

LUISS



Corso di laurea in Strategic Management

Cattedra di Finanza Aziendale Avanzato

Modellizzazione stocastica della struttura finanziaria e della politica dei dividendi mediante le Rewarded Markov Chain.

Prof.ssa Santella
RELATORE

Prof. Pellegrino
CORRELATORE

Andrea Marrese
767 291
CANDIDATO

Anno accademico 2024/2025

Indice

Indice	1
Lista delle tabelle.....	3
Lista delle figure	4
1. Capitolo 1: Introduzione.....	5
1.1. Motivazioni.....	5
1.2. Contribuzioni.....	5
2. Capitolo 2: Le Markov Chain in finanza	7
2.1. Monte Carlo Markov Chain.....	8
2.2. Gestione di portafoglio	10
2.3. Struttura del debito e rating	15
3. Capitolo 3: Fondamenti delle Markov Chain	21
3.1. Markov chain a tempo discreto, a stati finiti, stazionarie.....	21
3.2. Classificazione degli stati	23
3.3. Distribuzione probabilistica degli stati e distribuzione di equilibrio.....	25
3.4. Periodo di prima transizione attesa e probabilità di assorbimento	28
4. Capitolo 4: Markov Chain con ricompense	32
4.1. Markov Decision Process	34
4.2. Ricompensa media di lungo termine per step.....	36
5. Capitolo 5: Markov Decision Process nella politica dei dividendi	40
5.1. Metodologia.....	41
5.2. Raccolta dei dati	41
5.3. Definizione degli stati.....	42
5.4. Considerazioni sulla selezione degli stati.....	43
5.5. Calcolo delle probabilità di transizione	44
5.6. Validazione del modello predittivo.....	45

5.7.	Costruzione del Markov Decision Process	48
5.8.	Definizione delle decisioni	49
5.9.	Definizione delle ricompense immediate	49
5.10.	Risultati.....	50
5.11.	Analisi di sensitività	53
5.12.	Considerazioni finali sulla metodologia	56
6.	Capitolo 6: Markov Decision Process nella struttura finanziaria	58
6.1.	Metodologia – selezione dei tassi di interesse.....	59
6.2.	Definizione degli stati.....	60
6.3.	Definizione delle probabilità di transizione.....	61
6.4.	Definizione delle decisioni	63
6.5.	Definizione delle ricompense immediate	63
6.6.	Risultati.....	63
6.7.	Analisi di sensitività	65
6.8.	Considerazioni finali sulla metodologia	67
7.	Capitolo 7: Conclusioni	68
	Bibliografia e sitografia	72
	Bibliografia A-Z	72
	Sitografia	77
	Appendice.....	78

Lista delle tabelle

Tabella 1: Dati di chiusura dell'indice SEB nell'intervallo 24 luglio 2009 – 2 ottobre 2009	11
Tabella 2: Definizione delle transizioni di stato dell'indice SEB nell'intervallo 24 luglio 2009 – 2 ottobre 2009	12
Tabella 3: Evoluzione delle probabilità di transizione.....	27
Tabella 4: Evoluzione delle probabilità di transizione.....	27
Tabella 5: Evoluzione delle probabilità di transizione.....	27
Tabella 6: Quote di mercato	28
Tabella 7: Distribuzione probabilistica di lungo periodo e ricompensa attesa	34
Tabella 8: Markov Decision Process	37
Tabella 9: Ricompensa media di lungo termine per step	38
Tabella 10: Dati di chiusura SPX500 nell'intervallo 1 aprile 2021 – 22 aprile 2023....	42
Tabella 11: Suddivisione delle osservazioni in base agli stati	43
Tabella 12: Rendimenti e rispettivi stati dell' SPX500 nell'intervallo 1 aprile 2021 – 22 aprile 2023	43
Tabella 13: Transizioni di stato osservate	44
Tabella 14: Matrice di transizione di base	45
Tabella 15: Previsioni del modello, espresse in \$	46
Tabella 16: Matrice di transizione Procter&Gamble (PG)	48
Tabella 17: Matrice di transizione Netflix (NFLX)	48
Tabella 18: Risultati del modello - Procter&Gamble	50
Tabella 19: Risultati del modello - Netflix	52
Tabella 20: Analisi di sensitività - Procter&Gamble	53
Tabella 21: Analisi di sensitività - Procter&Gamble	54
Tabella 22: Analisi di sensitività - Procter&Gamble	54
Tabella 23: Analisi di sensitività - Netflix	55
Tabella 24: Credit Spread in base al rating di un titolo	59
Tabella 25: Matrice di transizione dei credit ratings.....	61
Tabella 26: Matrice di transizione modificata dei credit ratings	62
Tabella 27: Iterazioni del modello – evoluzione delle probabilità di transizione in 10 anni	63

Tabella 28: Iterazioni del modello – risparmi attesi in caso di rifinanziamento e rating di partenza BBB.....	64
Tabella 29: Iterazioni del modello – risparmi attesi in caso di rifinanziamento e rating di partenza B	65
Tabella 30: Analisi di sensitività.....	65
Tabella 31: Analisi di sensitività.....	66
Tabella 32: Analisi di sensitività.....	67
Tabella 33: Dati di chiusura SPX500 nell’intervallo 1° aprile 2021 – 22 aprile 2023 ..	78
Tabella 33: Tabella Pivot sulle transizioni di stato osservate nell'indice SPX500 e calcolo delle probabilità di stato	94
Tabella 34: Prediction del modello	96

Lista delle figure

Figura 1: Diagramma di stati e transizioni	23
Figura 2: Diagramma di probabilità di transizione Pepsi - Coca Cola.....	24
Figura 3: Diagramma di transizioni di stato	24
Figura 4: Previsioni del modello, espresse in stati del sistema	45
Figura 5: Confronto tra previsioni del modello e dati reali dell'indice SPX500	47
Figura 6: Definizione dei parametri del modello	95
Figura 7: definizione dello stato di partenza e del numero di iterazioni	96
Figura 8: Creazione dataframe e esportazione risultati in excel	96
Figura 9: Determinazione dei parametri e input beta	101
Figura 9: Creazione e normalizzazione della matrice modificata ed esportazione in excel.....	101

1. Capitolo 1: Introduzione

La presente tesi si propone di studiare e sviluppare due diversi modelli decisionali stocastici, ognuno dei quali è incentrato sulla risoluzione di problemi specifici legati al processo decisionale aziendale. Ogni modello sarà esaminato con un approccio metodico e sistematico, tenendo conto delle sue implicazioni pratiche e delle sue applicazioni. Ogni modello avrà dedicato un proprio capitolo, nel quale verrà analizzata la sua costruzione e il funzionamento, seguito da una sezione dedicata alla valutazione dei risultati su aziende selezionate.

1.1. Motivazioni

I processi stocastici sono largamente utilizzati nella finanza. Diversi studi ne dimostrano l'efficacia principalmente in modelli di gestione di portafoglio e di analisi del rischio di credito.

Il loro vasto utilizzo è dovuto alla loro capacità di descrivere processi che si evolvono nel tempo in maniera probabilistica.

Studi rilevanti estraggono formule da modelli di processi utili per studiare gli spread di credito tra controparti e debitori (D' Amico, 2015) o per prevedere il numero di default che si verificano in un portafoglio di crediti durante un periodo di tempo specifico (Bluhm, Overbeck e Wagner, 2002).

Tuttavia, la letteratura di riferimento relativa alle loro potenziali applicazioni nelle dinamiche di processi decisionali aziendali risulta scarsa. Questa mancanza è alla base della motivazione di questo studio, che rappresenta una tra le prime applicazioni pratiche di modelli stocastici markoviani nel contesto della finanza aziendale, focalizzandosi su aree non tradizionalmente trattate, quali la struttura del capitale di debito e la politica dei dividendi.

I risultati saranno dei modelli che, in ogni istante di tempo e date le condizioni in cui si trova, saranno in grado di suggerire all'utilizzatore la decisione da intraprendere dal valore atteso maggiore.

1.2. Contribuzioni

Questo studio cerca di esplorare nuove opportunità di utilizzo dei processi stocastici e creare spunti per futuri sviluppi.

Per prima cosa, sarà condotta una rassegna dello stato dell'arte sulle teorie markoviane applicate alla finanza, e saranno presentati due possibili nuovi utilizzi testabili per spiegarne i risultati.

Rispetto agli interlocutori esterni, gli studi che interessano i decision maker interni alle aziende stesse sono decisamente meno approfonditi.

Mentre i processi stocastici sono analizzati nella letteratura attuale principalmente per la valutazione delle opzioni, la gestione del portafoglio e la gestione del rischio, l'obiettivo di questo studio è quello di presentare uno strumento utile ai decisori aziendali interni.

Studiosi come Zhiyuan e Likai (2010) hanno esplorato come le catene di Markov sono in grado di prevedere le fluttuazioni del mercato azionario, ma non hanno fornito indicazioni su come le aziende stesse potessero sfruttare questi strumenti predittivi per massimizzare il benessere dei loro azionisti.

Allo stesso modo, nel manuale *Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability* (2007), d'Amico, Janssen e Manca menzionano strategie stocastiche di hedging e protezione dal rischio per gli investitori in obbligazioni, non affrontando però le strategie che gli emittenti di obbligazioni potrebbero adottare per minimizzare il proprio costo del capitale o gli interessi passivi (D'Amico, 2015).

Offrendo un metodo trasparente e imparziale per le decisioni finanziarie delle imprese, questa ricerca cerca di colmare questa lacuna, cercando di migliorare il benessere generale degli stakeholder aziendali.

2. Capitolo 2: Le Markov Chain in finanza

Nel 2003, Bank One Corporation era la sesta banca più grande degli Stati Uniti. Oltre a essere il più grande emittente di carte Visa negli Stati Uniti, Bank One Card Services, Inc, una filiale di Bank One Corporation, emetteva carte per conto di altri partner commerciali (Trench et al., 2003). L'anno successivo, Bank One Corporation e JPMorgan Chase si unirono per diventare la terza banca più grande del paese. In seguito, Chase è stato il nome associato al servizio di emissione di carte di credito.

Visto che la performance del settore card issuers dipende dall'attento bilanciamento di numerosi elementi quantitativi, il settore è un ottimo candidato per l'applicazione della ricerca operativa. L'utilizzo delle carte e la redditività delle banche sono influenzati dal tasso annuo effettivo globale (TAEG) per gli interessi passivi e dalla linea di credito dei conti delle carte. Linee di credito elevate e tassi TAEG bassi attraggono i consumatori. I bassi tassi percentuali annui, tuttavia, potrebbero rendere le banche meno redditizie e un'espansione incauta delle linee di credito aumenta il rischio di perdita di credito per la banca. È indispensabile che questi elementi siano distribuiti in modo diverso per ogni consumatore, a seconda dell'evoluzione del suo rating creditizio nel tempo.

Tenendo conto di tutto ciò, nel 1999 la direzione di Bank One ha chiesto al suo dipartimento interno di Ricerca Operativa di lanciare il progetto PORTICO (controllo e ottimizzazione del portafoglio) per valutare i metodi per aumentare la redditività della divisione carte di credito. Per scegliere i tassi di interesse e le linee di credito per specifici titolari di carta che massimizzano il valore attuale netto dell'intero portafoglio di clienti delle carte di credito, la divisione di Ricerca Operativa ha costruito il sistema PORTICO utilizzando un Markov Decision Process. Il gruppo ha determinato lo stato in cui inserire un conto in un determinato mese utilizzando una serie di criteri, come il livello della linea di credito, il livello del TAEG e delle variabili che descrivono il comportamento del cliente nei pagamenti.

Sono state calcolate le probabilità di transizione sulla base di 18 mesi di dati di serie temporali su un campione randomizzato di 3 milioni di conti di carte di credito del portafoglio della banca. Le variabili analizzate nel modello invece fanno riferimento ai livelli di TAEG e lo scaglione di linea di credito da attribuire al gruppo di clienti. Dopo una lunga fase di test è stato confermato che il modello PORTICO avrebbe aumentato in modo significativo la redditività della banca. Prima dell'effettiva implementazione, si prevedeva che questa nuova procedura avrebbe portato a un aumento dei profitti annuali

di oltre 75 milioni di dollari. Grazie a questo eccezionale utilizzo dei processi decisionali di Markov, Bank One ha ricevuto il Premio Wagner 2002 per l'eccellenza nella pratica della ricerca operativa.

L'utilizzo delle Markov Chain (da ora in avanti "MC") nella finanza, quindi, non è una novità. Poiché sono ideali per lo studio e la modellizzazione matematica di sistemi che dipendono da variabili casuali, il loro utilizzo come strumento predittivo si è diffuso rapidamente (Michael Gr. Voskoglou, 2016). I concetti di base della teoria furono introdotti da Markov nel 1907. Da allora, la teoria delle MC è stata sviluppata e ampliata da numerosi matematici di spicco: Kolmogorov nel suo articolo "*Foundations of the Theory of Probability (1952)*" le ha approfondite e ne ha definito nuove proprietà (la definizione degli stati di assorbimento affrontati nella sezione 3.2, ad esempio, è da attribuire a lui), introducendo i concetti di ergodicità e di convergenza. Feller (1957) ha poi illustrato numerosi esempi e applicazioni pratiche delle catene di Markov in vari settori, tra cui la teoria delle code, la teoria dei giochi e la teoria della diffusione. Tuttavia, solo a partire dagli anni '60 è stata riconosciuta l'importanza di questa teoria per le scienze naturali, sociali e manageriali.

Il primo ad applicare le MC alla finanza è stato Paul A. Samuelson (1965). Nel suo articolo, applica i principi delle MC per calcolare il valore ottimale di contratti future in base al valore del titolo sottostante. La metodologia adottata consiste nell'utilizzarle per analizzare il processo stocastico che descrive l'evoluzione della probabilità dell'asset nel tempo, tenendo conto del comportamento degli investitori e dei loro incentivi a prendere decisioni di acquisizione sulla base della garanzia offerta.

Dopo il suo contributo, i modelli stocastici hanno trovato numerose applicazioni in ambito manageriale e finanziario.

2.1. Monte Carlo Markov Chain

Una buona porzione di letteratura è dedicata all'utilizzo delle MC combinato con i concetti delle simulazioni Monte Carlo.

I metodi Markov Chain Monte Carlo (MCMC) forniscono un approccio sofisticato alla stima di modelli finanziari che normalmente risultano difficili da analizzare con modelli convenzionali (Korteweg, 2011). Questi metodi eccellono nella gestione di modelli non lineari con relazioni complicate che richiedono alte capacità computazionali. Utilizzando le MCMC, è possibile catturare efficacemente le complessità insite in questi modelli e ricavare stime più accurate rispetto alle tecniche di regressione tradizionali.

Un punto di forza dei metodi MCMC è la loro capacità di affrontare modelli con variabili latenti, in cui le variabili di interesse non sono direttamente osservabili ma dedotte da altre variabili misurabili. L'incorporazione di variabili latenti nel modello aumenta la profondità dell'analisi e fornisce indicazioni sulle dinamiche sottostanti alle relazioni studiate (Kass et al., 1997).

Anche i modelli gerarchici, un tipo di modello poco utilizzato nella finanza aziendale, possono trarre notevoli vantaggi dai metodi MCMC. I modelli gerarchici consentono di incorporare più livelli di variabili e di catturare dipendenze complesse tra le stesse (Kass et al., 1997). Questo approccio si rivela utile nell'analisi di questioni complesse come i costi di fallimento delle imprese (Pulvino, 1999), i costi di licenziamenti del management (Jeliazkov e Hee Lee, 2010) e la probabilità di emissione di debito o Equity (Hovakimian, Hovakimian e Tehranian, 2004).

L'utilizzo combinato di Markov Chain e Simulazioni Monte Carlo, sebbene vantaggioso per l'analisi di modelli complessi, presenta alcuni svantaggi (Korteweg, 2011).

In primo luogo, la complessità computazionale rappresenta un ostacolo importante. L'implementazione di modelli MCMC può richiedere risorse computazionali considerevoli, specialmente per modelli dettagliati o con un elevato numero di parametri. Questo può tradursi in tempi di esecuzione più lunghi e nella necessità di disporre di hardware potenti per gestire il carico computazionale.

Un secondo svantaggio da considerare è la complessità di modellizzazione degli scenari e del caso pratico (Korteweg, 2011). L'interpretazione corretta dei risultati e la gestione efficace di modelli complessi richiedono una conoscenza approfondita di statistica, modellazione e analisi dei dati. Gli utenti meno esperti potrebbero trovare difficile padroneggiarne i dettagli tecnici e le sfumature, rendendo necessaria una formazione specifica per utilizzarli in modo efficace.

Infine, c'è il rischio di overfitting (Korteweg, 2011). L'inclusione eccessiva di parametri nel modello combinato potrebbe portare a un adattamento troppo stretto ai dati di addestramento, riducendo la capacità del modello di generalizzare su nuovi dati (Boucherie, Dijk and Springerlink, 2017). Il fenomeno di overfitting può compromettere la validità e l'affidabilità delle stime ottenute, rendendo necessario un bilanciamento attento tra la complessità del modello e la sua capacità di generalizzazione.

2.2. Gestione di portafoglio

Un'altra ampia porzione della letteratura si concentra sull'applicazione dei MDP all'option pricing (Cox, Ross e Rubinstein, 1979) e all'ottimizzazione delle strategie di portafoglio (Bäuerle e Rieder, 2011).

Un elemento comune tra queste diverse applicazioni è l'impiego dei principi delle MC per definire un modello predittivo dei rendimenti dei titoli esaminati. D'interesse per questa ricerca risulta sezione della letteratura riferita quest'ultimo elemento. In questa sezione, verranno quindi esaminati solamente precedenti studi che utilizzano i concetti di MC per la modellizzazione degli elementi stocastici dei titoli azionari.

Per comprendere la connessione tra il mercato e i processi stocastici, è necessario menzionare due importanti teorie: la teoria del random walk e dell'efficienza del mercato. La teoria del Random Walk afferma che le fluttuazioni dei prezzi azionari sono indipendenti e ugualmente distribuite, indicando che i movimenti futuri dei prezzi azionari sono inattesi come una serie di numeri interi casuali selezionati da una distribuzione di probabilità (Fama, 1965). I risultati del suo studio in riferimento all'indice Dow Jones dal 1957 al 1962 risultano consistenti con questa affermazione (Fama, 1965). Altri studiosi criticano la sua teoria, affermando che è possibile prevedere, nel breve termine, comportamenti che il mercato tende ad assumere in particolari occasioni, come i "cluster" di volatilità. Questi si concretizzano come fenomeni per il quale successivamente a picchi di alta volatilità, seguono periodi di altrettanto alta volatilità e viceversa (Mandelbrot, 2004; Cont, 2005). Lo stesso Fama riconosce che sia quasi impossibile identificare dei dati storici che non presentino delle interdipendenze. Ne consegue che la teoria del Random Walk sia ragionevolmente valida come approssimazione della realtà, senza spiegarla pienamente (Fama, 1965).

L'ipotesi dell'efficienza di mercato, invece, afferma che i prezzi dei titoli includono tutte le informazioni accessibili, negando così qualsiasi prospettiva di investimento con un valore attuale netto (VAN) positivo in ambienti di mercato competitivi (Berk & DeMarzo, 2020). L'ipotesi di mercato efficiente si manifesta in tre varianti: debole, semi-forte e forte. In particolare, la forma debole concorda con la teoria del Random Walk, sostenendo che i modelli previsionali basati su dati storici sono inefficaci per prevedere i prezzi futuri. Questo perché, secondo la teoria dell'efficienza di mercato, il prezzo attuale di un titolo racchiude lui stesso la sequenza storica (Malkiel, 2003), rendendo inutile la ricerca di possibili investimenti basandosi su performance passate. Ciononostante, anche l'ipotesi

del mercato efficiente è da ritenersi un'approssimazione dei mercati competitivi. In particolare, non viene considerata affatto la propensione al rischio degli investitori: poiché gli investitori valutano individualmente la rischiosità di ogni opportunità di investimento in base alla loro propensione al rischio, possono ottenere risultati o esiti differenti. Di conseguenza, alcuni investitori possono trovare operazioni con VAN positivo laddove altri investitori non individuano nessuna opportunità (Berk & DeMarzo, 2020).

Fatte queste premesse, l'applicazione dei fondamenti delle catene di Markov nella creazione di modelli previsionali si basa sulla capacità di queste di descrivere la probabilità che un titolo si mantenga in un trend positivo o negativo. Sono stati condotti diversi studi al riguardo.

Zhiyuan e Likai (2010), nella loro ricerca espongono un semplice metodo di calcolo delle probabilità di transizione di un titolo azionario. Supponiamo che ci siano tre stati: 0, 1, 2 per simulare il movimento del prezzo delle azioni. 1 si riferisce a quando il prezzo delle azioni attuale è superiore al prezzo del giorno precedente, 2 si riferisce a quando il prezzo delle azioni attuale è inferiore al prezzo del giorno precedente e 0 si riferisce a quando il prezzo delle azioni attuale è uguale al prezzo del giorno precedente.

Come esempio, hanno considerato il titolo SEB (Skandinaviska Enskilda Banken AB). Selezionando i dati dal 24 luglio 2009 al 2 ottobre 2009, coprendo 50 giorni di negoziazione.

Tabella 1: Dati di chiusura dell'indice SEB nell'intervallo 24 luglio 2009 – 2 ottobre 2009

Periodo	24/07/2009	-	02/10/2009		
Titolo	SEB ser. A				
Data	Chiusura	Data	Chiusura	Data	Chiusura
24/07/2009	39.90	19/08/2009	47.00	14/09/2009	49.00
27/07/2009	39.20	20/08/2009	48.30	15/09/2009	48.90
28/07/2009	39.30	21/08/2009	50.75	16/09/2009	50.25
29/07/2009	39.20	24/08/2009	51.75	17/09/2009	49.80
30/07/2009	40.30	25/08/2009	50.50	18/09/2009	49.60
31/07/2009	40.30	26/08/2009	50.75	21/09/2009	49.10
03/08/2009	43.40	27/08/2009	50.00	22/09/2009	48.80
04/08/2009	42.40	28/08/2009	51.75	23/09/2009	48.10
05/08/2009	43.40	31/08/2009	50.00	24/09/2009	47.10
06/08/2010	45.30	01/09/2009	47.20	25/09/2009	46.90
07/08/2009	48.50	02/09/2009	45.50	28/09/2009	48.00
10/08/2009	48.00	03/09/2009	46.00	29/09/2009	47.70
11/08/2009	44.50	04/09/2009	47.20	30/09/2009	47.00

12/08/2009	45.10	07/09/2009	49.80	01/10/2009	45.50
13/08/2009	45.50	08/09/2009	48.90	02/10/2009	45.00
14/08/2009	45.70	09/09/2009	49.70		
17/08/2009	43.90	10/09/2009	49.10		
18/08/2009	46.90	11/09/2009	49.30		

È possibile trasformare questi dati negli stati del sistema. In questo caso abbiamo solo tre stati: 0, 1, 2.

Tabella 2: Definizione delle transizioni di stato dell'indice SEB nell'intervallo 24 luglio 2009 – 2 ottobre 2009

Data	Chiusura	Data	Chiusura	Data	Chiusura
24/07/2009	2	19/08/2009	1	14/09/2009	2
27/07/2009	2	20/08/2009	1	15/09/2009	2
28/07/2009	1	21/08/2009	1	16/09/2009	1
29/07/2009	2	24/08/2009	1	17/09/2009	2
30/07/2009	1	25/08/2009	2	18/09/2009	2
31/07/2009	0	26/08/2009	1	21/09/2009	2
03/08/2009	1	27/08/2009	2	22/09/2009	2
04/08/2009	2	28/08/2009	1	23/09/2009	2
05/08/2009	1	31/08/2009	2	24/09/2009	2
06/08/2010	1	01/09/2009	2	25/09/2009	2
07/08/2009	1	02/09/2009	2	28/09/2009	1
10/08/2009	2	03/09/2009	1	29/09/2009	2
11/08/2009	2	04/09/2009	1	30/09/2009	2
12/08/2009	1	07/09/2009	1	01/10/2009	2
13/08/2009	1	08/09/2009	2	02/10/2009	2
14/08/2009	1	09/09/2009	1		
17/08/2009	2	10/09/2009	2		
18/08/2009	1	11/09/2009	1		

Con una semplice analisi di contingenza, è possibile sapere con che frequenza il prezzo è aumentato o diminuito, a seconda della condizione di partenza.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/23 & 10/23 & 12/23 \\ 12/25 & 0 & 13/25 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sulla base della matrice di transizione di cui sopra, possiamo calcolare la probabilità che un'affermazione relativa al movimento futuro del prezzo sia vera. Poiché lo stato attuale (4 Ottobre) è 2 - inferiore, c'è il 52% di possibilità che anche il giorno successivo sia

negativo e il 48% che si muova verso l'alto. La transizione allo stesso stato non è possibile. Di conseguenza, lo stato del giorno successivo è molto probabilmente negativo.

Il 5 ottobre, il prezzo delle azioni è effettivamente 44,5. Non è in rialzo. Pertanto, la previsione si è rivelata accurata in questo caso.

Naturalmente, l'esempio fornito è un'illustrazione semplificata dell'utilizzo delle MC come modello predittivo. Per ottenere un'analisi più accurata e rappresentativa della realtà, è necessario ampliare il numero di stati del sistema e incorporare una gamma più ampia di risultati potenziali.

Un modello con solo tre stati non è in grado di catturare appieno la complessità e la varietà dei fattori che influenzano i movimenti dei prezzi delle azioni.

Una miglitoria rispetto al modello di Zhiyuan e Likai viene fornita da Aronsson e Folkesson (2023), che nel loro studio contribuiscono alla disciplina aumentando gli stati del sistema a un totale di sei. L'analisi, condotta sull'indice svedese OMXS30, considera stati definiti in base a intervalli di rendimenti giornalieri, comprendendo sei categorie che indicano diversi gradi di rialzo e ribasso (Doubleday & Esunge, 2011). Le probabilità di transizione tra questi stati sono state calcolate utilizzando la massima verosimiglianza. Le probabilità di transizione risultanti dai calcoli si mostrano maggiormente descrittive e accurate rispetto alla precedente. In questo elaborato, verrà presentato un modello simile a quello costruito da Aronsson e Folkesson, che comprende sei stati ben definiti, e amplia l'analisi consigliando all'utilizzatore quale politica di dividendi adottare in base allo stato in cui si trova, considerate tutte le possibili future condizioni in cui può trovarsi.

La correlazione tra politica dei dividendi e i rendimenti azionari è stata ampiamente dimostrata da diversi studi.

Tao (2009), nella sua ricerca *The Impact of Acquisitions on Short-Run Returns and Leverage*, esamina l'influenza che gli annunci di nuovi payout ratio determinano sui rendimenti azionari, concentrandosi su 60 aziende del settore finanziario quotate alla Borsa della Thailandia (SET) dal 2005 al 2010. L'ipotesi di signaling prevede che le imprese utilizzino gli annunci di dividendi per comunicare le loro prospettive future, influenzando così i prezzi delle azioni. La sua analisi si propone di valutare la reazione dei prezzi azionari in prossimità della data dell'annuncio, verificando in particolare se gli annunci di dividendi positivi o negativi portino a rendimenti di mercato anormali.

In particolare, analizza gli Abnormal Returns (AR) e i Cumulative Abnormal Returns (CAR) in una finestra temporale di 41 giorni, che comprende 20 giorni prima e dopo la

data di annuncio. La data dell'evento ($t = 0$) è considerata come il giorno in cui il Consiglio di amministrazione propone il dividendo, riflettendo la risposta immediata del mercato.

I rendimenti giornalieri previsti per ciascun titolo sono calcolati utilizzando i dati storici e gli abnormal returns sono identificati come la varianza tra i rendimenti effettivi e quelli previsti (Brown & Warner, 1985). I Cumulative Abnormal Returns (CAR) sono calcolati aggregando i rendimenti anomali nel periodo dell'evento per quantificare l'effetto complessivo dell'annuncio sui prezzi delle azioni.

I risultati indicano un notevole aumento dei prezzi delle azioni in seguito agli annunci di dividendi. I rendimenti anomali sono stati significativamente positivi nei due giorni successivi all'annuncio e che i rendimenti anomali cumulativi hanno mostrato una tendenza al rialzo persistente per tutto il periodo successivo all'annuncio. I risultati sono stati statisticamente significativi al livello dell'1%, dimostrando una solida reazione del mercato agli annunci di dividendi (Tao, 2009).

Allo stesso modo, la ricerca di Mrzygłód e Nowak (2017) esamina le risposte del mercato azionario polacco agli annunci delle distribuzioni di dividendi da parte delle imprese quotate alla Borsa di Varsavia (WSE). In accordo con i risultati di Tao, l'analisi dimostra una reazione statisticamente significativa degli stock price subito dopo l'annuncio dei dividendi, con abnormal returns nel giorno dell'annuncio e in quello successivo. Questa reazione conferma ancora il concetto di signaling, analogamente ai risultati osservati nella ricerca sul mercato thailandese. A differenza dello studio precedente, l'effetto del pagamento dei dividendi sui prezzi delle azioni è statisticamente ridotto, a indicare che il mercato polacco assimila più rapidamente le informazioni rispetto al mercato thailandese, mentre l'effettivo ammontare di dividendi non sembra influire sui prezzi.

