il numero di contratti futures da vendere in ogni istante è pari a:

$$e^{q(T_2-T_1)}e^{-rT_2}[1- \ N(d_1)]*\frac{A_1}{A_2} \quad (1)$$

Questa posizione deve essere aggiustata dinamicamente al passare del tempo e al modificarsi del valore dell'indice.

Come *inputs* del modello abbiamo:

1. $\boldsymbol{S_0}$ è il valore dell'indice al tempo $t = 1$
2. $\boldsymbol{K}$ è lo *strike price* dell'opzione sintetica
3. $\boldsymbol{rf}$ è il tasso d'interesse *risk-free*
4. $\boldsymbol{q}$ è il dividend yield del portafoglio
5. $\boldsymbol{\sigma}$ è la volatilità del portafoglio azionario
6. $\boldsymbol{T_1}$ è la scadenza della *put* sintetica, ossia il periodo di copertura
7. $\boldsymbol{T_2}$ è la vita residua del *futures* sull'S&P 500
8. $\boldsymbol{A_1}$ è il multiplo del valore dell'indice rispetto al portafoglio
9. $\boldsymbol{A_2}$ è la dimensione del contratto futures sull'indice
10. Serie storica dei prezzi dell'indice
11. Serie storica dei prezzi futures dell'indice

Per quanto riguarda la volatilità del portafoglio, occorre soffermarsi un momento sul metodo della sua stima.

4.4.1 Stima della volatilità

Come *benchmark* per la stima della volatilità siamo partiti dall'indice VIX. Questo indice riflette la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni *call* e *put* scritte sull'indice S&P 500 con scadenza un mese. Il vantaggio di utilizzare la volatilità implicita nei prezzi delle opzioni è che si tratta di una stima *forward-looking*. A differenza di metodi quali medie mobili esponenziali o GARCH, l'*implied volatility* incorpora le aspettative future degli investitori sui prossimi movimenti del mercato. Data la tipologia della nostra ricerca, basata sulla mitigazione del rischio di mercato futuro, risulta cruciale affidarsi a un metodo di stima della volatilità capace di prevedere in qualche modo la volatilità futura, quale la volatilità implicita.

Come abbiamo detto, il VIX, esprime la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni a un mese. Come prima cosa dobbiamo trasformare questa volatilità mensile a una volatilità del periodo di copertura T_1, procediamo così:

$$\sigma_{T_1} = VIX * \sqrt{T_1} \quad (2)$$

Dove T_1 è espresso in mesi.

In secondo luogo, sappiamo come l'indice VIX esprima la volatilità del mercato (più precisamente dell'indice S&P 500). Ora dobbiamo trasformare questa volatilità del mercato nella volatilità del portafoglio. Procediamo moltiplicando il valore della volatilità trovato nella (2) con il *beta* (β) del portafoglio.

$$\sigma_{TARGET} = \sigma_{T_1} * \beta \quad (3)$$

A questo punto siamo riusciti ad ottenere una stima della volatilità *forward-looking*, calibrata al periodo di copertura, e che rispecchia la composizione del nostro portafoglio azionario.

4.5 Modellizzazione

Il processo di costruzione della *put* sintetica è stato così implementato (cfr. *Appendice*, pag.).

Per prima cosa vengono definite le variabili di *input*.

Una volta estratta la serie storica dei prezzi dell'indice, trovo il numero dei dati e il numero di giorni in cui ho i dati sui prezzi. In seguito, esprimo i giorni in rapporto all'anno finanziario (252 giorni).

A questo punto calcolo le varie componenti dell'equazione (1), che sono:

- d_1
- $N(d_1)$
- Δ_p (delta dell'opzione *put* sintetica)

Il codice è scritto in modo tale da aggiornare giornalmente le variazioni registrate dall'indice e incorporare nell'equazione lo scorrere del tempo:

```
'ciclo per stampare d1,N(d1), delta della put, il valore nominale dei futures da vendere
'in rapporto al valore del portafoglio, il numero di contratti da vendere totali
'formula di J.HULL

For i = 1 To num

        Cells(1 + i, 7) = (Log(Cells(1 + i, 6) / K) + (rf - q + sigma ^ (2) / 2) * (Cells(1 + i, 3))) / (sigma * Sqr(Cells(1 + i, 3)))
        Cells(1 + i, 8) = WorksheetFunction.Norm_S_Dist(Cells(1 + i, 7), True)
        Cells(1 + i, 9) = (Exp(-q * (Cells(1 + i, 3)))) * (Cells(1 + i, 8) - 1)
        Cells(1 + i, 10) = (Exp(q * (t2 - (Cells(1 + i, 3))))) * (Exp(-rf * (t2))) * (1 - Cells(1 + i, 8))
        Cells(1 + i, 11) = Cells(1 + i, 10) * (A1 / A2)

Next i
```

Viene arrotondato il numero di contratti in modo tale da rendere più facile la compravendita dei *futures*, e viene stampato il numero di contratti da acquistare o vendere (a seconda dei movimenti dell'indice) ogni giorno.

Viene successivamente stampato il comando sul mercato (*BUY*, *SELL* o *NEUTRAL*) a seconda che, quel preciso giorno, io debba acquistare o vendere contratti *futures*.

Infine, una volta importati i dati dei prezzi *futures* sull'S&P 500 durante il periodo di copertura, viene calcolato dinamicamente il profitto (o la perdita) che subisce il nostro portafoglio di *futures*.

Arrivati a questo punto, l'efficacia del modello è facilmente verificabile confrontando il valore del portafoglio azionario con quello del portafoglio completo. La valutazione può essere effettuata sia a scadenza sia durante l'intero periodo di copertura. Ulteriori considerazioni sull'efficacia del modello verranno discusse nei paragrafi successivi, dove ci baseremo sui risultati ottenuti per indagare con cura la vantaggiosità del modello.

4.6 Applicazione Pratica

Seguendo l'esempio al paragrafo 4.2, visualizziamo l'interfaccia di Excel e l'*output* che ci restituisce il modello con i seguenti dati di *input*:

1. $\boldsymbol{S_0}$: $4,576.73 (prezzo spot dell'indice S&P 500 al 1° agosto 2023)

2. ***Strike price* (K)**: $4,402 (risultato dalla precedente analisi sul *design* dell'opzione *put* sintetica)

3. ***Risk-free rate***: 4.1% (rendimento del 10 *years* Treasury Note al 1° agosto 2023; fonte: Bloomberg L.P.)

4. ***Dividend yield***: 1.7% (annuo; fonte: Bloomberg L.P.)

5. **Volatilità (σ)**: 37.47% (volatilità a 4 mesi, derivante dalla formula (3) al paragrafo 4.4.1; fonte VIX: Bloomberg L.P.)

6. **T1**: $\frac{86}{252}$ (periodo di copertura, orizzonte temporale: 1° agosto 2023 - 1° dicembre 2023)

7. **T2**: $\frac{233}{252}$ (scadenza del *futures*: giugno 2024)

8. **A1**: 21,849.662 ($\frac{Cap.iniziale}{Valore\ dell'indice\ al\ giorno\ 1} = \frac{\$100mln}{\$4{,}576.73}$)

9. **A2**: 50 (un singolo contratto *futures* è scritto su 50 volte il prezzo *spot* dell'indice)

Di seguito viene riportata l'interfaccia di Excel, come primo *step* riportiamo gli *inputs*:

1	S0	4.576,73
2	K	4402
3	rf	0,041
4	q	0,017
5	σ	0,3747
6	T1 (periodo di copertura)	0,341269841
7	T2 (scadenza del futures)	0,924603175
8	A1	21849,66162
9	A2	50

Una volta importati i dati sul prezzo *spot* dell'indice, vengono calcolati giornalmente i valori di d_1, $N(d_1)$ e del delta della *put* sintetica (Δ_p):

