Dipartimento di Economia e Finanza

Indirizzo Banche ed Intermediari Finanziari

I Sistemi di Scommesse e il Loro Utilizzo nella Finanza

Relatore:
Prof. Hlafo Alfie Mimun
Correlatore:
Prof. Giancarlo Mazzoni

Candidato:
Lorenzo Cianchetta
738971

Anno Accademico 2023/2024

A chi mi ha sempre sostenuto, anche senza saperlo.

Indice

Introduzione

L'attività d'investimento, come il gioco d'azzardo, implica il rischio di risorse su un evento caratterizzato da un risultato non certo, con il fine di ottenere un guadagno. La difficoltà maggiore, quando si parla di ciò, è rappresentata dalla scelta della migliore strategia possibile per una data opportunità di scommessa, poiché, la decisione preferibile, rende le probabilità di produrre profitto significativamente maggiori. L'individuazione di suddette strategie ottimali ha portato matematici ed economisti ad affrontare ed analizzare il fenomeno, al fine di poter individuare il corretto quantitativo di capitale da investire in ciascuna scommessa, per fare in modo che la funzione di utilità dello scommettitore sia massimizzata. Risulta fondamentale, per aumentare le possibilità di guadagno derivanti da un'opportunità di scommessa, anche definire correttamente la natura del gioco e, dunque, le caratteristiche della scommessa stessa, che forniscono all'investitore informazioni cruciali per selezionare la strategia ottimale.

Il Criterio di Kelly, introdotto da John L. Kelly nel 1956 (vedi [5]), è un metodo che assume un'importanza centrale per stabilire una strategia di investimento da intraprendere in presenza di un gioco favorevole per lo scommettitore. Questo sistema infatti richiede che la scommessa sia vantaggiosa per l'investitore, oppure, nel caso di molteplici scommesse simultanee, che almeno una tra queste sia favorevole. Queste due condizioni sono necessarie per avere una funzione di utilità, che rappresenta il tasso di crescita del capitale, strettamente concava e dotata quindi di massimo globale. Il Sistema di Kelly procura infatti allo scommettitore l'informazione relativa alla quantità di capitale da puntare operando la massimizzazione della funzione di utilità, esigendo quindi che questa soddisfi la richiesta di cui sopra. L'applicazione di questa strategia evita dunque che il guadagno cresca in modo non ottimale e che l'investitore sperimenti un rovinoso fallimento. L'uso della teoria di Kelly, nel tempo, è stato esteso a molti campi quali quello delle scommesse sportive (vedi [6], [11], [19], [20]), quello del blackjack (vedi [3], [4], [14], [18], [19]) e quello dell'investimento azionario (vedi [8], [9], [10], [14], [16], [19], [20]), ciò ha portato suddetto sistema a diventare parte della teoria dell'investimento e ad essere utilizzato da illustri investitori tra cui Warren Buffett.

Tuttavia, il Sistema di Kelly potrebbe risultare non ottimale, poiché la scommessa da effettuare, come nella maggior parte dei giochi dei casinò, può essere di natura svantaggiosa. Il Sistema Martingala (vedi [1]), che impone al giocatore di effettuare più volte la stessa scommessa fermandosi alla prima vincita o raddoppiando la puntata antecedente in caso di perdita, risulta utile in questo contesto. Infatti esso permette di ricavare un profitto equivalente all'investimento iniziale con probabilità uno, qualora il giocatore sia dotato di capitale infinito. La struttura della strategia rende palese la necessità di un capitale di partenza adeguatamente elevato, capace di assorbire le perdite che potrebbero verificarsi prima della vincita e rendere dunque il sistema profittevole. Questo spesso rappresenta un ostacolo all'utilizzo del Sistema Martingala, che, nonostante ciò, viene sovente impiegato nel gioco della roulette (vedi [14], [18]) e nel forex trading (vedi [7]).

Con lo scopo di introdurre i fondamenti teorici necessari ad analizzare i vari aspetti dei giochi, a comprendere i sistemi di scommesse e le implicazioni che il loro utilizzo ha sulla crescita del capitale, esploriamo nel primo capitolo i processi stocastici noti come martingale, supermartingale e submartingale (vedi [3]). In virtù della loro capacità di predire il comportamento di un gioco verranno esaminate le

loro caratteristiche e le loro qualità, inoltre, sarà trattato un altro fondamentale risultato, ovvero il Teorema dell'Arresto Opzionale.
Nel capitolo successivo seguirà uno studio focalizzato sui sistemi di scommesse, in particolare si tratteranno maggiormente nel dettaglio quelli citati in precedenza, Il Criterio di Kelly e il Sistema Martingala.
Il fulcro dell'attenzione poi, nel capitolo terzo, si sposterà sull'applicazione del Criterio di Kelly ad un portafoglio azionario. Considerando un ipotetico portafoglio composto da due titoli che possono subire variazioni di prezzo, si procederà ad individuare le frazioni di capitale ottimali da investire previste dalla strategia, con il fine ultimo di mostrare come questa porti all'ottimizzazione del capitale nel lungo periodo, operando anche delle simulazioni.
Per concludere, nel capitolo ultimo, attraverso un esempio, è discusso l'utilizzo del Sistema Martingala nel mercato dei cambi, la sezione finale, in aggiunta, fornisce delle simulazioni con il fine di verificare pregi e limiti del Sistema Martingala.

Capitolo 1

Martingale a Tempo Discreto, Tempi d'Arresto e Teorema dell'Arresto Opzionale

In questo capitolo verrà effettuata la trattazione di uno specifico processo stocastico noto con il nome di martingala e di processi simili conosciuti rispettivamente come supermartingala e submartingala, attraverso la definizione di questi concetti ed approfondendo la loro disamina con appropriati esempi. Si procederà poi, sempre attraverso la formalizzazione dei concetti e l'utilizzo di esempi, ad illustrare il concetto di tempo d'arresto ed infine ad esaminare il Teorema dell'Arresto Opzionale. Va specificato che il contesto in cui opereremo è quello di un tempo discreto in modo da poter analizzare questi processi per round. Risulta inoltre importante evidenziare che i processi assumeranno una quantità numerabile di valori, quindi anche lo spazio, che corrisponde all'insieme dei valori assunti, è da considerarsi discreto.

1.1 Martingale, Submartingale e Supermartingale a Tempo Discreto

La martingala è un particolare tipo di processo stocastisco che gode di proprietà molto utili, le quali la rendono un ottimo strumento per analizzare determinati fenomeni. Tra queste desiderabili caratteristiche che possiede la più importante è quella di avere valore atteso costante nel tempo.

Per chiarezza definiamo un processo stocastico come una successione di variabili aleatorie indicizzata da un parametro, quest'ultimo può essere anche pensato come un indice temporale, se questo parametro assume quindi valori numerabili è possibile parlare di processo stocastico a tempo discreto.

Procediamo con l'illustrazione di un esempio volto ad introdurre i concetti appena citati.
Ipotizziamo di effettuare più lanci con una moneta non truccata e di guadagnare 1 euro per ogni testa che esce, mentre perdiamo 1 euro per ogni lancio in cui esce croce. La nostra attenzione è diretta alla vincita complessiva ottenuta in n lanci. Questo problema può essere formulato come segue: definiamo con X_i la vincita all' i-esimo lancio, ovvero

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'}i\text{-esimo lancio è testa,} \\ -1, & \text{se l'}i\text{-esimo lancio è croce.} \end{cases}$$

Denotiamo con S_n la vincita in n lanci, che corrisponde a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Concentriamoci quindi su S_n per $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Se ipotizziamo di aver effettuato i primi n lanci e dunque di conoscere il valore di $X_1, ..., X_n$, è naturale domandarsi quale sia la previsione che si può fare per la media di S_{n+1}. Il nostro obiettivo è quindi calcolare

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n].$$

Al fine di calcolare questa quantità iniziamo notando che

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] \\ &= \mathbb{E}[S_n \mid X_1, ..., X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Essendo i lanci della moneta indipendenti si osserva che $X_1, X_2, ...$ è una successione di variabili indipendenti, ne segue quindi che

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \tag{1.2}$$

questo lo possiamo scrivere grazie all'assunzione di aver usato una moneta non truccata che ci ha permesso quindi di dire che $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Inoltre possiamo osservare che quando condizioniamo a $X_1, ..., X_n$, il valore di S_n è noto difatti sappiamo che $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Conseguentemente otteniamo

$$\mathbb{E}[S_n \mid X_1, ..., X_n] = S_n. \tag{1.3}$$

Procediamo quindi ad inserire le identità in (1.2) e in (1.3) nell'identità (1.1), ottenendo

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = \mathbb{E}[S_n \mid X_1, ..., X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = S_n + 0 = S_n.$$

Abbiamo quindi che

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = S_n, \tag{1.4}$$

ovvero che all'$(n+1)$-esimo lancio, avendo coscienza di cosa è successo nei primi n lanci, la previsione della vincita che percepiremo in media corrisponde alla vincita complessiva ottenuta nei primi n lanci. Alla base del concetto di martingala vi è questa identità, che insieme ad altre ipotesi permette di affermare che la successione $S_1, S_2, ...$ è appunto appartenete alla tipologia di processi stocastici protagonista della nostra analisi. Osservando invece la successione $X_1, X_2, ...$ possiamo notare che questa è l'indispensabile informazione che abbiamo per studiare la successione $S_1, S_2, ...$ L'informazione a nostra disposizione aumenta ad ogni lancio, inglobando sempre più variabili della successione $X_1, X_2, ...$ Quest'ultima successione, che denomineremo filtrazione, è necessaria per stabilire la proprietà (1.4), questo è il motivo per cui diremo che $S_1, S_2, ...$ è una martingala rispetto alla filtrazione $X_1, X_2, ...$ La successione analizzata in questo esempio ricade nella definizione di processo stocastico a tempo discreto data all'inizio del paragrafo.

Passiamo ora a definire il concetto di filtrazione e quello di martingala, formalizzando ciò che abbiamo appena introdotto.

Definizione 1.1. *Una filtrazione (discreta) è una successione di variabili aleatorie* $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$.

Una filtrazione può essere dunque vista come l'informazione che man mano viene acquisita e incorporata.

Definizione 1.2. *Sia* $\{M_n\}_{n>0}$ *un processo stocastico e sia* $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *una filtrazione. Supponiamo la validità delle seguenti proprietà:*

(i) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *fissato;*

(ii) il processo $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$*, ovvero* M_n *è noto se si conosce il valore di* $Y_1, ..., Y_n$*;*

(iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] = M_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Si può allora dire che il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Le successioni $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ e $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ dell'esempio introduttivo hanno rispettivamente il ruolo delle successioni $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ e $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, facendoci quindi concludere che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

È stato già anticipato che la proprietà maggiormente caratterizzante delle martingale è la (iii), difatti quando questa è meno vincolante possiamo parlare di altri processi chiamati submartingale o supermartingale, che ora andiamo a definire più rigorosamente.

Definizione 1.3. *Sia* $\{M_n\}_{n>0}$ *un processo stocastico e sia* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una filtrazione. Supponiamo la validità delle seguenti proprietà:*

(i) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *fissato;*

(ii) il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, *ovvero* M_n *è noto se si conosce il valore di* $Y_1, ..., Y_n$*;*

(iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] \leq M_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Si può allora dire che il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Definizione 1.4. *Sia* $\{M_n\}_{n>0}$ *un processo stocastico e sia* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una filtrazione. Supponiamo la validità delle seguenti proprietà:*

(i) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *fissato;*

(ii) il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, *ovvero* M_n *è noto se si conosce il valore di* $Y_1, ..., Y_n$*;*

(iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] \geq M_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Si può allora dire che il processo $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Da queste definizioni possiamo osservare che $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ se e solo se $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è sia una supermartingala che una submartingala rispetto alla filtrazione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Ora con l'aiuto di una disuguaglianza nota come Disuguaglianza Triangolare (si veda la Proposizione A.1) e della Proposizione A.2 procediamo nel discutere un esempio, che darà applicazione alle definizioni precedenti e farà chiarezza sulla classificazione di martingale, supermartingale e submartingale.

Esempio 1.1. *Si supponga di effettuare più lanci di una moneta truccata, dove la probabilità di ottenere testa è p. Per ogni testa ottenuta si vince $a > 0$ euro, per ogni croce se ne perdono $b > 0$. Definiamo la vincita ottenuta al lancio i-esimo con X_i, ottenendo dunque*

$$X_i = \begin{cases} a, & \textit{se esce testa,} \\ -b, & \textit{se esce croce,} \end{cases}$$

quindi

$$\mathbb{P}(X_i = a) = p, \qquad \mathbb{P}(X_i = -b) = 1 - p.$$

Definiamo il processo stocastico

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Analizzando il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ vediamo come

(1) dalla Disuguaglianza Triangolare abbiamo che

$$|X_1 + ... + X_n| \leq |X_1| + ... + |X_n|$$

inoltre, dall Proposizione A.2 si ha

$$\mathbb{E}[|S_n|] = \mathbb{E}[|X_1 + ... + X_n] \leq \mathbb{E}[|X_1| + ... + |X_n|] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|].$$

Possiamo osservare che

$$\mathbb{E}[|X_i|] = |a| \cdot p + |-b| \cdot (1-p) \underset{b>0}{=} ap + b(1-p).$$

Quindi per un $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *fissato si ottiene*

$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|] = \sum_{i=1}^{n} (ap + b(1-p)) = (ap + b(1-p)) \cdot n < \infty.$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che a,b sono numeri fissati, n invece è pensato come tale. Questo è ciò che prova la proprietà (i) presente nelle definizioni di martingala, submartingala e supermartingala.

(2) Conoscendo il valore di $X_1, ..., X_n$, *siamo anche a conoscenza del valore di* S_n *poiché* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Di conseguenza* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è adattato alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$. *Questa caratteristica riflette la proprietà (ii) che possiamo trovare nella definizioni di martingala, submartingala e supermartingala.*

(3) Procediamo a calcolare $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n]$. *Sapendo che*

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] \\ &= \mathbb{E}[S_n \mid X_1, ..., X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = \\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}], \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato

$$\mathbb{E}[S_n \mid X_1, ..., X_n] = S_n$$

come conseguenza del fatto che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è adatto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*, mentre*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}]$$

perché le variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *sono indipendenti. Inoltre sapendo che*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = ap - b(1-p)$$

otteniamo

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + ap - b(1-p) = S_n + p(a+b) - b.$$

La caratteristica ottenuta rispecchia la propietà (iii) delle definizioni di martingala, submartingala e supermartingala a seconda del segno assunto dal termine $p(a+b) - b$.

Si può quindi osservare che

- *se* $p(a+b) - b = 0$*, quindi se* $p = \frac{b}{a+b}$ *allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.
- *se* $p(a+b) - b \leq 0$*, quindi se* $p \leq \frac{b}{a+b}$ *allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.
- *se* $p(a+b) - b \geq 0$*, quindi se* $p \geq \frac{b}{a+b}$ *allora* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Quando $p < \frac{b}{a+b}$ *vediamo che ad ogni lancio il gioco è svantaggioso per noi, questo perché il valore atteso della vincita è negativo* ($\mathbb{E}[X_i] < 0$)*. Il gioco risulta invece vantaggioso per noi quando la vincita ha valore atteso positivo* ($\mathbb{E}[X_i] > 0$)*, quindi quando* $p > \frac{b}{a+b}$*. Se* $p = \frac{b}{a+b}$ *allora il gioco è equo poiché difatti abbiamo un valore atteso della vincita nullo* ($\mathbb{E}[X_i] = 0$)*. Queste osservazioni ci rendono chiaro il* *fatto che le submartingale siano processi associati a giochi vantaggiosi per noi e svantaggiosi per il banco, mentre le supermartingale sono processi associati a giochi svantaggiosi per noi e vantaggiosi per il banco.*

Come già anticipato all'inizio del capitolo, la più importante proprietà delle martingale è quella di avere valore atteso costante nel tempo. Proseguiamo dunque con la formalizzazione e la dimostrazione di questo risultato.