L'analisi rivela gli aumenti dei dividendi forniscono rendimenti anomali positivi, mentre i tagli dei dividendi portano a rendimenti anomali negativi, allineandosi alle previsioni teoriche.

In conclusione, è noto come le MC trovano largo utilizzo nella creazione di modelli predittivi sui rendimenti scambiati nel mercato. Questi modelli stocastici si prestano bene a “catturare” il loro comportamento stocastico, e la probabilità che un titolo mantenga un trend positivo o negativo, offrendo una base teorica per la previsione dei rendimenti futuri. Inoltre, le reazioni del mercato agli annunci di dividendi sono state ampiamente

descritte. Le ricerche analizzate dimostrano che gli annunci di dividendi influenzano in modo sostanziale i prezzi delle azioni. Le imprese utilizzano i dividendi come indicatori per comunicare le loro prospettive finanziarie, dove gli aumenti dei dividendi determinano rendimenti anomali positivi e le riduzioni dei dividendi rendimenti negativi. La relazione tra la proiezione dei rendimenti e l'influenza dei dividendi sui prezzi delle azioni risulta quindi concettualmente corretta. L'obiettivo del modello presentato nel capitolo 5 è di individuare la politica di distribuzione dei dividendi ottimale tenendo conto dell'impatto immediato degli annunci sui prezzi, le condizioni di mercato attuali e quelle future.

2.3. Struttura del debito e rating

Sebbene le catene di Markov possano essere uno strumento efficace per la previsione stocastica del mercato azionario, tale efficacia potrebbe non trasferirsi ad altre analisi, come ad esempio la valutazione dei rating dei titoli obbligazionari. In questi contesti, è spesso necessario considerare le condizioni passate del sistema oltre alle attuali. La proprietà markoviana, secondo cui le probabilità di transizione dipendono solo dalle condizioni attuali, indebolirebbe quindi la significatività dell'analisi. Nel testo "*An Introduction to Credit Risk Modeling*" (Bluhm, Overbeck e Wagner, 2002), gli autori criticano questa limitazione, suggerendo l'uso di strumenti più complessi e comprovati come il Bond Evaluation Tool (BET) di Moody's, che tiene conto anche di aspetti qualitativi del titolo oltre alle sole condizioni attuali per attribuirgli un rating.

Un possibile metodo per mitigare, ma non elidere, la *path dependence* è quello di attribuire a ogni stato un premio, e di rendere ogni probabilità di transizione del sistema una funzione della decisione scelta. In questo modo avremo un Markov Decision Process. Hovakimian, Hovakimian e Tehranian (2004) nella loro pubblicazione "*Determinants of target capital structure: The case of dual debt and equity issues*" forniscono un ottimo esempio di come le MC possano essere utilizzate per prevedere la modalità di raccolta di capitale delle aziende. Nella loro analisi, le MC sono utilizzate per simulare e analizzare il modo in cui le imprese cambiano le loro condizioni finanziarie nel tempo, ossia l'analisi della probabilità che le imprese passino da uno stato finanziario (ad esempio, un basso rapporto debt/equity) a un altro (ad esempio, un alto rapporto debt/equity) sulla base dei dati storici e delle probabilità di transizione.

Considerando le condizioni di mercato e le prestazioni operative, il metodo proposto dagli autori consente un'analisi dinamica e sequenziale del modo in cui le aziende selezionano le diverse opzioni di finanziamento nel tempo.

Tra le caratteristiche delle imprese che sono determinanti delle scelte di finanziamento aziendale, non è stato raggiunto un consenso nella comunità degli economisti nell'interpretare questi risultati. In particolare, l'importanza della redditività aziendale e delle performance di mercato nello spiegare i rapporti di debito aziendale e le scelte di finanziamento delle imprese che raccolgono fondi esterni è stata oggetto di diverse interpretazioni.

Lo studio di Hovakimian, Hovakimian e Tehranian (2004), concentrandosi su imprese che raccolgono sia debito che capitale azionario, coglie delle chiare correlazioni tra performance di mercato e la redditività. Le conclusioni dell'articolo derivano da due set di regressioni. Innanzitutto, sono analizzati i determinanti del rapporto di leverage post-emissione delle imprese che emettono sia debito che capitale azionario. Se è importante mantenere la struttura del capitale target, ci si aspetta che queste imprese scelgano le quantità di debito e capitale azionario emesse in modo che la deviazione dal target venga compensata e la struttura del capitale risultante sia vicina al target.

Successivamente, vengono stimati modelli probit che prevedono la scelta tra finanziamento tramite debito e finanziamento doppio (debito e capitale azionario) e la scelta tra finanziamento doppio e finanziamento tramite capitale azionario. Confrontando le imprese che emettono debito e capitale azionario con quelle che emettono solo capitale azionario, è possibile esaminare l'effetto delle performance di mercato sulla scelta della forma di finanziamento mantenendo costante il tempismo di mercato. Pertanto, le differenze nelle performance di mercato osservate tra le imprese che emettono debito e capitale azionario e quelle che emettono solo capitale azionario possono essere attribuite all'ipotesi del trade-off.

I risultati sono consistenti con l'ipotesi che le imprese con un alto rapporto Market - to - Book value abbiano buone opportunità di crescita e, quindi, abbiano bassi rapporti di debito target. La probabilità di un'emissione di capitale aumenta mentre la probabilità di un'emissione di debito diminuisce con il rapporto Market - to - Book value. D'altra parte, se gli alti rendimenti azionari sono associati a una maggiore probabilità di emissione di capitale azionario, la probabilità di emissione di debito non è influenzata dai rendimenti azionari.

Si evidenzia anche che la redditività non ha alcun effetto sul debito target. Le imprese non redditizie emettono azioni per compensare il leverage in eccesso dovuto alle perdite accumulate. Le imprese redditizie non sembrano compensare il deficit di leverage accumulato emettendo debito. La letteratura suggerisce inoltre che la tendenza a emettere debito quando le performance operative sono alte si contrappone alla preferenza delle imprese di finanziarsi per mezzo di fondi interni e dalla disponibilità degli stessi.

Oltre che per l'analisi della composizione del capitale, trova largo spazio nella letteratura l'utilizzo di MC per esaminare il rischio di credito, i rating e gli spread creditizi. Per natura, le MC sono un ottimo strumento per modellare la dinamica stocastica dei rating e delle probabilità di default, facilitando la valutazione del rischio di credito nel tempo. I modelli proposti sostengono che la probabilità di passare da un credit rating all'altro dipende esclusivamente dal rating attuale, indipendentemente dalla traiettoria seguita per raggiungerlo. Questa riduzione rende i modelli di Markov particolarmente interessanti per lo sviluppo di matrici di transizione che descrivono la probabilità di variazione del rating in un determinato arco temporale (Jarrow, Lando e Turnbull, 1997). Queste matrici offrono informazioni fondamentali sulle probabilità di miglioramenti e deterioramenti del rating, consentendo alle istituzioni finanziarie di valutare le perdite previste e di gestire in modo efficiente l'esposizione al rischio di credito. CreditMetrics, creata da J.P. Morgan, è una metodologia leader che utilizza modelli di Markov per questo obiettivo. I dati di rating precedenti sono utilizzati per creare una matrice di transizione che indica le fluttuazioni previste della qualità del credito nel tempo (Glasserman, 2000). Questo approccio facilita la determinazione del prezzo dei derivati creditizi e la valutazione del rischio associato agli strumenti finanziari collegati al credito, riproducendo gli effetti di declassamenti o miglioramenti dei rating.

Ad esempio, CreditRisk+, sviluppato da Credit Suisse Financial Products, impiega delle MC per valutare il rischio di perdite creditizie all'interno di un portafoglio. Il modello adotta una metodologia probabilistica per stimare l'esposizione al rischio e prevedere la probabilità di default e la perdita in caso di insolvenza, integrando le dinamiche di transizione nella valutazione del rischio a livello di portafoglio (Glasserman, 2000).

La ricerca intitolata *"The Impact of Credit Ratings on Capital Structure"* (Fedra, 2020) analizza gli effetti delle fluttuazioni del rating del credito sulle scelte di finanziamento delle imprese, in particolare per le società non finanziarie quotate alla Borsa Tadawul in Arabia Saudita dal 2009 al 2016. Lo studio ha utilizzato diversi modelli di regressione

lineare per valutare l'insieme di transizioni tra gradi di investimento e speculativi (investment grade e speculative grade), sulle scelte di struttura del capitale. Lo studio esamina in particolare l'ipotesi Credit Rating-Capital Structure (CR-CS), che sostiene che le imprese aggiustano la loro leva finanziaria in reazione alle variazioni del rating del credito per migliorare i risultati finanziari (Kisgen, 2006).

L'analisi condotta dall'autore comprende tre modelli principali: uno che valuta i cambiamenti ampi di rating (BR Test), un altro che esamina le variazioni di rating "notch" (NH Test) e un terzo che indaga le transizioni tra i rating investment grade e speculative grade (IGSG Test). I cambiamenti di rating ampi sono riferiti a transizioni sostanziali tra le principali categorie di rating, come ad esempio un downgrade da una categoria superiore (es. A) a una inferiore (es. BBB). L'autore si propone di dimostrare la loro diretta influenza sui costi di finanziamento di un'azienda e il rischio percepito. Il BR Test valuta l'impatto di questi cambiamenti rilevanti sulle scelte di struttura del capitale, evidenziando la necessità di mantenere o migliorare un rating ampio per assicurarsi condizioni di mercato vantaggiose. I rating notch, invece, rappresentano piccoli spostamenti all'interno della stessa categoria generale di rating. Un rating A può essere suddiviso in A+, A, e A-, con ciascuna designazione che riflette lievi variazioni nel rischio percepito. Il NH Test valuta l'influenza delle modifiche minori sulla struttura del capitale; tuttavia, le variazioni notch sono generalmente considerate di impatto minore rispetto ai cambiamenti di rating ampi, poiché non modificano significativamente la posizione di un'azienda nelle principali classificazioni regolamentari e di mercato. Infine, l'autore analizza i risultati in base alle classificazioni tra rating "investment grade" (rischio di default relativamente basso, compresi BBB- o superiori), e i rating "speculative grade" (rischio di default elevato, compresi BB+ o inferiori). La transizione tra queste due classificazioni, nota come "crossover," è importante perché un downgrade a speculative grade può comportare un accesso ridotto al mercato e un aumento sostanziale dei costi di finanziamento. Il IGSG Test analizza l'impatto delle variazioni tra questi due gruppi sulle scelte di emissione di debito e azioni da parte delle imprese, sottolineando l'importanza di mantenere un rating investment grade per evitare costi di finanziamento elevati e limitazioni nell'accesso al mercato (Fedra, 2020).

La ricerca adotta una metodologia quantitativa, utilizzando tecniche di regressione dei minimi quadrati ordinari (OLS) per valutare l'impatto delle variazioni effettive dei rating dall'anno precedente (T-1) sulla struttura del capitale nell'anno corrente (T). I fattori

essenziali includono l'emissione netta di debito in rapporto all'equity, i rating creditizi complessivi, i rating notch e variabili di controllo come la leva finanziaria, la redditività e la dimensione dell'impresa (Kisgen, 2006; Krichene e Khoufi, 2015). Anche questa ricerca si basa su due assunzioni fondamentali derivanti dalle teorie convenzionali della struttura del capitale, tra cui la teoria del trade-off e la teoria del pecking order. L'ipotesi del trade-off suggerisce che le imprese bilanciano i vantaggi fiscali del debito con i costi legati alle difficoltà finanziarie, mentre la teoria del pecking order sostiene che le imprese preferiscono il finanziamento interno e il debito all'equity a causa delle asimmetrie informative (Fama e French, 2002; Myers, 1984). Tuttavia, l'ipotesi CR-CS esaminata in questo studio contesta le prospettive convenzionali integrando l'influenza specifica dei rating creditizi sulle decisioni di finanziamento, un aspetto affrontato poco dai modelli precedenti.

La ricerca evidenzia che le aziende emettono una percentuale inferiore di debito rispetto all'equity dopo significativi upgrade o downgrade dei rating creditizi, mettendo in luce i costi e i vantaggi distinti associati a diversi livelli di rating. I dati indicano che le aziende che si avvicinano a un miglioramento del rating tendono a ridurre l'emissione di debito per sfruttare i benefici di un rating elevato, tra cui costi di finanziamento ridotti e un migliore accesso al mercato. Al contrario, le aziende che prevedono un downgrade possono limitare l'emissione di debito per evitare costi di capitale elevati e percezioni di mercato sfavorevoli (Kisgen, 2006). I risultati mostrano che le aziende manifestano minori preoccupazioni per le variazioni di rating infragruppo. L'autore ipotizza che questo risultato sia spiegabile dal fatto che queste piccole modifiche all'interno della stessa categoria di rating generale non comportano le stesse conseguenze legali o finanziarie (Kemper e Rao, 2013).

Nella ricerca *“The Bond Refunding Decision as a Markov Process”*, Harold Bierman, Jr. formula efficacemente un modello decisionale basato sui fondamenti delle MC per l'analisi dei tassi di interesse, e i suoi contributi sono particolarmente d'ispirazione per il modello discusso nel Capitolo 6.

L'analisi consiste nell'individuare la scelta ottimale di rifinanziamento dei titoli azionari in base ai tassi d'interesse applicabili. L'obiettivo che l'autore si pone è quindi suggerire l'opzione dal valore atteso maggiore tra il rifinanziamento in caso il costo del debito diminuisca, oppure se sia meglio attendere un ulteriore miglioramento delle condizioni. L'autore descrive poi l'individuazione dei flussi di cassa rilevanti per l'analisi,

introducendo un sistema di ricompense per valutare il valore attuale netto dei risparmi legati al rifinanziamento a tassi di interesse variabili e analizza numerose alternative di rinegoziazione del debito per determinare il metodo ideale. I risultati indicano che non è necessariamente vantaggioso modificare i termini di pagamento degli interessi subito dopo un calo dei tassi; in alcuni casi, rimandare gli aggiustamenti a condizioni più favorevoli può risultare più efficace.

Fatto presente di queste premesse, e visto l'ampio utilizzo che questi sistemi trovano nella disciplina economico-finanziaria, i prossimi capitoli esploreranno i fondamentali elementi utili alla costruzione dei modelli successivamente presentati.

3. Capitolo 3: Fondamenti delle Markov Chain

Una Markov Chain è la rappresentazione matematica più elementare di fenomeni casuali che cambiano nel tempo. Dalla loro struttura semplice è possibile dedurre molte cose sul comportamento di eventi casuali. Allo stesso tempo però, le MC appartengono a una classe abbastanza ampia da avere una vasta gamma di applicazioni. Le MC sono quindi le prime e più significative istanze di processi stocastici. In un certo senso, l'intero campo matematico dei processi stocastici può essere considerato come una variazione della teoria delle MC (Norris, 2007).

Quando però si parla di processi casuali, non tutti possono essere presi in considerazione per costruire una MC. Saranno considerati solo processi casuali che non conservano memoria del loro passato. Ciò significa che solo lo stato attuale del processo può influenzarne il futuro (Boucherie, Dijk and Springerlink, 2017). Un tale processo è chiamato processo markoviano. Più avanti nell'elaborato sarà indagato più a fondo questo concetto, chiamato anche "*path dependence*", e di come i modelli proposti considerano tale proprietà.

Saranno inoltre esaminati esclusivamente casi in cui il processo decisionale può assumere solo un insieme finito o numerabile di stati, condizione necessaria per costruire appropriatamente una MC. In questo capitolo saranno delineati i concetti fondamentali alla base delle MC, accompagnati da esempi pratici che ne illustrano alcune applicazioni.

3.1. Markov chain a tempo discreto, a stati finiti, stazionarie

In una catena di Markov a tempo discreto, le transizioni di stato possono avvenire solo a tempi fissi

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

Questi tempi sono di solito regolari, ad esempio l'inizio di ogni ora, un certo momento nella giornata o la fine di ogni settimana.

In una catena di Markov a stati finiti, il numero di stati in cui il processo può trovarsi è finito.

Denominiamo l'insieme di tutti gli stati in cui il processo può trovarsi in qualsiasi momento del futuro:

$$S = \{1, 2, \dots, M\}$$

Denominiamo due stati in cui il sistema può trovarsi:

1. i = lo stato in cui il sistema si trova al tempo attuale t

2. j = lo stato in cui il sistema si troverà al tempo $t + 1$

Denominiamo una variabile casuale che rappresenti lo stato del processo in un momento

$$t: X^t$$

Se applichiamo l'assunzione markoviana, ossia che la probabilità che il processo si trovi in un determinato stato nel periodo successivo dipende dallo stato attuale e non dalla storia passata degli stati, otteniamo che (David, Kolmogorov and Khintchine, 1952):

$$Pr(X^{t+1} = j | X^t = i, X^{t-1} = k^{t-1}, \dots, X^0 = k^0) = Pr(X^{t+1} = j | X^t = i)$$

Ossia che la probabilità condizionata che il processo si troverà nello stato j al momento $t + 1$ *dati* tutti gli stati precedenti negli istanti $t, t - 1, \dots, 0$ sarà sempre uguale alla probabilità condizionata che il sistema si troverà nello stato j al tempo $t + 1$ *dato che* nel tempo t (adesso) si trova in i (David, Kolmogorov e Khintchine, 1952).

In altre parole, indipendentemente da quale sia lo stato precedente, la probabilità che il sistema domani si trovi in j dipende solo da dove ci si trova oggi.

Una MC è stazionaria se le probabilità di transizione non cambiano nel tempo:

$$Pr(X^{t+1} = j | X^t = i) = p_{i,j} \quad \forall t$$

Chiamiamo $p_{i,j}$ la probabilità di transizione da uno stato i a uno stato j , mentre l'insieme delle probabilità di transizione P in un sistema sarà chiamato matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,M} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M,1} & p_{M,2} & \dots & p_{M,M} \end{bmatrix}$$

Il processo può passare direttamente dallo stato i allo stato j se e solo se $p_{i,j} > 0$.

Dato che $p_{i,j}$ è una probabilità, $0 \leq p_{i,j} \leq 1$.

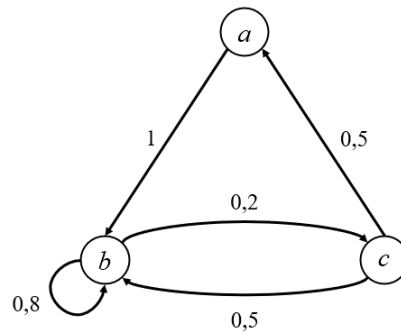
Da qualsiasi stato i il processo deve spostarsi in qualche stato di S , quindi:

$$p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,M} = 1.$$

La somma di ogni riga di una matrice di transizione deve essere uguale a 1.

Per comprendere meglio una MC è possibile visualizzarla con un semplice diagramma:

Figura 1: Diagramma di stati e transizioni



Ci si può muovere dallo stato a allo stato b con probabilità 1. Dallo stato c si può transitare sia verso lo stato b che allo stato a con pari probabilità $\frac{1}{2}$. Dallo stato b si può saltare allo stato c con probabilità $\frac{1}{5}$, oppure rimanere stazionari nello stato b con probabilità $\frac{4}{5}$.

3.2. Classificazione degli stati

Lo stato b (figura 1) è un particolare stato chiamato *ricorrente*. Gli stati di una MC possono essere classificati come *ricorrenti* o *transitori*. Ogni volta che un processo visita uno stato ricorrente, è destinato a ritornarvi in futuro. Un esempio pratico utile a comprendere il concetto di stato ricorrente è l'esempio dei dipendenti di un ufficio:

Esempio 1: Comportamento dei consumatori

Ogni giorno i dipendenti di un ufficio si recano in un'edicola per acquistare una bibita all'ora di pranzo. L'edicola ha due marche di bibite: Pepsi e Coca-Cola. Le ricerche di mercato dimostrano che dopo aver acquistato la Pepsi, i consumatori passeranno alla Coca-Cola con una probabilità di 0,5, e dopo aver acquistato la Coca-Cola, i consumatori passeranno alla Pepsi con una probabilità di 0,4.

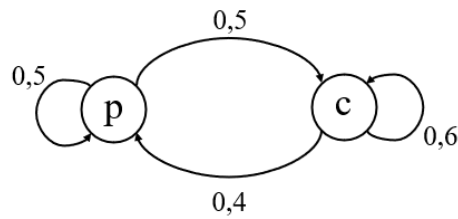
Questo comportamento d'acquisto può essere modellato con una semplice MC:

Formulazione

Stati: brand di bibita scelta dal consumatore

$S = \{Pepsi, Coca - Cola\}$

Figura 2: Diagramma di probabilità di transizione Pepsi - Coca Cola



Matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Questo è un esempio di MC discreta a stati finiti. In particolare, in questa catena entrambi gli stati sono ricorrenti. Ciò significa che un consumatore che cambia bibita da Pepsi a Coca-Cola è destinato a cambiarla di nuovo.

Uno stato non ricorrente è detto *transitorio*. Una volta lasciato uno stato transitorio, non è detto che il sistema possa ritornarvi in futuro.

Uno stato j è accessibile da uno stato i se è possibile per il processo spostarsi dallo stato i allo stato j .

Gli stati i e j sono *comunicanti* se è possibile per il processo muoversi da i a j e da j a i .

Se gli stati i e j comunicano, allora i e j sono entrambi transitori o entrambi ricorrenti.

Esempio 2: Gambler's ruin

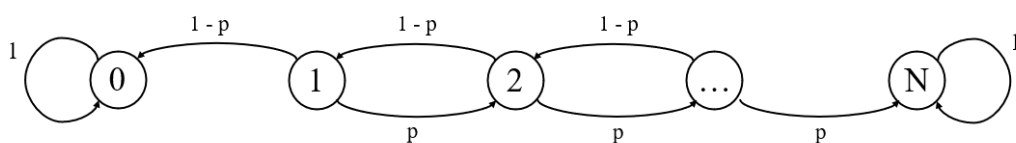
Consideriamo un gioco d'azzardo in un casinò in cui la probabilità di vincere 1 dollaro è p e la probabilità di perdere 1 dollaro è $1-p$. Supponiamo che il giocatore inizi con $\$n$, il casinò con $\$N - n$ e che il gioco continui fino a quando l'uno o l'altro non abbia più soldi.

Formulazione

Stati: quantità di denaro che rimangono al giocatore

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

Figura 3: Diagramma di transizioni di stato



Matrice di transizione:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

In questa situazione, gli stati intermedi $\{1, \dots, N-1\}$ sono transitori, ovvero il giocatore, una volta perso un dollaro, non è detto che lo recuperi.

Nello scorso esempio, gli stati $\{0\}$ e $\{N\}$ sono particolari stati detti di *assorbimento*. Se $p_{i,i} = 1$, allora i è uno stato di *assorbimento*. Una volta arrivato in uno stato di assorbimento, non lo si può più lasciare. Quindi, la probabilità di lasciare uno stato di assorbimento è 0.

Lo stato i è periodico se esiste un valore $k > 1$ tale che il tempo impiegato dal processo per passare dallo stato i allo stato i sia sempre un multiplo di k .

Una MC a stati finiti ha sempre almeno uno stato ricorrente. Una MC viene definita *aperiodica* se non ha stati periodici.

Una MC aperiodica è *ergodica* se ogni coppia di stati ricorrenti della catena comunica tra loro.

3.3. Distribuzione probabilistica degli stati e distribuzione di equilibrio

Potremmo essere interessati alla probabilità che il processo si trovi in un particolare stato dopo un certo periodo di tempo (o equivalentemente dopo un certo numero di transizioni o step).

Definiamo π^n_i come la probabilità che il processo si trovi nello stato i dopo n step.

Condizionando lo stato al passo precedente

$$\pi^n_i = \pi^{n-1}_1 p_{1,i} + \pi^{n-1}_2 p_{2,i} + \cdots + \pi^{n-1}_M p_{M,i}$$

e quindi:

$$\pi^n = \pi^{n-1} P.$$

$\pi^n = (\pi^n_1 \pi^n_2 \cdots \pi^n_M)$ è la distribuzione di probabilità degli stati del processo dopo n step.

La distribuzione di probabilità dello stato iniziale, π^0 , è richiesta per il calcolo di π^n .

Per scoprire come si evolve la distribuzione probabilistica nel tempo, ci basterà moltiplicare la distribuzione iniziale per la matrice di transizione. Nel caso di una MC aperiodica ed ergodica, sarà possibile calcolare similmente anche la distribuzione di equilibrio.

Π è una distribuzione di equilibrio per la MC con matrice di transizione P se $\Pi = \Pi P$.

Una MC aperiodica ed ergodica ha un'unica distribuzione di equilibrio, Π , tale che, per qualsiasi distribuzione di probabilità dello stato iniziale, π^n tende a Π quando n tende all'infinito.

Π può quindi essere chiamata distribuzione di stato stazionario, di lungo periodo o asintotica.

Questo concetto può essere applicato all'esempio 1

Esempio 1 (condt.): Comportamento dei consumatori

La MC in questo caso è aperiodica ed ergodica, in quanto ogni stato è ricorrente ed entrambi comunicano tra loro.

Formulazione

Matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Se ipotizziamo che la distribuzione iniziale dei consumatori iniziale sia che l'80% dei consumatori beve Pepsi e che il restante 20% beve Coca-Cola, possiamo moltiplicare la distribuzione iniziale per la matrice di transizione e scoprire la distribuzione futura delle preferenze dei consumatori:

Distribuzione iniziale:

$$\pi_0 = [0.8 \quad 0.2]$$

$$\text{Iterazione 1: } \pi^1 = \pi^0 \cdot P = [0.8, 0.2] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.48 \quad 0.52]$$

$$\text{Iterazione 2: } \pi^2 = \pi^1 \cdot P = [0.48 \quad 0.52] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.448 \quad 0.552]$$

$$\text{Iterazione 3: } \pi^3 = \pi^2 \cdot P = [0.472 \quad 0.528] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.4448 \quad 0.5552]$$

Se n tende all'infinito, la distribuzione tende a stabilizzarsi su

$$\pi^n = \left[\frac{4}{9} \quad \frac{5}{9} \right]$$

Poiché ci troviamo di fronte a una catena non periodica ed ergodica, la distribuzione di equilibrio sarà unica ed indipendente dalla distribuzione iniziale.

Caso 1: inizialmente tutti i consumatori comprano Pepsi

$$\pi_0 = [1 \quad 0]$$

Tabella 3: Evoluzione delle probabilità di transizione

n	0	1	2	3	4	...	∞
π^n Pepsi	1	0,5	0,45	0,445	0,4445	...	4/9
π^n Coca-Cola	0	0,5	0,55	0,555	0,5555	...	5/9

Caso 2: inizialmente il 60% dei consumatori compra Pepsi.

$$\pi_0 = [0,6 \ 0,4]$$

Tabella 4: Evoluzione delle probabilità di transizione

n	0	1	2	3	4	...	∞
π^n Pepsi	0,6	0,46	0,446	0,4446	0,44446	...	4/9
π^n Coca-Cola	0,4	0,54	0,554	0,5554	0,55554	...	5/9

Caso 3: inizialmente tutti i consumatori comprano Coca-Cola

$$\pi_0 = [0 \ 1]$$

Tabella 5: Evoluzione delle probabilità di transizione

n	0	1	2	3	4	...	∞
π^n Pepsi	0	0,4	0,44	0,444	0,4444	...	4/9
π^n Coca-Cola	1	0,6	0,56	0,556	0,5556	...	5/9

Come si può vedere, la distribuzione probabilistica, nel lungo termine, è indipendente da quella iniziale.

Lo stesso risultato è ottenibile trovando la distribuzione di equilibrio Π risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \pi_{\text{Pepsi}} = 0,5 \pi_{\text{Pepsi}} + 0,4 \pi_{\text{Coca-Cola}} \\ \pi_{\text{Coca-Cola}} = 0,5 \pi_{\text{Pepsi}} + 0,6 \pi_{\text{Coca-Cola}} \\ \pi_{\text{Pepsi}} + \pi_{\text{Coca-Cola}} = 1 \end{cases}$$

Che è un sistema a 2 incognite (2 stati) e con 3 equazioni, quindi possiamo escluderne una.

$$\begin{cases} \pi_{\text{Pepsi}} = 0,5 \pi_{\text{Pepsi}} + 0,4 \pi_{\text{Coca-Cola}} \quad (1) \\ \pi_{\text{Coca-Cola}} = 0,5 \pi_{\text{Pepsi}} + 0,6 \pi_{\text{Coca-Cola}} \\ \pi_{\text{Pepsi}} + \pi_{\text{Coca-Cola}} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Sostituendo π_{Pepsi} della (1):

$$\begin{cases} 1 - \pi_{\text{Coca-Cola}} = 0,5 (1 - \pi_{\text{Coca-Cola}}) + 0,4 \pi_{\text{Coca-Cola}} \\ \pi_{\text{Pepsi}} = 1 - \pi_{\text{Coca-Cola}} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \pi_{\text{Coca-Cola}} = 5/9 \\ \pi_{\text{Pepsi}} = 1 - (5/9) = 4/9 \end{cases}$$

Quindi, la distribuzione stazionaria delle preferenze a lungo termine sarà $\Pi = [4/9 \ 5/9]$

3.4. Periodo di prima transizione attesa e probabilità di assorbimento

Il periodo di prima transizione attesa dallo stato i allo stato j non è altro che il numero di transizioni effettuate dal processo per passare dallo stato i allo stato j per la prima volta. Questo concetto è significativo solo se il processo è destinato a visitare lo stato j dopo essere passato dallo stato i .