T(giorni)	prezzo spot indice	d1	N(d1)	Δp	valore nominale dei futures da vendere in rapporto al valore del portafoglio
1	4.576,73	0,324880869	0,627364382	-0,37050499	0,362373861
2	4.513,39	0,260660778	0,602822942	-0,39493275	0,386265527
3	4.501,89	0,248624138	0,598174232	-0,39958215	0,390812888
4	4.478,03	0,223524517	0,588436348	-0,40929327	0,40031089
5	4.518,44	0,26542906	0,604660524	-0,39318512	0,384556248
6	4.499,38	0,24528949	0,596883856	-0,40094646	0,392147254
7	4.467,71	0,211386206	0,58370704	-0,41408028	0,404992845
8	4.468,83	0,212146164	0,584003497	-0,41381332	0,404731738
9	4.464,05	0,206547533	0,58181838	-0,41601503	0,406885132
10	4.489,72	0,233950472	0,592488285	-0,40542776	0,396530206
11	4.437,86	0,176840815	0,570183286	-0,42764754	0,418262352
12	4.404,33	0,138839319	0,555211439	-0,44257368	0,432860925
13	4.370,36	0,099540568	0,539645461	-0,45809305	0,448039703
14	4.369,71	0,097620414	0,538883143	-0,45888258	0,448811904
15	4.399,77	0,130895438	0,552070988	-0,4457887	0,43600539
16	4.387,55	0,115850666	0,546114553	-0,45174715	0,441833074
17	4.436,01	0,170803567	0,567810888	-0,43018205	0,42074124
18	4.376,31	0,100522604	0,540035281	-0,45785955	0,447811333
19	4.405,71	0,133990047	0,553294778	-0,44469074	0,434931524
20	4.433,31	0,165619175	0,565771672	-0,43229928	0,422812002
21	4.497,63	0,240615347	0,595073373	-0,40315494	0,394307273
22	4.514,87	0,26076872	0,602864566	-0,39542451	0,386746496
23	4.507,66	0,252304243	0,599597046	-0,39870485	0,389954845
24	4.515,77	0,26199118	0,603335879	-0,39500852	0,386339634
25	4.496,83	0,239303416	0,594564842	-0,40377019	0,394909016
…					
70	4378,38	0,006362991	0,502538449	-0,4969249	0,486019345
71	4382,78	0,013469954	0,505373572	-0,49412617	0,483282035
72	4347,35	-0,08219404	0,467246207	-0,53225087	0,520570054
73	4415,24	0,092388641	0,536805368	-0,4627886	0,452632201
74	4411,55	0,081364077	0,532423792	-0,46719785	0,456944687
75	4495,7	0,321571666	0,626111394	-0,37361126	0,365411957
76	4502,88	0,353638656	0,63819515	-0,36156086	0,353626015
77	4508,24	0,384289025	0,649617879	-0,35016945	0,342484607
78	4514,02	0,421192644	0,663192792	-0,33662549	0,329237878
79	4547,38	0,562192598	0,713007598	-0,28685691	0,280561525
80	4538,19	0,565782833	0,714229291	-0,28565506	0,279386055
81	4556,62	0,689489703	0,754742425	-0,24517486	0,239794237
82	4559,34	0,775595577	0,781006094	-0,21893482	0,21413006
83	4550,43	0,838590072	0,799150308	-0,20080905	0,196402077
84	4554,89	1,045208098	0,852036599	-0,14794344	0,14469666
85	4550,58	1,422203555	0,922516417	-0,07747836	0,07577801

Si ricorderà che, in precedenza, il periodo di copertura è stato fissato a 86 giorni lavorativi. Nonostante ciò, la posizione sul *futures* viene chiusa sempre al termine delle contrattazioni del giorno precedente a quello predefinito come termine della copertura (nel nostro caso l'85° giorno). Ciò è stato deciso in modo da rendere il modello più flessibile possibile. Infatti, non tutti i contratti *futures* sono regolati tramite *cash*, alcuni, se lasciati scadere, comportano la consegna fisica del sottostante. Nel caso in cui, quindi, la scadenza del *futures* coincidesse con il termine della copertura, saremmo costretti ad entrare in possesso fisicamente del sottostante e in seguito venderlo al prezzo prestabilito. Come è evidente, questa dinamica comporterebbe una serie di costi che siamo ben lieti di non sostenere. Dunque, liquidando la posizione sul *futures* il giorno precedente alla scadenza, siamo in grado di bypassare le problematiche legate alla consegna fisica del sottostante e tutti i costi legati ad esse.

A questo punto troviamo il numero di contratti *futures* corti da detenere in portafoglio e visualizziamo il comando sul mercato. Le due colonne denominate “comando su *futures*” e “numero contratti” devono essere considerate congiuntamente: il comando, infatti, indica se quel preciso giorno dobbiamo vendere o acquistare contratti *futures*, il numero di contratti indica il numero preciso di *futures* da vendere o acquistare. Il segno dei valori presenti nella colonna “numero contratti” sta ad indicare la natura dell’operazione: un segno negativo implica che quel preciso giorno ho assunto una posizione *short*, un segno positivo una posizione *long*.

Il numero di contratti da vendere (o acquistare) ogni giorno viene calcolato in questo modo:

$$T = 1 \quad N°futures = -D_T$$

$$1 < T < n \quad N°futures = -D_{T+1} + D_T$$

Dove:

- $\boldsymbol{N°futures}$ è il numero di contratti *futures* da vendere o acquistare ogni giorno

- $\boldsymbol{n}$ è il numero dei giorni in cui voglio effettuare la copertura
- $\boldsymbol{D_T}$ è il numero di contratti *futures* da detenere in portafoglio al tempo T

In seguito, una volta importati i dati sul prezzo *futures* dell’indice, viene calcolato dinamicamente il profitto (o la perdita) del nostro portafoglio di copertura. Anche qui un segno negativo indicherà una perdita, uno positivo un profitto. La schermata di *trading* risulta la seguente:

numero dei contratti futures corti in portafoglio	comando su futures	numero contratti	prezzo futures dell'indice	profitto sulla posizione corta in futures
158	SELL	-158	4.761,50	0
169	SELL	-11	4.694,25	531275
171	SELL	-2	4.678,75	662250
175	SELL	-4	4.652,75	884550
168	BUY	7	4.693,50	527987,5
171	SELL	-3	4.672,50	704387,5
177	SELL	-6	4.639,00	990812,5
177	NEUTRAL	0	4.638,50	995237,5
178	SELL	-1	4.633,50	1039487,5
173	BUY	5	4.660,50	799187,5
183	SELL	-10	4.607,00	1261962,5
189	SELL	-6	4.572,00	1582212,5
196	SELL	-7	4.533,25	1948400
196	NEUTRAL	0	4.530,50	1975350
191	BUY	5	4.563,00	1656850
193	SELL	-2	4.549,50	1785775
184	BUY	9	4.598,00	1317750
196	SELL	-12	4.536,00	1888150
190	BUY	6	4.567,75	1577000
185	BUY	5	4.597,00	1299125
172	BUY	13	4.662,50	693250
169	BUY	3	4.680,25	540600
170	SELL	-1	4.672,25	608200
169	BUY	1	4.676,75	569950
173	SELL	-4	4.658,75	722050

…

212	BUY	5	4494,00	1747650
211	BUY	1	4497,75	1707900
227	SELL	-16	4460,25	2103525
198	BUY	29	4530,00	1311862,5
200	SELL	-2	4525,00	1361362,5
160	BUY	40	4610,75	503862,5
155	BUY	5	4620,00	429862,5
150	BUY	5	4623,50	402737,5
144	BUY	6	4627,75	370862,5
123	BUY	21	4663,75	111662,5
122	BUY	1	4652,75	179312,5
105	BUY	17	4669,50	77137,5
94	BUY	11	4670,50	71887,5
86	BUY	8	4663,00	107137,5
63	BUY	23	4664,50	100687,5
33	BUY	30	4659,75	115650

Arrivati a questo punto confrontiamo l’evoluzione del valore del portafoglio azionario con l’evoluzione del portafoglio completo.