Proposizione 1.1.1. *Sia* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una martingala rispetto alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Allora*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_{n-1}] = ... = \mathbb{E}[M_1].$$

Quindi un martingala ha valore atteso costante nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) delle martingale osserviamo che

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] = M_n.$$

Applicando ad entrambi i membri il valore atteso si ottiene

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] = \mathbb{E}[M_n]. \tag{1.6}$$

Usando nel termine a sinistra la Legge delle Aspettazioni Iterate (vedi Proposizione A.3) abbiamo che

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] = \mathbb{E}[M_{n+1}],$$

(1.6) diventa dunque

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n],$$

da cui si evince la tesi. □

Anche in caso di supermartingale e submartingale può essere definita una proprietà analoga.

Proposizione 1.1.2. *Sia* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Allora*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_{n-1}] \leq ... \leq \mathbb{E}[M_1].$$

Quindi una supermartingala ha valore atteso decrescente nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) delle martingale osserviamo che

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] \leq M_n.$$

Applicando ad entrambi i membri il valore atteso si ottiene

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] \leq \mathbb{E}[M_n]. \tag{1.7}$$

Usando nel termine a sinistra la Legge delle Aspettazioni Iterate (vedi Proposizione A.3) abbiamo che

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] \leq \mathbb{E}[M_{n+1}],$$

(1.7) diventa dunque

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \leq \mathbb{E}[M_n],$$

da cui si evince la tesi. □

Proposizione 1.1.3. *Sia* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. *Allora*

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_{n-1}] \geq ... \geq \mathbb{E}[M_1].$$

Quindi un submartingala ha valore atteso crescente nel tempo.

Dimostrazione. Dalla proprietà (iii) delle martingale osserviamo che

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n] \geq M_n.$$

Applicando ad entrambi i membri il valore atteso si ottiene

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] \geq \mathbb{E}[M_n]. \tag{1.8}$$

Usando nel termine a sinistra la Legge delle Aspettazioni Iterate (vedi Proposizione A.3) abbiamo che

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_1, ..., Y_n]] \geq \mathbb{E}[M_{n+1}],$$

(1.8) diventa dunque

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] \geq \mathbb{E}[M_n],$$

da cui si evince la tesi. □

Per chiarire e comprendere meglio le nozioni discusse fino ad ora, proseguiamo la trattazione analizzando il seguente caso esemplificativo.

Esempio 1.2. *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con*

$$X_i = \begin{cases} a, & \text{con probabilità } p, \\ -b, & \text{con probabilità } 1-p, \end{cases}$$

con $a, b > 0$. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è un processo stocastico definito come

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Procediamo ad analizzare il processo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Si può osservare che

(1) $\mathbb{E}[\mid S_n \mid] = \mathbb{E}[\mid \prod_{i=1}^n X_i \mid] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^n \mid X_i \mid]$. *Le variabili $\{\mid X_n \mid\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ sono indipendenti in quanto lo sono le variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, quindi si può scrivere* $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n \mid X_i \mid] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\mid X_i \mid]$.

Vediamo che

$$\mathbb{E}[\mid X_i \mid] = \mid a \mid \cdot p + \mid -b \mid \cdot (1-p) \underset{b>0}{=} ap + b(1-p).$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato si ottiene quindi

$$\mathbb{E}[\mid S_n \mid] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mid X_i \mid] = \prod_{i=1}^{n}(ap + b(1-p)) = (ap + b(1-p))^n < \infty.$$

Questo risultato è ottenibile poiché $a, b \in \mathbb{R}$ sono numeri fissati, mentre n è pensato come tale. La propietà (i) nelle Definizioni 1.2, 1.3 e 1.4 viene provata da ciò.

(2) Conoscendo il valore di $X_1, ..., X_n$, sappiamo anche quale sia il valore di S_n poiché $S_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Quindi il processo $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ è adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$. La propietà (ii) delle Definizioni 1.2, 1.3 e 1.4 viene riflessa da questa caratteristica.

(3) Proseguiamo calcolando $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n]$. Sapendo che

$$S_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i = X_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i = X_{n+1} \cdot S_n,$$

possiamo ottenere

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} \cdot S_n \mid X_1, ..., X_n] = \\ &= S_n \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n], \end{aligned} \tag{1.9}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato ciò che è stato dimostrato al punto (2), ovvero che $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ è adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ (quando conosciamo $X1, ..., X_n$ è noto anche S_n). Dato che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ sono indipendenti, possiamo inoltre dire che

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = ap - b(1-p) = p(a+b) - b,$$

di conseguenza dalla (1.9) si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = S_n \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, ..., X_n] = S_n \cdot (p(a+b) - b).$$

A seconda del valore assunto dal termine $p(a+b) - b$, questa caratteristica rispecchia la proprietà (iii) delle Definizioni 1.2, 1.3 e 1.4.

Possiamo concludere con le seguenti considerazioni

- *se* $p(a + b) - b = 1$*, quindi* $p = \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$*,*
- *se* $p(a + b) - b \leq 1$*, quindi* $p \leq \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$*,*
- *se* $p(a + b) - b \geq 1$*, quindi* $p \geq \frac{b+1}{a+b}$*, allora* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$*.*

Le martingale, le supermartingale e le submartingale possiedono numerose proprietà che forniscono preziose informazioni sul processo oggetto dell'analisi. Nella sezione seguente prenderemo in esame una delle proprietà fondamentali, che risponde al nome di Teorema dell'Arresto Opzionale.

1.2 Tempi d'Arresto

Esaminiamo ora l'Esempio 1.1 e indichiamo la prima volta in cui esce testa, cioè il round i in cui $X_i = a$ con τ. Osserviamo che τ, poiché è dipendente dall'esito dei lanci della moneta, è una variabile aleatoria. Si può quindi scrivere τ come

$$\tau = \inf\{i \in \mathbb{N}_{>0} \mid X_i = a\} \tag{1.10}$$

da cui ricaviamo un'equivalenza tra eventi

$$\{\tau = k\} = \{X_1 \neq a, X_2 \neq a, ..., X_{k-1} \neq a, X_k = a\}. \tag{1.11}$$

Il caso $\tau = k$ si verifica se e solo se nei primi $k - 1$ lanci si è sempre ottenuto croce, mentre al k-esimo lancio abbiamo ottenuto testa. È possibile anche osservare che è necessario analizzare l'informazione disponibile fino a k per capire se si è in presenza del caso $\tau = k$. Un tempo d'arresto è definito proprio da questa caratteristica.

Definizione 1.5. *Data una filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$, diremo che una variabile aleatoria discreta τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ se per stabilire l'occorrenza dell'evento $\{\tau = k\}$ è necessario sapere solamente il valore di $X_1, ..., X_k$.*

Il tempo τ definito in (1.10) è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ poiché è valida l'equivalenza degli eventi (1.11). Differentemente, prendendo in esame il tempo aleatorio σ che corrisponde all'ultimo lancio in cui esce testa, l'equivalenza di eventi sarà la seguente

$$\{\sigma = k\} = \{X_k = a, X_{k+1} \neq a, X_{k+2} \neq a, ...\},$$

difatti $\sigma = k$ se e solo se esce testa la k-esimo lancio e otteniamo sempre croce nei lanci seguenti. Essendo necessaria la conoscenza dell'informazione futura al tempo k per stabilire l'occorrenza dell'evento $\{\sigma = k\}$, quindi del valore di $X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, ...$, concludiamo che σ non è un tempo d'arresto per la filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$.

Proseguiamo introducendo attraverso una proposizione la distribuzione di una specifica forma di tempo d'arresto, mostreremo poi che questi tempi d'arresto hanno valore atteso finito.

Proposizione 1.2.1. *Ipotizziamo di avere una filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ costituita da variabili aleatorie i.i.d. e sia α un valore assunto dalle variabili $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$, di conseguenza $\alpha \in Im(X_n)$. In aggiunta $0 < p = \mathbb{P}(X_n = \alpha)$ e perciò $\mathbb{P}(X_n \neq \alpha) = 1 - p$. Definiamo*

$$\tau = \inf\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid X_k = \alpha\},$$

$$\sigma = \inf\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid X_k \neq \alpha\}.$$

Dunque τ e σ sono tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$, inoltre

$$\tau \sim Geom(p),$$
$$\sigma \sim Geom(1-p),$$

perciò $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{p} < \infty$ e $\mathbb{E}[\sigma] = \frac{1}{1-p} < \infty$.

Dimostrazione. Prendiamo in esame le seguenti equivalenze tra eventi

$$\{\tau = n\} = \{X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, ..., X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha\},$$
$$\{\sigma = n\} = \{X_1 = \alpha, X_2 = \alpha, ..., X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha\}.$$

Allora

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, ..., X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha),$$
$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha, X_2 = \alpha, ..., X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha).$$

In aggiunta, essendo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ i.i.d., otteniamo

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha, X_2 \neq \alpha, ..., X_{n-1} \neq \alpha, X_n = \alpha) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = \alpha),$$
$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha, X_2 = \alpha, ..., X_{n-1} = \alpha, X_n \neq \alpha) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha).$$

Infine dato che $\mathbb{P}(X_1 = \alpha) = p$ e conseguentemente $\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha) = 1 - p$, si ottiene

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}(X_1 \neq \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = \alpha) = (1-p)^{n-1}p,$$
$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(X_1 = \alpha)^{n-1}\mathbb{P}(X_1 \neq \alpha) = p^{n-1}(1-p),$$

che conferma la tesi. $\square$

Osservazione 1. *Bisogna sottolineare che le variabili τ e σ non sono limitate, perciò non possiamo dire con assoluta certezza che sono minori di una determinata costante. Difatti l'insieme $\mathbb{N}_{>0}$, che corrisponde all'immagine di una variabile geometrica, non è limitato. Sia τ che σ hanno però valore atteso finito, in media*

sono dunque finiti. Abbiamo quindi che τ e σ non sono variabili limitate, tuttavia sono in media finite. Comunque possiamo affermare che, essendo variabili aleatorie geometriche, queste ultime siano quasi certamente finite.
Quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p = \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1,\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che se $|a| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Sostituendo $(1-p)$ a p si può fare un ragionamento similare per σ.

Le Proposizioni 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3 mettono in evidenza la relazione tra una martingala, una supermartingala e una submartingala ad un tempo fissato n con lo stesso processo però al tempo 0. Domandarsi se questa relazione è valida anche quando il tempo n non è più fissato ma è un tempo d'arresto risulta logico e naturale. Sotto determinate ipotesi la risposta è confermativa e consiste nel *Teorema dell'Arresto Opzionale.*

1.2.1 Teorema dell'Arresto Opzionale

Proposizione 1.2.2. *Definiamo con $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala e con τ un tempo d'arresto, ambedue rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si assuma inoltre che una delle successive ipotesi sia soddisfatta:*

(a) $\exists C > 0$ tale che $\mathbb{P}(\tau < C) = 1$ (vale a dire che τ è limitato quasi certamente);

(b) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ ed $\exists C > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{P}(|M_n| < C) = 1$ (vale a dire che τ è finito e $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente limitato quasi certamente). L'uso della parola "uniformemente" richiama il fatto che la costante C non dipende da n;

(c) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ *e* $\exists C > 0$ *tale che* $\forall n \in \mathbb{N}$ *vale* $\mathbb{P}(|M_{n+1} - M_n| \leq C) = 1$ *(vale a dire che* τ *è finito e* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ha incrementi uniformemente limitati quasi certamente). L'uso della parola "uniformemente" richiama il fatto che la costante* C *non dipende da* n*;*

(d) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$ $M_n \geq 0$ *(vale a dire che* τ *è finito quasi certamente e* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è un processo non negativo).*

Allora $\mathbb{E}[M_\tau] < \infty$ *e*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

Il Teorema dell'Arresto Opzionale esiste anche per le supermartingale e le submartingale, difatti la Proposizione 1.2.2 appena vista è ampliabile anche a questi altri due casi. Per ottenere il Teorema dell'Arresto Opzionale per supermartingale sarà sufficiente modificare la tesi sostituendo $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$ con $\mathbb{E}[M_\tau] \leq \mathbb{E}[M_0]$, basterà fare lo stesso anche per quello riferito alle submartingale, utilizzando però $\mathbb{E}[M_\tau] \geq \mathbb{E}[M_0]$. Per conservare la validità del teorema infatti non è necessario apportare alcun cambiamento alle ipotesi poiché le condizioni che il processo deve soddisfare rimangono le stesse per tutti e tre i teoremi.

Esempio 1.3. *Prendiamo ora in esame l'Esempio 1.1 e* τ*, che corrisponde al tempo d'arresto definito in (1.10). Siamo interessati a verificare se è possisbile applicare il Teorema dell'Arresto Opzionale per capire la relazione tra* $\mathbb{E}[S_\tau]$ *e* $\mathbb{E}[S_1]$*. Per farlo è necessario che una delle ipotesi (a), (b), (c) e (d) sia verificata dal processo* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *e dal tempo d'arresto* τ*.*

Si può osservare che τ *è un tempo d'arresto della forma descritta nella Proposizione 1.2.1, siamo quindi a conoscenza del fatto che* τ *è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* $\mathbb{P}(X_i = a) = p > 0$*. In aggiunta l'Osservazione 1 ci dice che* τ *è una variabile finita ma non limitata. Alla luce di ciò*

si può dire quindi che $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ *e non esiste una costante* $C > 0$ *tale che* $\mathbb{P}(\tau < C) = 1$*. L'ipotesi (a) del Teorema dell'Arresto Opzionale risulta quindi non soddisfatta.*
Vediamo ora se l'ipotesi (b) è verificata. Essendo a conoscenza del fatto che $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$*, dobbiamo solo controllare se esiste una costante* $C > 0$ *(indipendente da* n*) tale che* $\mathbb{P}(|S_n| < C) = 1$*. Avendo che* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$*, affermiamo che* S_n *può assumere valori che oscillano tra il suo massimo (valore assunto quando in tutti i lanci esce testa) e il suo mininmo (valore assunto quando in tutti i lanci esce croce). Quindi*

$$-b \cdot n \leq S_n \leq a \cdot n,$$

da cui

$$|S_n| \leq \max\{|-bn|, |an|\} = \max\{bn, an\} = \max\{b, a\} \cdot n.$$

Sarà dunque opportuno definire $C = \max\{b, a\} \cdot n$*, che però dipende da* n*. Si osservi che non si può trovare una costante* C *più piccola indipendente da* n*, poiché se esce sempre testa o esce sempre croce ci troviamo rispettivamente con* $|S_n| = an$ *o* $|S_n| = bn$*. In conclusione neanche l'ipotesi (b) del Teorema dell'Arresto Opzionale risulta non valida, perché la costante* C *ottimale che possiamo scegliere è* $C = \max\{b, a\} \cdot n$*, che però dipende da* n*. Cerchiamo ora di capire se l'ipotesi (c) è soddisfatta. Dalla Proposizione 1.2.1 si ha* $\mathbb{E}[\tau] < \infty$*. Quindi dobbiamo solamente accertarci dell'esistenza o meno di una costante* $C > 0$ *(indipendente da* n*) tale che* $\mathbb{P}(|S_{n+1} - S_n| \leq C) = 1$*. Si osservi che*

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+1} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = X_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = X_{n+1},$$

da cui

$$|S_{n+1} - S_n| = |X_{n+1}| \leq \max\{|a|, |-b|\} = \max\{a, b\}.$$

Scegliendo $C = \max\{a, b\}$*, otteniamo* $|S_{n+1} - S_n| \leq C$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *e quindi* $\mathbb{P}(|S_{n+1} - S_n| \leq C) = 1$ *per ogni* $n \in N_{>0}$*. In questo caso* $C = \max\{a, b\} > 0$ *è indipendente da* n *e ciò è da evindenziare. L'ipotesi (c) del Teorema dell'Arresto Opzionale è di conseguenza verificata e si può concludere che*

- *se* $p = \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*) si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b = 0;$$

- *se* $p \leq \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*) si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] \leq \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b;$$

- *se* $p \geq \frac{b}{a+b}$ *(e dunque se* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$*) si ha*

$$\mathbb{E}[S_\tau] \geq \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = ap - b(1-p) = (a+b)p - b.$$

Possiamo osservare nel dettaglio che se $p \leq \frac{b}{a+b}$ *non si può ottenere* $\mathbb{E}[S_\tau] > (a+b)p - b = \mathbb{E}[X_1]$.