Chiamiamo $\mu_{i,j}$ il tempo previsto di primo passaggio dallo stato i allo stato j . Questo valore spesso fornisce indicazioni sull'evoluzione del processo.

$\mu_{i,i}$ è chiamato tempo di ricorrenza previsto per lo stato i .

Se la catena di Markov è ergodica e j è uno stato ricorrente, allora $\mu_{i,j}$ è finito.

Se j è uno stato transitorio, il processo potrebbe non raggiungere mai lo stato j in futuro e quindi $\mu_{i,j}$ potrebbe essere infinito.

Se la catena di Markov non è ergodica, anche quando j è uno stato ricorrente, $\mu_{i,j}$ può essere infinito.

Quando $\mu_{i,j}$ è finito, soddisfa in modo univoco la seguente equazione:

$$\mu_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} \mu_{k,j}$$

Esempio 3: Quote di mercato

Consideriamo un'azienda che tramite uno studio di mercato riesce a comprendere con che frequenza i consumatori cambiano preferenza di brand di sapone liquido.

La seguente tabella mostra con che probabilità i consumatori cambiano preferenza in un mese:

Tabella 6: Quote di mercato

		Questo mese		
Scorso mese		Persil	Daz	Surf
	Persil	0,9	0,1	0
	Daz	0,2	0,7	0,1

Surf	0,1	0,1	0,8
------	-----	-----	-----

Con questi dati è possibile calcolare, ad esempio, dopo quanto tempo in media un consumatore che compra Daz cambi preferenza con Persil.

L'obiettivo è trovare $\mu_{D,P}$

$$\begin{cases} \mu_{D,P} = 1 + p_{D,D} \mu_{D,P} + p_{D,S} \mu_{S,P} = 1 + 0,7 \mu_{D,P} + 0,1 \mu_{S,P} (1) \\ \mu_{S,P} = 1 + p_{S,D} \mu_{D,P} + p_{S,S} \mu_{S,P} = 1 + 0,1 \mu_{D,P} + 0,8 \mu_{S,P} (2) \end{cases}$$

Riordinando l'equazione (2) si ottiene

$$0,2 \mu_{S,P} = 1 + 0,1 \mu_{D,P}$$

Quindi:

$$0,1 \mu_{S,P} = 0,5 + 0,05 \mu_{D,P}$$

Sostituendo in (1) si ottiene

$$\mu_{D,P} = 1 + 0,7 \mu_{D,P} + 0,5 + 0,05 \mu_{D,P}$$

Quindi:

$$0,25 \mu_{D,P} = 1,5 \text{ e } \mu_{D,P} = 6.$$

Ciò significa che un consumatore che attualmente acquista Daz, mediamente, impiega almeno 6 mesi di acquisti prima di comprare Persil. In altre parole, una volta che Persil perde un consumatore, dovrà aspettare almeno 6 mesi prima che questo torni a riacquistare il suo prodotto.

Se in un sistema sono presenti uno o più stati di assorbimento, può interessarci quale sia la probabilità per il sistema di finirci, partendo da uno stato i .

Chiamiamo $f_{i,j}$ la probabilità che il processo si trovi mai nello stato j partendo dallo stato i .

Se lo stato j è uno stato di assorbimento, $f_{i,j}$ è chiamata la probabilità di assorbimento dello stato j dallo stato i . Si presuppone che tutti gli stati del sistema siano ricorrenti, quindi $f_{i,i} = 1$ per tutti gli stati i in S .

Per poter calcolare la probabilità di assorbimento è necessario che j sia accessibile da i .

Se j non è accessibile da i e $j \neq i$ allora $f_{i,j} = 0$.

Se j è accessibile da i e $i \neq j$, $f_{i,j}$ soddisfa in modo univoco la seguente equazione:

$$f_{i,j} = p_{i,1} f_{1,j} + p_{i,2} f_{2,j} + \dots + p_{i,M} f_{M,j}$$

Se j è uno stato ricorrente e la catena di Markov è ergodica, allora $f_{i,j} = 1$ per tutti gli stati i in S .

Esempio 2 (rivisitato): Gambler's ruin

Due giocatori partecipano a un gioco in cui viene lanciata ripetutamente una moneta. Il giocatore 1 paga al giocatore 2 \$1 quando la moneta mostra testa. In caso contrario, il giocatore 2 paga al giocatore 1 \$1. Il gioco continua fino a quando uno dei due giocatori non ha più soldi. Supponiamo che il giocatore 1 inizi con 3 dollari e il giocatore 2 con 1 dollaro. Qual è la probabilità che il giocatore 2 vinca?

Formulazione

Stati: quantità di denaro che rimangono al giocatore 1

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Matrice di transizione:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Obiettivo: calcolare $f_{3,0}$

Poiché il gioco finisce una volta che uno dei due giocatori termina i soldi, gli stati 0 e 4 sono due stati di assorbimento, quindi $f_{4,0} = 0$ e $f_{0,0} = 1$

$$\begin{cases} f_{3,0} = p_{3,0}f_{0,0} + p_{3,1}f_{1,0} + p_{3,2}f_{2,0} + p_{3,3}f_{3,0} + p_{3,4}f_{4,0} & (1) \\ f_{2,0} = p_{2,0}f_{0,0} + p_{2,1}f_{1,0} + p_{2,2}f_{2,0} + p_{2,3}f_{3,0} + p_{2,4}f_{4,0} & (2) \\ f_{1,0} = p_{1,0}f_{0,0} + p_{1,1}f_{1,0} + p_{1,2}f_{2,0} + p_{1,3}f_{3,0} + p_{1,4}f_{4,0} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{3,0} = 0,5f_{2,0} & (1) \\ f_{2,0} = 0,5f_{1,0} + 0,5f_{3,0} & (2) \\ f_{1,0} = 0,5 + 0,5f_{2,0} & (3) \end{cases}$$

Sostituendo (1) e (3) in (2) si ottiene:

$$f_{2,0} = 0,25 + 0,25f_{2,0} + 0,25f_{2,0}$$

Quindi:

$$0,5f_{2,0} = 0,25 \text{ e quindi } f_{2,0} = 0,5$$

Pertanto,

$$f_{3,0} = 0,25$$

Ciò significa che il giocatore 1 ha il 25% di probabilità di perdere tutto il denaro partendo da 3 dollari.

4. Capitolo 4: Markov Chain con ricompense

Nel capitolo precedente è stato introdotto il concetto di Markov Chain, il quale è composto dalla definizione degli stati e dalla matrice di transizione. Inoltre, è stato analizzato il modo in cui, considerata la distribuzione iniziale dello stato del processo, il modello può determinare la distribuzione degli stati per un numero finito di step nel futuro. Sono state esaminate le proprietà di ergodicità e aperiodicità, che permettono al modello di calcolare la distribuzione a lungo termine degli stati. Infine, è stata valutata la capacità del modello di calcolare il periodo minimo necessario affinché il processo si sposti da uno stato all'altro, nonché la probabilità che il processo si ritrovi in uno stato specifico, partendo da un altro stato iniziale.

In questo capitolo verrà introdotto il concetto di “ricompensa” e si concentrerà su come progettare l'operatività di una MC a tempo discreto al fine di ottimizzarne le prestazioni. Per ciascuno stato della MC, ipotizziamo di poter prendere una decisione su quale delle azioni alternative debba essere intrapresa in quel determinato stato. L'azione scelta avrà un impatto sulle probabilità di transizione, così come sui costi (o ricompense) immediati e sui costi (o ricompense) successivi. Assumiamo di voler scegliere le azioni ottimali per i rispettivi stati, considerando sia i costi immediati che quelli successivi. Il processo decisionale per fare ciò è definito Processo Decisionale di Markov (*Markov Decision Process*).

Assumiamo che una ricompensa r_i venga ricevuta ogni volta che la MC si trova nello stato i .

Sia v^n_i la ricompensa totale attesa ricevuta in n passi a partire dallo stato i .

Condizionando lo stato al passo successivo:

$$v^n_i = r_i + p_{i,1} v^{n-1}_1 + p_{i,2} v^{n-1}_2 + \dots + p_{i,M} v^{n-1}_M$$

Da cui:

$$v^n = r + P v^{n-1}$$

In altre parole, la ricompensa totale in un determinato istante sarà data dalla distribuzione probabilistica della ricompensa totale dell'istante precedente, sommata (o ridotta) della ricompensa r .

Per iniziare il calcolo di v^n è necessario fare un'ipotesi su v^0 . Per semplicità, assumeremo che $v^0 = 0$

Sapendo le probabilità di transizione, e abbinata una ricompensa a ogni stato, potrebbe interessarci quale sia la ricompensa media dopo ogni step nel lungo termine (R).

Secondo il procedimento esposto nel capitolo 2.3 - *Distribuzione probabilistica degli stati e distribuzione di equilibrio*, Π è la distribuzione di lungo periodo di una MC aperiodica ed ergodica.

Se si riceve una ricompensa r_i ogni volta che la MC si trova nello stato i , la ricompensa media di lungo periodo per step è data da

$$\pi_1 r_1 + \pi_2 r_2 + \dots + \pi_M r_M.$$

Ovvero:

$$R = \sum \pi_i r_i$$

Esempio 3.1: Ciclo di vita di un prodotto

Supponiamo che un'azienda multiprodotto ogni anno categorizzi i propri brand in base alla loro performance di vendita. I prodotti sono così classificati: N per "Nuovo", SM per "Slow Mover", FM per "Fast Mover" e F per "Failed". Un prodotto classificato come "Failed" non ha possibilità di diventare né un "Fast Mover" né uno "Slow Mover", pertanto deve essere necessariamente dismesso e sostituito con un prodotto nuovo il periodo successivo.

Un prodotto appena lanciato sul mercato ha una probabilità del 50% di essere classificato come "Fast Mover" l'anno successivo e del 40% di essere classificato come "Slow Mover". Un prodotto classificato come "Fast Mover" ha una probabilità del 70% di mantenere le stesse prestazioni anche nell'anno successivo, mentre il restante 30% diventa uno "Slow Mover". Infine, un prodotto classificato come "Slow Mover" ha una probabilità del 50% di rimanere tale, mentre il 30% ha la possibilità di diventare un "Fast Mover".

Le analisi sulle vendite vengono effettuate alla fine di ogni periodo.

Quando un prodotto è classificato come *Slow Mover*, produce in media \$5 milioni di ricavi all'anno, mentre un prodotto *Fast Mover* genera \$10 milioni di ricavi nello stesso periodo. Al contrario, un prodotto classificato come *Failed* registra una perdita di \$3 milioni alla fine dell'anno. Questi valori possono essere considerati come ricompense all'interno del contesto della MC.

Formulazione

Stati: Classificazione del prodotto a inizio anno

$$S = \{N, SM, FM, F\}$$

Matrice di transizione:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & SM & FM & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ SM \\ FM \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sapendo le probabilità di transizione, possiamo calcolare la distribuzione di equilibrio Π :

$$\Pi = \{0.0958, 0.4316, 0.3768, 0.0958\}$$

Per determinare i ricavi totali dell'azienda nel lungo termine, è sufficiente moltiplicare le ricompense per la distribuzione di equilibrio della MC. Poiché non è dato sapere all'inizio del periodo le performance di un prodotto "Nuovo", possiamo considerare il suo valore atteso.

Tabella 7: Distribuzione probabilistica di lungo periodo e ricompensa attesa

	N	SM	FM	F	TOT
Π	0,0958	0,4316	0,3768	0,0958	1
r	0,6418	2,158	3,768	-0,2874	6.28

Ciò significa che, se le condizioni rimangono invariate nel tempo, l'azienda sa che i ricavi medi annuali ammonteranno a circa \$6,28 milioni.

4.1. Markov Decision Process

Mentre una MC è un sistema dinamico il cui comportamento futuro è probabilistico dipende solo dallo stato attuale, un Markov Decision Process (d'ora in avanti "MDP") è un sistema dinamico il cui comportamento probabilistico futuro dipende dallo stato attuale e dalla decisione presa (Hillier, 2009).

Le scelte effettuate in ogni stato per massimizzare le ricompense cumulative nel tempo sono definite decisioni. Il perseguimento dell'obiettivo di massimizzare le ricompense cumulative nel lungo periodo costituisce il fondamento del processo decisionale all'interno di una MDP. Si considera il trade-off tra le ricompense attuali e future per selezionare le attività che massimizzano le ricompense complessive. Il feedback derivante dalle ricompense ottenute a seguito delle azioni intraprese guida le decisioni e viene selezionata un'azione da un elenco di opzioni disponibili in ciascuno stato. Le ricompense possono essere interpretate come indicatori di efficacia delle decisioni e aiutano a regolare la strategia decisionale per massimizzare le ricompense complessive.

Generalmente, un MDP è caratterizzato da:

- Insieme degli stati: $S = \{1, 2, \dots, M\}$.
- Insieme delle decisioni: per ogni i appartenente a S , K_i è l'insieme delle possibili decisioni.
- Ricompensa immediata: per ogni stato del processo, r_i^k è la ricompensa ricevuta quando il processo si trova nello stato i e viene scelta l'azione k .
- Transizioni di stato: per ogni stato e decisione del processo, $p_{i,j}^k$ è la probabilità che il processo effettui una transizione dallo stato i allo stato j quando viene scelta l'azione k .

È importante sottolineare che in questo caso la transizione di stato differisce dalle probabilità di transizione precedentemente esaminate, in quanto dipende non solo dallo stato attuale del sistema, ma anche dalla decisione intrapresa.

Strettamente connessa al concetto di decisione in un MDP è quello della politica ottimale. In una MDP, le politiche sono strategie predeterminate che dirigono le azioni interne in ogni stato del sistema. Questi principi guida delineano il comportamento nell'ambiente e suggeriscono come gestire il sistema per massimizzare le ricompense accumulate nel tempo.

Innanzitutto, una politica in una MDP è una regola che collega un'azione da intraprendere a ogni stato del sistema (Berger, 2011).

Esistono due tipi principali di politica: la politica stocastica e la politica deterministica. La prima attribuisce un'azione specifica a ogni stato ignorando il caso, mentre la seconda assegna una distribuzione di probabilità su un insieme di azioni possibili per ogni stato, fornendo una maggiore flessibilità nell'esplorazione delle azioni (Privault e Springerlink, 2018). In questo studio verranno considerate solo politiche deterministiche.

L'obiettivo delle politiche è di massimizzare la ricompensa cumulativa attesa ottenuta nel corso del tempo, in base alla strategia perseguita. Pertanto, l'obiettivo è individuare la politica ottimale che permetta di compiere le scelte migliori in ogni stato per ottenere il massimo beneficio nel lungo termine.

Una politica stazionaria δ è una politica che prescrive una singola azione δ_i ogni volta che il processo si trova nello stato i (Berger, 2011).

Uno dei principali vantaggi di analizzare un orizzonte infinito è che spesso esiste una politica ottimale stazionaria.

Ciò significa che, nel lungo termine, se il modello di MDP presenta una certa ciclicità nelle azioni suggerite, con tutta probabilità avremo già applicato la politica ottimale che massimizza la ricompensa cumulativa attesa.

Se si considerano orizzonti temporali infinitamente lunghi, tuttavia, la ricompensa totale attesa non è adatta come criterio decisionale.

Chiamiamo K_i l'insieme di tutte le possibili decisioni effettuabili.

Supponiamo anche che per ogni stato del sistema la ricompensa sia positiva: $r_i^k > 0$ per tutti gli i e k .

Se il numero di passi n tende all'infinito, indipendentemente dalle azioni scelte, la ricompensa totale attesa sarà infinita.

In questa situazione, indipendentemente dalle politiche di ottimizzazione applicate, queste risulteranno sempre come la migliore. Per superare questo problema, è possibile utilizzare due approcci: la ricompensa media di lungo termine per step (R) e la ricompensa attesa scontata.

4.2. Ricompensa media di lungo termine per step

Chiamiamo v_i^n la massima ricompensa totale attesa di n passi quando il processo si trova inizialmente nello stato i . La ricompensa media di lungo termine per step quando il processo si trova inizialmente nello stato i sarà data da (Berger, 2011):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_i^n}{n}$$

In molti casi, la massima ricompensa media di lungo periodo per step è indipendente dallo stato iniziale.

Con questo criterio, tutta l'attenzione è rivolta al futuro remoto: le ricompense di breve termine non influenzano la politica.

Esempio 3.1: Marketing

Un'azienda classifica le vendite settimanali dei suoi prodotti come alte o basse e deve prendere decisioni riguardo alle campagne pubblicitarie da attuare. Di seguito sono riportati i dettagli delle campagne disponibili:

- Campagna 1: costo di \$2.500, con una probabilità del 50% di mantenere alte le vendite e del 25% di migliorare le vendite basse.
- Campagna 2: costo di \$7.000, con una probabilità del 70% di mantenere alte le vendite e del 50% di migliorare le vendite basse.

- Campagna 3: costo di \$5.000, con una probabilità del 66,7% di mantenere alte le vendite e del 33,3% di migliorare le vendite basse.

I ricavi settimanali previsti sono determinati come segue:

- Ricavi stimati in caso di mantenimento delle vendite alte: \$40.000; in caso contrario, \$25.000 se le vendite alte diminuiscono.
- Ricavi previsti nel caso di miglioramento delle vendite basse: \$30.000; altrimenti \$24.000 se le vendite basse sono mantenute.

Con questi dati, possiamo trovare una politica che massimizzi il profitto medio settimanale.

Formulazione

Stati: performance di vendita del prodotto all'inizio della settimana

$$S = \{H, L\}$$

Decisione: campagna di marketing da adottare:

$$K = \{1, 2, 3\}$$

Transizioni di stato:

Tabella 8: Markov Decision Process

K	Transizioni di stato con i = H		Transizioni di stato con i = L	
	p_{H, H}	p_{H, L}	p_{L, L}	p_{L, H}
1	0,5	0,5	0,75	0,25
2	0,7	0,3	0,5	0,5
3	0,667	0,333	0,667	0,333

Ricompense immediate: chiamiamo c^k il costo della campagna marketing k :

$$r^k_H = -c^k + 40p^k_{H, H} + 25p^k_{H, L}$$

$$r^k_L = -c^k + 30p^k_{L, H} + 24p^k_{L, L}$$

K	r^k_H	r^k_L
Campagna 1	30,000	26,000
Campagna 2	28,500	20,000
Campagna 3	30,005	23,002

Obiettivo: trovare la politica ottimale che massimizzi v^n_i e la ricompensa media di lungo termine per step:

Tabella 9: Ricompensa media di lungo termine per step

			Decisione se $i = H$	Decisione se $i = L$	Ricompensa di lungo termine per step	
N	v_H^k	v_L^k	d_H^n	d_L^n	v_H^n/n	v_L^n/n
0	0	0				
1	30,005	26	Campagna 3	Campagna 1	30,005	26,000
3	87,458	83,758	Campagna 3	Campagna 1	29,152	27,502
4	116,231	112,533	Campagna 3	Campagna 1	29,057	27,919
5	145,004	141,306	Campagna 3	Campagna 1	29,001	28,133
6	173,778	170,080	Campagna 3	Campagna 1	28,963	28,261
7	202,552	198,854	Campagna 3	Campagna 1	28,936	28,346
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
99	2849,718	2846,020	Campagna 3	Campagna 1	28,78503	28,74768
100	2878,492	2874,794	Campagna 3	Campagna 1	28,78492	28,74794

In questa circostanza, la politica ottimale si ha scegliendo la campagna 3 quando le vendite sono alte nella settimana precedente, mentre optando per la campagna di marketing 1 quando le vendite sono basse.

La ricompensa media per step nel lungo termine, indipendentemente dalla condizione iniziale, ammonta approssimativamente a \$29.000.

Quando applicato a un MDP, l'uso della ricompensa media a lungo termine per step offre vantaggi significativi rispetto, ad esempio, al semplice uso del valore atteso. In primo luogo, la considerazione della dinamica temporale consente di valutare le decisioni tenendo conto dell'effetto cumulativo delle ricompense nel tempo, consentendo una valutazione più accurata, poiché tiene conto degli effetti a lungo termine degli obiettivi immediati. Inoltre, l'utilizzo della ricompensa di lungo termine per step determina una prestazione più stabile rispetto al valore atteso, riducendo la varianza tra le ricompense e fornendo un quadro più chiaro della prestazione a lungo termine. Ciò corrisponde a una maggiore riduzione dell'incertezza, consentendo una pianificazione più accurata e un processo decisionale informato. Infine, la considerazione della ricompensa media di lungo termine per step incoraggia una migliore risposta alle dinamiche ambientali e alle variazioni temporali, rendendo la strategia decisionale più flessibile e adattabile.

Nei prossimi capitoli saranno applicati i concetti affrontati finora a delle situazioni reali e d'interesse manageriale.

5. Capitolo 5: Markov Decision Process nella politica dei dividendi

Il tema della politica dei dividendi continua a essere un argomento molto dibattuto nel campo della finanza aziendale. La ricerca sulla politica dei dividendi ha indicato che una teoria completa della politica dei dividendi è ancora difficile da stabilire, e inoltre le pratiche aziendali in materia di dividendi presentano variazioni nel tempo, a seconda dell'azienda e del Paese in cui opera, in particolare nei Paesi sviluppati (Al-Shattara, Al-Khasawneh e Al-Shattarat, 2012).

Modigliani e Miller (1958, 1961) affermano che, nell'ipotesi di investitori razionali e di un mercato dei capitali perfetto, il valore di mercato di un'impresa non è influenzato dalla sua politica dei dividendi. Il valore dell'impresa è determinato dalla sua capacità di guadagno e dalle sue decisioni di investimento, che non sono influenzate dalla politica dei dividendi. L'ipotesi dell'irrilevanza dei dividendi ha svolto un ruolo cruciale nel progresso dell'economia finanziaria come campo accademico.

Alcune tra le teorie più accreditate per spiegare le diverse politiche di dividendi comprendono il signalling, il costo di agenzia e il costo di transazione. I risultati della letteratura empirica indicano che la decisione di distribuire i dividendi è complessa e non può essere attribuita a un'unica teoria.

L'ipotesi del signalling si riferisce alla tendenza da parte degli investitori ad affidarsi a vari segnali e modelli di mercato come indicatori per intraprendere operazioni e posizioni. In un ambiente caratterizzato da informazioni asimmetriche, i dividendi servono al management per comunicare le proprie informazioni private all'esterno. La metodologia dello studio degli eventi viene utilizzata per analizzare l'ipotesi di segnalazione in un breve lasso di tempo, in genere pochi giorni. Questo è di estrema importanza perché, se il mercato risponde a un evento (come una variazione dei dividendi), allora questo evento sarà collegato alle informazioni che trasmette e quindi sosterrà l'ipotesi di segnalazione. Nel modello di MDP presentato in questo capitolo, verrà evidenziato come diverse politiche di dividendi possono influire sul rendimento azionario di un'azienda, a parità di altre condizioni.

Per farlo, è necessario costruire il modello a partire dalle probabilità di transizione del rendimento di un titolo. Così facendo, si assume che il mercato si muove e si comporta come un processo stocastico (Fama, 1965).

L'output del modello sarà un suggerimento circa l'ammontare di dividendi ottimale da distribuire per massimizzare il rendimento atteso del proprio titolo, tenendo in considerazione i possibili andamenti di mercato futuri e il costo opportunità dovuto alla distribuzione.

5.1. Metodologia

Il primo step per la costruzione di un MDP è il calcolo delle probabilità di transizione del sistema da uno stato a un altro. Similmente allo studio condotto da Aronsson e Folkesson (2023), è stato considerato come punto di partenza il rendimento dell'indice azionario Standard & Poor (da ora in avanti SPX500), composto dai 500 titoli delle più grandi aziende americane per capitalizzazione. Questo indice è universalmente riconosciuto come maggiormente descrittivo del mercato azionario, poiché tutti i titoli di cui è composto sono ponderati in base al valore di mercato totale delle loro azioni in circolazione.

Per rendere i risultati applicabili alle singole aziende, la matrice di transizione di base verrà poi aggiustata in base alla volatilità del singolo titolo rispetto all'indice SPX500. In questo modo, il modello si dimostra flessibile: partendo dai dati di mercato, sarà sufficiente calcolare la volatilità del titolo specifico che si intende studiare per ottenere un risultato attendibile e personalizzato, riflettendo le caratteristiche peculiari di ciascun titolo.

5.2. Raccolta dei dati

È stato considerato il periodo compreso tra aprile 2021 e aprile 2023. La scelta del periodo di tempo per i dati di test si è basata sulla loro rilevanza rispetto allo sviluppo più recente dell'indice. Pertanto, si è ritenuto che i dati riflettessero accuratamente le condizioni di mercato attuali.

I dati sono stati raccolti dal sito web di Yahoo Finance e consistono nel prezzo di chiusura giornaliero dell'SPX500 di ogni giorno lavorativo durante il periodo di tempo specificato. Il rendimento percentuale per ogni giorno è stato calcolato in base alla differenza relativa del prezzo di chiusura precedente.

Tabella 10: Dati di chiusura SPX500 nell'intervallo 1 aprile 2021 – 22 aprile 2023

Data	Chiusura	Rendim. (%)	Data	Chiusura	Rendim. (%)
01/04/2021	4019,870		...	...	...
02/04/2021	4077,910	1,44%	06/04/2023	5078,650	-1,02%
03/04/2021	4073,940	-0,10%	07/04/2023	5104,760	0,51%
04/04/2021	4079,950	0,15%	08/04/2023	5157,360	1,03%
05/04/2021	4097,170	0,42%	09/04/2023	5123,690	-0,65%
06/04/2021	4128,800	0,77%	10/04/2023	5117,940	-0,11%
07/04/2021	4127,990	-0,02%	11/04/2023	5175,270	1,12%
08/04/2021	4141,590	0,33%	12/04/2023	5165,310	-0,19%
09/04/2021	4124,660	-0,41%	13/04/2023	5150,480	-0,29%
10/04/2021	4170,420	1,11%	14/04/2023	5117,090	-0,65%
11/04/2021	4185,470	0,36%	15/04/2023	5149,420	0,63%
12/04/2021	4163,260	-0,53%	16/04/2023	5178,510	0,56%
13/04/2021	4134,940	-0,68%	17/04/2023	5224,620	0,89%
14/04/2021	4173,420	0,93%	18/04/2023	5241,530	0,32%
15/04/2021	4134,980	-0,92%	19/04/2023	5234,180	-0,14%
16/04/2021	4180,170	1,09%	20/04/2023	5218,190	-0,31%
17/04/2021	4187,620	0,18%	21/04/2023	5203,580	-0,28%
...	...	...	22/04/2023	5248,490	0,86%

5.3. Definizione degli stati

Gli stati della MC sono stati determinati classificando i rendimenti giornalieri osservati (in %), seguendo un approccio simile a quello dello studio condotto da Doubleday e Esunge (2011) e Fielitz e Bhargava (1973).

I rendimenti percentuali sono stati utilizzati al posto delle variazioni assolute di valore a causa della loro natura intuitiva e dell'uso diffuso in contesti finanziari (Fielitz and Bhargava, 1973).

In totale sono stati definiti sei stati, metà dei quali indicano un aumento e l'altra metà una diminuzione di rendimento. Ogni serie di tre stati comprende variazioni di diverso grado. I sei stati sono stati classificati come U1-U3 e D1-D3. I simboli U e D sono utilizzati per rappresentare le direzioni Up e Down, rispettivamente, mentre il valore numerico indica l'entità della variazione giornaliera, classificata come piccola, moderata o grande. Gli intervalli degli stati e le relative osservazioni raccolte sono riportati nella tabella di seguito.

Tabella 11: *Suddivisione delle osservazioni in base agli stati*

Stato	D3	D2	D1	U1	U2	U3
Intervallo di rendimento (%)	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, -0.5)$	$x \in (-0.5, 0)$	$x \in (0, 0.5)$	$x \in (0.5, 1)$	$x \in (1, \infty)$
n. di osservazioni	162	94	108	159	105	124

5.4. Considerazioni sulla selezione degli stati

Quando si specificano gli stati, è necessario considerare l'equilibrio tra la quantità di stati nel modello e il numero di osservazioni per ogni stato. Un vantaggio della catena di Markov è la sua capacità di identificare cambiamenti più precisi quando il sistema è composto da un numero maggiore di stati (Fielitz and Bhargava, 1973). Un cambiamento osservato dallo 0,25% allo 0,3% è più significativo di uno spostamento tra lo 0% e lo 0,5%. Allo stesso tempo, un numero maggiore di stati potrebbe porre problemi in termini di scarsità di singole osservazioni. Se le probabilità di transizione sono influenzate in modo significativo da singole osservazioni, l'applicabilità complessiva del modello diminuisce. Dato il trade-off tra il numero di stati e la quantità di osservazioni in ogni stato, è stata considerata adeguata una catena di Markov composta da sei stati. L'aumento del numero di stati determinerebbe un modello più adattabile, che può però comportare un overfitting, mentre un numero ridotto di stati serve come meccanismo di regolarizzazione.

Un'assunzione alla base della definizione degli stati proposti è che il rendimento giornaliero rappresenti accuratamente le fluttuazioni del mercato in quel particolare giorno. Ciò significa che il modello non considera i rendimenti infragiornalieri.

Un'altra assunzione è che le fluttuazioni del mercato azionario non siano influenzate durante il fine settimana. Di conseguenza, il movimento dal venerdì al lunedì è stato considerato equivalente a qualsiasi altro movimento nei giorni infrasettimanali.

