

LUISS 

Economia e finanza: banche e intermediari finanziari

Teoria e gestione del portafoglio

Il futuro di Bitcoin nei portafogli finanziari

Prof. Nicola Borri

Relatore

Prof. Antonio Simeone

Correlatore

Matr. Lorenzo Tommasino

Candidato

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Introduzione	3
Parte I: Nasce Bitcoin	5
Capitolo 1: La storia di Bitcoin.....	6
1.1: Nasce la prima criptovaluta della storia: Bitcoin.....	6
1.2 La figura enigmatica di Satoshi Nakamoto.....	9
Capitolo 2: Il ruolo di Bitcoin nella società.....	11
2.1: Come funziona il protocollo di Bitcoin.....	11
2.2: Le funzioni che può ricoprire Bitcoin	14
2.3: Il principale competitor di Bitcoin: <i>Ethereum</i>	16
Parte II: La costruzione del modello bayesiano	18
Capitolo 1: Descrizione dei dati	19
1.1: Fonte dei dati	19
1.2: Frequenza e periodo di osservazione.....	19
1.3: Calcolo dei rendimenti e dei rendimenti in eccesso	20
1.4: Struttura dei dati e preparazione per l'analisi.....	20
Capitolo 2: Scelta di portafoglio di tipo bayesiano	22
2.1: Motivazione dell'approccio bayesiano	22
2.2: Costruzione delle <i>prior</i>	23
2.3: Processo di aggiornamento bayesiano.....	25
2.3.1: Formulazione generale.....	25
2.3.2: Implementazione pratica e versione scalare	26
2.4: Calcolo dei pesi ottimali del portafoglio.....	27
2.5: <i>Certainty-Equivalent Return (CER)</i>	28
2.6: Confronto tra il modello bayesiano e modelli classici.....	30
2.7: Perché la varianza <i>posterior</i> della media per il calcolo dei pesi.....	32
Parte III: Bitcoin nei portafogli finanziari	33
Capitolo 1: Analisi dei risultati.....	34
1.1: Statistiche descrittive dei rendimenti post-2017.....	34

1.2: Analisi dei pesi ottimali bayesiani di portafoglio	36
1.3: Analisi del <i>Certainty-Equivalent Return (CER)</i>	39
1.3.1: <i>CER ex-ante gain</i>	39
1.3.2: <i>CER ex-post gain</i>	43
1.3.3: Confronto tra <i>CER ex-ante</i> ed <i>ex-post</i>	46
Capitolo 2: Conclusioni	49
2.1: Sintesi dei risultati principali	49
2.2: Possibili implicazioni per gli investitori	50
2.3: Limiti dello studio e spunti per possibili estensioni	50
2.4: Considerazioni finali	52
Ringraziamenti	53
Appendice	54
Sezione A	54
Sezione B	57
Sezione C	60
Bibliografia e Sitografia	82

Introduzione

Negli ultimi anni, bitcoin¹ è emerso come un asset finanziario controverso, in grado di suscitare dibattiti accesi tra investitori, regolatori e accademici. Nato nel 2008 come un esperimento di moneta decentralizzata, il suo ruolo nei mercati finanziari è cresciuto esponenzialmente, portando molti a chiedersi se esso possa effettivamente diventare una componente stabile di portafogli di investimento ben diversificati. Nonostante la sua elevata volatilità, ha dimostrato un rendimento storicamente superiore rispetto ad altre *asset class*, attirando l'attenzione di investitori istituzionali e privati. Tuttavia, la sua elevata incertezza e la mancanza di un valore intrinseco comunemente accettato sollevano interrogativi sulla sua reale utilità in un portafoglio d'investimento.

L'obiettivo di questo elaborato è analizzare il ruolo di bitcoin in un portafoglio finanziario, attraverso un approccio basato sull'ottimizzazione bayesiana. L'utilizzo di un modello del genere consente di integrare credenze soggettive iniziali con nuovi dati osservati, aggiornando dinamicamente le stime di rischio e rendimento. Questo approccio è particolarmente utile nel caso di asset con una storia di mercato limitata come bitcoin, per il quale le informazioni disponibili possono essere incorporate in modo più flessibile rispetto ai modelli di ottimizzazione tradizionali. Questo studio si propone come base su cui partire per ampliare l'analisi, illustrata nei prossimi capitoli, ad orizzonti più specifici e complessi. Inoltre, può risultare utile ad investitori interessati a questo asset ma che sono mai riusciti ad approfondire a dovere i molti aspetti, anche tecnici, che lo circondano.²

Il lavoro si articola in diverse sezioni. La Parte I fornisce una panoramica storica e funzionale di Bitcoin, discutendone le principali caratteristiche e le implicazioni socioeconomiche. La Parte II introduce la teoria del portafoglio bayesiano, illustrando le equazioni utilizzate per l'aggiornamento delle *prior* e per il calcolo delle *posterior*. Particolare attenzione viene data alla scelta della varianza a posteriori della media per la costruzione della matrice di varianza-covarianza dei rendimenti, una scelta metodologicamente fondata che permette di ottenere pesi di portafoglio più coerenti con il livello di incertezza associato alle stime dei rendimenti.

Successivamente, la Parte III presenta i risultati dell'allocazione ottimale del portafoglio con bitcoin e S&P 500, confrontando diverse ipotesi di *prior* e differenti livelli di dogmatismo nelle credenze iniziali. Vengono analizzati i pesi ottimali ottenuti, la loro evoluzione nel tempo e il loro impatto sulla *performance* del portafoglio. Il *Certainty-Equivalent Return (CER)* viene utilizzato come metrica di

¹ bitcoin con la lettera "b" minuscola rappresentano le cryptovalute scambiate, da distinguere con Bitcoin che sta ad indicare invece la rete stessa.

² Per esempio, si cercherà di dare una risposta alla classica domanda: che valore intrinseco ha bitcoin?

valutazione per confrontare l'efficacia dell'allocazione bayesiana con bitcoin rispetto a un portafoglio tradizionale.

L'ultimo capitolo riassume i principali risultati e propone spunti per future ricerche, evidenziando come l'approccio bayesiano possa essere esteso a portafogli *multi-asset* o a scenari con parametri di rischio variabili nel tempo.

L'aggiornamento bayesiano implementato in questo studio segue la logica classica dell'inferenza bayesiana (Zellner, 1971), applicata alla finanza e all'ottimizzazione di portafoglio (Jorion, 1986; Black & Litterman, 1992). Tuttavia, la specifica formulazione delle equazioni utilizzate per l'aggiornamento della media e della varianza si basa su un approccio semplificato, derivato dalla teoria bayesiana classica e adattato per una gestione numerica più efficiente.

In conclusione, lo studio fornisce un contributo significativo alla letteratura sull'allocazione di portafoglio con asset innovativi come bitcoin, dimostrando che un approccio basato sull'aggiornamento dinamico delle credenze possa portare a decisioni di investimento più informate e potenzialmente più efficaci.

Parte I

Nasce Bitcoin

Capitolo 1: La storia di Bitcoin

In questo primo capitolo verrà data una breve panoramica sui principali eventi che hanno interessato la storia di Bitcoin, cercando di dare un'idea del contesto evolutivo di questo asset e della rapidità con cui si è espanso in tutto il globo. Successivamente ci si soffermerà velocemente sulla figura del suo creatore, Satoshi Nakamoto.

1.1: Nasce la prima criptovaluta della storia: Bitcoin

La nascita di Bitcoin, o quantomeno la sua idea, avvenne nel 31 ottobre 2008 e coincide con l'uscita del famoso *white paper* redatto da un anonimo scrittore con lo pseudonimo di Satoshi Nakamoto. Venne pubblicato su internet³ e poi fatto circolare velocemente nei principali *blog* di appassionati di computer e programmazione, che ne colsero rapidamente la potenzialità.

I primi bitcoin ad essere stati “creati” risalgono però alla prima transazione, avvenuta all'interno della sua rete nel gennaio del 2009, data della creazione del cosiddetto “blocco genesi”, probabilmente eseguita dallo stesso inventore. Il primo tasso di cambio reale si ebbe circa un anno dopo l'uscita dell'articolo il 5 ottobre del 2009⁴, che vedeva un dollaro scambiato per 1309,03 bitcoin e veniva calcolato in base al costo dell'energia necessaria per “minarli”.

Quello che probabilmente è stata la prima vera e propria transazione commerciale con i bitcoin è datata il 22 maggio 2010, quando un cittadino americano proveniente dalla Florida, Laszlo Hanyecz, comprò due pizze per la bellezza di diecimila bitcoin⁵. Pubblicò su un *blog* la sua richiesta con lo scopo di dimostrare che fosse possibile usare Bitcoin come mezzo di pagamento: in poco tempo ricevette le pizze.

³ bitcoin.org/bitcoin.pdf

⁴ <https://web.archive.org/web/20180627132512/http://newlibertystandard.wikifoundry.com/page/2009+Exchange+Rate>

⁵ <https://it.cointelegraph.com/news/two-papa-john-s-pizzas-ordered-2014-1-b-mistake>

Poco tempo prima, nel febbraio 2010, venne creata la prima piattaforma dove poter scambiare bitcoin per valute fiat: *Bitcoin market*. Tuttavia, non ebbe il successo sperato e nella metà del 2011 *PayPal*, che mediava nei pagamenti per i bitcoin acquistati, interruppe la cooperazione con il portale. Molte persone infatti considerano *Mt.Gox* la prima vera piattaforma per il *trading* di bitcoin, vista la sua maggiore copertura mediatica e la sua rapida espansione nel mondo. Per anni rimase il punto di riferimento per chi volesse acquistare delle criptovalute; finchè, nel febbraio del 2014, presentò istanza di fallimento per quello che poi si scoprì essere il più grande furto cripto valutario di sempre, ammontava almeno a 844 mila bitcoin (di cui 100 mila di proprietà dell'*exchange*) e fu messo in atto da un gruppo di *hacker* di cui ancora oggi non si conosce l'identità⁶.

Bitcoin ha guadagnato popolarità non solo tra gli appassionati di nuove tecnologie o tra gli speculatori che speravano in un ulteriore aumento del prezzo. Per le sue caratteristiche, Bitcoin è infatti diventato estremamente popolare anche tra i criminali. Nell'ottobre del 2013, l'*FBI* ha sequestrato circa 26mila BTC⁷ in seguito all'arresto del creatore di *Silk Road*, l'allora popolare sito web che mediava la vendita di tutto ciò che era illegale. A seguito di questi eventi, il prezzo di bitcoin ci mise quasi tre anni per recuperare cali di oltre il novanta per cento.

Un'altra pietra miliare nella storia di bitcoin è stata l'introduzione nel dicembre 2017 di contratti futures e di opzioni regolamentati negli Stati Uniti da parte di *CME* e *CBOE*, che hanno permesso a sempre più istituzioni di poter accedere ad un mercato che poneva delle barriere significative all'entrata per questa tipologia di investitori.

Nel giugno 2021, El Salvador fece la storia diventando il primo paese al mondo a riconoscere bitcoin come valuta a corso legale. Da quel momento, i cittadini di questa nazione centroamericana hanno avuto la possibilità di utilizzare la criptovaluta per effettuare acquisti quotidiani e ricevere stipendi in bitcoin. La scelta del presidente ha suscitato un vivace dibattito tra i sostenitori delle criptovalute, aprendo la discussione sull'opportunità che altri governi adottino iniziative simili.

⁶ <https://risparmio.tiscali.it/podcast/finanza-oscuro/puntata/podcast-finanza-oscuro-crack-mtgox-primo-shock-nella-storia-di-bitcoin/>

⁷ BTC è il ticker finanziario di bitcoin.

Per molti di questi anni, la finanza tradizionale ha preferito non investire in questo settore, spesso additandolo come una bolla speculativa priva di valore intrinseco e destinata a scomparire in futuro. Significative sono, a titolo di esempio, le parole del *CEO* di *Blackrock*⁸, Larry Fink, in un'intervista dell'ottobre del 2017 in cui parlava di bitcoin come un "indice del riciclaggio di denaro"⁹ mentre lo stesso superava i 5800 dollari. Qualche anno dopo, nel 15 giugno del 2023¹⁰, lo stesso fondo farà richiesta per quotare un *ETF spot* scritto proprio su bitcoin alla *SEC* statunitense. La notizia fece molto scalpore e molti dei più grandi fondi d'investimento seguirono la stessa strada. Prima di *Blackrock*, altre entità cercarono di farsi approvare lo stesso prodotto finanziario, finendo anche in cause legali con le autorità preposte¹¹, ma questa volta era diverso. Il 10 gennaio del 2024 vengono finalmente approvati gli *ETF spot* su bitcoin, una cosa impensabile anche solo pochi mesi prima. Pochi giorni dopo, lo stesso Larry Fink parlerà di bitcoin come una nuova forma di "oro digitale" e di come sia "un asset che ti protegge"¹². Bitcoin stava compiendo così i suoi primi passi anche nella finanza tradizionale.

Le autorità regolatrici statunitensi sono state sempre abbastanza diffidenti da questo mondo e, come già menzionato sopra, non sono mancate azioni legali contro i vari operatori del settore cripto-valorario. Lo scenario sembra essere cambiato dal 4 novembre del 2024, quando Donald J. Trump vince le presidenziali USA, creando non pochi scossoni mediatici anche in merito alle criptovalute. L'amministrazione che è risultata vincente nelle elezioni è apertamente pro-cripto ed uno dei primi passi mossi è stato proprio quello di cambiare il presidente della *SEC*, che più di tutti gli altri si era battuto contro questo settore.

Detto questo, il 5 dicembre 2024 bitcoin raggiunse il valore di cento mila dollari, segnando nuovi massimi storici e continuando a scrivere la sua storia.

⁸ Uno dei più grandi fondi d'investimento al mondo.

⁹ <https://www.cnbc.com/2017/10/13/blackrock-ceo-larry-fink-calls-bitcoin-an-index-of-money-laundering.html>

¹⁰ <https://www.ilsole24ore.com/art/criptovalute-bitcoin-balza-20percento-la-domanda-blackrock-etf-AEc5ETrD>

¹¹ <https://it.cointelegraph.com/news/grayscale-wins-sec-lawsuit>

¹² <https://www.nasdaq.com/articles/blackrock-ceo-larry-fink-says-bitcoin-is-an-asset-class-that-protects-you>

1.2 La figura enigmatica di Satoshi Nakamoto

La figura di Satoshi Nakamoto, pseudonimo dell'ignoto creatore di Bitcoin, è avvolta nel mistero. Non si sa se si tratti di un individuo o di un gruppo, né sono mai emerse prove concrete sulla sua identità. Tuttavia, il contesto storico e il messaggio implicito lasciato nel “*Genesis Block*”, il primo blocco della *blockchain* di Bitcoin, forniscono indizi significativi sulle motivazioni che hanno spinto Nakamoto a ideare il sistema. All'interno del Genesis Block è infatti riportata la frase: “*The Times 03/Jan/2009 Chancellor on brink of second bailout for banks*”¹³. Questo messaggio criptico, in riferimento al salvataggio statale delle banche durante la crisi finanziaria del 2008, suggerisce che Bitcoin sia stato concepito come una risposta diretta alle falle del sistema finanziario tradizionale.

Nakamoto, all'interno del suo *white paper*, descrive Bitcoin come un “sistema di pagamento elettronico *peer-to-peer*”, progettato per eliminare la necessità di fidarsi di intermediari come banche centrali o istituzioni finanziarie. La crisi del 2008 aveva messo in luce la fragilità di un sistema in cui il potere decisionale era concentrato in poche mani, lasciando cittadini e risparmiatori vulnerabili a decisioni prese senza il loro consenso. Nakamoto intendeva creare un'alternativa: una rete decentralizzata in cui gli utenti potessero trasferire valore direttamente tra loro, senza intermediari, e in cui le regole fossero dettate da un protocollo matematico e trasparente.

Il *white paper*, intitolato “*Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*”, pone particolare enfasi sulla decentralizzazione, garantita da una struttura distribuita in cui nessun ente centrale può controllare o manipolare il sistema. Nakamoto evidenzia anche l'importanza di proteggere gli utenti da rischi quali l'inflazione incontrollata o la censura finanziaria, problemi spesso causati dall'uso discrezionale del potere da parte delle banche centrali. L'adozione di un sistema basato sul *proof-of-work*, con la creazione di blocchi che registrano in modo immutabile le transazioni, rappresenta la soluzione tecnica alla sfiducia nei confronti degli intermediari.

La sua visione non si limitò ad un mero esercizio tecnologico: Bitcoin è un manifesto politico ed economico che riflette la volontà di restituire il controllo del denaro ai suoi proprietari, liberandoli dall'obbligo di fidarsi di istituzioni che, come dimostrato dalla crisi finanziaria, non sempre agiscono

¹³ https://medium.com/@daniele_de_faveri/il-blocco-genesi-di-bitcoin-03d68f50301c

nell'interesse comune. Nakamoto scompare dalle scene pubbliche nel 2010, lasciando dietro di sé un sistema in grado di funzionare autonomamente e un'eredità che continua a ispirare innovazione e dibattiti su come dovrebbe essere il denaro del futuro.

Il fascino che si cela dietro la figura anonima ha senz'altro contribuito a far crescere il valore della sua creazione agli occhi degli investitori. Un progetto che fa della decentralizzazione e della sicurezza i suoi principali punti di forza non poteva che avere un creatore senza identità, rafforzando così la sua credibilità in tal senso. In questo modo si è consolidata sempre di più la concezione di Bitcoin come un protocollo di proprietà di tutti quelli che ne fanno uso, oltre che sinceramente "democratico". Tutto questo rappresenta un *unicum* nel settore cripto valutario.

Capitolo 2: Il ruolo di Bitcoin nella società

Nei prossimi paragrafi si darà una visione generale ed il più possibile semplificata di aspetti anche tecnici riguardanti Bitcoin. Nel primo verrà spiegato in maniera intuitiva il funzionamento prettamente informatico del protocollo su cui è stato programmato. Risulterà utile alla comprensione del valore che può incorporare sapere in sostanza cosa è e come funziona. Nel secondo paragrafo si cercherà di cogliere quali sono e soprattutto quali potranno essere le funzioni che questo asset può svolgere all'interno della nostra società. Infine, ci sarà uno breve spazio dedicato a quello che viene comunemente definito il suo principale competitor, *Ethereum*.

2.1: Come funziona il protocollo di Bitcoin

Come già accennato, la rete di Bitcoin rappresenta un sistema decentralizzato in grado di consentire transazioni finanziarie senza la necessità di intermediari. Alla base del suo funzionamento si trovano tecnologie innovative, come la *blockchain*, il *mining* e un meccanismo di consenso distribuito, che garantiscono sicurezza, trasparenza e resistenza a manipolazioni esterne. Di seguito viene descritto il funzionamento tecnico della rete con particolare attenzione alle fasi principali di una transazione, al ruolo dei *miner* e al processo di consenso.

La *blockchain* è una struttura dati distribuita che funge da registro pubblico e immutabile di tutte le transazioni avvenute sulla rete. Ogni blocco della *blockchain* contiene tre componenti principali:

1. Le transazioni recenti, ossia tutte le operazioni finanziarie inviate dagli utenti e validate dalla rete.
2. Il riferimento al blocco precedente, che collega ogni blocco al successivo, formando una catena lineare e cronologica.
3. L'*hash* di validazione, un risultato crittografico generato attraverso il processo di *proof-of-work*, che garantisce l'integrità del blocco.

Questo registro distribuito è memorizzato e sincronizzato su migliaia di computer, chiamati nodi, sparsi in tutto il mondo. La decentralizzazione garantisce che nessuna entità possa controllare o alterare unilateralmente la *blockchain*.

Ogni transazione nella rete Bitcoin passa attraverso diverse fasi prima di essere definitivamente inclusa nella *blockchain*. L'utente che intende effettuare una utilizza un portafoglio digitale per generare una transazione, questa include: l'indirizzo del destinatario, l'importo trasferito e una firma digitale che autentica il mittente e dimostra che è autorizzato a spendere i fondi. La transazione viene inviata alla rete e propagata tra i nodi, che ne verificano la validità controllando, ad esempio, che i fondi non siano già stati spesi in precedenza. Una volta verificata, viene temporaneamente inserita in una "coda" chiamata *mempool*, in attesa di essere inclusa in un blocco dai cosiddetti *miner*.

Il *mining* è il processo attraverso il quale le transazioni vengono confermate e aggiunte alla *blockchain*. I *miner*, ossia partecipanti alla rete dotati di computer specializzati¹⁴, raccolgono le transazioni dalla *mempool* e competono per risolvere un complesso problema matematico utilizzando il meccanismo di *proof-of-work*. Questo problema richiede ai *miner* di trovare un valore crittografico (*l'hash*) che soddisfi determinati requisiti di difficoltà.

Il processo di *mining* si svolge in tre fasi principali. Innanzitutto, i *miner* cercano di trovare la soluzione al problema prima degli altri, utilizzando una grande quantità di potenza computazionale; il primo di essi che risolve il problema crea un nuovo blocco contenente le transazioni verificate e lo trasmette alla rete. A questo punto, riceve una ricompensa in bitcoin, nota come *block reward*, e le commissioni delle transazioni incluse nel blocco. Questo sistema non solo incentiva i *miner* a mantenere operativa la rete, ma garantisce anche che le transazioni siano validate in modo sicuro.