valore del portafoglio azionario	valore portafoglio azionario e futures
100000001,8	100000001,8
97273788,24	97805063,24
97229538,11	97891788,11
97560637,76	98445187,76
98194786,2	98722773,7
97421397,28	98125784,78
95594378,29	96585190,79
95643252,55	96638490,05
94816409,39	95855896,89
96952882,19	97752069,69
96036676,85	97298639,35
95136832,57	96719045,07
94408670,26	96357070,26
94147514,09	96122864,09
96536967,65	98193817,65
96218343,67	98004118,67
98167400,37	99485150,37
96272158,02	98160308,02
96536902,79	98113902,79
97238568,93	98537693,93
99508903,29	100202153,3
100412810,8	100953410,8
100902787,3	101510987,3
100811360,1	101381310,1
101019805,3	101741855,3

…

100799858,3	102547508,3
101358458,8	103066358,8
100953470,2	103056995,2
103324261,5	104636124
102844466,4	104205828,9
104531599,7	105035462,2
103930236,5	104360099
104951784,1	105354521,6
104718091,1	105088953,6
106135718,5	106247381
105266059,4	105445371,9
105657878,5	105735016
104891223,2	104963110,7
105271645,8	105378783,3
105364272,4	105464959,9
104838391,8	104954041,8

Tabella n° 5. Evoluzione giornaliera del valore del portafoglio azionario e del portafoglio completo

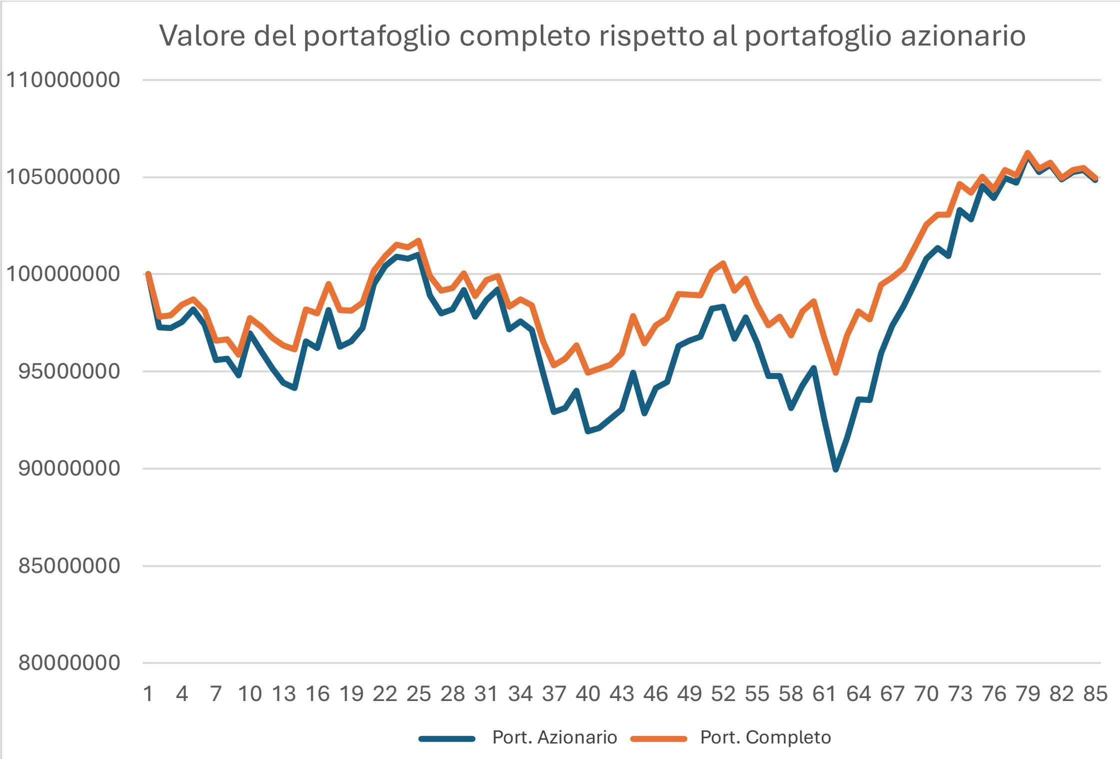


Grafico n° 11. Evoluzione del valore del portafoglio completo e del portafoglio azionario

Come si evince dal grafico, l'implementazione di questo modello ha evidenziato due principali vantaggi:

1. La strategia non solo garantisce un'efficace copertura a scadenza, ma offre una validissima assicurazione dal *downside risk* durante tutto il periodo di copertura. Il valore del portafoglio completo scende al di sotto del *lower bound* solamente in due occasioni, e, peraltro, in maniera quasi impercettibile. Durante il quarantesimo giorno il valore del portafoglio azionario scende a \$91,906,555 mentre il valore del portafoglio completo supera per la prima volta il *lower bound* e tocca i \$94,936,393. Durante il sessantaduesimo giorno il valore del portafoglio azionario scende in maniera decisa a \$89,954,710 mentre il valore del portafoglio completo rimane stabile nell'intorno del *lower bound* attestandosi a \$94,931,860. In tutti e due i casi riscontriamo un recupero immediato il giorno successivo al superamento del *lower bound*, il valore del portafoglio completo non è mai stato al di sotto del livello prestabilito per più di 24 ore. Oltre a questo, è importante sottolineare che le eventuali discese del

portafoglio completo al di sotto del valore assicurato sono di entità minima. In entrambi i casi la forbice tra *lower bound* e valore effettivo del portafoglio completo è pari circa allo 0.063% del valore dell'intero portafoglio azionario.

2. Il costo dell'assicurazione (senza tenere conto dei costi di transazione) è minimo, se non addirittura negativo. Dalla tabella n°5 notiamo come il valore del portafoglio completo, a scadenza, è leggermente superiore al valore del solo portafoglio azionario nonostante esso sia di gran lunga superiore al valore iniziale:

- Valore iniziale del portafoglio azionario: $100,000,000
- Valore finale del portafoglio azionario: $104,838,391
- Valore finale del portafoglio completo: $104,954,041

A scadenza il portafoglio completo vale circa $115,650 (lo 0.11%) in più rispetto al portafoglio azionario. Dunque, il costo dell'assicurazione è pari a -11 punti base.

Ricordando ciò che è stato detto nel capitolo 5, uno strumento di *hedging* ottimale deve essere capace di assicurare il valore del portafoglio in caso di mercato ribassista, e, allo stesso tempo, di non ostacolare il rendimento del portafoglio in caso di mercato rialzista. Dunque, il contributo del nostro modello è in questo senso eccezionale. Non solo è capace di mitigare in modo puntuale le perdite, ma è anche in grado di performare al meglio quando il mercato ha carattere rialzista lasciando pressoché invariati i profitti realizzati sul portafoglio non coperto.

CAP 5 Testare il modello

In questo ultimo capitolo analizzeremo il comportamento del modello in diverse finestre temporali e variando alcuni dati di *input*. Quello che ci aspettiamo è che la copertura dinamica risulti efficacie in più situazioni, rendendo il modello adatto ad essere utilizzato in molteplici e differenti congiunture economiche.

5.1 Caso n°1: scadenza della copertura nel momento in cui il valore del portafoglio azionario risulta inferiore al lower bound

Il risultato presentato nel capitolo precedente fa riferimento ad un particolare caso, nel quale, il valore del portafoglio azionario a scadenza risulta superiore al valore assicurato. In altre parole, se ipotizziamo per assurdo che il gestore di portafoglio abbia la possibilità di prevedere il futuro, egli non avrebbe in alcun caso cercato di assicurarsi in quanto sarebbe stato certo che il valore del suo investimento sarebbe cresciuto nel tempo.

Adesso, impostiamo la nostra finestra di copertura in modo tale da far terminare il valore del portafoglio molto al di sotto del valore assicurato. Tenete conto che, tutte le altre variabili di *input*, come la composizione del portafoglio, la volatilità del mercato, il *dividend yield*, il *lower bound*, ecc. sono rimaste invariate rispetto all'esempio al capitolo 3.

In questo caso effettueremo una copertura più breve, di 65 giorni lavorativi, rispetto alla precedente di 86. Lo *strike price K*, inserendo la nuova finestra come *input*, risulta pari a $4,400

L'evoluzione del valore dei due portafogli (azionario e completo) è di seguito riportata.