La tabella della sezione 5.2 si presenta adesso così:

Tabella 12: *Rendimenti e rispettivi stati dell'SPX500 nell'intervallo 1 aprile 2021 – 22 aprile 2023*

Data	Rendim. (%)	Stato	Data	Rendim. (%)	Stato
01/04/2021			...	...	...
02/04/2021	1,44%	U3	06/04/2023	-1,02%	D3
03/04/2021	-0,10%	D1	07/04/2023	0,51%	U2
04/04/2021	0,15%	U1	08/04/2023	1,03%	U3
05/04/2021	0,42%	U1	09/04/2023	-0,65%	D2
06/04/2021	0,77%	U2	10/04/2023	-0,11%	D1
07/04/2021	-0,02%	D1	11/04/2023	1,12%	U3

08/04/2021	0,33%	U1	12/04/2023	-0,19%	D1
09/04/2021	-0,41%	D1	13/04/2023	-0,29%	D1
10/04/2021	1,11%	U3	14/04/2023	-0,65%	D2
11/04/2021	0,36%	U1	15/04/2023	0,63%	U2
12/04/2021	-0,53%	D2	16/04/2023	0,56%	U2
13/04/2021	-0,68%	D2	17/04/2023	0,89%	U2
14/04/2021	0,93%	U2	18/04/2023	0,32%	U1
15/04/2021	-0,92%	D2	19/04/2023	-0,14%	D1
16/04/2021	1,09%	U3	20/04/2023	-0,31%	D1
17/04/2021	0,18%	U1	21/04/2023	-0,28%	D1
...	...	...	22/04/2023	0,86%	U2

5.5. Calcolo delle probabilità di transizione

Per studiare le caratteristiche dello SPX500 negli ultimi anni, è stata costruita un'unica catena di Markov utilizzando il dataset completo (aprile 2021- aprile 2023). L'ipotesi di fondo è che vi sia omogeneità temporale in questo periodo, ovvero che le probabilità di transizione rimangano invariate indipendentemente dal giorno o dall'anno in cui avvengono i cambiamenti. Realisticamente, è improbabile che l'omogeneità temporale rimanga costante per tutto il periodo di osservazione. Tuttavia, questo prerequisito è essenziale per costruire una MC con le transizioni specifiche dello SPX500.

A ciascun giorno lavorativo è stato assegnato uno stato in base ai criteri precedentemente descritti. Sulla base dei cambiamenti di stato, è stata costruita una catena di Markov dell'indice SPX500. Le probabilità di transizione sono state calcolate utilizzando la formula:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

dove n_{ij} è il numero di transizioni dallo stato i allo stato j e n_i è la quantità di visite nello stato i (Christensen, al. 2004). In questo modo è stata ottenuta la matrice di transizione di base.

Per la definizione degli stati, la matrice di transizione consisteva in un numero limitato di stati (sei in tutto). Il risultato ha prodotto una MC finita, irriducibile e aperiodica, che soddisfa quindi i requisiti di ergodicità esposti nella sezione 2.2.

Tabella 13: Transizioni di stato osservate

Initial state	Landing State					
	D3	D2	D1	U1	U2	U3
D1	22	22	24	41	25	28
D2	15	11	16	17	14	21

D3	19	22	22	15	9	21
U1	19	17	43	41	23	15
U2	13	10	27	22	16	17
U3	20	12	30	23	18	21

Con questi dati è stato possibile costruire la seguente matrice di transizione:

Tabella 14: Matrice di transizione di base

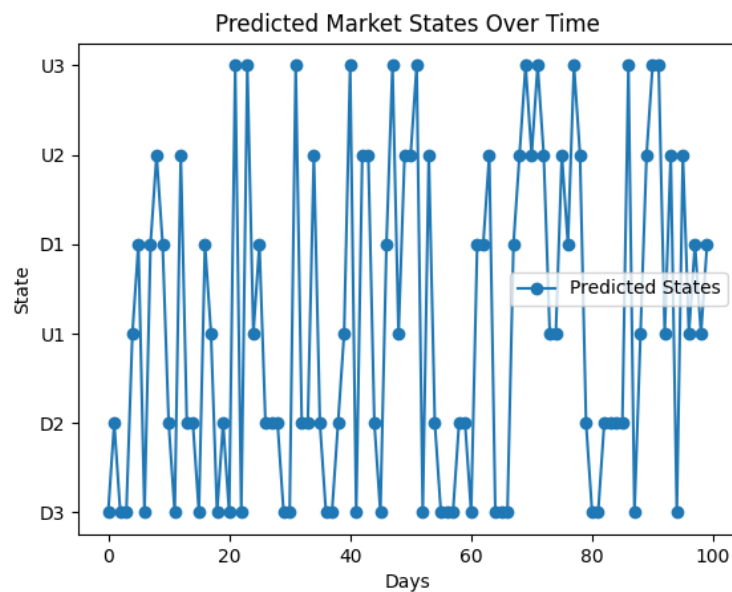
Initial state - i	Landing State - j						TOT
	D3	D2	D1	U1	U2	U3	
D3	0,1759	0,2037	0,2037	0,1389	0,0833	0,1944	1,0000
D2	0,1596	0,1170	0,1702	0,1809	0,1489	0,2234	1,0000
D1	0,1358	0,1358	0,1481	0,2531	0,1543	0,1728	1,0000
U1	0,1203	0,1076	0,2722	0,2595	0,1456	0,0949	1,0000
U2	0,1238	0,0952	0,2571	0,2095	0,1524	0,1619	1,0000
U3	0,1613	0,0968	0,2419	0,1855	0,1452	0,1694	1,0000

Ogni cella di questa tabella descrive la probabilità che il sistema passi da uno stato iniziale i a uno stato di arrivo j . La colonna TOT è il check della proprietà di Markov.

5.6. Validazione del modello predittivo

Utilizzando i risultati come dati di training, è possibile generare delle previsioni. Il codice è stato trascritto in Python, mentre i risultati sono stati visualizzati in Visual Studio Code. Ogni punto rappresenta uno stato, mentre le linee di collegamento sono le transizioni.

Figura 4: Previsioni del modello, espresse in stati del sistema



Per valutare l'affidabilità dei risultati, sono state confrontate le previsioni generate con i valori effettivi dell'indice SPX500. In particolare, sono state elaborate 200 previsioni, riferite agli ultimi 200 giorni lavorativi, utilizzati come dati iniziali. In appendice sono riportati i codici Python utilizzati.

Come misure statistiche per testare la validità del modello sono stati utilizzati il Mean Squared Error (MSE), il Root Mean Squared Error (RMSE) e il Mean Absolute Error (MAE).

L' MSE è la misura statistica della media delle differenze al quadrato tra i valori reali e previsti. Errori maggiori vengono penalizzati maggiormente, offrendo una misura della diffusione generale delle previsioni.

Il Root Mean Squared Error (RMSE) è la misura statistica che calcola la radice quadrata del Mean Squared Error (MSE). È utile per dedurre l'errore medio nelle stesse unità dei dati originali.

Il Mean Absolute Error (MAE) è la media degli errori assoluti tra i valori previsti e i livelli effettivi. Rispetto all'MSE, presenta una sensibilità relativamente minore ai valori anomali.

Tabella 15: Previsioni del modello, espresse in \$

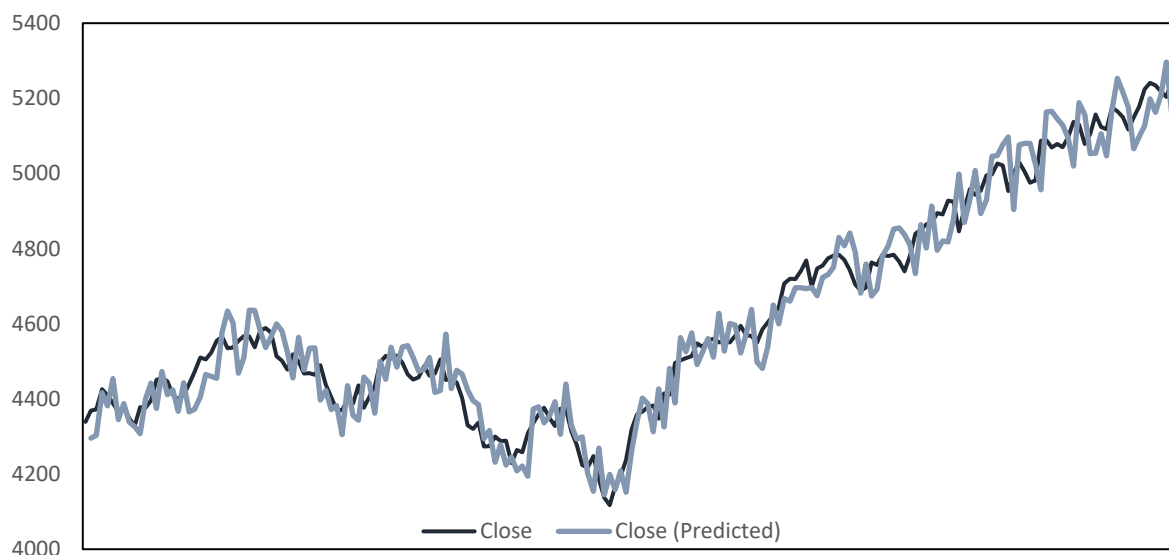
Chiusura	Chiusura (Pred.)	Chiusura	Chiusura (Pred.)
4369,01	4295,54	...	...
4372,59	4303,47	5078,65	5156,60
4425,84	4416,32	5104,76	5053,26
4409,59	4381,58	5157,36	5053,71
4388,71	4453,69	5123,69	5105,79
4365,69	4344,82	5117,94	5046,83
4381,89	4387,52	5175,27	5169,12
4348,33	4338,07	5165,31	5252,90
4328,82	4326,59	5150,48	5216,96
4378,41	4307,18	5117,09	5176,23
4376,86	4400,30	5149,42	5065,92
4396,44	4442,51	5178,51	5097,93
4450,38	4374,46	5224,62	5126,72
4455,59	4472,63	5241,53	5198,50
4446,82	4411,03	5234,18	5162,91
...	...	5218,19	5208,01
MSE		4025,45	
RMSE		63,45	
MAE		54,65	

Un MSE di 4025,45 è un valore piuttosto elevato. È fondamentale riconoscere però che l'indice SPX500 opera ad alti volumi (nell'ordine delle migliaia). Pertanto, un MSE elevato non implica sempre un modello inefficiente.

In casi di alti ordini di grandezza, è preferibile considerare l'RSME. L'errore quadratico medio, infatti, è pari a 63,45, indicando una discrepanza media di circa 63 punti indice tra i valori osservati e quelli previsti. L'errore in questione può essere considerato accettabile nell'ambito delle previsioni a breve termine, considerando la volatilità intrinseca dell'SPX500.

Un MAE di 54,65 suggerisce una deviazione media leggermente ridotta rispetto all'RMSE, indicando una distribuzione degli errori più uniforme. Ciò indica che il modello genera errori piuttosto uniformi senza fluttuazioni degne di nota.

Figura 5: Confronto tra previsioni del modello e dati reali dell'indice SPX500



Il grafico illustra il confronto tra i prezzi di chiusura reali dell'indice SPX500 (in nero) in un orizzonte temporale di 200 giorni e i valori attesi prodotti dal modello (in blu). Il modello di previsione possiede un'apprezzabile capacità di descrivere i trend di fondo.

In generale, il modello fornisce previsioni ragionevolmente precise, con una misura media dell'errore (RMSE) di circa 63 punti, che è un buon risultato data la volatilità dell'indice. L'errore quadratico medio (MSE) e il valore assoluto medio (MAE) dimostrano ulteriormente che le previsioni sono in buon accordo con le fluttuazioni reali del mercato.

5.7. Costruzione del Markov Decision Process

Una volta generata la matrice di transizione di base che rappresenta l'andamento del mercato, è possibile modificarla in base alla volatilità del titolo che si vuole studiare.

Sono state esaminate le aziende Procter & Gamble (Ticker: PG) e Netflix (Ticker: NFLX) e considerata la volatilità dei titoli per costruire due nuove matrici di transizione modificate.

Come proxy di volatilità è stato utilizzato il Beta Adjusted, calcolato come la pendenza tra i rendimenti dei titoli rispetto al rendimento dell'indice di mercato di riferimento (SPX500).

Sono stati considerati valori di chiusura settimanali in un intervallo di tempo di 2 anni (settembre 2022 – agosto 2024). Il risultato (Raw Beta) è stato poi modificato in un'ottica forward looking secondo il sistema Blume:

$$Adj\ Beta = \frac{2}{3} \times Raw\ Beta + \frac{1}{3} Beta\ di\ mercato$$

Di seguito le nuove matrici di transizione, aggiustate secondo i beta delle aziende. In appendice è possibile trovare il codice Python utilizzato per modificare la matrice di base.

Tabella 16: Matrice di transizione Procter&Gamble (PG)

Company	Procter & Gamble						
Ticker	PG						
Beta Adj	0,63						
Initial state - <i>i</i>	Landing State - <i>j</i>						TOT
	D1	D2	D3	U1	U2	U3	
D3	0,2274	0,1910	0,1910	0,1302	0,0781	0,1823	1,0000
D2	0,2857	0,1302	0,1374	0,1460	0,1203	0,1804	1,0000
D1	0,2172	0,2172	0,1473	0,1825	0,1113	0,1246	1,0000
U1	0,1562	0,1398	0,3535	0,2096	0,0853	0,0556	1,0000
U2	0,1451	0,1116	0,3013	0,2455	0,1110	0,0856	1,0000
U3	0,1723	0,1034	0,2585	0,1982	0,1551	0,1125	1,0000

Tabella 17: Matrice di transizione Netflix (NFLX)

Company	Netflix						
Ticker	NFLX						
Beta Adj	1,26						
Initial state - <i>i</i>	Landing State - <i>j</i>						TOT
	D1	D2	D3	U1	U2	U3	
D3	0,1512	0,2098	0,2098	0,1431	0,0858	0,2003	1,0000
D2	0,1221	0,1044	0,1820	0,1934	0,1592	0,2389	1,0000

D1	0,1082	0,1082	0,1376	0,2817	0,1718	0,1924	1,0000
U1	0,1056	0,0945	0,2391	0,2657	0,1786	0,1165	1,0000
U2	0,1136	0,0874	0,2360	0,1923	0,1630	0,2076	1,0000
U3	0,1569	0,0941	0,2353	0,1804	0,1412	0,1920	1,0000

Le matrici risultanti mostrano una varianza rispetto al mercato proporzionale al beta applicato. L'assunzione di base è che, all'aumentare della volatilità di un titolo, il suo comportamento tende a discostarsi sempre più da quello del mercato. Di conseguenza, le aziende con un beta inferiore presentano un comportamento più allineato al mercato, riducendo il rischio stocastico associato alle fluttuazioni del mercato stesso.

5.8. Definizione delle decisioni

Sono state stabilite le decisioni basate su diverse politiche di distribuzione degli utili. Sono state impostate cinque distinte politiche di dividendo:

$$K = \{pay_0, pay_25, pay_50, pay_75, pay_100\}$$

pay_0 indica la scelta di non distribuire dividendi; pay_25 indica l'assegnazione del 25% dell'EPS (Earning per Share) come dividendo; pay_50, che prevede un payout del 50%; pay_75, in cui il 75% dell'EPS viene distribuito agli azionisti; e pay_100, che prevede la distribuzione del 100% degli utili come dividendo.

5.9. Definizione delle ricompense immediate

La ricompensa immediata è stata definita come la somma di tre componenti principali:

$$r_i^k = \text{Capital gain} - \text{cashout} - \text{costo opportunità}$$

Capital gain: è la differenza tra il prezzo dell'azione al tempo t_1 e il prezzo attuale dell'azione al tempo t_0 , determinato secondo il Dividend Discount Model (DDM).

$$P_0 = \left(\frac{Div_1 + P_1}{1 + r_e} \right)$$

Ai fini dell'analisi, è stato ipotizzato che il costo del capitale delle aziende r_e rimanesse costante nel tempo.

Il cashout è il flusso di cassa generato dalla distribuzione dei dividendi, determinato moltiplicando la decisione di payout per l'utile per azione (EPS) dell'anno di riferimento. Dal punto di vista dell'azienda, distribuire i dividendi rappresenta un esborso monetario, quindi con segno negativo.

Il costo opportunità si riferisce invece al mancato reinvestimento dovuto dalla distribuzione del dividendo. È calcolato come il prodotto il dividendo emesso nell'anno

di riferimento per il rendimento del capitale investito (ROI) della società. Questo dato quantifica la perdita prospettica derivante dall'incapacità di reinvestire i guadagni dispersi per produrre ulteriori profitti attraverso nuovi investimenti.

La ricompensa immediata per step è quindi definita dalla seguente formula:

$$Reward_t = \overbrace{[P_t(1 + re) - EPS_{t+1} \cdot x]}^{Capital\ Gain} - P_t - \underbrace{EPS_t \cdot x}_{Cashout} - \overbrace{\frac{EPS_t \cdot x \cdot ROI}{1 + re}}^{Costo\ opportunità}$$

5.10. Risultati

La tabella seguente riassume i risultati del modello.

Tabella 18: Risultati del modello - Procter&Gamble

Azienda		PG
Equity Value iniziale (Mld)		\$403,7
Beta Adj.		0,63399
Initial state - i	Decisione ottimale di lungo periodo	Equity Value attualizzato (Mld)
D3	Pay 25	\$465,12
D2	Pay 25	\$468,58
D1	Pay 25	\$470,89
U1	Pay 25	\$475,06
U2	Pay 25	\$477,91
U3	Pay 50	\$480,04
Numero di iterazioni		100
Errore		7,74

Sono state performati 100 iterazioni del modello. Questo numero è sufficiente per assicurare una buona affidabilità del risultato, che necessita di diversi step prima di identificare la politica ottimale.

In quasi tutti gli scenari di mercato, il modello suggerisce una politica di distribuzione dei dividendi prudente, in particolare raccomandando un payout del 25% degli utili (Pay 25). Ciò significa che, quando il mercato o la performance della società sono negativi (D1, D2, D3) o moderatamente positive (U1, U2), il modello consiglia di conservare una percentuale consistente degli utili per reinvestirli. Per costruzione, il modello cerca il valore atteso maggiore calcolato come il capital gain, diminuito del cashout dovuto al pagamento dei dividendi e al costo opportunità dovuto dal mancato reinvestimento degli

stessi internamente. Considerando che la scelta ottimale si rivela essere un dividendo del 25%, l'azienda, data la sua capacità contenuta di generare sovra reddito dagli investimenti, avrà un ritorno maggiore nel dividere parte del risultato netto agli azionisti, piuttosto che nel trattenere ricchezza. Inoltre, considerando anche il tasso di EPS di PG alla data dell'analisi (0,12%), è chiaro come anche un lieve aumento ipotetico del suo stock price generi molto più valore (in capitalizzazione di mercato) rispetto al reinvestimento degli utili, in quanto proporzionalmente inferiori.

Il risultato si dimostra consistente con l'ipotesi di indipendenza tra rendimenti attesi e ammontare di utili distribuiti di Mrzygłód e Nowak (2017) e Tao (2009). Risulta quindi corretto affermare che i rendimenti tendono ad assumere trend positivi quando le aziende dichiarano l'intenzione di pagare dividendi, ma questo trend non è allo stesso tempo correlato con l'effettivo ammontare del dividendo stesso.

Il modello suggerisce poi un payout maggiore, pari al 50% (Pay 50), solo quando l'azienda registra ottime performance o le condizioni di mercato sono ottimali (U3). In questo caso, il modello ha individuato una convenienza nell'aumentare il payout di un ulteriore 25%. L'interpretazione di questo risultato può risiedere nella matrice di transizione: lo stato U3, come esposto nella sezione 5.6, rappresenta lo stato di massima positività del modello. La probabilità di rimanere in uno stato ugualmente positivo o di poco inferiore (U2, U1) risulta essere inferiore rispetto alla probabilità di registrare una diminuzione in negativo del rendimento azionario. Se ci si aspetta che il titolo perda di valore, allora all'azienda converrà aumentare il dividendo, nella speranza che il capital gain ottenuto dall'aumento stesso possa "tamponare" gli effetti negativi e le perdite in capitalizzazione di mercato. Un'altra interpretazione, più semplicistica, potrebbe essere che l'azienda, trovandosi in condizioni estremamente favorevoli, possa "permettersi" il cashout dovuto alla distribuzione.

Il valore normalizzato del capitale proprio aumenta gradualmente dagli stati inferiori a quelli superiori, stabilizzandosi a un range tra \$465,12 e \$480,04.

In periodi di scarsa performance o di stagnazione economica, il modello enfatizza il valore del reinvestimento rispetto al pagamento di dividendi più consistenti. Durante i periodi di crisi, l'azienda si assicura di avere liquidità sufficiente per il reinvestimento.

L'analisi suggerisce chiaramente le politiche di dividendo conservative. Utilizzando questa strategia, l'azienda può trovare un equilibrio tra le esigenze di reinvestimento e le ricompense per gli azionisti.

Di seguito i risultati dell'analisi del titolo NFLX, che presenta un beta adj. molto superiore rispetto al precedente.

Tabella 19: Risultati del modello - Netflix

Azienda		NFLX
Equity Value iniziale (Mld)		\$298,41
Beta Adj.		1,26454
Initial state - <i>i</i>	Decisione ottimale di lungo periodo	Equity Value attualizzato (Mld)
D3	Pay 0	\$238.52
D2	Pay 0	\$239.84
D1	Pay 0	\$240.88
U1	Pay 0	\$243.12
U2	Pay 0	\$244.73
U3	Pay 0	\$246.09
Numero di iterazioni		100
Errore		3,133

I risultati sono diversi rispetto ai precedenti. Il modello suggerisce che la scelta ottimale in questo caso sia non distribuire mai i propri utili. È interessante notare come il risultato rispecchi la reale politica di dividendi di Netflix stessa, la quale non ha mai emesso dividendi da quando il suo titolo è quotato al NASDAQ.

Rispetto a Procter&Gamble, il beta di Netflix è pari a 1,26454, ossia il suo titolo mostra un grado di volatilità notevolmente superiore. Ciò implica che, sia in periodi di espansione che di contrazione, le variazioni del prezzo delle azioni di Netflix sono più sensibili alle variazioni del mercato nel suo complesso.

Il risultato del modello suggerisce che, indipendentemente dalle condizioni di mercato, l'azienda debba reinvestire il 100% dei propri utili, senza distribuirli. Ciò è coerente con tutti gli stati del mercato, dal più negativo (D3) al più positivo (U3), un risultato del tutto diverso dalla situazione di PG, dove il modello suggeriva una strategia più equilibrata di distribuzione e reinvestimento dei dividendi.

L'interpretazione del risultato è parzialmente attribuibile al suo ritorno sull'investimento. L'azienda Netflix, al momento dell'analisi, registrava un ROI del 24%. Una capacità così elevata di generare sovra reddito rende più conveniente destinare i risultati d'esercizio allo sviluppo di nuovi progetti, che hanno un valore atteso superiore rispetto al capital gain atteso da un aumento del dividendo.

Tuttavia, il fattore determinante per un risultato così differente rispetto al precedente è la volatilità del titolo azionario. Un'azienda con un beta superiore a 1, come detto precedentemente, vede il proprio prezzo per azione muoversi più che proporzionalmente rispetto al mercato. Al contrario, un beta tra 0 e 1 assorbe più facilmente scostamenti dell'economia, rimanendo generalmente più stabile. Questa maggiore rischiosità spiega la convenienza nel trattenere capitali piuttosto che distribuirli.

Inoltre, il valore azionario stimato di Netflix diminuisce costantemente in tutti gli stati, passando da un valore iniziale di \$298,41 miliardi a un range di 238,52 miliardi di dollari nello scenario peggiore (D3) a 246,09 miliardi di dollari nello scenario migliore (U3). Ciò significa che il modello ha individuato nei dati attuali dell'azienda un trend negativo.

Il suggerimento del modello che una società ad alta beta come Netflix mantenga tutti gli utili è coerente con l'ipotesi secondo cui le aziende in settori in forte crescita o in settori ad alta volatilità dovrebbero dare priorità al reinvestimento.

5.11. Analisi di sensitività

Lo scopo dell'analisi di sensitività è quello di valutare la stabilità dei risultati del modello al variare degli input. Saranno esaminati in particolare come le variazioni di due importanti variabili, il costo del capitale e il rendimento dei nuovi investimenti, i risultati. La seguente analisi è stata condotta sui dati di Procter&Gamble.

Tabella 20: Analisi di sensitività - Procter&Gamble

	ROI									
	9.25%	9.50%	9.75%	10.00%	10.25%	10.50%	10.75%	11.00%	...	12.00%
D3	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	...	pay_25
D2	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	...	pay_25
D1	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	...	pay_25
U1	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	...	pay_25
U2	pay_50	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	pay_25	...	pay_25
U3	pay_50	pay_50	pay_50	pay_50	pay_50	pay_50	pay_50	pay_50	...	pay_25

Il risultato del modello cambia molto in base ROI dell'azienda: raggiunto un certo ritorno sull'investimento (in questo caso 12%), per l'azienda è più conveniente reinvestire maggiormente i propri guadagni internamente, anche in condizioni di ottime performance (U3). Questo perché nel modello, oltre al pagamento del dividendo stesso, viene considerata come ricompensa immediata per step anche il costo opportunità associato al mancato reinvestimento.

Al contrario, per valori inferiori di ROI (9,25%), all'azienda conviene aumentare gradualmente il proprio dividendo anche quando si registrano performance più contenute (U2), oppure quando le condizioni di mercato sono più sfavorevoli.

La seguente tabella analizza invece i risultati del modello in base agli utili per azione (EPS):

Tabella 21: Analisi di sensitività - Procter&Gamble

	EPS						
	0,05%	0,12%	0,62%	1,12%	1,62%	2,12%	2,62%
D3	pay50	pay25	pay0	pay0	pay0	pay0	pay0
D2	pay50	pay25	pay25	pay0	pay0	pay0	pay0
D1	pay50	pay25	pay25	pay0	pay0	pay0	pay0
U1	pay50	pay25	pay25	pay0	pay0	pay0	pay0
U2	pay50	pay25	pay25	pay0	pay0	pay0	pay0
U3	pay50	pay50	pay0	pay0	pay0	pay0	pay0

L'azienda ad oggi registra un EPS del 0,12%. Il risultato della sensitivity mostra che, con utili più alti, l'azienda dovrebbe trattenere tutti gli utili anziché distribuirli.

Questo risultato è poco rappresentativo della realtà, in quanto un'azienda che riesce a generare maggiori profitti, dovrebbe essere più disposta a concederne una percentuale ai propri azionisti.

Per costruzione, il modello analizza le politiche di dividendi in 4 scaglioni: 0%, 25%, 50%, 75% e 100%. Questi scaglioni potrebbero essere eccessivamente ampi per studiare piccole variazioni nell'EPS, specialmente se si considerano aziende con alte capitalizzazioni di mercato come P&G, che generano un EPS molto ridotto confrontato con il loro stock price.

Il risultato cambia se gli scaglioni vengono ridotti:

Nuovi parametri	Label	Valore
Payout 0%	pay0	0%
Payout 0,5%	pay0,5	0,5%
Payout 1%	pay1	1%
Payout 1,5%	pay1,5	1,5%
Payout 2%	pay2	2%

Tabella 22: Analisi di sensitività - Procter&Gamble

EPS							
0,05%	0,12%	0,62%	1,12%	1,62%	2,12%	...	6,12%

D3	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5
D2	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5
D1	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5
U1	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5
U2	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5
U3	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	...	pay0,5

Adottando incrementi più piccoli (0%, 0,5%, 1%, 1,5% e 2%), rispetto ai precedenti 0%, 25%, 50%, 75% e 100%, il risultato è simile.

In condizioni di valori di EPS molto bassi, come il caso base dell'analisi (0,12%), il modello consiglia costantemente un payout di dividendi più elevato, pari all'1,5%, in tutti gli stati del sistema.

Con l'aumento EPS a più del 2%, il modello si adatta a una distribuzione di dividendi dell'1%, indicando una strategia più equa di distribuzione di liquidità agli azionisti e di mantenimento di una parte degli utili da reinvestire. La transizione osservata implica che, con l'aumento degli utili dell'azienda, l'approccio più efficace è quello di destinare una quota maggiore di profitti al reinvestimento.

Per valori di utile per azione superiori al 4,12%, il modello preferisce progressivamente pagamenti inferiori (0,5%). Il risultato è coerente con l'ipotesi secondo cui una società che vede una robusta crescita degli utili dovrebbe sfruttare le prospettive di reinvestimento invece di destinare la maggior parte degli utili agli azionisti (Murphy, 1967).

Di seguito la stessa analisi svolta anche con i dati di Netflix:

Tabella 23: Analisi di sensitività - Netflix

	EPS								
	0,27%	0,77%	1,27%	1,77%	2,27%	2,77%	...	5,27%	5,77%
D3	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5
D2	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5
D1	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5
U1	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5
U2	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5
U3	pay1,5	pay1,5	pay1,5	pay1	pay1	pay1	...	pay0,5	pay0,5

I risultati sono simili ai precedenti: con scaglioni di dividendi inferiori, il modello analizza più nello specifico e con più precisione le ricompense immediate, poiché la varianza fra di esse è inferiore.