Il meccanismo dietro alla *block reward* risulta essere di grande interesse da un punto di vista finanziario. La ricompensa ricevuta per ogni blocco "minato" non è stata sempre la stessa negli anni. Come già accennato in precedenza, Satoshi Nakamoto aveva tra le sue principali intenzioni anche quella di sfidare gli ormai secolari sistemi inflazionistici implementati dalle banche centrali. A questo

¹⁴ Comunemente conosciuti come computer ASIC, creati unicamente con lo scopo di risolvere l'algoritmo di ogni blocco.

scopo, introdusse nel protocollo il concetto di *halving*, che ricorda la parola inglese “*half*” che vuol dire letteralmente “metà”. Questo processo fa in modo che esattamente ogni 210 mila blocchi validati si dimezza la quantità di bitcoin all’interno di ogni ricompensa, dimezzando in questo modo anche la quantità di bitcoin “stampati” e riducendone l’offerta naturale. L’offerta massima di bitcoin non potrà in alcun modo superare i ventuno milioni di unità; dunque, arrivati ad un certo punto, la ricompensa cesserà di esistere ed i *miner* dovranno “accontentarsi” delle sole commissioni sulle transazioni. Attualmente, sono stati minati circa 19 milioni e 800 mila bitcoin¹⁵ e si stima che solo nel 2140 questo processo si concluderà¹⁶. La ricompensa per aver validato il primo blocco, il *genesis block*, fu di cinquanta bitcoin e il primo *halving* ebbe luogo nel 2012; ne susseguirono poi altri tre fino ad arrivare all’ultimo, nell’aprile del 2024, dove l’offerta per blocco si ridusse a 3,25 bitcoin. Anche solo pensando alle semplici dinamiche di domanda e offerta di mercato, questo meccanismo ha senz’altro contribuito ad accrescere il valore di bitcoin nel lungo periodo. Intuitivamente, i *miner* per coprire almeno i costi sono costretti a vendere a mercato una parte delle ricompense ottenute, costituendo una sorta di offerta obbligata di bitcoin al mercato; negli anni, ipotizzando anche che la domanda fosse rimasta costante, l’offerta da parte dei minatori è stata costretta a ridursi nel tempo, creando uno squilibrio “naturale”.

All’interno del codice di Bitcoin Nakamoto ha voluto fare in modo che ognuno di questi blocchi venisse estratto in media ogni dieci minuti, principalmente per una questione di sicurezza. Per ottenere questo risultato, il protocollo si aggiorna ogni due settimane e modifica la difficoltà nella risoluzione del problema matematico in base a quanta potenza computazionale¹⁷ viene “prestata” al sistema dai partecipanti. Più questa è elevata, meno tempo ci vorrà in media per risolvere l’algoritmo; dunque, il protocollo ne aumenterà la difficoltà per fare in modo che si torni alla media dei dieci minuti. Per questi motivi, è facile calcolare che ogni *halving* avviene mediamente ogni quattro anni.

Uno degli aspetti fondamentali della rete Bitcoin è il meccanismo di consenso distribuito, che assicura che tutti i nodi abbiano una copia aggiornata e identica della *blockchain*. Quando un *miner* propone

¹⁵ Circa il 94% dell’offerta massima.

¹⁶ <https://pierangelosoldavini.blog.ilsole24ore.com/2024/04/19/per-bitcoin-arriva-lhalving-dimezzate-le-emissioni-ma-cosa-significa/>

¹⁷ Denominata “hashrate”.

un nuovo blocco, questo viene verificato dagli altri nodi per accertarne la validità. Per essere accettato, il blocco deve rispettare le regole del protocollo (ad esempio, la corretta struttura delle transazioni) e contenere solo transazioni valide, evitando fenomeni come il *double spending*. Se la maggioranza della rete approva il blocco, questo viene aggiunto alla *blockchain*, e le transazioni in esso contenute diventano irreversibili. Se si volesse “corrompere” la rete, inserendo ad esempio transazioni truffaldine, l’intenzionato dovrebbe controllare più della metà dei nodi esistenti in tutto il mondo, condizione quasi impossibile da raggiungere vista l’elevatissimo numero attualmente operativo.

Riassumendo, la sicurezza della rete Bitcoin è garantita da diversi fattori:

1. La decentralizzazione elimina il rischio di un punto di controllo unico, rendendo la rete altamente resiliente.
2. Il *proof-of-work* assicura che l’aggiunta di blocchi richieda un costo computazionale elevato, rendendo economicamente e tecnicamente improbabile un attacco.
3. La trasparenza consente a chiunque di verificare le transazioni e lo stato della *blockchain*.

Grazie a queste caratteristiche, Bitcoin rappresenta un sistema innovativo che coniuga la sicurezza con l’indipendenza dalle autorità centrali, offrendo un modello alternativo per la gestione delle transazioni e del valore.

2.2: Le funzioni che può ricoprire Bitcoin

Sebbene le intenzioni iniziali del suo creatore sembrassero orientate a far diventare Bitcoin una vera e propria valuta digitale utilizzabile per i pagamenti quotidiani, il corso degli eventi ha mostrato un’evoluzione diversa. Nel *white paper*, Nakamoto descrive Bitcoin come un “sistema di contante elettronico” progettato per consentire transazioni dirette tra individui senza intermediari. Tuttavia, con il passare del tempo, Bitcoin si è gradualmente trasformato più in una classe di asset che in una valuta di scambio quotidiano, acquisendo caratteristiche simili a quelle dell’oro.

Questa evoluzione è stata guidata da diversi fattori. In primo luogo, la crescente adozione da parte di investitori istituzionali e privati ha reso Bitcoin un deposito di valore percepito, una sorta di “oro

digitale” che funge da protezione contro l’inflazione e le incertezze economiche. La sua offerta limitata a 21 milioni di unità ha contribuito ulteriormente a rafforzare questa narrativa, rendendolo un bene più adatto all’investimento a lungo termine che all’uso come moneta di scambio.

Parallelamente, l’aumento della popolarità e dell’uso di Bitcoin ha portato a sfide pratiche che ne hanno limitato l’efficacia come valuta. Problemi legati alla scalabilità e ai costi delle transazioni, aggravati dal crescente traffico sulla rete, hanno reso Bitcoin meno competitivo rispetto ad altre criptovalute progettate specificamente per i pagamenti. Ad esempio, progetti come *XRP*¹⁸ si sono distinti proprio per la loro efficienza in termini di velocità e costi di transazione, rendendoli più adatti all’uso quotidiano o ai trasferimenti transfrontalieri.

Questa trasformazione di Bitcoin non ha intaccato il suo ruolo centrale nel panorama delle criptovalute, ma ha aperto la strada allo sviluppo di una vasta gamma di *altcoin*¹⁹ che si specializzano in funzioni diverse. *Ethereum*, *Ripple*, *Solana* e molte altre criptovalute rappresentano oggi alternative più efficaci per gli scambi e i pagamenti (e non solo), con infrastrutture e caratteristiche tecniche pensate per risolvere i limiti di Bitcoin. Nonostante ciò, il fascino di Bitcoin come pioniere, riserva di valore e simbolo della decentralizzazione rimane intatto, continuando a rappresentare l’epicentro dell’innovazione nel settore delle criptovalute.

Vale la pena sottolineare che l’elevata volatilità che ancora è presente nel prezzo di bitcoin non lo consente di essere pienamente paragonato ad asset conservativi e di protezione come, ad esempio, oro ed altre materie prime. Rimane ad oggi un asset con caratteristiche fortemente speculative, ma con il passare degli anni, come è molto probabile all’interno di un settore giovane come quello cripto-valorario, la varianza potrebbe stabilizzarsi al ribasso.

In conclusione, ad oggi le funzioni principali che svolge Bitcoin nella società sono in primo luogo quelle di speculazione. Attenzione però a sottovalutare anche quelle, per chi volesse un’alternativa al settore bancario, di fornire indipendenza da un punto di vista economico non affidandosi a

¹⁸ Ticker finanziario per la criptovaluta chiamata “Ripple”.

¹⁹ Vengono definite così tutte le cripto-valute alternative, appunto, a Bitcoin.

quest'ultimo per la custodia della propria ricchezza e conservando una certa *privacy* nelle transazioni che si intendono eseguire.

2.3: Il principale competitor di Bitcoin: *Ethereum*

Tra le molte criptovalute che sono emerse dopo Bitcoin, ad oggi *Ethereum* è senza dubbio la più rilevante e influente, distinguendosi per la sua capacità di andare oltre il semplice scopo di "moneta digitale". Creato nel 2015 da Vitalik Buterin e altri sviluppatori, *Ethereum* rappresenta una piattaforma decentralizzata che, a differenza di Bitcoin, non si limita a essere un sistema per il trasferimento di valore, ma fornisce un'infrastruttura completa per lo sviluppo di applicazioni decentralizzate (*dApps*) e l'esecuzione di contratti intelligenti (*smart contract*).

Di seguito verranno discusse le principali differenze tra le due criptovalute più capitalizzate al mondo.

Bitcoin è stato progettato principalmente come una forma di oro digitale, una riserva di valore e una valuta alternativa. Il suo scopo principale è sostituire le valute fiat come strumento di pagamento e proteggere dalla manipolazione delle banche centrali. *Ethereum*, invece, è nato come una piattaforma per consentire agli sviluppatori di creare applicazioni decentralizzate. Il focus di quest'ultima non è solo il trasferimento di valore, ma l'offerta di un ecosistema flessibile in grado di ospitare contratti automatici e complessi che possono eseguire istruzioni programmate senza la necessità di intermediari.

Bitcoin si basa ancora sul meccanismo di consenso *proof-of-work*, che richiede una grande quantità di energia per il *mining*. Questo sistema garantisce sicurezza, ma è stato criticato per il suo impatto ambientale. *Ethereum*, dal canto suo, ha recentemente completato un'importante transizione al meccanismo di consenso *proof-of-stake* con l'aggiornamento noto come *The Merge* (2022)²⁰. Questo cambiamento ha ridotto drasticamente il consumo energetico della rete, rendendola più sostenibile e attraente per chi considera l'impatto ambientale una priorità.

²⁰ <https://www.ilsole24ore.com/art/ethereum-merge-riuscito-criptovaluta-cambia-pelle-cedole-fino-10percento-diventa-bond-high-yield-AEbe5V0B>

Bitcoin è progettato per essere una rete stabile e sicura, ma la velocità delle transazioni è limitata (circa sette transazioni al secondo) e le capacità di scalabilità sono ridotte. *Ethereum*, pur avendo inizialmente sofferto di problemi simili, sta lavorando su soluzioni come *sharding* e *layer 2*²¹, che migliorano la velocità e riducono i costi delle transazioni, rendendolo più adatto a una vasta gamma di applicazioni.

Bitcoin ha un'offerta fissa di 21 milioni di unità, una caratteristica che lo rende particolarmente adatto come riserva di valore. *Ethereum*, pur non avendo un limite massimo fisso, ha introdotto aggiornamenti come *EIP-1559*, che implementano meccanismi di "bruciatura" di una parte delle commissioni, riducendo l'offerta complessiva e avvicinandolo a un modello deflazionistico.

Per concludere, mentre Bitcoin si distingue come la prima criptovaluta e una riserva di valore affidabile, *Ethereum* ha aperto la strada a nuovi orizzonti tecnologici, ponendo le basi per la finanza decentralizzata, gli *NFT* (token non fungibili) e molti altri strumenti innovativi. Queste differenze rendono le due criptovalute complementari piuttosto che rivali diretti: il primo continua a essere il punto di riferimento per gli investitori come bene rifugio, mentre il secondo si presenta come il motore della nuova economia decentralizzata, capace di rivoluzionare settori come la finanza, la gestione dei dati e l'intrattenimento.

²¹ Sono criptovalute che beneficiano della struttura sicura e decentralizzata di *Ethereum* per aumentarne la scalabilità.

Parte II

La costruzione del modello bayesiano

Capitolo 1: Descrizione dei dati

In questa sezione verranno descritti i dati utilizzati per l'analisi, includendo le fonti di provenienza, la frequenza delle osservazioni, il metodo di calcolo dei rendimenti in eccesso (*excess returns*), e il periodo di riferimento per le analisi *pre* e *post* campione.

1.1: Fonte dei dati

I dati utilizzati in questa analisi sono stati reperiti dal database “*Yahoo Finance*”²², una delle fonti più comuni per l'estrazione di dati di mercato in tempo reale e storici.

Sono stati selezionati tre *dataset* principali²³:

- *S&P 500 Index (^GSPC)*: rappresenta l'andamento del mercato azionario statunitense.
- *Bitcoin (BTC-USD)*: rappresenta il prezzo di bitcoin rispetto al dollaro USA.
- *Risk-Free Rate (^IRX)*: si utilizzerà il rendimento dei *treasury bill* a tre mesi come *proxy* per il tasso privo di rischio.

1.2: Frequenza e periodo di osservazione

L'analisi è suddivisa in due periodi distinti:

- Periodo *pre*-campione: dal primo gennaio del 1997 al primo gennaio del 2017, utilizzato per il calcolo delle *prior* bayesiane.
- Periodo *post*-campione: dal primo gennaio del 2017 al primo gennaio del 2025, utilizzato per l'aggiornamento bayesiano e il calcolo delle *performance* del portafoglio.

²² <https://finance.yahoo.com>

²³ Tra parentesi il ticker identificativo.

Tutti i dati sono stati scaricati in formato giornaliero e poi convertiti in una frequenza settimanale, selezionando i prezzi di chiusura del venerdì di ogni settimana. Qualora questi non fossero stati disponibili²⁴, si è deciso di prendere il primo giorno precedente con il dato presente.

1.3: Calcolo dei rendimenti e dei rendimenti in eccesso

I rendimenti semplici sono stati calcolati come:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Dove P_t è il prezzo di chiusura dell'asset alla settimana t e P_{t-1} è il prezzo di chiusura della settimana precedente.

Per ottenere i rendimenti in eccesso (*excess returns*), abbiamo sottratto il tasso privo di rischio al rendimento dell'asset:

$$ER_t = R_t - Rf_t$$

Dove R_t è il rendimento dell'asset (S&P 500 o bitcoin) e Rf_t è il rendimento *risk-free* settimanale, calcolato dividendo il rendimento annuale del *treasury bill* a 3 mesi per 52 settimane.

1.4: Struttura dei dati e preparazione per l'analisi

Dopo il calcolo dei rendimenti in eccesso, il periodo 1997-2016 è stato utilizzato per stimare le *prior* bayesiane, mentre il periodo 2017-2025 è stato utilizzato per l'aggiornamento bayesiano. Per quanto riguarda le *prior* sull'S&P 500, sono state calcolate la media e la varianza sull'intero *dataset* utilizzato per il *pre-sample*, quindi fino a fine 2016²⁵. Per bitcoin l'analisi si fa più dinamica poiché verranno studiate molteplici *prior* arbitrarie sulla media, dalla più pessimista a quella più ottimista; riflettendo quelle che possono essere le varie credenze che più investitori diversi potrebbero avere, non avendo

²⁴ Dovuto a possibili giorni festivi in cui le borse americane sono rimaste chiuse, mentre i mercati dove si scambiano i bitcoin sono sempre aperti.

²⁵ Circa 20 anni, 1043 osservazioni.

un *dataset* storico ampio per questo asset. Si procederà quindi ad analizzare come queste evolveranno nel tempo, con tre intensità diverse di “forza” per ogni *prior*. Infine, per la varianza *prior* di bitcoin si è scelto di imporla come venti volte la varianza dell’S&P 500, avendo constatato che la stessa *ex post*²⁶ fosse stata di circa diciassette volte. Si è voluto cercare di avere un approccio prudente in tal senso.

²⁶ Quindi durante il periodo 2017-2025.

Capitolo 2: Scelta di portafoglio di tipo bayesiano

In questa sezione viene presentato il modello bayesiano utilizzato per l'allocazione di portafoglio, spiegando il processo di aggiornamento delle stime dei rendimenti attesi e delle varianze sulla base delle nuove informazioni di mercato.

Saranno inoltre descritte le principali formule utilizzate per la costruzione delle *prior*, delle *posterior* e per il calcolo dei pesi ottimali del portafoglio.

Infine, il capitolo si occuperà di spiegare il significato e l'applicazione del principale strumento di valutazione utilizzato in questo elaborato, il *Certainty-Equivalent Return (CER)*.

2.1: Motivazione dell'approccio bayesiano

Il modello bayesiano consente di integrare informazioni storiche con nuove osservazioni per aggiornare in modo dinamico le stime dei parametri del portafoglio. A differenza di un approccio classico frequentista, che assume parametri fissi e ignora nuove informazioni, il metodo bayesiano permette di partire da una distribuzione a priori sui rendimenti attesi e le varianze, aggiornare le credenze settimana per settimana con nuovi dati osservati e costruire un portafoglio che si adatta dinamicamente alle condizioni di mercato.

L'aggiornamento bayesiano segue il teorema di Bayes, che permette di ottenere una distribuzione a posteriori dei parametri di interesse:

$$P(\theta|D) \propto P(D|\theta)P(\theta)$$

dove:

- $P(\theta)$ è la distribuzione a priori dei parametri θ (rendimenti attesi, varianze).
- $P(D|\theta)$ è la verosimiglianza dei nuovi dati, dati i parametri.
- $P(\theta|D)$ è la distribuzione a posteriori, ovvero la nuova stima aggiornata dei parametri.

Questa sarà la logica di base nell'implementazione del modello che verrà illustrato nei prossimi paragrafi.

2.2: Costruzione delle *prior*

Un elemento chiave nell'allocazione ottimale del portafoglio è la corretta stima delle distribuzioni dei rendimenti attesi. La prevedibilità dei rendimenti azionari è stata ampiamente studiata nella letteratura finanziaria, dimostrando che un'accurata stima delle distribuzioni dei rendimenti può migliorare significativamente le strategie di *asset allocation* (Kandel & Stambaugh, 1996). Tale aspetto è cruciale nel contesto di bitcoin, un asset caratterizzato da elevata volatilità e da un'incertezza strutturale che rende fondamentale l'utilizzo di un modello in grado di adattarsi dinamicamente alle nuove informazioni. Per questi motivi, verranno analizzate molteplici credenze iniziali per studiare come queste evolvono nel tempo.

Il primo passo nell'implementazione del modello consiste nel definire le *prior* sui rendimenti attesi e sulla matrice di varianza-covarianza.

La media a priori sui rendimenti è definita come:

$$\mu_0 = \begin{matrix} \mu_{SP500} \\ \mu_{Bitcoin} \end{matrix}$$

dove:

- μ_{SP500} è la media storica dei rendimenti in eccesso dell'S&P 500 (calcolata sul periodo 1997-2016), questa rimarrà fissa.
- $\mu_{Bitcoin}$ è fissata a un valore arbitrario iniziale (es. -2.5% settimanale), questa verrà fatta variare per un'analisi di più scenari con diverse credenze.

La matrice di varianza-covarianza *prior* è:

$$V_0 = \begin{matrix} \sigma_{SP500}^2 & 0 \\ 0 & k \cdot \sigma_{SP500}^2 \end{matrix}$$

dove:

- σ_{SP500}^2 è la varianza storica²⁷ dei rendimenti dell'S&P 500.
- k è un fattore moltiplicativo che riflette la maggiore incertezza su bitcoin rispetto all'S&P 500 (es. $k = 20$, come nel nostro caso)

In questa sede viene imposta a zero la correlazione tra i due assets, per una ragione di semplificazione. Questo non altererà i risultati in maniera rilevante poiché la loro correlazione calcolata *ex-post*, seppur non significativamente diversa da zero, ci si avvicina abbastanza.

L'affidabilità della *prior* è ponderata attraverso la matrice di precisione:

$$\Omega = \begin{matrix} \frac{1}{n_{SP500}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{Bitcoin}} \end{matrix}$$

dove $n_{SP500} = 1043$ e $n_{Bitcoin}$ varia tra 130, 260 e 390. Questa matrice sarà di fondamentale importanza nello studio, poiché riflette la forza che un investitore può avere nelle sue credenze iniziali. Più n è alto, più egli darà peso alla *prior* e, dunque, la *posterior* risulterà meno reattiva ai nuovi dati. Non è stato scelto un numero a caso, n rappresenta infatti il numero di osservazioni *pre-sample* utilizzate per calcolare la *prior* dell'S&P500, che in questo caso è come dire “prendo le decisioni sapendo di aver osservato n settimane di dati”. Per bitcoin, avendo un dataset fortemente ristretto, si è deciso di testare la forza delle credenze per 130, 260 e 390²⁸ osservazioni “fittizie”.

Intuitivamente, l'investitore tipo avrà delle credenze più dogmatiche per l'indice azionario con il quale si sente più al sicuro, mentre bitcoin è ovviamente un asset molto più giovane con meno storico.

²⁷ *Pre-sample*.

²⁸ Che rappresentano: 2,5 anni, 5 anni e 7,5 anni di osservazioni.