Per ragioni di completezza, aggiungiamo che l'ipotesi (d) del Teorema dell'Arresto Opzionale non è soddisfatta dal processo in quanto $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ *non è un processo non negativo, difatti per qualche* n *si può verificare* $S_n < 0$ *(quando ad esempio esce sempre croce).*

Il Principio di Conservazione dell'Equità di un Gioco è il nome con cui il Teorema dell'Arresto Opzionale è conosciuto nella teoria del gioco d'azzardo. Dato un gioco, infatti, un tempo d'arresto è considerabile come una strategia d'uscita da questo. Se il gioco soddisfa una delle ipotesi (a), (b), (c) o (d) non esiste alcuna strategia di uscita che trasformi un gioco svantaggioso (caso di una supermartingala) in gioco vantaggioso (caso di una submartingala), questo è quanto viene affermato dal Principio di Conservazione dell'Equità. Come abbiamo appena potuto osservare nell'esempio se si è nel caso di una supermatingala si avrà $\mathbb{E}[S_\tau] \leq \mathbb{E}[X_1]$ e conseguentemente non sarà possibile ottenere $\mathbb{E}[S_\tau] > \mathbb{E}[X_1]$. Tuttavia, nel capitolo che segue, esaminando i sistemi di scommesse, vedremo come il Sistema Martingala riesca a violare le ipotesi del Principio di Conservazione dell'Equità.

Capitolo 2

Sistemi di Scommesse: il Criterio di Kelly e il Sistema Martingala

Introduciamo, in questo nuovo capitolo, i sistemi di scommesse come presentazione a due specifici casi derivati noti come Criterio di Kelly e Sistema Martingala. Proseguiremo evidenziando pro e contro dei due sistemi, considerando che il Criterio di Kelly è preferito nei giochi vantaggiosi mentre il Sistema Martingala in quelli sfavorevoli.

2.1 I Sistemi di Scommesse

Supponiamo di effettuare una scommessa e chiamiamo X la quantità di denaro vinta o persa per ciascuna unità di denaro scommessa. Definiamo X_1, X_2 le vincite per unità di denaro scommessa ottenute nelle numerose ripetizioni, ipotizzando che la scommessa verrà ripetuta varie volte. Per esempio se al quarto round viene scommessa un quantità pari a 5, in caso di vittoria si otterrà $5X_4$. Precisiamo che il funzionamento del gioco rimane lo stesso nelle varie ripetizioni e che non è influenzato dal risultato del round precendente, quindi le varianili X_1, X_2,... sono indipendenti e identicamente distribuite.

Ipotizziamo di scommettere una somma di denaro B_n all'n-esima ripetizione che dipenderà dai risultati delle precendenti scommesse, quindi da $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$. Perciò scriviamo

$$B_1 = g_1 > 0, \qquad B_n = g_n(X_1, ..., X_{n-1}) \qquad per\, n \geq 2, \tag{2.1}$$

in cui g_n è funzione di $X_1, ..., X_{n-1}$ e B_1 corrisponde ad un valore costante $g_1 > 0$ poiché, non avendo ancora giocato nessun round, la somma di denaro puntata al primo round viene scelta in modo deterministico. Dato che al round n-esimo la vincita per unità di denaro scommessa è X_n e la somma di denaro scommessa all'n-esima ripetizione è indicata da B_n, la somma di denaro vinta all'n-esima ripetizione sarà $B_n X_n$.
Le successioni di variabili $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}>0}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}>0}$ formano un sistema di scommesse.
Chiamiamo la somma di denaro di cui siamo in possesso dopo la ripetizione n-esima F_n, si ottiene dunque che

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n \qquad per\, n \geq 1, \tag{2.2}$$

che se iterata restituisce l'identità

$$F_n = F_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i, \tag{2.3}$$

qui F_0 rappresenta la somma di denaro in nostro possesso all'inizio, di conseguenza è una quantità deterministica. Siamo anche in grado di dedurre facilmente che non possiamo scommettere più di quanto abbiamo, perciò $B_n \leq F_{n-1}$ per $n \geq 1$.

Procediamo ad analizzare la successione $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ipotizzando a ragion veduta che ogni variabile della filtrazione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ assuma una quantità finita di valori. Ipotizziamo anche che per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ abbiamo

$$X_n = \begin{cases} a, & \text{con probabilità } p, \\ 0, & \text{con probabilità } r, \\ -b & \text{con probabilità } q, \end{cases} \tag{2.4}$$

in cui $a, b > 0, p, q > 0$ e $r \geq 0$ tali che $p + q + r = 1$. Questo calcolo, nonostante l'assunzione appena fatta, può essere anche applicato in un caso generale, mantenendo l'ipotesi che X_n assuma un numero finito di valori. Di seguito analizzeremo in base a quali condizioni su p, q, r il processo $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, una supermartingala o una submartingala.

Proposizione 2.1.1. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. distribuite come in* (2.4) *e* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ *una successione di variabili aleatorie che soddisfa* (2.1)*. Definita la successione* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *come nella* (2.3)*, si ottiene il seguente risultato*

- *se ap=bq, allora* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*;*
- *se* $ap \geq bq$*, allora* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una submartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*;*
- *se* $ap \leq bq$*, allora* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una supermartingala rispetto alla filtrazione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$*.*

Dimostrazione. Procediamo a dimostrare che

(i) si ha $\mathbb{E}[|F_n|] < \infty$ per ogni n fissato;

(ii) $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ (conosciamo quindi il valore di F_n se sono noti $X_1, ..., X_n$).

Analizzare la relazione tra $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, ..., X_n]$ e F_n sarà l'ultimo step.

Per dimostrare il punto (i) utilizziamo la Disuguaglianza Triangolare, che ci permette di poter scrivere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|F_n|] = \mathbb{E}\left[|F_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i|\right] \leq \mathbb{E}\left[|F_0| + \sum_{i=1}^{n} |B_i X_i|\right] = \\ = |F_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i| \cdot |X_i|] = |F_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \mathbb{E}[|X_i|],\end{aligned} \tag{2.5}$$

nella penultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che F_0 è una costante, nell'ultima uguaglianza invece è stato usato il fatto che B_i è indipendente da X_i e quindi $\mathbb{E}[|B_i| \cdot |X_i|] = \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \mathbb{E}[|X_i|]$, essendo $B_i = g_i(X_1, ..., X_{i-1})$.

Dalla (2.5), sapendo che $\mathbb{E}[|X_i|] = ap + bq$, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|F_n|] \leq |F_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|] \cdot \mathbb{E}[|X_i|] = |F_0| + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|] \cdot (ap + bq) = \\ = |F_0| + (ap + bq) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|B_i|].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Essendo $B_i = g_i(X_1, ..., Xi - 1)$ e dato che X_i assume solo i valori $-b, 0, a$, allora il vettore $(X_1, ..., X_{i-1})$ avrà 3^{i-1} forme possibili. X_1 varia difatti tra tre valori che sono $-b, 0, a$; per ogni scelta di X_1 si può far variare X_2 tra tre valori $(-b, 0, a)$; per ogni scelta di X_1, X_2 si può far variare X_3 tra tre valori $(-b, 0, a)$ e si continua così fino a X_{i-1}. Visto che il vettore $(X_1, ..., X_{i-1})$ può avere 3^{i-1} forme possibili, allora $g_i(X_1, ..., X_{i-1})$ può assumere al massimo 3^{i-1} valori diversi. B_i sarà conseguentemente minore del massimo di questi valori che indichiamo con K_i. Inoltre dato che si sta calcolando il massimo di un numero finito di valori possiamo dedurre che questo massimo sia finito. Evidenziamo che per avere il massimo K_i finito è necessaria l'assunzione secondo la quale X_i assuma un numero finito di valori.

Riprendendo la (2.6) si può quindi scrivere

$$\mathbb{E}[|F_n|] \leq |F_0| + \max\{a,b\} \sum_{i=1}^{n} K_i \leq |F_0| + \max\{a,b\} \cdot n \max_{1 \leq i \leq n} K_i < \infty,$$

in cui l'ultima disuguaglianza si può scrivere grazie al fatto che F_0 è un numero finito e fissato, maxa, b è un numero finito essendo finiti anche a, b e $K_1, ..., K_n$ sono numeri finiti, quindi è finito anche il loro massimo. Abbiamo dunque dimostrato (i).

Proseguiamo ora a dimostrare (ii). Riprendiamo la definizione di F_n in (2.3) e osserviamo che per conoscere B_i basta conoscere $X_1, ..., X_{i-1}$ poiché $B_i = g_i(X_1, ..., X_{i-1})$, di conseguenza per conoscere $B_1, ..., B_n$ è sufficiente essere a conoscenza del valore di $X_1, ..., X_{n-1}$. Dalla (2.3) perciò possiamo concludere che è sufficiente sapere il valore di $X_1, ..., X_n$ per conoscere F_n.

Abbiamo dunque dimostrato (ii), cioè che il processo $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo adattato alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$.

Calcoliamo infine $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, ..., X_n]$. Sapendo che $B_i = g_i(X_1, ..., X_{i-1})$, siamo in grado di poter scrivere

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[B_i|X_1, ..., X_n] = B_i \qquad \text{per } i = 1, ..., n+1, \\ &\mathbb{E}[X_i|X_1, ..., X_n] = X_i \qquad \text{per } i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Conseguentemente, entrando di più nello specifico, si ha che

$$\mathbb{E}[B_i X_i|X_1, ..., X_n] = B_i X_i \qquad \text{per } i = 1, ..., n. \tag{2.8}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_{n+1}|X_1, ..., X_n] &= \mathbb{E}\left[F_0 + \sum_{i=1}^{n+1} B_i X_i | X_1, ..., X_n\right] = \\ &\underset{(2.8)}{=} F_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i + \mathbb{E}[B_{n+1} X_{n+1}|X_1, ..., X_n] = \\ &= F_n + \mathbb{E}[B_{n+1} X_{n+1}|X_1, ..., X_n] = \\ &\underset{(2.7)}{=} F_n + B_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, ..., X_n]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Essendo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}>0}$ una successione di variabili indipendenti, otteniamo anche il seguente risultato

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1,...,X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] \underset{(2.4)}{=} ap - bq.$$

Si ha quindi

$$\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1,...,X_n] = F_n + B_{n+1} \cdot (ap - bq).$$

Oltre a ciò, dato che $B_{n+1} \geq 0$, abbiamo che

- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1,...,X_n] = F_n$ se $ap = bq$;
- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1,...,X_n] \geq F_n$ se $ap \geq bq$;
- $\mathbb{E}[F_{n+1}|X_1,...,X_n] \leq F_n$ se $ap \leq bq$.

La tesi è quindi provata. □

2.2 Il Criterio di Kelly

Al fine di introdurre il Criterio di Kelly con un piccolo esempio ipotizziamo di partecipare ad un gioco in cui si effettua, molteplici volte, il lancio di una moneta, che da come risultato testa con probabilità 0.85. Se il risultato è testa vinciamo 1 euro per ogni euro scommesso mentre se il risultato è croce tutto quello che abbiamo scommesso viene perso. Con X_i indichiamo la somma di denaro che vinciamo all'i-esima ripetizione, ottenendo che

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se il risultato dell'}i\text{-esimo lancio è testa,} \\ -1, & \text{se il risultato dell'}i\text{-esimo lancio è croce.} \end{cases}$$

Il gioco o meglio la scommessa in questione si dimostra favorevole, in quanto

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot 0.85 - 1 \cdot 0.15 = 0.7 > 0.$$

Essendo un gioco vantaggioso, si potrebbe essere tentati di scommettere nei vari round l'interezza delle proprie disponibilità, quindi del proprio capitale. Questa scelta però si dimostra essere pericolosa poiché la prima volta che uscirà croce, che è un evento con probabilità positiva, si perderà la totalità del proprio capitale e non si potrà più continuare a scommettere. Se ad ogni ripetizione invece scomettessimo solo una porzione del nostro capitale, anche nell'eventualità della perdita, saremo in grado di continuare a scommettere. Dunque è naturale chiedersi quale sia il valore ottimo di suddetta frazione del capitale f, la risposta individua questo valore attaverso la massimizzazione del tasso di crescita del capitale accumulato nelle varie ripetizioni ed è stata formulata da John Larry Kelly Jr. nel 1956 (vedi [5]).

Procediamo riprendendo in esame il processo $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definito in (2.3), assumendo che B_n sia definita come in (2.1) e X_n come in (2.4) con $b = 1$. Con queste premesse possiamo scrivere

$$X_n = \begin{cases} a, & \text{con probabilità } p, \\ 0, & \text{con probabilità } r, \\ -1, & \text{con probabilità } q, \end{cases} \tag{2.10}$$

aggiungendo anche che il gioco è un gioco favorevole poiché $\mathbb{E}[X_n] =$ $= ap - q > 0$. Come abbiamo già anticipato, viene spontaneo seguire una strategia in cui si scommette tutto il proprio capitale per riuscire ad ottenere il massimo guadagno, in quanto il gioco è favorevole. Tuttavia questo approccio, cioè $B_n = F_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$, è destinato al fallimento, difatti dimostreremo che nel lungo periodo (quindi $n \to \infty$) $\mathbb{P}(F_n = 0)$ tende a 1. Iniziamo partendo da (2.2) che, se $B_n = F_{n-1}$, restituisce

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n = F_{n-1} + F_{n-1} X_n = F_{n-1}(1 + X_n),$$

che iterando diventa

$$F_n = F_{n-1}(1 + X_n) = F_{n-2}(1 + X_{n-1})(1 + X_n) = F_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + X_i).$$

Di conseguenza è opportuno sottolineare il fatto che $F_n = 0$ qualora esista un indice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tale che $X_i = -1$, perciò

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n = 0) &= \mathbb{P}(\exists\, i \in \{1, 2, ..., n\} \, \text{tale che } X_i = -1) = \\ &= -\mathbb{P}(\forall\, i \in \{1, 2, ..., n\} \, \text{si ha } X_i \neq -1) = \\ &\underset{\text{indip. di } \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \neq -1) = \\ &\underset{\text{id. distrib. di } \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 \neq -1)^n = 1 - (p + r)^n \to 1, \quad \text{per } n \to \infty,\end{aligned} \tag{2.11}$$

in cui nel limite finale è stato utilizzato $(p + r)^n \to 0$ per $n \to \infty$ poiché $p + r = = 1 - q < 1$.

Scommettere l'interezza del proprio capitale è quindi un approccio fallace e, come detto in precedenza, la miglior scelta è quella di scommetterne solo una porzione $f \in (0, 1)$ del proprio capitale, cioè $B_n = f \cdot F_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Ora l'intenzione è quella di capire che frazione f di capitale scommettere ad ogni ripetizione per ottimizzare il guadagno e il capitale futuro.

Mettiamo subito in evidenza il fatto che se $B_n = f \cdot F_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allora

$$F_n = F_{n-1} + B_n X_n = F_{n-1} + f \cdot F_{n-1} X_n = F_{n-1}(1 + f \cdot X_n),$$

che iterando ci permette di ottenere

$$F_n = F_{n-1}(1 + f \cdot X_n) = F_{n-2}(1 + f \cdot X_{n-1})(1 + f \cdot X_n) = F_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + f \cdot X_i).$$

Procediamo definendo

$$r_n(f) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{F_n}{F_0} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(1 + f \cdot X_i)}{n} \tag{2.12}$$

e la successione di variabili aleatorie $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ come $Y_n = \ln(1 + f \cdot X_n)$ per $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Si può quindi scrivere

$$r_n(f) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}. \tag{2.13}$$

Essendo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. e $Y_n = \ln(1+f\cdot X_n)$, allora anche $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. e quindi per la Legge dei Grandi Numeri (vedi Proposizione A.4) otteniamo

$$r_n(f) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X_1)], \qquad \text{per } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Il tasso di crescita del capitale del giocatore nei primi n round è quindi rappresentato da $r_n(f)$. Definiamo

$$\mu(f) := \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)], \tag{2.15}$$

in cui X è una variabile distribuita come X_1 e $\mu(f)$ simboleggia il tasso di crescita del capitale del giocatore nel lungo termine. Dobbiamo dunque massimizzare $\mu(f)$ per massimizzare il capitale, nel pratico bisogna studiare la funzione $f \in [0,1) \mapsto \mu(f)$ ed individuare i punti di massimo. La seguente proposizione porta avanti questa analisi.