Le decisioni rimangono consistenti anche per il titolo NFLX: a parità di altre condizioni, (ROI, costo del capitale) per EPS inferiori, è consigliabile consigliato adottare una politica di dividendi proporzionalmente maggiore rispetto a condizioni di EPS maggiori. Questo risultato può risultare fraintendibile: diminuire il dividend yield all'aumentare degli EPS non significa che l'azienda dovrebbe diminuire l'ammontare dei dividendi per azione in caso di performance migliori. Un aumento di EPS, lasciando il tasso di dividendo invariato, comporta ugualmente un aumento nominale della remunerazione degli azionisti. Al graduale aumento degli EPS, quindi, aumenterà proporzionalmente anche l'ammontare del dividendo, se il tasso rimane invariato.

Il risultato del modello suggerisce però che esiste un valore massimo, in valore nominale del dividendo, oltre il quale non risulta più conveniente distribuire i dividendi. Ne consegue che, posto che questo limite rimanga invariato, all'aumentare degli EPS, l'unico modo che l'azienda ha per non superare il limite di dividendo non può che essere distribuire una percentuale inferiore di utili.

Questo risultato conferma l'analisi condotta da Kumar et al. (2023). Nel suo studio "*The Influence of Dividend Policy on Earnings Per Share (EPS) in Nifty Companies*" evidenzia una correlazione negativa tra EPS e tasso di dividendo. La ricerca indica che, per conciliare la crescita interna con la soddisfazione degli azionisti, le società scelgono di reinvestire una percentuale maggiore dei loro utili invece di aumentare continuamente i dividendi nominali. Se ne deduce che, invece di guardare al singolo dividendo totale pagato per azione, gli azionisti pongano l'attenzione al dividendo totale prodotto dalla società.

5.12. Considerazioni finali sulla metodologia

Questo studio non è esente da limitazioni. L'assunzione che le probabilità di transizione siano universalmente applicabili e statiche nel tempo presuppone che il mercato, nel futuro, si comporti come nel passato, e che il suo andamento sia riducibile a un random walk (Fama, 1965). Inoltre, si assume che il rendimento dei titoli azionari siano il riflesso, più o meno preciso (in base alla loro volatilità) del mercato stesso, e che quindi l'aumento o la diminuzione di uno stock price sia puramente un processo stocastico. Inoltre, seppure largamente utilizzate, le Markov Chain sono pure sempre una semplificazione della realtà.

Modelli più complessi come le Markov Chain di ordine maggiore al primo (come quella utilizzata in questa ricerca), che analizzano transizioni di stato che avvengono in due o più periodi di osservazione, o ancora modelli come Hidden markov Chain, che analizzano la dipendenza tra una variabile osservabile (come lo stock price) e una variabile nascosta (come l'andamento dell'economia di fondo), possono essere più comprensivi delle dinamiche reali, infittendo il modello di più variabili esplicative.

6. Capitolo 6: Markov Decision Process nella struttura finanziaria

Le decisioni in merito alla struttura patrimoniale aziendale, ossia la composizione di debito e equity, sono fondamentali per il benessere finanziario e gli obiettivi strategici aziendali. Diverse teorie, come la teoria del trade-off e la teoria dell'ordine di priorità, propongono diverse soluzioni su come si possa influire sulle decisioni di liquidità delle imprese. Nella pratica, tuttavia, le imprese possono discostarsi dalle strutture di capitale previste a causa della diversa redditività, delle condizioni di mercato e della disponibilità di finanziamenti esterni (Fischer et al, 1989, Leland, 1994).

Questo capitolo presenta un modello previsionale che utilizza le MC per analizzare le possibili decisioni specificatamente riferite al rifinanziamento del capitale di debito, ad esempio obbligazionario.

Il momento e le condizioni in cui le società scelgono di emettere o richiamare le obbligazioni sono una tematica importante nella definizione della struttura finanziaria. Il management spesso si trova a dover scegliere se emettere nuovo debito, rifinanziare le passività correnti o rimandare l'emissione in previsione di un miglioramento delle condizioni di mercato (Bierman, 1966).

Jung, Kim Stulz (1966) e Bierman (1966) formalizzano per la prima volta la decisione di rimborsare le obbligazioni in circolazione come una MC, in cui le imprese valutano la probabilità di future fluttuazioni dei tassi di interesse per determinare l'opzione di rimborso più vantaggiosa. Questo fenomeno presenta l'incertezza come fattore determinante: i tassi di interesse futuri sono incerti e le imprese devono valutare i vantaggi di un'azione tempestiva rispetto ai rischi di un ritardo in attesa di circostanze migliori.

Inoltre, la teoria del trade-off propone che le aziende mantengano un rapporto di indebitamento target che bilanci efficacemente i vantaggi fiscali del debito con il rischio di default. Il raggiungimento di questo equilibrio è ulteriormente ostacolato dalla volatilità delle condizioni di mercato e della redditività interna.

L'utilizzo di un MDP per prendere decisioni circa la struttura finanziaria presuppone l'ipotesi che l'azienda consideri l'emissione o il rifinanziamento del debito come un processo puramente stocastico.

Un esempio è il modello di Bierman (1966), che imposta come stati del suo sistema markoviano proprio i possibili tassi di interesse. Con il suo metodo, è possibile valutare

il valore attuale previsto delle riduzioni dei costi per interessi derivanti dall'emissione di nuove obbligazioni o dal rimborso del debito corrente in diverse fasi temporali.

Tuttavia, il modello di Bierman presenta delle limitazioni. Un ostacolo notevole è rappresentato dalla stima delle probabilità di transizione. L'inclusione di dati storici può migliorare l'accuratezza di queste probabilità. Inoltre, l'autore adotta dei tassi di interesse ipotetici molto bassi, che nella realtà possono essere applicati solamente a un campione di aziende molto ristretto.

Questo studio si propone ampliare e continuare il lavoro svolto da Bierman, rendendo il modello più flessibile e applicabile alla realtà.

6.1. Metodologia – selezione dei tassi di interesse

Per determinare i costi del debito sono stati utilizzati gli spread collegati ai rating specifici per le società a grande capitalizzazione (capitalizzazione di mercato superiore ai 5 miliardi). I dati di riferimento sono disponibili sul sito personale di Aswath Damodaran.

Tabella 24: Credit Spread in base al rating di un titolo

<i>For larger firms (market cap > \$5 billion)</i>	
<i>Rating is</i>	<i>Spread is</i>
D2/D	20.00%
C2/C	17.00%
Ca2/CC	11.78%
Caa/CCC	8.51%
B3/B-	5.24%
B2/B	3.61%
B1/B+	3.14%
Ba2/BB	2.21%
Ba1/BB+	1.74%
Baa2/BBB	1.47%
A3/A-	1.21%
A2/A	1.07%
A1/A+	0.92%
Aa2/AA	0.70%
Aaa/AAA	0.59%

A seconda del rating delle società, quindi, gli spread creditizi cambiano.

Per ottenere il costo del debito r_d basta aggiungere a ogni spread un risk free rate (r_f). Il tasso privo di rischio scelto per questo studio è il rendimento del titolo del Tesoro americano con maturity di 10 anni, ampiamente utilizzato come benchmark di tasso risk-free.

6.2. Definizione degli stati

Sono stati scelti come stati del sistema i rating di Standard & Poor's (S&P). Questi valutano il merito di credito delle società ed esprimono il grado di rischio di insolvenza legato alle loro obbligazioni. I rating forniti da S&P classificano le imprese come segue (FitchRatings.com):

- AAA: la più bassa aspettativa di rischio di insolvenza, assegnati solo in caso di capacità eccezionalmente solida di adempiere agli impegni finanziari. È altamente improbabile che questa capacità sia influenzata negativamente da eventi prevedibili;
- AA: aspettative di rischio di insolvenza molto basso. Forte capacità di pagamento degli impegni finanziari. Questa capacità non è significativamente vulnerabile agli eventi prevedibili;
- A: basse aspettative di insolvenza. La capacità di pagamento degli impegni finanziari è considerata forte. Tuttavia, questa capacità può essere più vulnerabile alle condizioni economiche o commerciali avverse rispetto a quanto avviene per i rating più elevati;
- BBB: aspettative di rischio di insolvenza attualmente basse. La capacità di pagamento degli impegni finanziari è considerata adeguata, ma è più probabile che condizioni economiche o commerciali avverse possano compromettere tale capacità;
- BB: elevata vulnerabilità al rischio di insolvenza, in particolare in caso di variazioni avverse delle condizioni commerciali o economiche nel tempo;
- B: rischio di insolvenza significativo, ma rimane un certo margine di sicurezza.
- CCC/CC/C: classificate comunemente come obbligazioni “spazzatura”, rischio di default significativamente elevato;
- D: imprese che hanno già raggiunto l'inadempienza nei pagamenti.

I rating CCC/CC/C sono raggruppati in un'unica categoria “junk” per includere le imprese con gravi difficoltà finanziarie e la massima probabilità di insolvenza.

La categoria D è esclusa dal modello. Dopo che una società va in default, si presume che il risanamento finanziario possa essere raggiunto solo attraverso interventi esterni, come ristrutturazioni o salvataggi. Pertanto, D sarebbe considerato uno stato assorbente.

Il modello comprende un totale di sette stati:

$$S = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC/CC/C\}$$

6.3. Definizione delle probabilità di transizione

Le probabilità di transizione utilizzate in questo modello si basano sui dati pubblicati da Standard & Poor's nel 2023. Il campione usato fa riferimento ai dati di rating in un periodo temporale dal 1981 al 01/01/2023. S&P calcola le probabilità di transizione in modo molto simile al metodo esposto nella sezione 5.5. Come transizione viene inteso il confronto tra il rating di un'azienda all'inizio del periodo, con il rating alla fine dello stesso periodo. Un'azienda che ha mantenuto il rating per più di un anno viene conteggiata più volte, in base al numero di anni in cui è stata valutata. Tutte le aziende valutate nel 1981 che erano ancora valutate al 1° gennaio 2023 hanno avuto quindi 43 transizioni, mentre le società valutate per la prima volta al 1° gennaio 2023 ne hanno avuta solo una. I rating vengono inoltre considerati ignorando eventuali variazioni infrannuali. Ad esempio, se un'entità inizia il 2023 con un rating “A”, viene declassata a metà anno a “BBB” e poi aggiornata ad “A” entro la fine dell'anno, sarà conteggiata solo tra le aziende che hanno iniziato e concluso l'anno con un rating “A”. Analogamente, le inadempienze o i ritiri nel corso dell'anno sono trattati come transizioni a “D” o “NR”, rispettivamente. Di seguito la matrice di transizione di base utilizzata per il modello.

Tabella 25: Matrice di transizione dei credit ratings

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	87,26%	8,94%	0,51%	0,03%	0,10%	0,03%	0,05%	0,00%	3,08%
AA	0,46%	87,63%	7,57%	0,45%	0,05%	0,06%	0,02%	0,02%	3,76%
A	2,00%	1,50%	89,21%	4,72%	0,24%	0,10%	0,01%	0,05%	4,14%
BBB	0,00%	0,07%	3,08%	87,13%	3,28%	0,41%	0,09%	0,14%	5,80%
BB	0,01%	0,02%	0,10%	4,46%	78,59%	6,40%	0,51%	0,57%	9,33%
B	0,00%	0,02%	0,06%	0,15%	4,46%	75,03%	4,85%	2,98%	12,46%
CCC/C	0,00%	0,00%	0,08%	0,14%	0,43%	13,34%	44,95%	25,98%	15,08%

In questa matrice sono presenti gli stati “D” e “NR”. Come detto in precedenza, lo stato D è da intendersi come uno stato di assorbimento: una volta che un’azienda diventa insolvente, non ha più modo di tornare a esserlo se non tramite operazioni di finanza straordinaria. Allo stesso modo, lo stato NR non può essere considerato nella matrice finale, poiché riferito a una condizione di delisting aziendale. Non sono specificate le probabilità di transizione di un’azienda delisted, pertanto questo stato verrà ignorato. La matrice risultante dall’esclusione dei due ridistribuisce la probabilità negli altri stati nel sistema, mantenendo però valida la proprietà di Markov.

Tabella 26: Matrice di transizione modificata dei credit ratings

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	Check
AAA	0,9003	0,0922	0,0053	0,0003	0,0010	0,0003	0,0005	1
AA	0,0048	0,9105	0,0787	0,0047	0,0005	0,0006	0,0002	1
A	0,0205	0,0153	0,9124	0,0483	0,0025	0,0010	0,0001	1
BBB	0,0000	0,0007	0,0327	0,9263	0,0349	0,0044	0,0010	1
BB	0,0001	0,0002	0,0011	0,0495	0,8723	0,0710	0,0057	1
B	0,0000	0,0002	0,0007	0,0018	0,0527	0,8872	0,0573	1
CCC/C	0,0000	0,0000	0,0014	0,0024	0,0073	0,2263	0,7626	1

È noto che le aziende abbiano rapporto debito – equity target (Hovakimian, Hovakimian e Tehranian, 2004). Questo rapporto influisce direttamente sul costo del capitale proprio (WACC) aziendale, che non è altro che la somma ponderata tra il costo dell’equity r_e e il costo del debito r_d .

È ipotizzabile quindi che le aziende possano avere anche un costo del debito target (Bierman, 1966).

Integrando il tasso di interesse desiderato nel modello, la struttura della matrice di transizione viene modificata. In particolare, quando si raggiunge il tasso di interesse target, o un tasso inferiore, la probabilità di passare in quella condizione aumenta a 1. Questo trasforma essenzialmente il tasso obiettivo in uno stato di assorbimento. Una volta raggiunto il target, non sono previste altre transizioni verso altri stati.

Questa modifica semplifica le future transizioni di stato e concentra il modello sul tasso di interesse prestabilito che avvia il processo di rimborso, evitando così di considerare ulteriori diminuzioni dei tassi oltre il livello desiderato.

6.4. Definizione delle decisioni

Si suppone che il management sia di fronte a due scelte: rifinanziare il debito al tasso di interesse corrente (che può essere maggiore o minore del tasso di interesse iniziale al quale il debito è stato contratto), oppure aspettare condizioni esterne più favorevoli.

La decisione si concentra quindi sul tasso di interesse di pareggio (breakeven) che rende vantaggioso il rifinanziamento, data l'incertezza dei tassi di interesse futuri.

Il risultato del modello diventa più interessante se inteso non come la decisione sul se o quando rifinanziare, ma piuttosto sull'identificazione del tasso di interesse “trigger” che dovrebbe attivare l'azione di rifinanziamento.

6.5. Definizione delle ricompense immediate

La ricompensa immediata è stata definita come il valore attuale netto atteso del risparmio di interesse in caso di rifinanziamento, al netto dello scudo fiscale.

$$r_i^k = (VA \text{ risparmio di interessi atteso}) \cdot (1 - \text{Tax rate})$$

il tax rate di riferimento è il corporate tax rate marginale globale statunitense, disponibile sul sito web di Aswath Damodaran.

6.6. Risultati

Ipotizziamo che l'azienda Alfa abbia emesso nell'anno t del debito obbligazionario per €100 Mln, con scadenza a 10 anni. Supponiamo che il suo rating al momento dell'emissione sia BBB e che abbia un interesse target del 8,3% (rating A). Di seguito le probabilità per 10 iterazioni (gli anni di maturità del titolo obbligazionario) dati questi input:

Tabella 27: Iterazioni del modello – evoluzione delle probabilità di transizione in 10 anni

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0,0000	0,0007	0,0007	0,9263	0,0349	0,0044	0,0010
2	0,0000	0,0014	0,0014	0,8598	0,0630	0,0106	0,0021
3	0,0000	0,0019	0,0019	0,7996	0,0855	0,0181	0,0034
4	0,0000	0,0024	0,0024	0,7450	0,1034	0,0264	0,0049
5	0,0001	0,0027	0,0027	0,6953	0,1176	0,0351	0,0065
6	0,0001	0,0030	0,0030	0,6499	0,1288	0,0440	0,0083
7	0,0001	0,0033	0,0033	0,6085	0,1374	0,0529	0,0102
8	0,0001	0,0035	0,0035	0,5706	0,1439	0,0616	0,0122

9	0,0001	0,0037	0,0037	0,5358	0,1488	0,0702	0,0142
10	0,0002	0,0038	0,0038	0,5039	0,1523	0,0784	0,0162

Al tempo 0, l'azienda ha un rating di BBB; quindi, la distribuzione iniziale di probabilità è descritta dal vettore:

$$\pi^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Di seguito, i risparmi attesi in caso di rifinanziamento:

Tabella 28: Iterazioni del modello – risparmi attesi in caso di rifinanziamento e rating di partenza BBB

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C
0	0	0	0	1	0,00	0,00	0
1	0	1,784178	0,917161	0	-51,39	-29,12	-20,9522
2	0,019942	3,215403	1,655738	0	-90,99	-70,04	-46,3116
3	0,052324	4,29746	2,216745	0	-119,65	-116,82	-76,4179
4	0,09019	5,031445	2,599819	0	-138,03	-163,78	-110,078
5	0,127037	5,415913	2,803283	0	-146,61	-205,35	-144,616
6	0,156732	5,446978	2,824195	0	-145,71	-235,87	-175,815
7	0,173433	5,118381	2,658362	0	-135,51	-249,42	-197,777
8	0,171523	4,421522	2,300352	0	-116,01	-239,73	-202,677
9	0,145545	3,345453	1,743481	0	-87,12	-200,00	-180,426
10	0,090142	1,87686	0,979789	0	-48,58	-122,81	-118,227

Gli stati che determinano un peggioramento delle condizioni attuali (BB, B, C), intuitivamente, hanno valore atteso negativo. La colonna corrispondente al rating iniziale (BBB), poiché non rappresenta nessun miglioramento o miglioria delle condizioni di partenza, è nulla per tutti gli anni.

Nonostante l'azienda abbia un interesse target dell'8,3%, è possibile notare che, date le probabilità di transizione, le è più conveniente aspettare un ulteriore miglioramento del suo rating, in particolare verso il tasso 7,94% (rating AA), prima di rifinanziare il proprio debito. Infatti, la probabilità che il titolo giunga allo stato AA aumenta in modo sostenuto nel tempo, e insieme ad essa il valore attuale atteso di un ipotetico rifinanziamento.

In particolare, dopo 2 anni il valore atteso in caso di rifinanziamento al tasso 8,3% è di €1,6 Mln. Se i costi di emissione di nuove obbligazioni sono superiori a questo valore, per l'azienda non sarà conveniente optare per un rifinanziamento.

Allo stesso tempo, dopo 5 anni il valore atteso in caso di rifinanziamento al tasso 7,94% (AA) è di €5,41 Mln. L'azienda opterà per rifinanziare il proprio debito solo se i costi di rifinanziamento sono inferiori a tale valore.

Ora ipotizziamo che la stessa azienda parta dallo stato B, e che abbia come interesse target 8,71% (BBB):

Tabella 29: Iterazioni del modello – risparmi attesi in caso di rifinanziamento e rating di partenza B

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C
0	0	0	0	0	0,00	1,00	0
1	123,80	125,12	119,55	120,86	838,00	0,00	-1072,33
2	222,75	235,42	224,23	384,48	1179,18	0,00	-1623,08
3	301,19	332,38	315,35	701,79	1269,61	0,00	-1871,87
4	362,84	417,39	394,50	1028,42	1239,68	0,00	-1946,82
5	410,83	491,69	463,30	1343,61	1157,26	0,00	-1923,12
6	447,71	556,39	523,14	1638,70	1056,70	0,00	-1845,17
7	475,54	612,46	575,23	1911,17	954,61	0,00	-1739,22
8	495,99	660,75	620,56	2161,34	858,43	0,00	-1620,86
9	510,43	702,01	659,96	2390,75	770,91	0,00	-1499,24
10	519,96	736,91	694,09	2601,39	692,60	0,00	-1379,70

Anche in questo caso, il management inizialmente potrebbe pensare che un eventuale miglioramento al tasso 9,21% comporti un vantaggio in caso di rifinanziamento. Invece, a partire dall'anno 5, le condizioni potrebbero migliorare nuovamente, con la possibilità di raggiungere il tasso target.

6.7. Analisi di sensitività

In questa sezione verranno impostati come input del modello i dati reali alla 31/12/2023 delle aziende CostCo, Meta e Tesla. I loro rating iniziali sono disponibili sul sito dello Standard & Poor, mentre i dati sul loro debito outstanding sono disponibili su Orbis.

Company	Last rating	Total Interest-bearing Long-term debt (\$Mln)
CostCo	A	6.680
Facebook	BBB	18.985
Tesla	BB	2.857

Verranno analizzati i risultati al variare del tasso di interesse target.

Tabella 30: Analisi di sensitività

Company	CostCo			
Initial rating	A			
Target rating	AA			
	AAA	AA	Target rating	AAA
			AAA	AA

0	0	0	0	0
1	2,08	1,19	2,08	1,19
2	3,74	2,43	3,95	2,18
3	4,98	3,63	5,56	2,96
4	5,82	4,72	6,85	3,50
5	6,24	5,61	7,77	3,81
6	6,26	6,19	8,23	3,88
7	5,86	6,36	8,14	3,68
8	5,05	5,97	7,41	3,21
9	3,80	4,90	5,90	2,45
10	2,13	2,97	3,48	1,39

Nel caso il management si ponesse come target rating AA, a fino all'anno 8 gli converrà non rifinanziare mai il proprio debito, poiché la probabilità che le condizioni possano diventare più favorevoli sono discretamente alte. Se invece il management sceglie di avere come target il rating AAA, non gli conviene mai rifinanziare il proprio debito, nel caso in cui ci sia un miglioramento verso il rating AA.

I risultati cambiano se si analizzano aziende che partono da un rating iniziale inferiore:

Tabella 31: Analisi di sensitività

Company Facebook									
Initial rating BBB									
Target rating A				Target rating AA			Target rating AAA		
0	AAA	AA	A	AAA	AA	A	AAA	AA	A
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7,20	7,62	33,76	7,20	7,62	33,76	7,20	7,62	33,76
2	12,03	13,25	58,05	13,49	14,90	54,86	14,23	13,67	55,15
3	14,97	17,18	74,76	18,63	21,65	66,75	20,72	18,25	67,51
4	16,40	19,60	85,09	22,43	27,57	71,79	26,30	21,41	73,11
5	16,59	20,62	89,74	24,73	32,26	71,56	30,56	23,13	73,45
6	15,73	20,32	89,04	25,40	35,24	67,14	33,08	23,39	69,53
7	13,99	18,75	83,05	24,31	35,91	59,26	33,37	22,12	61,96
8	11,47	15,93	71,60	21,34	33,58	48,38	30,87	19,26	51,11
9	8,25	11,87	54,32	16,38	27,46	34,79	24,97	14,70	37,16
10	4,42	6,57	30,68	9,31	16,61	18,64	14,95	8,32	20,15

L'azienda in questo caso parte da un tasso di interesse pari a 8,71%. Secondo il modello, indipendentemente dal target che il management si pone, risulta sempre più conveniente rifinanziare immediatamente il debito non appena le condizioni esterne migliorano al tasso 7,94%

Tabella 32: Analisi di sensitività

Company	Tesla								
Initial rating	BB								
Target rating	BBB			Target rating A			Target rating AA		
	AA	A	BBB	AA	A	BBB	AA	A	BBB
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1,50	1,25	6,72	1,50	1,25	6,72	1,50	1,25	6,72
2	2,63	2,15	11,27	2,89	4,00	9,55	3,05	3,81	9,58
3	3,45	2,77	14,23	4,07	7,21	10,19	4,56	6,56	10,31
4	3,98	3,15	15,97	4,96	10,23	9,66	5,92	8,88	9,90
5	4,24	3,33	16,66	5,51	12,65	8,54	7,03	10,47	8,92
6	4,24	3,30	16,40	5,68	14,16	7,14	7,76	11,17	7,64
7	3,97	3,07	15,21	5,44	14,52	5,65	7,98	10,92	6,23
8	3,42	2,65	13,07	4,78	13,52	4,16	7,51	9,68	4,75
9	2,59	2,00	9,89	3,67	10,94	2,72	6,18	7,46	3,23
10	1,45	1,13	5,58	2,08	6,52	1,33	3,76	4,24	1,65

Se lo stato di partenza è ulteriormente più basso, come per il caso di Tesla, i risultati cambiano ancora: con un interesse target del 8,30% (rating A), a partire dal quarto anno risulta essere più conveniente non rivedere il proprio debito nel caso in cui le condizioni esterne migliorino di poco, ma attendere di raggiungere il target rating. L'anno di riferimento scende al terzo anno nel caso in cui il management di pone come obiettivo il raggiungimento del target

7,94%, corrispondente al rating AA.

6.8. Considerazioni finali sulla metodologia

La metodologia proposta presenta dei limiti: l'approccio si fonda sull'ipotesi che le decisioni debbano basarsi esclusivamente sulle aspettative monetarie. Tuttavia, è ampiamente riconosciuto che le aspettative monetarie possono rivelarsi poco affidabili per le scelte finanziarie complesse, soprattutto quando si tiene conto del rischio e dell'incertezza.

Inoltre, il calcolo dei valori attesi per ogni regola decisionale si basa sulla premessa che la stessa scelta decisionale sia da applicare uniformemente nel tempo in tutti gli intervalli. Questa semplificazione può non tenere conto del carattere dinamico del processo decisionale ottimale, in quanto il ritmo decisionale può cambiare con l'avvicinarsi della scadenza dell'obbligazione. Uno studio più avanzato comporterebbe la modifica progressiva dei criteri decisionali per rispecchiare più accuratamente l'evoluzione delle condizioni di mercato e degli obiettivi manageriali.

7. Capitolo 7: Conclusioni

Questa tesi di laurea tratta due argomenti di finanza aziendale.

Il primo studio, “*Markov Decision Process nella politica dei dividendi*”, investiga possibili utilizzi dei fondamenti delle Markov Chain con ricompense applicati alle decisioni di distribuzione dei dividendi, a seconda delle performance aziendali e delle condizioni esterne del mercato. Sono stati definiti sei diversi stati gradualmente crescenti che rappresentano ognuno un possibile rendimento positivo o negativo rispetto all’osservazione precedente. È stato poi formulato un modello previsionale dei rendimenti azionari utilizzando i dati di chiusura dell’indice Standard & Poor 500, considerato come maggiormente rappresentativo del mercato azionario. Data la sua natura stocastica, scadenziabile e non ciclica, il suo comportamento rispetta le condizioni di aperiodicità ed ergodicità necessarie per creare un modello di Markov Chain con orizzonte temporale infinito, che presenta un’unica distribuzione di probabilità Π di lungo periodo. Sono state poi condotte 200 previsioni, per poi confrontarle con i dati reali di chiusura per testarne l’affidabilità. Una volta calcolate le probabilità di transizione e la corrispondente matrice di transizione, questa è stata modificata in base alla volatilità dei titoli delle aziende analizzate. Le matrici di transizione risultanti sono risultano così adattate per riflettere la volatilità specifica di ciascun titolo esaminato, rispecchiandone le caratteristiche di rischio e il comportamento stocastico. Sono state definite poi cinque diverse possibili decisioni riferite alla percentuale di utile netto da distribuire agli azionisti, e per ognuna è stata calcolata una ricompensa. Date le probabilità di transizione, la definizione delle decisioni e le ricompense attese, è stato lanciato un modello decisionale, che si propone di suggerire all’utilizzatore, qualunque sia il suo stato attuale o le condizioni esterne, l’ammontare ottimale (in percentuale) di utili da distribuire, considerando il valore atteso di tutte le possibili future condizioni.

Questo studio contribuisce alla letteratura per diversi motivi. Primo, presenta un modello predittivo del mercato azionario aggiornato ai dati più recenti, ricavandone una matrice di transizione ragionevolmente descrittiva della realtà. Inoltre, il metodo si presenta flessibile e adattabile, potendo modificare la matrice di base con i dati specifici del singolo titolo azionario. Secondo, nello studio è presente una rassegna delle teorie esistenti sull’utilizzo delle Markov Chain nella finanza e ne ricava un modello ispirandosi ad analisi condotte da studiosi esperti. Terzo, il maggior contributo è rappresentato dalla prima applicazione di un Markov Decision Process in tematiche d’interesse per i decision

maker interni alle aziende. Finora, i MDP, e più in generale i modelli sviluppati su Markov Chain, si concentrano sul risolvere problemi utili a investitori e operatori esterni alle imprese. Ad esempio, D' Amico (2015) approfondisce lo studio di Janssen e Manca (2007) sviluppando un modello di MC per il calcolo di spread di rischio di credito e suggerendo strategie di hedging e protezione dal rischio di default per gli investitori in obbligazioni, senza però dire nulla in merito a come il management dovrebbe comportarsi di fronte a una diminuzione/aumento dei tassi di interesse. Zhiyuan e Likai (2010), invece, forniscono un valido esempio di come racchiudere il comportamento stocastico del mercato azionario in una MC discreta, analizzando l'indice di mercato DAX identificandone tre possibili stati: Up, Down, Same. Questo studio ne amplia la robustezza aumentando a sei il numero dei possibili stati in cui si può identificare l'andamento dell'indice, dando una visione più completa e comprensiva del suo comportamento.