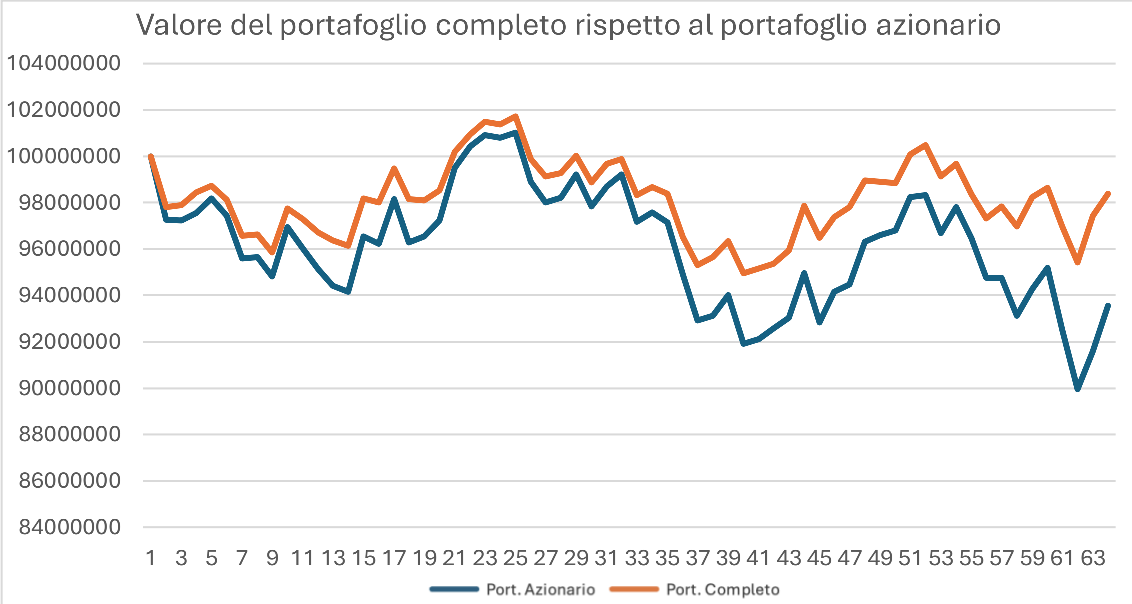


Grafico n° 12. Evoluzione del valore del portafoglio completo e del portafoglio azionario

Nella seguente tabella sono riportati i valori giornalieri dei due portafogli per l'intero periodo di copertura.

valore del portafoglio azionario	valore portafoglio azionario e futures
100000001,8	100000001,8
97273788,24	97801700,74
97229538,11	97888425,61
97560637,76	98441825,26
98194786,2	98717373,7
97421397,28	98120384,78
95594378,29	96581465,79
95643252,55	96634790,05
94816409,39	95852446,89
96952882,19	97747269,69
96036676,85	97296514,35
95136832,57	96720420,07
94408670,26	96364257,76
94147514,09	96130601,59
96536967,65	98193430,15
96218343,67	98005756,17
98167400,37	99477087,87
96272158,02	98158445,52
96536902,79	98105690,29
97238568,93	98525093,93
99508903,29	100183003,3
100412810,8	100934260,8
100902787,3	101491437,3
100811360,1	101361985,1
101019805,3	101720730,3
98907409,79	99889984,79
97998710,72	99127535,72
98198901,24	99268251,24
99209239,66	100014689,7
97829948,31	98863773,31
98687172,48	99689497,48
99213333,43	99873320,93
97164296,2	98316496,2
97565461,98	98685461,98
97151239,37	98376464,37
94905841,37	96528641,37
92917274,74	95314749,74
93114107,39	95638657,39
94002940,37	96330615,37
91906555,45	94954730,45
92102477,32	95159727,32
92586574,87	95352224,87
93044197,99	95950847,99
94952372,67	97877022,67
92839566,38	96496253,88
94160234,95	97381322,45
94475391,81	97797679,31
96314218,83	98952243,83
96590161,88	98914499,38
96801412,5	98845225
98237241,78	100079391,8
98330691,43	100493841,4
96687866,12	99126253,62
97796525,93	99685213,43
96467532,09	98342594,59
94764621,28	97313108,78
94755695,94	97827083,44
93116049,26	96967136,76
94273991,7	98230379,2
95181361,84	98645174,34
92506521,59	96970459,09
89954710,14	95418672,64
91585456,8	97442444,3
93566160,61	98385860,61

Tabella n° 6. Evoluzione giornaliera del valore del portafoglio azionario e del portafoglio completo

Come si evince in maniera chiara dal grafico e dalla tabella, il modello risulta notevolmente efficace anche nel caso in cui la *performance* delle azioni sia molto al di sotto del *lower bound* a scadenza.

Il valore del portafoglio azionario, in questo esempio, termina a $93,566,160, circa $1,433,840 al di sotto del valore assicurato (che ricordiamo è pari a $95 mln). Nonostante ciò, il valore del portafoglio di copertura termina di gran lunga al di sopra del valore assicurato, e si attesta a $98,385,860 (circa $3,385,860 in più rispetto al *lower bound*). Oltre a questo, valgono anche in questo caso le considerazioni fatte nell'esempio al capitolo 5 riguardo l'affidabilità del modello durante tutto il periodo di copertura. Anche qui, il valore del portafoglio completo scende al di sotto del *lower bound* per meno di 24 ore e in maniera ancora più impercettibile rispetto al caso precedente.

5.2 Caso n°2: diversa finestra temporale, diversa scadenza del futures e diverso lower bound

In questo caso, analizzeremo il comportamento del modello variando la finestra temporale della copertura, la scadenza del *futures* sull'indice e cambieremo anche il valore che intendiamo assicurare (lower bound). Naturalmente, variando la finestra temporale varieranno anche la volatilità del mercato e il tasso d'interesse privo di rischio.

I nuovi *input* sono:

- Periodo di copertura: 36 giorni lavorativi, orizzonte temporale dal 21 marzo 2024 al 10 maggio 2024.
- Scadenza del *futures* sull'S&P 500 fissata a settembre 2024.
- *Lower bound* fissato a $97 mln.

Per il momento, lasciamo la composizione del portafoglio invariata rispetto agli esempi precedenti.

Il nuovo *strike price K* che restituisce il modello è pari a $5,121.

L’evoluzione del valore dei due portafogli (azionario e completo) è di seguito riportata.

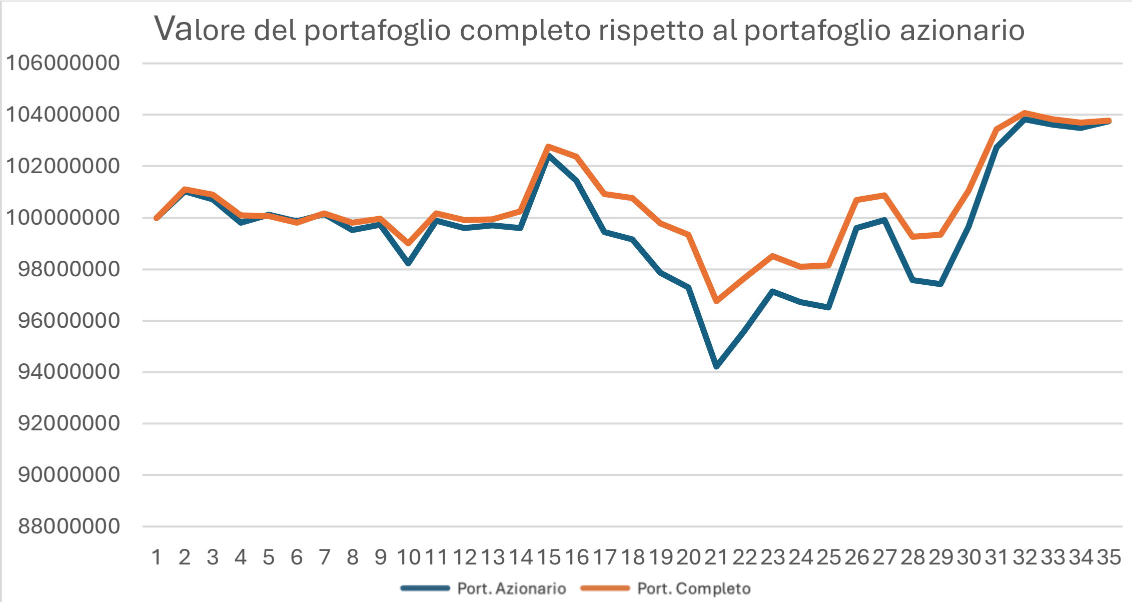


Grafico n° 12. Evoluzione del valore del portafoglio completo e del portafoglio azionario