2.3: Processo di aggiornamento bayesiano

L'aggiornamento bayesiano permette di combinare le informazioni contenute nella distribuzione a priori con le nuove osservazioni di mercato per ottenere una distribuzione a posteriori aggiornata, che rappresenta la migliore stima dei parametri del modello. Ad ogni nuova settimana, il modello bayesiano aggiorna la media attesa dei rendimenti e la varianza, basandosi sui nuovi dati osservati.

2.3.1: Formulazione generale

Tenendo a mente il teorema di Bayes enunciato nel paragrafo 2.1, di seguito verrà presentata la formulazione generale per l'aggiornamento bayesiano implementato in questo studio.

L'aggiornamento della media nella sua formulazione matriciale è dato da:

$$\mu^* = (\Omega V_0^{-1} + nV^{-1})^{-1}(\Omega V_0^{-1}\mu_0 + nV^{-1}\bar{R})$$

mentre l'aggiornamento della varianza segue:

$$V^* = (\Omega V_0^{-1} + nV^{-1})^{-1}$$

Dove:

- V_0 è la matrice di varianza-covarianza *prior*.
- Ω è la matrice di precisione che riflette la forza della *prior*.
- V è la matrice di varianza-covarianza campionaria dei nuovi dati.
- \bar{R} è la media dei rendimenti osservati fino a quel punto.
- n è il numero di nuove osservazioni.

L'aggiornamento della varianza segue una classica logica bayesiana inversa, un approccio che deriva dalla distribuzione “Normale-Inversa-Gamma” o “Normale-Inversa-Chi-Quadrato”, che sono distribuzioni coniugate per la varianza in inferenza bayesiana (Zellner, A., 1971).

Intuitivamente, la parte della formula che riguarda la *prior* rimane fissa durante l'aggiornamento, divenendo sempre meno influente a mano a mano che entrano più osservazioni nel modello (perché aumenta n).

Questa formulazione generale rappresenta il metodo teorico di aggiornamento bayesiano utilizzato nella letteratura accademica. Tuttavia, nella implementazione numerica di questo elaborato, si è proceduto utilizzando una versione scalare di queste equazioni, più adatta a un'implementazione computazionale diretta.

2.3.2: Implementazione pratica e versione scalare

Nel codice *Python*, l'aggiornamento bayesiano è stato implementato in forma scalare, separando i calcoli per ciascun asset. Le formule usate per aggiornare la media e la varianza sono le seguenti:

Aggiornamento della media *posterior*:

$$\mu^* = V^* \left(\frac{n_{prior}\mu_{prior}}{V_{prior}} + \frac{n\bar{R}}{S^2} \right)$$

Dove:

- μ_{prior} è la media *prior* (prima dell'aggiornamento).
- \bar{R} è la media dei rendimenti osservati fino a quel punto.
- S^2 è la varianza campionaria dei nuovi rendimenti osservati.
- n_{prior} è il numero di osservazioni della *prior*.
- n è il numero di nuove osservazioni.
- V_{prior} è la varianza *prior*.
- V^* è la nuova varianza a posteriori, definita sotto.

Aggiornamento varianza *posterior*:

$$V^* = \frac{1}{\left(\frac{n_{prior}}{V_{prior}} + \frac{n}{S^2}\right)}$$

Dove:

- V_{prior} è la varianza della *prior*.
- S^2 è la varianza campionaria dei nuovi rendimenti.
- n_{prior} e n sono i numeri di osservazioni delle *prior* e dei dati nuovi.

L'aggiornamento bayesiano funziona come un compromesso tra la *prior* e i nuovi dati, se n è piccolo confrontato a n_{prior} , la *posterior* sarà più vicina alla *prior*. Viceversa, se n è grande, la *prior* avrà meno impatto e i dati nuovi osservati saranno più determinanti per il calcolo della *posterior*.

Nel caso dell'S&P 500, la *prior* è molto forte perché si basa su 1043 osservazioni storiche; quindi, la media e la varianza a posteriori si muovono più lentamente. Per bitcoin, la *prior* è più debole (130, 260 o 390 osservazioni fittizie), quindi la media e la varianza si adattano più velocemente ai dati nuovi.

2.4: Calcolo dei pesi ottimali del portafoglio

Dopo aver ottenuto i parametri aggiornati, calcoliamo i pesi di portafoglio bayesiani tramite la formula di Markowitz con input bayesiani:

$$w_{Bayes} = \frac{1}{\gamma} (V^*)^{-1} \mu^*$$

dove:

- γ è il parametro di avversione al rischio.²⁹
- $(V^*)^{-1}$ è la matrice inversa delle varianze aggiornate.

²⁹ in questo studio, $\gamma = 3$ per un investitore avverso al rischio, come per convenzione generale nella maggior parte degli studi accademici.

- μ^* è il vettore dei rendimenti attesi aggiornati.

I pesi risultanti vengono poi normalizzati affinché la loro somma sia pari a 1³⁰:

$$w_{\text{norm}} = \frac{w_{\text{Bayes}}}{\sum w_{\text{Bayes}}}$$

In quest'analisi saranno ammesse vendite allo scoperto, ma non sarà possibile investire al di sopra del proprio budget (*no leverage*).

2.5: *Certainty-Equivalent Return (CER)*

Nell'analisi dell'allocazione di portafoglio, un investitore non si basa unicamente sul rendimento atteso, ma tiene conto anche del rischio associato. Il *Certainty-Equivalent Return (CER)* è una misura che incorpora entrambi gli aspetti e fornisce un valore univoco che rappresenta il livello di rendimento certo equivalente al portafoglio in analisi.

Il *CER* è il rendimento certo che un investitore sarebbe disposto ad accettare, invece di assumersi il rischio associato a un dato portafoglio. In altre parole, un investitore avverso al rischio preferirà un *CER* più alto, che tenga conto della volatilità del portafoglio. Un portafoglio con rendimento atteso più alto, ma anche rischio elevato, può avere un *CER* inferiore rispetto a un portafoglio con rendimento più basso ma meno rischioso.

Il *CER* si basa sulla funzione di utilità quadratica:

$$CER = E[R_p] - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2$$

Dove:

- $E[R_p]$ è il rendimento atteso del portafoglio.
- σ_p^2 è la varianza del portafoglio.

³⁰ In altre parole, non è possibile usufruire della leva finanziaria.

- γ è il coefficiente di avversione al rischio.

Questa formula riflette il principio secondo cui un investitore penalizza il rischio, riducendo il rendimento atteso in base alla varianza del portafoglio.

In questo studio verrà calcolato il *CER* per ogni settimana, aggiornando dinamicamente le stime dei parametri di rendimento e rischio. Si utilizzeranno due versioni dello stesso, quello *ex-ante* e quello *ex-post*.

Il *CER ex-ante* è calcolato sulla base delle stime Bayesiane a posteriori, ovvero usando i parametri aggiornati settimanalmente:

$$CER_{Ex-ante} = w'_{Bayes} \mu^* - \frac{\gamma}{2} w'_{Bayes} V^* w_{Bayes}$$

Dove:

- w_{Bayes} sono i pesi bayesiani del portafoglio.³¹
- μ^* è il vettore dei rendimenti attesi bayesiani aggiornati.
- V^* è la matrice di varianza-covarianza attesa.³²
- γ è sempre lo stesso parametro di avversione al rischio.

Questa misura rappresenta la valutazione prospettica del rendimento certo equivalente, basata sulle stime aggiornate settimana per settimana.

Il *CER ex-post* invece è calcolato retrospettivamente, basandosi sui rendimenti effettivamente realizzati dal portafoglio:

$$CER_{Ex-post} = \widehat{\mu}_p - \frac{\gamma}{2} \widehat{\sigma}_p^2$$

Dove:

³¹ Ovviamente normalizzati come evidenziato nel paragrafo precedente.

³² In questo caso sarà corretta per riflettere la vera varianza del portafoglio e non la varianza della media dei rendimenti come nel calcolo dei pesi.

- $\widehat{\mu}_p$ è il rendimento medio realizzato del portafoglio.
- $\widehat{\sigma}_p^2$ è la varianza realizzata dei rendimenti.

Mentre il *CER ex-ante* rappresenta una previsione basata sui dati aggiornati, il *CER ex-post* misura quanto bene il portafoglio ha effettivamente performato nel periodo osservato.

Uno degli obiettivi di questo studio è valutare l'efficacia dell'approccio bayesiano nel migliorare l'allocazione di portafoglio includendo o no bitcoin. Per fare questo, confrontiamo i due *CER*:

$$CER_{gain} = CER_{Bayes} - CER_{SP500}$$

Dove:

- CER_{Bayes} è il *CER* del portafoglio ottimizzato con pesi bayesiani includendo bitcoin.
- CER_{SP500} è il *CER* di un portafoglio 100% investito nell'S&P 500.

Se il *CER gain* è positivo, significa che l'allocazione bayesiana con bitcoin ha migliorato l'utilità attesa rispetto all'investimento passivo sull'S&P 500. Se invece il *CER gain* risultasse negativo o nullo, il modello non ha apportato un miglioramento rispetto alla strategia mono-asset. Si analizzerà il *gain* finale, medio e dinamico sia in ottica *ex-ante* che *ex-post*.

In conclusione, il *CER* è una metrica chiave per confrontare l'efficacia dei diversi portafogli. Il *CER ex-ante* mostra le aspettative di rendimento certo sulla base delle stime bayesiane. Il *CER ex-post* misura il rendimento certo equivalente effettivamente realizzato. Infine, il *CER gain* confronta il portafoglio bayesiano con l'alternativa di un portafoglio passivo 100% S&P 500, con l'ottica di verificare se il primo porti ad un guadagno in termini di utilità rispetto al secondo.

2.6: Confronto tra il modello bayesiano e modelli classici

L'approccio bayesiano nell'allocazione del portafoglio ha ricevuto un'attenzione crescente nella letteratura accademica, in particolare nel confronto con altri modelli di *asset pricing*. Pastor & Stambaugh (2000) analizzano l'efficacia di diversi modelli, dimostrando come il *framework*

bayesiano permetta di integrare credenze soggettive con dati osservati, offrendo una maggiore flessibilità rispetto ai modelli tradizionali. Tale proprietà è particolarmente rilevante nell'analisi di asset innovativi come bitcoin, dove la capacità di aggiornare dinamicamente le credenze è essenziale per mitigare il rischio derivante dalla forte volatilità.

L'ottimizzazione del portafoglio è stata tradizionalmente basata sul modello di Markowitz (1952), il quale utilizza la media e la varianza storica dei rendimenti per costruire un portafoglio efficiente che massimizzi il rapporto tra rendimento atteso e rischio. Tale approccio, noto come *Mean-Variance Optimization* (MVO), assume che le distribuzioni dei rendimenti siano stazionarie e che le aspettative siano basate esclusivamente sui dati storici disponibili.

Tuttavia, l'ottimizzazione classica presenta diverse limitazioni. Le stime di media e varianza possono risultare altamente instabili nel tempo, specialmente per asset con alta volatilità come bitcoin. Un altro punto fondamentale è che il modello non prevede un meccanismo per aggiornare dinamicamente le aspettative basandosi su nuove informazioni di mercato. In mercati altamente incerti, l'uso esclusivo della varianza storica potrebbe non catturare adeguatamente i rischi futuri.

Il modello bayesiano supera queste limitazioni integrando una componente soggettiva (*prior*), che permette agli investitori di incorporare informazioni esterne oltre ai dati storici. Inoltre, il meccanismo di aggiornamento bayesiano consente di rivalutare periodicamente le aspettative sui rendimenti e sulla varianza, migliorando la stabilità dei pesi di portafoglio.

Un altro approccio comunemente usato nell'ottimizzazione del portafoglio è il modello Black-Litterman (Black & Litterman, 1992), che combina l'ottimizzazione media-varianza con l'incorporazione di credenze soggettive dell'investitore. Sebbene simile al modello bayesiano per l'uso delle credenze a priori, il metodo Black-Litterman impone una struttura più rigida nell'aggregazione delle informazioni di mercato, mentre il modello in esame in questo elaborato permette un aggiornamento continuo delle credenze basato su nuove osservazioni.

Infine, l'uso del modello bayesiano per l'allocazione di bitcoin risulta particolarmente vantaggioso in questo contesto, in quanto consente di gestire l'incertezza intrinseca di un asset relativamente nuovo

e altamente volatile, aggiornando progressivamente i parametri di rendimento e rischio in base alle informazioni disponibili.

2.7: Perché la varianza *posterior* della media per il calcolo dei pesi

Nel nostro modello bayesiano, i pesi di portafoglio sono calcolati secondo il criterio di Markowitz, che utilizza la stima aggiornata dei rendimenti attesi e della matrice di varianza-covarianza per determinare l'allocazione ottimale degli asset. Tuttavia, anziché utilizzare la varianza campionaria dei rendimenti, il nostro modello impiega la varianza a posteriori della media dei rendimenti attesi.

Questa scelta è giustificata dal fatto che la varianza posteriore della media riflette l'incertezza residua nella nostra stima dei rendimenti attesi dopo l'aggiornamento bayesiano. In altre parole, man mano che accumuliamo osservazioni e aggiorniamo le credenze sui rendimenti futuri, la nostra confidenza sulle medie dei rendimenti migliora, tendendo a ridurre la *posterior variance*.³³

L'uso della *posterior variance* della media consente di tenere conto dell'incertezza nella stima dei rendimenti attesi. Quindi, se bitcoin ha una varianza molto elevata e pochi dati disponibili, il modello assegnerà pesi più prudenti fino a ottenere maggiore evidenza statistica. Se si fosse utilizzata la varianza campionaria semplice, ci sarebbe stato il rischio di sovrastimare o sottostimare il rischio, portando a pesi di portafoglio instabili. Con l'accumulo di nuove osservazioni, la *posterior variance* si riduce, consentendo al modello di aumentare gradualmente l'allocazione in asset che dimostrano rendimenti solidi nel tempo.

L'effetto pratico di questa scelta è che l'allocazione in bitcoin tende a essere più prudente nelle prime settimane di osservazione, ma aumenta progressivamente man mano che il modello acquisisce maggiore fiducia nelle sue stime. Per l'S&P 500, invece, la *prior* è molto più forte (grazie alle 1043 osservazioni *pre-campione*), quindi la sua varianza stimata cambia molto meno nel tempo, garantendo maggiore stabilità nei pesi.

³³ Attenzione, tende a ridursi non vuol dire che ogni settimana vi è una riduzione lineare. In periodi in cui la varianza è molto elevata, il modello lo riconosce e aggiorna aumentandola fino a che non torna a stabilizzarsi.

Parte III

Bitcoin nei portafogli finanziari

Capitolo 1: Analisi dei risultati

Per non appesantire troppo il corpo dell'elaborato, si è deciso di scegliere lo scenario intermedio, con cinque anni di dati “fittizi” per bitcoin³⁴, per esporre i principali risultati del modello in maniera più approfondita. Verranno comunque brevemente confrontati i risultati con gli altri due scenari in cui saranno confermate le principali tendenze, con qualche accorgimento. Le tabelle e i grafici inerenti ai due scenari estremi vengono illustrati alla fine di questo testo nella sezione “Appendice” (Sezione A e B), insieme al codice *Python* (Sezione C) scritto per calcolare tutti i risultati implementando il modello discusso nella parte precedente.

Si ricorda che il portafoglio ottimale calcolato può comprendere solo due asset: bitcoin e l'indice S&P500, senza poter usufruire della leva.

1.1: Statistiche descrittive dei rendimenti post-2017

Per comprendere meglio le caratteristiche dei due asset analizzati, bitcoin e S&P 500, di seguito verranno discusse le principali statistiche descrittive calcolate sui rendimenti in eccesso (*excess returns*) per il periodo *post-2017*. Qui una tabella riassuntiva:

Asset	Count ³⁵	Media	Std. ³⁶	Min	25%	50%	75%	Max	Skewness	Kurtosis ³⁷
SP500	417	0.0022	0.0245	-0.1498	-0.0093	0.0043	0.0150	0.1210	-0.6110	6.6073
Bitcoin	417	0.0158	0.1009	-0.3902	-0.0369	0.0078	0.0704	0.5094	0.3762	2.4684

Tabella 1. “Statistiche descrittive bitcoin e S&P500”. Fonte: Calcolate da serie storiche scaricate da *Yahoo Finance*.

³⁴ N=260

³⁵ Numero di osservazioni *post-2017*

³⁶ *Standard deviation*, che è uguale alla radice della varianza.

³⁷ Si riferisce all'*excess kurtosis*. Per la kurtosis classica basta sommare 3.

Bitcoin presenta una volatilità molto elevata rispetto all'S&P 500, con uno scarto quadratico medio (*std*) di 0.1009, oltre quattro volte superiore a quello dell'S&P 500. Questo dato evidenzia come bitcoin sia un asset caratterizzato da rendimenti estremamente variabili, il che lo rende più rischioso rispetto al mercato azionario tradizionale.

Il rendimento medio settimanale di bitcoin (0.0158) è sensibilmente superiore a quello dell'S&P 500 (0.0022), confermando la tendenza del primo a generare rendimenti più alti nel lungo periodo. Tuttavia, questa maggiore *performance* è accompagnata da una volatilità più alta, il che implica che gli investitori sono esposti a oscillazioni più ampie.

Bitcoin ha registrato un rendimento minimo settimanale di -39% e un massimo di +50.9%, a testimonianza della sua estrema variabilità. L'S&P 500, invece, ha avuto variazioni molto più contenute, con un minimo di -14.98% e un massimo di +12.10%. Questa differenza nei valori estremi indica che il mercato azionario tende a essere più stabile, mentre bitcoin è soggetto a oscillazioni molto più accentuate, spesso guidate da eventi speculativi o macroeconomici specifici.

L'S&P 500 presenta una skewness negativa (-0.6110), suggerendo una leggera tendenza a rendimenti più negativi rispetto a quelli positivi. Bitcoin, invece, ha una skewness positiva (0.3762), indicando una leggera inclinazione verso rendimenti positivi estremi.

La kurtosis in eccesso dell'S&P 500 (6.6073) è significativamente elevata, suggerendo code grasse, ovvero una maggiore frequenza di eventi estremi rispetto a una distribuzione normale. Bitcoin ha una kurtosis in eccesso più bassa (2.4684), più vicina a quella di una distribuzione normale, suggerendo che gli eventi estremi sono meno frequenti rispetto all'S&P 500. Questo, data l'elevata volatilità di bitcoin, può sembrare controintuitivo. Una possibile spiegazione può essere che l'S&P 500 è normalmente più stabile, ma quando si verificano crolli, questi sono spesso molto bruschi e concentrati in un breve periodo, creando code grasse nella distribuzione. Dal canto suo, bitcoin ha una volatilità elevata in generale, ma i suoi rendimenti estremi sono meno concentrati e più distribuiti su tutto il periodo. Questo riduce il peso degli *outlier* estremi rispetto alla media, abbassando la kurtosis. Va tenuto conto anche della frequenza dei dati, che in questo caso è settimanale, e potrebbe aver avuto l'effetto di "diluire" la volatilità estrema giornaliera nei rendimenti di bitcoin.

In conclusione, ricordando che nello sviluppo del modello questa sarà fissata a zero, la correlazione *ex-post* tra i due asset è risultata essere minore di 0.18, confermando quindi il fatto che bitcoin può essere usato come strumento di diversificazione all'interno del portafoglio.

1.2: Analisi dei pesi ottimali bayesiani di portafoglio

L'analisi dei pesi di portafoglio ottenuti attraverso l'approccio bayesiano fornisce un quadro chiaro di come le differenti credenze a priori sulla *performance* di bitcoin influenzino l'allocazione ottimale degli asset. La tabella sotto riportata riassume le principali statistiche relative ai pesi di bitcoin nel portafoglio per un numero di osservazioni *prior* pari a 260, mentre il grafico alla fine del paragrafo mostra l'evoluzione degli stessi settimanalmente.

Prior	Peso Medio	Std.	Minimo	Massimo	Peso Finale	Fraz. >0	Fraz. >1%	Fraz. >5%	Fraz. >10%	Prima Data Positivo
5	0.351	0.033	0.203	0.437	0.350	1.000	1.000	1.000	1.000	2017-02-03
2.5	0.250	0.034	0.126	0.312	0.271	1.000	1.000	1.000	1.000	2017-02-03
1	0.172	0.038	0.072	0.216	0.213	1.000	1.000	1.000	0.947	2017-02-03
0.5	0.142	0.041	0.047	0.193	0.192	1.000	1.000	0.995	0.792	2017-02-03
0	0.110	0.044	0.002	0.170	0.169	1.000	0.990	0.891	0.609	2017-02-03
-1	0.037	0.055	-0.131	0.121	0.120	0.700	0.882	0.563	0.133	2019-06-07
-2.5	-0.097	0.084	-0.414	0.036	0.034	0.114	0.966	0.611	0.452	2024-02-16
-5	-0.438	0.200	-1.425	-0.149	-0.153	0.000	1.000	1.000	1.000	Mai

Tabella 2. “Statistiche pesi di bitcoin per forza della *prior* di 260 osservazioni”. Le colonne con scritto “Fraz.” (Frazione) sono da intendere positivi per “Fraz. >0” ed in termini assoluti per le altre tre colonne. Fonte: Calcolate con codice *Python*.