Questa ricerca presenta dei limiti dovuti all'assunzione che il comportamento del mercato sia uniformemente applicabile e statico nel tempo, e che la performance delle aziende sia un riflesso preciso del mercato stesso. Le catene di Markov sono sempre una semplificazione della realtà, mentre altri modelli più complessi potrebbero essere più comprensibili delle dinamiche reali. I risultati dell'analisi sono statisticamente rilevanti, in quanto l'errore E osservato tra un'iterazione e l'altra è molto basso, se rapportato agli ordini di grandezza delle variabili analizzate, ma questi potrebbero cambiare se vengono utilizzate, ad esempio, matrici di transizione differenti, portando a dei suggerimenti differenti rispetto ai risultati di questo studio.

Il secondo studio, *"Markov Decision Process nella struttura finanziaria"*, utilizza i fondamenti delle MC per studiare il momento adatto per rifinanziare il proprio debito a condizioni più favorevoli. Gli stati del sistema, in questo caso, sono stati ipotizzati come i rating del metodo creditizio che lo Standard & Poor applica ai titoli di debito delle aziende emittenti. Dato il loro numero finito, e data la loro variabilità nel tempo, è possibile ipotizzare che questi si muovano secondo un processo stocastico. Lo S&P stesso, periodicamente, pubblica un report in cui calcola la probabilità con cui un titolo riceva un rating diverso da quelli ricevuto l'anno precedente. Queste probabilità sono state utilizzate come probabilità di transizione nel modello presentato in questo studio. La scelta del selezionare i rating come stati del modello deriva dalla loro funzione nel

calcolo degli spread sul costo del capitale di debito. Per ogni rating, infatti, viene applicato uno spread crescente, al crescere della rischiosità del titolo. L'assunzione al principio è che, in linea con la tendenza per le aziende di mantenere un rapporto debito/equity target (Hovakimian, Hovakimian e Tehranian, 2004), è altresì plausibile che abbiano un costo del debito target (Bierman, 1966). Questa assunzione è alla base dell'analisi, che si pone come obiettivo quello di suggerire una strategia che massimizzi il valore attuale atteso dal risparmio in interessi generato da un rifinanziamento del debito a condizioni più favorevoli, ipotizzando una maturità del titolo di 10 anni. Bierman (1966) ha formulato per primo un semplice modello di MC, utilizzando i tassi di interesse come stati del sistema. Il suo studio, tuttavia, comprende un numero molto limitato di stati, e si svolge su dati ipotetici.

La contribuzione principale di questa ricerca è stata utilizzare i dati reali di probabilità di transizione, aggiornati al 2023, e poi applicarli ad aziende selezionate, che al tempo dello studio presentavano tutte dei rating differenti l'una dall'altra. È stata poi condotta un'analisi di sensitività, che analizza la decisione ottimale al variare del costo del capitale target.

Il principale limite dell'analisi è l'assunzione che la probabilità di un'azienda di passare da un rating a un altro sia un processo puramente stocastico, che non dipende quindi dalla sua attività e dall'operato del management. Inoltre, come per lo scorso modello, si assume che le probabilità di transizione siano universalmente valide e statiche nel tempo, che quindi non siano influenzate da fattori come periodi di stagnazione/espansione economica, o dal ciclo di vita di un'impresa.

In conclusione, entrambi gli studi lasciano spazio per futuri sviluppi. Indagini più complete e mirate, concentrandosi sulle diversità tra paesi di riferimento o settori specifici sono esempi di possibili perfezionamenti. L'integrazione di ulteriori variabili nel sistema, come dati macroeconomici, circostanze geopolitiche o attributi specifici del settore, potrebbe rendere i modelli più aderenti alla realtà e migliorarne la precisione. In particolare, il primo modello potrebbe essere migliorato includendo altri tipi di società, comprese quelle che operano in mercati in via di sviluppo o in settori ad alta volatilità. L'approccio al rifinanziamento del debito proposto nel secondo modello potrebbe essere invece una base significativa sia per le imprese che per gli operatori della politica monetaria, che potrebbero utilizzare le proiezioni del modello per governare l'emissione

del debito sovrano in base alle aspettative del mercato e delle imprese. Inoltre, per entrambi i modelli, sarebbe utile creare simulazioni che incorporino scenari di stress test finanziario, valutando la solidità delle soluzioni suggerite in condizioni di mercato sfavorevoli. Ciò fornirebbe suggerimenti più completi per i decisori e migliorerebbe la gestione del rischio. L'utilizzo di modelli più complessi e l'inclusione di un maggior numero di variabili possono migliorare la significatività dei modelli, facilitando così decisioni più informate da parte di manager, investitori e politici.

Bibliografia e sitografia

Bibliografia A-Z

Al-Shattara, W.K., Al-Khasawneh, J.A. and Al-Shattarat, H.K. (2012). *View of Market Reaction To Changes In Dividend Payments Policy In Jordan*. [online]

Clutejournals.com. Available at:

<https://clutejournals.com/index.php/JABR/article/view/7335/7403> [Accessed 4 Sep. 2024].

Aronsson, M. and Folkesson, A. (2023). *Stock market analysis with a Markovian approach Properties and prediction of OMXS30*. [online] Available at: <https://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:1823899/FULLTEXT01.pdf> [Accessed 3 Aug. 2024].

Bäuerle, N. and Rieder, U. (2011). *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. Springer Science & Business Media.

Berger, J.O. (2011). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. New York ; London: Springer.

Berk, J.B. and Demarzo, P.M. (2020). *Corporate finance*. 4th ed. New York, Ny: Pearson.

Bierman, H. (1966). The Bond Refunding Decision as a Markov Process. *Management Science*, 12(12), p.B-545-B-551. doi:<https://doi.org/10.1287/mnsc.12.12.b545>.

Bluhm, C., Overbeck, L. and Wagner, C. (2002). *An Introduction to Credit Risk Modeling*. CRC Press.

Boucherie, R.J., Dijk, V. and Springerlink (2017). *Markov Decision Processes in Practice*. Cham: Springer International Publishing.

Brown, S.J. and Warner, J.B. (1985). Using daily stock returns: the case of event studies. *Journal of Financial Economics*, 14(1), pp.3–31.

Cox, J.C., Ross, S.A. and Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), pp.229–263. doi:[https://doi.org/10.1016/0304-405x\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405x(79)90015-1).

- D'Amico, G. (2015). *Bivariate semi-Markov Reward Chain and Credit spreads.*: EBSCOhost. [online] web.p.ebscohost.com. Available at: <https://web.p.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=0&sid=8497ccb2-3fcb-4459-9c8a-e31fc2f87411%40redis> [Accessed 21 Jan. 2024].
- D'Amico, G., Janssen, J. and Manca, R. (2006). Homogeneous semi-Markov reliability models for credit risk management*. *Decisions in Economics and Finance*, 28(2), pp.79–93. doi:<https://doi.org/10.1007/s10203-005-0055-8>.
- D'Amico, G., Petroni, F. and Prattico, F. (2014). Performance Analysis of Second Order Semi-Markov Chains: an Application to Wind Energy Production. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 17(3), pp.781–794. doi:<https://doi.org/10.1007/s11009-013-9394-z>.
- David, F.N., Kolmogorov, A.N. and Khintchine, A. (1952). Foundations of the Theory of Probability. *Biometrika*, [online] 39(1/2), p.214. doi:<https://doi.org/10.2307/2332488>.
- Doubleday, K. and Esunge, J. (2011). Application of Markov Chains to Stock Trends. *Journal of Mathematics and Statistics*, [online] 7(2), pp.103–106. Available at: <https://thescipub.com/pdf/jmssp.2011.103.106.pdf> [Accessed 5 Sep. 2024].
- Fama, E.F. (1965). Random Walks in Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal*, [online] 21(5), pp.55–59. Available at: https://www.jstor.org/stable/pdf/4469865.pdf?refreqid=fastly-default%3A6530ea9ec34ef793014f76a25de54db9&ab_segments=0%2Fbasic_search_gsv2%2Fcontrol&origin=&initiator=&acceptTC=1 [Accessed 2 Aug. 2024].
- Fama, E.F. and French, K.R. (2002). Testing Trade-Off and Pecking Order Predictions about Dividends and Debt. *The Review of Financial Studies*, [online] 15(1), pp.1–33. Available at: <https://www.jstor.org/stable/2696797>.
- Feda, R.A. (2020). THE IMPACT OF CREDIT RATINGS ON FIRMS' CAPITAL STRUCTURE. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 10(5), pp.92–101. doi:<https://doi.org/10.32479/ijefi.10436>.
- Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*.
- Fielitz, B.D. and Bhargava, T.N. (1973). The Behavior of Stock-Price Relatives-A Markovian Analysis. *Operations Research*, [online] 21(6), pp.1183–1199. Available at: <https://www.jstor.org/stable/pdf/168946.pdf?refreqid=fastly->

default%3A745d6b5377bb6a25dd5d2d8d5a0a6ed3&ab_segments=0%2Fbasic_search_gsv2%2Fcontrol&origin=&initiator=&acceptTC=1 [Accessed 2 Aug. 2024].

Fischer, E. (2024). *Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests on JSTOR*.

[online] Jstor.org. Available at:

https://www.jstor.org/stable/pdf/2328273.pdf?refreqid=fastly-default%3A2fc13e4874d26c8b9a0fbdc255e445a2&ab_segments=&origin=&initiator=&acceptTC=1 [Accessed 18 Sep. 2024].

Glasserman, P. (2000). *Probability Models of Credit Risk*. [online] Columbia Business School. Available at:

https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/B6014/Prob_Credit.pdf.

Hillier, F. (2009). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, pp.723–758.

Hovakimian, A., Hovakimian, G. and Tehranian, H. (2004). Determinants of target capital structure: The case of dual debt and equity issues. *Journal of Financial Economics*, 71(3), pp.517–540. doi:[https://doi.org/10.1016/s0304-405x\(03\)00181-8](https://doi.org/10.1016/s0304-405x(03)00181-8).

Janssen, J. and Manca, R. (2007). *Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability*. Springer Science & Business Media.

Jarrow, R.A., Lando, D. and Turnbull, S.M. (1997). A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *Review of Financial Studies*, 10(2), pp.481–523. doi:<https://doi.org/10.1093/rfs/10.2.481>.

Jeliazkov, I. and Hee Lee, E. (2010). *MCMC perspectives on simulated likelihood estimation*. [online] Available at:

<https://sites.socsci.uci.edu/~ivan/JeliazkovLee2010.pdf>.

Jones, J.H. (1928). Business Forecasting. *The Economic Journal*, 38(151), p.414. doi:<https://doi.org/10.2307/2224318>.

Jung, K., Kim, Y.-C. and Stulz, RenéM. (1996). Timing, investment opportunities, managerial discretion, and the security issue decision. *Journal of Financial Economics*, 42(2), pp.159–185. doi:[https://doi.org/10.1016/0304-405x\(96\)00881-1](https://doi.org/10.1016/0304-405x(96)00881-1).

- Kass, R.E., Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (1997). Markov Chain Monte Carlo in Practice. *Journal of the American Statistical Association*, 92(440), p.1645. doi:<https://doi.org/10.2307/2965438>.
- Kemper, K.J. and Rao, R.P. (2013). Do Credit Ratings Really Affect Capital Structure? *Financial Review*, 48(4), pp.573–595. doi:<https://doi.org/10.1111/fire.12016>.
- Kisgen, D.J. (2003). Credit Ratings and Capital Structure. *SSRN Electronic Journal*. doi:<https://doi.org/10.2139/ssrn.355680>.
- Korteweg, A.G. (2011). Markov Chain Monte Carlo Methods in Corporate Finance. *SSRN Electronic Journal*. doi:<https://doi.org/10.2139/ssrn.1964923>.
- Kumar, H., Tank, K., Shailesh, D. and Pathak, K. (2023). The Influence of Dividend Policy on Earnings Per Share (EPS) in Nifty Companies. *International Journal of Advanced Research in Science, Communication and Technology (IJARSCT)* *International Open-Access, Double-Blind, Peer-Reviewed, Refereed, Multidisciplinary Online Journal*, 3(5), pp.2581–9429. doi:<https://doi.org/10.48175/568>.
- Leland, H.E. ed., (1994). *Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure on JSTOR*. [online] Jstor.org. Available at: https://www.jstor.org/stable/pdf/2329184.pdf?refreqid=fastly-default%3A43708cb232123ba0b52d83309756042d&ab_segments=&origin=&initiator=&acceptTC=1 [Accessed 18 Sep. 2024].
- Malkiel, B.G. (2003). The Efficient Market Hypothesis and Its Critics. *Journal of Economic Perspectives*, [online] 17(1), pp.59–82. Available at: <https://www.princeton.edu/~ceps/workingpapers/91malkiel.pdf>.
- Mandelbrot, B.B. and Hudson, R.L. (2010). *The (Mis)Behaviour of Markets*. Profile Books.
- Michael Gr. Voskoglou (2016). Applications of Finite Markov Chain Models to Management. *arXiv (Cornell University)*. doi:<https://doi.org/10.48550/arxiv.1601.01304>.
- Mrzygłód, U. and Nowak, S. (2017). Market reactions to dividends announcements and payouts. Empirical evidence from the Warsaw Stock Exchange. *Contemporary Economics*, 11(2), pp.187–204. doi:<https://doi.org/10.5709/ce.1897-9254.236>.

- Murphy, J.E. (1967). Return on Equity Capital, Dividend Payout and Growth of Earnings per Share. *Financial Analysts Journal*, 23(3), pp.91–93.
doi:<https://doi.org/10.2469/faj.v23.n3.91>.
- Myers, S.C. (1984). The Capital Structure Puzzle. *The Journal of Finance*, 39(3), pp.575–592.
- Norris, J.R. (2007). *Markov chains*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Osborne, M.F.M. (1962). Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices. *Operations Research*, [online] 10(3), pp.345–379. Available at:
https://www.jstor.org/stable/pdf/167679.pdf?refreqid=fastly-default%3A1ad1669921ec33e2fe0a2e55b5976f49&ab_segments=0%2Fbasic_search_gsv2%2Fcontrol&origin=&initiator=&acceptTC=1 [Accessed 2 Aug. 2024].
- Petropoulos, A., Chatzis, S.P. and Xanthopoulos, S. (2016). A novel corporate credit rating system based on Student's-t hidden Markov models. *Expert Systems with Applications*, [online] 53, pp.87–105. doi:<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.01.015>.
- Privault, N. and Springerlink (Online Service (2018). *Understanding Markov Chains : Examples and Applications*. Singapore: Springer Singapore.
- Pulvino, T. (1999). Effects of bankruptcy court protection on asset sales. *Journal of Financial Economics*, 52(2), pp.151–186. doi:[https://doi.org/10.1016/s0304-405x\(99\)00007-0](https://doi.org/10.1016/s0304-405x(99)00007-0).
- Samuelson, P. (1965). Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*. [online] Available at:
<https://www.unisalento.it/documents/20152/615543/Samuelson+Rational+Theory+of+Warrant+Pricing.pdf/290dcd3c-9c3d-3cc2-cc28-353135ceab54?version=1.0&download=true>.
- Sasani, A. and Tibado, S. (2020). Stock Market Prediction using Hidden Markov Model and Neural Network. *International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)*, 7(4). doi:<https://doi.org/10.31873/ijeas.7.04.07>.
- Tao, Q. (2009). *The Impact of Acquisitions on Short-Run Returns and Leverage: Two Studies in Corporate Finance*. [online] Available at:
<https://era.ed.ac.uk/bitstream/handle/1842/4291/Tao2009.pdf?sequence=2&isAllowed=y> [Accessed 10 Mar. 2024].

- Trench, M.S., Pederson, S.P., Lau, E.T., Ma, L., Wang, H. and Nair, S.K. (2003). Managing Credit Lines and Prices for Bank One Credit Cards. *Interfaces*, [online] 33(5), pp.4–21. doi:<https://doi.org/10.1287/inte.33.5.4.19245>.
- Winkler, R.L. and Morgan, B.W. (1969). Review of An Introduction to Bayesian Statistical Decision Processes. *The Journal of Business*, [online] 42(1), pp.120–122. Available at: <https://www.jstor.org/stable/2352146> [Accessed 21 Jan. 2024].
- Zhiyuan, G. and Likai, Q. (2010). *Predicting Stock Price Index*. [online] Available at: <https://hh.diva-portal.org/smash/get/diva2:291586/FULLTEXT01.pdf> [Accessed 25 Feb. 2024].
- Zhu, S.H. and Pykhtin, M. (2008). *A Guide to Modeling Counterparty Credit Risk*. [online] papers.ssrn.com. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1032522.

Sitografia

- S&P global ratings (2022). *Default, Transition, and Recovery: 2022 Annual Global Corporate Default And Rating Transition Study*. [online] www.spglobal.com.
Disponibile su: <https://www.spglobal.com/ratings/en/research/articles/230425-default-transition-and-recovery-2022-annual-global-corporate-default-and-rating-transition-study-12702145>.
- Marketline.com. (2024). *MarketLine Intelligence Center*. [online] Disponibile su: https://new.marketline.com/Company/Profile/triodos-bank_wmi_261920?swot.
- Damodaran, A. (2024). *Damodaran Online: Home Page for Aswath Damodaran*. [online] Nyu.edu. Disponibile su: <https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>.

Appendice

Appendice 1: modello predittivo dello stock price.

Tabella 33: Dati di chiusura SPX500 nell'intervallo 1° aprile 2021 – 22 aprile 2023

Date	Close	Change	State	Transition
01/04/2021	4019,87			
02/04/2021	4077,91	1,44%	U3	
03/04/2021	4073,94	-0,10%	D1	U3, D1
04/04/2021	4079,95	0,15%	U1	D1, U1
05/04/2021	4097,17	0,42%	U1	U1, U1
06/04/2021	4128,8	0,77%	U2	U1, U2
07/04/2021	4127,99	-0,02%	D1	U2, D1
08/04/2021	4141,59	0,33%	U1	D1, U1
09/04/2021	4124,66	-0,41%	D1	U1, D1
10/04/2021	4170,42	1,11%	U3	D1, U3
11/04/2021	4185,47	0,36%	U1	U3, U1
12/04/2021	4163,26	-0,53%	D2	U1, D2
13/04/2021	4134,94	-0,68%	D2	D2, D2
14/04/2021	4173,42	0,93%	U2	D2, U2
15/04/2021	4134,98	-0,92%	D2	U2, D2
16/04/2021	4180,17	1,09%	U3	D2, U3
17/04/2021	4187,62	0,18%	U1	U3, U1
18/04/2021	4186,72	-0,02%	D1	U1, D1
19/04/2021	4183,18	-0,08%	D1	D1, D1
20/04/2021	4211,47	0,68%	U2	D1, U2
21/04/2021	4181,17	-0,72%	D2	U2, D2
22/04/2021	4192,66	0,27%	U1	D2, U1
23/04/2021	4164,66	-0,67%	D2	U1, D2
24/04/2021	4167,59	0,07%	U1	D2, U1
25/04/2021	4201,62	0,82%	U2	U1, U2
26/04/2021	4232,6	0,74%	U2	U2, U2
27/04/2021	4188,43	-1,04%	D3	U2, D3
28/04/2021	4152,1	-0,87%	D2	D3, D2
29/04/2021	4063,04	-2,14%	D3	D2, D3
30/04/2021	4112,5	1,22%	U3	D3, U3
01/05/2021	4173,85	1,49%	U3	U3, U3
02/05/2021	4163,29	-0,25%	D1	U3, D1
03/05/2021	4127,83	-0,85%	D2	D1, D2
04/05/2021	4115,68	-0,29%	D1	D2, D1
05/05/2021	4159,12	1,06%	U3	D1, U3
06/05/2021	4155,86	-0,08%	D1	U3, D1
07/05/2021	4197,05	0,99%	U2	D1, U2
08/05/2021	4188,13	-0,21%	D1	U2, D1

09/05/2021	4195,99	0,19%	U1	D1, U1
10/05/2021	4200,88	0,12%	U1	U1, U1
11/05/2021	4204,11	0,08%	U1	U1, U1
12/05/2021	4202,04	-0,05%	D1	U1, D1
13/05/2021	4208,12	0,14%	U1	D1, U1
14/05/2021	4192,85	-0,36%	D1	U1, D1
15/05/2021	4229,89	0,88%	U2	D1, U2
16/05/2021	4226,52	-0,08%	D1	U2, D1
17/05/2021	4227,26	0,02%	U1	D1, U1
18/05/2021	4219,55	-0,18%	D1	U1, D1
19/05/2021	4239,18	0,47%	U1	D1, U1
20/05/2021	4247,44	0,19%	U1	U1, U1
21/05/2021	4255,15	0,18%	U1	U1, U1
22/05/2021	4246,59	-0,20%	D1	U1, D1
23/05/2021	4223,7	-0,54%	D2	D1, D2
24/05/2021	4221,86	-0,04%	D1	D2, D1
25/05/2021	4166,45	-1,31%	D3	D1, D3
26/05/2021	4224,79	1,40%	U3	D3, U3
27/05/2021	4246,44	0,51%	U2	U3, U2
28/05/2021	4241,84	-0,11%	D1	U2, D1
29/05/2021	4266,49	0,58%	U2	D1, U2
30/05/2021	4280,7	0,33%	U1	U2, U1
31/05/2021	4290,61	0,23%	U1	U1, U1
01/06/2021	4291,8	0,03%	U1	U1, U1
02/06/2021	4297,5	0,13%	U1	U1, U1
03/06/2021	4319,94	0,52%	U2	U1, U2
04/06/2021	4352,34	0,75%	U2	U2, U2
05/06/2021	4343,54	-0,20%	D1	U2, D1
06/06/2021	4358,13	0,34%	U1	D1, U1
07/06/2021	4320,82	-0,86%	D2	U1, D2
08/06/2021	4369,55	1,13%	U3	D2, U3
09/06/2021	4384,63	0,35%	U1	U3, U1
10/06/2021	4369,21	-0,35%	D1	U1, D1
11/06/2021	4374,3	0,12%	U1	D1, U1
12/06/2021	4360,03	-0,33%	D1	U1, D1
13/06/2021	4327,16	-0,75%	D2	D1, D2
14/06/2021	4258,49	-1,59%	D3	D2, D3
15/06/2021	4323,06	1,52%	U3	D3, U3
16/06/2021	4358,69	0,82%	U2	U3, U2
17/06/2021	4367,48	0,20%	U1	U2, U1
18/06/2021	4411,79	1,01%	U3	U1, U3
19/06/2021	4422,3	0,24%	U1	U3, U1
20/06/2021	4401,46	-0,47%	D1	U1, D1
21/06/2021	4400,64	-0,02%	D1	D1, D1
22/06/2021	4419,15	0,42%	U1	D1, U1
23/06/2021	4395,26	-0,54%	D2	U1, D2

24/06/2021	4387,16	-0,18%	D1	D2, D1
25/06/2021	4423,15	0,82%	U2	D1, U2
26/06/2021	4402,66	-0,46%	D1	U2, D1
27/06/2021	4429,1	0,60%	U2	D1, U2
28/06/2021	4436,52	0,17%	U1	U2, U1
29/06/2021	4432,35	-0,09%	D1	U1, D1
30/06/2021	4436,75	0,10%	U1	D1, U1
01/07/2021	4442,41	0,13%	U1	U1, U1
02/07/2021	4460,83	0,41%	U1	U1, U1
03/07/2021	4468	0,16%	U1	U1, U1
04/07/2021	4479,71	0,26%	U1	U1, U1
05/07/2021	4448,08	-0,71%	D2	U1, D2
06/07/2021	4400,27	-1,07%	D3	D2, D3
07/07/2021	4405,8	0,13%	U1	D3, U1
08/07/2021	4441,67	0,81%	U2	U1, U2
09/07/2021	4479,53	0,85%	U2	U2, U2
10/07/2021	4486,23	0,15%	U1	U2, U1
11/07/2021	4496,19	0,22%	U1	U1, U1
12/07/2021	4470	-0,58%	D2	U1, D2
13/07/2021	4509,37	0,88%	U2	D2, U2
14/07/2021	4528,79	0,43%	U1	U2, U1
15/07/2021	4522,68	-0,13%	D1	U1, D1
16/07/2021	4524,09	0,03%	U1	D1, U1
17/07/2021	4536,95	0,28%	U1	U1, U1
18/07/2021	4535,43	-0,03%	D1	U1, D1
19/07/2021	4520,03	-0,34%	D1	D1, D1
20/07/2021	4514,07	-0,13%	D1	D1, D1
21/07/2021	4493,28	-0,46%	D1	D1, D1
22/07/2021	4458,58	-0,77%	D2	D1, D2
23/07/2021	4468,73	0,23%	U1	D2, U1
24/07/2021	4443,05	-0,57%	D2	U1, D2
25/07/2021	4480,7	0,85%	U2	D2, U2
26/07/2021	4473,75	-0,16%	D1	U2, D1
27/07/2021	4432,99	-0,91%	D2	D1, D2
28/07/2021	4357,73	-1,70%	D3	D2, D3
29/07/2021	4354,19	-0,08%	D1	D3, D1
30/07/2021	4395,64	0,95%	U2	D1, U2
31/07/2021	4448,98	1,21%	U3	U2, U3
01/08/2021	4455,48	0,15%	U1	U3, U1
02/08/2021	4443,11	-0,28%	D1	U1, D1
03/08/2021	4352,63	-2,04%	D3	D1, D3
04/08/2021	4359,46	0,16%	U1	D3, U1
05/08/2021	4307,54	-1,19%	D3	U1, D3
06/08/2021	4357,04	1,15%	U3	D3, U3
07/08/2021	4300,46	-1,30%	D3	U3, D3
08/08/2021	4345,72	1,05%	U3	D3, U3

09/08/2021	4363,55	0,41%	U1	U3, U1
10/08/2021	4399,76	0,83%	U2	U1, U2
11/08/2021	4391,34	-0,19%	D1	U2, D1
12/08/2021	4361,19	-0,69%	D2	D1, D2
13/08/2021	4350,65	-0,24%	D1	D2, D1
14/08/2021	4363,8	0,30%	U1	D1, U1
15/08/2021	4438,26	1,71%	U3	U1, U3
16/08/2021	4471,37	0,75%	U2	U3, U2
17/08/2021	4486,46	0,34%	U1	U2, U1
18/08/2021	4519,63	0,74%	U2	U1, U2
19/08/2021	4536,19	0,37%	U1	U2, U1
20/08/2021	4549,78	0,30%	U1	U1, U1
21/08/2021	4544,9	-0,11%	D1	U1, D1
22/08/2021	4566,48	0,47%	U1	D1, U1
23/08/2021	4574,79	0,18%	U1	U1, U1
24/08/2021	4551,68	-0,51%	D2	U1, D2
25/08/2021	4596,42	0,98%	U2	D2, U2
26/08/2021	4605,38	0,19%	U1	U2, U1
27/08/2021	4613,67	0,18%	U1	U1, U1
28/08/2021	4630,65	0,37%	U1	U1, U1
29/08/2021	4660,57	0,65%	U2	U1, U2
30/08/2021	4680,06	0,42%	U1	U2, U1
31/08/2021	4697,53	0,37%	U1	U1, U1
01/09/2021	4701,7	0,09%	U1	U1, U1
02/09/2021	4685,25	-0,35%	D1	U1, D1
03/09/2021	4646,71	-0,82%	D2	D1, D2
04/09/2021	4649,27	0,06%	U1	D2, U1
05/09/2021	4682,85	0,72%	U2	U1, U2
06/09/2021	4682,8	0,00%	D1	U2, D1
07/09/2021	4700,9	0,39%	U1	D1, U1
08/09/2021	4688,67	-0,26%	D1	U1, D1
09/09/2021	4704,54	0,34%	U1	D1, U1
10/09/2021	4697,96	-0,14%	D1	U1, D1
11/09/2021	4682,94	-0,32%	D1	D1, D1
12/09/2021	4690,7	0,17%	U1	D1, U1
13/09/2021	4701,46	0,23%	U1	U1, U1
14/09/2021	4594,62	-2,27%	D3	U1, D3
15/09/2021	4655,27	1,32%	U3	D3, U3
16/09/2021	4567	-1,90%	D3	U3, D3
17/09/2021	4513,04	-1,18%	D3	D3, D3
18/09/2021	4577,1	1,42%	U3	D3, U3
19/09/2021	4538,43	-0,84%	D2	U3, D2
20/09/2021	4591,67	1,17%	U3	D2, U3
21/09/2021	4686,75	2,07%	U3	U3, U3
22/09/2021	4701,21	0,31%	U1	U3, U1
23/09/2021	4667,45	-0,72%	D2	U1, D2