Proposizione 2.2.1. *Ipotizziamo che X sia distribuita come in* (2.10)*, nel dettaglio $\mathbb{P}(X = -1) > 0, \mathbb{E}[X] > 0$ e X assume un numero finito di valori. Allora*

(i) la funzione $f \in [0,1) \mapsto \mu(f)$ è strettamente concava;

(ii) esiste un unico punto di massimo $f^* \in (0,1)$ per $\mu(f)$;

(iii) esiste un unico punto $f_0 \in (f^*,1)$ tale che $\mu(f_0) = 0$. Oltre a ciò $\mu(f) > 0$ se $f \in (0, f_0)$ e $\mu(f) < 0$ se $f \in (f_0, 1)$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che

$$\mu'(f) = \frac{d}{df}\mathbb{E}[\ln(1+f\cdot X)] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{df}\ln(1+f\cdot X)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{1+f\cdot X}\right]$$

e che

$$\begin{aligned}\mu''(f) &= \frac{d}{df}\mu'(f) = \frac{d}{df}\mathbb{E}\left[\frac{X}{1+f\cdot X}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{d}{df}\frac{X}{1+f\cdot X}\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{(1+f\cdot X)^2}\right] < 0 \qquad \forall f \in (0,1].\end{aligned}$$

È di conseguenza dimostrato (i), difatti $\mu''(f) < 0$ per ogni $f \in [0,1)$.

Procediamo vedendo come $\mu'(0) = \mathbb{E}[X] > 0$, inoltre $\mathbb{P}(X = -1)$ e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{f\to 1^-}\mu(f) &= \mathbb{E}[\ln(1+X)] = \sum_k \ln(1+k)\cdot\mathbb{P}(X=k) = \\ &= -\infty\cdot\mathbb{P}(X=-1) + \sum_{k\neq -1}\ln(1+k)\cdot\mathbb{P}(X=k) = -\infty\end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{f\to 1^-}\mu'(f) &= \mathbb{E}\left[\frac{X}{1+X}\right] = \sum_k \frac{k}{1+k}\cdot\mathbb{P}(X=k) = \\ &= -\infty\cdot\mathbb{P}(X=-1) + \sum_{k\neq -1}\frac{k}{1+k}\cdot\mathbb{P}(X=k) = -\infty.\end{aligned}$$

Poiché X assume solo un numero finito di valori, le sommatorie $\sum_{k\neq -1}\ln(1+k)\cdot$ $\cdot\mathbb{P}(X=k)$ e $\sum_{k\neq -1}\frac{k}{1+k}\cdot\mathbb{P}(X=k)$ sono anche loro numeri finiti. Perciò, dato che $\mu'(0) > 0$, $\lim_{f\to 1^-}\mu'(f) < 0$ e $\mu(f)$ è una funzione continua, deve esistere un unico punto f^* tale che $\mu'(f^*) = 0$. Possiamo inoltre affermare che f^* è un punto di massimo globale poiché $\mu(f)$ è strettamente concava, quindi il valore massimo assunto da $\mu(f)$ sarà $\mu(f^*)$. Abbiamo quindi dimostrato (ii). Concludiamo evidenziando che, essendo derivabile da (2.16) il fatto che $\mu'(0) > 0$ e inoltre dato che $\mu(0) = \mathbb{E}[\ln(1)] = 0$, ci sarà un intervallo della forma $(0, \tilde{f})$ in cui $\mu(f) > 0$. In aggiunta sappiamo che f^* è un punto di massimo globale, allora $\mu(f^*) > 0$. Da (2.16) abbiamo che $\lim_{f \to 1^-} \mu(f) = -\infty$, quindi deve esistere $f_0 \in (f^*, 1)$ per cui $\mu(f_0) = 0$. In conclusione affermiamo come questo punto sia unico, difatti in caso contrario la stretta concavità di $f \in [0, 1) \mapsto \mu(f)$ verrebbe violata. Di conseguenza (iii) è stato provato.

Tutte le proprietà illustrate possono essere lette nella Figura 2.1. $\square$

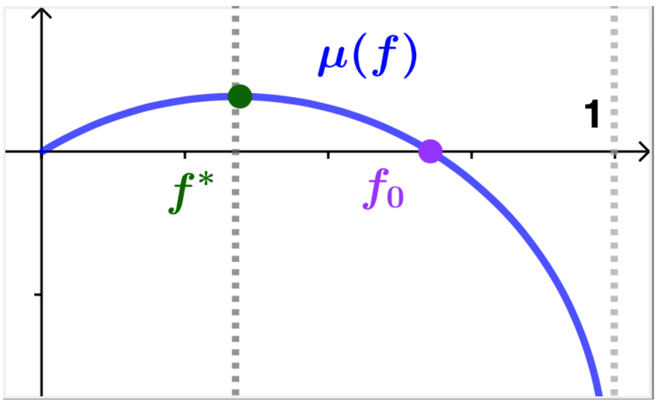

Fig. 2.1: Grafico di $f \in [0, 1) \mapsto \mu(f)$

Ricordiamo che il sistema di scommesse dove ad ogni ripetizione viene scommessa la frazione f^* del capitale è chiamato Sistema di Kelly o Criterio di Kelly, che ora attraverso un esempio cercheremo di comprendere meglio.

Esempio 2.1. *Supponiamo di effettuare molteplici ripetizioni della seguente scommessa: per ogni euro scommesso vinciamo 8 euro con probabilità $\frac{1}{3}$ e perdiamo 1 euro con probabilità $\frac{2}{3}$. Chiamiamo X il profitto ottenuto per ogni singola scommessa, si può quindi scrivere*

$$X = \begin{cases} 8, & \textit{con probabilità } 1/3, \\ -1, & \textit{con probabilità } 2/3. \end{cases}$$

Evidenziamo che

(i) $\mathbb{P}(X = -1) > 0$*;*

(ii) $\mathbb{E}[X] = 8 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 > 0$*;*

(iii) X *assume un numero finito di valori.*

Procediamo a calcolare la frazione di capitale che dovremmo scommettere per massimizzare i guadagni nel lumgo periodo. Partiamo dalla funzione

$$\mu(f) = \mathbb{E}[\ln(1 + f \cdot X)] = \ln(1 + 8f) \cdot \frac{1}{3} + \ln(1 - f) \cdot \frac{2}{3}.$$

Dalla Proposizione 2.2.1 sappiamo che $\mu(f)$ *ha un solo punto di massimo, che può essere individuato trovando il singolo zero della sua derivata prima.*

$$\mu'(f) = \frac{8}{1+8f} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{1-f} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3+24f} - \frac{2}{3-3f} = \frac{18-72f}{(3+24f)(3-3f)} \quad ,$$

da cui

$$\mu'(f) = 0 \Rightarrow 18 - 72f = 0 \Rightarrow f = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}.$$

Dunque $f^* = \frac{1}{4}$ *è il punto che massimizza* $\mu(f)$*, di conseguenza, per massimizzare il profitto nel lungo periodo, dovremmo scommettere* $\frac{1}{4}$ *del capitale ad ogni ripetizione.* $\mu(f^*)$ *sarà invece il tasso di crescita nel lungo periodo.*

Se X è distribuita come in (2.10), c'è la possibilità di dare una formula diretta per f^*, come vedremo nella successiva proposizione.

Proposizione 2.2.2. *Supponiamo che* X *sia distribuita come in* (2.10) *e che* $\mathbb{E}[X] = ap - q > 0$*, allora il valore* f^* *predetto dalla Proposizione 2.2.1 si ottiene da*

$$f^* = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)} = \frac{\mathbb{E}[X | X \neq 0]}{a}.$$

Andando più nello specifico, se $\mathbb{P}(X = 0) = r = 0$*, allora* $q = 1 - p$ *e possiamo dunque scrivere*

$$f^* = \frac{(a+1)\cdot p - 1}{a} = \frac{\mathbb{E}[X]}{a}. \tag{2.17}$$

Dimostrazione. Procediamo nell'individuare il punto crititco di $\mu(f) =$
$= \mathbb{E}[\log(1 + f \cdot X)]$. Abbiamo che

$$\mu(f) = \mathbb{E}[\log(1 + f \cdot X)] = \log(1 + f \cdot a) \cdot p + \log(1 + f \cdot 0) \cdot r + \log(1 - f) \cdot q =$$
$$= \log(1 + f \cdot a) \cdot p + \log(1 - f) \cdot q.$$

Da cui

$$\mu'(f) = \frac{ap}{1 + f \cdot a} - \frac{q}{1 - f}.$$

Ponendo $\mu'(f)$=0 otteniamo

$$\mu'(f) = \frac{ap}{1 + f \cdot a} - \frac{q}{1 - f} = 0 \Rightarrow \frac{ap \cdot (1 - f) - q \cdot (1 + f \cdot a)}{(1 + f \cdot a)(1 - f)} = 0$$
$$\Rightarrow ap - apf - q - qfa = 0 \Rightarrow f = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)}.$$

Perciò $f^* = \frac{ap-q}{a\cdot(p+q)}$. Oltre a ciò si può vedere che

$$\mathbb{E}[X] = ap - q, \qquad p + q = 1 - r = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \neq 0)$$

ed anche che

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + \mathbb{E}[X|X = 0]\mathbb{P}(X = 0) =$$
$$= \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + \mathbb{E}[0|X = 0]\mathbb{P}(X = 0) =$$
$$= \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0) + 0 = \mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0).$$

Quindi per concludere scriviamo che

$$f^* = \frac{ap - q}{a \cdot (p + q)} = \frac{\mathbb{E}[X]}{a \cdot \mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{E}[X|X \neq 0]\mathbb{P}(X \neq 0)}{a \cdot \mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{E}[X|X \neq 0]}{a}. \quad \square$$

Procediamo ora, attraverso la proposizione che segue, con l'analisi dell'andamento del capitale F_n per n grande quando, ad ogni ripetizione, viene scommessa una frazione f di capitale. Utilizzeremo la notazione $F_n(f)$, che sostituirà F_n, per mettere in evidenza la dipendenza dalla porzione f del capitale scommessa ad ogni ripetizione e proseguiremo a definire con f^* la frazione ottimale del capitale da scommettere ad ogni round per massimizzare il profitto nel lungo periodo.

Proposizione 2.2.3. *Siano X e f^* come nella Proposizione 2.2.1. Allora per ogni $f \in [0, 1)$ abbiamo che*

(i) $\lim_{n\to\infty}(\frac{F_n(f)}{F_0})^{\frac{1}{n}} = e^{\mu(f)}$ *quasi certamente;*

(ii) se $\mu(f) < 0$, *allora* $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = 0$ *quasi certamente;*

(iii) se $\mu(f) > 0$, *allora* $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = +\infty$ *quasi certamente;*

(iv) se $f \neq f^*$, *allora* $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(f^*)}{F_n(f)} = +\infty$ *quasi certamente;*

(v) se $\sigma(f) := \sqrt{Var(\ln(1 + f \cdot X))} > 0$, *allora* $\frac{\sqrt{n}}{\sigma(f)}(\frac{1}{n}\ln(\frac{F_n(f)}{F_0}) - \mu(f)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

Dimostrazione. Vediamo soltanto un'idea intuitiva della dimostrazione.

Da (2.12), (2.14) e (2.15) per n grande si ha

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{F_n(f)}{F_0}\right) \sim \mu(f),$$

da qui abbiamo che per n grande

$$F_n(f) \sim F_0 \cdot e^{n\mu(f)}. \tag{2.18}$$

La verifica di (i) si ha in quanto la convergenza in (2.14) è q.c.. La prova di (ii) e (iii) viene fornita dal fatto che, se $\mu(f) < 0$, allora $e^{n\mu(f)}$ tende a 0 per $n \to \infty$, invece, se $\mu(f) > 0$, si ha che $e^{n\mu(f)}$ tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. Esaminiamo poi l'espressione di $F_n(f)$ e $F_n(f^*)$ come in (2.18). Possiamo scrivere

$$\frac{F_n(f^*)}{F_n(f)} = \frac{F_0 \cdot e^{n\mu(f^*)}}{F_0 \cdot e^{n\mu(f)}} = e^{n(\mu(f^*)-\mu(f))}.$$

Essendo $\mu(f^*)$ il massimo di $\mu(f)$, allora $\mu(f^*) - \mu(f) > 0$ e quindi $e^{n(\mu(f^*)-\mu(f))}$ tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. Ciò valida (iv). Infine per provare (v) basta applicare il Teorema del Limite Centrale (vedi Proposizione A.5) congiuntamente a (2.12) e (2.13).

$\square$

Esempio 2.2. *Torniamo all'esempio 2.1, dove avevamo trovato che* $f^* = \frac{1}{4}$. *Grazie alla Proposizione 2.2.1 abbiamo che esiste un unico punto* $f_0 \in (f^*, 1)$ *tale che* $\mu(f_0) = 0$ *e che* $\mu(f) > 0$ *se* $f < f_0$. *Ipotizziamo di scommetere un porzione* $f = \frac{1}{8}$ *di capitale ad ogni ripetizione. Vogliamo calcolare:*

(i) il limite q.c. di $F_n(f)$ *per* $n \to \infty$;

(ii) il limite q.c. di $\frac{F_n(f)}{F_n(f^*)}$ *per* $n \to \infty$.

Procediamo a calcolare (i). Osserviamo che $f = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} = f^* < f_0$. *Essendo* $f < f_0$ *e di conseguenza* $\mu(f) > 0$, *allora dalla Proposizione 2.2.3 abbiamo che* $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = +\infty$ *quasi certamente.*
Calcoliamo (ii). Dalla Proposizione 2.2.3 abbiamo anche che $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(f^*)}{F_n(f)} = +\infty$ *quasi certamente e quindi che* $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(f)}{F_n(f^*)} = 0$ *quasi certamente.*

Proseguiamo mostrando i grafici del guadagno $F_n(f)$ nel tempo, ovvero al variare del round n, ottenuti tramite delle simulazioni del Criterio di Kelly, con lo scopo di comprendere in modo migliore la Proposizione 2.2.3. La realizzazione dei grafici che mostreremo, è stata possibile grazie al seguente codice MATLAB.

```
%Definiamo la probabilita' di vincita p,
%la somma vinta per ogni unita' di denaro scommessa a,
%scegliamo un capitale iniziale F_0
%e il numero di ripetizioni che giocheremo n.

p=0.5;

a=2.25;

F_0=1;

n=350;

%Procediamo a calcolare f_star e f_0.

f_star=(((a+1)*p)-1)/a;
disp(f_star)

syms f
u = (log(1+(a*f)))*p+(log(1-f))*(1-p)==0;
f_0= solve(u,f);
disp(f_0)

%f_star=0.2778, f_0=5/9

%Definiamo f_in: una frazione di capitale tale che
f_in \in (f_star,f_0);
```

```
%f_mi: una frazione di capitale tale che f_mi < f_star;
%f_ma: una frazione di capitale tale che f_ma > f_0.

f_in = 0.4;

f_mi = 0.2;

f_ma = 0.7;

%Consideriamo ora le 4 seguenti dinamiche,
%procediamo poi alla loro inizializzazione
%e alla scrittura della dinamica:
%F_star=il capitale associato alla frazione fstar,
%F_in=il capitale associato alla frazione f_in,
%F_mi=il capitale associato alla frazione f_mi e
%F_ma=il capitale associato alla frazione f_ma.

F_star=zeros(n+1);
F_in=zeros(n+1);
F_mi=zeros(n+1);
F_ma=zeros(n+1);
F_star(1)=F_0;
F_in(1)=F_0;
F_mi(1)=F_0;
F_ma(1)=F_0;

for i=1:n
    if rand(1)<=p
```

```
        F_star(i+1)=F_star(i)*(1+f_star*a);
        F_in(i+1)=F_in(i)*(1+f_in*a);
        F_mi(i+1)=F_mi(i)*(1+f_mi*a);
        F_ma(i+1)=F_ma(i)*(1+f_ma*a);
    else
        F_star(i+1)=F_star(i)*(1-f_star);
        F_in(i+1)=F_in(i)*(1-f_in);
        F_mi(i+1)=F_mi(i)*(1-f_mi);
        F_ma(i+1)=F_ma(i)*(1-f_ma);
    end
end

%Infine otteniamo i grafici del guadagno nel tempo per i
4 casi.

figure (1)
plot(F_star,'g')
hold on
plot(F_in,'b')
plot(F_mi,'m')
hold off

figure (2)
plot(F_ma,'r')
```

Le Figure 2.2 e 2.3 presentano sull'asse delle ascisse l'indice n, mentre sull'asse delle ordinate viene riportato $F_n(f)$. Le curve sono ottenute per vari valori di f.