Un primo aspetto rilevante è che il peso medio di bitcoin aumenta progressivamente all'aumentare della *prior* assegnata. Per le *prior* più ottimistiche, come +5% e +2.5%, il peso medio di bitcoin si attesta rispettivamente intorno a 0.351 e 0.250, indicando un'elevata allocazione nel portafoglio. Per quelle più moderate, come +1% e +0.5%, i pesi medi sono rispettivamente pari a 0.172 e 0.142,

riflettendo una fiducia ancora significativa in bitcoin, ma con un'allocazione più contenuta rispetto alle *prior* estreme.

Per quanto riguarda la credenza neutrale (0%), bitcoin ha un peso medio di circa 0.110, suggerendo che anche senza una forte credenza positiva iniziale, il modello tende comunque a includerlo nel portafoglio, seppur con una ponderazione più limitata.

Osservando le *prior* più pessimistiche, vediamo che con il -1%, il peso medio è ancora positivo (0.037), anche se significativamente inferiore rispetto alle altre configurazioni. Tuttavia, per *prior* fortemente negative come -2.5% e -5%, i pesi medi scendono rispettivamente a -0.097 e -0.438, indicando un'esposizione più o meno elevata in posizioni corte per bitcoin all'interno del portafoglio.

Un dato altrettanto significativo riguarda il peso finale di bitcoin nel portafoglio. Per *prior* elevate come +5%, il peso finale è 0.350, mentre per le più moderate come +1% e +0.5% i valori finali si attestano rispettivamente a 0.213 e 0.192. Per la *prior* neutrale (0%), il peso finale è 0.169. Può risultare sorprendente constatare che anche con credenze iniziali molto pessimistiche del -2,5% a settimana il peso finale risulta comunque positivo a 0.034, indicando che nel lungo periodo bitcoin viene progressivamente incluso nel portafoglio anche in scenari inizialmente avversi. Solo con *prior* fortemente negative come -5%, bitcoin rimane in posizione corta con un peso finale pari a -0.153.

Analizzando la frazione di settimane in cui bitcoin assume un peso positivo, notiamo che per *prior* positive o neutrale, il peso rimane positivo il 100% delle settimane. Per quelle più negative, la frequenza di settimane con pesi positivi diminuisce drasticamente: con -2.5%, solo nel 11.4% delle settimane bitcoin ha un peso positivo, mentre per -5% non viene mai incluso nel portafoglio con un peso positivo.

Infine, l'ultima colonna della tabella mostra la prima settimana in cui bitcoin assume un peso positivo. Per *prior* elevate, bitcoin è presente nel portafoglio sin dall'inizio (2017-02-03). Per le più pessimistiche, entra nel portafoglio solo molto più tardi o non viene mai incluso.

Nel complesso, questa analisi evidenzia come l'allocazione ottimale sia fortemente influenzata dalle credenze iniziali sulla performance di bitcoin. Rimane comunque da segnalare che per *prior* più realistiche, come quella di un investitore neutrale, il peso alla fine del periodo risulti

significativamente positivo e che anche investitori fortemente pessimisti (-2.5%) verso la fine hanno cambiato le loro credenze iniziali arrivando a detenere pesi positivi dell'asset in questione. In ultimo, nella quasi totalità dei casi si ha un peso assoluto in bitcoin maggiore dell'1%, suggerendo che sia comunque difficile da spiegare un totale non investimento.

Di seguito il grafico dell'andamento dinamico dei pesi per alcune *prior*, quelle giudicate più realistiche e che esauriscono probabilmente la quasi totalità dello spettro degli investitori reali. Si può constatare che per *prior* neutrali e positive i pesi aumentano gradualmente fino a stabilizzarsi, mentre per quelle negative la varianza è nettamente più elevata all'inizio del campione. Questo comportamento è coerente con l'aggiornamento bayesiano: *prior* fortemente negative richiedono un numero maggiore di osservazioni positive per convincere il modello ad aumentare il peso di bitcoin nel portafoglio. Al contrario, *prior* più favorevoli portano a un'allocazione positiva immediata, con un aumento progressivo della quota detenuta.

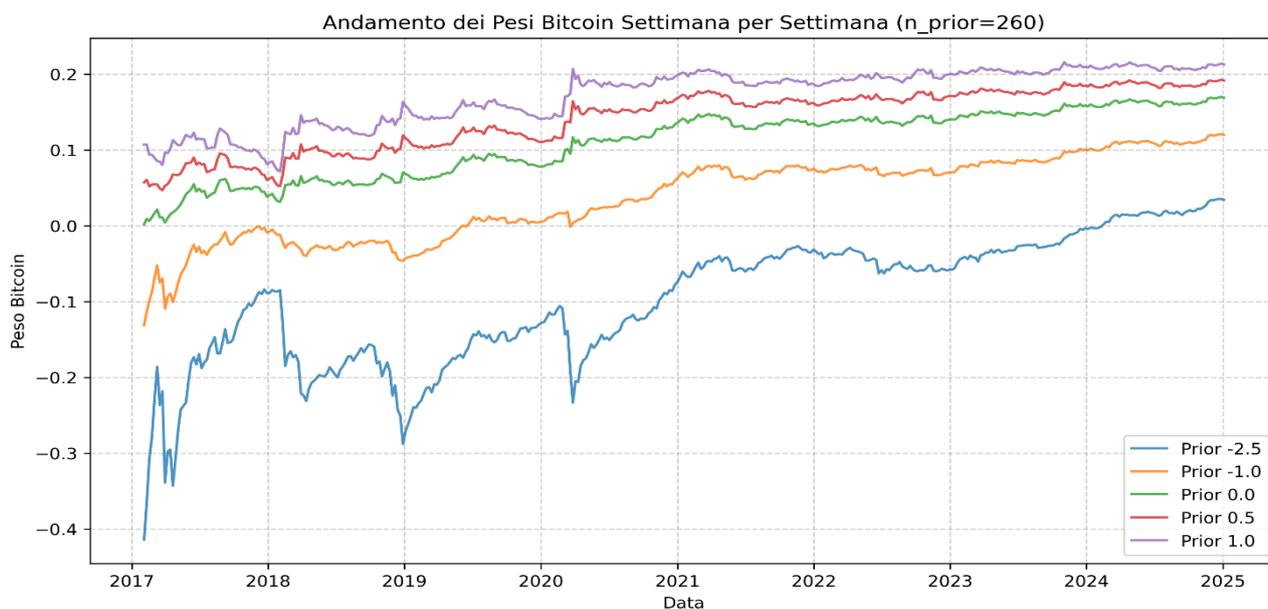


Grafico 1. “Andamento dei pesi bitcoin settimana per settimana con forza della *prior* di 260 osservazioni”.

Fonte: Creato con codice *Python*.

In appendice, nella sezione A1 sono illustrate le tabelle relative agli scenari con diverse forze della *prior*. Sebbene le tendenze siano confermate, a *prior* più forti seguono logicamente pesi mediamente

più alti in generale, in particolare per credenze positive. Questo effetto è dovuto al fatto che una *prior* più forte tende a influenzare maggiormente la stima finale, mantenendo i pesi più alti nel tempo. Concettualmente, avendo una fiducia più marcata nelle proprie convinzioni, si è portati ad aumentare il peso di quell'asset all'interno del portafoglio, soprattutto se quelle credenze sono molto positive o molto negative, poiché darà una maggiore probabilità a rendimenti elevati in un senso e nell'altro.

La varianza dei pesi risulta più contenuta per *prior* elevate e aumenta per le più negative, in particolare all'aumentare della forza. Questo riflette una maggiore stabilità nelle allocazioni quando la *prior* è positiva e forte, mentre nei casi in cui la *prior* è molto negativa, la varianza aumenta, indicando maggiore instabilità nell'allocazione di bitcoin.

Infine, è interessante constatare che per le *prior* molto negative, nello scenario con forza debole, anche la più pessimista (-5%) alla fine del periodo si troverà ad avere una posizione lunga su bitcoin; mentre, al contrario, chi nutriva spiccata fiducia nelle proprie credenze anche con *prior* meno negative (-2,5%) si troverà ad avere ancora pesi al di sotto di zero alla fine del periodo. Per completezza, sempre nell'appendice nella sezione B1 sono illustrati i grafici inerenti ai pesi dinamici dei due scenari.

1.3: Analisi del *Certainty-Equivalent Return (CER)*

In questo paragrafo verranno illustrati i risultati del modello per quanto riguarda i *CER ex-ante* ed *ex-post*, commentando le tabelle ed i grafici che saranno esposti. Infine, Verrà fatto un confronto tra queste due metriche e ci si concentrerà sulle discrepanze tra *prior* più moderate e più estreme. I risultati per gli scenari con più o meno forza delle *prior* possono essere consultati in appendice.

1.3.1: *CER ex-ante gain*

L'analisi del guadagno in termini di *CER ex-ante* consente di quantificare i benefici percepiti dell'inclusione di bitcoin nel portafoglio, confrontandoli con un'allocazione in cui l'investimento in esso è escluso. Questo valore rappresenta il guadagno in termini di utilità attesa per l'investitore che

segue l'approccio bayesiano con diverse credenze iniziali sulle performance future di bitcoin. In altre parole, possiamo definirlo come “beneficio percepito guadagnato dall'inclusione di bitcoin”.

Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	Fine periodo
5	1.03	1.46	1.09	1.17	1.03	0.91	0.85	0.78	0.77
2.5	0.37	0.53	0.43	0.52	0.48	0.41	0.42	0.41	0.40
1	0.11	0.17	0.16	0.24	0.24	0.20	0.22	0.23	0.23
0.5	0.06	0.09	0.09	0.16	0.17	0.14	0.16	0.18	0.18
0	0.02	0.03	0.05	0.10	0.11	0.09	0.12	0.14	0.14
-1	0.00	0.00	0.00	0.02	0.03	0.02	0.05	0.07	0.06
-2.5	0.12	0.22	0.08	0.02	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01
-5	0.83	1.17	0.74	0.41	0.25	0.23	0.12	0.06	0.06

Tabella 3. “*CER ex-ante gain* annuali per forza della *prior* di 260 osservazioni”. I dati sono da considerarsi relativi alla fine di ogni anno. In verde i *CER ex-ante gain* con pesi positivi in bitcoin, in nero con pesi negativi.

Fonte: Calcolati con codice *Python*.

Come mostrato nella tabella, i *CER ex-ante gain* finali sono fortemente influenzati dalla *prior* iniziale assegnata a bitcoin. Per le *prior* più ottimistiche, come +5% e +2.5%, essi raggiungono rispettivamente 77 e 40 punti base³⁸ alla fine del periodo, indicando che l'inclusione di bitcoin ha generato un miglioramento significativo nell'utilità attesa del portafoglio. Analogamente, valori positivi e crescenti sono osservati per *prior* più moderate, come +1% e +0.5%, che mantengono *CER* finali rispettivamente di 23 e 18 p.b. Questo suggerisce che anche con una visione meno aggressiva sulle potenzialità di bitcoin, l'inclusione di questo asset nel portafoglio ha portato a guadagni in termini di utilità.

Dall'altro lato, per *prior* neutrali (0%) e leggermente pessimistiche (-1%), il *CER ex-ante* rimane positivo, ma su livelli inferiori (14 e 6 p.b. rispettivamente). Questo implica che, anche senza una

³⁸ Da ora in poi verrà abbreviato in p.b.

chiara convinzione sulla bontà di bitcoin come asset d'investimento, il modello bayesiano ha comunque trovato vantaggiosa la sua inclusione nel portafoglio.

Situazione opposta si verifica per *prior* fortemente negative (-2.5% e -5%). Nonostante il *CER ex-ante gain* iniziale per -2.5% fosse relativamente alto (12 p.b. nel 2017), esso è rapidamente diminuito nel tempo fino a raggiungere un valore finale molto vicino allo zero (circa 1 p.b.), denotando un beneficio percepito quasi nullo. Per *prior* estremamente pessimistiche, come -5%, il *CER ex-ante gain* segue un andamento peculiare, inizialmente molto elevato (83 p.b. nel 2017) e in crescita nel 2018 (117 p.b.), ma in rapido declino negli anni successivi, stabilizzandosi su un valore di 6 p.b. alla fine del periodo. Questo comportamento suggerisce che, in uno scenario fortemente avverso a bitcoin, l'inclusione dell'asset nel portafoglio non ha fornito vantaggi significativi nel lungo periodo, e anzi il portafoglio si è progressivamente adattato riducendo la sua esposizione a esso.

Un aspetto rilevante da sottolineare è che il *CER ex-ante gain* non può mai essere negativo, ma al massimo arrivare a zero. Questo accade perché, indipendentemente dalla credenza iniziale dell'investitore, il modello bayesiano consente sempre di individuare una strategia di investimento che massimizzi l'utilità attesa. Anche in scenari fortemente pessimistici, il modello troverà conveniente *shortare* bitcoin e assegnare un peso negativo all'asset nel portafoglio, portando comunque a un valore di *CER ex-ante* almeno pari a quello di un portafoglio senza bitcoin. Solo in casi estremi, in cui la *prior* fortemente negativa si aggiorna verso l'alto ma non abbastanza da giustificare un'esposizione significativa, il *CER ex-ante gain* può tendere a zero, indicando un beneficio percepito nullo dell'asset.

Il fatto che il *CER ex-ante* risulta positivo e molto elevato all'inizio del periodo per *prior* molto pessimistiche ovviamente non si tradurrà in un valore *ex-post* altrettanto positivo. Questo è dovuto al fatto che gli investitori eccessivamente pessimisti all'inizio del periodo trovano *ex-ante* molto vantaggioso *shortare*³⁹ bitcoin percependo un'utilità molto elevata, conservando, in base all'entità del pessimismo, queste credenze fino alla fine del periodo. Nonostante nel tempo queste si siano piano

³⁹ Vendere allo scoperto.

piano modificate verso l'alto grazie all'aggiornamento bayesiano, *prior* troppo negative e troppo forti non riescono logicamente ad arrivare ad essere positive alla fine. Più la *prior* è negativa e forte, e più anche il *CER ex-ante* alla fine del periodo risulterà positivo e più o meno elevato. Ovviamente, lo stesso discorso vale in maniera anche più evidente per le *prior* più ottimistiche e forti. Di seguito il grafico del *CER ex-ante gain* finale che spiega bene questo concetto.

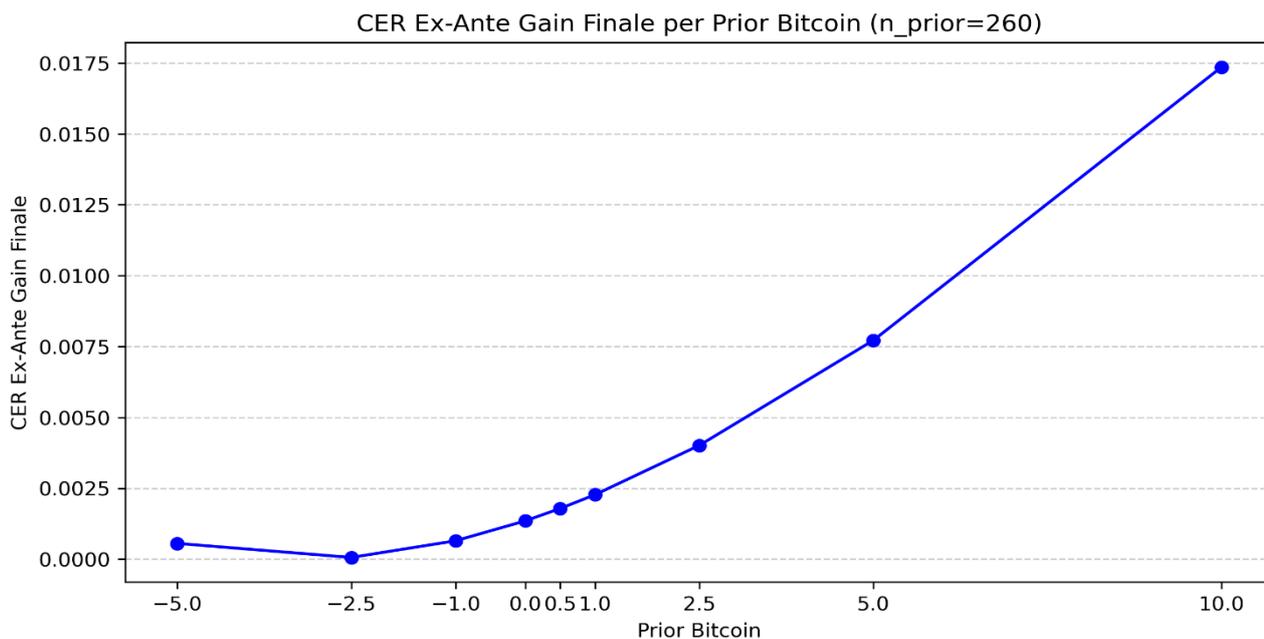


Grafico 2. “CER *ex-ante* gain finale per ogni *prior* con forza della *prior* di 260 osservazioni.”

Fonte: Creato con codice *Python*.

Come si può facilmente intuire, il grafico presenta una struttura a forma di “U”, dove il minimo si trova nei pressi della *prior* a -2,5%. Nel grafico non sono presenti *prior* più negative del -5% per motivi computazionali, ma se si fossero aggiunte anche *prior* del -10% e inferiori, la sua forma sarebbe stata più chiara. In poche parole, un totale non investimento⁴⁰ in bitcoin alla fine del periodo sarebbe stato giustificato solo negli investitori che avessero avuto vicino al -2,5% settimanale la loro *prior* iniziale con una forza di cinque anni di dati osservati. Chi aveva credenze iniziali più

⁴⁰ In base al parametro del *CER ex-ante gain*, ovvero del beneficio percepito dall'inclusione di bitcoin.

pessimistiche di tale soglia, avrebbe trovato ancora vantaggioso investire in bitcoin (in questo caso, *shortando*) proporzionalmente a quanto era pessimista.

In conclusione, questa analisi dimostra che, indipendentemente dalla credenza iniziale, il modello bayesiano ha generalmente trovato vantaggiosa l'inclusione di bitcoin nel portafoglio, sebbene con effetti molto differenziati a seconda della *prior*.

Per quanto riguarda il confronto con gli scenari con 130 e 390 osservazioni, si rimanda alle tabelle A2 e ad i grafici B2 in appendice per una visione completa. Sembra superfluo commentare eccessivamente questi scenari poiché, sebbene ci siano alcune differenze nei numeri delle soglie e dell'andamento più o meno marcato della curva, i concetti e le tendenze rimangono gli stessi discussi precedentemente.

1.3.2: CER ex-post gain

Finora sono stati analizzati i *Certainty-Equivalent Returns (CER)* su base *ex-ante*, valutando le percezioni degli investitori riguardo all'inclusione di bitcoin nel portafoglio in funzione delle loro credenze iniziali e poi aggiornate di settimana in settimana. Tuttavia, questa analisi è distinta dalla reale performance degli investimenti: i risultati *ex-ante* non dicono se le decisioni prese si siano poi rivelate effettivamente vantaggiose nel lungo periodo.

Gli investitori con *prior* pessimistiche, ad esempio, inizialmente ritenevano che mantenere una posizione corta su bitcoin sarebbe stato profittevole. Alcuni di loro hanno mantenuto questa visione fino alla fine del campione, nonostante i rendimenti storici di bitcoin siano stati molto elevati. *Ex-post*, tali investitori si sono probabilmente trovati delusi dai risultati effettivi delle loro scelte.

Per valutare la performance *ex-post*, si considera la distribuzione effettiva dei rendimenti di portafoglio realizzati nel tempo. Si suppone che gli investitori ritenessero che la distribuzione dei rendimenti storici del proprio portafoglio sarebbe rimasta costante anche in futuro, e si valuta se avrebbero preferito questa distribuzione rispetto a un portafoglio composto esclusivamente dall'indice azionario. Questo approccio consente di comprendere non solo se bitcoin ha sovraperformato l'azionario, ma anche l'impatto della volatilità sulle preferenze degli investitori.

Anche se un investitore con *prior* molto ottimistiche ha ottenuto rendimenti elevati, potrebbe comunque aver preferito detenere un portafoglio meno esposto a bitcoin a causa della maggiore volatilità subita.

Nella tabella seguente, si riportano i *CER ex-post gain* per i diversi livelli di *prior*, calcolati su base annua⁴¹ fino alla fine del campione. I risultati mostrano che, a fine periodo, i *CER ex-post* risultano positivi per tutte le *prior* superiori a -1%, con valori che vanno dallo 4 p.b. per il -1% fino a 30 p.b. per il +5%. Tuttavia, gli investitori con *prior* più pessimistiche hanno ottenuto risultati estremamente negativi, con un *CER* di -94 p.b. per il -5%, indicando che le loro scelte di allocazione hanno portato a *performance* disastrose.

Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	Fine Periodo
5	1.67	0.28	0.35	0.41	0.42	0.24	0.29	0.30	0.30
2.5	1.12	0.22	0.27	0.32	0.33	0.20	0.24	0.25	0.25
1	0.67	0.15	0.18	0.22	0.24	0.15	0.18	0.19	0.19
0.5	0.49	0.11	0.14	0.18	0.20	0.12	0.15	0.16	0.16
0	0.30	0.08	0.10	0.13	0.15	0.09	0.12	0.13	0.13
-1	-0.14	-0.03	-0.03	0.00	0.03	0.01	0.03	0.04	0.04
-2.5	-1.02	-0.28	-0.31	-0.30	-0.26	-0.21	-0.18	-0.16	-0.16
-5	-3.54	-1.27	-1.46	-1.50	-1.40	-1.10	-1.03	-0.94	-0.94

Tabella 4. “*CER ex-post gain* annuali per forza della *prior* di 260 osservazioni”. I dati sono da considerarsi relativi alla fine di ogni anno. Fonte: Calcolati con codice *Python*.

Un aspetto importante è che i guadagni *ex-post* non aumentano in modo monotono con l’ottimismo. Il *CER ex-post* massimo si registra per una *prior* di circa 10% per questo scenario in cui sono disponibili cinque anni di dati *pre-sample* per bitcoin⁴², mentre per *prior* più elevate si osserva una

⁴¹ Si riferisce all’ultimo dato dell’anno in questione.

⁴² Cambiando la forza della *prior*, è logico aspettarsi che questa soglia cambi, come sarà possibile verificare in appendice.

stabilizzazione fino ad una rapida riduzione. Ciò è coerente con il fatto che, pur avendo beneficiato dei rendimenti elevati di bitcoin, gli investitori con *prior* estremamente ottimistiche hanno assunto pesi molto elevati nel portafoglio, aumentando significativamente la volatilità e riducendo i benefici netti del loro investimento.

Il grafico sottostante mostra come i *CER ex-post* finali varino in funzione delle credenze iniziali. Il pattern osservato conferma l'intuizione della tabella: gli investitori con *prior* moderatamente pessimistiche (intorno a -1%) hanno finito per ottenere *CER* positivi, poiché nel tempo hanno adattato le loro credenze a posteriori e aumentato la loro allocazione in bitcoin. Allo stesso tempo, gli investitori con *prior* molto ottimistiche hanno sì beneficiato di rendimenti elevati, ma hanno subito anche una volatilità più alta di quanto avrebbero idealmente preferito.

Questi risultati evidenziano la capacità del modello bayesiano di adattarsi alle differenti credenze iniziali e di generare pesi di portafoglio coerenti con il livello di rischio accettabile dagli investitori.

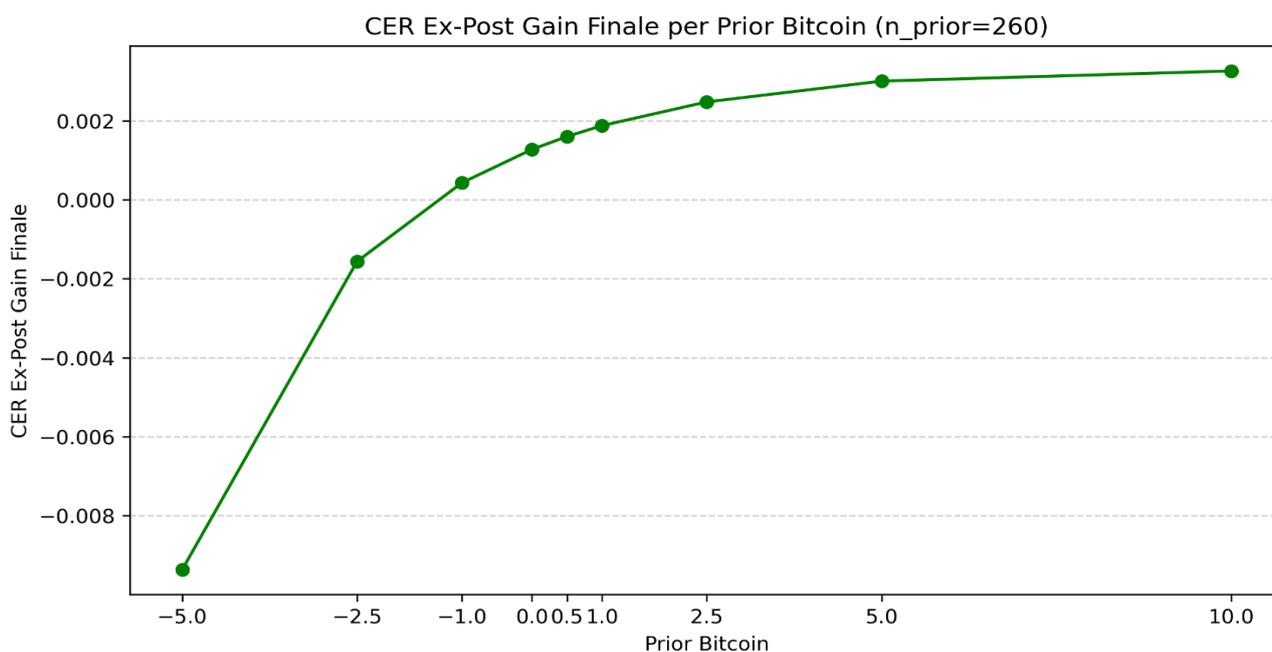


Grafico 2. “Cer *ex-post gain* finale per ogni *prior* con forza della *prior* di 260 osservazioni.”

Fonte: creato con codice *Python*.

L'inclusione di bitcoin nei portafogli di investimento è stata analizzata anche da Brière, Oosterlinck e Szafarz (2015), che hanno evidenziato il potenziale di diversificazione derivante dalla bassa correlazione con gli asset tradizionali. I risultati del presente studio confermano questa tendenza, mostrando che per *prior* moderate, bitcoin migliora il *CER* del portafoglio. Tuttavia, come dimostrato dalle analisi *ex-post*, l'elevata volatilità dell'asset può limitare tali benefici in scenari caratterizzati da un'eccessiva esposizione, confermando l'importanza di un'allocazione prudente e dinamicamente aggiornata.

Anche per il *CER ex-post* valgono le stesse premesse enunciate nel paragrafo precedente, si rimanda alle tabelle A3 e ai grafici B3 la visualizzazione dei risultati per gli altri due scenari analizzati per le diverse forze della *prior*. Come si può facilmente notare, gli stessi ragionamenti fatti fin qui si adattano facilmente anche a questi risultati.

1.3.3: Confronto tra *CER ex-ante* ed *ex-post*

Dal confronto tra il *CER ex-ante* e il *CER ex-post*, emerge una chiara discrepanza tra le aspettative iniziali degli investitori e la loro effettiva performance *ex-post*. In particolare, si osservano tre fenomeni principali.

Per gli investitori con *prior* fortemente rialziste su bitcoin (+5% e +2.5%), il *CER ex-ante* suggeriva un elevato beneficio nell'inclusione dello stesso nel portafoglio, con valori che alla fine del campione si attestavano rispettivamente a 77 e 40 p.b. Tuttavia, il *CER ex-post* per le stesse *prior* è molto più basso, con valori finali di 30 e 25 p.b.

Questa riduzione si spiega con il fatto che, pur avendo ottenuto rendimenti elevati da bitcoin *ex-post*, questi non hanno compensato come ci si aspettava l'alta volatilità, che si ricorda era tenuta conto anche *ex-ante*. Infatti, il *CER* incorpora non solo il rendimento atteso, ma anche il rischio. Bitcoin ha mostrato una volatilità estremamente elevata, superiore a quella dell'azionario tradizionale, e chi ha assegnato pesi molto elevati a bitcoin ha subito un impatto maggiore sul rischio totale del portafoglio. Gli investitori con *prior* più ottimistiche hanno allocato una quota sempre più elevata a bitcoin, esponendo il portafoglio a variazioni ampie e improvvise. Questo fenomeno è evidente nel grafico

del *CER ex-post gain*, dove si osserva che il beneficio di includere bitcoin cresce all'aumentare della *prior*, ma poi si stabilizza e inizia a ridursi per quelle troppo elevate.

Chi aveva *prior* più moderate, comprese tra 0% e +1%, ha visto un andamento molto più stabile tra *CER ex-ante* e *ex-post*. Per quella dell'1%, il *CER ex-ante* finale era di 23 p.b., mentre il *CER ex-post* finale era di 19 p.b., una riduzione molto più contenuta rispetto alle *prior* più ottimistiche. Anche per quella neutrale il *CER ex-ante* e il *CER ex-post* rimangono abbastanza vicini, pari rispettivamente a 14 a 13 p.b. Questo suggerisce che chi aveva aspettative più bilanciate su bitcoin ha tratto beneficio dalla sua inclusione nel portafoglio, ma senza eccessiva esposizione alla volatilità.

Un aspetto particolarmente rilevante è che chi aveva *prior* molto pessimistiche su bitcoin ha ottenuto risultati disastrosi *ex-post*. Per quella del -2.5%, a fronte di un *CER ex-ante* finale che suggeriva ancora un lievissimo vantaggio (1 p.b.), *ex-post* il valore è diventato fortemente negativo (-16 p.b.). Per *prior* ancora più pessimistiche (-5%), il *CER ex-ante* inizialmente sembrava vantaggioso nei primi anni (es. 83 p.b. nel 2017), ma *ex-post* è crollato a -94 p.b., mostrando che chi ha mantenuto una posizione ribassista ha ottenuto un rendimento molto inferiore rispetto a chi aveva posizioni lunghe. Questo conferma l'intuizione precedente secondo cui chi avesse avuto previsioni molto negative su bitcoin inizialmente credeva di poter guadagnare *shortandolo*, ma *ex-post* si è rivelata una scelta fallimentare, poiché ha conseguito rendimenti elevati nel periodo considerato. Il grafico del *CER ex-post gain* mostra chiaramente che le *prior* molto negative portano a *CER* negativi, evidenziando che questi investitori hanno drasticamente sottoperformato rispetto al semplice portafoglio azionario.

Per completare l'analisi, un'ulteriore prospettiva da dare su questi due strumenti di valutazione può essere quella di confrontare il *CER ex-ante* medio⁴³ con il *CER ex-post* finale. Per una credenza iniziale del -2.5%, il primo risulta positivo di 8 p.b., mentre il secondo, come mostrato nella Tabella 4, ammonta a -16 p.b. Per una *prior* del +1%, a fronte di un *CER ex-ante* medio di 19 p.b., alla fine del periodo il *CER ex-post* indica un guadagno sempre di 19 p.b., identificando estrema accuratezza nella previsione. Anche per le restanti credenze iniziali, i risultati di questo confronto rafforzano le conclusioni fatte in questo paragrafo.

⁴³ Fonte: calcolati con codice *Python*.

Per concludere, questa analisi dimostra che, mentre gli investitori con *prior* moderate hanno ottenuto risultati coerenti con le loro aspettative iniziali, chi ha assunto posizioni estreme (troppo rialziste o troppo ribassiste) ha subito una penalizzazione più o meno marcata nel *CER ex-post*, tenuto conto delle aspettative *ex-ante*. Occorre ricordare che per le versioni più ottimiste il *CER ex-post* è risultato comunque positivo e significativo, anche per *prior* abbastanza estreme (5% e 10%), ma molto al di sotto di quello che tali investitori si aspettavano.

Capitolo 2: Conclusioni

L'obiettivo di questo elaborato è stato quello di analizzare l'inclusione di bitcoin in un portafoglio di investimento ottimizzato con un approccio bayesiano. A partire dalla definizione delle *prior* e dalla successiva revisione delle credenze iniziali, si è osservato come i pesi di portafoglio evolvano nel tempo in funzione delle nuove informazioni di mercato. Il confronto tra diversi scenari, differenziati per forza della *prior*, ha consentito di esaminare il comportamento di investitori con differenti gradi di convinzione sulla *performance* futura di bitcoin.

2.1: Sintesi dei risultati principali

Dall'analisi condotta emergono alcune evidenze significative. Bitcoin ha mostrato una volatilità molto più elevata rispetto all'S&P 500, ma anche rendimenti medi superiori nel periodo *post-2017*. Il modello bayesiano ha evidenziato che, per una vasta gamma di *prior*, il peso di bitcoin nel portafoglio si stabilizza su valori positivi, confermando la sua potenzialità come asset da diversificazione. Tuttavia, per *prior* molto pessimistiche, l'algoritmo tende a *shortare* bitcoin, con conseguenze negative *ex-post*.

L'analisi dei pesi ha mostrato che, anche per credenze più realistiche, bitcoin viene generalmente incluso nel portafoglio, con un peso crescente all'aumentare della *prior* assegnata. Anche investitori inizialmente neutrali o leggermente pessimisti hanno finito per detenerlo, indicando che il processo di aggiornamento bayesiano ha riconosciuto il valore dell'asset nel lungo periodo.

Il *Certainty-Equivalent Return ex-ante* ha mostrato un beneficio percepito positivo o nullo per la totalità delle *prior*, suggerendo che l'inclusione di bitcoin fosse vista come vantaggiosa nella maggioranza delle credenze e delle settimane. Tuttavia, l'analisi *ex-post* ha rivelato che, sebbene i risultati siano rimasti positivi per *prior* moderate, gli investitori con credenze estreme (troppo rialziste e soprattutto troppo ribassiste) hanno registrato una discrepanza significativa tra aspettative e *performance* effettiva.

Il *CER ex-post* ha dimostrato che, nonostante i rendimenti elevati, la volatilità di bitcoin ha penalizzato gli investitori con posizioni eccessivamente concentrate sull'asset. Questo conferma l'importanza di una gestione equilibrata del rischio e l'efficacia del modello bayesiano nel mitigare errori di allocazione derivanti da credenze iniziali eccessivamente ottimistiche o pessimistiche.

2.2: Possibili implicazioni per gli investitori

I risultati di questa ricerca offrono spunti interessanti per gli investitori che considerano l'inclusione di bitcoin nei propri portafogli.

La bassa correlazione tra bitcoin e S&P 500 suggerisce che il primo possa effettivamente migliorare la diversificazione del portafoglio, soprattutto per investitori con *prior* neutrale o leggermente positiva.

Il modello bayesiano dimostra che le credenze iniziali influenzano fortemente le scelte di portafoglio. Tuttavia, grazie al processo di aggiornamento, anche investitori inizialmente scettici su bitcoin hanno finito per includerlo nel portafoglio, evidenziando come un approccio dinamico sia preferibile a strategie statiche basate su credenze rigide.

Nonostante l'alto rendimento medio, bitcoin presenta una volatilità significativa che può ridurre il *CER ex-post*, soprattutto per allocazioni eccessivamente aggressive. Questo sottolinea l'importanza di un'allocazione prudente e di una gestione del rischio attenta.

Infine, investitori con *prior* molto pessimistiche hanno ottenuto *performance* drasticamente inferiori rispetto a chi aveva un atteggiamento più neutrale o moderatamente rialzista. Questo suggerisce che una posizione completamente avversa a bitcoin potrebbe essere subottimale.

2.3: Limiti dello studio e spunti per possibili estensioni

Pur avendo fornito un'analisi dettagliata, il presente studio presenta ovviamente alcuni limiti. Questa può essere considerata come una base per approfondire ulteriori aspetti non adeguatamente trattati, di seguito alcuni spunti di riflessione.

L'analisi è stata condotta su un portafoglio a due asset (bitcoin e S&P 500). In realtà, i portafogli reali includono molte altre classi di asset che potrebbero modificare i risultati. Inserire più asset, considerarne le covarianze e confrontare i risultati con gli stessi senza bitcoin potrebbe aggiungere sostanza a questo studio.

L'elaborato ha considerato un insieme discreto di *prior* su bitcoin, ma nella realtà gli investitori potrebbero avere distribuzioni di credenze più complesse. Si potrebbero considerare distribuzioni continue per calcolare *prior* ottimali, o si potrebbe pensare a studi più complessi in cui le credenze siano *time-dependent*⁴⁴.

Bitcoin è un asset relativamente giovane, con una storia di mercato limitata rispetto ad asset tradizionali come l'S&P 500. Ciò può influenzare la stabilità delle stime di rischio e rendimento.

Si potrebbero utilizzare anche modelli più complessi per l'aggiornamento bayesiano ed in particolare per la modellazione della varianza nel tempo. Supponendo, a titolo esemplificativo, che più passano gli anni e più la varianza di bitcoin potrebbe tendere a stabilizzarsi, prevedendo una maturazione dell'asset.

In questa analisi manca la componente dei costi di transazione, sia quelli variabili che quelli fissi⁴⁵, che nel setto cripto-valutario può risultare determinante ai fini dei calcoli dei pesi ottimali di portafoglio.

Infine, all'inizio di questo elaborato si è accennato al confronto con l'oro di cui spesso si sente parlare. Tralasciando le evidenti differenze che questi asset ancora presentano da un punto di vista finanziario al giorno d'oggi, potrebbe essere interessante valutarne un confronto all'interno di ipotetici portafogli di un set di investitori, più o meno avversi al rischio.

Questo studio spera dunque di gettare le basi per ricerche più approfondite e complesse, che possano confermare, o smentire, i risultati qui conseguiti.

⁴⁴ Legate quindi ad un periodo specifico, ad esempio pre-halving e post-halving.

⁴⁵ Variabili s'intende il mero costo fisico di comprare o vendere bitcoin. Per fissi si possono intendere i costi legati all'apprendimento o all'ambiguità dell'asset.

2.4: Considerazioni finali

A distanza di oltre 15 anni dalla sua creazione, Bitcoin continua a generare dibattiti sulla sua effettiva utilità nei portafogli finanziari. L'analisi condotta suggerisce che, nonostante la sua elevata volatilità, bitcoin possa rappresentare un valido strumento di diversificazione per gli investitori, a patto che venga gestito con un approccio prudente e dinamico.

Il modello bayesiano applicato in questa ricerca ha dimostrato di essere uno strumento efficace per aggiornare le credenze e adattare l'allocazione di portafoglio in base alle nuove informazioni di mercato. Questo approccio si è rivelato particolarmente utile per comprendere l'evoluzione dell'allocazione in bitcoin nel tempo, mostrando che anche investitori inizialmente scettici hanno potuto trovare beneficio nella sua inclusione nel portafoglio.

L'obiettivo di questa ricerca non è convincere le persone ad investire in questo asset, ma semplicemente cercare di analizzare i dati per quello che sono senza alcun preconcetto al riguardo, studiando anche quelle che possono essere convinzioni fortemente pessimiste. Inoltre, si è voluto dare una breve panoramica sulla storia e su cosa effettivamente è e rappresenta bitcoin. Questo perché, prima di trarre conclusioni sull'investimento o meno in un asset, è fondamentale capire di che cosa si sta parlando, almeno superficialmente.

In conclusione, mentre il suo futuro nei portafogli finanziari resta incerto e dipendente da fattori macroeconomici e normativi, i risultati ottenuti in questo studio suggeriscono che un approccio razionale e basato sull'aggiornamento delle credenze possa portare a scelte di investimento più informate e potenzialmente più redditizie.

Ringraziamenti

Vorrei iniziare ringraziando la mia famiglia per avermi supportato e soprattutto per avermi dato la possibilità di frequentare questa università con i loro sacrifici. A loro va la mia immensa gratitudine.

Successivamente, i ringraziamenti vanno sicuramente all'università stessa con tutti i professori da cui ho avuto l'onore di imparare molte cose e di appassionarmi a molte materie, anche le più ostiche. Un ringraziamento anche a tutto lo *staff* e le persone che lavorano a ogni titolo in Luiss e che nell'arco di questi anni si sono dimostrati sempre professionali. Vorrei ringraziare inoltre i miei colleghi di studio con cui ho intrapreso insieme questo percorso formativo. Grazie al mio relatore Prof. Nicola Borri e al mio correlatore Prof. Antonio Simone per avermi guidato nella stesura di questa tesi.

Un grande grazie anche ai miei amici di sempre, che in questi anni hanno sempre creduto nelle mie capacità, spronandomi sempre a fare meglio. Un particolare ringraziamento a quella persona che qualche anno fa mi introdusse in questo simpatico e un po' pazzo mondo delle cripto-valute. Da quel momento iniziai ad appassionarmi sempre di più al mondo della finanza, ed è grazie a questo che decisi di intraprendere questo corso magistrale.

Infine, grazie sia a tutti quanti troveranno interessante la lettura di questo elaborato, ma anche a chi avrà da criticarlo. Sono le critiche a portarti a migliorare, e si può sempre fare meglio.

Appendice

Sezione A1. “Tabelle statistiche pesi di bitcoin per diverse *prior*”. Fonte: Calcolate con codice *Python*.

Nel Panel I sono illustrate le statistiche relative alla *prior* con 130 osservazioni, quindi relativamente debole. Nel Panel II si trovano invece quelle relative a 390 osservazioni, relativamente forte. Ogni riga rappresenta le varie statistiche (le colonne) calcolate per ogni *prior* per una data forza della stessa. Le colonne con scritto “Fraz.” (Frazione) sono da intendere positivi per “Fraz. >0” ed in termini assoluti per le altre tre colonne.