Nella seguente tabella sono riportati i valori giornalieri dei due portafogli per l’intero periodo di copertura.

valore del portafoglio azionario	valore portafoglio azionario e futures
100000164,4	100000164,4
101038621,1	101106146,1
100721594,8	100900119,8
99809942,83	100086617,8
100114072,1	100057497,1
99867529,95	99809154,95
100145236,5	100180936,5
99517207,21	99804844,71
99733545,41	99974982,91
98232534,7	99000272,2
99883080,23	100179730,2
99613611,02	99908336,02
99704103,68	99944928,68
99600073,52	100239898,5
102429881,5	102776831,5
101446869,2	102377094,2
99433116,23	100925316,2
99152638,95	100758114
97873672,49	99783159,99
97298295,92	99348233,42
94216546,84	96757446,84
95616454,04	97645479,04
97138568,56	98518593,56
96726970,52	98097045,52
96518545,12	98141120,12
99597813,81	100700801,3
99907376,73	100863114,2
97565130,57	99252868,07
97424108,41	99340420,91
99656862,71	101044425,2
102731564,3	103439189,3
103827584,1	104072046,6
103625735,3	103818360,3
103501074,4	103700299,4
103738324,6	103777424,6

Tabella n° 7. Evoluzione giornaliera del valore del portafoglio azionario e del portafoglio completo

Nonostante la scelta di un *lower bound* più conservativo rispetto agli esempi precedenti ($97 mln contro $95 mln), la copertura risulta efficace anche in questa situazione. Il valore del portafoglio completo è superiore al valore del portafoglio azionario per tutta la durata della copertura. Inoltre, la soglia assicurata viene oltrepassata in maniera minima soltanto durante il ventunesimo giorno, per poi riassestarsi immediatamente al di sopra del *lower bound*. Anche il cambio di finestra temporale sembra non aver cambiato i risultati osservati precedentemente. Il costo dell’assicurazione risulta negativo anche in questo caso ed è pari a circa -4 punti base.

5.3 Caso n°3: diversa composizione del portafoglio

Come ultima analisi, cambiamo la composizione del portafoglio azionario. In questo caso, optiamo per titoli con una capitalizzazione di mercato notevolmente minore rispetto ai precedenti, in modo tale da testare l’efficacia del modello nel caso in cui i titoli in portafoglio abbiano un peso relativamente basso all'interno dell'indice di riferimento (S&P 500). La finestra temporale prescelta è la stessa riportata al paragrafo 6.1.

Le azioni che abbiamo selezionato sono:

- AbbVie Inc.
- Chevron
- NextEra Energy
- Texas Instruments
- Broadcom Inc.

I pesi assegnati ad ogni titolo, i corrispettivi coefficienti *beta*, il *beta* di portafoglio e il capitale allocato per ogni titolo sono riportati nella seguente schermata:

Weights		Beta	Beta del portafoglio	N° societa	Capitale	N° prezzi		Società	capitale allocato
AbbVie Inc.	0,3	0,62	0,949	5	100000000	65		AbbVie Inc.	30000000
Chevron	0,1	1,08						Chevron	10000000
NextEra	0,1	0,81		Launch Macro				NextEra	10000000
Texas Instruments	0,1	0,98						Texas Instruments	10000000
Broadcom Inc.	0,4	1,19						Broadcom Inc.	40000000

Il modello restituisce uno *strike price* per la *put* sintetica pari a: $4,336

S0	4.576,73
β	0,949
dividend yield (annuo)	0,017
dimensione contratto	50
valore del portafoglio	100000081,4
lower bound	95000000
T	0,257936508
Risk free rate	0,041
N° Puts	414,7069076
K (strike)	4336
K (strike) considerando i dividendi	4316

Durante il periodo di copertura la schermata di *trading* risulta la seguente:

valore nominale dei futures da vendere in rapporto al valore del portafoglio	numero dei contratti futures corti in portafoglio	comando su futures	numero contratti	prezzo futures dell'indice	profitto sulla posizione corta in futures
0,352567529	154	SELL	-154	4.761,50	0
0,37053642	162	SELL	-8	4.694,25	517825
0,3739807	163	SELL	-1	4.678,75	643375
0,381167538	167	SELL	-4	4.652,75	855275
0,369289652	161	BUY	6	4.693,50	515012,5
0,375045542	164	SELL	-3	4.672,50	684062,5
0,384808421	168	SELL	-4	4.639,00	958762,5
0,384637566	168	NEUTRAL	0	4.638,50	962962,5
0,386302311	169	SELL	-1	4.633,50	1004962,5
0,378405819	165	BUY	4	4.660,50	776812,5
0,395060417	173	SELL	-8	4.607,00	1218187,5
0,406317459	178	SELL	-5	4.572,00	1520937,5
0,41808937	183	SELL	-5	4.533,25	1865812,5
0,418774909	183	NEUTRAL	0	4.530,50	1890975
0,408919032	179	BUY	4	4.563,00	1593600
0,413506773	181	SELL	-2	4.549,50	1714425
0,397106301	174	BUY	7	4.598,00	1275500
0,418308361	183	SELL	-9	4.536,00	1814900
0,408247877	178	BUY	5	4.567,75	1524387,5
0,39872044	174	BUY	4	4.597,00	1264062,5
0,376171962	164	BUY	10	4.662,50	694212,5
0,370064238	162	BUY	2	4.680,25	548662,5
0,372474758	163	SELL	-1	4.672,25	613462,5
0,36943411	161	BUY	2	4.676,75	576787,5
0,376136266	164	SELL	-3	4.658,75	721687,5
0,387710812	169	SELL	-5	4.626,00	990237,5
0,393198639	172	SELL	-3	4.609,75	1127550
0,390793499	171	BUY	1	4.616,25	1071650
0,379110414	166	BUY	5	4.645,25	823700
0,389038535	170	SELL	-4	4.619,00	1041575
0,386750325	169	BUY	1	4.622,50	1011825
0,371402929	162	BUY	7	4.660,75	688612,5
0,393631171	172	SELL	-10	4.602,50	1160437,5
0,392211739	171	BUY	1	4.606,00	1130337,5
0,396249818	173	SELL	-2	4.594,50	1228662,5
0,41478262	181	SELL	-8	4.551,75	1598450
0,448582895	196	SELL	-15	4.473,50	2306612,5
0,454207519	198	SELL	-2	4.462,00	2419312,5
0,446649105	195	BUY	3	4.479,50	2246062,5
0,47962209	210	SELL	-15	4.414,00	2884687,5
0,48060619	210	NEUTRAL	0	4.413,25	2892562,5
0,468847528	205	BUY	5	4.437,25	2640562,5
0,476429654	208	SELL	-3	4.425,25	2763562,5
0,477744508	209	SELL	-1	4.423,75	2779162,5
0,512909632	224	SELL	-15	4.363,00	3414000
0,49530731	216	BUY	8	4.396,00	3044400
0,50076123	219	SELL	-3	4.388,00	3130800
0,472152093	206	BUY	13	4.441,25	2547712,5
0,456647467	200	BUY	6	4.467,50	2277337,5
0,443196738	194	BUY	6	4.492,00	2032337,5
0,431437478	189	BUY	5	4.510,25	1855312,5
0,450272425	197	SELL	-8	4480,25	2138812,5
0,466789316	204	SELL	-7	4456,00	2377675
0,433899506	190	BUY	14	4502,00	1908475
0,434121617	190	NEUTRAL	0	4503,25	1896600
0,48257319	211	SELL	-21	4441,75	2480850
0,517790493	226	SELL	-15	4400,25	2918675
0,574247179	251	SELL	-25	4343,75	3557125
0,591438258	258	SELL	-7	4337,00	3641837,5
0,570383051	249	BUY	9	4367,50	3248387,5
0,657634133	287	SELL	-38	4304,00	4038962,5
0,74721262	327	SELL	-40	4248,75	4831800
0,820587705	359	SELL	-32	4229,00	5154712,5
0,842946934	368	SELL	-9	4278,75	4261700

Il profitto realizzato sulla posizione corta in *futures* ha il punto di massimo durante il 63° giorno di copertura, dove raggiunge i \$5,154,712. A scadenza il profitto sulla posizione corta si attesta a \$4,261,700. L'evoluzione giornaliera del profitto realizzato sul portafoglio di *futures* è illustrata nel seguente grafico.