Nella Figura 2.2 sono presenti 3 curve:

- la curva verde riporta $F_n(f^*)$;
- la curva magenta riporta $F_n(f)$ con $f < f^*$;
- la curva blu riporta $F_n(f)$ con $f \in (f^*, f_0)$.

Osservando le curve risulta evidente che $F_n(f^*)$ è maggiore nel lungo periodo se paragonato a $F_n(f)$ per $f \in (0, f^*) \cup (f^*, f_0)$. Il comportamento delle rimanenti due curve può essere messo a paragone e dipende da quanto $\mu(f)$ si discosta da $\mu(f^*)$. Essendo comunque il tasso di crescita positivo, il profitto cresce esponenziamente anche in questi due casi, proprio come anticipato dalla Proposizione 2.2.3.

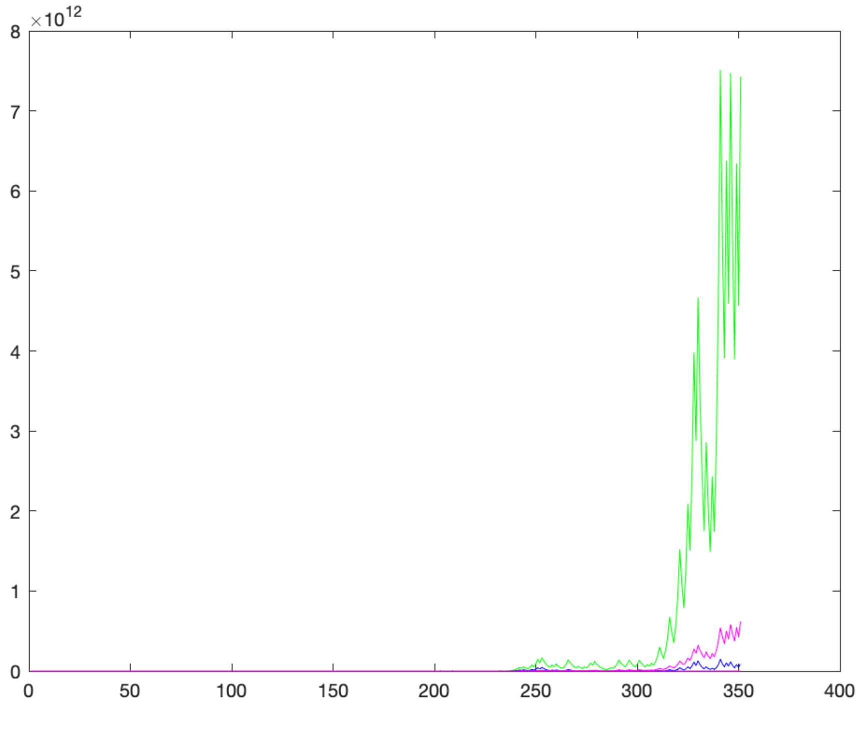

Fig. 2.2

La Figura 2.3 mostra invece il grafico di $F_n(f)$ per $f > f_0$. Essendo in questo caso il tasso di crescita $\mu(f)$ negativo, come previsto dalla Proposizione 2.2.3, il profitto decade esponenzilamente.

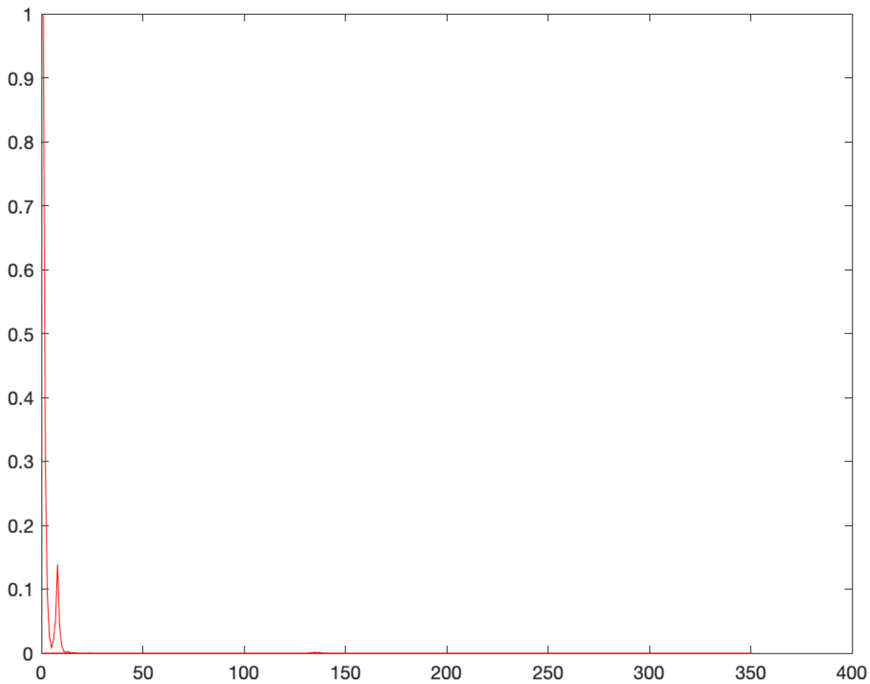

Fig. 2.3

Affermiamo, per chiudere la sezione, che il Criterio di Kelly viene impiegato nella finanza, nelle scommesse sportive ed anche nel blackjack.

2.3 Il Criterio di Kelly per Scommesse Simultanee

In questa sezione procederemo ad analizzare il Criterio di Kelly nel caso in cui, ad ogni round, vi siano più scommesse da poter effettuare, di cui almeno una favorevole. Ipotizziamo quindi che vi siano d diverse scommesse tra le quali almeno una sia favorevole. Quindi se definiamo le vincite per unità di denaro giocata all'i-esima possibile scommessa con X_i e supponiamo che X_i assuma un numero finito di valori, contenuti nell'insieme $[-1, \infty)$ per $i = 1, ..., d$, pretenderemo che

$$\max_{1 \leq i \geq d} \mathbb{E}[X_i] > 0. \tag{2.19}$$

Costruiamo il vettore $\mathbf{X}$ che contiene le variabili aleatorie $X_1, ..., X_d$:

$$\mathbf{X} := (X_1, ..., X_d).$$

Le variabili aleatorie $X_1, ..., X_d$, cioè le vincite per unità di denaro giocata all'i-esima possibile scommessa, contenute in ogni vettore $\mathbf{X}$ riferito allo stesso tempo, non sono obbligatoriamente indipendenti e possono quindi essere correlate tra loro. Ipotizziamo anche di ripetere per vari round le scommesse simultanee e di ottenere quindi più vettori $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$,..., che supponiamo essere indipendenti tra loro. Procediamo a chiamare il vettore che contiene i guadagni per unità di denaro puntata per ogni scommessa simultanea con $\mathbf{X}_n$, di conseguenza la somma di denaro ottenuta all'n-esimo round e all'i-esima scommessa è indicata da $X_{n,i}$. Assumendo quindi che $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ...$ siano vettori aleatori i.i.d. distribuiti come $\mathbf{X}$ e considerando il sitema di scommesse $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ...$, possiamo scrivere

$$\mathbf{X}_n := (X_{n,1}, ..., X_{n,d}), \qquad \mathbf{B}_n := (B_{n,1}, ..., B_{n,d}),$$

dove $B_{n,i}$ definisce la somma di denaro giocata all'n-esimo round e all'i-esima scommessa.

Ovviamente $\mathbf{B}_n$ dipende da $\mathbf{X}_1$,...,$\mathbf{X}_{n-1}$, cioè dai risultati dei precedenti round. Più precisamente,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \geq 0, \qquad \mathbf{B}_n = \mathbf{b}_n(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_{n-1}) \geq 0, \qquad n \geq 2,$$

in cui $\mathbf{b}_n$ è una funzione vettoriale deterministica di $n-1$ variabili per ogni $n \geq 2$ e $\mathbf{b}_1$ indica un vettore costante. Il capitale del giocatore F_n dopo n round e per ogni $n \geq 1$ soddisfa

$$F_n = F_{n-1} + \Big\langle \mathbf{B}_n, \mathbf{X}_n \Big\rangle, \tag{2.20}$$

da cui

$$F_n = F_0 + \sum_{l=1}^{n} \Big\langle \mathbf{B}_l, \mathbf{X}_l \Big\rangle, \qquad n \geq 1,$$

dove $F_0 > 0$ denota il capitale iniziale ed è una quantità deterministica e, dati due vettori $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, definiamo con $\Big\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \Big\rangle := \sum_{i=1}^{d} b_i x_i$ il prodotto scalare tra di essi. Supponiamo che il giocatore non possa scommettere più del capitale di cui dispone, dunque

$$B_{n,1} + ... + B_{n,d} \leq F_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Dato che almeno una delle scommesse simultanee è vantaggiosa, si può massimizzare l'aspettativa sul guadagno puntando sulla scommessa più vantaggiosa l'interezza del proprio capitale. Tuttavia, come visto nella precedente sezione, questo sistema di scommesse si può rivelare non efficiace. Anche in questa situazione quindi, invece di scommettere l'intero capitale, cerchiamo di individuare quale sia la frazione di capitale che il giocatore deve scommettere in ogni possibile scommessa al fine di massimizzare il guadagno nel lungo periodo. Definiamo dunque l'insieme

$$\Delta := \left\{ \mathbf{f} = (f_1, ..., f_d) : f_1 \geq 0, ..., f_d \geq 0, \sum_{i=1}^{d} f_i \leq 1 \right\}.$$

Per il giocatore sarebbe una migliore strategia scegliere $\mathbf{f} \in \Delta$ e puntare una frazione f_i fissata del capitale a disposizione sull'i-esima possibile scommessa per $i = 1, ..., d$ ad ogni round. Perciò

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{f}F_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{2.21}$$

Sostituiamo poi (2.21) in (2.20) per avere

$$F_n = F_{n-1}(1 + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \right\rangle), \qquad n \geq 1. \tag{2.22}$$

Iterando otteniamo

$$F_n = F_0 \prod_{l=1}^{n} (1 + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_l \right\rangle), \qquad n \geq 1. \tag{2.23}$$

Procediamo a determinare quale sia la scelta ottimale del vettore della frazione di capitale disponibile da puntare $\mathbf{f}$. Iniziamo definendo

$$r_n(\mathbf{f}) := \frac{1}{n} \ln(F_n/F_0),$$

che rappresenta il tasso di crescita del capitale del giocatore in n periodi. Formalizziamo ora il tasso di crescita di lungo periodo, come fatto in precedenza in(2.15), facendo uso della Legge dei Grandi Numeri (vedi Proposizione A.4):

$$\lim_{n \to \infty} r_n(\mathbf{f}) = \mathbb{E}[\ln(1 + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X} \right\rangle)] =: \mu(\mathbf{f}), \qquad q.c. \tag{2.24}$$

Risulta necessario anche passare dall'insieme Δ all'insieme Δ_0, che è definito come

$$\Delta_0 := \left\{ \mathbf{f} \in \Delta : \mathbb{P}\left(\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X} \right\rangle = -1 \right) = 0 \right\}, \tag{2.25}$$

dato che, per trovare un vettore $\mathbf{f}$ in grado di massimizzare il profitto nel lungo periodo, bisogna scegliere un $\mathbf{f}$ tale che il prodotto in (2.23) non sia nullo.
Per n grande, dalla (2.24) otteniamo

$$F_n = F_0 \cdot e^{\mu(\mathbf{f})n}.$$

Al fine di massimizzare il guadagno basta massimizzare $\mu(\mathbf{f})$, essendo quest'ultimo il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo.

Nel Lemma che segue verrà provata l'esistenza di un $\mathbf{f}^*$ che massimizza $\mu(\mathbf{f})$ e si indagherà sull'esistenza di un punto di massimo, quindi sulla concavita di $\mu(\mathbf{f})$.

Lemma 2.3.1. *Assumiamo che, per $i = 1, ..., d$, X_i sia una variabile aleatoria che assume valori finiti contenuti nell'insieme $[-1, +\infty)$ e che (2.19) sia verificata. La funzione $\boldsymbol{f} \longmapsto \mu(\boldsymbol{f})$, definita per ogni $\boldsymbol{f} \in \Delta_0$, è concava e ammette un punto di massimo. Se sia $\boldsymbol{f^*}_0$ che $\boldsymbol{f^*}_1$ risultano essere punti di massimo, allora avremo che $\mathbb{P}\left(\left\langle \boldsymbol{f^*}_0, \boldsymbol{X}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{f^*}_1, \boldsymbol{X}\right\rangle\right) = 1$ e dunque che $\mu(\boldsymbol{f^*}_0) = \mu(\boldsymbol{f^*}_1)$ con probabilità pari a 1.*

Dimostrazione. La funzione $h(\mu) := \ln(1+\mu)$ è strettamente concava e continua da $(-1, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$, perciò $\mu(\mathbf{f}) = \mathbb{E}[h\left(\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}\right\rangle\right)]$ è continua in Δ_0. Essendo Δ_0 un insieme chiuso e limitato, allora è anche compatto, di conseguenza per il Teorema di Weiestrass (vedi Propsizione A.6) $\mu(\mathbf{f})$ ammette un punto di massimo globale $\mathbf{f^*}$ in Δ_0. Oltre a ciò dato che $\mu(\mathbf{f})$ è composizione di una funzione lineare, cioè il valore atteso e di una funzione concava, cioè h, essa è anche una funzione concava, dato che se $\mathbf{f}_0$ e $\mathbf{f}_1 \in \Delta_0$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, per la concavità di h abbiamo

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\lambda \mathbf{f}_0 + (1-\lambda)\mathbf{f}_1\right) &= \mathbb{E}\left[h\left(\lambda\left\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\right\rangle + (1-\lambda)\left\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\right\rangle\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\lambda h\left(\left\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\right\rangle\right) + (1-\lambda)\, h\left(\left\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\right\rangle\right)\right] \\
&= \lambda \mathbb{E}\left[h\left(\left\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\right\rangle\right)\right] + (1-\lambda)\,\mathbb{E}\left[h\left(\left\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\right\rangle\right)\right] \\
&= \lambda\mu(\mathbf{f}_0) + (1-\lambda)\mu(\mathbf{f}_1).
\end{aligned}
$$

Questa uguaglianza risulta valida se e solo se $\mathbb{P}\left(\left\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{X}\right\rangle = \left\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{X}\right\rangle\right) = 1$ e, in aggiunta, per (2.19) è possibile ottenere una porzione $\mathbf{f} \in \Delta_0$ tale che $\mu(\mathbf{f}) > 0$, ottendendo dunque, in virtù del fatto che $\mathbf{f^*}$ è punto di massimo di $\mu(\mathbf{f})$, che $\mu(\mathbf{f^*}) > 0$.

$\square$

Il Sistema di Kelly è il nome con cui viene indicato il sistema di scommesse che utilizza la frazione ottimale $\mathbf{f^*}$ esaminata nel Lemma appena enunciato.

Possiamo infine trarre le conclusioni relative a questa sezione comparando differenti betting systems che fanno uso di diverse frazioni $\mathbf{f}$, quindi, con la motivazione di mettere in evidenza il fatto che F_n dipende dalla frazione $\mathbf{f}$ che il giocatore punta, utilizzeremo al posto di F_n la notazione $F_n(\mathbf{f})$. Abbiamo anche bisogno, oltre a $\mu(\mathbf{f})$ in (2.24), della varianza

$$\sigma^2(\mathbf{f}) := \text{Var}\left[\ln\left(1 + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X} \right\rangle\right)\right].$$

Teorema 2.3.2. *Per $\boldsymbol{f} \in \Delta_0$ e sotto le stesse assunzioni del Lemma 2.3.1 si ha*

(a) $\lim_{n\to\infty}(F_n(\boldsymbol{f})/F_0)^{1/n} = e^{\mu(\boldsymbol{f})}$ *q.c.;*

(b) se $\mu(\boldsymbol{f}) > 0,$ *allora* $\lim_{n\to\infty}F_n(\boldsymbol{f}) = +\infty$ *q.c.;*

(c) se $\mu(\boldsymbol{f}) < 0,$ *allora* $\lim_{n\to\infty}F_n(\boldsymbol{f}) = 0$ *q.c.;*

(d) se $\mu(\boldsymbol{f}) = 0$ *e* $\sigma(\boldsymbol{f}) > 0$ *, allora*

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(\boldsymbol{f}) = \infty \text{ q.c.} \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} F_n(\boldsymbol{f}) = 0 \ q.c.;$$

(e) se $\mu(\boldsymbol{f}) < \mu(\boldsymbol{f^*})$ *, allora* $\lim_{n\to\infty}F_n(\boldsymbol{f^*})/F_n(\boldsymbol{f}) = +\infty$ *q.c.;*

(f) se $\sigma(\boldsymbol{f}) > 0$ *allora*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(\boldsymbol{f})}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{F_n(\boldsymbol{f})}{F_0}\right) - \mu(\boldsymbol{f})\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Non verrà qui trattata la dimostrazione del teorema appena visto, tuttavia essa è affine alla dimostrazione effettuata nella sezione antecedente per la Proposizione 2.2.3.