Panel I: Numero di osservazioni 130

Prior	Peso Medio	Std.	Minimo	Massimo	Peso Finale	Fraz. >0	Fraz. >1%	Fraz. >5%	Fraz. >10%	Prima Data Pos.
5	0.250	0.034	0.126	0.312	0.271	1.000	1.000	1.000	1.000	2017-02-03
2.5	0.186	0.037	0.081	0.229	0.223	1.000	1.000	1.000	0.981	2017-02-03
1	0.142	0.041	0.047	0.193	0.192	1.000	1.000	0.995	0.792	2017-02-03
0.5	0.126	0.042	0.029	0.182	0.181	1.000	1.000	0.954	0.686	2017-02-03
0	0.110	0.044	0.002	0.170	0.169	1.000	0.990	0.891	0.609	2017-02-03
-1	0.075	0.049	-0.060	0.146	0.145	0.959	0.969	0.647	0.483	2017-06-02
-2.5	0.017	0.059	-0.170	0.108	0.107	0.565	0.942	0.589	0.043	2020-07-17
-5	-0.097	0.084	-0.414	0.036	0.034	0.114	0.966	0.611	0.452	2024-02-16

Panel II: Numero di osservazioni 390

Prior	Peso Medio	Std.	Minimo	Massimo	Peso Finale	Fraz. >0	Fraz. >1%	Fraz. >5%	Fraz. >10%	Prima Data Pos.
5	0.428	0.034	0.268	0.523	0.414	1.000	1.000	1.000	1.000	2017-02-03
2.5	0.304	0.033	0.166	0.381	0.313	1.000	1.000	1.000	1.000	2017-02-03
1	0.199	0.036	0.091	0.245	0.233	1.000	1.000	1.000	0.993	2017-02-03
0.5	0.157	0.039	0.062	0.204	0.202	1.000	1.000	1.000	0.891	2017-02-03
0	0.110	0.044	0.002	0.170	0.169	1.000	0.990	0.891	0.609	2017-02-03
-1	-0.003	0.063	-0.212	0.094	0.093	0.524	0.983	0.452	0.053	2020-11-13
-2.5	-0.243	0.126	-0.787	-0.049	-0.051	0.000	1.000	0.995	0.886	Mai
-5	-1.155	0.720	-7.509	-0.422	-0.429	0.000	1.000	1.000	1.000	Mai

Sezione A2. “*CER ex-ante gain* annuali per diverse *prior*”. I dati sono da considerarsi relativi alla fine di ogni anno. In verde i *CER ex-ante gain* con pesi positivi in bitcoin, in nero con pesi negativi.

Fonte: Calcolati con codice *Python*.

Nel Panel I sono illustrati i *CER ex-ante gain* alla fine di ogni anno per diverse *prior* con una forza di 130 osservazioni. Nel Panel II invece si trovano i dati relativi ad una forza della *prior* di 390 osservazioni.

Panel I: Numero di osservazioni 130

Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	Fine periodo
5	0.69	0.95	0.67	0.77	0.68	0.57	0.55	0.52	0.51
2.5	0.28	0.38	0.31	0.41	0.39	0.31	0.33	0.33	0.32
1	0.12	0.15	0.15	0.24	0.24	0.19	0.22	0.23	0.23
0.5	0.08	0.10	0.11	0.20	0.20	0.16	0.19	0.20	0.20
0	0.05	0.05	0.07	0.15	0.16	0.12	0.16	0.18	0.17
-1	0.01	0.00	0.02	0.08	0.10	0.07	0.10	0.13	0.12
-2.5	0.01	0.04	0.00	0.01	0.03	0.02	0.04	0.07	0.06
-5	0.23	0.48	0.14	0.03	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01

Panel II: Numero di osservazioni 390

Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	Fine periodo
5	1.34	1.92	1.48	1.55	1.37	1.25	1.15	1.05	1.04
2.5	0.46	0.70	0.55	0.65	0.59	0.53	0.52	0.50	0.49
1	0.13	0.20	0.18	0.25	0.25	0.22	0.23	0.24	0.24
0.5	0.06	0.09	0.09	0.16	0.16	0.14	0.16	0.18	0.17
0	0.02	0.02	0.03	0.08	0.09	0.08	0.10	0.12	0.12
-1	0.01	0.03	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03
-2.5	0.27	0.46	0.24	0.11	0.06	0.06	0.02	0.00	0.00
-5	1.67	-14.71	1.62	0.87	0.73	0.46	0.39	0.27	0.27

Sezione A3. “*CER ex-post gain* annuali per diverse *prior*”. I dati sono da considerarsi relativi alla fine di ogni anno. Fonte: Calcolati con codice *Python*.

Nel Panel I sono illustrati i *CER ex-post gain* alla fine di ogni anno per diverse *prior* con una forza di 130 osservazioni. Nel Panel II invece si trovano i dati relativi ad una forza della *prior* di 390 osservazioni.

Panel I: Numero di osservazioni 130

Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
5	1.12	0.22	0.27	0.32	0.33	0.20	0.24	0.25	0.25
2.5	0.75	0.16	0.20	0.24	0.26	0.16	0.19	0.20	0.20
1	0.49	0.11	0.14	0.18	0.20	0.12	0.15	0.16	0.16
0.5	0.40	0.10	0.12	0.15	0.18	0.11	0.13	0.14	0.14
0	0.30	0.08	0.10	0.13	0.15	0.09	0.12	0.13	0.13
-1	0.09	0.03	0.04	0.07	0.09	0.05	0.08	0.09	0.09
-2.5	-0.27	-0.06	-0.06	-0.04	-0.01	-0.02	0.00	0.02	0.02
-5	-1.02	-0.28	-0.31	-0.30	-0.26	-0.21	-0.18	-0.16	-0.16

Panel II: Numero di osservazioni 390

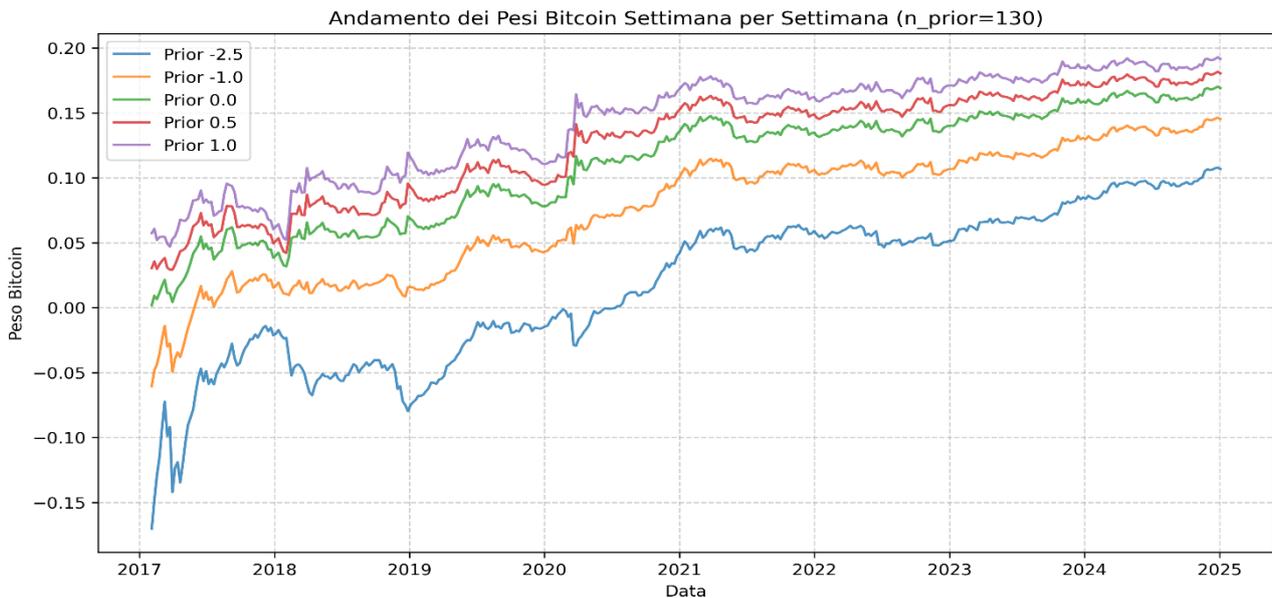
Prior	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
5	2.06	0.29	0.38	0.45	0.46	0.25	0.31	0.32	0.32
2.5	1.42	0.25	0.32	0.37	0.38	0.23	0.27	0.28	0.28
1	0.83	0.18	0.22	0.26	0.28	0.17	0.20	0.21	0.21
0.5	0.58	0.13	0.16	0.20	0.22	0.14	0.16	0.17	0.17
0	0.30	0.08	0.10	0.13	0.15	0.09	0.12	0.13	0.13
-1	-0.40	-0.10	-0.11	-0.08	-0.05	-0.05	-0.03	-0.01	-0.01
-2.5	-2.04	-0.63	-0.73	-0.73	-0.67	-0.52	-0.49	-0.44	-0.44
-5	-11.99	-6.18	-6.98	-7.63	-6.82	-5.59	-5.07	-4.54	-4.53

Sezione B1. “Andamento dei pesi bitcoin settimana per settimana per diverse *prior*”.

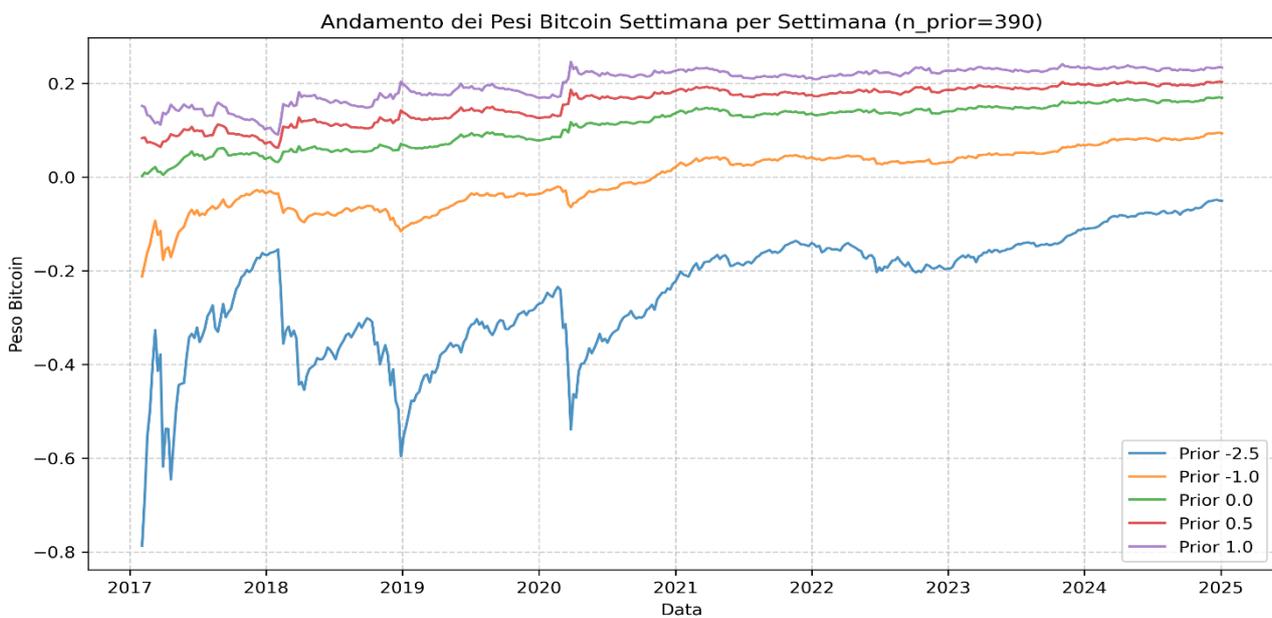
Fonte: Creato con codice *Python*.

Nel Panel I è illustrato l’andamento dei pesi per bitcoin all’interno del portafoglio durante tutto il periodo in esame, per diverse *prior* e con una forza delle stesse di 130 osservazioni. Nel Panel II invece è analizzato lo scenario con una forza di 390 osservazioni.

Panel I: Numero di osservazioni 130



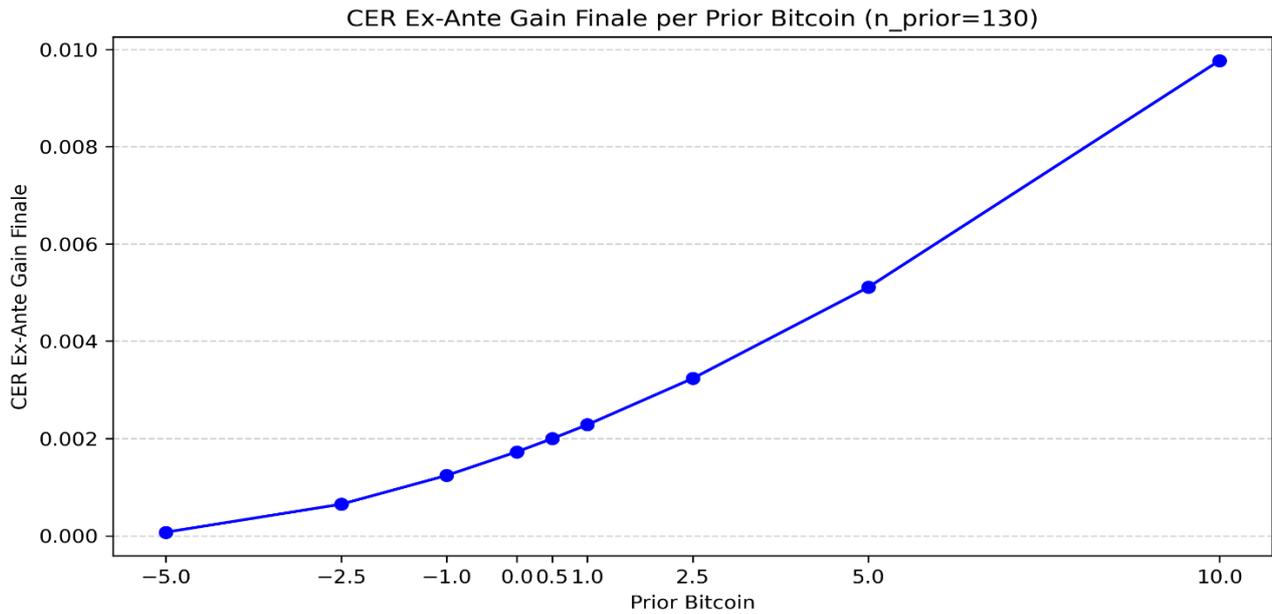
Panel II: Numero di osservazioni 390



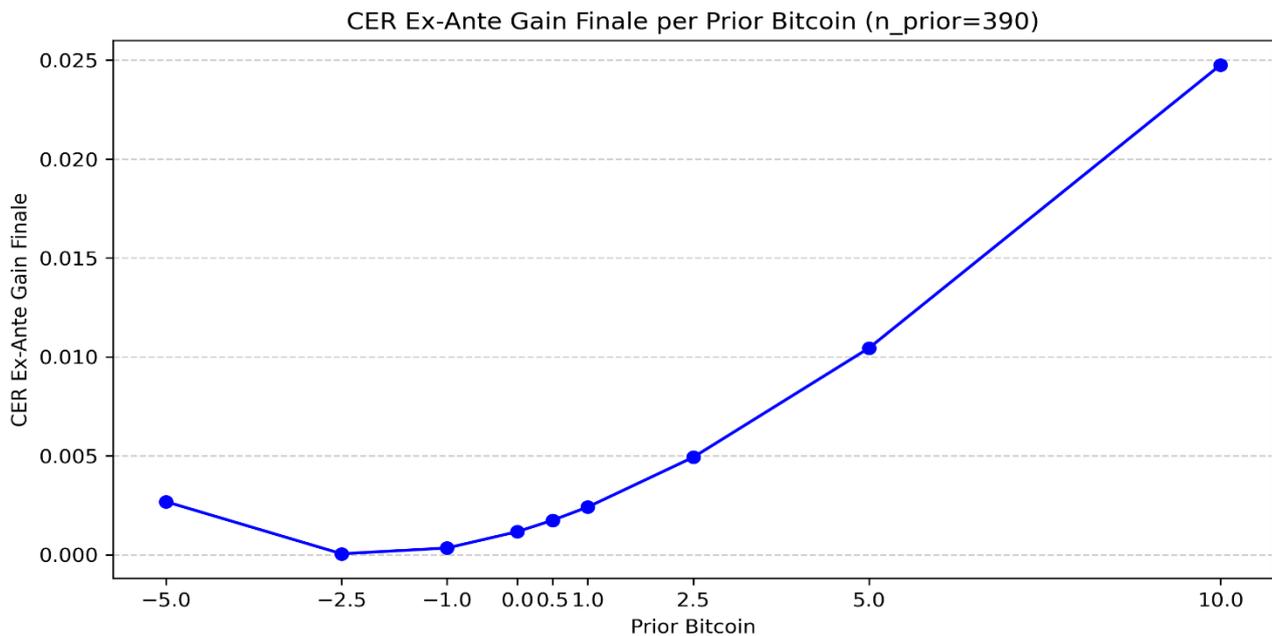
Sezione B2. “Cer *ex-ante* gain finale per diverse *prior*”. Fonte: Creato con codice *Python*.

Nel Panel I è illustrato l’andamento del *CER ex-ante* gain finale per diverse *prior* con una forza di 130 osservazioni. Nel Panel II è rappresentato lo scenario con 390 osservazioni.

Panel I: Numero di osservazioni 130



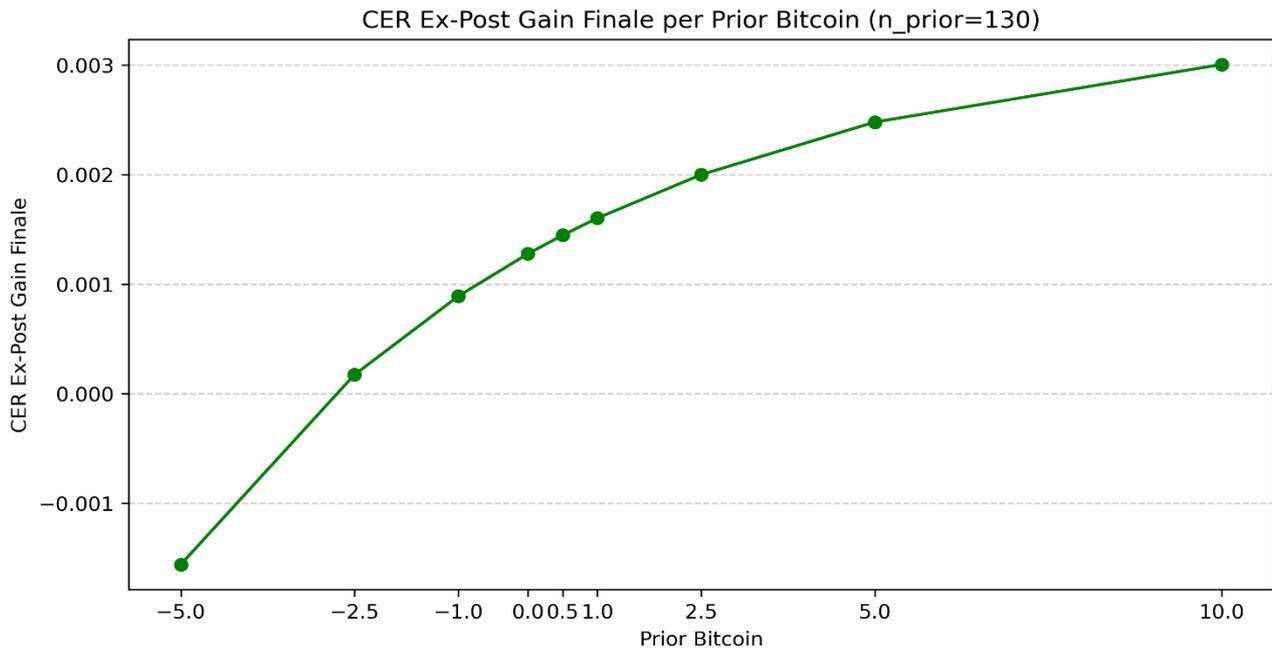
Panel II: Numero di osservazioni 390



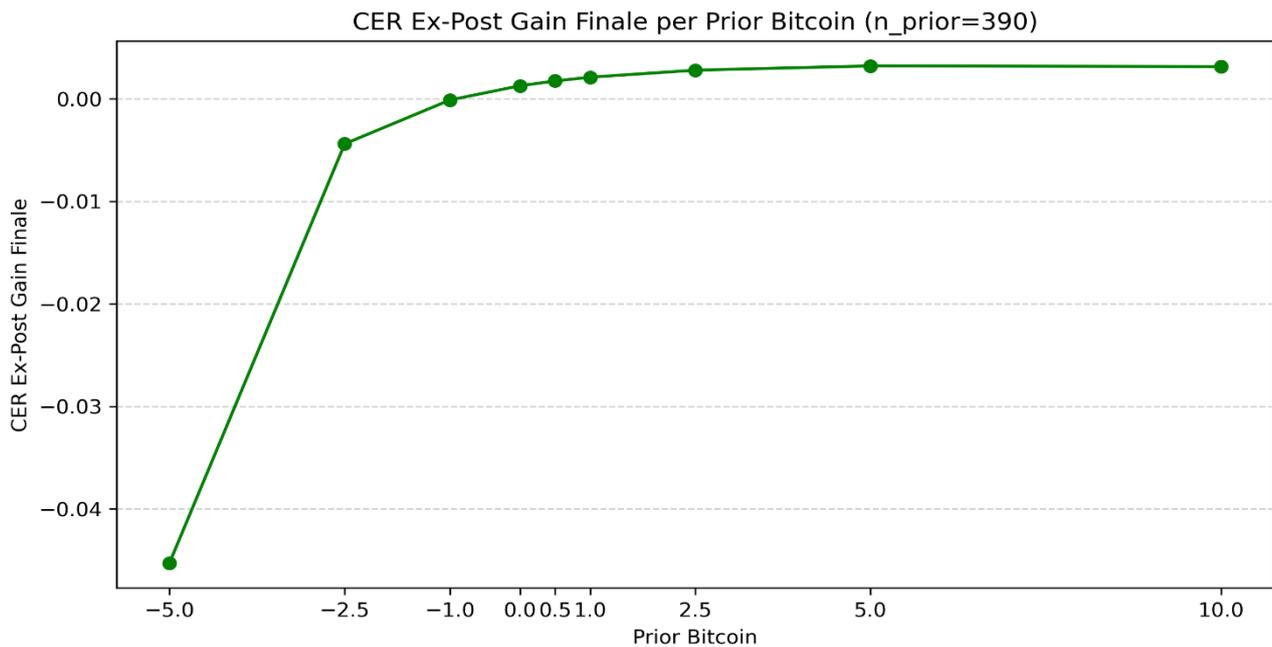
Sezione B3. “Cer *ex-post gain* finale per diverse *prior*”. Fonte: creato con codice *Python*.