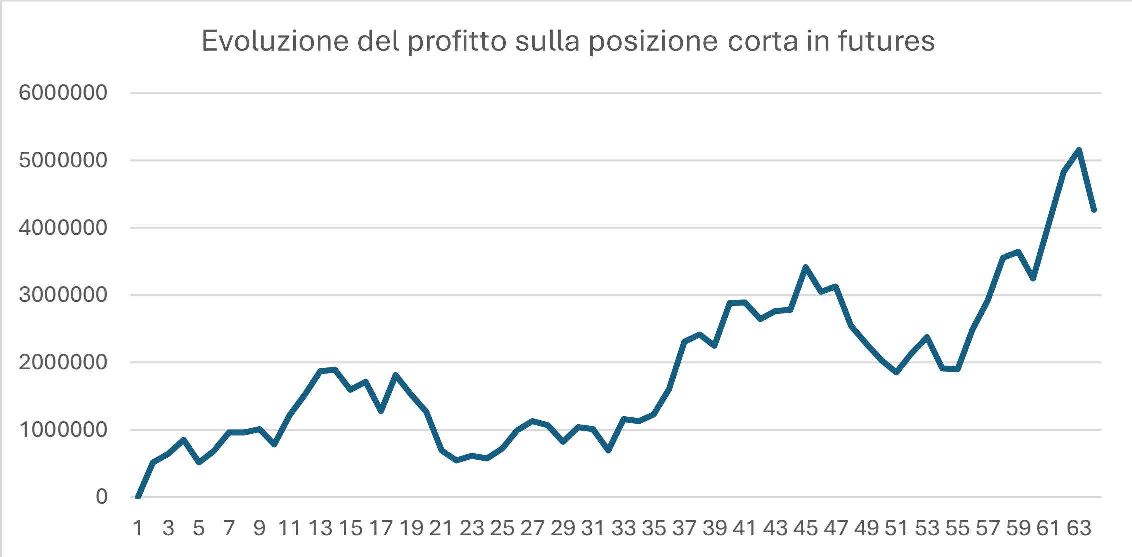


Grafico n° 13. Evoluzione del profitto sulla posizione corta in futures

Nella seguente tabella sono riportati i valori giornalieri dei due portafogli per l'intero periodo di copertura.

valore del portafoglio azionario	valore portafoglio azionario e futures
100000081,4	100000081,4
98439869,71	98957694,71
97765586,02	98408961,02
97011928,38	97867203,38
98201373,5	98716386
97321416,08	98005478,58
96214717,53	97173480,03
96000033,32	96962995,82
95792654,17	96797616,67
97052176,56	97828989,06
95927795,88	97145983,38
95251214,94	96772152,44
94846359,68	96712172,18
94971341,46	96862316,46
96628129,68	98221729,68
95767747,23	97482172,23
96651276,22	97926776,22
95189601,11	97004501,11
95385427,22	96909814,72
96065500,13	97329562,63
97439285,22	98133497,72
97564901,23	98113563,73
98568914,97	99182377,47
96938803,81	97515591,31
96538056,39	97259743,89
96285474,26	97275711,76
96179904,84	97307454,84
96339864,62	97411514,62
96363684,4	97187384,4
95858423,53	96899998,53
96716046,96	97727871,96
98306348,96	98994961,46
96805829,44	97966266,94
97097997,06	98228334,56
96897861,91	98126524,41
96189799,44	97788249,44
94928018,99	97234631,49
95870206,05	98289518,55
96616686,38	98862748,88
95171894,46	98056581,96
94507259,13	97399821,63
94618817,42	97259379,92
93814324,1	96577886,6
93046920,26	95826082,76
91961022,94	95375022,94
91905094,08	94949494,08
91584575,78	94715375,78
92796706,85	95344419,35
93570893,39	95848230,89
93993901,15	96026238,65
94703442,32	96558754,82
95954924,09	98093736,59
95160419,73	97538094,73
96016359,03	97924834,03
95722357,42	97618957,42
95675611,74	98156461,74
93915057,77	96833732,77
93059579,98	96616704,98
92600775,94	96242613,44
94035961,54	97284349,04
92296955,93	96335918,43
91494605,39	96326405,39
89841458,23	94996170,73
90737027,68	94998727,68

Tabella n° 8. Evoluzione giornaliera del valore del portafoglio azionario e del portafoglio completo

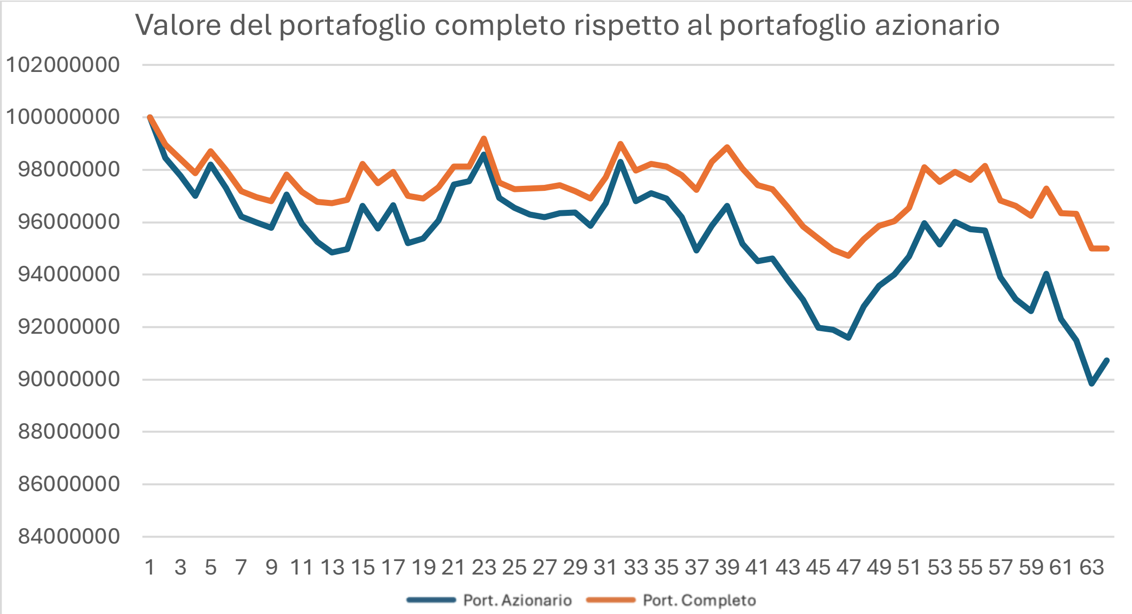


Grafico n° 14. Evoluzione del valore del portafoglio completo e del portafoglio azionario

Le considerazioni da fare in questo caso sono leggermente differenti rispetto ai casi precedenti. La copertura di un portafoglio composto da titoli relativamente poco "pesanti" all'interno dell'indice S&P 500 risulta lievemente meno efficace rispetto ai casi precedentemente analizzati. In questo frangente il portafoglio completo supera il *lower bound* per quattro volte durante il periodo di copertura. Inoltre, la copertura termina a scadenza appena al di sotto del valore soglia assicurato. Adesso è bene specificare che le discese appena descritte sono, in termini di valore, quasi impercettibili, nell'ordine di grandezza delle migliaia di dollari. Ad esempio, a scadenza, il valore del portafoglio completo si attesta a $94,998,727, che è un valore inferiore al *lower bound* di appena $1,273, una cifra pari allo 0,0012% del valore iniziale del portafoglio. Il valore del portafoglio completo, ad ogni modo, è maggiore rispetto al portafoglio azionario durante tutto il periodo di copertura, e, a scadenza, risulta maggiore di circa $4,261,700 (pari al 4,26% del valore iniziale del portafoglio). Questa performance leggermente inferiore ai casi precedenti è da attribuire alla diversa composizione del portafoglio. Essendo esso composto da azioni che pesano tutte meno dell'1% all'interno dell'indice, la correlazione tra portafoglio azionario e indice risulta inferiore rispetto al caso di un portafoglio composto da titoli ad alta capitalizzazione. Dunque, essendo il *futures* scritto sull' indice S&P 500, non riesce a catturare perfettamente i movimenti del portafoglio azionario a bassa capitalizzazione.