Riprendiamo ora, al fine di terminare la sezione, l'equazione (2.22), che se $\sum_{i=1}^{d} f_i = 1$ è possibile riformulare, ottenedo dunque

$$F_n = F_{n-1}\left(1 + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \right\rangle\right) = F_{n-1}\left(\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{X}_n \right\rangle\right),$$

in cui $\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} f_i = 1$ poiché $\mathbf{1}$ indica un vettore con ogni entrata uguale a 1 di d dimensioni. Di conseguenza (2.22) corrisponde a

$$F_n = F_{n-1}\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{1} + \mathbf{X}_n \right\rangle. \tag{2.26}$$

Persino la condizione (2.19), all luce di ciò, si può riscrivere nei termini del vettore $\mathbf{1} + \mathbf{X}_n$, portandoci dunque a richiedere

$$\max_{1 \leq i \leq d} \mathbb{E}[1 + X_i] > 1. \tag{2.27}$$

2.4 Il Sistema Martingala

Come già accennato ad inizio capitolo il Sistema Martingala è un sistema di scommesse che rende vantaggioso un gioco di natura svantaggiosa poiché dotato di una strategia di uscita. Questo sistema, se il giocatore dispone di un capitale considerevole, permette di guadagnare con un basso grado di rischio, ripetendo di volta in volta la stessa scommessa e fermandosi alla prima vittoria ottenuta. Ipotizziamo che $p \in (0, \frac{1}{2}]$ ed anche che $q = 1 - p$. Nel ripetere molteplici volte la stessa scommessa il giocatore deve rispettare le regole che seguono:

- nel primo round scommette una quantità fissata di denaro $B_1 > 0$;
- se il giocatore nel round precedente ha perso, allora si raddoppia la quantità di denaro scommessa rispetto al round precedente;
- alla prima vittoria il giocatore smette di scommettere;

- ad ogni round la probabilità di vincere è p e la probabilità di perdere è q.

Quindi se chiamiamo la quantità di denaro scommessa al secondo round con B_2, otteniamo

$$B_2 = \begin{cases} 2B_1, & \text{se al primo round abbiamo perso,} \\ 0, & \text{se al primo round abbiamo vinto.} \end{cases}$$

Se definiamo

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se vinciamo all'}i\text{-esimo round,} \\ -1, & \text{se perdiamo all'}i\text{-esimo round,} \end{cases}$$

allora si può riscrivere B_2 nel seguente modo:

$$B_2 = 2B_1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_1=-1\}}.$$

Ciò è dovuto al fatto che se si verifica l'evento $X_1 = -1$, quindi se perdiamo al primo round, allora $\mathbb{1}_{\{X_1=-1\}} = 1$, invece se l'evento $X_1 = -1$ non si verifica, quindi abbiamo ottenuto una vittoria al primo round, abbiamo che $\mathbb{1}_{\{X_1=-1\}} = 0$. Procediamo a generalizzare per $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$B_n = \begin{cases} 2B_{n-1}, & \text{se } X_{n-1} = -1, \\ 0, & \text{se } X_{n-1} = 1, \end{cases}$$

si può perciò scrivere

$$B_n = 2B_{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=-1\}}.$$

Se si procede a iterare questa relazione fino al primo round si ottiene

$$\begin{aligned} B_n &= 2B_{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=-1\}} = 2 \cdot \left(2B_{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-2}=-1\}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=-1\}} \\ &= 2^2 B_{n-2} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-2}=X_{n-1}=-1\}} = 2^2\left(2B_{n-3} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-3}=-1\}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-2}=X_{n-1}=-1\}} \\ &= 2^3 B_{n-3} \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n-3}=X_{n-2}=X_{n-1}=-1\}} = \ldots = 2^{n-1} B_1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_1=X_2=\ldots=X_{n-1}=-1\}}. \end{aligned}$$

Denotiamo con $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_{>0} | X_n = 1\}$ il primo round in cui otteniamo una vittoria. Dalla Proposizione 1.2.1 deduciamo che τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ e che $\tau \sim \text{Geom}(p)$.

Ipotizziamo che $F_0 > 0$ sia il capitale iniziale e indichiamo con F_n il capitale posseduto dal giocatore all'n-esimo round. Procediamo quindi a scrivere

$$F_1 = \begin{cases} F_0 - B_1, & \text{se } \tau > 1, \\ F_0 + B_1, & \text{se } \tau = 1, \end{cases} \qquad F_2 = \begin{cases} F_0 - B_1 - B_2, & \text{se } \tau > 2, \\ F_0 - B_1 + B_2, & \text{se } \tau = 2, \end{cases}$$

$$F_3 = \begin{cases} F_0 - B_1 - B_2 - B_3, & \text{se } \tau > 3, \\ F_0 - B_1 - B_2 + B_3, & \text{se } \tau = 3. \end{cases}$$

In generale

$$F_n = \begin{cases} F_0 - B_1 - B_2 - ... - B_n, & \text{se } \tau > n, \\ F_0 - B_1 - B_2 - ... - B_{n-1} + B_n, & \text{se } \tau = n. \end{cases}$$

Si può osservare che F_n può essere scritto come

$$F_n = F_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i X_i.$$

Notiamo come il processo $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia già stato studiato nella Proposizione 2.1.1, nella quale sono stati esaminati i valori assunti da p e q per i quali il processo è una martingala, una supermartingala o una submartingala.

Sapendo che:

- $B_n = 2^{n-1} B_1 \mathbb{1}_{\{X_1 = ... = X_{n-1} = -1\}}$,
- se $\tau > n, X_n = X_{n-1} = ... = X_1 = -1$,
- se $\tau = n, X_{n-1} = ... = X_1 = -1$ e $X_n = 1$,

allora $B_n = 2^{n-1}B_1$ se $\tau \geq n$. Più precisamente se $\tau \geq n$, allora $B_k = 2^{k-1}B_1$ per ogni $k = 1, ..., n$. Di conseguenza F_n può essere riformulata:

$$F_n = \begin{cases} F_0 - B_1 - 2B_1 - ... - 2^{n-1}B_1, & \text{se } \tau > n, \\ F_0 - B_1 - 2B_1 - ... - 2^{n-2}B_1 + 2^{n-1}B_1, & \text{se } \tau = n, \end{cases}$$

da cui

$$F_n = \begin{cases} F_0 + (-1 - 2 - ... - 2^{n-1})B_1, & \text{se } \tau > n, \\ F_0 + (-1 - 2 - ... - 2^{n-2})B_1 + 2^{n-1}B_1, & \text{se } \tau = n. \end{cases}$$

Dato che

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1,$$

otteniamo

$$F_n = \begin{cases} F_0 - (2^{n-1})B_1, & \text{se } \tau > n, \\ F_0 - (2^{n-1} - 1)B_1 + 2^{n-1}B_1 = F_0 + B_1, & \text{se } \tau = n. \end{cases}$$

Vediamo quindi come la strategia d'uscita dal gioco τ porta il giocatore ad avere un guadagno certo pari a B_1. È però necessario avere a disposizione un capitale corposo in grado di sopportare le eventuali perdite che possono verificarsi nei vari round. Tuttavia c'è la possibilità di stimare quante ripetizioni siano necessarie per terminare il gioco, ovvero per ottenere la prima vincita. La probabilità di perdere in tutti i primi k round è

$$\mathbb{P}(\tau > k) = (1 - p)^k.$$

In aggiunta a ciò, essendo $\tau \sim \text{Geom}(p)$, abbiamo che

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{p}\,, \quad \text{Var}(\tau) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Osserviamo che il processo $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non soddisfa il Teorema dell'Arresto Opzionale poiché F_n in n cresce o decresce esponenzialmente, di conseguenza non vengono soddisfatte le ipotesi (b) e (c) del Teorema dell'Arresto Opzionale, anche perché la costante C dovrebbe dipendere da n. Nemmeno l'ipotesi (d) del Teorema dell'Arresto Opzionale viene verificata, in virtù del fatto che il processo non è non negativo. L'Osservazione 1 inoltre invalida l'ipotesi (a). Tutto questo certifica che il Sistema Martingala viola il Principio di Conservazione dell'Equità del Gioco, difatti nonostante il gioco sia svantaggioso, il sistema porta alla disuguaglianza $\mathbb{E}[F_T] > \mathbb{E}[F_0]$.

Questi sistemi, forti dell'importante risultato a cui portano, sono stati utilizzati in finanza, tuttavia a causa della grande quantità di capitale necessario di sovente risultano inapplicabili.

Capitolo 3

Il Criterio di Kelly Utilizzato nel Mercato Azionario

Con il presente capitolo verrà trattata una delle possibili applicazioni del Criterio di Kelly in finanza, quella relativa all'investimento nel mercato azionario, presentando anche simulazioni di portafogli azionari al fine di mostrare che il Criterio di Kelly permette l'ottimizzazione dei suddetti e dunque la massimizzazione del capitale nel lungo periodo. Va precisato, inoltre, che anche in questo capitolo è richiesto che l'ipotesi (2.19) sia soddisfatta, ovvero che il massimo dei valori attesi delle vincite per unità di denaro giocata all'i-esima possibile scommessa sia positivo.

In questo contesto si considera quindi un investirore che vuole impiegare le proprie risorse per svolgere l'attività di investimento nel mercato azionario, acquistando o vendendo azioni le quali hanno probabilità differenti tra loro di poter aumentare o diminuire di valore. Un'azione che oggi ha un valore pari a 100 euro, ad esempio, può subire una variazione di valore negativa del 2 percento ed arrivare quindi al prezzo di 98 euro nella giornata di domani, oppure, se si verificasse un rialzo del 5 percento, l'azione vedrebbe il suo valore aumentare a 105 euro. Ipotizziamo che un investitore abbia un portafoglio composto da due titoli azionari che saranno denominati A e B. Queste due azioni possono subire un incremento o una diminuzione del loro valore in maniera indipendente l'una dall'altra, entrambe le azioni inoltre hanno una probabilità differente di aumentare o diminuire di prezzo. Lo strumento A registrerà una crescita con probabilità p_A ed una riduzione di valore con probabilità $q_A = 1 - p_A$, lo strumento B invece vedrà il proprio prezzo crescere con probabilità p_B e ridursi con probabilità $q_B = 1 - p_B$. Supponiamo anche che quando un'azione acquista valore essa lo fa con una percentuale di rialzo costante, che quindi non varia, ad esempio, tra un mese e il successivo. Aggiungiamo inoltre che l'investiore alla fine del mese sperimenti un incremento di capitale equivalente al prodotto tra il capitale utilizzato per l'acquisto del titolo azionario e il fattore di crescita del prezzo dello strumento. Per fare un esempio ipotizziamo che un'azione del valore di 130 euro nel mese di Marzo subisca un incremento di valore del 10 percento, arrivando al prezzo di 143 euro nel mese di Aprile. Se si verificasse di nuovo un rialzo del prezzo dello sturmento, essendo la percentuale di rialzo costante, la crescita sarebbe ancora del 10 percento, portanto il titolo a valere 157.3 euro nel mese seguente. Anche in caso di decremento di valore dello strumento si realizzerebbe la stessa dinamica. Se l'azione subisse un aumento di prezzo allora l'incremento di capitale dell'investore risulterebbe pari al prodotto tra il capitale investito nello strumento e $V \in (1, +\infty)$, se al contrario il titolo sperimentasse una riduzione di valore, l'investitore vedrebbe il proprio capitale diminuire in misura pari al prodotto tra il capitale investito nell'azione e $Z \in (0, 1)$. È evidente la similitudine tra ciò che è stato appena discusso e il caso generale del lancio di una moneta, nel quale se esce testa il prezzo dell'azione cresce di V volte, mentre se il risultato del lancio è croce il valore del titolo si riduce di Z volte. L'investitore in ciascuna delle due azioni che compongono il suo portafoglio investe le frazioni di capitale $f_A, f_B \in [0, 1]$, con $f_A + f_B = 1$. Il capitale dell'investitore, qualora si verifichi un aumento del prezzo dell'azione A e una riduzione del valore dell'azione B, sarebbe pari, nel mese successivo, a

$$F_1 = F_0 \cdot (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B).$$

Se invece nel mese successivo l'azione A dovesse dimunire il proprio valore mentre l'azione B aumentasse di prezzo otterremmo

$$F_2 = F_1 \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) = F_0 \cdot (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B),$$

in cui V_A e Z_A indicano rispettivamente il fattore di crescita e quello di decrescita dello strumento A, V_B e Z_B rappresentano rispettivamente il fattore di crescita e quello di decrescita del titolo azionario B e F_n simoboleggia il capitale nell' n-esimo periodo.

Ipotizziamo che l'investitore investa in titoli azionari per una serie di $N \in \mathbb{N}$ mesi ed indichiamo con

- $WL \in \mathbb{N}$ il numero di mesi in cui il valore dell'azione A aumenta e quello dell'azione B diminuisce;

- $LW \in \mathbb{N}$ il numero di mesi in cui il valore dell'azione A diminuisce e quello dell'azione B aumenta;

- $WW \in \mathbb{N}$ il numero di mesi in cui il valore dell'azione A aumenta e quello dell'azione B aumenta;

- $LL \in \mathbb{N}$ il numero di mesi in cui il valore dell'azione A diminuisce e quello dell'azione B diminuisce;

di conseguenza si ottiene $N = WL + LW + WW + LL$.

Quindi possiamo rappresentare il capitale corrente dell'investitore con la seguente equazione:

$$\begin{aligned} F_N = & F_0 \cdot (V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B)^{WL} \cdot (Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B)^{LW} \cdot \\ & \cdot (V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B)^{WW} \cdot (Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B)^{LL}, \end{aligned}$$

che presenta un elevato grado di somiglianza con l'iterazione della formula (2.26). Si può ora definire nel seguente modo la funzione di utilità

$$\begin{aligned} G(f_A, f_B) = \ln\left(\frac{F_N}{F_0}\right) &= WL \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) + LW \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \\ &+ WW \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + LL \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B). \end{aligned}$$

Questa funzione rappresenta la funzione di crescita logaritmica del capitale di N serie discrete di investimenti e, come nella (2.12), dividendo per N otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \cdot G(f_A, f_B) = & \frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{F_N}{F_0}\right) = \\ = & \frac{WL}{N} \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) + \frac{LW}{N} \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \\ + & \frac{WW}{N} \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \frac{LL}{N} \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Per una serie di investimenti sufficientemente lunga è possibile scrivere che

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B) := & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot G(f_A, f_B) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{F_N}{F_0}\right) = \\ = & \lim_{N\to\infty} \left(\frac{WL}{N}\right) \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) + \lim_{N\to\infty} \left(\frac{LW}{N}\right) \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \\ + & \lim_{N\to\infty} \left(\frac{WW}{N}\right) \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \lim_{N\to\infty} \left(\frac{LL}{N}\right) \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B), \end{aligned} \tag{3.2}$$

dove $g(f_A, f_B)$ è il tasso di crescita del capitale nel lungo periodo, già introdotto nella (2.15).