Nel Panel I è illustrato l’andamento del *CER ex-post gain* finale per diverse *prior* con una forza di 130 osservazioni. Infine, nel Panel II lo scenario con 390 osservazioni.

Panel I: Numero di osservazioni 130



Panel II: Numero di osservazioni 390



Sezione C1. “Codice Python usato per implementare il modello bayesiano”. Implementato con “Jupyter Lab” di “Anaconda”.

Download delle serie storiche e manipolazione dei dati

```
# Installazione della libreria per scaricare i dati finanziari
!pip install yfinance

# Importazione delle librerie necessarie

import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
import glob

import matplotlib.pyplot as plt

# Definizione delle date per il pre-sample e il post-sample
start_date = "1997-01-01"
end_date = "2017-01-01"
start_date_post = "2017-01-01"
end_date_post = "2025-01-01"

# Scaricamento dei dati giornalieri dell'S&P 500
ticker = "^GSPC" # Ticker per l'S&P 500

datasp500_pre = yf.download(ticker, start=start_date, end=end_date,
interval="1d")

datasp500_post = yf.download(ticker, start=start_date_post, end=end_date_post,
interval="1d")

# Conversione dell'indice in formato datetime per sicurezza
datasp500_pre.index = pd.to_datetime(datasp500_pre.index)
datasp500_post.index = pd.to_datetime(datasp500_post.index)

# Ricampionamento dei dati per ottenere solo i valori del venerdì
datasp500_pre_venerdi = datasp500_pre.resample('W-FRI').last()
datasp500_post_venerdi = datasp500_post.resample('W-FRI').last()

# Calcolo dei rendimenti settimanali semplici
datasp500_pre_venerdi['Simple Return'] =
datasp500_pre_venerdi['Close'].pct_change()
```

```

datasp500_post_venerdi['Simple Return'] =
datasp500_post_venerdi['Close'].pct_change()

# Reset dell'indice per salvare i dati in CSV
datasp500_pre_venerdi.reset_index(inplace=True)
datasp500_post_venerdi.reset_index(inplace=True)

# Salvataggio dei dati in CSV
datasp500_pre_venerdi.to_csv("sp500_venerdi_rendimenti_semplici_pre.csv",
index=False)

datasp500_post_venerdi.to_csv("sp500_venerdi_rendimenti_semplici_post.csv",
index=False)

# Scaricamento dei dati sui tassi risk-free a breve termine (3 mesi T-Bill)
ticker2 = "^IRX"

risk_free_data_pre = yf.download(ticker2, start=start_date, end=end_date,
interval="1d")

risk_free_data_post = yf.download(ticker2, start=start_date_post,
end=end_date_post, interval="1d")

# Ricampionamento per ottenere i valori del venerdì
risk_free_data_pre_venerdi = risk_free_data_pre.resample('W-FRI').last()
risk_free_data_post_venerdi = risk_free_data_post.resample('W-FRI').last()

# Calcolo del tasso risk-free settimanale (annualizzato diviso per 52 settimane)
risk_free_data_pre_venerdi['Weekly Risk-Free Rate'] =
risk_free_data_pre_venerdi['Close'] / 100 / 52

risk_free_data_post_venerdi['Weekly Risk-Free Rate'] =
risk_free_data_post_venerdi['Close'] / 100 / 52

# Salvataggio dei dati sui tassi risk-free
risk_free_data_pre_venerdi.to_csv("risk_free_weekly_pre.csv", index=False)
risk_free_data_post_venerdi.to_csv("risk_free_weekly_post.csv", index=False)

# Scaricamento dei dati di Bitcoin dal 2017 in poi
ticker3 = "BTC-USD"

bitcoin_data_post = yf.download(ticker3, start=start_date_post,
end=end_date_post, interval="1d")

# Ricampionamento per ottenere solo i dati del venerdì
bitcoin_data_post_venerdi = bitcoin_data_post.resample('W-FRI').last()

```

```

# Calcolo dei rendimenti settimanali di Bitcoin

bitcoin_data_post_venerdi['Simple Return'] =
bitcoin_data_post_venerdi['Close'].pct_change()

# Reset dell'indice per il salvataggio in CSV

bitcoin_data_post_venerdi.reset_index(inplace=True)

bitcoin_data_post_venerdi.to_csv("bitcoin_venerdi_rendimenti_semplici_post.csv",
index=False)

# Eliminazione della prima riga per evitare problemi con i NaN derivanti dal
calcolo dei rendimenti

datasp500_pre_venerdi = datasp500_pre_venerdi.iloc[1:].reset_index(drop=True)

datasp500_post_venerdi = datasp500_post_venerdi.iloc[1:].reset_index(drop=True)

bitcoin_data_post_venerdi =
bitcoin_data_post_venerdi.iloc[1:].reset_index(drop=True)

risk_free_data_pre_venerdi =
risk_free_data_pre_venerdi.iloc[1:].reset_index(drop=True)

risk_free_data_post_venerdi =
risk_free_data_post_venerdi.iloc[1:].reset_index(drop=True)

# Calcolo degli excess return (rendimento al netto del risk-free rate)

datasp500_pre_venerdi['Excess Return'] = datasp500_pre_venerdi['Simple Return']
- risk_free_data_pre_venerdi['Weekly Risk-Free Rate']

datasp500_post_venerdi['Excess Return'] = datasp500_post_venerdi['Simple
Return'] - risk_free_data_post_venerdi['Weekly Risk-Free Rate']

bitcoin_data_post_venerdi['Excess Return'] = bitcoin_data_post_venerdi['Simple
Return'] - risk_free_data_post_venerdi['Weekly Risk-Free Rate']

# Impostazione della colonna "Date" come indice per Bitcoin e S&P 500

bitcoin_data_post_venerdi.set_index("Date", inplace=True)

datasp500_pre_venerdi.set_index("Date", inplace=True)

datasp500_post_venerdi.set_index("Date", inplace=True)

# Estrazione delle serie di rendimenti in eccesso per i modelli successivi

sp500_pre_exret = datasp500_pre_venerdi['Excess Return']

sp500_post_exret = datasp500_post_venerdi['Excess Return']

bitcoin_post_exret = bitcoin_data_post_venerdi['Excess Return']

```

Definizione modello bayesiano e calcolo dei pesi.

```
# Funzione per l'aggiornamento Bayesiano della media e della varianza
def bayesian_update_simple(prior_mean, prior_var, returns, prior_n):
    n = len(returns)
    sample_mean = np.mean(returns)
    sample_var = np.var(returns, ddof=1)
    # Calcolo della posterior variance
    posterior_var = 1 / ((prior_n / prior_var) + (n / sample_var))
    # Calcolo della posterior mean
    posterior_mean = posterior_var * ((prior_n * prior_mean / prior_var) + (n *
sample_mean / sample_var))

    return posterior_mean, posterior_var
# Definizione della prior per SP500 e Bitcoin
n_sp500 = len(sp500_pre_exret) # Numero di osservazioni storiche di SP500
n_bitcoin = 390 # Numero arbitrario di osservazioni per Bitcoin
mu_sp500 = sp500_pre_exret.mean() # Media storica di SP500
var_sp500 = sp500_pre_exret.var(ddof=1) # Varianza storica di SP500
mu_bitcoin = 0.1 # Prior arbitraria sulla media dei rendimenti di Bitcoin
var_bitcoin = 20 * var_sp500 # Prior sulla varianza di Bitcoin
# Calcolo delle medie e varianze ex-post per riferimento
mu_post_sp500 = sp500_post_exret.mean()
var_post_sp500 = sp500_post_exret.var()
var_post_bitcoin = bitcoin_post_exret.var()

# Creazione del dataframe con i rendimenti post-2017
returns_df = pd.concat([
    sp500_post_exret.rename("SP500"),
    bitcoin_post_exret.rename("Bitcoin")
], axis=1).dropna()
# Liste per salvare i risultati dell'aggiornamento bayesiano
```

```

posterior_means_sp500 = []
posterior_vars_sp500 = []
posterior_means_bitcoin = []
posterior_vars_bitcoin = []
# Iterazione per aggiornare le posterior settimana per settimana
for i in range(0, len(returns_df)):
    sample_sp500 = returns_df.iloc[:i, 0]
    sample_bitcoin = returns_df.iloc[:i, 1]

    # Aggiornamento bayesiano per SP500
    posterior_mean_sp500, posterior_var_sp500 = bayesian_update_simple(
        mu_sp500, var_sp500, sample_sp500, n_sp500
    )
    # Aggiornamento bayesiano per Bitcoin
    posterior_mean_bitcoin, posterior_var_bitcoin = bayesian_update_simple(
        mu_bitcoin, var_bitcoin, sample_bitcoin, n_bitcoin
    )
    # Salvataggio delle posterior aggiornate
    posterior_means_sp500.append(posterior_mean_sp500)
    posterior_vars_sp500.append(posterior_var_sp500)
    posterior_means_bitcoin.append(posterior_mean_bitcoin)
    posterior_vars_bitcoin.append(posterior_var_bitcoin)

# Creazione del dataframe con i risultati delle posterior
posterior_results = pd.DataFrame(
    {
        "Date": returns_df.index,
        "Posterior Mean SP500": posterior_means_sp500,
        "Posterior Var SP500": posterior_vars_sp500,
        "Posterior Mean Bitcoin": posterior_means_bitcoin,
        "Posterior Var Bitcoin": posterior_vars_bitcoin,
    }
)

```

```

)
posterior_results.set_index("Date", inplace=True)
posterior_results = posterior_results.dropna()
# Sostituzione del primo valore della media di SP500 con la prior iniziale
posterior_results.loc[posterior_results.index[0], "Posterior Mean SP500"] =
mu_sp500
# Calcolo della correlazione tra i rendimenti di SP500 e Bitcoin
correlation = returns_df.corr().iloc[0, 1]
print(correlation)
# Salvataggio dei risultati aggiornati
posterior_results.to_csv("posterior_results_plus10.0_390.csv", index=True)
# Calcolo della curtosi per valutare la distribuzione dei rendimenti
print(sp500_post_exret.kurtosis())
print(bitcoin_post_exret.kurtosis())

# Definizione del parametro di avversione al rischio
gamma = 3
# Lista per salvare i pesi ottimali del portafoglio
weights = []
# Iterazione per calcolare i pesi ottimali settimana per settimana
for i in range(len(posterior_results)):
    mean_vector = np.array([
        posterior_results.iloc[i]["Posterior Mean SP500"],
        posterior_results.iloc[i]["Posterior Mean Bitcoin"]
    ])

    cov_matrix = np.array([
        [posterior_results.iloc[i]["Posterior Var SP500"], 0],
        [0, posterior_results.iloc[i]["Posterior Var Bitcoin"]]
    ])

# Calcolo dei pesi ottimali usando la formula bayesiana

```

```

inv_cov_matrix = np.linalg.inv(cov_matrix)
raw_weights = (1 / gamma) * inv_cov_matrix @ mean_vector

# Normalizzazione affinché la somma dei pesi sia pari a 1
normalized_weights = raw_weights / np.sum(raw_weights)
weights.append(normalized_weights)

# Creazione del dataframe con i pesi calcolati
weights_df = pd.DataFrame(
    weights,
    columns=["Weight SP500", "Weight Bitcoin"],
    index=posterior_results.index
)

# Nota importante:
# Per problemi computazionali, i vari file con diverse prior e forze della prior
# sono stati calcolati modificando manualmente i valori iniziali di mu_bitcoin e
# n_bitcoin
# e salvati separatamente.

# Salvataggio dei pesi ottimali
weights_df.to_csv("weights.csv", index=True)
# Creazione del dataframe finale con posterior e pesi
final_results = pd.concat([posterior_results, weights_df], axis=1)
# Rimozione della prima osservazione per evitare problemi di valori NaN iniziali
final_results = final_results.iloc[1:]
# Salvataggio del file finale con i risultati
final_results.to_csv("final_results_plus10.0_390.csv", index=True)

```

Calcolo statistiche descrittive pesi e sui rendimenti ex-post

```
# Percorso dei file CSV generati dai risultati del modello
file_pattern = "final_results_*.csv"
# Lista per salvare i risultati delle statistiche sui pesi Bitcoin
results = []
# Itera su tutti i file CSV che corrispondono al pattern specificato
for file_name in glob.glob(file_pattern):
    # Legge il file CSV corrispondente
    df = pd.read_csv(file_name)

    # Calcola statistiche sui pesi di Bitcoin nel portafoglio
    mean_weight_bitcoin = df["Weight Bitcoin"].mean() # Peso medio
    var_weight_bitcoin = df["Weight Bitcoin"].var() # Varianza del peso
    min_weight_bitcoin = df["Weight Bitcoin"].min() # Peso minimo osservato
    max_weight_bitcoin = df["Weight Bitcoin"].max() # Peso massimo osservato
    final_weight_bitcoin = df["Weight Bitcoin"].iloc[-1] # Ultimo peso nel
    periodo

    # Frazioni dei periodi in cui Bitcoin ha avuto un determinato livello di
    peso
    fraction_positive_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"] > 0).mean() # Percentuale
    di pesi positivi
    fraction_above_05_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"].abs() > 0.005).mean() # >
    0.5% in valore assoluto
    fraction_above_1_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"].abs() > 0.01).mean() # >
    1% in valore assoluto
    fraction_above_2_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"].abs() > 0.02).mean() # >
    2% in valore assoluto
    fraction_above_5_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"].abs() > 0.05).mean() # >
    5% in valore assoluto
    fraction_above_10_bitcoin = (df["Weight Bitcoin"].abs() > 0.10).mean() # >
    10% in valore assoluto
```

```

# Identifica la prima data in cui Bitcoin ha avuto un peso positivo nel
portafoglio

first_positive_bitcoin = df.loc[df["Weight Bitcoin"] > 0, "Date"].min() if
not df.loc[df["Weight Bitcoin"] > 0].empty else "Mai"

# Salvataggio dei risultati in una lista di dizionari
results.append({
    "File": file_name,
    "Mean Weight Bitcoin": mean_weight_bitcoin,
    "Variance Weight Bitcoin": var_weight_bitcoin,
    "Min Weight Bitcoin": min_weight_bitcoin,
    "Max Weight Bitcoin": max_weight_bitcoin,
    "Final Weight Bitcoin": final_weight_bitcoin,
    "Fraction Positive Bitcoin": fraction_positive_bitcoin,
    "Fraction Above 0.5% Bitcoin": fraction_above_05_bitcoin,
    "Fraction Above 1% Bitcoin": fraction_above_1_bitcoin,
    "Fraction Above 2% Bitcoin": fraction_above_2_bitcoin,
    "Fraction Above 5% Bitcoin": fraction_above_5_bitcoin,
    "Fraction Above 10% Bitcoin": fraction_above_10_bitcoin,
    "First Positive Date Bitcoin": first_positive_bitcoin
})

# Crea un DataFrame con i risultati delle statistiche sui pesi Bitcoin
results_df = pd.DataFrame(results)

# Salvataggio del file CSV con i risultati finali dell'analisi sui pesi Bitcoin
results_df.to_csv("bitcoin_weights_analysis.csv", index=False)

print("Calcolo completato. Risultati salvati in
'bitcoin_weights_analysis.csv'.")

# Carica il file CSV
df = pd.read_csv("bitcoin_weights_analysis.csv")

```

```

# Pulizia del nome file e creazione delle colonne per prior e n_bitcoin
df["Prior Bitcoin"] = df["File"].str.extract(r"final_results_([a-zA-Z0-9\.\-
]+)_\d+\.csv")
df["n_Bitcoin"] = df["File"].str.extract(r"_(\d+)\.csv").astype(int)

# Separare i dati per n_Bitcoin = 130, 260, 390
df_130 = df[df["n_Bitcoin"] == 130].drop(columns=["File", "n_Bitcoin"])
df_260 = df[df["n_Bitcoin"] == 260].drop(columns=["File", "n_Bitcoin"])
df_390 = df[df["n_Bitcoin"] == 390].drop(columns=["File", "n_Bitcoin"])

# Ordinare per prior Bitcoin per maggiore chiarezza
df_130 = df_130.sort_values(by="Prior Bitcoin")
df_260 = df_260.sort_values(by="Prior Bitcoin")
df_390 = df_390.sort_values(by="Prior Bitcoin")

# Salvare in un file Excel
# Salvare in file CSV
df_130.to_csv("bitcoin_weights_analysis_n_130.csv", index=False)
df_260.to_csv("bitcoin_weights_analysis_n_260.csv", index=False)
df_390.to_csv("bitcoin_weights_analysis_n_390.csv", index=False)

# Caricare i dati dei rendimenti in eccesso
sp500_exret = sp500_post_exret.rename("SP500 Excess Return")
bitcoin_exret = bitcoin_post_exret.rename("Bitcoin Excess Return")

# Creare un dataframe con le statistiche richieste
stats_df = pd.concat([sp500_exret, bitcoin_exret],
axis=1).describe(percentiles=[0.25, 0.5, 0.75]).T

# Aggiungere skewness e kurtosis
stats_df["Skewness"] = [sp500_exret.skew(), bitcoin_exret.skew()]
stats_df["Kurtosis"] = [sp500_exret.kurtosis(), bitcoin_exret.kurtosis()]

# Salvare in CSV
stats_df.to_csv("excess_returns_statistics.csv", index=True)

```

Calcolo dei CER

```
# Trova tutti i file CSV con i risultati dei pesi di portafoglio
file_pattern = "final_results_*.csv"
file_list = glob.glob(file_pattern)
# Lista per raccogliere i risultati aggregati del CER
summary_results = []
# Iterazione su tutti i file disponibili
for file_name in file_list:
    print(f"Elaborazione del file: {file_name}")
    # Carica i dati del file CSV
    df = pd.read_csv(file_name)

    # Determina il valore di n_prior per Bitcoin in base al nome del file
    if "130" in file_name:
        n_bitcoin_prior = 130
    elif "260" in file_name:
        n_bitcoin_prior = 260
    elif "390" in file_name:
        n_bitcoin_prior = 390 # Corretto rispetto a prima
    else:
        print(f"Impossibile determinare n_prior da {file_name}")
        continue

# --- Calcolo del CER Ex-Ante ---
ce_ex_ante_weekly = []
for i in range(len(df)):
    # Estrazione delle posterior mean e varianze settimanali
    mean_vector = np.array([
        df.iloc[i]["Posterior Mean SP500"],
        df.iloc[i]["Posterior Mean Bitcoin"]
    ])
```

```

cov_matrix = np.array([
    [df.iloc[i]["Posterior Var SP500"] * (1043 + i), 0], # Scalatura
SP500
    [0, df.iloc[i]["Posterior Var Bitcoin"] * (n_bitcoin_prior + i)] #
Scalatura Bitcoin
])
weights = np.array([
    df.iloc[i]["Weight SP500"],
    df.iloc[i]["Weight Bitcoin"]
])

# Calcolo del rendimento stimato del portafoglio
mu_p = np.dot(weights, mean_vector)
# Calcolo della varianza del portafoglio aggiustata per il CER Ex-Ante
sigma_p2_adjusted = weights.T @ cov_matrix @ weights
# Calcolo del CER Ex-Ante per la settimana corrente
ce_ex_ante = mu_p - (gamma / 2) * sigma_p2_adjusted
ce_ex_ante_weekly.append(ce_ex_ante)

# Media e valore finale del CER Ex-Ante
ce_ex_ante_mean = np.mean(ce_ex_ante_weekly)
ce_ex_ante_final = ce_ex_ante_weekly[-1]

# --- Calcolo CER Ex-Post ---
# Carica i rendimenti realizzati post-2017
returns_df = pd.concat([
    sp500_post_exret.rename("SP500"),
    bitcoin_post_exret.rename("Bitcoin")
], axis=1).dropna()

ce_ex_post_weekly = []
realized_portfolio_returns = []