Conclusione

La relazione che lega i movimenti del sottostante alla posizione assunta sul mercato dei *futures* sembra rispondere in maniera egregia alla limitazione del *downside risk*. Oltre alla ottima efficacia del modello a scadenza, la copertura dinamica presenta un vantaggio inaspettato. Durante l'intero periodo di copertura precedente alla scadenza, la limitazione del *downside risk* è considerevole, tale da farci affermare che l'implementazione di questo modello costituisce un'ottima garanzia non solo a scadenza, ma anche all'interno della finestra di copertura.

L'analisi di correlazione effettuata per determinare lo *strike price* della nostra opzione sintetica risulta molto preciso. In tre occasioni su quattro la scelta dello *strike* ha garantito che a scadenza il valore del portafoglio completo risulti al di sopra del *lower bound*, e nel quarto caso l'errore è nell'ordine di grandezza dei decimi di punto base (i.e. un millesimo di punto percentuale).

La scelta di utilizzare opzioni *put* sintetiche invece di opzioni *put standard* si è rivelata cruciale nell'aumentare il grado di personalizzazione della strategia, nel limitare i costi di transazione e nel portare al minimo il rischio di liquidità. Ignorare il rischio di liquidità in operazioni che ricorrono all'utilizzo dei derivati come queste può portare a esiti spiacevoli e in grado di rendere completamente inefficace qualsiasi tipo di strategia di *hedging*.

Come spunto per future ricerche, riteniamo che la più grande sfida sia aumentare l'efficacia del modello quando il portafoglio azionario di partenza sia relativamente scorrelato dall'indice di riferimento. Una possibile soluzione potrebbe essere cambiare il sottostante delle opzioni ad un altro indice che più rispecchi l'andamento del nostro portafoglio.

APPENDICE

Il codice che segue fa riferimento al paragrafo *6.1*

```
Sub stockport()

Worksheets("portafoglioazionario").Select

'trovo il numero delle diverse società presenti

'in portafoglio

lastrow = Cells(Rows.Count, "B").End(xlUp).Row

Cells(2, 5) = Application.WorksheetFunction.CountA(Range("B2:B" & lastrow))

nsoc = Cells(2, 5)

'trovo il numero di prezzi delle azioni su cui voglio lavorare

lastrow = Cells(Rows.Count, "I").End(xlUp).Row

Cells(2, 7) = Application.WorksheetFunction.CountA(Range("I12:I" & lastrow))

nprezzi = Cells(2, 7)

'periodo della copertura in giorni

For i = 1 To nprezzi

Cells(11 + i, 4) = i

Next i

'capitale iniziale
```

```
cap = Cells(2, 6)

'capitale allocato per ogni societa

For i = 1 To nsoc

    Cells(1 + i, 10) = cap * Cells(1 + i, 2)

Next i

'trovo il numero di azioni da acquistare per ogni societa

For j = 1 To nsoc

    Cells(12, 8 + 2 * j) = Cells(1 + j, 10) / Cells(12, 7 + 2 * j)

Next j

For i = 1 To nprezzi - 1

    For j = 1 To nsoc

        Cells(12 + i, 8 + 2 * j) = Cells(12, 8 + 2 * j)

    Next j

Next i

'numero delle azioni arrotondato

For i = 1 To nprezzi

    For j = 1 To nsoc

        If Cells(11 + i, 8 + 2 * j) - Int(Cells(11 + i, 8 + 2 * j)) >= 0.5 Then

            Cells(11 + i, 8 + 2 * j) = Int(Cells(11 + i, 8 + 2 * j)) + 1
```

```
        Else
            Cells(11 + i, 8 + 2 * j) = Int(Cells(11 + i, 8 + 2 * j))
        End If
    Next j
Next i
'beta del portafoglio
Dim betaponderati() As Double
ReDim betaponderati(1 To nsoc)
For i = 1 To nsoc
    betaponderati(i) = Cells(1 + i, 3) * Cells(1 + i, 2)
    somma = somma + betaponderati(i)
Next i
Cells(2, 4) = somma
'valore del portafoglio
Dim valorePortafoglio() As Double
ReDim valorePortafoglio(1 To nsoc)
For j = 1 To nprezzi
    sommap = 0
```

```
    For i = 1 To nsoc
        valorePortafoglio(i) = Cells(j + 11, 7 + 2 * i) * Cells(j + 11, 8 + 2 * i)
        sommap = sommap + valorePortafoglio(i)
    Next i

    Cells(j + 11, 5) = sommap
Next j
End Sub
```

Il codice che segue fa riferimento al paragrafo *6.3.1*

```
Sub portfolioinsurance()
Worksheets("portfolioinsurance").Select
Worksheets("portfolioinsurance").Range("F2:ZZ100000").ClearContents
'inputs
s = Cells(1, 2) 'S0 (valore dell'indice)
beta = Cells(2, 2) 'coefficiente beta del portafoglio
dividendyield = Cells(3, 2) 'dividend yield del portafoglio
dimcontratto = Cells(4, 2) 'dimensione del contratto di opzione
valp = Cells(5, 2) 'valore del portafoglio
```

```
lowerbound = Cells(6, 2) 'valore assicurato

t = Cells(7, 2) 'periodo di copertura

rf = Cells(8, 2) 'risk-free rate

'numero di contratti da acquistare per la copertura

Cells(10, 2) = beta * (valp) / (dimcontratto * s)

Nputs = Cells(10, 2)

'imposto il fattore di variazione con cui varia il valore dell'indice

Z = Cells(2, 5)

'imposto il numero di valori dell'indice che voglio stampare

n = Cells(4, 5)

'ciclo per stampare i valori dell'indice

For i = 0 To n

    Cells(n + 2 - i, 6) = s * (1 + (i / Z))

Next i

For i = 1 To n

    Cells(n + 2 + i, 6) = s * (1 + (-i / Z))

Next i

'approssimo i valori dell'indice

For i = 1 To n + n + 1
```

```
    If Cells(1 + i, 6) - Int(Cells(1 + i, 6)) >= 0.5 Then
        Cells(1 + i, 6) = Int(Cells(1 + i, 6)) + 1
   Else
        Cells(1 + i, 6) = Int(Cells(1 + i, 6))
    End If
Next i
'ciclo per stampare i valori del portafoglio
For i = 1 To n + n + 1
    Cells(1 + i, 7) = (((((Cells(1 + i, 6) - s) / s) + (t * dividendyield) - (t * rf)) * beta)) + (rf
* t) - (t * dividendyield)
    Cells(1 + i, 8) = valp * (1 + Cells(1 + i, 7))
Next i
'valori del portafoglio arrotondati
For i = 1 To n + n + 1
    Cells(1 + i, 8) = Round(Cells(1 + i, 8) / 100000, 0) * 100000
Next i
'variabili che devo considerare per tener conto del dividend yield
'dividend yield al tempo T
Cells(2, 10) = dividendyield * t
divyieldT = Cells(2, 10)
```

```
'dividendi incassati al tempo T
Cells(2, 11) = divyieldT * valp
divincassatiT = Cells(2, 11)
'nuovo valore assicurato tenendo conto dei dividendi
Cells(2, 12) = lowerbound - divincassatiT
valassicuratodiv = Cells(2, 12)
'valore assicurato arrotondato
roundvaloreassicuratodiv = Round(valassicuratodiv / 100000, 0) * 100000
Cells(2, 12) = roundvaloreassicuratodiv
Dim foglio As Worksheet
Dim riga As Long
Dim valoreDaCercare As Long
Dim rng As Range
Dim cella As Range
'trovo il numero della riga in cui è  contenuto  il valore assicurato "lowerbound"
'e poi lo uso per individuare lo lo strike price dell'opzione
Set foglio = ThisWorkbook.Sheets("portfolioinsurance")
valoreDaCercare = lowerbound
'Trovo il valore nella colonna H
```

```
Set rng = foglio.Columns("H")

Set cella = rng.Find(What:=valoreDaCercare, LookIn:=xlValues, LookAt:=xlWhole)

'Se il valore è stato trovato, stampa il numero di riga


 If Not cella Is Nothing Then

        riga = cella.Row

    Else

        MsgBox "Valore non trovato nella colonna H.", vbExclamation

    End If

Cells(11, 2) = Cells(riga, 6)

K = Cells(11, 2)

'trovo il numero della riga in cui è  contenuto  il valore assicurato "roundvaloreassicuratodiv"

'e poi lo uso per individuare lo lo strike price dell'opzione

Set foglio = ThisWorkbook.Sheets("portfolioinsurance")

valoreDaCercare2 = roundvaloreassicuratodiv

'Trova il valore nella colonna H

Set rng = foglio.Columns("H")

Set cella = rng.Find(What:=valoreDaCercare2, LookIn:=xlValues, LookAt:=xlWhole)

'Se il valore è stato trovato, stampa il numero di riga
```

```
 If Not cella Is Nothing Then
        riga2 = cella.Row
    Else
        MsgBox "Valore non trovato nella colonna H.", vbExclamation
    End If
Cells(12, 2) = Cells(riga2, 6)
Kdiv = Cells(12, 2)
End Sub
```