Ora ricorrendo alla Legge dei Grandi Numeri (vedi Proposizione A.4) e dividendo WL, LW, WW e LL per il numero dei mesi in cui si è deciso di investire nelle azioni A e B otteniamo

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{WL}{N}\right) = p_A \cdot q_B, \qquad \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LW}{N}\right) = q_A \cdot p_B,$$
$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{WW}{N}\right) = p_A \cdot p_B, \qquad \lim_{N\to\infty}\left(\frac{LL}{N}\right) = q_A \cdot q_B,$$

quindi

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B) = p_A \cdot q_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B) + q_A \cdot p_B \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + \\ + p_A \cdot p_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot f_B) + q_A \cdot q_B \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot f_B). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dalla (3.2) si evince, similmente a quanto accadeva nella (2.18), che il comportamento del capitale F_N, per N grande, nell'N-esimo periodo, è descritto da

$$F_N \sim e^{N \cdot g(f_A, f_B)}.$$

Di conseguenza trovare il massimo del tasso di crescita asintotico $g(f_A, f_B)$ è il passo da compiere per effettuare un' ottimizzazione del capitale nel lungo periodo. È necessario quindi, al fine di garantire l'esistenza di un massimo globale per la funzione, supporre che la condizione (2.27) sia soddisfatta in modo che valga il Lemma 2.3.1 e dunque assumere che

$$\max\{p_A V_A + (1 - p_A) Z_A, p_B V_B + (1 - p_B) Z_B\} > 1.$$

La prossima cosa da fare è trovare il massimo della funzione di utilità per ricavare la frazioni ottimali di capitale da investire nelle due azioni. Questo problema può essere trattato come un problema di ottimizzazione non lineare vincolata ed è possibile ottenere la soluzione tramite l'utilizzo di MATLAB. Dunque il problema consiste nella massimizzazione della funzione (3.3) soggetta al vincolo di uguaglianza $c(f_A, f_B) = f_A + f_B - 1 = 0$, con vincolo inferiore $f_A, f_B \geq 0$. Dal vincolo

$c(f_A, f_B) = 0$ si ottiene $f_B = 1 - f_A$ e sostituendo questo risultato nella (3.3) si ha

$$\begin{aligned}\mu(f_A) &= g(f_A, 1 - f_A) = \\ &= p_A \cdot q_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)) + q_A \cdot p_B \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)) + \\ &+ p_A \cdot p_B \cdot \ln(V_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)) + q_A \cdot q_B \cdot \ln(Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)),\end{aligned} \tag{3.4}$$

dove il dominio di $\mu(f_A)$ è

$$\Delta = \{f_A \in \mathbb{R} : 0 \leq f_A \leq 1\}.$$

Procediamo ora a trovare il punto critico della funzione, la derivata prima della funzione $\mu(f_A)$ è

$$\begin{aligned}\mu'(f_A) = & \frac{p_A \cdot q_B \cdot (V_A - Z_B)}{V_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)} - \frac{q_A \cdot p_B \cdot (V_B - Z_A)}{Z_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)} + \\ & + \frac{p_A \cdot p_B \cdot (V_A - V_B)}{V_A \cdot f_A + V_B \cdot (1 - f_A)} + \frac{q_A \cdot q_B \cdot (Z_A - Z_B)}{Z_A \cdot f_A + Z_B \cdot (1 - f_A)}.\end{aligned}$$

Per trovare la soluzione bisogna risolvere $\mu'(f_A) = 0$ e, essendo scomoda e difficoltosa la risoluzione analitica, per farlo possiamo ricorrere a MATLAB, utilizzando funzioni in grado di calcolare minimi e massimi vincolati di funzioni a più variabili.

Nella seguente sezione, con l'ausilio di MATLAB, verranno simulati dei portafogli di azioni e il contestuale mercato azionario, al fine di mostrare le qualità del Criterio di Kelly in un'applicazione più concreta.

3.1 Simulazione dell'Uso del Criterio di Kelly nel Mercato Azionario

Proseguiamo il capitolo mostrando delle simulazioni che illustrano differenti evoluzioni del capitale a seconda di diverse configurazioni del mercato azionario. Ipotizziamo che un investitore detenga nel proprio portafoglio due titoli azionari, il titolo A e il titolo B. Entrambi i titoli hanno una probabilità differente di aumentare di valore alla fine di ogni giornata, lo strumento A subirà un aumento di valore con probabilità p_A e lo strumento B con probabilità p_B. Quando il prezzo del titolo A cresce, questo cresce del $(V_A - 1) \cdot 100$ percento, quando si riduce lo fa in misura pari al $(1 - Z_A) \cdot 100$ percento. La stessa dinamica si verifica per il titolo B che, se sperimenta un aumento di valore, cresce del $(V_B - 1) \cdot 100$ percento, mentre se si verifica una riduzione del prezzo questo diminuisce del $(1 - Z_B) \cdot 100$ percento. Usando valori diversi per le probabilità p_A, p_B e per i fattori di crescita e decrescita V_A, V_B e Z_A, Z_B è possibile definire differenti coppie di titoli A e B, ciascuna delle quali rappresenta un portafoglio. Sono elencate di seguito due differenti configurazioni.

(1) Azione A: $p_A = 0.55, V_A = 1.12, Z_A = 0.95$.
Azione B: $p_B = 0.49, V_B = 1.19, Z_B = 0.92$.

(2) Azione A: $p_A = 0.28, V_A = 1.21, Z_A = 0.97$.
Azione B: $p_B = 0.60, V_B = 1.08, Z_B = 0.96$.

È opportuno inoltre ricordare che la condizione (2.26) deve essere soddisfatta.

Il successivo codice MATLAB ha la funzione di individuare le frazioni ottimali di capitale da investire nel titolo A e nel titolo B, al fine di massimizzare la crescita del capitale nel lungo periodo e risolvere quindi il problema di ottimizzazione di portafoglio. È riportato solamente il caso riguardante il portafoglio (1), poiché per ottenere le frazioni ottimali relative al secondo portafolgio è sufficiente sostituire i valori di input dell'azione A e dell'azione B.

```
%Impostiamo i valori di input relativi all'azione A
%e all'azione B:
p_A = 0.55;
q_A = 1 - p_A;
V_A = 1.12;
Z_A = 0.95;

p_B = 0.49;
q_B = 1 - p_B;
V_B = 1.19;
Z_B = 0.92;

%Scriviamo la funzione obiettivo con il segno meno
%dato che lo strumento fmincon cerca il punto di
%minimo della funzione:
g = @(f) -(p_A * q_B * log(V_A * f(1) + Z_B * f(2)) + ...
           q_A * p_B * log(Z_A * f(1) + V_B * f(2)) + ...
           p_A * p_B * log(V_A * f(1) + V_B * f(2)) + ...
           q_A * q_B * log(Z_A * f(1) + Z_B * f(2)));

%Definiamo il vincolo di uguaglianza, il limite
%inferiore e quello superiore;
%c(f_A,f_B)=f_A + f_B - 1 = 0; f_A, f_B >= 0:
Aeq = [1, 1];
beq = 1;
li = [0, 0];
ls = [1, 1];
```

```
%Individuiamo un punto iniziale per effettuare
%la massimizzazione che deve rispettare f_A + f_B = 1
f_0 = [0.5, 0.5];

%Utilizziamo fmincon per trovare quali valori di f_A
%e di f_B ottimizzano g:
[f_star] = fmincon(g, x0, [], [], Aeq, beq, li, ls);
```

L'esecuzione del codice restituisce in output le frazioni ottimali di capitale da investire nel titolo A e nel titolo B relative al portafoglio (1).

```
Frazioni ottimali di capitale da investire:
f_Astar = 0.35138, f_Bstar = 0.64862
```

Eseguendo il codice utilizzando come valori di input dell'azione A e dell'azione B quelli inerenti al portafoglio (2) otteniamo le frazioni ottimali di capitale da investire nei titoli che costituiscono il suddetto portafoglio.

```
Frazioni ottimali di capitale da investire:
f_Astar = 0.61572, f_Bstar = 0.38428
```

Il passo successivo consiste nell'effettuare una simulazione dell'evoluzione del capitale nel tempo, facendo vedere come la crescita di ques'ultimo sia diversa se si utilizza il Criterio di Kelly investendo le frazioni ottimali di capitale f_A^*, f_B^* o se

non si utilizza investendo delle frazioni di capitale non ottimali.
Prima di procedere bisogna puntualizzare che se F_n indica il capitale all'n-esimo periodo, allora

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} \cdot (V_A f_A + V_B f_B) & \text{con probabilità } p_A p_B; \\ F_{n-1} \cdot (Z_A f_A + V_B f_B), & \text{con probabilità } q_A p_B; \\ F_{n-1} \cdot (V_A f_A + Z_B f_B) & \text{con probabilità } p_A q_B; \\ F_{n-1} \cdot (Z_A f_A + Z_B f_B) & \text{con probabilità } q_A q_B. \end{cases}$$

Nel codice MATLAB successivamente riportato si paragona l'andamento del capitale che si ottiene quando si investono le frazioni ottimali e quello che si ottiene quando si investono porzioni di capitale non ottimali. Verrano quindi utilizzate due diverse strategie di investimento. La prima strategia di investimento prevede l'applicazione del Criterio di Kelly e quindi di investire nei titoli A e B che compongono il portafolgio (1) le frazioni ottimali di capitale f_A^*, f_B^*. La seconda consiste nell'investimento di porzioni non ottimali di capitale sempre nei titoli A e B che compongono il portafoglio (1). All'interno del codice **X_star** rappresenta l'evoluzione del capitale generata dalla prima strategia di investimento, quindi, utilizzando le frazioni ottimali relative al portafoglio (1) ottenute come output del codice visto in precedenza. L'evoluzione del capitale derivata dalla seconda strategia di investimento è invece rappresentata da **X_nott**. L'andamento dei due capitali è osservato per un tempo di 6 mesi, dunque $N = 180$ periodi se consideriamo ogni periodo equivalente ad un giorno. Ipotizziamo inoltre che, per entrambe le strategie, il capitale iniziale sia lo stesso e pari a 1. Il mercato azionario e le sue dinamiche sono simulate stabilendo in maniera casuale per ogni periodo se il valore delle due azioni aumenta o diminuisce.

Per la simulazione relativa al portafoglio (2) è valido lo stesso codice MATLAB, sarà sufficiente modificare i valori di input dell'azione A e dell'azione B, le porzioni ottimali di capitale da investire e quelle non ottimali.

```
%Impostiamo i valori di input relativi all'azione A
%e all'azione B:
p_A = 0.55;
V_A = 1.12;
Z_A = 0.95;

p_B = 0.49;
V_B = 1.19;
Z_B = 0.92;

%Definiamo due strategie di investimento, una che
%utilizza le frazioni ottimali di capitale e una
%che utilizza frazioni non ottimali:
f_Astar = 0.35138;
f_Bstar = 0.64862;

f_Anott = 0.55;
f_Bnott = 0.45;

%Impostiamo il numero di periodi considerati:
N = 180;

%Inizializziamo le due dinamiche di capitale,
```

```
%quella del capitale con strategia ottimale e
%quella del capitale con strategia non ottimale
X_star = ones(1, N+1);

X_nott = ones(1, N+1);

%Simuliamo l'evoluzione dei due capitali:
for t = 1:N

    %Determiniamo randomicamente per ogni
    %periodo considerato se i titoli subiscono un
    %aumento o una riduzione di valore,
    %assegnamo il valore 1 quando il prezzo aumenta
    %e 0 quando diminuisce:
    EA = rand() < p_A;

    EB = rand() < p_B;

    %Calcoliamo i rendimenti dei titoli in base
    %agli eventi di mercato
    if EA && EB
        r_A = V_A; r_B = V_B;
    elseif ~EA && EB
        r_A = Z_A; r_B = V_B;
    elseif EA && ~EB
        r_A = V_A; r_B = Z_B;
    else
        r_A = Z_A; r_B = Z_B;
```

```
    end

    %Evoluzione dei capitali
    X_star(t+1)=X_star(t)*(r_A*f_Astar+r_B*f_Bstar);

    X_nott(t+1)=X_nott(t)*(r_A*f_Anott+r_B*f_Bnott);
end

%Mostriamo graficamente l'evoluzione dei due capitali
figure;
plot(0:N, X_star, 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(0:N, X_nott, 'k', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Periodi');
ylabel('Capitale');
legend('Strategia ottimale', 'Strategia non ottimale');
title('Crescita dei due capitali nel tempo');
grid on;
```

La simulazione svolta facendo uso del portafoglio (1) restituisce come risultato la Figura 3.1, mentre quella effettuata utilizzando il portafoglio (2) da come output la Figura 3.2. Osservando i due grafici evinciamo che la strategia di investimento che implicava lo scommettere le porzioni ottimali di capitale f_A^* e f_B^* conduce, in entrambe le simulazioni, ad una crescita del capitale superiore rispetto alla strategia che prevedeva di investire frazioni non ottimali di capitale. I risultati ottenuti dalle due simulazioni confermano dunque la teoria fomulata da Kelly, ovvero che l'investimento di frazioni ottimali di capitale, ottenute attraverso la massimizzazione del tasso di crescita di ques'ultimo, porta alla massimizzazione del capitale nel lungo periodo.

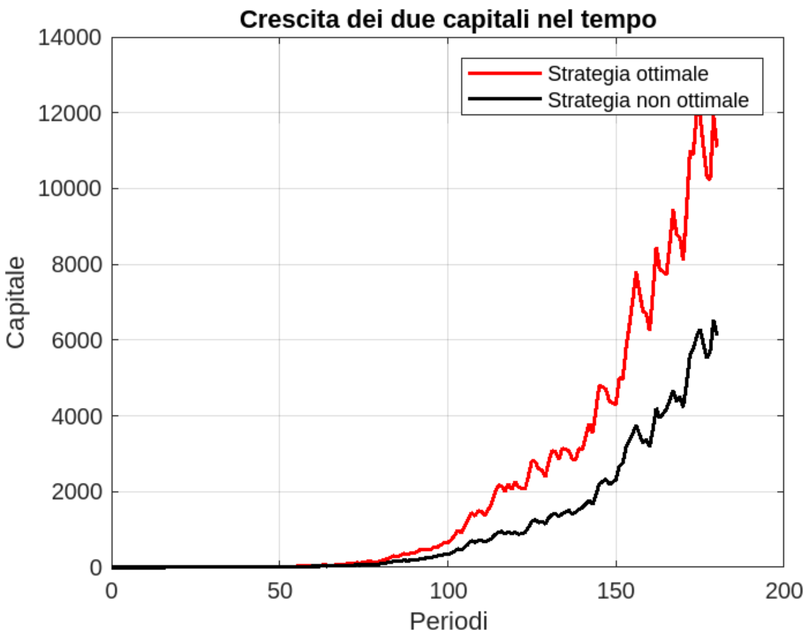
Crescita dei due capitali nel tempo
Strategia ottimale
Strategia non ottimale
Capitale
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
50
100
150
200
Periodi

Fig. 3.1

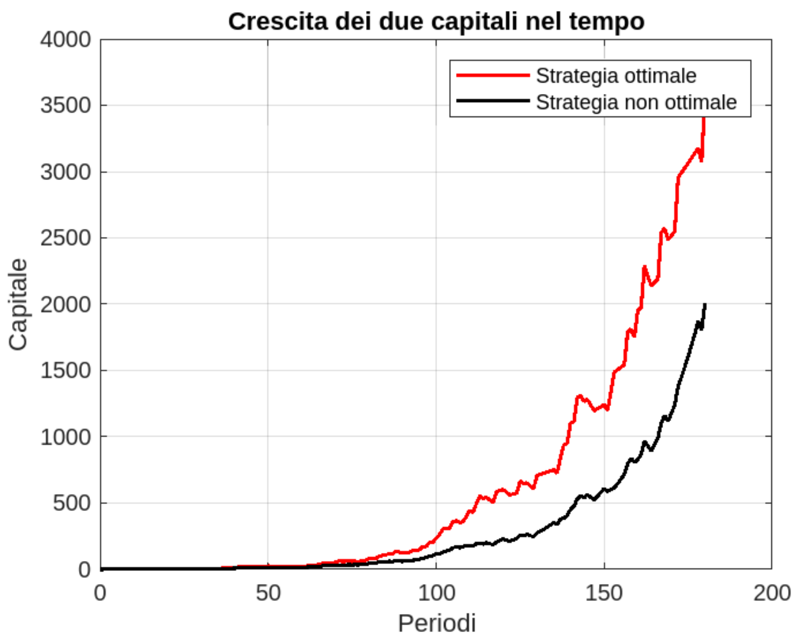
Crescita dei due capitali nel tempo
Strategia ottimale
Strategia non ottimale
Capitale
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
200
Periodi

Fig. 3.2

Capitolo 4

Applicazione del Sistema Martingala al Mercato Valutario

All'interno del seguente capitolo si discuterà l'uso della betting strategy nota come Sistema Martingala all'interno del mercato valutario, si procederà poi a riportare delle simulazioni in cui viene applicato il Sistema Martingala per mostrare sia che questa strategia riesce a trasformare un gioco svantaggioso in un gioco di natura vantaggiosa poiché dotata di una strategia di uscita, sia che un ammontare di capitale elevato è necessario affinché il Sistema Martingala conduca al profitto.