```

```

for i in range(len(df)):
    # Pesatura basata sui pesi calcolati nel portafoglio
    weights = np.array([
        df.iloc[i]["Weight SP500"],
        df.iloc[i]["Weight Bitcoin"]
    ])

    realized_returns = returns_df.iloc[i].values # Rendimenti realizzati di
SP500 e Bitcoin
    portfolio_return = np.dot(weights, realized_returns)
    realized_portfolio_returns.append(portfolio_return)

    # Calcolo della media e varianza realizzate fino alla settimana corrente
    mu_p_real = np.mean(realized_portfolio_returns)
    sigma_p2_real = np.var(realized_portfolio_returns)

    # Calcolo del CER Ex-Post settimanale
    ce_post = mu_p_real - (gamma / 2) * sigma_p2_real
    ce_ex_post_weekly.append(ce_post)

# Media e valore finale del CER Ex-Post
ce_ex_post_mean = np.mean(ce_ex_post_weekly)
ce_ex_post_final = ce_ex_post_weekly[-1]

# --- Calcolo del CER Gain ---
cer_ex_ante_gain_weekly = np.array(ce_ex_ante_weekly) -
np.array(ce_ex_ante_weekly)
cer_ex_post_gain_weekly = np.array(ce_ex_post_weekly) -
np.array(ce_ex_post_weekly)

# Media e valore finale del CER Gain
cer_ex_ante_gain_mean = np.mean(cer_ex_ante_gain_weekly)
cer_ex_ante_gain_final = cer_ex_ante_gain_weekly[-1]
cer_ex_post_gain_mean = np.mean(cer_ex_post_gain_weekly)

```

```

cer_ex_post_gain_final = cer_ex_post_gain_weekly[-1]

# Salva i risultati aggregati in una lista
summary_results.append({
    "File": file_name,
    "CER Ex-Ante Medio": ce_ex_ante_mean,
    "CER Ex-Post Medio": ce_ex_post_mean,
    "CER Ex-Ante Finale": ce_ex_ante_final,
    "CER Ex-Post Finale": ce_ex_post_final,
    "CER Ex-Ante Gain Medio": cer_ex_ante_gain_mean,
    "CER Ex-Ante Gain Finale": cer_ex_ante_gain_final,
    "CER Ex-Post Gain Medio": cer_ex_post_gain_mean,
    "CER Ex-Post Gain Finale": cer_ex_post_gain_final
})

# Crea un DataFrame per il CE dinamico settimanale e salva un CSV per ogni
file
ce_dynamic_df = pd.DataFrame({
    "Date": df["Date"],
    "CE Ex-Ante Corretto": ce_ex_ante_weekly,
    "CE Ex-Post": ce_ex_post_weekly,
    "CER Ex-Ante Gain": cer_ex_ante_gain_weekly,
    "CER Ex-Post Gain": cer_ex_post_gain_weekly

})

ce_dynamic_file = file_name.replace("final_results_", "ce_dynamic_")
ce_dynamic_df.to_csv(ce_dynamic_file, index=False)

print(f"CE Dinamico salvato in: {ce_dynamic_file}")

# Crea un DataFrame per i risultati aggregati
summary_df = pd.DataFrame(summary_results)

```

```

# Salva il file con i CE medi e finali per ogni file
summary_df.to_csv("ce_results_summary_corrected.csv", index=False)

# CER ex-ante

# Trova tutti i file CSV con i dati dei CE dinamici settimanali
file_pattern = "ce_dynamic_*.csv" # Assicurarsi di avere i file nella directory
corretta

file_list = glob.glob(file_pattern)

# Lista per raccogliere i dati annuali
annual_ce_gains = []

# Itera su tutti i file trovati
for file_name in file_list:
    # Legge il file CSV contenente i dati del CE dinamico
    df = pd.read_csv(file_name)

    # Converte la colonna "Date" in formato datettime per estrarre gli anni
    df["Date"] = pd.to_datetime(df["Date"])
    df["Year"] = df["Date"].dt.year

    # Raggruppa per anno e seleziona l'ultimo valore disponibile per quell'anno
    annual_ce = df.groupby("Year")["CER Ex-Ante Gain"].last().reset_index()

    # Determina prior e n_Bitcoin dal nome del file
    prior = file_name.split("_")[-2] # Estrae il valore della prior
    n_bitcoin = file_name.split("_")[-1].split(".")[0] # Estrae il valore di
n_bitcoin

    # Aggiunge queste informazioni alla tabella
    annual_ce["Prior Bitcoin"] = prior
    annual_ce["n_Bitcoin"] = n_bitcoin

    # Salva i risultati nella lista
    annual_ce_gains.append(annual_ce)

# Unisce tutti i risultati in un unico DataFrame
df_annual_ce_gains = pd.concat(annual_ce_gains, ignore_index=True)

# Separare i dati per n_Bitcoin = 130, 260, 390
df_130 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"130"].drop(columns=["n_Bitcoin"])

```

```

df_260 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"260"].drop(columns=["n_Bitcoin"])

df_390 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"390"].drop(columns=["n_Bitcoin"])

# Ordina i risultati per prior Bitcoin per maggiore chiarezza
df_130 = df_130.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])
df_260 = df_260.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])
df_390 = df_390.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])

# Salva i file CSV con i CER Ex-Ante annuali per ogni valore di n_Bitcoin
df_130.to_csv("ce_ex_ante_gains_annual_n_130.csv", index=False)
df_260.to_csv("ce_ex_ante_gains_annual_n_260.csv", index=False)
df_390.to_csv("ce_ex_ante_gains_annual_n_390.csv", index=False)

# CER ex-post

# Trova tutti i file CSV con i dati dei CE dinamici settimanali
file_pattern = "ce_dynamic_*.csv" # Assicurarsi di avere i file nella directory
corretta

file_list = glob.glob(file_pattern)

# Lista per raccogliere i dati annuali del CER Ex-Post
annual_ce_gains = []

# Itera su tutti i file trovati
for file_name in file_list:
    # Legge il file CSV contenente i dati del CE dinamico
    df = pd.read_csv(file_name)

    # Converte la colonna "Date" in formato datetime per estrarre gli anni
    df["Date"] = pd.to_datetime(df["Date"])
    df["Year"] = df["Date"].dt.year

    # Raggruppa per anno e seleziona l'ultimo valore disponibile per quell'anno
    annual_ce = df.groupby("Year")["CER Ex-Post Gain"].last().reset_index()

    # Determina prior e n_Bitcoin dal nome del file
    prior = file_name.split("_")[-2] # Estrae il valore della prior

```

```

n_bitcoin = file_name.split("_")[-1].split(".")[0] # Estrae il valore di
n_bitcoin

# Aggiunge queste informazioni alla tabella
annual_ce["Prior Bitcoin"] = prior
annual_ce["n_Bitcoin"] = n_bitcoin
# Salva i risultati nella lista
annual_ce_gains.append(annual_ce)

# Unisce tutti i risultati in un unico DataFrame
df_annual_ce_gains = pd.concat(annual_ce_gains, ignore_index=True)

# Separare i dati per n_Bitcoin = 130, 260, 390
df_130 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"130"].drop(columns=["n_Bitcoin"])
df_260 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"260"].drop(columns=["n_Bitcoin"])
df_390 = df_annual_ce_gains[df_annual_ce_gains["n_Bitcoin"] ==
"390"].drop(columns=["n_Bitcoin"])

# Ordina i risultati per prior Bitcoin per maggiore chiarezza
df_130 = df_130.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])
df_260 = df_260.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])
df_390 = df_390.sort_values(by=["Year", "Prior Bitcoin"])

# Salva i file CSV con i CER Ex-Post annuali per ogni valore di n_Bitcoin
df_130.to_csv("ce_ex_post_gains_annual_n_130.csv", index=False)
df_260.to_csv("ce_ex_post_gains_annual_n_260.csv", index=False)
df_390.to_csv("ce_ex_post_gains_annual_n_390.csv", index=False)

```

Elaborazione dei grafici

```
# Trova tutti i file CSV con i dati dei CE dinamici settimanali

file_pattern = "ce_dynamic_*.csv" # Assicurarsi che i file siano nella
directory corretta

file_list = glob.glob(file_pattern)

# Funzione per convertire i nomi delle prior in valori numerici per
l'ordinamento nei grafici

def convert_prior_to_numeric(prior):

    if "minus" in prior:

        return -float(prior.replace("minus", ""))

    elif "plus" in prior:

        return float(prior.replace("plus", ""))

    elif "neutral" in prior:

        return 0.0

    return None # Restituisce None in caso di errore nel parsing

# Liste per raccogliere i dati dei CER Ex-Ante Gains e CER Ex-Post Gains finali
ce_ex_ante_gains_final = []
ce_ex_post_gains_final = []

# Itera su tutti i file CSV trovati
for file_name in file_list:

    # Legge il file contenente i CER dinamici settimanali
    df = pd.read_csv(file_name)

    # Estrazione della prior e di n_Bitcoin dal nome del file
    prior = file_name.split("_")[-2] # Estrae la prior dal nome del file
    n_bitcoin = file_name.split("_")[-1].split(".")[0] # Estrae n_Bitcoin

    # Converti la prior in un valore numerico per l'ordinamento nei grafici
    prior_numeric = convert_prior_to_numeric(prior)
```

```

# Prendere il valore finale (ultima settimana disponibile) dei CER Ex-Ante e
CER Ex-Post Gains

ce_ex_ante_final = df["CER Ex-Ante Gain"].iloc[-1] # Ultimo valore del CER
Ex-Ante Gain

ce_ex_post_final = df["CER Ex-Post Gain"].iloc[-1] # Ultimo valore del CER
Ex-Post Gain

# Aggiungere i valori finali alle rispettive liste

ce_ex_ante_gains_final.append({"Prior Bitcoin": prior_numeric, "n_Bitcoin":
n_bitcoin, "CER Ex-Ante Gain Final": ce_ex_ante_final})

ce_ex_post_gains_final.append({"Prior Bitcoin": prior_numeric, "n_Bitcoin":
n_bitcoin, "CER Ex-Post Gain Final": ce_ex_post_final})

# Creazione di DataFrame dai dati raccolti

df_ce_ex_ante_final = pd.DataFrame(ce_ex_ante_gains_final)
df_ce_ex_post_final = pd.DataFrame(ce_ex_post_gains_final)

# Convertire n_Bitcoin in intero per garantire un ordinamento corretto

df_ce_ex_ante_final["n_Bitcoin"] = df_ce_ex_ante_final["n_Bitcoin"].astype(int)
df_ce_ex_post_final["n_Bitcoin"] = df_ce_ex_post_final["n_Bitcoin"].astype(int)

# Creazione dei grafici per ogni valore di n_Bitcoin

for n in [130, 260, 390]:

    # Filtra i dati per n_Bitcoin e li ordina in base alla prior

    df_ante = df_ce_ex_ante_final[df_ce_ex_ante_final["n_Bitcoin"] ==
n].sort_values(by="Prior Bitcoin")

    df_post = df_ce_ex_post_final[df_ce_ex_post_final["n_Bitcoin"] ==
n].sort_values(by="Prior Bitcoin")

    # Grafico CE Ex-Ante Gain Finale (linea con punti)

    plt.figure(figsize=(10, 5))

    plt.plot(df_ante["Prior Bitcoin"], df_ante["CER Ex-Ante Gain Final"],
marker="o", linestyle="--", color="blue")

    plt.xlabel("Prior Bitcoin")

    plt.ylabel("CER Ex-Ante Gain Finale")

```

```

plt.title(f"CER Ex-Ante Gain Finale per Prior Bitcoin (n_prior={n})")
plt.grid(axis='y', linestyle="--", alpha=0.6)
plt.xticks(df_ante["Prior Bitcoin"]) # Imposta i valori esatti sulle x
plt.savefig(f"ce_ex_ante_gain_n_{n}.png", dpi=300, bbox_inches='tight') #
Salva l'immagine
plt.show()

# Grafico CE Ex-Post Gain Finale (linea con punti)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(df_post["Prior Bitcoin"], df_post["CER Ex-Post Gain Final"],
marker="o", linestyle="--", color="green")

plt.xlabel("Prior Bitcoin")
plt.ylabel("CER Ex-Post Gain Finale")
plt.title(f"CER Ex-Post Gain Finale per Prior Bitcoin (n_prior={n})")
plt.grid(axis='y', linestyle="--", alpha=0.6)
plt.xticks(df_post["Prior Bitcoin"]) # Imposta i valori esatti sulle x
plt.savefig(f"ce_ex_post_gain_n_{n}.png", dpi=300, bbox_inches='tight') #
Salva l'immagine
plt.show()

# Trova tutti i file CSV con i dati dei pesi settimanali
file_pattern = "final_results_*.csv"
file_list = glob.glob(file_pattern)
# Seleziona solo le prior desiderate per il grafico
selected_priors = ["minus2.5", "minus1.0", "neutral", "plus0.5", "plus1.0"]
filtered_files = [f for f in file_list if any(p in f for p in selected_priors)]
# Dizionario per memorizzare i dati dei pesi di Bitcoin per ogni valore di
n_Bitcoin
weights_data = {130: {}, 260: {}, 390: {}}
# Itera sui file filtrati per estrarre i dati dei pesi di Bitcoin
for file_name in filtered_files:
    df = pd.read_csv(file_name)

```

```

# Determina la prior e n_Bitcoin dal nome del file
prior = next(p for p in selected_priors if p in file_name)

n_bitcoin = int(file_name.split("_")[-1].split(".")[0]) # Estrae il valore
di n_bitcoin

# Convertire la prior in numero per l'ordinamento
prior_numeric = convert_prior_to_numeric(prior)

# Convertire la colonna Date in formato datetime per una corretta gestione
temporale

df["Date"] = pd.to_datetime(df["Date"])

# Salvare i dati nel dizionario per uso nei grafici
weights_data[n_bitcoin][prior_numeric] = df[["Date", "Weight Bitcoin"]]

# Creare i grafici per ogni valore di n_Bitcoin
for n in [130, 260, 390]:
    plt.figure(figsize=(12, 6))

    # Controlla se ci sono dati validi per il valore specifico di n_Bitcoin
    if not weights_data[n]:
        print(f"Nessun dato valido per n_Bitcoin = {n}")
        continue

    # Itera sulle diverse prior per generare le curve del grafico
    for prior, data in sorted(weights_data[n].items()):
        plt.plot(data["Date"], data["Weight Bitcoin"], linestyle="--",
label=f"Prior {prior}", alpha=0.8)

    # Etichette degli assi e titolo del grafico
    plt.xlabel("Data")
    plt.ylabel("Peso Bitcoin")
    plt.title(f"Andamento dei Pesi Bitcoin Settimana per Settimana
(n_prior={n})")

    # Aggiunta della legenda e griglia per migliorare la leggibilità
    plt.legend()
    plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.6)

```

```
# Salvataggio del grafico in formato PNG
plt.savefig(f"bitcoin_weights_n_{n}.png", dpi=300, bbox_inches='tight')

# Mostrare il grafico
plt.show()
```

Bibliografia e Sitografia

Articoli e libri accademici

Black, F., & Litterman, R. (1992). *Global portfolio optimization*. Financial Analysts Journal, 48(5), 28-43.

Brière, M., Oosterlinck, K., & Szafarz, A. (2015). *Virtual currency, tangible return: Portfolio diversification with Bitcoin*. Journal of Asset Management, 16(6), 365-373.

Jorion, P. (1986). *Bayes-Stein estimation for portfolio analysis*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21(3), 279-292.

Kandel, S., & Stambaugh, R. F. (1996). *On the predictability of stock returns: An asset-allocation perspective*. The Journal of Finance, 51(2), 385-424.

Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.

Pastor, L., & Stambaugh, R. F. (2000). *Comparing asset pricing models: An investment perspective*. Journal of Financial Economics, 56(3), 335-381.

Zellner, A. (1971). *An introduction to Bayesian inference in econometrics*. Wiley.

Fonti online e siti web

Aranzulla, S. (n.d.). *Bitcoin: come funziona*. Recuperato il 21 gennaio 2025, da <https://www.aranzulla.it/bitcoin-come-funziona-1019915.html>

Bitcoin.org. (n.d.). *Come funziona Bitcoin*. Recuperato il 20 gennaio 2025, da <https://bitcoin.org/it/come-funziona>

Bitpanda. (n.d.). *Che cos'è un nodo Bitcoin?*. Recuperato il 20 gennaio 2025, da <https://www.bitpanda.com/academy/it/lezioni/che-cose-un-nodo-bitcoin/>

Bitcoin.com. (n.d.). *How Bitcoin transactions work*. Recuperato il 19 gennaio 2025, da <https://www.bitcoin.com/it/get-started/how-bitcoin-transactions-work/>

Cointelegraph. (2023). *Grayscale wins SEC lawsuit*. Recuperato il 21 gennaio 2025, da <https://it.cointelegraph.com/news/grayscale-wins-sec-lawsuit>

Cointelegraph. (2014). *Two Papa John's pizzas ordered: A \$1 billion mistake?*. Recuperato il 24 gennaio 2025, da <https://it.cointelegraph.com/news/two-papa-john-s-pizzas-ordered-2014-1-b-mistake>

CNBC. (2017). *BlackRock CEO Larry Fink calls Bitcoin an index of money laundering*. Recuperato il 25 gennaio 2025, da <https://www.cnbc.com/2017/10/13/blackrock-ceo-larry-fink-calls-bitcoin-an-index-of-money-laundering.html>

Faveri, D. D. (2024.). *Il blocco genesi di Bitcoin*. Medium. Recuperato il 19 gennaio 2025, da https://medium.com/@daniele_de_faveri/il-blocco-genesi-di-bitcoin-03d68f50301c

Il Sole 24 Ore. (2023.). *Criptovalute: Bitcoin balza del 20% con la domanda per l'ETF di BlackRock*. Recuperato il 23 gennaio 2025, da <https://www.ilsole24ore.com/art/criptovalute-bitcoin-balza-20percento-la-domanda-blackrock-etf-AEc5ETrD>

Il Sole 24 Ore. (2024). *Per Bitcoin arriva l'halving: Dimezzate le emissioni, ma cosa significa?*. Recuperato il 22 gennaio 2025, da <https://pierangelosoldavini.blog.ilsole24ore.com/2024/04/19/per-bitcoin-arriva-lhalving-dimezzate-le-emissioni-ma-cosa-significa/>

Il Sole 24 Ore. (2022). *Ethereum Merge riuscito: La criptovaluta cambia pelle e diventa un bond high-yield*. Recuperato il 16 gennaio 2025, da <https://www.ilsole24ore.com/art/ethereum-merge-riuscito-criptovaluta-cambia-pelle-cedole-fino-10percento-diventa-bond-high-yield-AEbE5V0B>

Il Sole 24 Ore. (2022). *Perché si parla di Bitcoin come oro digitale*. Recuperato il 23 gennaio 2025, da <https://www.ilsole24ore.com/art/perche-si-parla-bitcoin-come-oro-digitale-AEKinKOB>

Il Sole 24 Ore. (2024). *Nuove nomine di Trump: Paul Atkins presidente Sec, l'astronauta imprenditore Isaacman capo della Nasa. I membri del governo valgono 9 miliardi*. Recuperato il 23 gennaio 2025, da <https://www.ilsole24ore.com/art/trump-nomina-l-astronauta-imprenditore-isacman-capo-nasa-membri-governo-valgono-9-mld-AGOQ8gYB>

Nasdaq. (2024). *BlackRock CEO Larry Fink says Bitcoin is an asset class that protects you*. Recuperato il 24 gennaio 2025, da <https://www.nasdaq.com/articles/blackrock-ceo-larry-fink-says-bitcoin-is-an-asset-class-that-protects-you>

New Liberty Standard. (2009). *2009 Exchange Rate*. Recuperato il 20 gennaio 2024, da <https://web.archive.org/web/20180627132512/http://newlibertystandard.wikifoundry.com/page/2009+Exchange+Rate>

Risparmio Tiscali. (2024). *Podcast Finanza Oscura: Il crack Mt. Gox e il primo shock nella storia di Bitcoin*. Recuperato il 21 gennaio 2025, da <https://risparmio.tiscali.it/podcast/finanza-oscura/puntata/podcast-finanza-oscura-crack-mtgox-primoshock-nella-storia-di-bitcoin/>

Wikipedia. (n.d.). *Bitcoin*. Recuperato il 26 gennaio 2025, da <https://it.wikipedia.org/wiki/Bitcoin>

Wikipedia. (n.d.). *Bayesian inference*. Recuperato il 28 gennaio 2025, da https://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_inference

XTB. (n.d.). *Storia di Bitcoin*. Recuperato il 19 gennaio 2025, da <https://www.xtb.com/it/formazione/storia-di-bitcoin>

Yahoo Finance. (n.d.). *Dati e analisi sul mercato finanziario*. Recuperato tra il 24 e il 30 gennaio 2024, da <https://finance.yahoo.com>