24/09/2021	4712,02	0,95%	U2	D2, U2
25/09/2021	4668,97	-0,91%	D2	U2, D2
26/09/2021	4634,09	-0,75%	D2	D2, D2
27/09/2021	4709,85	1,63%	U3	D2, U3
28/09/2021	4668,67	-0,87%	D2	U3, D2
29/09/2021	4620,64	-1,03%	D3	D2, D3
30/09/2021	4568,02	-1,14%	D3	D3, D3
01/10/2021	4649,23	1,78%	U3	D3, U3
02/10/2021	4696,56	1,02%	U3	U3, U3
03/10/2021	4725,79	0,62%	U2	U3, U2
04/10/2021	4791,19	1,38%	U3	U2, U3
05/10/2021	4786,35	-0,10%	D1	U3, D1
06/10/2021	4793,06	0,14%	U1	D1, U1
07/10/2021	4778,73	-0,30%	D1	U1, D1
08/10/2021	4766,18	-0,26%	D1	D1, D1
09/10/2021	4796,56	0,64%	U2	D1, U2
10/10/2021	4793,54	-0,06%	D1	U2, D1
11/10/2021	4700,58	-1,94%	D3	D1, D3
12/10/2021	4696,05	-0,10%	D1	D3, D1
13/10/2021	4677,03	-0,41%	D1	D1, D1
14/10/2021	4670,29	-0,14%	D1	D1, D1
15/10/2021	4713,07	0,92%	U2	D1, U2
16/10/2021	4726,35	0,28%	U1	U2, U1
17/10/2021	4659,03	-1,42%	D3	U1, D3
18/10/2021	4662,85	0,08%	U1	D3, U1
19/10/2021	4577,11	-1,84%	D3	U1, D3
20/10/2021	4532,76	-0,97%	D2	D3, D2
21/10/2021	4482,73	-1,10%	D3	D2, D3
22/10/2021	4397,94	-1,89%	D3	D3, D3
23/10/2021	4410,13	0,28%	U1	D3, U1
24/10/2021	4356,45	-1,22%	D3	U1, D3
25/10/2021	4349,93	-0,15%	D1	D3, D1
26/10/2021	4326,51	-0,54%	D2	D1, D2
27/10/2021	4431,85	2,43%	U3	D2, U3
28/10/2021	4515,55	1,89%	U3	U3, U3
29/10/2021	4546,54	0,69%	U2	U3, U2
30/10/2021	4589,38	0,94%	U2	U2, U2
31/10/2021	4477,44	-2,44%	D3	U2, D3
01/11/2021	4500,53	0,52%	U2	D3, U2
02/11/2021	4483,87	-0,37%	D1	U2, D1
03/11/2021	4521,54	0,84%	U2	D1, U2
04/11/2021	4587,18	1,45%	U3	U2, U3
05/11/2021	4504,08	-1,81%	D3	U3, D3
06/11/2021	4418,64	-1,90%	D3	D3, D3
07/11/2021	4401,67	-0,38%	D1	D3, D1
08/11/2021	4471,07	1,58%	U3	D1, U3

09/11/2021	4475,01	0,09%	U1	U3, U1
10/11/2021	4380,26	-2,12%	D3	U1, D3
11/11/2021	4348,87	-0,72%	D2	D3, D2
12/11/2021	4304,76	-1,01%	D3	D2, D3
13/11/2021	4225,5	-1,84%	D3	D3, D3
14/11/2021	4288,7	1,50%	U3	D3, U3
15/11/2021	4384,65	2,24%	U3	U3, U3
16/11/2021	4373,94	-0,24%	D1	U3, D1
17/11/2021	4306,26	-1,55%	D3	D1, D3
18/11/2021	4386,54	1,86%	U3	D3, U3
19/11/2021	4363,49	-0,53%	D2	U3, D2
20/11/2021	4328,87	-0,79%	D2	D2, D2
21/11/2021	4201,09	-2,95%	D3	D2, D3
22/11/2021	4170,7	-0,72%	D2	D3, D2
23/11/2021	4277,88	2,57%	U3	D2, U3
24/11/2021	4259,52	-0,43%	D1	U3, D1
25/11/2021	4204,31	-1,30%	D3	D1, D3
26/11/2021	4173,11	-0,74%	D2	D3, D2
27/11/2021	4262,45	2,14%	U3	D2, U3
28/11/2021	4357,86	2,24%	U3	U3, U3
29/11/2021	4411,67	1,23%	U3	U3, U3
30/11/2021	4463,12	1,17%	U3	U3, U3
01/12/2021	4461,18	-0,04%	D1	U3, D1
02/12/2021	4511,61	1,13%	U3	D1, U3
03/12/2021	4456,24	-1,23%	D3	U3, D3
04/12/2021	4520,16	1,43%	U3	D3, U3
05/12/2021	4543,06	0,51%	U2	U3, U2
06/12/2021	4575,52	0,71%	U2	U2, U2
07/12/2021	4631,6	1,23%	U3	U2, U3
08/12/2021	4602,45	-0,63%	D2	U3, D2
09/12/2021	4530,41	-1,57%	D3	D2, D3
10/12/2021	4545,86	0,34%	U1	D3, U1
11/12/2021	4582,64	0,81%	U2	U1, U2
12/12/2021	4525,12	-1,26%	D3	U2, D3
13/12/2021	4481,15	-0,97%	D2	D3, D2
14/12/2021	4500,21	0,43%	U1	D2, U1
15/12/2021	4488,28	-0,27%	D1	U1, D1
16/12/2021	4412,53	-1,69%	D3	D1, D3
17/12/2021	4397,45	-0,34%	D1	D3, D1
18/12/2021	4446,59	1,12%	U3	D1, U3
19/12/2021	4392,59	-1,21%	D3	U3, D3
20/12/2021	4391,69	-0,02%	D1	D3, D1
21/12/2021	4462,21	1,61%	U3	D1, U3
22/12/2021	4459,45	-0,06%	D1	U3, D1
23/12/2021	4393,66	-1,48%	D3	D1, D3
24/12/2021	4271,78	-2,77%	D3	D3, D3

25/12/2021	4296,12	0,57%	U2	D3, U2
26/12/2021	4175,2	-2,81%	D3	U2, D3
27/12/2021	4183,96	0,21%	U1	D3, U1
28/12/2021	4287,5	2,47%	U3	U1, U3
29/12/2021	4131,93	-3,63%	D3	U3, D3
30/12/2021	4155,38	0,57%	U2	D3, U2
31/12/2021	4175,48	0,48%	U1	U2, U1
01/01/2022	4300,17	2,99%	U3	U1, U3
02/01/2022	4146,87	-3,56%	D3	U3, D3
03/01/2022	4123,34	-0,57%	D2	D3, D2
04/01/2022	3991,24	-3,20%	D3	D2, D3
05/01/2022	4001,05	0,25%	U1	D3, U1
06/01/2022	3935,18	-1,65%	D3	U1, D3
07/01/2022	3930,08	-0,13%	D1	D3, D1
08/01/2022	4023,89	2,39%	U3	D1, U3
09/01/2022	4008,01	-0,39%	D1	U3, D1
10/01/2022	4088,85	2,02%	U3	D1, U3
11/01/2022	3923,68	-4,04%	D3	U3, D3
12/01/2022	3900,79	-0,58%	D2	D3, D2
13/01/2022	3901,36	0,01%	U1	D2, U1
14/01/2022	3973,75	1,86%	U3	U1, U3
15/01/2022	3941,48	-0,81%	D2	U3, D2
16/01/2022	3978,73	0,95%	U2	D2, U2
17/01/2022	4057,84	1,99%	U3	U2, U3
18/01/2022	4158,24	2,47%	U3	U3, U3
19/01/2022	4132,15	-0,63%	D2	U3, D2
20/01/2022	4101,23	-0,75%	D2	D2, D2
21/01/2022	4176,82	1,84%	U3	D2, U3
22/01/2022	4108,54	-1,63%	D3	U3, D3
23/01/2022	4121,43	0,31%	U1	D3, U1
24/01/2022	4160,68	0,95%	U2	U1, U2
25/01/2022	4115,77	-1,08%	D3	U2, D3
26/01/2022	4017,82	-2,38%	D3	D3, D3
27/01/2022	3900,86	-2,91%	D3	D3, D3
28/01/2022	3749,63	-3,88%	D3	D3, D3
29/01/2022	3735,48	-0,38%	D1	D3, D1
30/01/2022	3789,99	1,46%	U3	D1, U3
31/01/2022	3666,77	-3,25%	D3	U3, D3
01/02/2022	3674,84	0,22%	U1	D3, U1
02/02/2022	3764,79	2,45%	U3	U1, U3
03/02/2022	3759,89	-0,13%	D1	U3, D1
04/02/2022	3795,73	0,95%	U2	D1, U2
05/02/2022	3911,74	3,06%	U3	U2, U3
06/02/2022	3900,11	-0,30%	D1	U3, D1
07/02/2022	3821,55	-2,01%	D3	D1, D3
08/02/2022	3818,83	-0,07%	D1	D3, D1

09/02/2022	3785,38	-0,88%	D2	D1, D2
10/02/2022	3825,33	1,06%	U3	D2, U3
11/02/2022	3831,39	0,16%	U1	U3, U1
12/02/2022	3845,08	0,36%	U1	U1, U1
13/02/2022	3902,62	1,50%	U3	U1, U3
14/02/2022	3899,38	-0,08%	D1	U3, D1
15/02/2022	3854,43	-1,15%	D3	D1, D3
16/02/2022	3818,8	-0,92%	D2	D3, D2
17/02/2022	3801,78	-0,45%	D1	D2, D1
18/02/2022	3790,38	-0,30%	D1	D1, D1
19/02/2022	3863,16	1,92%	U3	D1, U3
20/02/2022	3830,85	-0,84%	D2	U3, D2
21/02/2022	3936,69	2,76%	U3	D2, U3
22/02/2022	3959,9	0,59%	U2	U3, U2
23/02/2022	3998,95	0,99%	U2	U2, U2
24/02/2022	3961,63	-0,93%	D2	U2, D2
25/02/2022	3966,84	0,13%	U1	D2, U1
26/02/2022	3921,05	-1,15%	D3	U1, D3
27/02/2022	4023,61	2,62%	U3	D3, U3
28/02/2022	4072,43	1,21%	U3	U3, U3
01/03/2022	4130,29	1,42%	U3	U3, U3
02/03/2022	4118,63	-0,28%	D1	U3, D1
03/03/2022	4091,19	-0,67%	D2	D1, D2
04/03/2022	4155,17	1,56%	U3	D2, U3
05/03/2022	4151,94	-0,08%	D1	U3, D1
06/03/2022	4145,19	-0,16%	D1	D1, D1
07/03/2022	4140,06	-0,12%	D1	D1, D1
08/03/2022	4122,47	-0,42%	D1	D1, D1
09/03/2022	4210,24	2,13%	U3	D1, U3
10/03/2022	4207,27	-0,07%	D1	U3, D1
11/03/2022	4280,15	1,73%	U3	D1, U3
12/03/2022	4297,14	0,40%	U1	U3, U1
13/03/2022	4305,2	0,19%	U1	U1, U1
14/03/2022	4274,04	-0,72%	D2	U1, D2
15/03/2022	4283,74	0,23%	U1	D2, U1
16/03/2022	4228,48	-1,29%	D3	U1, D3
17/03/2022	4137,99	-2,14%	D3	D3, D3
18/03/2022	4128,73	-0,22%	D1	D3, D1
19/03/2022	4140,77	0,29%	U1	D1, U1
20/03/2022	4199,12	1,41%	U3	U1, U3
21/03/2022	4057,66	-3,37%	D3	U3, D3
22/03/2022	4030,61	-0,67%	D2	D3, D2
23/03/2022	3986,16	-1,10%	D3	D2, D3
24/03/2022	3955	-0,78%	D2	D3, D2
25/03/2022	3966,85	0,30%	U1	D2, U1
26/03/2022	3924,26	-1,07%	D3	U1, D3

27/03/2022	3908,19	-0,41%	D1	D3, D1
28/03/2022	3979,87	1,83%	U3	D1, U3
29/03/2022	4006,18	0,66%	U2	U3, U2
30/03/2022	4067,36	1,53%	U3	U2, U3
31/03/2022	4110,41	1,06%	U3	U3, U3
01/04/2022	3932,69	-4,32%	D3	U3, D3
02/04/2022	3946,01	0,34%	U1	D3, U1
03/04/2022	3901,35	-1,13%	D3	U1, D3
04/04/2022	3873,33	-0,72%	D2	D3, D2
05/04/2022	3899,89	0,69%	U2	D2, U2
06/04/2022	3855,93	-1,13%	D3	U2, D3
07/04/2022	3789,93	-1,71%	D3	D3, D3
08/04/2022	3757,99	-0,84%	D2	D3, D2
09/04/2022	3693,23	-1,72%	D3	D2, D3
10/04/2022	3655,04	-1,03%	D3	D3, D3
11/04/2022	3647,29	-0,21%	D1	D3, D1
12/04/2022	3719,04	1,97%	U3	D1, U3
13/04/2022	3640,47	-2,11%	D3	U3, D3
14/04/2022	3585,62	-1,51%	D3	D3, D3
15/04/2022	3678,43	2,59%	U3	D3, U3
16/04/2022	3790,93	3,06%	U3	U3, U3
17/04/2022	3783,28	-0,20%	D1	U3, D1
18/04/2022	3744,52	-1,02%	D3	D1, D3
19/04/2022	3639,66	-2,80%	D3	D3, D3
20/04/2022	3612,39	-0,75%	D2	D3, D2
21/04/2022	3588,84	-0,65%	D2	D2, D2
22/04/2022	3577,03	-0,33%	D1	D2, D1
23/04/2022	3669,91	2,60%	U3	D1, U3
24/04/2022	3583,07	-2,37%	D3	U3, D3
25/04/2022	3677,95	2,65%	U3	D3, U3
26/04/2022	3719,98	1,14%	U3	U3, U3
27/04/2022	3695,16	-0,67%	D2	U3, D2
28/04/2022	3665,78	-0,80%	D2	D2, D2
29/04/2022	3752,75	2,37%	U3	D2, U3
30/04/2022	3797,34	1,19%	U3	U3, U3
01/05/2022	3859,11	1,63%	U3	U3, U3
02/05/2022	3830,6	-0,74%	D2	U3, D2
03/05/2022	3807,3	-0,61%	D2	D2, D2
04/05/2022	3901,06	2,46%	U3	D2, U3
05/05/2022	3871,98	-0,75%	D2	U3, D2
06/05/2022	3856,1	-0,41%	D1	D2, D1
07/05/2022	3759,69	-2,50%	D3	D1, D3
08/05/2022	3719,89	-1,06%	D3	D3, D3
09/05/2022	3770,55	1,36%	U3	D3, U3
10/05/2022	3806,8	0,96%	U2	U3, U2
11/05/2022	3828,11	0,56%	U2	U2, U2

12/05/2022	3748,57	-2,08%	D3	U2, D3
13/05/2022	3956,37	5,54%	U3	D3, U3
14/05/2022	3992,93	0,92%	U2	U3, U2
15/05/2022	3957,25	-0,89%	D2	U2, D2
16/05/2022	3991,73	0,87%	U2	D2, U2
17/05/2022	3958,79	-0,83%	D2	U2, D2
18/05/2022	3946,56	-0,31%	D1	D2, D1
19/05/2022	3965,34	0,48%	U1	D1, U1
20/05/2022	3949,94	-0,39%	D1	U1, D1
21/05/2022	4003,58	1,36%	U3	D1, U3
22/05/2022	4027,26	0,59%	U2	U3, U2
23/05/2022	4026,12	-0,03%	D1	U2, D1
24/05/2022	3963,94	-1,54%	D3	D1, D3
25/05/2022	3957,63	-0,16%	D1	D3, D1
26/05/2022	4080,11	3,09%	U3	D1, U3
27/05/2022	4076,57	-0,09%	D1	U3, D1
28/05/2022	4071,7	-0,12%	D1	D1, D1
29/05/2022	3998,84	-1,79%	D3	D1, D3
30/05/2022	3941,26	-1,44%	D3	D3, D3
31/05/2022	3933,92	-0,19%	D1	D3, D1
01/06/2022	3963,51	0,75%	U2	D1, U2
02/06/2022	3934,38	-0,73%	D2	U2, D2
03/06/2022	3990,56	1,43%	U3	D2, U3
04/06/2022	4019,65	0,73%	U2	U3, U2
05/06/2022	3995,32	-0,61%	D2	U2, D2
06/06/2022	3895,75	-2,49%	D3	D2, D3
07/06/2022	3852,36	-1,11%	D3	D3, D3
08/06/2022	3817,66	-0,90%	D2	D3, D2
09/06/2022	3821,62	0,10%	U1	D2, U1
10/06/2022	3878,44	1,49%	U3	U1, U3
11/06/2022	3822,39	-1,45%	D3	U3, D3
12/06/2022	3844,82	0,59%	U2	D3, U2
13/06/2022	3829,25	-0,40%	D1	U2, D1
14/06/2022	3783,22	-1,20%	D3	D1, D3
15/06/2022	3849,28	1,75%	U3	D3, U3
16/06/2022	3839,5	-0,25%	D1	U3, D1
17/06/2022	3824,14	-0,40%	D1	D1, D1
18/06/2022	3852,97	0,75%	U2	D1, U2
19/06/2022	3808,1	-1,16%	D3	U2, D3
20/06/2022	3895,08	2,28%	U3	D3, U3
21/06/2022	3892,09	-0,08%	D1	U3, D1
22/06/2022	3919,25	0,70%	U2	D1, U2
23/06/2022	3969,61	1,28%	U3	U2, U3
24/06/2022	3983,17	0,34%	U1	U3, U1
25/06/2022	3999,09	0,40%	U1	U1, U1
26/06/2022	3990,97	-0,20%	D1	U1, D1

27/06/2022	3928,86	-1,56%	D3	D1, D3
28/06/2022	3898,85	-0,76%	D2	D3, D2
29/06/2022	3972,61	1,89%	U3	D2, U3
30/06/2022	4019,81	1,19%	U3	U3, U3
01/07/2022	4016,95	-0,07%	D1	U3, D1
02/07/2022	4016,22	-0,02%	D1	D1, D1
03/07/2022	4060,43	1,10%	U3	D1, U3
04/07/2022	4070,56	0,25%	U1	U3, U1
05/07/2022	4017,77	-1,30%	D3	U1, D3
06/07/2022	4076,6	1,46%	U3	D3, U3
07/07/2022	4119,21	1,05%	U3	U3, U3
08/07/2022	4179,76	1,47%	U3	U3, U3
09/07/2022	4136,48	-1,04%	D3	U3, D3
10/07/2022	4111,08	-0,61%	D2	D3, D2
11/07/2022	4164	1,29%	U3	D2, U3
12/07/2022	4117,86	-1,11%	D3	U3, D3
13/07/2022	4081,5	-0,88%	D2	D3, D2
14/07/2022	4090,46	0,22%	U1	D2, U1
15/07/2022	4137,29	1,14%	U3	U1, U3
16/07/2022	4136,13	-0,03%	D1	U3, D1
17/07/2022	4147,6	0,28%	U1	D1, U1
18/07/2022	4090,41	-1,38%	D3	U1, D3
19/07/2022	4079,09	-0,28%	D1	D3, D1
20/07/2022	3997,34	-2,00%	D3	D1, D3
21/07/2022	3991,05	-0,16%	D1	D3, D1
22/07/2022	4012,32	0,53%	U2	D1, U2
23/07/2022	3970,04	-1,05%	D3	U2, D3
24/07/2022	3982,24	0,31%	U1	D3, U1
25/07/2022	3970,15	-0,30%	D1	U1, D1
26/07/2022	3951,39	-0,47%	D1	D1, D1
27/07/2022	3981,35	0,76%	U2	D1, U2
28/07/2022	4045,64	1,61%	U3	U2, U3
29/07/2022	4048,42	0,07%	U1	U3, U1
30/07/2022	3986,37	-1,53%	D3	U1, D3
31/07/2022	3992,01	0,14%	U1	D3, U1
01/08/2022	3918,32	-1,85%	D3	U1, D3
02/08/2022	3861,59	-1,45%	D3	D3, D3
03/08/2022	3855,76	-0,15%	D1	D3, D1
04/08/2022	3919,29	1,65%	U3	D1, U3
05/08/2022	3891,93	-0,70%	D2	U3, D2
06/08/2022	3960,28	1,76%	U3	D2, U3
07/08/2022	3916,64	-1,10%	D3	U3, D3
08/08/2022	3951,57	0,89%	U2	D3, U2
09/08/2022	4002,87	1,30%	U3	U2, U3
10/08/2022	3936,97	-1,65%	D3	U3, D3
11/08/2022	3948,72	0,30%	U1	D3, U1

12/08/2022	3970,99	0,56%	U2	U1, U2
13/08/2022	3977,53	0,16%	U1	U2, U1
14/08/2022	3971,27	-0,16%	D1	U1, D1
15/08/2022	4027,81	1,42%	U3	D1, U3
16/08/2022	4050,83	0,57%	U2	U3, U2
17/08/2022	4109,31	1,44%	U3	U2, U3
18/08/2022	4124,51	0,37%	U1	U3, U1
19/08/2022	4100,6	-0,58%	D2	U1, D2
20/08/2022	4090,38	-0,25%	D1	D2, D1
21/08/2022	4105,02	0,36%	U1	D1, U1
22/08/2022	4109,11	0,10%	U1	U1, U1
23/08/2022	4108,94	0,00%	D1	U1, D1
24/08/2022	4091,95	-0,41%	D1	D1, D1
25/08/2022	4146,22	1,33%	U3	D1, U3
26/08/2022	4137,64	-0,21%	D1	U3, D1
27/08/2022	4151,32	0,33%	U1	D1, U1
28/08/2022	4154,87	0,09%	U1	U1, U1
29/08/2022	4154,52	-0,01%	D1	U1, D1
30/08/2022	4129,79	-0,60%	D2	D1, D2
31/08/2022	4133,52	0,09%	U1	D2, U1
01/09/2022	4137,04	0,09%	U1	U1, U1
02/09/2022	4071,63	-1,58%	D3	U1, D3
03/09/2022	4055,99	-0,38%	D1	D3, D1
04/09/2022	4135,35	1,96%	U3	D1, U3
05/09/2022	4169,48	0,83%	U2	U3, U2
06/09/2022	4167,87	-0,04%	D1	U2, D1
07/09/2022	4119,58	-1,16%	D3	D1, D3
08/09/2022	4090,75	-0,70%	D2	D3, D2
09/09/2022	4061,22	-0,72%	D2	D2, D2
10/09/2022	4136,25	1,85%	U3	D2, U3
11/09/2022	4138,12	0,05%	U1	U3, U1
12/09/2022	4119,17	-0,46%	D1	U1, D1
13/09/2022	4137,64	0,45%	U1	D1, U1
14/09/2022	4130,62	-0,17%	D1	U1, D1
15/09/2022	4124,08	-0,16%	D1	D1, D1
16/09/2022	4136,28	0,30%	U1	D1, U1
17/09/2022	4109,9	-0,64%	D2	U1, D2
18/09/2022	4158,77	1,19%	U3	D2, U3
19/09/2022	4198,05	0,94%	U2	U3, U2
20/09/2022	4191,98	-0,14%	D1	U2, D1
21/09/2022	4192,63	0,02%	U1	D1, U1
22/09/2022	4145,58	-1,12%	D3	U1, D3
23/09/2022	4115,24	-0,73%	D2	D3, D2
24/09/2022	4151,28	0,88%	U2	D2, U2
25/09/2022	4205,45	1,30%	U3	U2, U3
26/09/2022	4205,52	0,00%	U1	U3, U1

27/09/2022	4179,83	-0,61%	D2	U1, D2
28/09/2022	4221,02	0,99%	U2	D2, U2
29/09/2022	4282,37	1,45%	U3	U2, U3
30/09/2022	4273,79	-0,20%	D1	U3, D1
01/10/2022	4283,85	0,24%	U1	D1, U1
02/10/2022	4267,52	-0,38%	D1	U1, D1
03/10/2022	4293,93	0,62%	U2	D1, U2
04/10/2022	4298,86	0,11%	U1	U2, U1
05/10/2022	4338,93	0,93%	U2	U1, U2
06/10/2022	4369,01	0,69%	U2	U2, U2
07/10/2022	4372,59	0,08%	U1	U2, U1
08/10/2022	4425,84	1,22%	U3	U1, U3
09/10/2022	4409,59	-0,37%	D1	U3, D1
10/10/2022	4388,71	-0,47%	D1	D1, D1
11/10/2022	4365,69	-0,52%	D2	D1, D2
12/10/2022	4381,89	0,37%	U1	D2, U1
13/10/2022	4348,33	-0,77%	D2	U1, D2
14/10/2022	4328,82	-0,45%	D1	D2, D1
15/10/2022	4378,41	1,15%	U3	D1, U3
16/10/2022	4376,86	-0,04%	D1	U3, D1
17/10/2022	4396,44	0,45%	U1	D1, U1
18/10/2022	4450,38	1,23%	U3	U1, U3
19/10/2022	4455,59	0,12%	U1	U3, U1
20/10/2022	4446,82	-0,20%	D1	U1, D1
21/10/2022	4411,59	-0,79%	D2	D1, D2
22/10/2022	4398,95	-0,29%	D1	D2, D1
23/10/2022	4409,53	0,24%	U1	D1, U1
24/10/2022	4439,26	0,67%	U2	U1, U2
25/10/2022	4472,16	0,74%	U2	U2, U2
26/10/2022	4510,04	0,85%	U2	U2, U2
27/10/2022	4505,42	-0,10%	D1	U2, D1
28/10/2022	4522,79	0,39%	U1	D1, U1
29/10/2022	4554,98	0,71%	U2	U1, U2
30/10/2022	4565,72	0,24%	U1	U2, U1
31/10/2022	4534,87	-0,68%	D2	U1, D2
01/11/2022	4536,34	0,03%	U1	D2, U1
02/11/2022	4554,64	0,40%	U1	U1, U1
03/11/2022	4567,46	0,28%	U1	U1, U1
04/11/2022	4566,75	-0,02%	D1	U1, D1
05/11/2022	4537,41	-0,64%	D2	D1, D2
06/11/2022	4582,23	0,99%	U2	D2, U2
07/11/2022	4588,96	0,15%	U1	U2, U1
08/11/2022	4576,73	-0,27%	D1	U1, D1
09/11/2022	4513,39	-1,38%	D3	D1, D3
10/11/2022	4501,89	-0,25%	D1	D3, D1
11/11/2022	4478,03	-0,53%	D2	D1, D2

12/11/2022	4518,44	0,90%	U2	D2, U2
13/11/2022	4499,38	-0,42%	D1	U2, D1
14/11/2022	4467,71	-0,70%	D2	D1, D2
15/11/2022	4468,83	0,03%	U1	D2, U1
16/11/2022	4464,05	-0,11%	D1	U1, D1
17/11/2022	4489,72	0,58%	U2	D1, U2
18/11/2022	4437,86	-1,16%	D3	U2, D3
19/11/2022	4404,33	-0,76%	D2	D3, D2
20/11/2022	4370,36	-0,77%	D2	D2, D2
21/11/2022	4369,71	-0,01%	D1	D2, D1
22/11/2022	4399,77	0,69%	U2	D1, U2
23/11/2022	4387,55	-0,28%	D1	U2, D1
24/11/2022	4436,01	1,10%	U3	D1, U3
25/11/2022	4376,31	-1,35%	D3	U3, D3
26/11/2022	4405,71	0,67%	U2	D3, U2
27/11/2022	4433,31	0,63%	U2	U2, U2
28/11/2022	4497,63	1,45%	U3	U2, U3
29/11/2022	4514,87	0,38%	U1	U3, U1
30/11/2022	4507,66	-0,16%	D1	U1, D1
01/12/2022	4515,77	0,18%	U1	D1, U1
02/12/2022	4496,83	-0,42%	D1	U1, D1
03/12/2022	4465,48	-0,70%	D2	D1, D2
04/12/2022	4451,14	-0,32%	D1	D2, D1
05/12/2022	4457,49	0,14%	U1	D1, U1
06/12/2022	4487,46	0,67%	U2	U1, U2
07/12/2022	4461,9	-0,57%	D2	U2, D2
08/12/2022	4467,44	0,12%	U1	D2, U1
09/12/2022	4505,1	0,84%	U2	U1, U2
10/12/2022	4450,32	-1,22%	D3	U2, D3
11/12/2022	4453,53	0,07%	U1	D3, U1
12/12/2022	4443,95	-0,22%	D1	U1, D1
13/12/2022	4402,2	-0,94%	D2	D1, D2
14/12/2022	4330	-1,64%	D3	D2, D3
15/12/2022	4320,06	-0,23%	D1	D3, D1
16/12/2022	4337,44	0,40%	U1	D1, U1
17/12/2022	4273,53	-1,47%	D3	U1, D3
18/12/2022	4274,51	0,02%	U1	D3, U1
19/12/2022	4299,7	0,59%	U2	U1, U2
20/12/2022	4288,05	-0,27%	D1	U2, D1
21/12/2022	4288,39	0,01%	U1	D1, U1
22/12/2022	4229,45	-1,37%	D3	U1, D3
23/12/2022	4263,75	0,81%	U2	D3, U2
24/12/2022	4258,19	-0,13%	D1	U2, D1
25/12/2022	4308,5	1,18%	U3	D1, U3
26/12/2022	4335,66	0,63%	U2	U3, U2
27/12/2022	4358,24	0,52%	U2	U2, U2