Il Sistema Martingala è popolare all'interno del mercato valutario ed è usato in particolar modo dai traders che effettuano operazioni su coppie di valute con bassa volatilità, come ad esempio la coppia di valute EUR/USD che simboleggia il cambio tra l'euro e il dollaro statunitense. La popolarità di questa strategia di investimento nel mercato dei cambi è giustificata dal fatto che le valute, diversamente da altri asset come ad esempio le azioni, raramente vedono il loro valore scendere a 0, difatti è difficile che un paese finisca in bancarotta, l'utilizzo del Sistema Martingala risulta dunque piú sicuro nel mercato valutario piuttosto che in altri. Un'altra motivazione che legittima la notorietà del Sistema Martingala tra i traders del mercato valutario riside nel fatto che l'utilizzo di questa strategia permette di rendere più vantaggioso il prezzo medio di entrata e più facilmente raggiungibile il break-even price, aumentando quindi le possibilità di realizzare un profitto. Procediamo ora ad illustrare un esempio che pemetterà di comprendere meglio questa dinamica.

Esempio 4.1. *Ipotizziamo che un trader acquisti un lotto EUR/USD, dove un lotto equivale a 100000 unità della valuta base, poiché si aspetta un aumento del tasso di cambio e quindi un apprezzamento dell'euro rispetto al dollaro. Assumiamo anche che il trader utilizzi il Sistema Martingala come strategia di investimento, dunque, se il cambio EUR/USD si riduce, il trader effettuerà una nuova operazione di acquisto, investendo il doppio del capitale investito nella precedente operazione, acquistando quindi il doppio dei lotti comprati nella trade antecedente. Procediamo ad analizzare la seguente tabella, realizzata supponendo che il tasso di cambio EUR/USD si riduca per 4 volte consecutive di 0.0050, che ha lo scopo di illustrare come l'utilizzo del Sistema Martingala in una posizione lunga riduca il break-even price e dunque aumenti le possibilità di chiudere in profitto.*

Trade	*EUR/USD*	*Lotti Acquistati*	*Tot Lotti*	*Break-even price*	*Perdita($)*
1	*1.2500*	*1*	*1*	*1.2500*	*0*
2	*1.2450*	*2*	*3*	*1.2467*	*-50*
3	*1.2400*	*4*	*7*	*1.2429*	*-150*
4	*1.2350*	*8*	*15*	*1.2383*	*-350*
5	*1.2300*	*16*	*31*	*1.2339*	*-750*

Il break-even price può essere definito come il prezzo al quale il trader deve chiudere la posizione al fine di recuperare la totalità del capitale investito. Dalla tabella si evince chiaramente come, dopo ogni trade, il break-even price si abbassi, *questo è il risultato del fatto che ad ogni ridzuione di prezzo la posizione del trader viene raddoppiata. Il break-even price difatti è pari alla media ponderata dei prezzi considerando il numero di lotti acquisiti in corrispondenza di ciascun prezzo. Indicando con P_i il prezzo corrispondente all'i-esima trade e con L_i il numero di lotti acquistati nell'i-esmia trade possiamo scrivere il break-even price come*

$$BEP_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i \cdot L_i)}{\sum_i^n L_i}.$$

La riduzione del break-even price che si verifica ad ogni trade effettuata dopo un ribasso del tasso di cambio rende il Sistema Martingala una strategia di investimento che aumenta le possibiltà di profitto rispetto ad altre strategie. Ipotizziamo che un trader effettui l'acquisto di un solo lotto EUR/USD e che non utilizzi il Sistema Martingala come strategia di investimento. In seguito al ribasso del cambio EUR/USD il trader per realizzare un profitto dovrà sperare che il tasso di cambio salga a 1.2501. Un trader che invece utilizza il Sistema Martingala come strategia di investimento, in seguito alla riduzione del prezzo, effettuerà un acquisto di due lotti, facendo scendere il break-even price a 1.2467. Di conseguenza sarà sufficiente che il tasso di cambio EUR/USD salga a 1.2468 per permettere al trader di realizzare un guadagno. Il trader che utilizza il Sistema Martingala necessita quindi di un aumento più contenuto del tasso di cambio per ottenere profitto, di conseguenza ha una maggiore probabilità di ottenerlo.

Il caso opposto a quello trattato dall'esempio, cioè quello in cui il trader assume una posizione corta, porta alle medesime conclusioni, il break-even price peró essendo la posizione una posizione corta aumenterà dopo ogni trade effetuata.

Alla luce di queste considerazioni, va comunque ricordato che nell'utilizzare questa strategia si potrebbe esaurire il capitale se continuano a verificarsi variazioni del tasso di cambio opposte a quelle desiderate dal trader, conseguentemente per continuare a raddoppiare l'investimento c'è bisogno di un ammontare considerevole di capitale iniziale, ostacolo che può rendere inapplicabile il Sistema Martingala.

4.1 Simulazione dell'Utilizzo del Sistema Martingala

Proseguiamo il capitolo presentando in questa sezione delle simulazioni svolte con MATLAB che, come detto in precedenza, hanno il compito di mostrare come il Sistema Martingala sia una strategia di investimento che riesce a trasformare un gioco svantaggioso in vantaggioso e che, allo stesso tempo, presenta il limite relativo all'ingente quantità di capitale che l'investitore deve possedere. Il codice che segue simula mille volte lo stesso investimento utilizzando come strategia il Sistema Martingala, dando come risultato quante volte la strategia si è dimostrata profittevole. L'investimento ha una probabilità di successo $p_s < 0.5$, inoltre l'investitore, seguendo la strategia di investimento scelta, ad ogni insuccesso punta il doppio della puntata precedente o il capitale rimanente, qualora non sia sufficiente. L'investimento iniziale è pari a 150 euro a fronte di un capitale di partenza di 1 milione di euro. Ogni simulazione si ferma quando il capitale arriva a 0 oppure alla prima vincita.

```
%Definiamo il capitale iniziale e
%l'investimento iniziale:
capitale_iniziale = 1000000;

investimento_iniziale = 150;

%Definiamo la probabilita' che
%l'investimento generi profitto:
p_successo = 0.44;
```

```
%Impostiamo il raddoppio dell'investimento
%in caso di perdita:
sist_mart = 2;

%Impostiamo il numero di simulazioni:
num_simulazioni = 1000;

%Effettuiamo multiple simulazioni dello stesso
%investimento utilizzando come strategia
%il Sistema Martingala:
successi = 0;

for sim = 1:num_simulazioni
    budget = capitale_iniziale;
    puntata = investimento_iniziale;

    while budget > 0
        if rand() < p_successo
            successi = successi + 1;
            break;
        else
            budget = budget - puntata;
            puntata = min(puntata * sist_mart , budget);
        end
    end
end
```

```
%Mostriamo quante volte il Sistema Martingala
%ha avuto successo:

percentuale_successo = (successi / num_simulazioni) * 100;
fprintf('Il␣Sistema␣Martingala␣e' stata una strategia di
investimento profittevole nel %.2f%% dei
casi ',␣percentuale_successo);
␣␣␣␣
```

Il codice genera il seguente output:

```
Il Sistema Martingala e' stata una strategia di
investimento profittevole nel 100.00% dei casi
```

Da ciò possiamo dedurre che il Sistema Martingala, quando l'investitore è dotato di un capitale sufficientemente elevato, è una strategia di investimento che porta al guadagno e in grado di rendere vantaggioso un gioco svantaggioso in quanto dotata di una strategia di uscita.

Per vedere come la dotazione iniziale di capitale sia in grado di influenzare le possibilità di successo della strategia di investimento in esame, eseguiamo di nuovo il codice riducendo il capitale iniziale da 1 milione di euro a 500 euro. Il risultato fornito dalle simulazioni è il successivo:

```
Il Sistema Martingala e' stata una strategia di
investimento profittevole nel 81.20% dei casi
```

Il Sistema Martingala in questo caso si è dimostrata una strategia di investimento fallimentare nel 18.80% dei casi, evidenziando di conseguenza che per implementare questa strategia con successo sia necessario un capitale di partenza elevato.

Conclusioni

Nel presente elaborato è stato mostrato come i sistemi di scommesse, a seconda del contesto di investimento, ovvero in base alla tipologia del gioco, siano in grado di fornire all'investitore informazioni relative alla quota di capitale da puntare, al fine di rendere vincente la scommessa o profittevole l'investimento.

L'analisi svolta si è focalizzata in modo particolare su due specifici sistemi di scommesse, il Criterio di Kelly e il Sistema Martingala.

La prima strategia di investimento esaminata prevede di puntare una precisa porzione di capitale, al fine di ottimizzare la crescita di quest'ultimo nel lungo periodo e rendere l'investirore in grado di assorbire gli insuccessi che possono verificarsi in alcune ripetizioni del gioco. Quando l'investitore si trova di fronte ad un gioco vantaggioso, è stato dimostrato che l'utilizzo del Criterio di Kelly è ottimale e dunque preferibile a strategie alternative quali la scommessa dell'intero capitale in un'opportunità di investimento o l'impiego di frazioni di capitale che non massimizzano il suo tasso di crescita. La simulazione presente nel secondo capitolo ha avuto il compito di confermare ciò e renderlo più evidente, illustrando come la scelta ottimale prevista da Kelly e quindi l'impiego, ad ogni ripetizione, di una specifica frazione di capitale relativa ad un tasso di crescita asintotico positivo dello stesso, porti alla massimizzazione del guadagno nel lungo periodo. Il Criterio di Kelly è stato successivamente esteso anche al caso in cui sono presenti diverse scommesse simultanee, di cui almeno una favorevole, in modo da poter poi simulare la crescita

del profitto generato da un portafoglio azionario e il relativo mercato.
La seconda betting strategy analizzata nel corso della tesi, ovvero il Sistema Martingala, si è rivelata una strategia di investimento profittevole quando il gioco considerato è svantaggioso poiché, come dimostrato, è in grado di violare il Principio di Conservazione dell'Equità e trasformare quindi il gioco in favorevole. La strategia impone all'investitore di raddoppiare la puntata effettuata nel precedente round per tutto il tempo in cui le scommesse risultano insuccessi e di fermarsi alla prima vincita. Occorre però ricordare quanto già osservato, ovvero che questo sistema, per essere applicato in modo profittevole, richiede che l'investitore sia dotato di una elevata quantità di capitale iniziale.
Nella seconda parte dell'elaborato le strategie studiate sono state applicate a delle diverse realtà finanziarie ricorrendo anche all'uso di simulazioni, con lo scopo di concretizzare maggiormente i risultati ottenuti dalle analisi svolte. Con l'applicazione del Criterio di Kelly nel mercato azionario e le rispettive simulazioni si è voluto mostrare come, anche in questo ambiente, risulti possibile arrivare alla massimizzazione del profitto, in questo caso derivato da un portafoglio di azioni, investendo frazioni di capitale che ottimizzino il guadagno asintotico. Infine, sono stati descritti e provati i befenefici derivanti dall'utilizzo del Sistema Martingala nel forex trading, confermando anche, attraverso le simulazioni effettuate, che affinché il Sistema Martingala risulti efficace, è necessario un capitale di partenza molto consistente.

Concludendo, si spera che la tesi abbia raggiunto il suo scopo, quello di fornire, tramite lo studio, effettuato con approccio probabilistico, del comportamento di un investitore razionale che opera nel contesto delle scommesse, le informazioni cardinali necessarie per individuare la natura di un gioco e, di conseguenza, intraprendere una strategia di investimento ottimale che permetta di massimizzare il guadagno nelle diverse scommesse.

Appendice

In questa appendice sono riportati risultati di base utilizzati nella trattazione della tesi.

Proposizione A.1 (Disuguaglianza Triangolare)**.** *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \, .$$

Proposizione A.2. *Sia* Ω *lo spazio campionario associato ad un esperimento e siano* X *ed* Y *due variabili aleatorie definite su tale esperimento. Se* $X(\omega) \leq Y(\omega)$ *per ogni* $\omega \in \Omega$*, allora* $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$*.*

Proposizione A.3 (Legge delle Aspettazioni Iterate)**.** *Siano* X, Y *due variabili aleatorie congiuntamente distribuite. Allora*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X] \, .$$

Proposizione A.4 (Legge dei Grandi Numeri)**.** *Sia* $X_1, X_2, \ldots$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d., ognuna con media finita* μ*. Allora*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mu \right) = 1 \, ,$$

o equivalentemente, quasi certamente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu \, .$$

Proposizione A.5 (Teorema del Limite Centrale). *Siano $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media $\mu < \infty$ e varianza $\sigma^2 < \infty$. Definita $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ la sua normalizzazione, si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$*

$$F_{Z_n}(t) := \mathbb{P}(Z_n \leq t) \xrightarrow{q.c.} \mathbb{P}(Z \leq t) \quad \textit{per } n \to \infty \,,$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Equivalentemente Z_n converge in distribuzione a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ per $n \to \infty$.

Proposizione A.6 (Teorema di Weierstrass). *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto (ovvero chiuso e limitato). Allora f ammette un minimo e un massimo globale in D.*

Bibliografia

[1] L. Bachelier, *Calcul des probabilités*, Calcul des probabilités, no. v. 1, Gauthier-Villars, 1912.

[2] D. Burkholder, *Joseph doob: A collection of mathematical articles in his memory*, Dept. of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL, 2007.

[3] S. N. Ethier, *The doctrine of chances: Probabilistic aspects of gambling*, Probability and Its Applications, Springer, Berlin and Heidelberg, 2010.

[4] P. A. Griffin, *The theory of blackjack*, Huntington Press, Las Vegas, Revised 1993.

[5] J. L. Kelly JR., *A new interpretation of information rate*, ch. 3, pp. 25–34, 2011 (original version in 1956).

[6] C. Kempton, *Horse play, optimal wagers and the kelly criterion*, 2011.

[7] K. Lien, *Forex trading the martingale way*, `https://www.investopedia.com/articles/forex/06/martingale.asp`, 2024.

[8] D. G. Luenberger, *Investment science*, Oxford University Press, 2014.

[9] L.C. Maclean, W.T. Ziemba, and E.O. Thorp, *Kelly capital growth investment criterion, the: Theory and practice*, World Scientific Handbook In Financial Economics Series, World Scientific Publishing Company, 2011.

[10] P. Marek, T. Toupal, and F. Vavra, *Efficient distribution of investment capital*, 2016.

[11] U. Matej, S. Gustav, H. Ondrej, and Z. Filip, *Optimal sports betting strategies in practice: an experimental review*, IMA Journal of Management Mathematics **32** (2021), no. 4, 465–489.

[12] L. Mazliak, *How paul lévy saw jean ville and martingales*, Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www. jehps. net) **5** (2009), no. 11.

[13] H. A. Mimun, *Note del corso "probabilità e applicazioni alla finanza"*, `https://drive.google.com/file/d/1s4J0ZyUCAPZSF9hB11FuZ5atvhJLgVcE/view?pli=1`, 2023.

[14] W. Poundstone, *Fortune's formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and wall street*, Farrar, Straus and Giroux, 2010.

[15] S.M. Ross, C. Mariconda, and M. Ferrante, *Calcolo delle probabilità*, Idee & strumenti, Apogeo, 2007.

[16] L. M. Rotando and E. O. Thorp, *The kelly criterion and the stock market*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 10, 922–931.

[17] S. Sheffield, *Martingales, risk-neutral probability and black-scholes option pricing*, `https://math.mit.edu/~sheffield/2018600/martingalenotes.pdf`, 2025.

[18] E. O. Thorp, *Optimal gambling systems for favorable games*, Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute **37** (1969), no. 3, 273–293.

[19] E. O. Thorp, *The kelly criterion in blackjack sports betting, and the stock market*, Chapter 54 in *The Kelly Capital Growth Investment Criterion Theory and Practice*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011, pp. 789–832.

[20] A. Tushia, *Optimal betting using the kelly criterion*, 2014.