Il codice che segue fa riferimento al paragrafo *6.5*

```
Sub futures()
Worksheets("futures").Select
'inputs
s = Cells(1, 2) 'S0
K = Cells(2, 2) 'strike
rf = Cells(3, 2) 'risk-free rate
q = Cells(4, 2) 'dividendyield
sigma = Cells(5, 2) 'volatilità
```

```
t1 = Cells(6, 2) 'scadenza dell'opzione (periodo di copertura)

t2 = Cells(7, 2) 'scadenza del futures scritto sull'indice

A1 = Cells(8, 2) 'multiplo del valore dell'indice rispetto al portafoglio

A2 = Cells(9, 2) 'dimensione del contratto futures

'trovo il numero di prezzi dell'indice su cui voglio lavorare

lastrow = Cells(Rows.Count, "F").End(xlUp).Row

Cells(11, 2) = Application.WorksheetFunction.CountA(Range("F2:F" & lastrow))

num = Cells(11, 2)

'stampo il numero di giorni in cui ho i dati sui prezzi

riga = 2

For i = 1 To num

    Cells(riga, "E") = i

    riga = riga + 1

Next i

'stampo il rapporto tra il numero di giorni trascorso e l'anno finanziario

For i = 1 To num

Cells(1 + i, 4) = Cells(1 + i, 5) / 252

Next i

For i = 1 To num
```

```
Cells(1 + i, 3) = t1 - Cells(1 + i, 4)

Next i

'ciclo per stampare d1,N(d1), delta della put, il valore nominale dei futures da vendere

'in rapporto al valore del portafoglio, il numero di contratti da vendere totali

'formula di J.HULL

For i = 1 To num



            Cells(1 + i, 7) = (Log(Cells(1 + i, 6) / K) + (rf - q + sigma ^ (2) / 2) * (Cells(1 + i, 3))) / (sigma * Sqr(Cells(1 + i, 3)))

            Cells(1 + i, 8) = WorksheetFunction.Norm_S_Dist(Cells(1 + i, 7), True)

            Cells(1 + i, 9) = (Exp(-q * (Cells(1 + i, 3)))) * (Cells(1 + i, 8) - 1)

            Cells(1 + i, 10) = (Exp(q * (t2 - (Cells(1 + i, 3))))) * (Exp(-rf * (t2))) * (1 - Cells(1 + i, 8))

            Cells(1 + i, 11) = Cells(1 + i, 10) * (A1 / A2)



Next i

'approssimo per trovare il numero di contratti futures in portafoglio

For i = 1 To num

   If Cells(1 + i, 11) - Int(Cells(1 + i, 11)) >= 0.5 Then

      Cells(1 + i, 11) = Int(Cells(1 + i, 11)) + 1
```

```
    Else

        Cells(1 + i, 11) = Int(Cells(1 + i, 11))

    End If

Next i

'ciclo per trovare il numero di contratti da vendere/acquistare ogni giorno

'i valori sono arrotondati per facilitare la compravendita di futures

'il segno meno denota una posizione short

For i = 1 To num - 1

    Cells(2, 13) = -Cells(2, 11)

    Cells(2 + i, 13) = -Cells(2 + i, 11) + Cells(1 + i, 11)

Next i

'ciclo per stampare il comando sul mercato

For i = 1 To num

    If Cells(1 + i, 13) > 0.5 Then

            Cells(1 + i, 12) = "BUY"

    ElseIf Cells(1 + i, 13) < -0.5 Then

            Cells(1 + i, 12) = "SELL"

    Else

            Cells(1 + i, 12) = "NEUTRAL"
```

```
    End If
Next i
'ciclo per stampare il profitto della posizione corta in futures
Cells(2, 15) = Cells(2, 11) * A2 * 0
For i = 3 To num + 1
        ' Costruisco la formula per la cella O(i)
        Formula = "=K2*B9*(N2-N" & i & ")"
        If i > 3 Then
            For n = 3 To i - 1
                Formula = Formula & "+(-M" & n & "*B9*(N" & n & "-N" & i & "))"
            Next n
        End If

        ' Applico la formula alla cella O(i)
        Range("O" & i).Formula = Formula
    Next i
End Sub
```

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, R.W., “Hedger diversity in futures markets”, Economic Journal, 93 (1983), 370-389

BENNIGA, S. e WEINER, Z., “Dynamic Hedging Strategies”, Mathematica in Education and Research, 7 (1998)

BLACK, F. e SCHOLES, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81 (May-June 1973), 637-59

CHAMBERS, D.R. e NAWALKHA S.K., “An improved approach to computing implied volatility”, Finance Rev., 36 (3) (2001), 89-100

COX, J.C., ROSS, S.A. and RUBINSTEIN, M., “Option Pricing: A Simplified Approach”, Journal of Financial Economics (1979)

FREY, R., “Perfect option hedging for a large trader”, Finance Stoch. (1998)

FREY, R., STREMME A., “Market volatility and feedback effects from dynamic hedging”, Math. Finance (1997)

HULL, J., “Options, Futures, and Other Derivative Securities”, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, (2014), tr. it., “Opzioni, Futures e Altri Derivati”, BARONE, E., Pearson Italia, Milano-Torino, (2022)

MERTON, R.C., "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring 1973), 141-83.

NIELSEN, L.T., “Understanding N(d1) and N(d2): Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model, Finance Journal, 14 (1992), 95-106

WHALEY, R.E., "Understanding the VIX", The Journal of Portfolio Management, 35 (3) (2009), 98-105

SITOGRAFIA

https://financetrainingcourse.com/education/2011/03/option-pricing-black-scholes-probabilities-explained-understanding-nd1-vs-nd2/

https://corporatefinanceinstitute.com/resources/derivatives/synthetic-options/

https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/beta.html#:~:text=Il%20beta%20misura%20l'esposizione,percentuale%20del%20rendimento%20di%20mercato