28/12/2022	4376,95	0,43%	U1	U2, U1
29/12/2022	4349,61	-0,62%	D2	U1, D2
30/12/2022	4327,78	-0,50%	D2	D2, D2
31/12/2022	4373,63	1,06%	U3	D2, U3
01/01/2023	4373,2	-0,01%	D1	U3, D1
02/01/2023	4314,6	-1,34%	D3	D1, D3
03/01/2023	4278	-0,85%	D2	D3, D2
04/01/2023	4224,16	-1,26%	D3	D2, D3
05/01/2023	4217,04	-0,17%	D1	D3, D1
06/01/2023	4247,68	0,73%	U2	D1, U2
07/01/2023	4186,77	-1,43%	D3	U2, D3
08/01/2023	4137,23	-1,18%	D3	D3, D3
09/01/2023	4117,37	-0,48%	D1	D3, D1
10/01/2023	4166,82	1,20%	U3	D1, U3
11/01/2023	4193,8	0,65%	U2	U3, U2
12/01/2023	4237,86	1,05%	U3	U2, U3
13/01/2023	4317,78	1,89%	U3	U3, U3
14/01/2023	4358,34	0,94%	U2	U3, U2
15/01/2023	4365,98	0,18%	U1	U2, U1
16/01/2023	4378,38	0,28%	U1	U1, U1
17/01/2023	4382,78	0,10%	U1	U1, U1
18/01/2023	4347,35	-0,81%	D2	U1, D2
19/01/2023	4415,24	1,56%	U3	D2, U3
20/01/2023	4411,55	-0,08%	D1	U3, D1
21/01/2023	4495,7	1,91%	U3	D1, U3
22/01/2023	4502,88	0,16%	U1	U3, U1
23/01/2023	4508,24	0,12%	U1	U1, U1
24/01/2023	4514,02	0,13%	U1	U1, U1
25/01/2023	4547,38	0,74%	U2	U1, U2
26/01/2023	4538,19	-0,20%	D1	U2, D1
27/01/2023	4556,62	0,41%	U1	D1, U1
28/01/2023	4559,34	0,06%	U1	U1, U1
29/01/2023	4550,43	-0,20%	D1	U1, D1
30/01/2023	4554,89	0,10%	U1	D1, U1
31/01/2023	4550,58	-0,09%	D1	U1, D1
01/02/2023	4567,8	0,38%	U1	D1, U1
02/02/2023	4594,63	0,59%	U2	U1, U2
03/02/2023	4569,78	-0,54%	D2	U2, D2
04/02/2023	4567,18	-0,06%	D1	D2, D1
05/02/2023	4549,34	-0,39%	D1	D1, D1
06/02/2023	4585,59	0,80%	U2	D1, U2
07/02/2023	4604,37	0,41%	U1	U2, U1
08/02/2023	4622,44	0,39%	U1	U1, U1
09/02/2023	4643,7	0,46%	U1	U1, U1
10/02/2023	4707,09	1,37%	U3	U1, U3
11/02/2023	4719,55	0,26%	U1	U3, U1

12/02/2023	4719,19	-0,01%	D1	U1, D1
13/02/2023	4740,56	0,45%	U1	D1, U1
14/02/2023	4768,37	0,59%	U2	U1, U2
15/02/2023	4698,35	-1,47%	D3	U2, D3
16/02/2023	4746,75	1,03%	U3	D3, U3
17/02/2023	4754,63	0,17%	U1	U3, U1
18/02/2023	4774,75	0,42%	U1	U1, U1
19/02/2023	4781,58	0,14%	U1	U1, U1
20/02/2023	4783,35	0,04%	U1	U1, U1
21/02/2023	4769,83	-0,28%	D1	U1, D1
22/02/2023	4742,83	-0,57%	D2	D1, D2
23/02/2023	4704,81	-0,80%	D2	D2, D2
24/02/2023	4688,68	-0,34%	D1	D2, D1
25/02/2023	4697,24	0,18%	U1	D1, U1
26/02/2023	4763,54	1,41%	U3	U1, U3
27/02/2023	4756,5	-0,15%	D1	U3, D1
28/02/2023	4783,45	0,57%	U2	D1, U2
01/03/2023	4780,24	-0,07%	D1	U2, D1
02/03/2023	4783,83	0,08%	U1	D1, U1
03/03/2023	4765,98	-0,37%	D1	U1, D1
04/03/2023	4739,21	-0,56%	D2	D1, D2
05/03/2023	4780,94	0,88%	U2	D2, U2
06/03/2023	4839,81	1,23%	U3	U2, U3
07/03/2023	4850,43	0,22%	U1	U3, U1
08/03/2023	4864,6	0,29%	U1	U1, U1
09/03/2023	4868,55	0,08%	U1	U1, U1
10/03/2023	4894,16	0,53%	U2	U1, U2
11/03/2023	4890,97	-0,07%	D1	U2, D1
12/03/2023	4927,93	0,76%	U2	D1, U2
13/03/2023	4924,97	-0,06%	D1	U2, D1
14/03/2023	4845,65	-1,61%	D3	D1, D3
15/03/2023	4906,19	1,25%	U3	D3, U3
16/03/2023	4958,61	1,07%	U3	U3, U3
17/03/2023	4942,81	-0,32%	D1	U3, D1
18/03/2023	4954,23	0,23%	U1	D1, U1
19/03/2023	4995,06	0,82%	U2	U1, U2
20/03/2023	4997,91	0,06%	U1	U2, U1
21/03/2023	5026,61	0,57%	U2	U1, U2
22/03/2023	5021,84	-0,09%	D1	U2, D1
23/03/2023	4953,17	-1,37%	D3	D1, D3
24/03/2023	5000,62	0,96%	U2	D3, U2
25/03/2023	5029,73	0,58%	U2	U2, U2
26/03/2023	5005,57	-0,48%	D1	U2, D1
27/03/2023	4975,51	-0,60%	D2	D1, D2
28/03/2023	4981,8	0,13%	U1	D2, U1
29/03/2023	5087,03	2,11%	U3	U1, U3

30/03/2023	5088,8	0,03%	U1	U3, U1
31/03/2023	5069,53	-0,38%	D1	U1, D1
01/04/2023	5078,18	0,17%	U1	D1, U1
02/04/2023	5069,76	-0,17%	D1	U1, D1
03/04/2023	5096,27	0,52%	U2	D1, U2
04/04/2023	5137,08	0,80%	U2	U2, U2
05/04/2023	5130,95	-0,12%	D1	U2, D1
06/04/2023	5078,65	-1,02%	D3	D1, D3
07/04/2023	5104,76	0,51%	U2	D3, U2
08/04/2023	5157,36	1,03%	U3	U2, U3
09/04/2023	5123,69	-0,65%	D2	U3, D2
10/04/2023	5117,94	-0,11%	D1	D2, D1
11/04/2023	5175,27	1,12%	U3	D1, U3
12/04/2023	5165,31	-0,19%	D1	U3, D1
13/04/2023	5150,48	-0,29%	D1	D1, D1
14/04/2023	5117,09	-0,65%	D2	D1, D2
15/04/2023	5149,42	0,63%	U2	D2, U2
16/04/2023	5178,51	0,56%	U2	U2, U2
17/04/2023	5224,62	0,89%	U2	U2, U2
18/04/2023	5241,53	0,32%	U1	U2, U1
19/04/2023	5234,18	-0,14%	D1	U1, D1
20/04/2023	5218,19	-0,31%	D1	D1, D1
21/04/2023	5203,58	-0,28%	D1	D1, D1
22/04/2023	5248,49	0,86%	U2	D1, U2
23/04/2023	5254,35	0,11%	U1	U2, U1

Tabella 34: Tabella Pivot sulle transizioni di stato osservate nell'indice SPX500 e calcolo delle probabilità di stato

Row Labels	Count of Transition	Probability
D1	162	
D1, D1	24	0,1481
D1, D2	22	0,1358
D1, D3	22	0,1358
D1, U1	41	0,2531
D1, U2	25	0,1543
D1, U3	28	0,1728
Check	162	1,0000
D2	94	
D2, D1	16	0,1702
D2, D2	11	0,1170
D2, D3	15	0,1596
D2, U1	17	0,1809
D2, U2	14	0,1489
D2, U3	21	0,2234
Check	94	1,0000
D3	108	
D3, D1	22	0,2037

D3, D2	22	0,2037
D3, D3	19	0,1759
D3, U1	15	0,1389
D3, U2	9	0,0833
D3, U3	21	0,1944
Check	108	1,0000
U1	158	
U1, D1	43	0,2722
U1, D2	17	0,1076
U1, D3	19	0,1203
U1, U1	41	0,2595
U1, U2	23	0,1456
U1, U3	15	0,0949
Check	158	1,0000
U2	105	
U2, D1	27	0,2571
U2, D2	10	0,0952
U2, D3	13	0,1238
U2, U1	22	0,2095
U2, U2	16	0,1524
U2, U3	17	0,1619
Check	105	1,0000
U3	124	
U3, D1	30	0,2419
U3, D2	12	0,0968
U3, D3	20	0,1613
U3, U1	23	0,1855
U3, U2	18	0,1452
U3, U3	21	0,1694
Check	124	1,0000

Figura 6: Definizione dei parametri del modello

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 states = ['D3', 'D2', 'D1', 'U1', 'U2', 'U3']
7
8 transition_matrix = pd.DataFrame({
9     'D3': [0.1759259259259260, 0.2037037037037040, 0.2037037037037040, 0.1388888888888890, 0.0833333333333333, 0.1944444444444440],
10    'D2': [0.1595744680851060, 0.1170212765957450, 0.1702127659574470, 0.1808510638297870, 0.1489361702127660, 0.2234042553191490],
11    'D1': [0.1358024691358020, 0.1358024691358020, 0.1481481481481480, 0.2530864197530860, 0.1543209876543210, 0.1728395061728390],
12    'U1': [0.1202531645569620, 0.1075949367088610, 0.2721518987341770, 0.2594936708860760, 0.1455696202531650, 0.0949367088607595],
13    'U2': [0.1238095238095240, 0.0952380952380952, 0.2571428571428570, 0.2095238095238100, 0.1523809523809520, 0.1619047619047620],
14    'U3': [0.1612903225806450, 0.0967741935483871, 0.2419354838709680, 0.1854838709677420, 0.1451612903225810, 0.1693548387096770]
15 }, index=states)
16
17 transition_matrix = transition_matrix.div(transition_matrix.sum(axis=1), axis=0)
18
19
20 state_to_return = {
21     'D3': -1.5,
22     'D2': -1.0,
23     'D1': -0.5,
24     'U1': 0.5,
25     'U2': 1.0,
26     'U3': 1.5
27 }

```

Figura 7: definizione dello stato di partenza e del numero di iterazioni

```

29 predicted_states = []
30 predicted_returns = []
31
32
33 current_state = 'D3'
34
35
36 n_predictions = 200
37
38
39 for _ in range(n_predictions):
40     next_state = np.random.choice(transition_matrix.columns, p=transition_matrix.loc[current_state].values)
41     predicted_states.append(next_state)
42     predicted_returns.append(state_to_return[next_state])
43     current_state = next_state
44
45
46 predicted_cumulative_returns = np.cumsum(predicted_returns)
47

```

Figura 8: Creazione dataframe e esportazione risultati in excel

```

49 predictions_df = pd.DataFrame({
50     'Predicted State': predicted_states,
51     'Predicted Return (%)': predicted_returns,
52     'Cumulative Return (%)': predicted_cumulative_returns
53 })
54 predictions_df.to_excel("predicted_states_and_returns.xlsx", index=False)
55
56
57 for i, (state, ret) in enumerate(zip(predicted_states, predicted_returns), 1):
58     print(f"Prediction {i}: State = {state}, Return = {ret}%")
59
60
61 plt.plot(predictions_df.index, predictions_df['Cumulative Return (%)'], label='Predicted Cumulative Return', marker='o')
62 plt.xlabel('Days')
63 plt.ylabel('Cumulative Return (%)')
64 plt.title('Predicted Cumulative Returns Over Time')
65 plt.legend()
66 plt.grid(True)
67 plt.show()
68

```

Tabella 35: Prediction del modello

Date	Close	Real Change	Predicted State	Predicted return (%)	Close (Predicted)
05/10/2022	4338,930176	0,93%	U3	1,5%	
06/10/2022	4369,009766	0,69%	D2	-1,0%	4295,54087
07/10/2022	4372,589844	0,08%	D3	-1,5%	4303,47462
08/10/2022	4425,839844	1,22%	U2	1,0%	4416,31574
09/10/2022	4409,589844	-0,37%	D2	-1,0%	4381,58145
10/10/2022	4388,709961	-0,47%	U2	1,0%	4453,68574
11/10/2022	4365,689941	-0,52%	D2	-1,0%	4344,82286
12/10/2022	4381,890137	0,37%	U1	0,5%	4387,51839
13/10/2022	4348,330078	-0,77%	D2	-1,0%	4338,07124
14/10/2022	4328,819824	-0,45%	D1	-0,5%	4326,58843
15/10/2022	4378,410156	1,15%	D1	-0,5%	4307,17573
16/10/2022	4376,859863	-0,04%	U1	0,5%	4400,30221
17/10/2022	4396,439941	0,45%	U3	1,5%	4442,51276
18/10/2022	4450,379883	1,23%	D1	-0,5%	4374,45774

19/10/2022	4455,589844	0,12%	U1	0,5%	4472,63178
20/10/2022	4446,819824	-0,20%	D2	-1,0%	4411,03395
21/10/2022	4411,589844	-0,79%	D1	-0,5%	4424,58573
22/10/2022	4398,950195	-0,29%	D2	-1,0%	4367,47395
23/10/2022	4409,529785	0,24%	U2	1,0%	4442,9397
24/10/2022	4439,259766	0,67%	D2	-1,0%	4365,43449
25/10/2022	4472,160156	0,74%	D3	-1,5%	4372,67087
26/10/2022	4510,040039	0,85%	D3	-1,5%	4405,07775
27/10/2022	4505,419922	-0,10%	D2	-1,0%	4464,93964
28/10/2022	4522,790039	0,39%	D2	-1,0%	4460,36572
29/10/2022	4554,97998	0,71%	D3	-1,5%	4454,94819
30/10/2022	4565,720215	0,24%	U1	0,5%	4577,75488
31/10/2022	4534,870117	-0,68%	U3	1,5%	4634,20602
01/11/2022	4536,339844	0,03%	U3	1,5%	4602,89317
02/11/2022	4554,640137	0,40%	D3	-1,5%	4468,29475
03/11/2022	4567,459961	0,28%	D2	-1,0%	4509,09374
04/11/2022	4566,75	-0,02%	U3	1,5%	4635,97186
05/11/2022	4537,410156	-0,64%	U3	1,5%	4635,25125
06/11/2022	4582,22998	0,99%	U2	1,0%	4582,78426
07/11/2022	4588,959961	0,15%	D2	-1,0%	4536,40768
08/11/2022	4576,72998	-0,27%	D1	-0,5%	4566,01516
09/11/2022	4513,390137	-1,38%	U1	0,5%	4599,61363
10/11/2022	4501,890137	-0,25%	U3	1,5%	4581,09099
11/11/2022	4478,029785	-0,53%	U1	0,5%	4524,39959
12/11/2022	4518,439941	0,90%	D1	-0,5%	4455,63964
13/11/2022	4499,379883	-0,42%	U2	1,0%	4563,62434
14/11/2022	4467,709961	-0,70%	D1	-0,5%	4476,88298
15/11/2022	4468,830078	0,03%	U3	1,5%	4534,72561
16/11/2022	4464,049805	-0,11%	U3	1,5%	4535,86253
17/11/2022	4489,720215	0,58%	D3	-1,5%	4397,08906
18/11/2022	4437,859863	-1,16%	D3	-1,5%	4422,37441
19/11/2022	4404,330078	-0,76%	D3	-1,5%	4371,29197
20/11/2022	4370,359863	-0,77%	D1	-0,5%	4382,30843
21/11/2022	4369,709961	-0,01%	D3	-1,5%	4304,80447
22/11/2022	4399,77002	0,69%	U3	1,5%	4435,25561
23/11/2022	4387,549805	-0,28%	D2	-1,0%	4355,77232
24/11/2022	4436,009766	1,10%	D2	-1,0%	4343,67431
25/11/2022	4376,310059	-1,35%	U1	0,5%	4458,18981
26/11/2022	4405,709961	0,67%	U3	1,5%	4441,95471
27/11/2022	4433,310059	0,63%	D2	-1,0%	4361,65286
28/11/2022	4497,629883	1,45%	U3	1,5%	4499,80971
29/11/2022	4514,870117	0,38%	D2	-1,0%	4452,65358
30/11/2022	4507,660156	-0,16%	U1	0,5%	4537,44447
01/12/2022	4515,77002	0,18%	D1	-0,5%	4485,12186
02/12/2022	4496,830078	-0,42%	U1	0,5%	4538,34887
03/12/2022	4465,47998	-0,70%	U2	1,0%	4541,79838
04/12/2022	4451,140137	-0,32%	U2	1,0%	4510,13478
05/12/2022	4457,490234	0,14%	U1	0,5%	4473,39584

06/12/2022	4487,459961	0,67%	U1	0,5%	4479,77769
07/12/2022	4461,899902	-0,57%	U1	0,5%	4509,89726
08/12/2022	4467,439941	0,12%	D2	-1,0%	4417,2809
09/12/2022	4505,100098	0,84%	D2	-1,0%	4422,76554
10/12/2022	4450,319824	-1,22%	U3	1,5%	4572,6766
11/12/2022	4453,529785	0,07%	D1	-0,5%	4428,06823
12/12/2022	4443,950195	-0,22%	U1	0,5%	4475,79743
13/12/2022	4402,200195	-0,94%	U1	0,5%	4466,16995
14/12/2022	4330	-1,64%	U1	0,5%	4424,2112
15/12/2022	4320,060059	-0,23%	U3	1,5%	4394,95
16/12/2022	4337,439941	0,40%	U3	1,5%	4384,86096
17/12/2022	4273,529785	-1,47%	D2	-1,0%	4294,06554
18/12/2022	4274,509766	0,02%	U2	1,0%	4316,26508
19/12/2022	4299,700195	0,59%	D2	-1,0%	4231,76467
20/12/2022	4288,049805	-0,27%	D1	-0,5%	4278,20169
21/12/2022	4288,390137	0,01%	D3	-1,5%	4223,72906
22/12/2022	4229,450195	-1,37%	D2	-1,0%	4245,50624
23/12/2022	4263,75	0,81%	D1	-0,5%	4208,30294
24/12/2022	4258,189941	-0,13%	D2	-1,0%	4221,1125
25/12/2022	4308,5	1,18%	D3	-1,5%	4194,31709
26/12/2022	4335,660156	0,63%	U3	1,5%	4373,1275
27/12/2022	4358,240234	0,52%	U2	1,0%	4379,01676
28/12/2022	4376,950195	0,43%	D1	-0,5%	4336,44903
29/12/2022	4349,609863	-0,62%	D1	-0,5%	4355,06544
30/12/2022	4327,779785	-0,50%	U2	1,0%	4393,10596
31/12/2022	4373,629883	1,06%	D1	-0,5%	4306,14089
01/01/2023	4373,200195	-0,01%	U3	1,5%	4439,23433
02/01/2023	4314,600098	-1,34%	D2	-1,0%	4329,46819
03/01/2023	4278	-0,85%	D1	-0,5%	4293,0271
04/01/2023	4224,160156	-1,26%	U1	0,5%	4299,39
05/01/2023	4217,040039	-0,17%	D1	-0,5%	4203,03936
06/01/2023	4247,680176	0,73%	D3	-1,5%	4153,78444
07/01/2023	4186,77002	-1,43%	U1	0,5%	4268,91858
08/01/2023	4137,22998	-1,18%	D2	-1,0%	4144,90232
09/01/2023	4117,370117	-0,48%	U3	1,5%	4199,28843
10/01/2023	4166,819824	1,20%	U2	1,0%	4158,54382
11/01/2023	4193,799805	0,65%	U2	1,0%	4208,48802
12/01/2023	4237,859863	1,05%	D2	-1,0%	4151,86181
13/01/2023	4317,779785	1,89%	U1	0,5%	4259,04916
14/01/2023	4358,339844	0,94%	U1	0,5%	4339,36868
15/01/2023	4365,97998	0,18%	U2	1,0%	4401,92324
16/01/2023	4378,379883	0,28%	U1	0,5%	4387,80988
17/01/2023	4382,779785	0,10%	D3	-1,5%	4312,70418
18/01/2023	4347,350098	-0,81%	U2	1,0%	4426,60758
19/01/2023	4415,240234	1,56%	D1	-0,5%	4325,61335
20/01/2023	4411,549805	-0,08%	U3	1,5%	4481,46884
21/01/2023	4495,700195	1,91%	D1	-0,5%	4389,49206
22/01/2023	4502,879883	0,16%	U3	1,5%	4563,1357

23/01/2023	4508,240234	0,12%	U1	0,5%	4525,39428
24/01/2023	4514,02002	0,13%	U3	1,5%	4575,86384
25/01/2023	4547,379883	0,74%	D1	-0,5%	4491,44992
26/01/2023	4538,189941	-0,20%	D1	-0,5%	4524,64298
27/01/2023	4556,620117	0,41%	U1	0,5%	4560,88089
28/01/2023	4559,339844	0,06%	D2	-1,0%	4511,05392
29/01/2023	4550,430176	-0,20%	U3	1,5%	4627,72994
30/01/2023	4554,890137	0,10%	D1	-0,5%	4527,67802
31/01/2023	4550,580078	-0,09%	U2	1,0%	4600,43904
01/02/2023	4567,799805	0,38%	U2	1,0%	4596,08588
02/02/2023	4594,629883	0,59%	D2	-1,0%	4522,12181
03/02/2023	4569,779785	-0,54%	D1	-0,5%	4571,65673
04/02/2023	4567,180176	-0,06%	U3	1,5%	4638,32648
05/02/2023	4549,339844	-0,39%	D3	-1,5%	4498,67247
06/02/2023	4585,589844	0,80%	D3	-1,5%	4481,09975
07/02/2023	4604,370117	0,41%	D2	-1,0%	4539,73395
08/02/2023	4622,439941	0,39%	U2	1,0%	4650,41382
09/02/2023	4643,700195	0,46%	D1	-0,5%	4599,32774
10/02/2023	4707,089844	1,37%	U1	0,5%	4666,9187
11/02/2023	4719,549805	0,26%	D2	-1,0%	4660,01895
12/02/2023	4719,189941	-0,01%	D1	-0,5%	4695,95206
13/02/2023	4740,560059	0,45%	D1	-0,5%	4695,59399
14/02/2023	4768,370117	0,59%	D2	-1,0%	4693,15446
15/02/2023	4698,350098	-1,47%	D3	-1,5%	4696,84457
16/02/2023	4746,75	1,03%	D1	-0,5%	4674,85835
17/02/2023	4754,629883	0,17%	D1	-0,5%	4723,01625
18/02/2023	4774,75	0,42%	D1	-0,5%	4730,85673
19/02/2023	4781,580078	0,14%	D1	-0,5%	4750,87625
20/02/2023	4783,350098	0,04%	U2	1,0%	4829,39588
21/02/2023	4769,830078	-0,28%	U1	0,5%	4807,26685
22/02/2023	4742,830078	-0,57%	U3	1,5%	4841,37753
23/02/2023	4704,810059	-0,80%	U2	1,0%	4790,25838
24/02/2023	4688,680176	-0,34%	D1	-0,5%	4681,28601
25/02/2023	4697,240234	0,18%	U3	1,5%	4759,01038
26/02/2023	4763,540039	1,41%	D1	-0,5%	4673,75403
27/02/2023	4756,5	-0,15%	D3	-1,5%	4692,08694
28/02/2023	4783,450195	0,57%	U1	0,5%	4780,2825
01/03/2023	4780,240234	-0,07%	U1	0,5%	4807,36745
02/03/2023	4783,830078	0,08%	U3	1,5%	4851,94384
03/03/2023	4765,97998	-0,37%	U3	1,5%	4855,58753
04/03/2023	4739,209961	-0,56%	U3	1,5%	4837,46968
05/03/2023	4780,939941	0,88%	U3	1,5%	4810,29811
06/03/2023	4839,810059	1,23%	D2	-1,0%	4733,13054
07/03/2023	4850,430176	0,22%	U1	0,5%	4864,00911
08/03/2023	4864,600098	0,29%	D2	-1,0%	4801,92587
09/03/2023	4868,549805	0,08%	U2	1,0%	4913,2461
10/03/2023	4894,160156	0,53%	D3	-1,5%	4795,52156
11/03/2023	4890,970215	-0,07%	D3	-1,5%	4820,74775

12/03/2023	4927,930176	0,76%	D3	-1,5%	4817,60566
13/03/2023	4924,970215	-0,06%	D2	-1,0%	4878,65087
14/03/2023	4845,649902	-1,61%	U3	1,5%	4998,84477
15/03/2023	4906,189941	1,25%	U1	0,5%	4869,87815
16/03/2023	4958,609863	1,07%	U1	0,5%	4930,72089
17/03/2023	4942,810059	-0,32%	U2	1,0%	5008,19596
18/03/2023	4954,22998	0,23%	D2	-1,0%	4893,38196
19/03/2023	4995,060059	0,82%	D1	-0,5%	4929,45883
20/03/2023	4997,910156	0,06%	U2	1,0%	5045,01066
21/03/2023	5026,609863	0,57%	U2	1,0%	5047,88926
22/03/2023	5021,839844	-0,09%	U2	1,0%	5076,87596
23/03/2023	4953,169922	-1,37%	U3	1,5%	5097,16744
24/03/2023	5000,620117	0,96%	D2	-1,0%	4903,63822
25/03/2023	5029,72998	0,58%	U3	1,5%	5075,62942
26/03/2023	5005,569824	-0,48%	U2	1,0%	5080,02728
27/03/2023	4975,509766	-0,60%	U3	1,5%	5080,65337
28/03/2023	4981,799805	0,13%	U2	1,0%	5025,26486
29/03/2023	5087,029785	2,11%	D1	-0,5%	4956,89081
30/03/2023	5088,799805	0,03%	U3	1,5%	5163,33523
31/03/2023	5069,529785	-0,38%	U3	1,5%	5165,1318
01/04/2023	5078,180176	0,17%	U3	1,5%	5145,57273
02/04/2023	5069,759766	-0,17%	U2	1,0%	5128,96198
03/04/2023	5096,27002	0,52%	U1	0,5%	5095,10856
04/04/2023	5137,080078	0,80%	D3	-1,5%	5019,82597
05/04/2023	5130,950195	-0,12%	U2	1,0%	5188,45088
06/04/2023	5078,649902	-1,02%	U1	0,5%	5156,60495
07/04/2023	5104,759766	0,51%	D1	-0,5%	5053,25665
08/04/2023	5157,359863	1,03%	D2	-1,0%	5053,71217
09/04/2023	5123,689941	-0,65%	D2	-1,0%	5105,78626
10/04/2023	5117,939941	-0,11%	D3	-1,5%	5046,83459
11/04/2023	5175,27002	1,12%	U2	1,0%	5169,11934
12/04/2023	5165,310059	-0,19%	U3	1,5%	5252,89907
13/04/2023	5150,47998	-0,29%	U2	1,0%	5216,96316
14/04/2023	5117,089844	-0,65%	U1	0,5%	5176,23238
15/04/2023	5149,419922	0,63%	D2	-1,0%	5065,91895
16/04/2023	5178,509766	0,56%	D2	-1,0%	5097,92572
17/04/2023	5224,620117	0,89%	D2	-1,0%	5126,72467
18/04/2023	5241,529785	0,32%	D1	-0,5%	5198,49702
19/04/2023	5234,180176	-0,14%	D3	-1,5%	5162,90684
20/04/2023	5218,189941	-0,31%	D1	-0,5%	5208,00927
21/04/2023	5203,580078	-0,28%	U3	1,5%	5296,46279
22/04/2023	5248,490234	0,86%	D2	-1,0%	5151,54428

Appendice 2: generazione matrici aggiustate per il beta

Figura 9: Determinazione dei parametri e input beta

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3
4 states = ['D3', 'D2', 'D1', 'U1', 'U2', 'U3']
5
6 transition_matrix = np.array([
7     [0.1759259259259260, 0.2037037037037040, 0.2037037037037040, 0.1388888888888890, 0.0833333333333333, 0.1944444444444440],
8     [0.1595744680851060, 0.1170212765957450, 0.1702127659574470, 0.1808510638297870, 0.1489361702127660, 0.2234042553191490],
9     [0.1358024691358020, 0.1358024691358020, 0.1481481481481480, 0.2530864197530860, 0.1543209876543210, 0.1728395061728390],
10    [0.1202531645569620, 0.1075949367088610, 0.2721518987341770, 0.2594936708860760, 0.1455696202531650, 0.0949367088607595],
11    [0.1238095238095240, 0.0952380952380952, 0.2571428571428570, 0.2095238095238100, 0.1523809523809520, 0.1619047619047620],
12    [0.1612903225806450, 0.0967741935483871, 0.2419354838709680, 0.1854838709677420, 0.1451612903225810, 0.1693548387096770]
13 ])
14
15 beta = 1.396809799
16
```

Figura 10: Creazione e normalizzazione della matrice modificata ed esportazione in excel

```
18 def adjust_transition_matrix(matrix, beta, weight=0.5):
19     adjusted_matrix = np.copy(matrix)
20
21     for i in range(len(matrix)):
22         for j in range(len(matrix[i])):
23             if j > i:
24                 adjusted_matrix[i][j] = (1 - weight) * matrix[i][j] + weight * matrix[i][j] * beta
25             elif j < i:
26                 adjusted_matrix[i][j] = (1 - weight) * matrix[i][j] + weight * matrix[i][j] / beta
27
28     adjusted_matrix = adjusted_matrix / adjusted_matrix.sum(axis=1)[:, None]
29
30     return adjusted_matrix
31
32 adjusted_transition_matrix = adjust_transition_matrix(transition_matrix, beta, weight=0.5)
33 print(adjusted_transition_matrix)
34
35 df = pd.DataFrame(adjusted_transition_matrix, index=states, columns=states)
36 df.to_excel('adjusted_transition_matrix.xlsx', index=True)
37
```